

Simulation d'un réseau de fractures par un modèle probabiliste hiérarchique

Bernard BOURGINE, Jean–Paul CHILÈS et Christian CASTAING

Bureau de Recherches Géologiques et Minières, BP 6009, 45060 Orléans Cedex 02, France

Résumé. Cet article présente une méthode de simulation de réseaux de fractures en 2 dimensions, basée sur un modèle probabiliste hiérarchique. Le modèle est conçu de façon à simuler des réseaux de fractures à deux familles, où l'on observe pour la première famille des alignements de fractures, et où les fractures de la deuxième famille viennent buter sur celles de la première famille. Après l'étude des caractéristiques géométriques d'un réseau réel, la méthode de simulation est exposée dans son principe, puis appliquée au cas réel. Les tests effectués montrent qu'elle permet d'obtenir de bons résultats. Une annexe regroupe les principaux résultats théoriques établis.

Abstract. This paper describes a simulation method for networks of fractures in 2 dimensions. This method is based upon a hierarchical probabilistic model. The model is designed to simulate networks of fractures with two sets of fractures, where alignments of fractures can be observed for the first set, and where fractures of the second set are ending against fractures of the first set. After the study of the geometrical characteristics of an actual network, the basic concepts of the model are shown, and then applied to the actual case. An appendix gives the main theoretical results.

Table des Matières

1 — INTRODUCTION	82
2 — ÉTUDE D'UN RÉSEAU DE FRACTURES OBSERVÉ À L'ÉCHELLE 1/225	82
3 — SIMULATION D'UN RÉSEAU DE FRACTURES PAR UN MODÈLE PROBABILISTE HIÉRARCHIQUE ..	86
4 — CONCLUSIONS	92
ANNEXE	93

1. INTRODUCTION

La compréhension de l'organisation d'un réseau de fractures est un point capital pour qui s'intéresse aux écoulements de fluide dans un milieu fracturé (réservoir pétrolier, forage d'eau, géothermie), à la stabilité de massifs rocheux (talus de routes, carrières, exploitations souterraines), ou à l'exploitation de pierres ornementales.

L'étude développée ici est divisée en 2 parties. La première s'attache à la caractérisation des paramètres géométriques d'un réseau de fractures. La seconde est consacrée à la description d'une méthode de simulation de ce même réseau. Ces 2 parties sont illustrées sur le cas particulier de réseaux de fractures subverticales traversant des formations gréseuses situées en Arabie Saoudite.

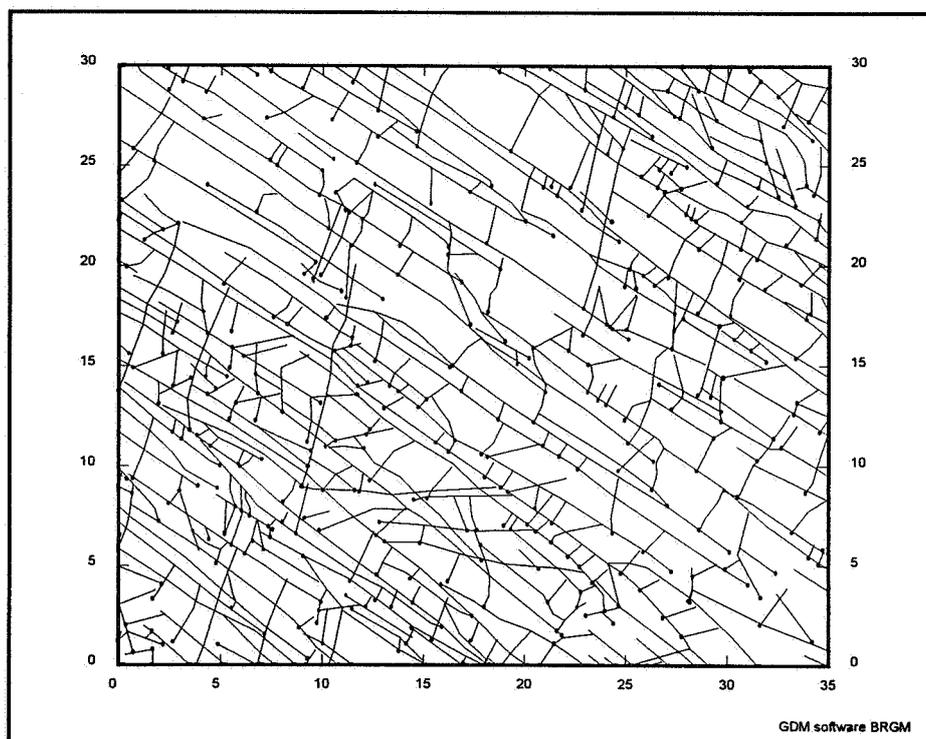


Figure 1 - Traces des fractures observées à l'échelle du 1/225

2. ETUDE D'UN RÉSEAU DE FRACTURES OBSERVÉ À L'ÉCHELLE 1/225

2.1 Description des données disponibles

Les données disponibles sont les traces de fractures subverticales traversant les grès du Saq (Arabie Saoudite). Ces fractures ont été observées à différentes échelles, depuis l'échelle du 1/1.000.000 (failles continentales, observées par satellite) jusqu'à l'échelle du terrain (joints et diaclases). Les échelles intermédiaires ont également été relevées: 1/250.000, 1/125.000, 1/60.000 (failles régionales et locales, observées par photos prises d'avion), 1/1.200, 1/500, 1/225, 1/100 (joints, observés par photos prises depuis un hélicoptère). Le choix de ces échelles a été motivé par une étude sur les effets d'échelle, que nous n'aborderons pas ici - le lecteur intéressé pourra se référer aux publications de (Ouillon, 1995) et (Castaing, 1995). Nous nous focaliserons sur l'étude d'une échelle précise, le 1/225, représentative de l'organisation des joints.

La figure 1 présente une visualisation des traces de fractures digitalisées à partir de l'interprétation d'une photo d'hélicoptère. Le champ d'étude est un rectangle de 35 x 30 m comprenant 453 traces de fractures. Les observations de terrain montrent que ces fractures sont subverticales et s'arrêtent sur de grands joints horizontaux. L'étude du réseau 3D des fractures se ramène donc essentiellement à l'étude 2D de leur traces.

Comme le montre la figure 1, ces fractures se répartissent en 2 familles principales : la première, notée F1, regroupe de longues fractures orientées de N100°E à N140°E. Elle compte 145 fractures, soit 32 % des fractures. La deuxième, F2, regroupe l'ensemble des autres fractures, et constitue en réalité la réunion de 2 sous familles orientées à N20°E et à N80°E. Elle comprend 308 fractures, soit 68 % des fractures. Beaucoup de fractures de la famille F2 sont des fractures courtes formant un "pont" entre 2 fractures de la famille F1. Un nombre limité de fractures de F2 traversent plusieurs fractures de l'autre famille. Enfin, la plupart des terminaisons de fractures se font contre une autre fracture.

Les traitements statistiques et géostatistiques effectués sur ces fractures sont réalisés famille par famille. Ils portent sur les longueurs des fractures, les distances interfracturales, les densités de fractures, les terminaisons et les intersections de fractures.

2.2 Longueurs des fractures.

Pour les fractures recoupées par les limites du rectangle d'étude, seule la partie intérieure au rectangle est prise en compte. Les longueurs résultantes sont donc biaisées par rapport aux longueurs vraies. Il est possible de corriger l'histogramme expérimental en tenant compte de ce biais. Ceci n'a cependant pas été effectué ici, le but n'étant pas, au moins dans un premier temps, de remonter à la loi vraie des longueurs.

La figure 2 montre des histogrammes d'allure plutôt lognormale (la distribution théorique représentée n'est pas un ajustement, mais la distribution de même moyenne et écart-type que les données expérimentales). La famille F1 est la plus longue avec une moyenne de 6,9 m et un écart-type de 7 m. La famille F2 a une longueur moyenne de 1,85 m pour un écart-type de 1,5 m.

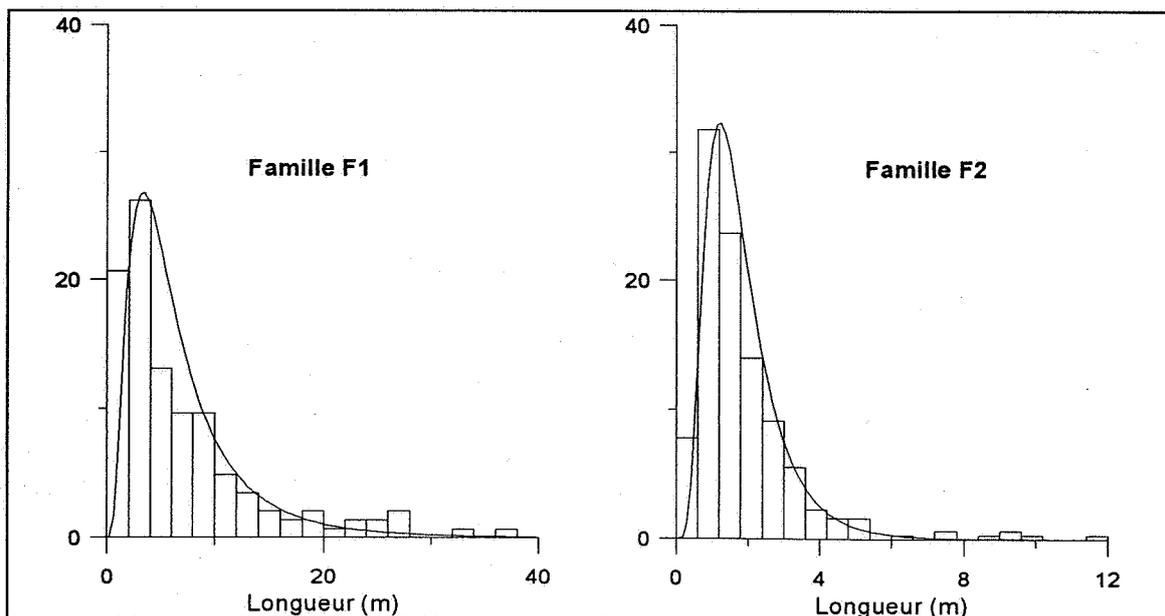


Figure 2 - Longueurs des fractures
Distribution expérimentale et loi lognormale de même moyenne et écart-type

2.3 Distances interfracturales.

La distance interfracturale est la distance qui sépare deux intersections successives de fractures le long d'une ligne de mesure (figure 3). Il est conseillé de choisir la ligne de mesure perpendiculaire à la direction moyenne de la famille considérée. On peut utiliser plusieurs lignes de mesure parallèles pour obtenir plus de valeurs de distances interfracturales, mais il ne sert à rien de prendre des lignes très rapprochées, car les données sont alors redondantes.

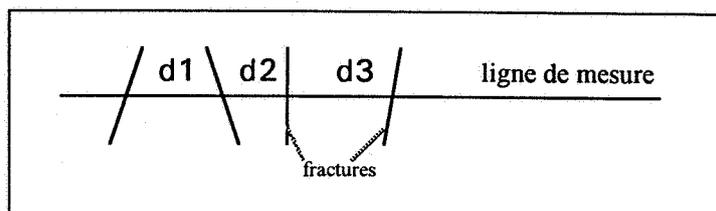


Figure 3: Définition de la distance interfracturale

La figure 4 donne les histogrammes des distances interfracturales des 2 familles F1 et F2. Ces deux histogrammes présentent une allure de loi gamma. La distance interfracturale moyenne de la famille F1 est $m = 1,02$ m pour un écart-type $\sigma = 0,65$ m, soit un coefficient $\sigma/m = 0,64$. Pour la famille F2 la moyenne est de $2,16$ m, l'écart type de $1,52$ m et le rapport σ/m de $0,70$.

Pour chacune des deux familles, les distances successives d_1, d_2, \dots peuvent être considérées comme non corrélées, ainsi qu'il ressort du calcul du variogramme de la suite des d_i .

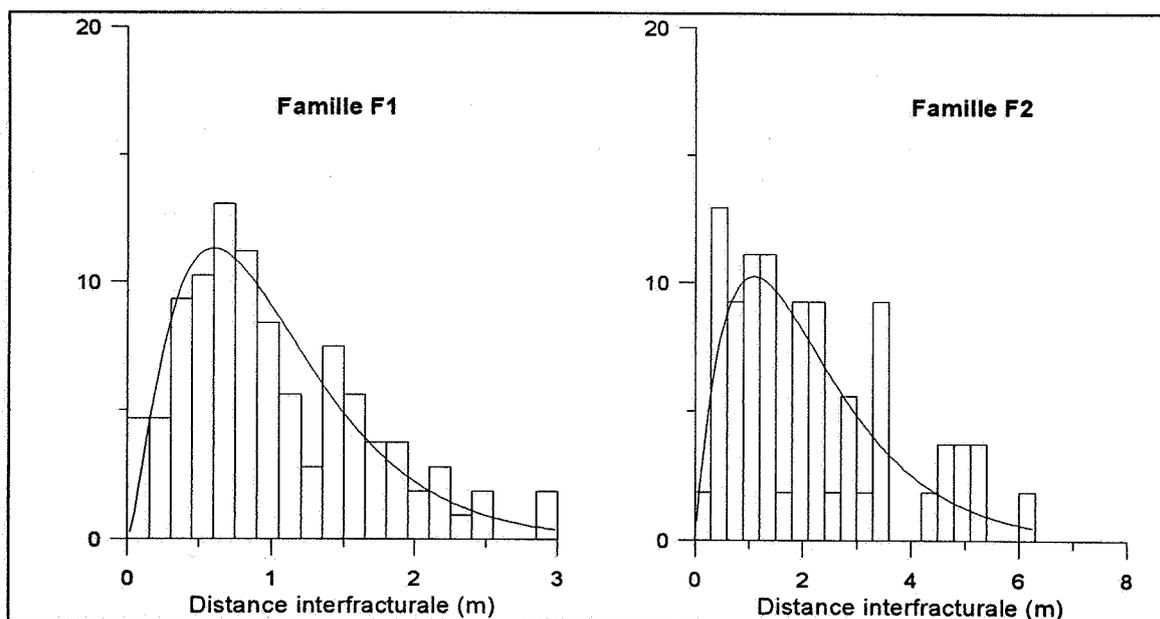


Figure 4 - Distances interfracturales.
Distribution expérimentale et lois gamma de même moyenne et écart-type

2.4 Densités de fractures.

La densité considérée ici est la densité surfacique. Elle est obtenue en divisant le domaine d'étude en cellules carrées puis en calculant pour chaque cellule la longueur cumulée des tronçons de fracture contenus dans la cellule. Cette longueur cumulée est ensuite divisée par la surface de la cellule. Le calcul est effectué séparément pour chaque famille. Une fois connue la densité à l'intérieur de chaque cellule, on peut calculer le variogramme de ces densités de façon à vérifier s'il existe une régionalisation des densités, en particulier dans la direction perpendiculaire à la fracture.

Dans notre cas, aucune structure n'apparaît dans la direction perpendiculaire aux fractures. Pour la famille F1, dans la direction parallèle aux fractures, on observe une portée de l'ordre de 5 à 7 m. Cette portée est liée à la longueur moyenne des fractures (6,9 m).

2.5 Terminaisons et intersections de fractures.

Les calculs effectués précédemment considèrent les familles de fractures indépendamment les unes des autres, sans tenir compte de leurs relations. Mais les circulations de fluide dans les fractures sont bien évidemment liées aux connexions des fractures. Nous allons maintenant aborder cet aspect.

Soit une fracture A : nous définissons le nombre de connexions de A comme le nombre total de contacts entre A et d'autres fractures du réseau. Les connexions sont ici classées en 2 catégories : les terminaisons des extrémités de A contre une autre fracture X (il y a connexion quand A vient buter contre X; dans le cas contraire A se termine dans la roche), et les "intersections" : il y a connexion quand A recoupe une fracture X ou quand X vient buter sur A.

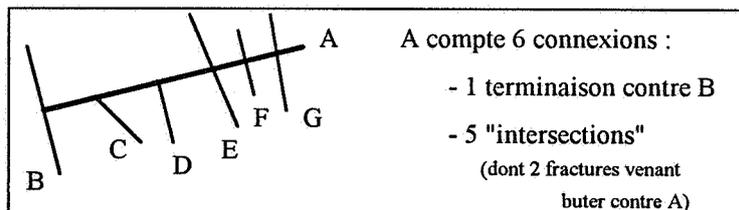


Figure 5: Connexions, terminaisons et intersections de fractures

Les nombres de terminaisons, intersections et connexions (intersections + terminaisons) du réseau de fractures sont reportés tableaux 1 et 2. En pratique, la détermination du nombre de terminaisons contre une fracture nécessite la prise en compte d'une tolérance de calcul (choisie ici égale à 0,175 m). En effet, les traces de fractures sont dessinées puis digitalisées à partir de photos. L'erreur associée à ce processus fait qu'une fracture qui se termine contre une autre peut après digitalisation la croiser légèrement ou se terminer juste avant. Si son extrémité se situe à moins d'une certaine distance (appelée tolérance) de la fracture, on considérera toutefois qu'elle vient buter contre elle.

Tableau 1 - Fréquence des différents types de terminaisons de fractures du réseau réel

Famille	Nombre de terminaisons contre une fracture		
	0	1	2
F1	26 %	50 %	24 %
F2	2 %	27 %	71 %
Total F1 + F2	10 %	34 %	56 %

Tableau 2 - Distribution des intersections et des connexions entre fractures du réseau réel

Paramètre	Nom de la famille	
	F1	F2
Intersections : nb moyen par fracture	1,11	0,56
Terminaisons : nb moyen par fracture	0,99	1,68
Connexions : nb moyen par fracture	2,10	2,24

En ce qui concerne les terminaisons, le tableau 2 montre que, pour la famille F1, 50 % des terminaisons se font contre une autre fracture ($50\% = 100 \times 0,99/2$). Ce pourcentage monte à 84 % pour la famille F2. Le tableau 1 traduit que les deux terminaisons d'une fracture se font indépendamment dans la roche ou en butée contre une autre fracture¹. Le tableau 2 montre par ailleurs que les fractures de la famille F1 intersectent en moyenne deux fois plus de fractures que celles de la famille F2, ce qui n'est pas surprenant puisqu'elles sont plus longues. Ainsi, les connexions se distribuent de façon relativement équilibrée entre intersections et terminaisons pour F1, alors que pour F2, la majorité des connexions se fait par des terminaisons, avec en particulier un grand nombre de petites fractures reliant deux fractures de F1 proches.

On peut montrer également que les terminaisons comme les intersections se font presque toujours entre F1 et F2 (dans plus de 90 %). Rares sont les terminaisons ou les intersections F1-F1 ou F2-F2.

3. SIMULATION D'UN RÉSEAU DE FRACTURES PAR UN MODÈLE PROBABILISTE HIÉRARCHIQUE

3.1 Description de la méthode de simulation

L'idée est de proposer une méthode de simulation qui permettrait, à partir de relevés fragmentaires de la fracturation et d'hypothèses simples sur la distribution des paramètres géométriques, de construire une simulation de l'ensemble des fractures. Cette simulation fournirait la géométrie de départ pour des calculs hydrodynamiques par exemple. On souhaite donc que le réseau simulé ait les mêmes "réponses" géométrique et hydraulique que le réseau réel.

L'organisation des réseaux de fractures rencontrés dans la nature étant très variée, de nombreux modèles ont été proposés. Les principaux modèles de base pour des fractures de longueur finie, dans leur version 2D qui nous intéresse ici, sont les suivants :

1. les segments aléatoires : C'est la transposition 2D du modèle des disques aléatoires développé par (Baecher et al., 1977). Les traces constituent un ensemble booléen de segments de longueur et d'orientation fixes ou aléatoires, implantés indépendamment les uns des autres aux points d'un processus de Poisson 2D. Ce modèle peut être généralisé à une régionalisation de la densité de fracturation ou à des salves de segments ou de disques et a été utilisé à 3D pour des massifs granitiques (Massoud, 1987). Les fractures ne viennent pas buter l'une contre l'autre.
2. le modèle de Veneziano (1978) : Les fractures sont portées par des droites poissonniennes. Chaque droite est subdivisée indépendamment des autres en segments délimités par les points d'un processus de Poisson. Chaque segment est considéré, indépendamment des autres, comme

¹En effet, si les 2 terminaisons sont indépendantes l'une de l'autre, et si p est probabilité d'avoir une terminaison contre une fracture, la probabilité d'avoir 2 terminaisons contre une fracture est $P_2 = p^2$, la probabilité d'avoir une terminaison contre une fracture et une autre dans la roche est $P_1 = 2p(1-p)$, et la probabilité d'avoir 2 terminaisons dans la roche est $P_0 = (1-p)^2$. Pour F2 par exemple, avec $p = 1,68 / 2 = 0,84$, on doit obtenir théoriquement $P_2 = 0,71$; $P_1 = 0,27$; $P_0 = 0,02$. C'est exactement ce qu'on observe expérimentalement (tableau 1).

un tronçon de fracture avec une probabilité ω , ou comme de la roche intacte avec la probabilité $1-\omega$. Le réseau présente donc des alignements de fractures. Les fractures peuvent s'intersecter, mais ne peuvent pas buter l'une contre l'autre.

3. le modèle de (Dershowitz, 1984) : Les fractures sont ici aussi portées par des droites poissonniennes. Chaque droite est partitionnée par les segments délimités par les intersections avec les autres droites poissonniennes (et non par un processus de Poisson indépendant). Chaque segment est considéré comme dans le modèle précédent comme un tronçon de fracture ou comme de la roche intacte. Le réseau présente donc des alignements de fractures, dont certaines viennent buter sur d'autres fractures ou les traverser.

En pratique, les directions des fractures ne sont pas purement aléatoires et on superpose plusieurs familles directionnelles dont la direction est bien définie ou variable autour d'une direction moyenne.

La limitation principale des modèles de Veneziano et de Dershowitz est qu'ils laissent peu de latitude pour caler la loi des longueurs des traces et la loi des intervalles entre deux fractures alignées successives. Celles-ci sont toutes deux des lois exponentielles. Par conséquent leur moyenne et leur écart-type sont égaux, circonstance qui se rencontre parfois mais pas toujours.

Dans le cas qui nous occupe, on observe des alignements de fractures, surtout pour la famille F1. Les données font ressortir un caractère hiérarchique assez net, où les fractures de la famille F2 constituent fréquemment des "ponts" entre fractures de la famille F1. Par conséquent la famille F1 relève plutôt du modèle de Veneziano et la famille F2 du modèle de Dershowitz. Le modèle proposé ci-après est donc un modèle hiérarchique dans son essence même, la famille F1 étant définie en premier, et la famille F2 étant ensuite définie conditionnellement à la famille F1. Il combine deux modèles de base, généralisés de façon à pouvoir rendre compte des distributions autres que la loi exponentielle. En revanche, l'objectif n'étant pas de représenter tous les détails des caractéristiques du réseau réel, mais de reproduire correctement les traits qui ont un impact sur les calculs d'écoulement dans le réseau des fractures, nous ferons une simplification : les fractures de la famille F1 seront toutes orientées N120 et celles de la famille F2 N20.

Pour la première famille le modèle présenté repose sur les hypothèses suivantes :

1. les traces de fracture sont portées par des droites parallèles dont les espacements sont des variables aléatoires de même loi F_0 ;
2. les longueurs de ces traces sont des variables aléatoires de même loi F_1 ;
3. sur une même droite, les longueurs des intervalles séparant deux traces successives sont des variables aléatoires de même loi F_2 ;
4. toutes ces variables aléatoires sont indépendantes.

Les distances interfracturales, définies sur des droites perpendiculaires au réseau des droites portant les traces de fractures, sont des variables aléatoires dont la loi F_3 découle de F_0 , F_1 et F_2 . La densité de fracturation moyenne découle aussi de ces mêmes lois.

Pour la seconde famille, les hypothèses sont les suivantes :

1. les traces de fracture sont portées par des droites parallèles dont les espacements sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi F'_0 ;
2. sur chaque droite, les intersections avec les droites de la première famille délimitent des segments partitionnant la droite ;
3. chaque segment est considéré, indépendamment des autres, comme un tronçon de fracture avec une probabilité ω , ou comme de la roche intacte avec la probabilité $1-\omega$. La probabilité ω

peut être constante ou fonction de la longueur du segment, pour permettre par exemple de retenir plus fréquemment les segments les plus courts, qui établissent des ponts entre deux fractures proches appartenant à la première famille.

La loi F'_1 des longueurs des traces, la loi F'_2 des intervalles entre fractures successives, et la loi F'_3 des distances interfracturales de cette seconde famille, ainsi que sa densité de fracturation, dépendent des lois F_0, F_1, F_2, F'_0 et de ϖ . Il en va de même de la loi des types de terminaison des fractures.

En pratique nous prendrons pour F_0, F_1, F_2 et F'_0 des lois gamma (qui contiennent comme cas particulier la loi exponentielle), car cette loi présente de bonnes propriétés. Les calculs développés en annexe montrent que les divers paramètres du modèle peuvent être raisonnablement déterminés à partir des données expérimentales (à condition bien sûr que le modèle soit adapté au phénomène étudié). On peut reproduire parfaitement les moyennes et variances des longueurs des traces et des distances interfracturales de la première famille. On dispose d'un peu moins de degrés de liberté pour la seconde famille : on n'est pas maître de la variance des distances interfracturales ; ceci est peu pénalisant dans la pratique.

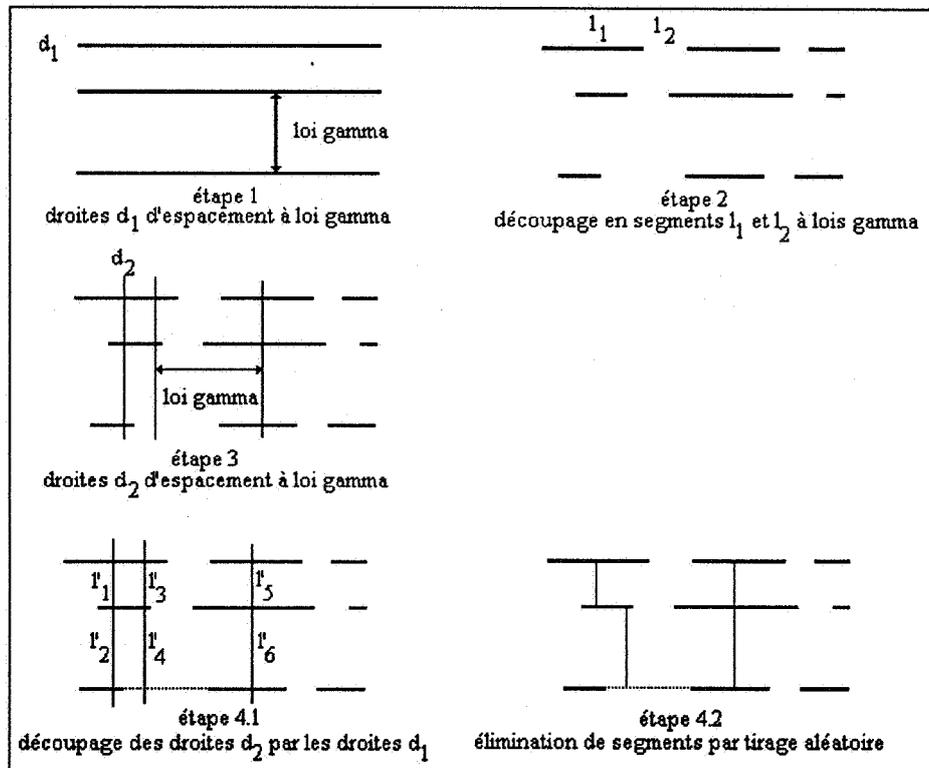


Figure 6 - Principe de la méthode de simulation

Une fois les paramètres du modèle choisis, le processus de simulation est le suivant (figure 6) :

1. étape 1 - famille 1 : génération de droites d_1 d'écartement à loi gamma
2. étape 2 - famille 1 : découpage de chaque droite d_1 en tronçons successifs l_1 et l_2 de longueurs à lois gamma différentes. Seuls les tronçons l_1 sont gardés et considérés comme des traces de fractures. Les tronçons l_2 sont abandonnés
3. étape 3 - famille 2 : génération de droites d_2 d'écartement à loi gamma
4. étape 4.1 - famille 2 : les droites d_1 découpent les droites d_2 en segments de longueur l'_i

5. étape 4.2 - famille 2 : chaque segment l_i est considéré comme un tronçon de fracture avec la probabilité $\varpi(l_i) = \varpi_0 \cdot e^{-al_i}$ (le cas d'une probabilité constante correspond à $a=0$). Dans ce cas un nombre important de fractures de F2 viennent buter contre F1. Une variante consiste à découper d_2 par les seuls segments conservés l_1 . Alors tous les segments de F2 se terminent à leurs 2 extrémités contre des segments de F1.

3.2 Identification des paramètres de la simulation sur un cas test

On note:

m_1 et σ_1 la moyenne et l'écart-type des longueurs des traces de la famille F1

m_2 et σ_2 la moyenne et l'écart-type des longueurs des intervalles entre traces de F1

m_3 et σ_3 la moyenne et l'écart-type des distances interfracturales de la famille F1

m_0 et σ_0 la moyenne et l'écart-type de l'espacement des droites portant les fractures F1

m'_1 et σ'_1 la moyenne et l'écart-type des longueurs des traces de la famille F2

m'_3 et σ'_3 la moyenne et l'écart-type des distances interfracturales de la famille F2

m'_0 et σ'_0 la moyenne et l'écart-type de l'espacement des droites portant les fractures F2

Les paramètres d'entrée de la simulation sont calés à partir des données expérimentales obtenues sur le rectangle test de 35 x 30 m. Sur ce rectangle, les paramètres mesurés sont les suivants :

F1: Longueur des traces : $m_1 = 6,90$; $\sigma_1 = 7,0$ Distance interfracturale : $m_3 = 1,02$; $\sigma_3 = 0,65$

F2: Longueur des traces : $m'_1 = 1,85$; $\sigma'_1 = 1,5$ Distance interfracturale : $m'_3 = 2,16$; $\sigma'_3 = 1,52$

Les paramètres du modèle sont alors définis de la façon suivante (voir formules en annexe) :

Famille F1

La loi F_1 des longueurs des traces est presque exponentielle car la moyenne et l'écart-type expérimentaux sont presque égaux : $m_1 = 6,9$; $\sigma_1 = 7,0$. Cela correspond à une loi gamma de paramètres $\alpha_1 = 0,97$ et $b_1 = 0,14$. On note que l'histogramme expérimental ne correspond pas exactement à une loi exponentielle, car il comporte trop peu de courtes fractures. Ceci peut être dû à un biais dans le relevé des fractures. Si ce n'était pas le cas, on pourrait employer une autre loi. On ne l'a pas fait car les fractures courtes de la famille F1 ont peu d'impact sur la connectivité du réseau.

En ce qui concerne les intervalles entre fractures alignées, on évalue leur longueur moyenne à partir de la proportion de terminaisons contre une autre fracture, calculée pour la famille F2.

Cette proportion p vaut en théorie $\frac{m_1}{m_1 + m_2}$. De façon expérimentale, on obtient une valeur

$p = 0,84$, ce qui conduit ainsi à $m_2 \cong 0,19 \cdot m_1$, ordre de grandeur qui est observé en pratique. La loi est choisie arbitrairement du même type que celle des longueurs des traces, c'est-à-dire exponentielle. Autrement dit on prend $m_2 = \sigma_2 = 1,31$, soit $\alpha_2 = 1$ et $b_2 = 0,76$.

Les paramètres de la loi F_0 des espacements des droites sont alors déterminés de façon à reproduire la moyenne et la variance des distances interfracturales, conformément aux résultats présentés en annexe. On prend ainsi pour F_0 une loi gamma de paramètres $\alpha_0 = 4,41$ et $b_0 = 3,98$ (soit $m_0 = 0,86$ et $\sigma_0 = 0,46$).

Famille F2

On peut avoir l'impression sur la figure 1 que les ponts établis par la famille F2 entre deux fractures voisines de la famille F1 sont plus nombreux lorsque ces deux fractures sont très proches. Si tel était le cas, le paramètre a qui intervient dans l'expression de ϖ devrait être positif (voir formules en annexe). En fait, les formules qui fournissent a et ϖ en fonction de α_0 et de la variance relative des traces de la famille F2, donnent pour a une valeur négative (-0,12) mais non significativement différente de 0, et nous avons retenu $a = 0$, ainsi que $\varpi = 0,515$.

En ce qui concerne la loi F'_0 des écartements, on choisit une loi gamma de paramètre α'_0 assez élevé ($\alpha'_0 = 4$) de façon à obtenir un écartement relativement régulier. Le paramètre b'_0 est pris de façon à obtenir $m'_0 = \varpi / \mu' = 0,95$. Dans le calcul de m'_0 , la valeur de la densité surfacique en mesure μ' est calculée non pas par $1/m'_3$ comme indiqué en annexe, mais par le rapport entre la longueur cumulée de fractures et la surface du rectangle d'étude: $\mu' = (1,85 \times 308) / (35 \times 30)$. Cette façon de calculer μ' est en effet plus exacte car elle ne fait pas intervenir m'_3 , paramètre difficile à évaluer de façon précise à partir des données expérimentales.

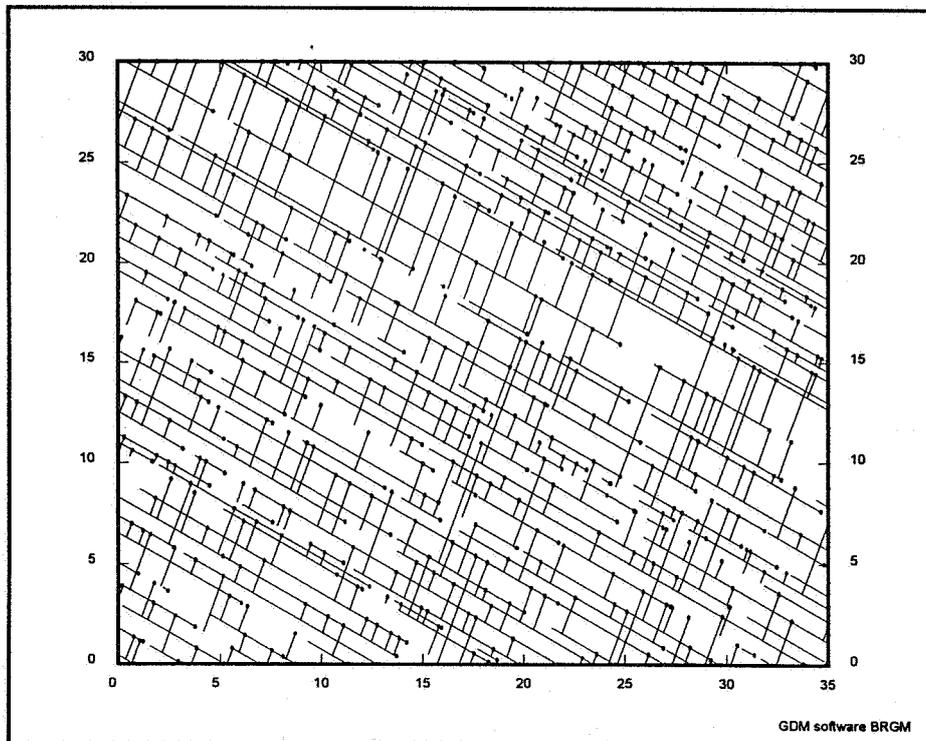


Figure 7 - Réseau de fractures simulé

3.3 Contrôle des résultats de la simulation sur le plan géométrique

Le champ simulé est représenté figure 7. L'aspect visuel paraît a priori satisfaisant. Le calcul des principaux paramètres statistiques montre que la simulation donne dans l'ensemble de bons résultats (tableau 3). La seule différence significative réside dans les distances interfracturales de la famille F2 qui sont trop faibles dans le cas simulé. La valeur de σ/m reste cependant comparable.

Tableau 3 - Principaux paramètres des réseaux réel et simulé

Paramètre	Longueur des fractures (m)				Distance interfracturale (m)			
	Famille F1		Famille F2		Famille F1		Famille F2	
	réseau réel	réseau simulé	réseau réel	réseau simulé	réseau réel	réseau simulé	réseau réel	réseau simulé
moyenne m	6,9	5,7	1,85	1,62	1,02	1,04	2,16	1,40
écart-type σ	7,0	5,1	1,50	1,36	0,65	0,58	1,52	1,06
σ/m	1,0	0,9	0,81	0,84	0,64	0,56	0,70	0,76

La comparaison des histogrammes confirme les bons résultats globaux. Tous les histogrammes simulés ont des formes comparables aux histogrammes des données réelles. La seule différence concerne les longueurs de fractures de la famille F1 : les valeurs simulées ont plutôt un histogramme d'allure exponentielle (conforme, par ailleurs, à ce que le modèle devait fournir), alors que les données expérimentales ont un histogramme plutôt lognormal.

Au niveau des terminaisons et intersections de fractures, le réseau simulé permet d'obtenir des résultats également très satisfaisants (tableaux 4 et 5). Le réseau simulé compte légèrement plus de connexions que le réseau réel. La famille F2 est très bien reproduite au niveau des terminaisons. Par contre la famille F1 compte trop d'intersections et pas assez de terminaisons contre d'autres fractures².

Tableau 4 - Fréquence des différents types de terminaisons de fractures du réseau simulé

Famille	Nombre de terminaisons contre une fracture		
	0	1	2
F1	47 %	45 %	8 %
F2	2 %	29 %	69 %
Total F1+F2	15 %	34 %	51 %

Tableau 5 - Distribution des intersections et des connexions entre fractures du réseau simulé

Paramètre	Nom de la famille	
	F1	F2
Intersections : Nb moyen par fracture	1,70	0,71
Terminaisons : Nb moyen par fracture	0,60	1,67
Connexions : Nb moyen par fracture	2,31	2,38

²En réalité, aucune fracture F1 ne vient buter exactement contre une fracture F2, dans la mesure où les fractures F2 ne sont pas simulées aux extrémités de F1. Le tableau 4 fournit des pourcentages non nuls, pour les terminaisons de F1 contre une fracture à 1 ou 2 de ses extrémités, en raison de la tolérance de calcul évoquée à la section 2.5. Cette tolérance a été fixée à la même valeur que dans le cas réel (soit 0,175) pour garder les mêmes conditions de calcul. En raison de ce paramètre de tolérance, la comparaison des nombres de terminaisons et d'intersections n'a probablement pas grand sens. Mieux vaut comparer le nombre de connexions total.

ANNEXE

Nous donnons ici quelques compléments permettant d'identifier les paramètres du réseau de fractures engendré par le modèle décrit Section 3.1 à partir des statistiques expérimentales. On suppose que le modèle est compatible avec les données, et que les statistiques ne sont pas biaisées.

A1. Caractéristiques de la première famille

Nous noterons comme précédemment :

- F_0 la loi des espacements des droites qui portent les fractures ;
- F_1 la loi des longueurs des traces ;
- F_2 la loi des intervalles entre deux traces alignées successives ;
- F_3 la loi des distances interfracturales ;
- λ la densité de fracturation en nombre (nombre moyen de fractures par unité de surface) ;
- μ la densité de fracturation en mesure (longueur cumulée des fractures par unité de surface).

A la loi F_i sont associées sa moyenne m_i et sa variance σ_i^2 .

Lorsque nous prendrons pour F_i une loi gamma, nous noterons α son paramètre de forme et b son paramètre d'échelle, et nous dirons qu'il s'agit d'une loi gamma (α, b) . Les paramètres α et b sont liés à la moyenne m et à la variance σ^2 par :

$$m = \frac{\alpha}{b} \quad \sigma^2 = \frac{\alpha}{b^2} \quad \text{et donc} \quad \frac{\sigma}{m} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

Choix des paramètres principaux m_1, m_3, λ et μ

Dans un premier temps, ne faisons aucune hypothèse sur le type de distribution des différentes lois et considérons simplement leurs moyennes. Prenons d'abord comme seules données de base les moyennes qui peuvent être estimées facilement (sous réserve bien sûr qu'on distingue bien toutes les fractures et que le domaine d'étude soit suffisamment grand) :

- la longueur moyenne des fractures m_1 ;
- la distance interfracturale moyenne m_3 ;
- la densité de fracturation en nombre λ ;
- la densité de fracturation en mesure μ .

Ces paramètres ne sont pas indépendants. La densité en nombre et la densité en mesure sont liées par la relation : $\mu = \lambda m_1$

Par ailleurs, si on prend m_1, m_3 et λ , ou bien m_1, m_3 et μ , comme paramètres principaux, ces trois paramètres ne sont pas indépendants dès lors que les fractures sont implantées indépendamment les unes des autres. Il en va encore de même si comme dans notre modèle elles sont implantées indépendamment d'une droite à l'autre sur des droites parallèles indépendantes. On doit avoir :

$$\lambda m_1 m_3 = 1 \quad \text{ou} \quad \mu m_3 = 1$$

Une démonstration intuitive est la suivante : prenons un point P d'une fracture, et considérons la droite D perpendiculaire à la fracture et passant par P . Du fait que les fractures sont

implantées indépendamment d'une droite à l'autre, la droite D recoupe d'autres fractures du réseau à une distance finie. Soient P_1 et P_2 les deux intersections les plus proches de P , situées de part et d'autre de P , et soient P'_1 et P'_2 les milieux des segments PP_1 et PP_2 . La distance $P'_1P'_2$ représente la zone d'influence du point P . Lorsque le point P parcourt toutes les fractures du réseau, les segments $P'_1P'_2$ recouvrent tout le plan sans se superposer. La valeur moyenne de $P'_1P'_2$ étant égale à la distance interfracturale moyenne m_3 et la longueur cumulée des fractures par surface unité étant μ , on a $\mu m_3 = 1$.

Choix des moyennes m_0 et m_2

Déterminer sur le terrain si deux fractures sont vraiment alignées n'est pas évident, si bien que la loi des intervalles entre traces est rarement connue directement. Nous définirons sa moyenne sous la forme :

$$m_2 = \frac{p}{1-p} m_1 \quad p \in [0, 1]$$

où $p = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$ représente la proportion occupée par les intervalles (et non pas par les fractures) et reste à déterminer (on verra une détermination possible à partir du type de terminaison des fractures de la deuxième famille).

La loi des distances entre les droites n'est pas non plus accessible expérimentalement, sauf si les droites sont visibles de façon évidente, ce qui est rarement le cas. Mais une fois p choisi, m_0 est déterminé. En effet la densité de fracturation en nombre est aussi par définition :

$$\lambda = \frac{1}{m_0(m_1 + m_2)}$$

$$\text{D'où : } m_0 = \frac{1}{\lambda(m_1 + m_2)} = \frac{1-p}{\lambda m_1} = (1-p) m_3$$

Noter que la relation $m_3 = \frac{m_0}{1-p}$ peut être obtenue directement. En effet la distance interfracturale est la somme de N espacements indépendants entre droites, où N suit une loi géométrique de paramètre p , donc de moyenne $\frac{1}{1-p}$.

Spécification plus complète des lois

En ce qui concerne les longueurs des traces et les intervalles, une fois les moyennes m_1 et m_2 de ces lois choisies, on peut prendre n'importe quelle loi calée expérimentalement. L'utilisation de lois gamma de même paramètre b simplifie la simulation, mais pas de façon décisive.

La loi des espacements des droites n'est pas accessible directement. Mais la loi des distances interfracturales ne dépend que de la loi des distances entre droites et de p : la loi de la distance interfracturale est la loi de la somme de N espacements indépendants entre droites, où N suit une loi géométrique de paramètre p , c'est-à-dire telle que $P\{N=n\} = (1-p)p^{n-1}$. Si on choisit pour la loi des espacements des droites une loi gamma (α_0, b_0), on n'obtient pas pour la loi des distances interfracturales une loi gamma (sauf si $\alpha_0 = 1$, auquel cas elle reste une loi exponentielle). En ce qui concerne les deux premiers moments, on obtient :

$$\frac{\sigma_3^2}{m_3^2} = p + \frac{1-p}{\alpha_0} \quad \Rightarrow \quad \alpha_0 = \frac{1-p}{s_3^2 - p} \quad \text{avec} \quad s_3^2 = \frac{\sigma_3^2}{m_3^2}$$

$$m_3 = \frac{\alpha_0}{(1-p)b_0} \quad \Rightarrow \quad b_0 = \frac{\alpha_0}{(1-p)m_3} = \alpha_0 m_0$$

A2. Caractéristiques de la seconde famille

Les mêmes notations, avec adjonction d'une apostrophe, sont utilisées pour les paramètres de la seconde famille : lois F'_0, \dots , moyennes m'_0, \dots , densités λ' et μ' . Les moyennes m'_0, m'_1, m'_2, m'_3 et les densités de fracturation en nombre λ' et en mesure μ' sont liées par des relations semblables à celles de la première famille. Si les lois F'_1, F'_2, F'_3 ne sont pas très simples, leurs moyennes peuvent être calculées, ainsi que les densités λ' et μ' et l'écart-type de la loi des longueurs des traces σ'_1 .

La seconde famille est supposée constituée de fractures situées sur des droites qui recoupent une première famille de droites à espacement gamma (α_0, b_0) . On note θ l'angle entre les 2 familles. Sur chaque droite de la nouvelle famille, les intersections avec la première famille définissent un processus de points espacés indépendamment les uns des autres selon une loi gamma $(\alpha_0, b_0 \sin\theta)$, qui conserve la même forme que la loi initiale mais dont la moyenne est divisée par $\sin\theta$. Nous poserons $b = b_0 \sin\theta$.

Chaque segment du processus est considéré comme une fracture ou une partie de fracture avec la probabilité $\varpi(x) = \varpi_0 e^{-ax}$ où x est la longueur du segment (le cas d'une probabilité constante correspond à $a = 0$). On montre que la proportion des segments qui sont retenus est $\varpi = \varpi_0 \left(\frac{b}{a+b}\right)^{\alpha_0}$ et que la loi de leurs longueurs reste une loi gamma, mais de paramètres $(\alpha_0, a+b)$. La loi des longueurs des fractures est alors celle d'une somme géométrique de lois gamma $(\alpha_0, a+b)$, la loi géométrique ayant pour paramètre ϖ . Comme on l'a vu pour les distances interfractionnelles de la première famille, ce n'est pas en général une loi gamma, mais ses premiers moments se mettent sous la forme :

$$m'_1 = \frac{\alpha_0}{(1-\varpi)(a+b)} \quad \frac{\sigma_1'^2}{m_1'^2} = \varpi + \frac{1-\varpi}{\alpha_0}$$

Noter que m'_1 doit être supérieur à α_0/b , qui est l'espacement moyen des droites de la première famille (au facteur $\sin\theta$ près).

Si les valeurs de m'_1 et $\sigma_1'^2$ sont connues, on en déduit :

$$\varpi = \frac{\alpha_0 s_1'^2 - 1}{\alpha_0 - 1} \quad \text{avec} \quad s_1'^2 = \frac{\sigma_1'^2}{m_1'^2}$$

$$a = \frac{\alpha_0}{m'_1(1-\varpi)} - b = \frac{\alpha_0 - 1}{m'_1(1-s_1'^2)} - b$$

$$\varpi_0 = \frac{\varpi}{\left(\frac{b}{a+b}\right)^{\alpha_0}}$$

On notera toutefois qu'une telle détermination n'est pas possible si $\alpha_0 = 1$, et n'est sans doute pas très stable si α_0 est voisin de 1. La dernière relation fournie en annexe permet toutefois de calculer ϖ , d'où on peut tirer a . Les relations donnant m'_0 et m'_2 permettent également de valider le choix de ϖ et de a .

Les proportions ϖ' et p' occupées par les segments retenus et par les intervalles sur chaque droite sont :

$$\varpi' = \varpi \frac{b}{a+b} \quad p' = 1 - \varpi'$$

L'espacement moyen m'_0 des droites de la nouvelle famille est lié aux densités de fracturation λ' en nombre et μ' en mesure par :

$$\mu' = \frac{1-p'}{m'_0} = \frac{\varpi}{m'_0} \frac{b}{a+b} = \frac{\varpi}{m'_0} \left(\frac{a}{a+b} \right)^{\alpha_0+1}$$

$$\lambda' = \frac{\mu'}{m'_1}$$

La longueur moyenne des intervalles est : $m'_2 = \frac{p'm'_1}{1-p'} = \frac{a+b-\varpi b}{\varpi b} m'_1$

La distance interfracturale moyenne est :

$$m'_3 = \frac{1}{\lambda' m'_1} = \frac{1}{\mu'}$$

Le paramètre le mieux connu est μ' , et donc λ' dans la mesure où m'_1 est aussi supposée connue. On en déduit alors :

$$m'_0 = \frac{\varpi_0}{\mu'} \left(\frac{b}{a+b} \right)^{\alpha_0+1}$$

En ce qui concerne la connexion avec la première famille, chaque fracture de la seconde famille se termine à chaque extrémité en butée sur une droite de la première famille et intersecte en moyenne $\frac{\varpi}{1-\varpi}$ droites. La proportion de ces droites occupée par des fractures est

$\frac{m_1}{m_1+m_2} = 1-p$. Par conséquent les terminaisons des fractures de la seconde famille se font en

butée contre une fracture de la première famille dans la proportion $1-p$, et ces fractures intersectent en moyenne $\frac{\varpi}{1-\varpi}(1-p)$ fractures de la première famille. Ces résultats peuvent être utilisés pour déterminer p , et donc m_2 .