

# Estimation des perméabilités d'un barrage

Etienne CASTELIER<sup>(1)</sup>, Chantal de FOUQUET<sup>(1)</sup> et Claude BRUNET<sup>(2)</sup>

(1) Ecole des Mines de Paris, Centre de Géostatistique, 35 rue Saint-Honoré, 77305 Fontainebleau

(2) EDF, DTG, 37 rue Diderot, BP 41, 38040 Grenoble Cedex

**Résumé.** La méthode présentée dans cette communication permet le calcul du champ de perméabilité du noyau d'un barrage en terre à partir des seules mesures, dans le temps, de la pression interstitielle par plusieurs capteurs. Cette méthode est ici illustrée par deux exemples.

**Abstract.** The method presented in this paper makes it possible to calculate the permeability field in the core of an earth dam using only the interstitial pressure measured at different times by several sensors. Two examples are used to illustrate this method.

---

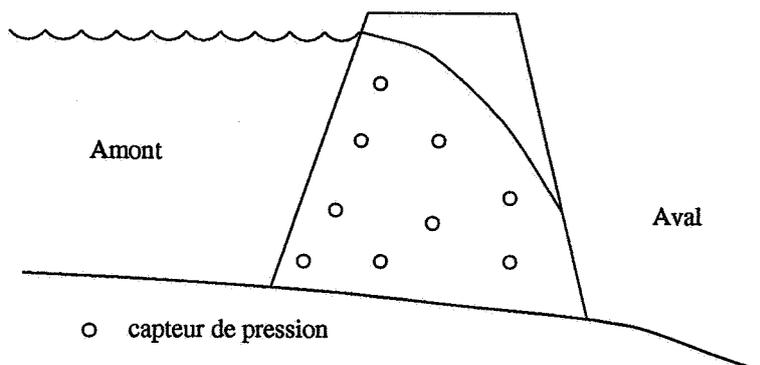
## Table des Matières

1. RÉSOLUTION MATHÉMATIQUE .....	16
1.1. Mise en équation .....	16
1.2. Analyse mathématique du problème inverse .....	16
1.3. Indétermination .....	17
1.4. Surdétermination .....	17
2. CALCULS NUMÉRIQUES .....	18
2.1. Interpolation par krigeage .....	18
2.2. Régularisation par effet de pépite .....	18
3. EXEMPLES .....	18
3.1. Exemple analytique .....	19
3.2. Exemple numérique .....	19
CONCLUSION .....	20

# 1 Résolution mathématique

## 1.1 Mise en équation

La perméabilité est supposée scalaire et invariante dans le temps. L'écoulement est considéré dans une section verticale.



L'écoulement dans le barrage est modélisé en nappe libre avec les hypothèses simplificatrices usuelles (fluide et milieu poreux incompressibles). Dans le milieu saturé délimité par une **surface libre**, l'écoulement est régi par l'équation de diffusivité [Schneebeli 66, de Marsily 86]:

$$\operatorname{div}(k(\mathbf{x})\operatorname{grad}(h(\mathbf{x}, t))) = 0 \quad (1)$$

où  $\mathbf{x}$  désigne un point de coordonnées  $(x, z)$ ,  $k(\mathbf{x})$  la perméabilité ponctuelle et  $h(\mathbf{x}, t)$  la charge au point  $\mathbf{x}$  et au temps  $t$ .

Les variations de la retenue amont entraînent un déplacement de la surface libre. A l'instant  $t$ , la surface libre admet l'équation :

$$h(\mathbf{x}, t) = h(x, z, t) = z$$

La détermination du champ de perméabilité  $k(\mathbf{x})$  à partir des champs de charge  $h(\mathbf{x}, t)$  en différentes dates  $t$  est un **Problème inverse**. De réputation, ce problème est mathématiquement instable et n'admet pas toujours une solution unique.

## 1.2 Analyse mathématique du problème inverse

Supposons pour une date  $t_1$  la charge  $h(\mathbf{x}, t_1)$  connue en tout point, ce qui permet de calculer son gradient. La perméabilité étant scalaire, les **lignes de courant** sont perpendiculaires aux lignes équipotentielles et s'obtiennent en suivant les gradients. Deux lignes de courant voisines définissent un **tube de courant**.

L'équation (1) traduit la conservation de masse qu'on peut exprimer sur des tubes de courant suffisamment fins. D'après la **Loi de Darcy**, le flux d'eau  $\Phi(\mathbf{x}, t_1)$  qui traverse la section  $s(\mathbf{x})$  d'un tube de courant au point  $\mathbf{x}$  s'écrit :

$$\Phi(\mathbf{x}, t_1) = k(\mathbf{x}) \|\operatorname{grad}(h(\mathbf{x}, t_1))\| s(\mathbf{x})$$

Ce flux se conserve en tout point du tube de courant :  $\Phi(\mathbf{x}, t_1) = C$  est constant sur le tube ; la perméabilité  $k(\mathbf{x})$  aux points  $\mathbf{x}$  d'une même ligne de courant vérifie donc :

$$k(\mathbf{x}) = \frac{C}{\|\text{grad}(h(\mathbf{x}, t_1))\| s(\mathbf{x})} \Rightarrow k(\mathbf{x}) = A F(\mathbf{x}, t_1) \quad (2)$$

$F(\mathbf{x}, t_1)$  est une fonction dépendant du gradient de charge et du rapprochement des lignes de courant,  $A$  une constante arbitraire positive qui dépend de chaque ligne de courant.

Ainsi posé, le problème est multiplicatif. En pratique, les rapports de perméabilités présentent plus d'intérêt que les différences. Le passage en logarithme rend le problème additif ; avec  $g = \ln(k)$ ,  $B = \ln(A)$  et  $v = \ln(F)$ , l'équation (2) sur chaque ligne de courant devient :

$$g(\mathbf{x}) = B + v(\mathbf{x}, t) \quad (3)$$

$g$  est la fonction recherchée,  $B$  une constante arbitraire par ligne de courant et  $v$  une fonction calculée à partir de la charge.

### 1.3 Indétermination

La perméabilité  $k$  dépend d'une constante  $A$  sur chaque ligne de courant. Cette constante est fixée si  $k$  est connu en un point de cette ligne de courant. Donc le champ de perméabilité  $k$  est entièrement déterminé lorsque  $k$  est connu en un point de chaque ligne de courant, c'est-à-dire par la connaissance de  $k$  sur une courbe qui recoupe toutes les lignes de courant.

Soient  $h(\mathbf{x}, t_1)$  et  $h(\mathbf{x}, t_2)$  les charges pour des dates  $t_1$  et  $t_2$ , telles que les lignes de courant se recoupent. La connaissance de  $k(x_0) = k_0$  en un point  $x_0$  permet de connaître  $k$  en tout point de la ligne de courant du premier écoulement passant par ce point. Si cette ligne de courant coupe l'ensemble des lignes de courant du second écoulement, le champ de perméabilité  $k$  est alors connu en tout point.

$k$  ne dépend finalement que d'une seule constante :  $k_0$ . Or cette constante reste toujours inaccessible en l'absence d'autre information que la charge, car si on multiplie le champ de perméabilité par une constante  $\alpha$ , le champ  $\alpha k(\mathbf{x})$  vérifie toujours l'équation (1).

### 1.4 Surdétermination

Si les champs de pression interstitielle sont connus en au moins deux dates, le problème devient surdéterminé : le nombre des équations (3) sur les lignes de courant dépasse le nombre d'inconnues. En présence d'erreurs de mesure, il n'existe pas une fonction  $g$  et une constante  $B$  pour chaque ligne de courant qui satisfassent l'équation fonctionnelle (3). En pratique, la surdétermination est levée par la méthode des moindres carrés, qui consiste à définir sur chaque ligne de courant un résidu  $\varepsilon$  par :

$$\varepsilon = g(\mathbf{x}) - B - v(\mathbf{x}, t)$$

et à minimiser le carré  $\|\varepsilon\|^2$  de sa norme.

Cette minimisation conduit à un système linéaire dégénéré, qui admet plusieurs solutions  $g^*$ . On retrouve les indéterminations évoquées précédemment :

- pour une seule date  $t_1$  les indéterminations correspondent à une constante arbitraire  $B$  par ligne de courant.
- pour plusieurs dates et si les écoulements correspondants se croisent, deux solutions  $g_1$  et  $g_2$  diffèrent d'une constante :  $g_1^*(\mathbf{x}) = g_2^*(\mathbf{x}) + C$ . Cette constante, additive sur

le logarithme de la perméabilité, correspond à une constante multiplicative, dont on a vu qu'elle demeure indéterminée.

On peut fixer arbitrairement la constante multiplicative en rajoutant au système la condition  $\int g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0$  : le système possède alors une solution unique.

### 1.4.1 Discrétisation

La résolution numérique du problème inverse procède par discrétisation des calculs précédents : pour chaque date  $t$ , l'égalité de flux (2) est écrite en un nombre fini de tubes de courant d'une certaine épaisseur. Les lignes de courant qui bordent ces tubes sont calculées par résolution numérique d'une équation différentielle.

Pour la minimisation, les fonctions  $g$  sont approchées par des fonctions constantes sur les cellules d'une grille régulière. On montre [Castelier 95] que cette discrétisation est justifiée, car les solutions numériques convergent vers la solution théorique lorsque la taille des cellules de la grille et l'épaisseur des tubes de courant diminuent.

## 2 Calculs numériques

L'analyse mathématique précédente suppose, pour une date donnée, le champ de charge connu en tout point. En réalité, ce champ est connu en un nombre fini de points de mesure notés  $\mathbf{x}_\alpha$ . Le krigeage est une étape déterminante de la résolution numérique du problème inverse. Il permet l'interpolation de la charge et le calcul stable de ses dérivées.

### 2.1 Interpolation par krigeage

La charge  $h(\mathbf{x})$  est supposée être une réalisation d'une Fonction Aléatoire Intrinsèque d'ordre 1  $H(\mathbf{x})$ , dérivable, dont les composantes du gradient sont notées  $G_x(\mathbf{x})$  et  $G_z(\mathbf{x})$ . Les composantes du gradient et la charge sont interpolées en tout point par (co-)krigeage à partir des mesures  $H_\alpha$  de  $H$  aux points  $\mathbf{x}_\alpha$ .

On sait que le (co-)krigeage est un interpolateur exact qui respecte la dérivation :  $\frac{\partial H^k(\mathbf{x})}{\partial x} = G_x^{ck}(\mathbf{x})$  et  $\frac{\partial H^k(\mathbf{x})}{\partial z} = G_z^{ck}(\mathbf{x})$ .

### 2.2 Régularisation par effet de pépite

Le calcul de dérivées est un calcul instable : le moindre bruit sur les données provoque de grands effets sur la dérivée. Le krigeage permet de palier cette difficulté par filtrage du bruit. Soit  $B_\alpha$  une erreur de mesure, modélisée par un effet de pépite de variance  $\sigma_B^2$ . Au point  $\mathbf{x}_\alpha$ , la mesure de la charge est modélisée par  $M_\alpha = H_\alpha + B_\alpha$ . Le cokrigeage de  $H$  par les  $M_\alpha$  filtre l'erreur de mesure :  $H^*(\mathbf{x}_\alpha) \neq M_\alpha$ . Il respecte toujours la dérivation :  $\frac{\partial H^*(\mathbf{x})}{\partial x} = G_x^*(\mathbf{x})$  et  $\frac{\partial H^*(\mathbf{x})}{\partial z} = G_z^*(\mathbf{x})$ .

Le suivi des tubes de courant s'effectue sur le champ de charge et les gradients ainsi estimés.

## 3 Exemples

Le calcul d'inversion est illustré sur deux exemples. Dans les deux cas, le résultat d'inversion est calculé sur une grille régulière de forme trapézoïdale pour correspondre à la

forme du noyau du barrage, composée de  $30 \times 45$  éléments. Pour représenter les logarithmes de perméabilité, on redresse la grille en l'assimilant à une grille rectangulaire, ce qui facilite le tracé des isolignes.

### 3.1 Exemple analytique

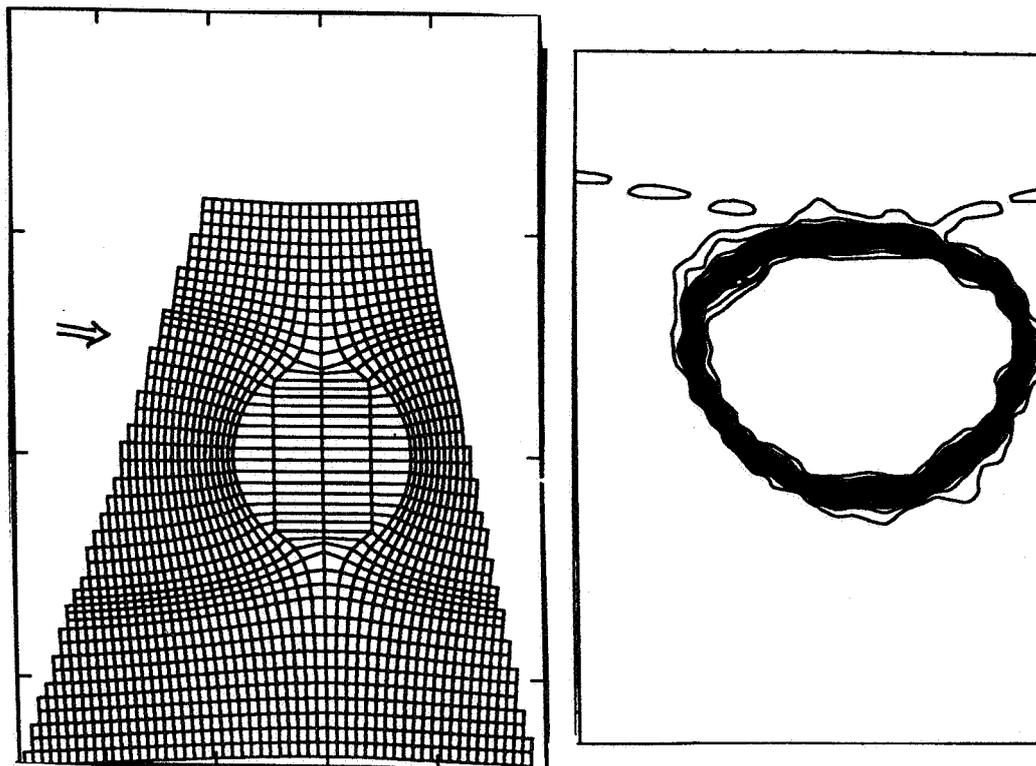


FIG. 1 - *Ecoulement analytique (gauche). Logarithme des perméabilités estimées (droite).*

Un milieu est composé d'une sphère de perméabilité constante  $k_i$  plongée dans une matrice de perméabilité constante  $k_e$ . C'est un des rares cas où il est possible de calculer théoriquement des champs de charge compatibles avec le milieu donné. Les écoulements dépendent d'un gradient macroscopique donné a priori. Deux écoulements sont calculés dans ce milieu faisant entre eux une direction de 45 degrés. Sur l'exemple présenté, la charge est donnée sous forme analytique sur tout le champ sans recourir au krigeage.

La figure (1) montre les lignes de courant et les lignes équipotentielles d'un des écoulements, ainsi que le logarithme des perméabilités. Les zones de perméabilité constante (sphère et matrice) sont bien restituées ainsi que leur rapport de perméabilités (9.97 au lieu de 10).

La qualité de l'estimation des perméabilités par le calcul inverse proposé se détériore lorsque l'angle entre les écoulements se rapproche de 0 degré.

### 3.2 Exemple numérique

A partir d'un champ de perméabilité donné a priori, on calcule par éléments finis les champs de charge hydraulique pour 24 dates différentes correspondant à un remplissage et à une vidange du barrage. Le champ de perméabilité dans le noyau est estimé à partir des champs de charge et comparé au champ de perméabilité a priori. (On compare en fait

les logarithmes de perméabilité). Le suivi des lignes de courant s'effectue sur le krigeage de la charge, calculé à partir des nœuds du maillage par éléments finis.

La figure 2 présente les logarithmes des perméabilités a priori dans le noyau. La perméabilité est constante sur les plages repérées par un numéro. La figure 3 montre les lignes de courant et les lignes équipotentielles aux dates 5 (remplissage) et 11 (vidange). Le champ de perméabilité obtenu après inversion (2) restitue la structure du champ initial, mais les transitions entre plages sont étalées.

On a vu que les perméabilités ne peuvent être estimées qu'à une constante multiplicative près. La comparaison entre les valeurs prévues et les valeurs retrouvées n'a de sens que sur les rapports de perméabilité entre 2 plages différentes, donnés par le tableau suivant :

zones	1-2	2-3	4-5	5-6	7-8	8-9	1-4	2-5	3-6	4-7	5-8	6-9
Rapport initial	3.3	3.3	3.3	3.3	3.3	3.3	3.3	3.3	3.3	3.3	3.3	3.3
Rapport estimé	3.0	3.7	3.3	3.7	3.3	3.7	1.5	1.6	1.3	2.0	2.0	2.5

Le rapport entre deux plages d'une même couche horizontale est bien rendu. Les rapports entre les couches horizontales sont en revanche trop faibles (1.5 puis 2.0 au lieu de 3.3).

Le calcul des perméabilités repose sur la conservation du flux, ce qui relie les valeurs de perméabilités le long des lignes de courant. Pour relier les perméabilités sur l'ensemble du champ, il faut que les lignes de courant de plusieurs dates se croisent franchement.

Or dans l'exemple traité, les lignes de courant aux différentes dates sont quasiment parallèles et presque horizontales, ce qui explique que les contrastes de perméabilité soient bien restitués à l'intérieur d'une même couche horizontale et mal restitués entre 2 couches. L'ensemble des écoulements apporte donc une information incomplète.

## Conclusion

Cet exemple montre que si les zones de perméabilité constante sont en général retrouvées, les plages de perméabilité sont distordues avec une erreur d'autant plus grande que l'écoulement est monodirectionnel. La méthode doit être testée sur d'autres cas d'étude. Il reste aussi à évaluer l'influence de la réduction du nombre de données sur le calcul des perméabilités. La méthode des éléments finis fournit en effet la charge hydraulique en 500 nœuds de grille.

## Remerciements

Nous remercions Electricité De France pour le financement de la thèse à l'origine de cet article, et pour les simulations d'écoulements par le logiciel d'éléments finis NS2D; nous remercions Pierre Chauvet du Centre de Géostatistique pour sa collaboration à ce travail.

## 4 Bibliographie

- E. Castelier, (1995) Méthode de résolution d'un problème inverse. *Dans ce fascicule.*  
 A. Dong, (1990) Estimation géostatistique des phénomènes régis par des équations aux dérivées partielles. *Thèse, Ecole des Mines de Paris.*  
 G. de Marsily Quantitative hydrogeology. *Groundwater hydrology for engineers London, Academic Press.*  
 G. Matheron, (1971) La théorie des variables régionalisées et ses applications. *Fascicule 5, Cahier du centre de Morphologie Mathématique, Ecole des Mines de Paris.*

G. Matheron, (1973) **The intrinsic random functions and their applications.** *Adv. Appl. Prob.* 5, pp 439-468.

G. Schneebeli, (1966) **Hydraulique Souterraine.** *Eyrolles.*

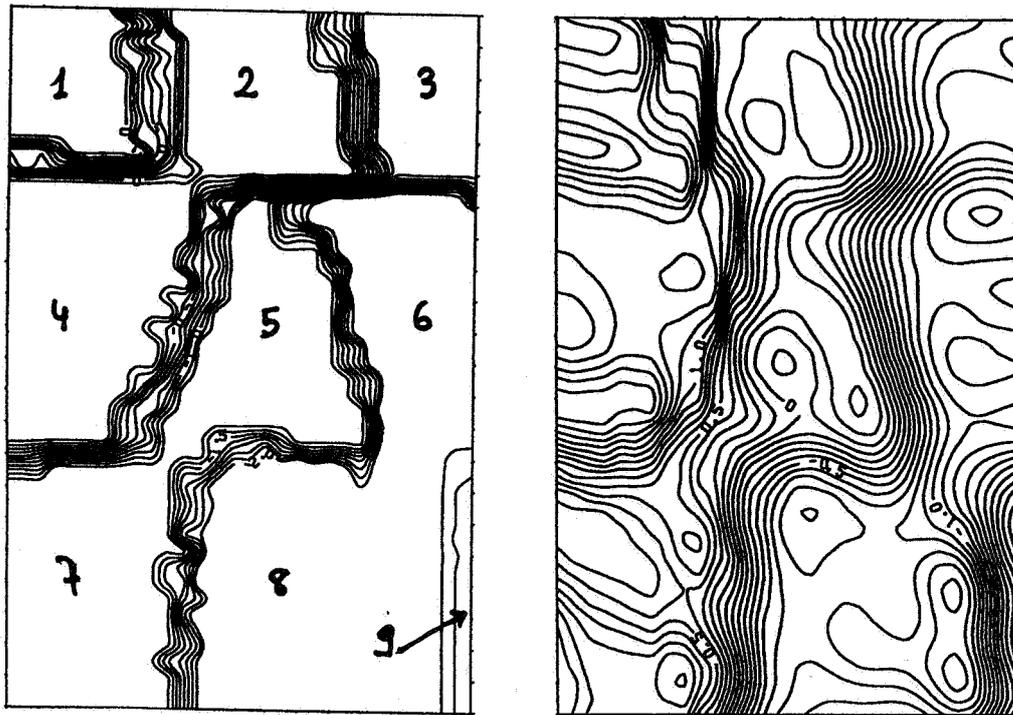


FIG. 2 - Plages de perméabilité constante et logarithme des perméabilités a priori (gauche), Logarithme des perméabilités estimées (droite). La grille trapézoïdale est redressée pour le tracé des isolignes. On récupère les structures initiales.

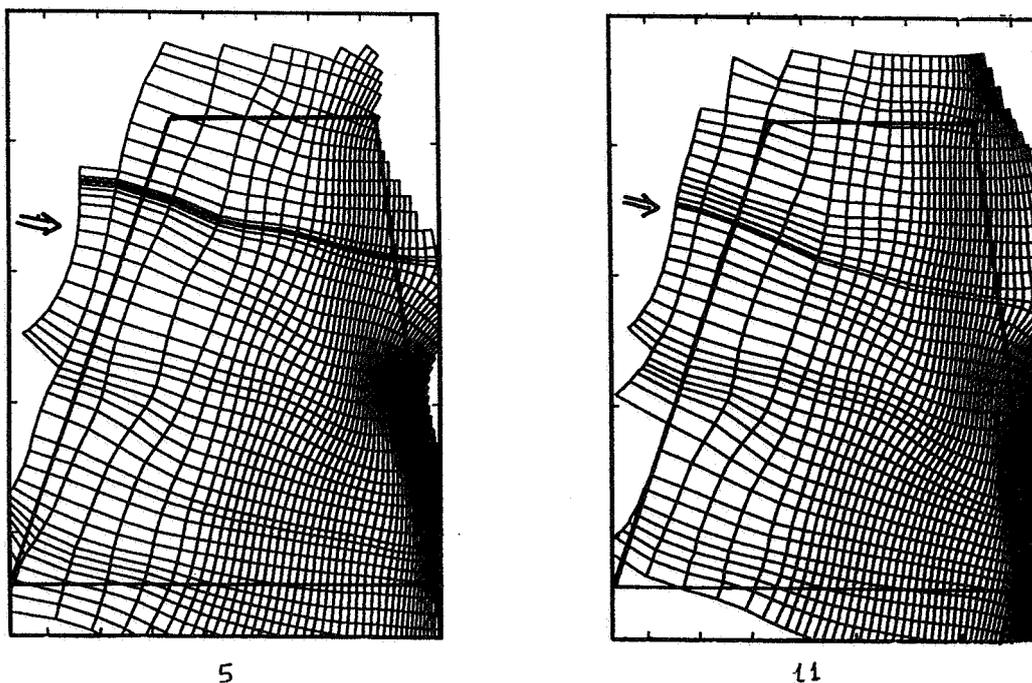


FIG. 3 - Maillages s'appuyant sur les écoulements des dates 5 (remplissage) et 11 (vidange). Le trapèze représente la grille régulière sur laquelle on calcule les perméabilités.