

Méthode de résolution d'un problème inverse

Etienne CASTELIER

Ecole des Mines de Paris, Centre de Géostatistique, 35 rue Saint-Honoré, 77305 Fontainebleau

Résumé. L'estimation d'un champ de perméabilité à partir de mesures de la charge hydraulique sur plusieurs dates est un problème inverse. Une analyse mathématique de ce problème inverse montre qu'il est indéterminé, surdéterminé et instable. Une méthode est proposée pour le résoudre, qui tient compte de ces trois aspects. Cette méthode est examinée d'un point de vue théorique, puis il est montré qu'elle peut être discrétisée et que les discrétisations convergent vers la solution. Un algorithme discrétisé est enfin proposé.

Abstract. Estimating a permeability field from only hydraulic head data measured at different times is an inverse problem. However, a mathematical analysis shows that this problem is undetermined, overdetermined, and unstable. A method is proposed which takes these three aspects into account. This method is tested from a theoretical point of view. A proof is then given that the proposed method can be discretised and that the discretisations converge towards the theoretical solution. Finally, a discretised algorithm is proposed.

Table des Matières

INTRODUCTION	186
1. EQUATIONS DU PROBLÈME INVERSE	186
2. MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS	192
3. APPLICATION RIGOREUSE DU THÉORÈME DES PROJECTIONS	198
4. DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS D'UNE APPROCHE DISCRÉTISÉE DU PROBLÈME	205
5. PROPRIÉTÉS TOPOLOGIQUES DE L'ESPACE SOMME $B+G$	210
6. DISCRÉTISATION	218

Introduction

L'estimation d'un champ de perméabilité à partir de mesures de la charge hydraulique sur plusieurs dates est un problème inverse. Les caractéristiques d'un tel problème inverse sont les suivantes :

1. Il est instable.
2. Il peut n'avoir pas de solution.
3. Il peut avoir plusieurs solutions.

Cet article présente une méthode pour résoudre le problème inverse en tenant compte des difficultés citées, mais ne décrit en détails qu'une partie de la méthode, celle qui remédie à la surdétermination du problème. Un survol de la méthode complète, illustré par des exemples, est présenté dans [4].

Cet article analyse mathématiquement le problème inverse (section 1), ce qui permet de retrouver les caractéristiques décrites ci-dessus. Une méthode est ensuite proposée pour remédier au problème de surdétermination du problème inverse (section 2). Il est montré qu'elle peut être discrétisée et que les discrétisations convergent vers la solution (sections 3 à 5). Enfin un algorithme discrétisé est proposé (section 6).

1 Equations du problème inverse

Le problème inverse se présente apparemment comme un problème d'analyse impliquant des fonctions et leurs dérivées partielles. Les développements qui suivent montrent que ce problème d'analyse, surdéterminé, n'admet pas de solution en général.

1.1 Rappel sur les écoulements

Dans cet article les écoulements sont à deux dimensions. Un point de l'espace est désigné par $\mathbf{x} = (x, z)$ avec x pour abscisse et z pour cote. La **Loi de Darcy** gouverne les écoulements d'eau en milieu poreux. Elle permet de calculer, au moyen de la perméabilité du milieu et de la charge hydraulique $h(\mathbf{x})$, un flux d'eau surfacique Φ . Pour un milieu de perméabilité $k(\mathbf{x})$ scalaire (milieu localement isotrope), elle s'écrit :

$$\Phi = -k(\mathbf{x})\text{grad}(h(\mathbf{x})) \quad (1)$$

La charge $h(\mathbf{x}, t)$ peut varier au cours du temps. La perméabilité $k(\mathbf{x})$ est supposée constante pendant la période considérée. Pour un **écoulement en nappe libre**, le milieu poreux est séparé en deux : le milieu saturé caractérisé par l'équation $h(\mathbf{x}, z) > z$ (pression positive), et le milieu non-saturé. La frontière entre ces milieux, la **surface libre**, est mobile au cours du temps. Dans le milieu saturé, sous la surface libre, l'écoulement est modélisé par l'**équation de diffusivité**, qui, avec les hypothèses simplificatrices usuelles (fluide et milieu poreux incompressibles), s'écrit :

$$\text{div}(k(\mathbf{x})\text{grad}(h(\mathbf{x}, t))) = 0 \quad (2)$$

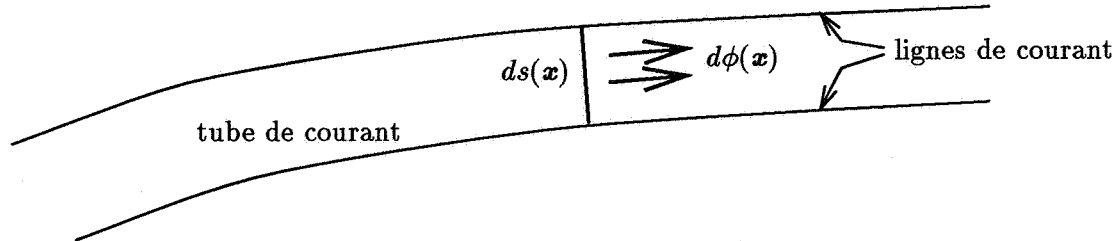
et qui exprime une conservation de flux.

Le **Problème inverse** consiste, à partir des seuls champs de charge $h(\mathbf{x}, t)$ au cours du temps, à calculer la perméabilité du milieu.

1.2 Approche intuitive

Dans un premier temps, la charge $h(\mathbf{x}, t_1)$ n'est supposée connue qu'en une seule date t_1 . Le raisonnement intuitif qui suit permet de comprendre comment la connaissance de la charge $h(\mathbf{x}, t)$ permet de remonter à celle de la perméabilité. Il s'appuie sur les caractéristiques de l'écoulement, obtenues à partir des dérivées de la charge.

Une **ligne de courant** est une courbe qui est partout parallèle à la vitesse du fluide, donc aux gradients de charge lorsque la perméabilité est scalaire. Un **tube de courant** est un ensemble de lignes de courant comprises entre deux lignes de courant limites.



D'après la loi de Darcy (1), le flux d'eau $d\phi(\mathbf{x})$ qui traverse la section $ds(\mathbf{x})$ au point $\mathbf{x}$ d'un tube de courant infiniment fin vaut

$$d\phi(\mathbf{x}) = ds(\mathbf{x}) \mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \Phi(\mathbf{x}) = -ds(\mathbf{x}) \mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \text{grad}(h(\mathbf{x}, t)) k(\mathbf{x})$$

où $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ désigne un vecteur unitaire normal à la surface $ds(\mathbf{x})$. Pour une section $ds(\mathbf{x})$ orthogonale au tube, le vecteur $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ est parallèle au gradient de charge ; pour obtenir des flux positifs, il est orienté dans le sens du flux $\Phi(\mathbf{x})$, d'où :

$$d\phi(\mathbf{x}) = ds(\mathbf{x}) \|\text{grad}(h(\mathbf{x}, t))\| k(\mathbf{x})$$

Par conservation de la masse d'eau, le flux $d\phi(\mathbf{x})$ est égal en tout point $\mathbf{x}$ du tube de courant : c'est une grandeur invariante sur le tube, de valeur $d\phi_0$. Finalement la perméabilité $k(\mathbf{x})$ en un point $\mathbf{x}$ du tube de courant vaut

$$k(\mathbf{x}) = \frac{d\phi_0}{ds(\mathbf{x}) \|\text{grad}(h(\mathbf{x}, t))\|} \Rightarrow k(\mathbf{x}) = A F(\mathbf{x}) \quad (3)$$

où A est une constante pour le tube de courant et $F(\mathbf{x})$ une fonction inversement proportionnelle à l'épaisseur du tube et au gradient de charge.

Pour établir cette expression il a fallu disposer d'un "tube de courant infiniment fin" pour que les variations de la perméabilité, ou du gradient, puissent être considérées comme négligeables sur l'épaisseur du tube. Ainsi $k(\mathbf{x})$ dépend du rapport de deux quantités infiniment petites, tendant vers 0 avec l'épaisseur du tube : $d\phi_0$ et $ds(\mathbf{x})$. Qu'advient-il de ce rapport lorsque l'épaisseur du tube tend vers 0, donc lorsque le tube tend vers une ligne de courant ? Le raisonnement employé ici ne permet pas ce passage à la limite. Il faut donc adopter une autre approche, moins physique, mais plus rigoureuse, qui établit une expression semblable sur une ligne de courant.

1.3 Dérivation le long des lignes de courant

L'équation de diffusivité (2) sous la forme :

$$\text{grad}(h) \cdot \text{grad}(k) + k \Delta h = 0$$

est une équation aux dérivées partielles linéaires du premier ordre par rapport à la variable perméabilité $k(\mathbf{x})$. De façon classique (Bass [2]), cette équation peut se résoudre

en faisant appel aux notions d'intégrale première et de système caractéristique. La notion physique de dérivation le long d'une ligne de courant utilise implicitement ce formalisme mathématique sans s'y référer explicitement, ce qui évite une trop grande abstraction.

Mathématiquement, une ligne de courant $\xi(s)$, paramétrée par un paramètre s , est un chemin parallèle aux gradients de charge. Elle est définie par :

$$\begin{aligned} \text{une équation différentielle} \quad & \xi'(s) = \text{grad}(h(\xi(s))) \alpha(s) = \text{grad}(h) \alpha(s) \\ \text{et un point de départ} \quad & \xi(s_0) = x_0 \end{aligned} \quad (4)$$

La fonction $\alpha(s)$ est une fonction, toujours de même signe, qui exprime la proportionnalité entre la vitesse de parcours $\xi'(s)$ de la ligne de courant et le gradient de charge. Elle dépend du paramétrage s de la ligne de courant.

Soit $f(x)$ une fonction de la coordonnée spatiale x . Le long d'une ligne de courant ξ elle se transforme en fonction du paramètre s par $f(s) = f(\xi(s))$. Sa dérivée est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} f(s) &= \text{grad}(f(\xi(s))) \cdot \xi'(s) \\ &= \text{grad}(f) \cdot \text{grad}(h) \alpha(s) \quad \text{d'après (4)} \end{aligned} \quad (5)$$

La fonction h peut être considérée suivant deux points de vue. C'est d'abord une fonction de la coordonnée x . C'est aussi un paramétrage admissible des lignes de courant. La charge est en effet décroissante le long d'une ligne de courant car celle-ci est dirigée dans le sens opposé aux gradients de charge. La fonction $h(x)$, transformée en fonction du paramètre h le long d'une ligne de courant $\xi(h)$ paramétrée par h , vérifie $h(h) = h(\xi(h)) = h$. Elle peut se dériver au moyen de (5) :

$$\frac{d}{dh} h = 1 = \text{grad}(h) \cdot \text{grad}(h) \alpha(h) = \|\text{grad}(h)\|^2 \alpha(h)$$

Cette égalité donne la valeur de la fonction $\alpha(h)$, ce qui fournit, avec (5), la proposition suivante :

Proposition 1 *La dérivée d'une fonction f le long d'une ligne de courant paramétrée par h est donnée par la relation :*

$$\frac{d}{dh} f(h) = \frac{\text{grad}(h) \cdot \text{grad}(f)}{\|\text{grad}(h)\|^2}$$

1.4 Equation différentielle le long d'une ligne de courant

Proposition 2 *L'équation de diffusivité (2), avec la perméabilité $k(x)$ comme inconnue,*

$$\text{div}(k(x) \text{grad}(h(x))) = 0$$

est équivalente à l'équation différentielle

$$\frac{d}{dh} k(h) = -k(h) \frac{\Delta h}{\|\text{grad}(h)\|^2}(h) \quad (6)$$

sur toutes les lignes de courant $\xi(h)$.

Démonstration Il suffit de développer l'équation (2), de la diviser par $\|\text{grad}(h)\|^2$, puis de reconnaître la dérivée de k le long de $\xi(h)$ donnée par la proposition (1):

$$\begin{aligned} & \text{div}(k \text{ grad}(h)) = 0 \\ \Leftrightarrow & \text{grad}(h) \cdot \text{grad}(k) + k \Delta h = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{\text{grad}(h) \cdot \text{grad}(k)}{\|\text{grad}(h)\|^2} = - \frac{k \Delta h}{\|\text{grad}(h)\|^2} \\ \Leftrightarrow & \frac{d}{dh} k(h) = - \frac{k \Delta h}{\|\text{grad}(h)\|^2} \quad \text{pour toute ligne de courant } \xi(h) \end{aligned}$$

■

La fonction $\frac{\Delta h}{\|\text{grad}(h)\|^2}(\mathbf{x})$ dépend des dérivées de la charge $h(\mathbf{x})$. C'est une fonction connue du paramètre h le long d'une ligne de courant $\xi(h)$. Sur chaque ligne de courant l'équation différentielle (6) s'intègre en :

$$k(h) = A \exp \left(- \int_{h_0}^h \frac{\Delta h}{\|\text{grad}(h)\|^2}(\eta) d\eta \right) = A F(h) \quad (7)$$

où A est une constante arbitraire d'intégration. $A > 0$ car une perméabilité est toujours positive. Cette équation est équivalente à l'équation (3) obtenue précédemment de façon non rigoureuse sur un tube de courant infiniment fin. Cette équivalence fournit une interprétation physique pour la fonction $F(h)$, qui est ainsi inversement proportionnelle à l'écartement des lignes de courant et au gradient de charge.

L'équation de diffusivité (2) et la connaissance de la charge $h(\mathbf{x}, t_1)$ en tout point permettent donc de calculer la perméabilité $k(\mathbf{x})$ en tout point. Celle-ci dépend, sur chaque ligne de courant, d'une fonction $F(h)$, calculable par dérivation et intégration à partir du champ de charge, et d'une constante arbitraire d'intégration A .

Le champ de perméabilité dépend d'une constante arbitraire par ligne de courant. Cette constante est fixée si on connaît k en un point de cette ligne de courant. Donc le champ de perméabilité k est entièrement déterminé lorsque k est connu en un point de chaque ligne de courant. Il suffit pour cela de connaître k sur une courbe qui recoupe toutes les lignes de courant.

1.5 Indétermination

La connaissance du champ de charge $h(\mathbf{x}, t_1)$ en une seule date t_1 laisse un grand arbitraire (une constante par ligne de courant) sur la détermination du champ de perméabilité k . La connaissance du champ de charge en au moins deux dates produit deux effets. D'une part l'arbitraire est réduit à une constante unique sur le champ, d'autre part les équations qui permettent le calcul de la perméabilité sont surdéterminées.

Sur le dessin de la figure 1, les lignes de courant de l'écoulement pour une date t_1 sont tracées en trait continu alors que celles pour une date t_2 , qui sont supposées recouper les premières, sont en trait pointillé. La connaissance de la valeur k_0 de la perméabilité au point O permet de connaître la perméabilité sur la ligne de courant $O-A-B$ du premier écoulement. Comme cette ligne de courant recoupe les lignes de courant du second écoulement, la perméabilité est connue dans tout le domaine. Finalement, la perméabilité est connue partout à partir de la seule valeur k_0 au point O .

La constante k_0 correspond à une constante multiplicative arbitraire, impossible à déterminer à partir de la seule connaissance du champ de charge $h(\mathbf{x}, t)$, car le champ de

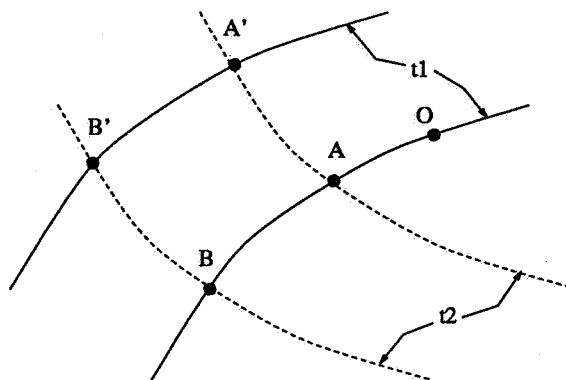


FIG. 1 - Quadrilatère porté par des lignes de courant de la date t_1 (trait continu) et de la date t_2 (trait pointillé).

perméabilité $k(\mathbf{x})$, multiplié par une constante α , vérifie toujours l'équation de diffusivité (2):

$$\text{div}(\alpha k \text{grad}(h)) = \alpha \text{div}(k \text{grad}(h)) = 0$$

1.6 Equation fonctionnelle

Pour une date t donnée, il existe une fonction continue u telle que l'équation d'une ligne de courant s'écrive $u(\mathbf{x}, t) = u_0$; la valeur constante u_0 de la fonction $u(\mathbf{x}, t)$ permet d'indiquer la ligne de courant. D'après (7), un champ de perméabilité compatible avec la charge $h(\mathbf{x}, t)$ à la date t peut s'écrire:

$$k(h) = A F(h)$$

La fonction $F(h)$, dépendant du paramètre h de la ligne $u(\mathbf{x}, t) = u_0$ à la date t , doit en toute rigueur s'écrire $F(h, u_0, t)$. Mais un point $\mathbf{x}$ quelconque de l'espace est univoquement défini par une ligne de courant d'indice u_0 et un paramètre h sur cette ligne de courant. La fonction F peut donc s'écrire $F(\mathbf{x}, t)$.

La constante A est arbitraire pour chaque date t , sur chaque ligne de courant, qui peut être indiquée au moyen de $u(\mathbf{x}, t)$. C'est donc une fonction $a(., .)$ arbitraire dépendant des deux variables ligne de courant $u(\mathbf{x}, t)$ et temps t . Finalement, un champ de perméabilité $k(\mathbf{x})$ compatible avec la charge $h(\mathbf{x}, t)$ à la date t vérifie l'équation fonctionnelle:

$$k(\mathbf{x}) = a(u(\mathbf{x}, t), t) F(\mathbf{x}, t) \quad (8)$$

La fonction F est calculée à partir de la charge $h(\mathbf{x}, t)$ à la date t ; la fonction $a(., .)$ traduit l'arbitraire laissé sur la détermination du champ de perméabilité à partir de la charge $h(\mathbf{x}, t)$ pour la seule date t .

1.7 Surdétermination

Soient les écoulements des dates t_1 et t_2 de la figure 1. Le quadrilatère (A, B, B', A') est tel que pour la date t_1 les points A et B (respectivement A' et B') soient sur la même ligne de courant, et que pour la date t_2 les points A et A' (respectivement B et B') soient sur la même ligne de courant. L'égalité (8) peut s'écrire aux points A, A', B, B' et aux

dates t_1 et t_2 :

$$\begin{cases} k(\mathbf{x}_A) = a(u(\mathbf{x}_A, t_1), t_1) F(\mathbf{x}_A, t_1) = a(u(\mathbf{x}_A, t_2), t_2) F(\mathbf{x}_A, t_2) \\ k(\mathbf{x}_B) = a(u(\mathbf{x}_B, t_1), t_1) F(\mathbf{x}_B, t_1) = a(u(\mathbf{x}_B, t_2), t_2) F(\mathbf{x}_B, t_2) \\ k(\mathbf{x}_{A'}) = a(u(\mathbf{x}_{A'}, t_1), t_1) F(\mathbf{x}_{A'}, t_1) = a(u(\mathbf{x}_{A'}, t_2), t_2) F(\mathbf{x}_{A'}, t_2) \\ k(\mathbf{x}_{B'}) = a(u(\mathbf{x}_{B'}, t_1), t_1) F(\mathbf{x}_{B'}, t_1) = a(u(\mathbf{x}_{B'}, t_2), t_2) F(\mathbf{x}_{B'}, t_2) \end{cases} \quad (9)$$

Les constantes arbitraires $a(.,.)$ pour les points d'une même ligne de courant sont égales, ce qui fournit les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} a(u(\mathbf{x}_A, t_1), t_1) &= a(u(\mathbf{x}_B, t_1), t_1) = a_1 && \text{car } A \text{ et } B \text{ sont sur une même ligne de} \\ &&& \text{courant à la date } t_1. \\ a(u(\mathbf{x}_{A'}, t_1), t_1) &= a(u(\mathbf{x}_{B'}, t_1), t_1) = a_2 && \text{car } A' \text{ et } B' \text{ sont sur une même ligne de} \\ &&& \text{courant à la date } t_1. \\ a(u(\mathbf{x}_A, t_2), t_2) &= a(u(\mathbf{x}_{A'}, t_2), t_2) = a_3 && \text{car } A \text{ et } A' \text{ sont sur une même ligne de} \\ &&& \text{courant à la date } t_2. \\ a(u(\mathbf{x}_B, t_2), t_2) &= a(u(\mathbf{x}_{B'}, t_2), t_2) = a_4 && \text{car } B \text{ et } B' \text{ sont sur une même ligne de} \\ &&& \text{courant à la date } t_2. \end{aligned}$$

Les constantes $a_1 \dots a_4$, introduites pour simplifier l'écriture, sont les 4 inconnues du système linéaire à 4 équations (9), qui peut se récrire sous la forme :

$$\begin{cases} a_1 F(\mathbf{x}_A, t_1) - a_3 F(\mathbf{x}_A, t_2) = 0 \\ a_1 F(\mathbf{x}_B, t_1) - a_4 F(\mathbf{x}_B, t_2) = 0 \\ a_2 F(\mathbf{x}_{A'}, t_1) - a_3 F(\mathbf{x}_{A'}, t_2) = 0 \\ a_2 F(\mathbf{x}_{B'}, t_1) - a_4 F(\mathbf{x}_{B'}, t_2) = 0 \end{cases} \quad (10)$$

La solution mathématique $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$ du système n'est pas physiquement acceptable car elle correspond à une perméabilité nulle sur les lignes de courant passant par les points A, B, A', B' aux dates t_1 et t_2 . Le système est donc dégénéré; son déterminant est nul :

$$F(\mathbf{x}_A, t_1) F(\mathbf{x}_B, t_2) F(\mathbf{x}_{A'}, t_2) F(\mathbf{x}_{B'}, t_1) - F(\mathbf{x}_A, t_2) F(\mathbf{x}_B, t_1) F(\mathbf{x}_{A'}, t_1) F(\mathbf{x}_{B'}, t_2) = 0$$

Cette égalité montre que la fonction F , pour deux dates t_1 et t_2 ne peut pas être quelconque. Si une erreur, aussi faible soit-elle, se glisse dans son calcul, le déterminant du système (10) n'est plus nul et la seule solution mathématiquement admissible est $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$, qui est physiquement inacceptable.

La donnée des charges $h(\mathbf{x}, t_1)$ et $h(\mathbf{x}, t_2)$ en deux dates t_1 et t_2 conduit à un problème fonctionnel surdéterminé. Pour plus de 2 dates la surdétermination est plus grande encore.

1.8 Caractéristiques du problème inverse

L'analyse mathématique permet de retrouver les caractéristiques du problème inverse ; d'une part elle montre explicitement l'indétermination et la surdétermination. D'autre part, les démonstrations proposées permettent également de comprendre en quoi consiste l'instabilité.

En effet, les relations qui relient le champ de perméabilité aux champs de charge reposent sur les lignes de courant, obtenues à partir des gradients de charge. Or le calcul de dérivées est un calcul réputé instable. Une petite erreur sur les mesures de charge produit de grandes erreurs sur les gradients. C'est une première cause d'instabilité.

Une autre instabilité vient des zones de faibles gradients. Une petite erreur sur les zones de faibles gradients change radicalement l'orientation d'une ligne de courant, donc les calculs de perméabilité.

Une méthode de résolution du problème inverse doit répondre à ces difficultés. La méthode préconisée ici les aborde en deux temps :

- Dans un premier temps, le champ est interpolé à partir des mesures de charge hydraulique, et les gradients sont calculés. C'est dans cette opération, réalisée par un krigeage, que l'instabilité liée au calcul de gradients est prise en compte. Cette phase de krigeage n'est pas traitée ici. Dans la suite, la charge ainsi que son gradient, seront supposés connus sur tout le domaine.
- Dans un second temps, une méthode de moindres carrés est proposée pour remédier aux problèmes de surdétermination. Cette méthode est décrite dans les parties suivantes.

2 Méthode des moindres carrés

Le champ de perméabilité $k(\mathbf{x})$ compatible avec le champ de charge $h(\mathbf{x}, t)$ vérifie l'équation fonctionnelle (8), qui est surdéterminée pour plusieurs dates, et qui admet une unique solution à une constante multiplicative près si les lignes de courant de plusieurs dates se croisent.

La moindre erreur commise sur le calcul de la fonction $F(\mathbf{x}, t)$ transforme l'équation fonctionnelle de telle sorte qu'elle n'admet plus que la fonction $k(\mathbf{x}) \equiv 0$ comme solution, ce qui est physiquement inadmissible. La méthode des moindres carrés permet de garantir une solution au problème. Elle consiste à chercher, parmi un ensemble de fonctions, celles qui approchent "au mieux" l'équation fonctionnelle. Le terme "au mieux" sera précisé mathématiquement dans la suite.

2.1 Passage en logarithme

L'équation de diffusivité (2) est invariante à la multiplication du champ de perméabilité par une constante. Les écoulements qu'elle gouverne sont plus sensibles aux rapports de perméabilités entre deux zones qu'à leurs différences. Le problème physique sous-jacent est donc multiplicatif.

Le passage par les logarithmes, qui transforme les rapports en différences, change le problème multiplicatif en un problème additif et rend naturelle l'utilisation de la méthode des moindres carrés, qui minimise des différences. Avec $g(\mathbf{x}) = \ln(k(\mathbf{x}))$, $b(., .) = \ln(a(., .))$ et $v(\mathbf{x}, t) = \ln(F(\mathbf{x}, t))$, l'équation fonctionnelle (8) devient :

$$g(\mathbf{x}) = b(u(\mathbf{x}, t), t) + v(\mathbf{x}, t) \quad (11)$$

avec g une fonction inconnue dépendant des seules coordonnées d'espace, $b(., .)$ une fonction arbitraire de deux variables et v une fonction donnée par calcul.

2.2 Passage des fonctions à l'algèbre

La méthode des moindres carrés remplace le point de vue fonctionnel par un point de vue algébrique. Ce passage classique consiste à se placer dans un espace de Hilbert L^2 , c'est-à-dire un espace de fonctions de carré sommable (Rudin [6]). L'espace de Hilbert adapté au problème inverse est défini maintenant.

Soit Ω un domaine borné sur lequel les perméabilités doivent être calculées ; soit, pour une fonction quelconque $f(\mathbf{x}, t)$, dépendant des coordonnées d'espace et du temps, la norme

définie par :

$$\|f\|^2 = \sum_{t=t_1}^{t_M} \int_{\Omega} f^2(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}$$

La sommation porte sur M dates $t_1, \dots, t_M$, auxquelles la charge $h(\mathbf{x}, t)$ est connue.

Soit, pour deux fonctions bornées en norme $f_1(\mathbf{x}, t)$ et $f_2(\mathbf{x}, t)$, le produit scalaire associé à la norme et défini par :

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \sum_{t=t_1}^{t_M} \int_{\Omega} f_1(\mathbf{x}, t) f_2(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \quad (12)$$

L'espace H , des fonctions bornées en norme, dépendant des coordonnées d'espace et du temps, est un espace de Hilbert pour le produit scalaire ainsi défini. Il contient les sous-espaces suivants

- l'espace G des fonctions $g(\mathbf{x})$, invariantes dans le temps, donc dépendant des seules coordonnées spatiales.
- l'espace B des fonctions constantes sur les lignes de courant. La caractérisation mathématique des fonctions de cet espace demande quelques précautions utiles pour les développements mathématiques qui suivent.

Les lignes de courant, obtenues à partir des champs de charge $h(\mathbf{x}, t)$, ne sont définies que dans un domaine saturé, caractérisé par des pressions positives ($h(\mathbf{x}, z, t) > z$), et dont la forme évolue au cours du temps. De plus il est possible pour certaines dates de ne pas connaître la charge $h(\mathbf{x}, t)$ dans tout le milieu saturé. Pour une date t , les lignes de courant ne sont donc connues que sur un sous-domaine Ω_t de Ω .

Sur le domaine Ω_t , une fonction de B est constante sur les lignes de courant et prend la forme $b(u(\mathbf{x}, t), t)$; sur le domaine complémentaire $\Omega \setminus \Omega_t$, elle n'est pas déterminée et peut prendre n'importe quelles valeurs.

Avec ces nouvelles définitions, l'équation fonctionnelle (11), définie à partir de la fonction $v(\mathbf{x}, t)$, prend la forme du problème $\mathcal{P}_1(v)$. Dans la suite la fonction $v(\mathbf{x}, t)$ est remplacée par une fonction $f(\mathbf{x}, t)$ arbitraire, qui peut désigner aussi bien la fonction $v(\mathbf{x}, t)$ elle-même qu'une de ses approximations.

Problème $\mathcal{P}_1(f)$ Recherche, pour une fonction f donnée, des fonctions g de G qui peuvent s'écrire sous la forme

$$g = b + f \quad \text{où } b \text{ est une fonction de } B.$$

Ce problème peut être défini pour n'importe quelle fonction $f(\mathbf{x}, t)$, mais il admet rarement de solution car il est surdéterminé. Il est, de plus, instable car, le plus souvent, pour une fonction f infiniment proche de la fonction v , ce problème n'admet pas de solution. La méthode des moindres carrés consiste à trouver un problème $\mathcal{P}_2(f)$ qui englobe le problème $\mathcal{P}_1(f)$ et qui admette une solution pour toute fonction f .

2.3 Minimisation des résidus

Soit $f(x, t)$ une fonction quelconque de H , donnée a priori. Deux fonctions g et b quelconques de G et B permettent de définir une **fonction résidu** ε_{gb} par :

$$\varepsilon_{gb}(x, t) = g(x) - b(u(x, t), t) - f(x, t)$$

Le problème $\mathcal{P}_1(f)$ est la recherche des fonctions qui annulent la fonction résidu, ce qui est impossible pour la plupart des fonctions f . Il est remplacé par un problème $\mathcal{P}_2(f)$ qui ne vise pas à annuler mais seulement à minimiser la fonction résidu :

Problème $\mathcal{P}_2(f)$ Soit, pour une fonction f de H donnée, la **fonctionnelle** $J(g, f)$ définie sur l'ensemble des fonctions g de G par

$$J(g, f) = \min_{b \in B} \|\varepsilon_{gb}\|^2 = \min_{b \in B} \|g - b - f\|^2$$

Le minimum $J_0(f)$ de cette fonctionnelle, défini par $J_0(f) = \min_{g \in G} J(g, f)$ est appelé **résidu**. Le problème $\mathcal{P}_2$ est la recherche des fonctions g_0 de G qui atteignent ce minimum :

$$J(g_0, f) = J_0(f) = \min_{g \in G} \left(\min_{b \in B} \|g - b - f\|^2 \right)$$

Le problème $\mathcal{P}_2(f)$ a été construit de sorte que son résidu $J_0(f)$ s'annule si et seulement si le problème $\mathcal{P}_1(f)$ admet des solutions, auquel cas les solutions des deux problèmes coïncident. Il s'agit bien d'un prolongement du problème $\mathcal{P}_1(f)$.

2.4 Application du Théorème des projections

La minimisation contenue dans le problème $\mathcal{P}_2(f)$ peut s'exprimer simplement au moyen de projections. Cette nouvelle formulation est très commode, d'une part pour la mise en œuvre numérique, d'autre part pour une étude mathématique poussée de la méthode. La notion de projection est définie maintenant.

Les projections sont définies sur un espace de Hilbert H dont les fonctions considérées plus haut sont des éléments. Les lettres x, y , etc., perdent leur sens de coordonnées d'espace et peuvent désigner des éléments arbitraires de H .

Les deux théorèmes suivants regroupent les principaux résultats concernant les projections. Leur formulation rigoureuse utilise, outre la notion d'espace orthogonal définie ici, les concepts d'*espace fermé* et de *continuité* qui seront rappelés plus tard. Dans un premier temps les projections seront utilisées sans que les hypothèses d'application rigoureuse des théorèmes soient vérifiées. Dans les applications numériques en effet, les fonctions sont discrétisées, les espaces de fonctions sont de dimension finie donc les conditions d'application des théorèmes sont toujours remplies. Dans les sections 3 à 5 suivantes, qui traitent le problème inverse sans approximation, donc sur des espaces de fonctions de dimension infinie, les conditions d'application du théorème des projections seront examinées avec soin.

Définition 1 Soit F un sous-espace vectoriel de H . L'**orthogonal** de F , noté $F^\perp$, est le sous-espace vectoriel contenant les éléments x qui vérifient $\langle x, y \rangle = 0$ pour tout élément y de F . $F^\perp$ est fermé.

Théorème 1 (des projections) Soit F un sous-espace vectoriel fermé de H . Pour tout élément x de H , il existe un unique élément dans F , noté $\Pi_F(x)$ tel que

$$\|x - \Pi_F(x)\| = \min_{y \in F} \|x - y\| \quad (13)$$

$\Pi_F(x)$, appelé **projection** de x sur F , est caractérisé par

$$\langle \Pi_F(x), y \rangle = \langle x, y \rangle \quad \text{pour tout élément } y \text{ de } F. \quad (14)$$

L'opérateur Π_F , défini sur H à valeurs dans F (donc dans H), est appelé **projecteur** de l'espace F . C'est un opérateur continu. Soit $\Pi_{F^\perp}$ le projecteur de $F^\perp$. Tout élément x peut être décomposé suivant F et son orthogonal $F^\perp$, au moyen de leurs projecteurs respectifs, par :

$$x = \Pi_F(x) + \Pi_{F^\perp}(x) \quad \text{avec} \quad \|x\|^2 = \|\Pi_F(x)\|^2 + \|\Pi_{F^\perp}(x)\|^2$$

et l'équation de projection (13) peut s'écrire

$$\min_{y \in F} \|x - y\| = \|\Pi_{F^\perp}(x)\| \quad (15)$$

Théorème 2 Soient E et F deux sous-espaces fermés tels que $E \subset F$. Leurs projecteurs vérifient : $\Pi_F \circ \Pi_E = \Pi_E \circ \Pi_F = \Pi_E$

Les théorèmes 1 et 2 permettent de reformuler le problème $\mathcal{P}_2(f)$ sous la forme de la proposition suivante. Celle-ci présente les mêmes résultats que le théorème 13 de la section 6, mais ici, la démonstration n'est pas rigoureuse puisqu'elle omet de parler d'espaces fermés.

Proposition 3 Les fonctions g_0 de G solutions du problème $\mathcal{P}_2(f)$ sont les solutions de l'équation (16) et de l'équation caractéristique du problème inverse (17) :

$$\Pi_{B^\perp}(g_0) = \Pi_{\Pi_{B^\perp}(G)}(f) \quad (16)$$

$$\langle \Pi_{B^\perp}(g_0), \Pi_{B^\perp}(g) \rangle = \langle \Pi_{B^\perp}(f), \Pi_{B^\perp}(g) \rangle \quad \text{pour tout élément } g \text{ de } G. \quad (17)$$

Démonstration La fonctionnelle $J(g, f)$ est définie par $J(g, f) = \min_{b \in B} \|g - b - f\|^2$. D'après la formule (15) du théorème 1 des projections, avec $F = B$ et $x = f - g$, elle peut se récrire $J(g, f) = \|\Pi_{B^\perp}(f - g)\|^2$. Le problème $\mathcal{P}_2(f)$ est donc la recherche des fonctions g_0 qui vérifient :

$$\|\Pi_{B^\perp}(f) - \Pi_{B^\perp}(g_0)\| = \min_{g \in G} \|\Pi_{B^\perp}(f) - \Pi_{B^\perp}(g)\|$$

Le théorème des projections peut de nouveau s'appliquer, avec cette fois, $F = \Pi_{B^\perp}(G)$ et $x = \Pi_{B^\perp}(f)$, ce qui donne :

$$\Pi_{B^\perp}(g_0) = \Pi_{\Pi_{B^\perp}(G)} \circ \Pi_{B^\perp}(f)$$

Or, comme $\Pi_{B^\perp}(G)$ est inclus dans $B^\perp$ et d'après le théorème 2, $\Pi_{\Pi_{B^\perp}(G)} \circ \Pi_{B^\perp} = \Pi_{\Pi_{B^\perp}(G)}$; les solutions du problème $\mathcal{P}_2(f)$ sont donc les fonctions g_0 de G qui vérifient l'équation (16).

D'après l'équation caractéristique (14) de la projection de $\Pi_{B^\perp}(f)$ sur $\Pi_{B^\perp}(G)$, pour tout élément $\Pi_{B^\perp}(g)$ de $\Pi_{B^\perp}(G)$,

$$\begin{aligned} \langle \Pi_{B^\perp}(f), \Pi_{B^\perp}(g) \rangle &= \langle \Pi_{\Pi_{B^\perp}(G)} \circ \Pi_{B^\perp}(f), \Pi_{B^\perp}(g) \rangle \\ &= \langle \Pi_{B^\perp}(g_0), \Pi_{B^\perp}(g) \rangle \end{aligned}$$

C'est l'équation caractéristique (17). ■

2.5 Espace des indéterminations

D'après l'équation (16), deux solutions g_1 et g_2 du problème $\mathcal{P}_2(f)$ vérifient

$$\Pi_{B^\perp}(g_1) = \Pi_{B^\perp}(g_2) \Leftrightarrow \Pi_{B^\perp}(g_1 - g_2) = 0 \Leftrightarrow g_1 - g_2 \in B$$

Comme elles appartiennent à G , leur différence $g_1 - g_2$ appartient à $B \cap G$. Deux solutions du problème $\mathcal{P}_2(f)$ diffèrent donc entre elles d'un élément quelconque de l'espace $B \cap G$. Cet espace est appelé **espace des indéterminations**. Quelles sont les fonctions qui composent cet espace?

Une fonction de $B \cap G$ est invariante dans le temps car elle appartient à G ; elle est constante sur chaque ligne de courant $u(x, t)$ pour toute date t car elle appartient à B . Elle prend donc une seule valeur sur les ensembles de lignes de courant des différentes dates qui se croisent. La recherche de la forme des fonctions de l'espace $B \cap G$ consiste donc à repérer les zones sur lesquelles les lignes de courant se croisent et où, par conséquent, ces fonctions sont constantes.

Cela conduit à diviser le domaine Ω , sur lequel sont recherchées les perméabilités, en plusieurs zones indépendantes entre elles, c'est-à-dire telles que chaque ligne de courant n'appartienne qu'à une seule zone. Comme aucune ligne de courant n'appartient à deux zones différentes, les valeurs prises par les fonctions de $B \cap G$ sont indépendantes sur chaque zone et le problème est divisé en autant de sous-problèmes que de zones.

Les zones indépendantes peuvent être rangées en trois types différents:

1. Sur une zone du premier type, une ligne de courant d'un écoulement croise toujours des lignes de courant d'un autre écoulement. Sur une telle zone, deux points quelconques peuvent être reliés par un chemin construit à partir de morceaux de lignes de courant. Une fonction de l'espace des indéterminations, constante sur toutes les lignes de courant, est donc constante sur une zone du premier type.

Sur l'exemple de la figure 2, les lignes de courant se croisent dans tout le domaine Ω à l'exception de la diagonale, qui divise le domaine en 2 zones de type 1. L'espace des indéterminations est donc l'espace à 2 dimensions des fonctions constantes sur chaque zone.

2. Les lignes de courant d'une zone de deuxième type ne croisent aucune ligne de courant d'un autre écoulement. Il s'agit, soit de zones sur lesquelles les lignes de courant des différents écoulements sont parallèles, soit de zones qui ne sont recouvertes que par des lignes de courant d'un seul écoulement.

Sur les zones du deuxième type, les fonctions de l'espace $B \cap G$ peuvent prendre une valeur arbitraire sur chaque ligne de courant, donc peuvent prendre une infinité de valeurs arbitraires.

3. Il peut enfin exister des zones qui ne sont jamais recouvertes par les lignes de courant d'aucun écoulement. Sur ces zones, l'indétermination est totale, les fonctions de l'espace des invariants peuvent prendre n'importe où n'importe quelle valeur. Dans la pratique, ces zones sont éliminées des calculs, si bien qu'il ne subsiste que des zones des deux premiers types.

L'exemple de la figure 3 illustre la division du domaine Ω en zones de plusieurs types. Il comporte deux écoulements pour les dates t_1 et t_2 . Les domaines Ω_{t_1} et Ω_{t_2} , sur lesquels les écoulements sont connus, sont deux rectangles différents. Le domaine Ω est identique au

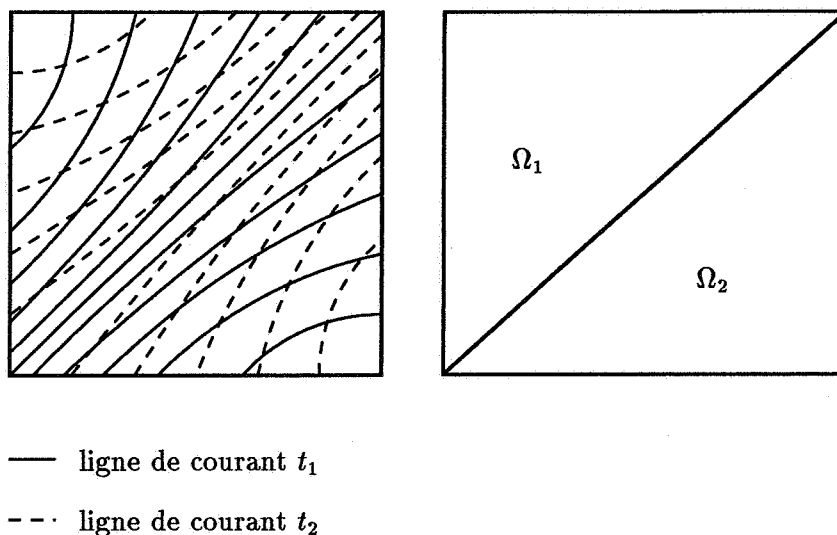


FIG. 2 - Les lignes de courant de la date t_1 (trait continu) croisent les lignes de courant de la date t_2 (pointillés) sur tout le domaine sauf sur la diagonale qui sépare le domaine en deux zones Ω_1 et Ω_2 .

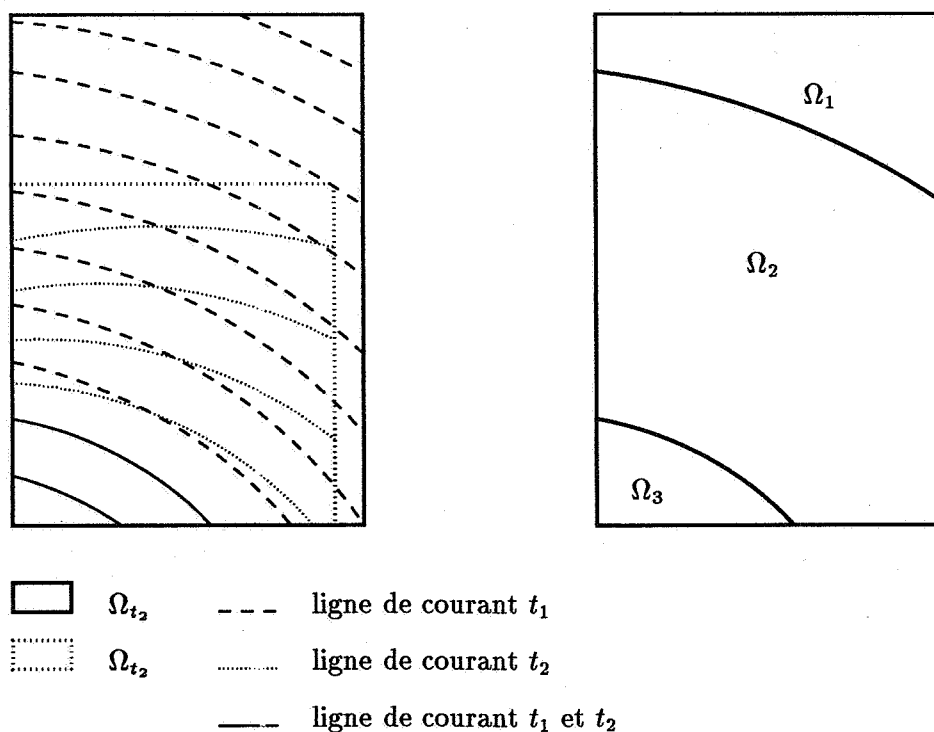


FIG. 3 - Les lignes de courant pour les 2 dates divisent le domaine en 3. L'espace $B \cap G$ des indéterminations est composé des fonctions constantes sur Ω_2 et constantes sur chaque ligne de courant de Ω_1 et Ω_3 .

domaine Ω_{t_1} . Les lignes de courant pour les dates t_1 et t_2 divisent le domaine Ω en 3 sous-domaines : sur Ω_1 les lignes de courant de la date t_1 ne croisent aucune ligne de courant de la date t_2 ; sur Ω_2 les lignes de courant d'une date croisent les lignes de courant de l'autre date ; sur Ω_3 les lignes de courant des 2 dates sont parallèles. L'espace des indétermination est composé des fonctions constantes sur Ω_2 et constantes sur chaque ligne de courant de Ω_1 et Ω_3 .

La dimension de l'espace des indéterminations $B \cap G$ dépend du type des zones qui divisent le domaine Ω . Si le domaine Ω n'est composé que de zones du premier type, $B \cap G$ est l'espace des fonctions constantes sur chaque zone et sa dimension est donc égale au nombre des zones. S'il existe au moins une zone du deuxième type, la dimension de $B \cap G$ est alors infinie.

Dans le cas, déjà évoqué, où les lignes de courant se croisent toutes, il n'y a qu'une seule zone du premier type, ce qui correspond à un espace $B \cap G$ de dimension 1. L'indétermination correspond à une constante multiplicative sur le champ de perméabilité $k(x)$.

3 Application rigoureuse du théorème des projections

Les sections 3 à 5 qui viennent sont d'une grande abstraction. Elles visent au bout d'un long cheminement à démontrer les théorèmes du paragraphe 5.6, qui montrent que le problème inverse $\mathcal{P}_2$ admet une solution, qu'il peut être discrétisé et que les discrétisations convergent vers la solution.

Les résultats intermédiaires sont mathématiquement très techniques et physiquement peu parlants. Ils s'appuient sur quelques grands théorèmes de la théorie des espaces de Hilbert (Analyse fonctionnelle), qui figurent dans Akhiezer [1], Laurent [5] ou Brezis [3], et qui seront rappelés avant d'être utilisés.

3.1 Définitions préliminaires

Les définitions qui suivent rappellent les concepts mathématiques mis en jeu dans le théorème 1 des projections. Elles sont nécessaires pour appliquer rigoureusement ce théorème.

Définition 2 Une suite (x_n) d'éléments d'un espace de Hilbert H converge (fortement) vers x si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$$

Définition 3 Un opérateur linéaire A défini sur un espace de Hilbert H et à valeurs dans H est continu si, pour toute suite (x_n) d'éléments de H , convergente, de limite x , la suite $(A(x_n))$ converge vers $A(x)$.

Définition 4 Un sous-espace vectoriel F de H est fermé si toute limite x , d'une suite convergente (x_n) d'éléments de F , appartient à F .

3.2 Propriétés topologiques des espaces B et G

Soient H , B et G les espaces définis au paragraphe 2.2. Montrons que les espaces B et G sont fermés dans l'espace de Hilbert H , ce qui permettra de leur appliquer les résultats à venir. Pour cela montrons d'abord le lemme suivant.

Lemme 1 Si un sous-espace vectoriel F d'un espace de Hilbert H est lui-même un espace de Hilbert pour la topologie induite, F est alors un espace fermé dans H .

Démonstration Soit (f_n) une suite quelconque d'éléments de F qui converge vers une limite f dans H . F est fermé si f appartient à F .

Comme la suite (f_n) est convergente, c'est une suite de Cauchy pour la topologie de H , donc pour la topologie de F . Comme F est un espace de Hilbert, toute suite de Cauchy converge, donc il existe un élément ϕ qui soit la limite de la suite (f_n) dans F . ϕ , élément de F , est élément de H et comme les topologies de F et H coïncident sur F , la suite (f_n) converge vers ϕ pour la topologie de H . Par unicité de la limite, $\phi = f$, donc f appartient à F . F est bien un espace fermé. ■

G est un espace fermé

Pour deux fonctions g_1 et g_2 de G , le produit scalaire (12) peut s'écrire :

$$\langle g_1, g_2 \rangle = \sum_{t=t_1}^{t_M} \int_{\Omega} g_1(\mathbf{x}) g_2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} M g_1(\mathbf{x}) g_2(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

Avec ce produit scalaire, l'espace G s'identifie à l'espace de Hilbert des fonctions de carré sommable sur Ω , $L^2(\mathbb{R}^2, M d\mathbf{x})$, et d'après le lemme 1, c'est un espace fermé dans H .

B est un espace fermé

Pour deux fonctions f_1 et f_2 quelconques de H , le produit scalaire (12) s'écrit

$$\begin{aligned} \langle f_1, f_2 \rangle &= \sum_{t=t_1}^{t_M} \int_{\Omega} f_1(\mathbf{x}, t) f_2(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \\ &= \sum_{t=t_1}^{t_M} \int_{\Omega_t} f_1(\mathbf{x}, t) f_2(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} + \sum_{t=t_1}^{t_M} \int_{\Omega \setminus \Omega_t} f_1(\mathbf{x}, t) f_2(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \\ &= \langle f_1, f_2 \rangle_S + \langle f_1, f_2 \rangle_N \end{aligned}$$

ce qui sépare le produit scalaire en deux produits scalaires, $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle_N$, pour les zones respectivement saturée et non-saturée. Cette séparation permet de voir l'espace de Hilbert H comme l'espace produit $H_S \times H_N$ des deux espaces de Hilbert H_S et H_N définis sur les zones saturée et non-saturée. Comme les fonctions de B peuvent prendre n'importe quelles valeurs sur la zone non saturée, l'espace B peut être vu comme le produit $B_S \times H_N$, où B_S contient les restrictions des fonctions de B sur la zone saturée.

Pour une date t fixée, les fonctions charge hydraulique $h(\mathbf{x}, t)$ et ligne de courant $u(\mathbf{x}, t)$ constituent un changement de variables admissible car tout point de Ω_t est caractérisé par une charge h sur une ligne de courant indicée par u . De plus, la charge est dérivable, et la fonction u qui indice les lignes de courant peut être choisie suffisamment régulière. Ainsi pour une fonction $f(\mathbf{x}, t) = f(x, y, t)$, et par changement de variables, l'intégrale $\int_{\Omega_t} f(x, y, t) dx dy$ devient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_t} f(x, y, t) dx dy &= \int_{\mathbb{R}^2} 1_{\Omega_t}(x, y, t) f(x, y, t) dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} 1_{\Omega_t}(u, h, t) f(u, h, t) J(h, u, t) du dh \end{aligned}$$

où $J(h, u, t)$ désigne ici le jacobien du changement de variables.

Pour deux fonctions b_1 et b_2 de B_S , qui ne dépendent que des variables ligne de courant u et temps t , le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$ peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \langle b_1, b_2 \rangle_S &= \sum_{t=t_1}^{t_M} \int_{\mathbb{R}^2} 1_{\Omega_t}(u, h, t) b_1(u, t) b_2(u, t) J(h, u, t) du dh \\ &= \sum_{t=t_1}^{t_M} \int_{\mathbb{R}} du b_1(u, t) b_2(u, t) \int_{\mathbb{R}} 1_{\Omega_t}(u, h, t) J(h, u, t) dh \\ &= \sum_{t=t_1}^{t_M} \int_{\mathbb{R}} b_1(u, t) b_2(u, t) \kappa(u, t) du \end{aligned}$$

avec $\kappa(u, t) = \int_{\mathbb{R}} 1_{\Omega_t}(u, h, t) J(h, u, t) dh$. Avec ce produit scalaire, l'espace B_S s'identifie à l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^2, \sum_{t=t_1}^{t_M} \kappa(u, t) du)$, et $B = B_S \times H_N$, produit d'espaces de Hilbert est aussi un espace de Hilbert. D'après le lemme 1, c'est un espace fermé dans H .

3.3 Application du Théorème des projections

Comme au paragraphe 2.4, le théorème 1 des projections est appliqué pour transformer le problème $\mathcal{P}_2(f)$, ce qui donne le théorème 4. Mais cette fois-ci, pour être appliqué rigoureusement à des espaces non nécessairement fermés, il doit auparavant être modifié sous la forme du théorème 3.

Définition 5 La fermeture $\overline{F}$ d'un espace vectoriel F est un espace composé des limites x de toutes les suites convergentes (x_n) de F . $\overline{F}$ est fermé par construction. Si F est fermé $F = \overline{F}$, sinon $F \subset \overline{F}$.

Théorème 3 (des projections sur un espace quelconque) Soit F un espace vectoriel de H . Pour tout x de H il existe un unique élément $\Pi_{\overline{F}}(x)$ dans la fermeture $\overline{F}$ de F tel que

$$\|x - \Pi_{\overline{F}}(x)\| = \min_{y \in \overline{F}} \|x - y\|$$

Il est caractérisé par

$$\langle \Pi_{\overline{F}}(x), y \rangle = \langle x, y \rangle \quad \text{pour tout élément } y \text{ de } F.$$

Si $\Pi_{\overline{F}}(x)$ appartient à F , il est appelé **projection** de x sur F et il est alors noté $\Pi_F(x)$. Dans le cas contraire il n'existe pas de projection de x sur F .

Démonstration Si l'espace F est quelconque, il est toujours possible d'appliquer le théorème des projections sur sa fermeture $\overline{F}$. Les deux remarques qui suivent permettent ensuite de l'appliquer directement à F :

$$1. \text{ Pour tout } x \text{ de } H \quad \min_{y \in \overline{F}} \|x - y\| = \min_{y \in F} \|x - y\|.$$

2. L'équation caractéristique (14)

$$\langle \Pi_{\overline{F}}(x), y \rangle = \langle x, y \rangle \quad \text{pour tout élément } y \text{ de } \overline{F}.$$

est équivalente à l'équation, en apparence plus faible,

$$\langle \Pi_{\overline{F}}(x), y \rangle = \langle x, y \rangle \quad \text{pour tout élément } y \text{ de } F.$$

■

Théorème 4 Les fonctions g_0 de G solutions du problème $\mathcal{P}_2(f)$, c'est-à-dire qui minimisent la fonctionnelle $J(g, f) = \min_{b \in B} \|g - b - f\|^2$, sont les solutions de l'équation (18) et de l'équation caractéristique du problème inverse (17) :

$$\Pi_{B^\perp}(g_0) = \Pi_{\overline{\Pi_{B^\perp}(G)}}(f) \quad (18)$$

$$\langle \Pi_{B^\perp}(g_0), \Pi_{B^\perp}(g) \rangle = \langle \Pi_{B^\perp}(f), \Pi_{B^\perp}(g) \rangle \quad \text{pour tout élément } g \text{ de } G \quad (17)$$

Ces solutions g_0 n'existent que si $\Pi_{\overline{\Pi_{B^\perp}(G)}}(f)$ appartient à $\Pi_{B^\perp}(G)$ et diffèrent entre elles d'une fonction de l'espace $B \cap G$.

Démonstration La fonctionnelle $J(g, f)$ du problème $\mathcal{P}_2(f)$ est définie par $J(g, f) = \min_{b \in B} \|g - b - f\|^2$. Le théorème 1 des projections permet de projeter $f - g$ sur B car cet espace est fermé. D'après la formule (15), la fonctionnelle peut se récrire $J(g, f) = \|\Pi_{B^\perp}(f - g)\|^2$. Le problème $\mathcal{P}_2(f)$ est donc la recherche des fonctions g_0 qui vérifient :

$$\|\Pi_{B^\perp}(f) - \Pi_{B^\perp}(g_0)\| = \min_{g \in G} \|\Pi_{B^\perp}(f) - \Pi_{B^\perp}(g)\|$$

Le nouveau théorème 4 des projections peut alors s'appliquer avec $F = \Pi_{B^\perp}(G)$ et $x = \Pi_{B^\perp}(f)$ ce qui donne :

$$\Pi_{B^\perp}(g_0) = \Pi_{\overline{\Pi_{B^\perp}(G)}} \circ \Pi_{B^\perp}(f)$$

Or, d'après le théorème 2 et comme $\overline{\Pi_{B^\perp}(G)}$ est inclus dans $B^\perp$, $\Pi_{\overline{\Pi_{B^\perp}(G)}} \circ \Pi_{B^\perp} = \Pi_{\overline{\Pi_{B^\perp}(G)}}$. Les solutions g_0 du problème $\mathcal{P}_2(f)$ sont donc solutions de l'équation (18). Cette équation montre que les solutions g_0 n'existent que si $\Pi_{\overline{\Pi_{B^\perp}(G)}}(f)$ appartient à $\Pi_{B^\perp}(G)$.

La projection de $\Pi_{B^\perp}(f)$ sur $\overline{\Pi_{B^\perp}(G)}$ est caractérisé, pour tout $g \in G$, par :

$$\begin{aligned} \langle \Pi_{B^\perp}(f), \Pi_{B^\perp}(g) \rangle &= \langle \Pi_{\overline{\Pi_{B^\perp}(G)}} \circ \Pi_{B^\perp}(f), \Pi_{B^\perp}(g) \rangle \\ &= \langle \Pi_{B^\perp}(g_0), \Pi_{B^\perp}(g) \rangle \end{aligned}$$

C'est l'équation caractéristique (17). ■

Ce théorème suggère les deux remarques suivantes :

1. Il est souhaitable que le problème $\mathcal{P}_2(f)$ admette des solutions pour tout f , c'est-à-dire que $\Pi_{\overline{\Pi_{B^\perp}(G)}}(f)$ appartienne à $\Pi_{B^\perp}(G)$ pour tout f , donc que $\Pi_{B^\perp}(G)$ soit fermé. Ce dernier résultat fait l'objet d'un théorème à venir.
2. Le problème $\mathcal{P}_2(f)$ est indéterminé, il admet plusieurs solutions qui diffèrent entre elles d'un élément de l'espace des indéterminations $B \cap G$, déjà décrit au paragraphe 2.5. Il peu commode de travailler avec un problème qui admet plusieurs solutions. Cette remarque conduit à définir un nouveau problème, $\mathcal{P}_3(f)$.

3.4 Quelques lemmes utiles

Les lemmes qui suivent constituent une boîte à outils utile à plusieurs reprises par la suite.

Lemme 2 Soient B et G deux espaces vectoriels de H , B étant supposé fermé. Ils vérifient l'égalité :

$$\Pi_{B^\perp}(G) = B^\perp \cap (B + G)$$

Démonstration Montrons d'abord l'inclusion $\Pi_{B^\perp}(G) \subset B^\perp \cap (B + G)$.

$$\begin{aligned} \text{Soit } g \in G \quad g = \Pi_B(g) + \Pi_{B^\perp}(g) &\Rightarrow \Pi_{B^\perp}(g) = g - \Pi_B(g) \\ &\Rightarrow \Pi_{B^\perp}(g) \in (G + B) \end{aligned}$$

donc $\Pi_{B^\perp}(G) \subset (B + G)$, ce qui, avec l'inclusion $\Pi_{B^\perp}(G) \subset B^\perp$, démontre la première inclusion.

Montrons ensuite l'inclusion réciproque, $B^\perp \cap (B + G) \subset \Pi_{B^\perp}(G)$.

$$\begin{aligned} \text{Soit } x \in B^\perp \cap (B + G) &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in B^\perp \\ x = b + g \text{ avec } \begin{array}{l} b \in B \\ g \in G \end{array} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = \Pi_{B^\perp}(x) \\ \Pi_{B^\perp}(x) = \Pi_{B^\perp}(g) \end{array} \\ &\Rightarrow x = \Pi_{B^\perp}(g) \text{ avec } g \in G \end{aligned}$$

ce qui démontre l'inclusion réciproque. ■

Lemme 3 Soient E et G deux espaces vectoriels de H , E étant supposé fermé et inclus dans G . Ils vérifient l'inclusion :

$$\Pi_{E^\perp}(G) \subset G$$

Démonstration Par application du lemme 2, avec E au lieu de B ,

$$\Pi_{E^\perp}(G) = E^\perp \cap (E + G) = E^\perp \cap G \subset G$$
■

Lemme 4 Soient B et G deux espaces vectoriels de H , B étant supposé fermé. Ils vérifient l'égalité :

$$B + G = B + \Pi_{B^\perp}(G)$$

Démonstration Montrons d'abord l'inclusion $B + G \subset B + \Pi_{B^\perp}(G)$:

$$G = \Pi_B(G) + \Pi_{B^\perp}(G) \subset B + \Pi_{B^\perp}(G) \Rightarrow B + G \subset B + B + \Pi_{B^\perp}(G) = B + \Pi_{B^\perp}(G)$$

Montrons ensuite l'inclusion réciproque, $B + \Pi_{B^\perp}(G) \subset B + G$, en utilisant le lemme 2 :

$$B + \Pi_{B^\perp}(G) = B + B^\perp \cap (B + G) \subset B + (B + G) = B + G$$
■

Lemme 5 Soient B et G deux espaces vectoriels fermés de H . Ils vérifient les égalités :

$$G = B \cap G + G \cap (B \cap G)^\perp \quad \text{et} \quad \Pi_{B^\perp}(G) = \Pi_{B^\perp}(G \cap (B \cap G)^\perp)$$

Démonstration Par application du lemme 4, avec $B \cap G$ au lieu de B ,

$$B \cap G + G = G = B \cap G + \Pi_{(B \cap G)^\perp}(G)$$

D'après le lemme 2, $\Pi_{(B \cap G)^\perp}(G) = (B \cap G)^\perp \cap (G + B \cap G) = (B \cap G)^\perp \cap G$, d'où le premier résultat : $G = B \cap G + G \cap (B \cap G)^\perp$.

Comme $B \cap G \subset B$, $\Pi_{B^\perp}(B \cap G) = 0$, et $\Pi_{B^\perp}(G) = \Pi_{B^\perp}(G \cap (B \cap G)^\perp)$. ■

Lemme 6 Soient B et G deux espaces vectoriels de H , B étant supposé fermé. Ils vérifient la relation d'équivalence :

$$B + G \text{ fermé} \quad \Leftrightarrow \quad \Pi_{B^\perp}(G) \text{ fermé}$$

Démonstration Montrons d'abord l'implication directe ($\Rightarrow$). Supposons, par hypothèse, l'espace $(B + G)$ fermé. $B^\perp$, espace orthogonal, est aussi fermé. D'après le lemme 2, $\Pi_{B^\perp}(G) = B^\perp \cap (B + G)$ et d'après un résultat classique de topologie, l'intersection de deux ensembles fermés est fermée, ce qui démontre l'implication.

Montrons l'implication réciproque ($\Leftarrow$). Supposons, par hypothèse, l'espace $\Pi_{B^\perp}(G)$ fermé et montrons que si une suite (x_n) d'éléments de $(B + G)$ converge vers un élément x , alors cette limite appartient aussi à $(B + G)$.

La suite (x_n) converge vers x , donc par continuité de l'opérateur $\Pi_{B^\perp}$, la suite $(\Pi_{B^\perp}(x_n))$ converge vers $\Pi_{B^\perp}(x)$. Les éléments $\Pi_{B^\perp}(x_n)$ de la suite appartiennent à l'espace

$$\Pi_{B^\perp}(B + G) = \Pi_{B^\perp}(G)$$

qui est fermé par hypothèse. Leur limite $\Pi_{B^\perp}(x)$ appartient donc aussi à $\Pi_{B^\perp}(G)$.

La limite x de la suite (x_n) se décompose en

$$x = \Pi_B(x) + \Pi_{B^\perp}(x) \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} \Pi_B(x) \in B \\ \Pi_{B^\perp}(x) \in \Pi_{B^\perp}(G) \end{array}$$

La limite x de la suite (x_n) , appartient à $B + \Pi_{B^\perp}(G)$, et $B + \Pi_{B^\perp}(G) = (B + G)$ d'après le lemme 4, ce qui montre que $(B + G)$ est fermé. ■

3.5 Définition du problème $\mathcal{P}_3(f)$

Le problème $\mathcal{P}_2(f)$ admet plusieurs solutions qui diffèrent entre elles d'un élément de $B \cap G$. Il est possible de réduire cette indétermination en ne retenant que la solution de norme minimale. C'est ainsi qu'est défini le problème $\mathcal{P}_3(f)$.

Problème $\mathcal{P}_3(f)$ Soient B et G deux sous-espaces vectoriels fermés dans H . Le problème $\mathcal{P}_3(f)$ est la recherche des éléments $g_0 \in G$ de norme minimale, solutions de l'équation du problème $\mathcal{P}_2(f)$:

$$\Pi_{B^\perp}(g_0) = \Pi_{\overline{\Pi_{B^\perp}(G)}}(f)$$

Le lemme 8 montre qu'il y a au plus une solution g_0 au problème $\mathcal{P}_3(f)$, qui existe si et seulement si $\Pi_{\overline{\Pi_{B^\perp}(G)}}(f)$ appartient à $\Pi_{B^\perp}(G)$. Pour le démontrer, il faut déjà démontrer le lemme 7.

Lemme 7 *L'opérateur $\Pi_{B^\perp}$ met en bijection les espaces $G \cap (B \cap G)^\perp$ et $\Pi_{B^\perp}(G)$. Sa bijection réciproque, R^{-1} , vérifie :*

$$\begin{aligned} \text{pour tout élément } x \text{ de } \Pi_{B^\perp}(G) \quad & \Pi_{B^\perp} \circ R^{-1}(x) = x \\ \text{pour tout élément } g \text{ de } G \quad & R^{-1} \circ \Pi_{B^\perp}(g) = \Pi_{(B \cap G)^\perp}(g) \end{aligned}$$

Démonstration Soit R la restriction du projecteur $\Pi_{B^\perp}$ à l'espace $G \cap (B \cap G)^\perp$ et à valeur dans $\Pi_{B^\perp}(G)$.

- Un élément x de $G \cap (B \cap G)^\perp$ tel que $R(x) = \Pi_{B^\perp}(x) = 0$ appartient à B , c'est-à-dire à $B \cap G \cap (B \cap G)^\perp = \{0\}$. R est donc une injection.
- D'après le lemme 5, $\Pi_{B^\perp}(G) = \Pi_{B^\perp}(G \cap (B \cap G)^\perp)$, ce qui montre que $R(G \cap (B \cap G)^\perp)$, image de l'espace $G \cap (B \cap G)^\perp$ par l'opérateur R s'identifie à l'espace $\Pi_{B^\perp}(G)$.

L'opérateur R constitue donc une bijection entre les espaces $G \cap (B \cap G)^\perp$ et $\Pi_{B^\perp}(G)$, d'où, pour tout élément x de $\Pi_{B^\perp}(G)$

$$\Pi_{B^\perp} \circ R^{-1}(x) = x$$

Soit g un élément de G . Comme $B \cap G \subset G$, et d'après le lemme 3, $\Pi_{(B \cap G)^\perp}(g)$ est élément de G , donc élément de $G \cap (B \cap G)^\perp$. Or R^{-1} , inverse de $\Pi_{B^\perp}$, vérifie, pour tout élément x de $G \cap (B \cap G)^\perp$, $R^{-1} \circ \Pi_{B^\perp}(x) = x$, d'où :

$$R^{-1} \circ \Pi_{B^\perp} \circ \Pi_{(B \cap G)^\perp}(g) = \Pi_{(B \cap G)^\perp}(g)$$

Comme en outre $B^\perp \subset (B \cap G)^\perp$, $\Pi_{B^\perp} \circ \Pi_{(B \cap G)^\perp}(g) = \Pi_{B^\perp}(g)$, ce qui donne finalement $R^{-1} \circ \Pi_{B^\perp}(g) = \Pi_{(B \cap G)^\perp}(g)$. ■

Lemme 8 *Il existe au plus une solution g_0 au problème $\mathcal{P}_3(f)$. Elle s'écrit ;*

$$g_0 = R^{-1} \circ \Pi_{\overline{\Pi_{B^\perp}(G)}}(f)$$

où R^{-1} , défini de $\Pi_{B^\perp}(G)$ sur $B \cap G \cap (B \cap G)^\perp$, est la bijection réciproque de $\Pi_{B^\perp}$. Cette solution existe si et seulement si $\Pi_{\overline{\Pi_{B^\perp}(G)}}(f)$ appartient à $\Pi_{B^\perp}(G)$.

Démonstration L'élément g_0 , défini par $g_0 = R^{-1} \circ \Pi_{\overline{\Pi_{B^\perp}(G)}}(f)$, existe si et seulement si $\Pi_{\overline{\Pi_{B^\perp}(G)}}(f)$ appartient à $\Pi_{B^\perp}(G)$. Il appartient à G car l'image de R^{-1} est incluse dans G . Il est solution de l'équation du problème $\mathcal{P}_2(f)$ car, comme R^{-1} est la bijection réciproque de $\Pi_{B^\perp}$ et d'après le lemme 7 :

$$\Pi_{B^\perp}(g_0) = \Pi_{B^\perp} \circ R^{-1} \circ \Pi_{\overline{\Pi_{B^\perp}(G)}}(f) = \Pi_{\overline{\Pi_{B^\perp}(G)}}(f)$$

Une solution g_1 du problème $\mathcal{P}_2(f)$ vérifie $\Pi_{\overline{\Pi_{B^\perp}(G)}}(f) = \Pi_{B^\perp}(g_1)$, d'où, par application du lemme 7 :

$$g_0 = R^{-1} \circ \Pi_{\overline{\Pi_{B^\perp}(G)}}(f) = R^{-1} \circ \Pi_{B^\perp}(g_1) = \Pi_{(B \cap G)^\perp}(g_1) \quad (19)$$

$$\Rightarrow \|g_1\|^2 = \|\Pi_{(B \cap G)^\perp}(g_1)\|^2 + \|\Pi_{B \cap G}(g_1)\|^2 = \|g_0\|^2 + \|\Pi_{B \cap G}(g_1)\|^2$$

ce qui montre que g_0 est de norme minimale parmi les solutions du problème $\mathcal{P}_2(f)$. Si g_1 , en plus d'être solution du problème $\mathcal{P}_2(f)$, est aussi solution du problème $\mathcal{P}_3(f)$, elle doit vérifier :

$$\|g_1\|^2 = \|g_0\|^2 \Rightarrow \Pi_{B \cap G}(g_1) = 0 \Rightarrow g_1 = \Pi_{(B \cap G)^\perp}(g_1)$$

Or d'après (19), $g_0 = \Pi_{(B \cap G)^\perp}(g_1)$. La solution g_0 du problème $\mathcal{P}_3(f)$ est bien unique. ■

4 Définition et propriétés d'une approche discrétisée du problème

Le travail qui précède a montré qu'il est nécessaire que l'espace $\Pi_{B^\perp}(G)$ soit fermé pour qu'il existe pour tout élément f une solution au problème $\mathcal{P}_3(f)$. Il est en fait nécessaire que $\Pi_{B^\perp}(G)$ soit fermé pour des raisons plus profondes encore.

Dans la pratique, en effet, les calculs sont discrétisés, les espaces B et G remplacés par des espaces B_n et G_n de dimension finie, l'élément f par un élément f_n et le problème $\mathcal{P}_3(f)$ par un problème $\mathcal{P}_3^n(f_n)$. L'espace $\Pi_{B_n^\perp}(G_n) = B_n^\perp \cap (B_n + G_n)$ (d'après le lemme 2) est de dimension finie donc fermé. Le problème discrétisé $\mathcal{P}_3^n(f_n)$ admet donc toujours une solution.

Pourtant, les développements qui suivent montrent que si $\Pi_{B^\perp}(G)$ n'est pas fermé, les solutions des problèmes discrétisés $\mathcal{P}_3^n(f_n)$ risquent de diverger pour une discrétisation de plus en plus fine, contrairement au cas où $\Pi_{B^\perp}(G)$ est fermé. Pour montrer ce résultat, il faut d'abord préciser la notion de "discrétisation de plus en plus fine".

4.1 Définition d'une approche discrétisée

Dans les calculs numériques, les espaces B_n et G_n , de dimension finie, sont en fait constitués de fonctions constantes sur des pavés de petite taille. Lorsque la taille des pavés diminue, l'approximation s'améliore. C'est ce que recouvre la notion vague de "discrétisation de plus en plus fine". La définition suivante permet de donner un sens mathématique à ce processus de discrétisation.

Définition 6 Une *discrétisation* du problème $\mathcal{P}_3(f)$ consiste à remplacer les espaces B et G par des espaces de dimension finie B_n et G_n et l'élément f par un élément f_n . Une *approche discrétisée* est une suite de discrétisations, pour un indice n variant de 1 à l'infini, telle que :

- pour tout n , $B_n \subset B$, et pour tout b dans B , la suite $(\Pi_{B_n}(b))$ converge vers b ,
- pour tout n , $G_n \subset G$, et pour tout g dans G , la suite $(\Pi_{G_n}(g))$ converge vers g ,
- la suite (f_n) converge vers f .

Dans la suite, les espaces B_n , G_n et les fonctions f_n qui définissent le problème discrétisé sont supposés vérifier les conditions d'une approche discrétisée. Ces conditions sont d'ailleurs faciles à satisfaire. C'est le cas des maillages proposés dans la partie 6 (**Discrétisation**) lorsque les dimensions des mailles tendent vers 0.

4.2 Propriétés d'une approche discrétisée

La série de lemmes à venir aboutit au théorème 6 suivant lequel les projections discrétisées $\Pi_{\Pi_{B_n^\perp}(G_n)}(f_n)$ convergent vers la projection $\Pi_{\Pi_{B^\perp}(G)}(f)$ du problème $\mathcal{P}_3(f)$.

Lemme 9 Pour tout élément x de H , la suite $(\Pi_{B_n}(x))$ converge vers $\Pi_B(x)$ et la suite $(\Pi_{B_n^\perp}(x))$ converge vers $\Pi_{B^\perp}(x)$.

Démonstration Par définition de l'approche discrétisée, la suite $(\Pi_{B_n} \circ \Pi_B(x))$ converge vers $\Pi_B(x)$ car l'élément $\Pi_B(x)$ appartient à B . Comme en outre B_n est inclus dans B , $\Pi_{B_n}(x) = \Pi_{B_n} \circ \Pi_B(x)$, ce qui montre que la suite $(\Pi_{B_n}(x))$ converge vers $\Pi_B(x)$.

Un élément x de H se décompose en $x = \Pi_{B_n}(x) + \Pi_{B_n^\perp}(x)$. Par passage à la limite, la suite $(\Pi_{B_n^\perp}(x))$ converge vers $x - \Pi_B(x) = \Pi_{B^\perp}(x)$. ■

Lemme 10 Pour tout élément x de $\Pi_{B^\perp}(G)$ il existe une suite (x_n) de limite x telle que, pour tout n , x_n appartienne à $\Pi_{B_n^\perp}(G_n)$.

Démonstration Pour un élément x de $\Pi_{B^\perp}(G)$ il existe un élément g de G tel que $x = \Pi_{B^\perp}(g)$. Soit la suite (x_n) dont les éléments sont définis par $x_n = \Pi_{B_n^\perp} \circ \Pi_{G_n}(g)$. Pour tout n , x_n appartient à $\Pi_{B_n^\perp}(G_n)$. De plus,

$$\begin{aligned} \|x - x_n\| &= \|\Pi_{B^\perp}(g) - \Pi_{B_n^\perp} \circ \Pi_{G_n}(g)\| \\ &\leq \|\Pi_{B^\perp}(g) - \Pi_{B_n^\perp}(g)\| + \|\Pi_{B_n^\perp}(g) - \Pi_{B_n^\perp} \circ \Pi_{G_n}(g)\| \\ &\leq \|\Pi_{B^\perp}(g) - \Pi_{B_n^\perp}(g)\| + \|g - \Pi_{G_n}(g)\| \end{aligned}$$

L'inégalité $\|\Pi_{B_n^\perp}(g) - \Pi_{B_n^\perp} \circ \Pi_{G_n}(g)\| \leq \|g - \Pi_{G_n}(g)\|$ provient de ce que, pour tout projecteur Π_F , et pour tout élément y de H , $\|\Pi_F(y)\| \leq \|y\|$. Par hypothèse $(\Pi_{G_n}(g))$ tend vers g et par application du lemme précédent $(\Pi_{B_n^\perp}(g))$ tend vers $\Pi_{B^\perp}(g)$, ce qui montre que la suite (x_n) converge vers x . ■

Lemme 11 Pour tout x de $\Pi_{B^\perp}(G)$, la suite $(\Pi_{\Pi_{B_n^\perp}(G_n)}(x))$ converge vers x .

Démonstration D'après le lemme précédent, il existe une suite (x_n) qui converge vers x et telle que, pour tout n , x_n appartienne à $\Pi_{B_n^\perp}(G_n)$. L'élément x_n s'écrit aussi $x_n = \Pi_{\Pi_{B_n^\perp}(G_n)}(x_n)$ car il appartient à $\Pi_{B_n^\perp}(G_n)$; par ailleurs $\Pi_{\Pi_{B_n^\perp}(G_n)}$ est un projecteur, donc,

$$\begin{aligned} \|x_n - \Pi_{\Pi_{B_n^\perp}(G_n)}(x)\| &= \|\Pi_{\Pi_{B_n^\perp}(G_n)}(x_n) - \Pi_{\Pi_{B_n^\perp}(G_n)}(x)\| \leq \|x_n - x\| \\ \Rightarrow \|x - \Pi_{\Pi_{B_n^\perp}(G_n)}(x)\| &\leq \|x - x_n\| + \|x_n - \Pi_{\Pi_{B_n^\perp}(G_n)}(x)\| \leq 2\|x - x_n\| \end{aligned}$$

ce qui montre que la suite $(\Pi_{\Pi_{B_n^\perp}(G_n)}(x))$ converge vers x . ■

Lemme 12 Pour tout x de $\overline{\Pi_{B^\perp}(G)}$, la suite $(\Pi_{\Pi_{B_n^\perp}(G_n)}(x))$ converge vers x .

Démonstration Comme x est dans la fermeture de $\Pi_{B^\perp}(G)$, il existe une suite (x_m) d'éléments de $\Pi_{B^\perp}(G)$ de limite x .

$$\begin{aligned} \|x - \Pi_{\Pi_{B_n^\perp}(G_n)}(x)\| &\leq \|x - x_m\| + \|x_m - \Pi_{\Pi_{B_n^\perp}(G_n)}(x_m)\| \\ &\quad + \|\Pi_{\Pi_{B_n^\perp}(G_n)}(x_m) - \Pi_{\Pi_{B_n^\perp}(G_n)}(x)\| \\ &\leq \|x - x_m\| + \|x_m - \Pi_{\Pi_{B_n^\perp}(G_n)}(x_m)\| + \|x_m - x\| \end{aligned}$$

car $\Pi_{\Pi_{B_n^\perp}(G_n)}$ est un projecteur. Soit un réel $\varepsilon > 0$. Comme la suite (x_m) converge vers x , il existe un entier m tel que $\|x - x_m\| < \varepsilon$. D'après le lemme précédent, la suite $(\Pi_{\Pi_{B_n^\perp}(G_n)}(x_m))$ converge vers x_m lorsque n tend vers l'infini, donc il existe un entier N

tel que pour tout $n > N$, $\|x_m - \Pi_{\Pi_{B_n^\perp}(G_n)}(x_m)\| < \varepsilon$. Finalement, pour tout $n > N$, $\|x - \Pi_{\Pi_{B_n^\perp}(G_n)}(x)\| < 3\varepsilon$, ce qui signifie que la suite $(\Pi_{\Pi_{B_n^\perp}(G_n)}(x))$ converge vers x . ■

Lemme 13 Pour tout élément x de l'espace $B + (B + G)^\perp$, la suite $(\Pi_{\Pi_{B_n^\perp}(G_n)}(x))$ converge vers 0.

Démonstration Un élément x de $B + (B + G)^\perp$ s'écrit $x = b + y$ avec $b \in B$ et $y \in (B + G)^\perp$.

- Comme l'espace $\Pi_{B_n^\perp}(G_n) = B_n^\perp \cap (B_n + G_n)$ est inclus dans $B_n^\perp$, l'élément $\Pi_{\Pi_{B_n^\perp}(G_n)}(b)$ peut aussi s'écrire $\Pi_{\Pi_{B_n^\perp}(G_n)} \circ \Pi_{B_n^\perp}(b)$. De plus $\Pi_{\Pi_{B_n^\perp}(G_n)}$ est un projecteur, d'où

$$\|\Pi_{\Pi_{B_n^\perp}(G_n)}(b)\| = \|\Pi_{\Pi_{B_n^\perp}(G_n)} \circ \Pi_{B_n^\perp}(b)\| \leq \|\Pi_{B_n^\perp}(b)\|$$

D'après le lemme 10, la suite $(\|\Pi_{B_n^\perp}(b)\|)$ converge vers $\|\Pi_{B^\perp}(b)\| = 0$, la suite $(\Pi_{\Pi_{B_n^\perp}(G_n)}(b))$ converge donc vers 0.

- Comme l'espace $\Pi_{B_n^\perp}(G_n) = B_n^\perp \cap (B_n + G_n)$ est inclus dans $B_n + G_n$, l'élément $\Pi_{\Pi_{B_n^\perp}(G_n)}(y)$ peut aussi s'écrire $\Pi_{\Pi_{B_n^\perp}(G_n)} \circ \Pi_{(B_n + G_n)}(y)$. L'inclusion $B_n + G_n \subset B + G$ entraîne l'inclusion $(B + G)^\perp \subset (B_n + G_n)^\perp$ d'où la série d'implications

$$y \in (B + G)^\perp \Rightarrow y \in (B_n + G_n)^\perp \Rightarrow \Pi_{(B_n + G_n)}(y) = 0 \Rightarrow \Pi_{\Pi_{B_n^\perp}(G_n)}(y) = 0$$

- Finalement la suite $(\Pi_{\Pi_{B_n^\perp}(G_n)}(x))$ converge vers 0. ■

Lemme 14 Pour tout élément x de l'espace $(\Pi_{B^\perp}(G))^\perp$, la suite $(\Pi_{\Pi_{B_n^\perp}(G_n)}(x))$ converge vers 0.

Démonstration La démonstration repose sur le théorème suivant, classique en théorie des espaces de Hilbert (Brezis [3]).

Théorème 5 Soient E et F deux sous-espaces fermés d'un espace de Hilbert. Alors

$$(E \cap F)^\perp = \overline{E^\perp + F^\perp}$$

D'après le lemme 2, $\Pi_{B^\perp}(G) = B^\perp \cap (B + G)$, et par application du théorème:

$$(\Pi_{B^\perp}(G))^\perp = (B^\perp \cap (B + G))^\perp = \overline{B + (B + G)^\perp}$$

ce qui signifie que pour tout élément x de l'espace $(\Pi_{B^\perp}(G))^\perp$ il existe une suite (x_m) dans $B + (B + G)^\perp$ qui converge vers x . De plus,

$$\begin{aligned} \|\Pi_{\Pi_{B_n^\perp}(G_n)}(x)\| &\leq \|\Pi_{\Pi_{B_n^\perp}(G_n)}(x_m)\| + \|\Pi_{\Pi_{B_n^\perp}(G_n)}(x_m) - \Pi_{\Pi_{B_n^\perp}(G_n)}(x)\| \\ &\leq \|\Pi_{\Pi_{B_n^\perp}(G_n)}(x_m)\| + \|x_m - x\| \end{aligned}$$

car $\Pi_{\Pi_{B_n^\perp}(G_n)}$ est un projecteur. Soit un réel $\varepsilon > 0$. Comme la suite (x_m) converge vers x , il existe un entier m tel que $\|x - x_m\| < \varepsilon$. D'après le lemme 13, la suite $(\Pi_{\Pi_{B_n^\perp}(G_n)}(x_m))$ converge vers 0 lorsque n tend vers l'infini, donc il existe un entier N tel que pour tout $n > N$, $\|x_m - \Pi_{\Pi_{B_n^\perp}(G_n)}(x_m)\| < \varepsilon$. Finalement, pour tout $n > N$, $\|\Pi_{\Pi_{B_n^\perp}(G_n)}(x)\| < 2\varepsilon$, ce qui signifie que la suite $(\Pi_{\Pi_{B_n^\perp}(G_n)}(x))$ converge vers 0. ■

Lemme 15 Pour tout x de H , la suite $(\Pi_{\Pi_{B_n^\perp}(G_n)}(x))$ converge vers $\Pi_{\overline{\Pi_{B^\perp}(G)}}(x)$.

Démonstration La démonstration consiste à rassembler les résultats des différents lemmes. Un élément x de H se décompose en $x = \Pi_{\overline{\Pi_{B^\perp}(G)}}(x) + \Pi_{(\Pi_{B^\perp}(G))^\perp}(x)$, donc

$$\Pi_{\Pi_{B^\perp}(G_n)}(x) = \Pi_{\Pi_{B^\perp}(G_n)} \circ \Pi_{\overline{\Pi_{B^\perp}(G)}}(x) + \Pi_{\Pi_{B^\perp}(G_n)} \circ \Pi_{(\Pi_{B^\perp}(G))^\perp}(x)$$

La suite $(\Pi_{\Pi_{B^\perp}(G_n)} \circ \Pi_{\overline{\Pi_{B^\perp}(G)}}(x))$ converge vers $\Pi_{\overline{\Pi_{B^\perp}(G)}}(x)$ d'après le lemme 12 et la suite $(\Pi_{\Pi_{B^\perp}(G_n)} \circ \Pi_{(\Pi_{B^\perp}(G))^\perp}(x))$ converge vers 0 d'après le lemme 14. Donc la suite $(\Pi_{\Pi_{B^\perp}(G_n)}(x))$ converge vers $\Pi_{\overline{\Pi_{B^\perp}(G)}}(x)$. ■

Lemme 16 La suite $(\Pi_{\Pi_{B^\perp}(G_n)}(f_n))$ converge vers l'élément $\Pi_{\overline{\Pi_{B^\perp}(G)}}(f)$.

Démonstration

$$\begin{aligned} \|\Pi_{\Pi_{B^\perp}(G_n)}(f_n) - \Pi_{\overline{\Pi_{B^\perp}(G)}}(f)\| &\leq \|\Pi_{\Pi_{B^\perp}(G_n)}(f_n) - \Pi_{\Pi_{B^\perp}(G_n)}(f)\| \\ &\quad + \|\Pi_{\Pi_{B^\perp}(G_n)}(f) - \Pi_{\overline{\Pi_{B^\perp}(G)}}(f)\| \\ &\leq \|f_n - f\| + \|\Pi_{\Pi_{B^\perp}(G_n)}(f) - \Pi_{\overline{\Pi_{B^\perp}(G)}}(f)\| \end{aligned}$$

car $\Pi_{\Pi_{B^\perp}(G_n)}$ est un projecteur. D'après l'hypothèse (f_n) converge vers f et d'après le lemme précédent, $(\Pi_{\Pi_{B^\perp}(G_n)}(f))$ converge vers $\Pi_{\overline{\Pi_{B^\perp}(G)}}(f)$, ce qui achève la démonstration. ■

Théorème 6 La suite (g_n) des solutions des problèmes $\mathcal{P}_3^n(f_n)$ d'une approche discrétisée est telle que la suite $(\Pi_{B^\perp}(g_n))$ converge vers $\Pi_{\overline{\Pi_{B^\perp}(G)}}(f)$

Démonstration La solution g_n du problème $\mathcal{P}_3^n(f_n)$ vérifie $\Pi_{B^\perp}(g_n) = \Pi_{\Pi_{B^\perp}(G_n)}(f_n)$ et, d'après le théorème précédent la suite $(\Pi_{\Pi_{B^\perp}(G_n)}(f_n))$ converge vers $\Pi_{\overline{\Pi_{B^\perp}(G)}}(f)$. La suite $(\Pi_{B^\perp}(g_n))$ converge donc vers $\Pi_{\overline{\Pi_{B^\perp}(G)}}(f)$.

Comme $B^\perp$ est inclus dans $B_n^\perp$, $\Pi_{B^\perp}(g_n) = \Pi_{B^\perp} \circ \Pi_{B_n^\perp}(g_n)$. Par continuité de l'opérateur $\Pi_{B^\perp}$, la suite $(\Pi_{B^\perp}(g_n))$ converge donc vers $\Pi_{B^\perp} \circ \Pi_{\overline{\Pi_{B^\perp}(G)}}(f) = \Pi_{\overline{\Pi_{B^\perp}(G)}}(f)$. ■

4.3 Divergence des solutions d'une approche discrétisée

Les résultats suivants montrent pourquoi il faut que $\Pi_{B^\perp}(G)$ soit fermé : le lemme 18 montre que si l'espace $\Pi_{B^\perp}(G)$ n'est pas fermé, il existe des approches discrétisées dont les solutions divergent ; au contraire, le théorème 9 montre que si l'espace $\Pi_{B^\perp}(G)$ est fermé, les solutions de toute approche discrétisée convergent.

Théorème 7 (Compacité séquentielle faible) De toute suite (x_n) bornée en norme, il est possible d'extraire une suite $(x_{\phi(n)})$ qui converge faiblement vers un élément x , c'est-à-dire telle que pour tout $y \in H$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_{\phi(n)}, y \rangle = \langle x, y \rangle$$

Ce théorème classique de la théorie des espaces de Hilbert, ainsi que la remarque suivante, permettent de démontrer le lemme 17.

Remarque La limite faible x d'une suite (x_n) d'éléments d'un espace fermé F appartient aussi à F .

En effet, pour tout élément y de $F^\perp$, $\langle x, y \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, y \rangle$ car la suite (x_n) converge faiblement vers x . De plus, tout élément x_n de la suite appartient à F , ce qui entraîne

$\langle x_n, y \rangle = 0$, donc $\langle x, y \rangle = 0$ pour tout élément y de $F^\perp$. Ceci signifie finalement que x appartient à $(F^\perp)^\perp = F$ car F est fermé.

Lemme 17 Soient B et G deux espaces fermés. Soit R^{-1} , l'opérateur bijectif, défini sur $\Pi_{B^\perp}(G)$ et à valeurs dans $G \cap (B \cap G)^\perp$, inverse du projecteur $\Pi_{B^\perp}$. Soit (x_n) une suite de $\Pi_{B^\perp}(G)$ qui converge (fortement) vers une limite x . Si la suite $(R^{-1}(x_n))$ est bornée, alors x appartient à $\Pi_{B^\perp}(G)$.

Démonstration D'après le théorème 7 de la compacité séquentielle faible, il est possible d'extraire de la suite $(R^{-1}(x_n))$, bornée, une sous-suite $(R^{-1}(x_{\phi(n)}))$ convergeant faiblement vers un élément y . Par définition de R^{-1} , $\Pi_{B^\perp}(R^{-1}(x_{\phi(n)})) = x_{\phi(n)}$, ce qui peut se combiner avec la caractérisation (14) du projecteur $\Pi_{B^\perp}$ sous la forme :

$$\begin{aligned} & \text{pour tout } z \in B^\perp, \quad \langle \Pi_{B^\perp}(R^{-1}(x_{\phi(n)})), z \rangle = \langle R^{-1}(x_{\phi(n)}), z \rangle \\ \Leftrightarrow & \text{pour tout } z \in B^\perp, \quad \langle x_{\phi(n)}, z \rangle = \langle R^{-1}(x_{\phi(n)}), z \rangle \\ \Leftrightarrow & \text{pour tout } z \in B^\perp, \quad \langle x, z \rangle = \langle y, z \rangle \quad \text{par passage à la limite.} \end{aligned}$$

Comme les éléments de la suite (x_n) appartiennent à $B^\perp$, fermé, leur limite x aussi. La dernière égalité peut ainsi être interprétée comme l'équation caractéristique (14) de la projection de y sur $B^\perp$: $x = \Pi_{B^\perp}(y)$. Par ailleurs, comme y est limite faible d'une suite $(R^{-1}(x_{\phi(n)}))$ d'éléments de l'espace fermé G , et d'après la remarque ci-dessus, y appartient à G . Finalement, x appartient à $\Pi_{B^\perp}(G)$. ■

Lemme 18 Si $\Pi_{\overline{\Pi_{B^\perp}(G)}}(f)$ n'appartient pas à $\Pi_{B^\perp}(G)$, toute suite (g_n) de solutions d'une approche discrétisée du problème $\mathcal{P}_3(f)$ est non bornée.

Démonstration Comme $G_n \subset G$, la suite $(\Pi_{B^\perp}(g_n))$ appartient à $\Pi_{B^\perp}(G)$ et, d'après le théorème 6, elle converge vers $\Pi_{\overline{\Pi_{B^\perp}(G)}}(f)$. La suite $(R^{-1} \circ \Pi_{B^\perp}(g_n))$ n'est pas bornée, car sinon, d'après le lemme 17, $\Pi_{\overline{\Pi_{B^\perp}(G)}}(f)$ appartiendrait à $\Pi_{B^\perp}(G)$, contrairement à l'hypothèse.

D'après le lemme 7, $R^{-1} \circ \Pi_{B^\perp}(g_n) = \Pi_{(B \cap G)^\perp}(g_n)$, et comme $\Pi_{(B \cap G)^\perp}$ est un projecteur, $\|\Pi_{(B \cap G)^\perp}(g_n)\| \leq \|g_n\|$. Comme la suite $(\Pi_{(B \cap G)^\perp}(g_n))$ n'est pas bornée, la suite (g_n) non plus. ■

Ce lemme montre bien que si $\Pi_{B^\perp}(G)$ n'est pas fermé, les suites de solutions des approches discrétisées risquent de diverger. Dans le cas contraire, la situation est plus favorable.

4.4 Convergence des solutions d'une approche discrétisée

Le théorème 8 de l'inverse continu permet de démontrer le théorème suivant, qui résume l'étude du problème $\mathcal{P}_3(f)$.

Théorème 8 (de l'inverse continu) Si un opérateur continu met en bijection deux espaces fermés d'un espace de Hilbert, son inverse est aussi continu.

Théorème 9 Si $\Pi_{B^\perp}(G)$ est fermé, le problème $\mathcal{P}_3(f)$ admet une unique solution pour tout f , et, pour toute suite (g_n) de solutions d'une approche discrétisée du problème $\mathcal{P}_3(f)$, la suite $(\Pi_{(B \cap G)^\perp}(g_n))$ converge vers la solution $R^{-1} \circ \Pi_{\Pi_{B^\perp}(G)}(f)$ du problème $\mathcal{P}_3(f)$.

Démonstration La première partie de l'énoncé, (une unique solution pour tout f) a déjà été démontrée.

Si $\Pi_{B^\perp}(G)$ est fermé, d'après le théorème 8 de l'inverse continu, R^{-1} est continu car il est l'inverse de l'opérateur continu $\Pi_{B^\perp}$. Par continuité de R^{-1} , la suite $(R^{-1} \circ \Pi_{B^\perp}(g_n))$ converge vers $R^{-1} \circ \Pi_{\Pi_{B^\perp}(G)}(f)$, solution du problème $\mathcal{P}_3(f)$. Enfin, d'après le lemme 7, $R^{-1} \circ \Pi_{B^\perp}(g_n) = \Pi_{(B \cap G)^\perp}(g_n)$, ce qui achève la démonstration. ■

Ce dernier théorème comporte une légère restriction : pour une suite (g_n) de solutions discrétisées, si la partie $\Pi_{(B \cap G)^\perp}(g_n)$ converge, la partie $\Pi_{(B \cap G)}(g_n)$ peut fort bien diverger. L'étude de l'espace $B \cap G$ des indéterminations est donc importante.

5 Propriétés topologiques de l'espace somme $B + G$

Le travail qui précède montre qu'une approche discrétisée du problème $\mathcal{P}_3(f)$ n'a de sens que si l'espace $\Pi_{B^\perp}(G)$ est fermé, c'est-à-dire, d'après le lemme 6, si l'espace $B + G$ est fermé. Montrons maintenant ce résultat.

5.1 Séparation du domaine en plusieurs zones

Une première remarque permet de diviser le domaine Ω en sous-zones, qui seront traitées indépendamment les unes des autres pour montrer que l'espace $B + G$ est fermé.

Soient Ω_1 et Ω_2 , deux parties disjointes de Ω telles que $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega$. Le produit scalaire (12) défini pour deux fonction f_1 et f_2 de H peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \langle f_1, f_2 \rangle &= \sum_{t=t_1}^{t_M} \int_{\Omega} f_1(\mathbf{x}, t) f_2(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \\ &= \sum_{t=t_1}^{t_M} \int_{\Omega_1} f_1(\mathbf{x}, t) f_2(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} + \sum_{t=t_1}^{t_M} \int_{\Omega_2} f_1(\mathbf{x}, t) f_2(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \\ &= \langle f_1, f_2 \rangle_1 + \langle f_1, f_2 \rangle_2 \end{aligned}$$

ce qui permet de voir l'espace de Hilbert H comme l'espace produit $H_1 \times H_2$ des deux espaces H_1 et H_2 , qui contiennent les restrictions des fonctions de H sur respectivement Ω_1 et Ω_2 .

Cette séparation peut également s'appliquer à l'espace G des fonctions invariantes dans le temps, car les valeurs prises par une fonction g de G sur Ω_1 ne sont pas reliées aux valeurs prises sur Ω_2 . G peut donc être vu comme le produit $G_1 \times G_2$ des espaces G_1 et G_2 des fonctions invariantes dans le temps définies sur Ω_1 et Ω_2 .

Mais il n'est pas toujours possible d'appliquer cette séparation à l'espace B , car les valeurs d'une fonction de B sont constantes sur les lignes de courant de l'écoulement, et si une ligne de courant appartient aux deux zones Ω_1 et Ω_2 les valeurs prises par une fonction de B sur Ω_1 et Ω_2 ne sont pas indépendantes. Pour appliquer cette séparation il faut et il suffit que chaque ligne de courant de l'écoulement n'appartienne qu'à une seule zone. Dans ce cas $B = B_1 \times B_2$ et la somme $B + G = (B_1 + G_1) \times (B_2 + G_2)$. Il est alors équivalent de montrer que l'espace $B + G$ est fermé ou que les espaces $B_1 + G_1$ et $B_2 + G_2$ sont fermés.

Ce qui vient d'être montré pour deux zones est également valable pour N zones $\Omega_1, \dots, \Omega_N$. Si chaque ligne de courant n'appartient qu'à une seule zone, l'espace B peut être vu comme un espace produit $B_1 \times \dots \times B_N$, la somme $B + G$ est égale au produit $(B_1 + G_1) \times \dots \times (B_N + G_N)$ et il suffit de montrer indépendamment sur chaque zone Ω_z que l'espace $B_z + G_z$ est fermé.

Or la division du domaine en zones de deux types, opérée au paragraphe 2.5 (**Espace des indéterminations**), répond à cette exigence, suivant laquelle chaque ligne de courant n'appartient qu'à une seule zone. Il suffira donc de vérifier que sur de telles zones Ω_z l'espace somme $B_z + G_z$ est fermé. Dans la suite, par simplification de notation, l'espace Ω_z sera désormais noté Ω et correspondra, suivant la terminologie introduite au paragraphe 2.5, soit à une zone du premier type, où toute ligne de courant croise une autre ligne de courant, soit à une zone de second type où toutes les lignes de courant sont parallèles.

5.2 Espace produit

Pour introduire les notations nécessaires aux démonstrations qui suivent, considérons le produit scalaire (12) de l'espace de Hilbert H , défini pour deux fonction f_1 et f_2 , et qui peut s'écrire :

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \sum_{t=t_1}^{t_M} \int_{\Omega} f_1(\mathbf{x}, t) f_2(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \sum_{t=t_1}^{t_M} \langle f_1, f_2 \rangle_t$$

où, pour toute date t , le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_t$ est défini pour des fonctions dépendant des coordonnées d'espace $\mathbf{x}$, par

$$\langle \phi_1, \phi_2 \rangle_t = \langle \phi_1, \phi_2 \rangle_1 = \int_{\Omega} \phi_1(\mathbf{x}) \phi_2(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

C'est le produit scalaire d'un espace de Hilbert H_1 de fonctions de carré sommable, définies sur le domaine Ω . H peut donc être vu comme l'espace de Hilbert produit $(H_1)^M$. Cela permet d'une part de décomposer les fonctions $f(\mathbf{x}, t)$ de H suivant les dates t , et d'autre part, de superposer les écoulements de chaque date.

Notations Un élément x de $H = (H_1)^M$ s'écrira comme un M -uplets $(x^1, \dots, x^M)$ où chaque x^t appartient à H_1 . Une suite (x_n) de $(H_1)^M$, qui équivaut aux M suites $(x_n^1), \dots, (x_n^M)$, converge vers $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^M)$ si chaque suite (x_n^t) converge vers x_0^t .

Les sous-espaces B et G de H s'interprètent dans l'espace produit sous la forme :

- Soit B_t le sous-espace des fonctions, constantes sur les lignes de courant du domaine Ω_t , qui peuvent s'écrire $b_t(u(\mathbf{x}, t))$ sur le domaine Ω_t ; sur le domaine complémentaire $\Omega \setminus \Omega_t$, elles peuvent prendre n'importe quelles valeurs. L'espace B correspond à l'espace produit $B_1 \times \dots \times B_M$ des M espaces B_t . Notons au passage que comme B est fermé, les espaces B_t sont eux aussi fermés.
- L'espace G est l'espace diagonal de H , composé des M -uplets $(x^1, \dots, x^M)$ de cet espace produit $(H_1)^M$, tels que $x^1 = \dots = x^M$.

5.3 Cas de lignes de courant parallèles

Montrons, dans le cas où Ω est une zone du second type, c'est-à-dire où toutes les lignes de courant sont parallèles, que l'espace somme $B + G$ est fermé.

Théorème 10 *Si les lignes de courant de tous les écoulements sont parallèles sur Ω , l'espace somme $B + G$ est fermé.*

Démonstration L'espace $B + G$ est fermé si la limite de toute suite convergente de $B + G$ appartient à $B + G$. Soit $(x_n + b_n^1, \dots, x_n + b_n^M)$, avec $b_n^t \in B_t$ pour tout t , $x_n \in H_1$, une suite de $B + G$. Supposons cette suite convergente vers y , c'est-à-dire chaque suite $(x_n + b_n^t)$ convergente vers y^t et montrons que pour tout t , y^t peut s'écrire $y^t = x_0 + b_0^t$, où x_0 est une même composante et $b_0^t \in B_t$.

Pour une date t , et pour n'importe quelle fonction x_0 de H_1 , la restriction de $y^t - x_0$ sur $\Omega \setminus \Omega_t$ est toujours la restriction d'une fonction b_0^t de B_t car les fonctions de B_t peuvent prendre n'importe quelles valeurs sur $\Omega \setminus \Omega_t$. La condition $y^t = x_0 + b_0^t$, avec $b_0^t \in B_t$, sera donc toujours vérifiée sur $\Omega \setminus \Omega_t$. Il reste à vérifier la condition sur les sous-domaines Ω_t .

Comme toutes les lignes de courant sont parallèles, l'ensemble des lignes de courant de toutes les dates forment un écoulement dans tout le domaine Ω . Soit B_0 l'espace des fonctions constantes sur ces lignes de courant. C'est un espace fermé. Pour une date t , la restriction sur Ω_t d'une fonction de B_0 correspond à la restriction d'une fonction de B_t . Comme la propriété ne doit plus être démontrée que sur Ω_t , l'espace B_t pourra désormais être confondu avec B_0 .

Pour deux dates t et s , la restriction sur $\Omega_t \cap \Omega_s$ de la suite $(x_n + b_n^t - x_n - b_n^s) = (b_n^t - b_n^s)$ est convergente de limite $y^t - y^s$. Comme les fonctions $b_n^t - b_n^s$ appartiennent à B_0 , leur limite $y^t - y^s$ est égale, sur l'intersection $\Omega_t \cap \Omega_s$, à une fonction $dy^{t,s}$ de B_0 , qui n'est définie que sur les lignes d'intersection non nulle avec $\Omega_t \cap \Omega_s$.

Sur une ligne de courant u , chaque fonction b de B_0 prend une unique valeur $b(u)$. Ainsi, si l'intersection de la ligne u avec $\Omega_t \cap \Omega_s$ est non vide, les fonctions $dy^{t,s}$ prennent une unique valeur $dy^{t,s}(u)$. Les valeurs $dy^{t,s}(u)$ vérifient les deux propriétés suivantes :

1. $dy^{t,s}(u) = -dy^{s,t}(u)$ car sur $\Omega_t \cap \Omega_s$, $dy^{t,s} = y^t - y^s$ et $dy^{s,t} = y^s - y^t = -dy^{t,s}$.
2. S'il existe des dates $t_1 \dots t_m$ telles que les intersections de $\Omega_{t_i} \cap \Omega_{t_{i+1}}$, pour $t = 1 \dots m$, ainsi que l'intersection $\Omega_{t_1} \cap \Omega_{t_m}$, soient non vides avec la ligne u , alors, par passage à la limite sur les suites $(b_n^{t_i}(u) - b_n^{t_{i+1}}(u))$,

$$\sum_{i=1}^{m-1} b_n^{t_i}(u) - b_n^{t_{i+1}}(u) = b_n^{t_1}(u) - b_n^{t_m}(u) \Rightarrow \sum_{i=1}^{m-1} dy^{t_i, t_{i+1}}(u) = dy^{t_1, t_m}(u)$$

Montrons qu'il existe des fonctions $b_0^t \in B_0$ telles que sur toute intersection $\Omega_t \cap \Omega_s$, $y^t - y^s = b_0^t - b_0^s$. De telles fonctions existent si, sur chaque ligne de courant u , il existe M variables $b_0^t(u)$, indicées par t , qui vérifient le système linéaire :

$$b_0^t(u) - b_0^s(u) = y^t(u) - y^s(u) = dy^{t,s}(u)$$

pour tout couple d'indices (t, s) tel que l'intersection $\Omega_t \cap \Omega_s$ soit traversée par la ligne u . Le nombre d'équations peut dépasser le nombre M d'inconnues du système mais il existe toujours des solutions à cause des propriétés des constantes $dy^{t,s}(u)$ énoncées au dessus.

Il existe donc toujours des fonctions $b_0^t \in B_0$ telles que sur toute intersection $\Omega_t \cap \Omega_s$, $y^t - y^s = b_0^t - b_0^s$. A partir de ces fonctions, construisons une fonction x_0 en posant sur

chaque domaine Ω_i , $x_0 = y^i - b_0^i$. Sur toute intersection $\Omega_i \cap \Omega_j$, l'égalité $y^i - y^j = b_0^i - b_0^j$ assure que les deux définitions possibles de x_0 , $x_0 = y^i - b_0^i$ et $x_0 = y^j - b_0^j$, sont compatibles.

Les fonctions $x_0 \in H_1$ et $b_0^i \in B_0$ ainsi construites vérifient sur tout domaine Ω_i l'égalité $y^i = x_0 + b_0^i$, ce qui montre que l'espace $B + G$ est fermé.

■

5.4 Lemmes préliminaires

Dans le cas où Ω est une zone du premier type, c'est-à-dire où chaque ligne de courant croise une autre ligne de courant, montrer que l'espace somme $B + G$ est fermé est moins immédiat que pour les zones du second type. La démonstration s'appuie sur quelques lemmes préliminaires.

Lemme 19 Soit Δ le pavé non vide $O_1 \times O_2$, produit des ouverts bornés O_1 et O_2 de $\mathbb{R}$. Soit $H = L^2(\Delta, dx dy)$ l'espace des fonctions de carré sommable sur Δ . Les sous-espaces X et Y de H , des fonctions qui s'écrivent respectivement $f(x, y) = \chi(x)$ et $f(x, y) = \gamma(y)$, sont fermés ainsi que leur somme $X + Y$.

Démonstration $|O| = \int_O dx$ désigne la longueur d'un ouvert O . D'après le lemme 1, les espaces X et Y sont fermés car il peuvent s'identifier respectivement aux espaces $L^2(O_1, |O_2| dx)$ et $L^2(O_2, |O_1| dy)$. Soient (χ_n) et (γ_n) deux suites de X et Y telles que la suite somme $(\chi_n + \gamma_n)$ converge vers un élément h de H . Montrons que h peut s'écrire $h = \chi_0 + \gamma_0$, où χ_0 et γ_0 sont éléments respectivement de X et de Y , ce qui montrera que $X + Y$ est fermé.

Soit χ un élément de X , qui peut se décomposer en

$$\chi(x) = \chi(x) - \frac{1}{|O_1|} \int_{O_1} \chi(\xi) d\xi + \frac{1}{|O_1|} \int_{O_1} \chi(\xi) d\xi \quad (20)$$

L'élément $m = \frac{1}{|O_1|} \int_{O_1} \chi(\xi) d\xi$ est une constante, donc appartient à Y . De plus, pour tout γ de Y ,

$$\begin{aligned} \langle \chi - m, \gamma \rangle &= \int_{\Delta} (\chi(x) - m) \gamma(y) dx dy = \left(\int_{O_1} (\chi(x) - m) dx \right) \times \left(\int_{O_2} (\gamma(y) dy) \right) \\ &= \left(\int_{O_1} \chi(x) dx - \int_{O_1} \chi(\xi) d\xi \right) \times \left(\int_{O_2} (\gamma(y) dy) \right) = 0 \end{aligned}$$

donc $\chi - m$ est élément de $Y^\perp$. La décomposition (20) correspond donc à la décomposition orthogonale $\chi = \Pi_{Y^\perp}(\chi) + \Pi_Y(\chi)$. Or $\Pi_{Y^\perp}(\chi) = \chi - m$ demeure élément de X , d'où l'inclusion $\Pi_{Y^\perp}(X) \subset X$.

La suite $(\chi_n + \gamma_n)$ converge vers h donc, par continuité du projecteur, la suite $\Pi_{Y^\perp}(\chi_n) = \Pi_{Y^\perp}(\chi_n + \gamma_n)$ converge vers $\Pi_{Y^\perp}(h)$. Comme $\Pi_{Y^\perp}(X) \subset X$ et que X est fermé, $\Pi_{Y^\perp}(h)$ est un élément χ_0 de X . Par ailleurs, la projection $\Pi_Y(h)$ est un élément γ_0 de Y .

Finalement, la décomposition orthogonale de h s'écrit $h = \Pi_{Y^\perp}(h) + \Pi_Y(h) = \chi_0 + \gamma_0$ avec $\chi_0 \in X$ et $\gamma_0 \in Y$, ce qui prouve que $X + Y$ est fermé.

■

Lemme 20 Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $H = L^2(\Omega, dx dy)$ l'espace des fonctions de carré sommable sur Ω . Les sous-espaces X et Y de H , des fonctions qui s'écrivent respectivement $f(x, y) = \chi(x)$ et $f(x, y) = \gamma(y)$, sont fermés ainsi que leur somme $X + Y$.

Démonstration Le produit scalaire de deux fonctions χ_1 et χ_2 de X peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \langle \chi_1, \chi_2 \rangle &= \int_{\mathbb{R}^2} 1_{\Omega}(x, y) \chi_1(x) \chi_2(x) dx dy = \int_{\mathbb{R}} \chi_1(x) \chi_2(x) dx \int_{\mathbb{R}} 1_{\Omega}(x, y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \chi_1(x) \chi_2(x) dx \mu(x) \end{aligned}$$

avec $\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} 1_{\Omega}(x, y) dy$, ce qui permet d'identifier X avec l'espace $L^2(\mathbb{R}, \mu(x) dx)$. X est donc fermé par application du lemme 1. De même, Y est fermé.

Soient (χ_n) et (γ_n) deux suites de X et Y telles que la suite somme $(\chi_n + \gamma_n)$ converge vers un élément h de H . Montrons que h peut s'écrire $h = \chi_0 + \gamma_0$, où χ_0 et γ_0 sont éléments respectivement de X et de Y , ce qui montrera que $X + Y$ est fermé.

Soit Δ un pavé inclus dans Ω . L'espace $L^2(\Delta, dx dy)$ peut être identifié à un sous-espace H_{Δ} de H , qui est fermé d'après le lemme 1. La projection d'une fonction $f(x, y)$ de H sur H_{Δ} correspond à sa restriction au domaine Δ . Ainsi $\Pi_{H_{\Delta}}(X)$ (resp. $\Pi_{H_{\Delta}}(Y)$) est identifiable à l'espace des fonctions de Δ de la forme $f(x, y) = \chi(x)$ (resp. $f(x, y) = \gamma(y)$).

Par continuité du projecteur, la suite $(\Pi_{H_{\Delta}}(\chi_n + \gamma_n))$ converge vers $\Pi_{H_{\Delta}}(h)$. Par application du lemme 19, la restriction $\Pi_{H_{\Delta}}(h)$ au domaine Δ de la limite h est de la forme $h(x, y) = \chi_0(x) + \gamma_0(y)$.

Sur tous les pavés inclus dans Ω , la limite h de la suite $(\chi_n + \gamma_n)$ est de la forme $h(x, y) = \chi_0(x) + \gamma_0(y)$. Elle est donc de la forme $h(x, y) = \chi_0(x) + \gamma_0(y)$ sur tout le domaine Ω , ce qui montre que l'espace $X + Y$ est fermé. ■

Lemme 21 Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $H_1 = L^2(\Omega, dx dy)$ l'espace des fonctions de carré sommable sur Ω . Soient $u_1(x, y)$ et $u_2(x, y)$ des fonctions qui constituent un changement de variables admissible. Soient B_1 et B_2 les espaces des fonctions de la forme respectivement $f(x, y) = b_1(u_1(x, y))$ et $f(x, y) = b_2(u_2(x, y))$. Les espaces B_1 , B_2 et $B_1 + B_2$ sont fermés.

Démonstration Il est évident que les espaces B_1 et B_2 sont fermés. Pour deux fonctions f_1 et f_2 de H_1 le produit scalaire s'écrit :

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_{\Omega} f_1(x, y) f_2(x, y) dx dy = \int_{\Omega} f_1(u_1, u_2) f_2(u_1, u_2) J(u_1, u_2) du_1 du_2$$

avec $J(u_1, u_2)$, le jacobien du changement de variables. Le jacobien est une fonction positive majorée, et minorée par une constante strictement positive. Il en ressort que les propriétés topologiques de H_1 restent inchangées si le produit scalaire naturel

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_{\Omega} f_1(u_1, u_2) f_2(u_1, u_2) J(u_1, u_2) du_1 du_2$$

est remplacé par le produit scalaire

$$\langle f_1, f_2 \rangle_2 = \int_{\Omega} f_1(u_1, u_2) f_2(u_1, u_2) du_1 du_2$$

Le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ permet, par application du lemme 20, de montrer que $B_1 + B_2$ est fermé pour ce produit scalaire, donc aussi pour le premier produit scalaire puisque les propriétés topologiques demeurent. ■

Lemme 22 Soient B_1 et B_2 deux sous-espaces vectoriels fermés de H_1 tels que la somme $B_1 + B_2$ est fermée. Une suite (x_n) d'éléments de $(B_1 \cap B_2)^{\perp}$ converge si les suites $(\Pi_{B_1^{\perp}}(x_n))$ et $(\Pi_{B_2^{\perp}}(x_n))$ convergent.

Démonstration Soit T l'opérateur linéaire qui, à un élément x de $(B_1 \cap B_2)^\perp$, associe $T(x) = (\Pi_{B_1^\perp}(x), \Pi_{B_2^\perp}(x))$ dans $H_1 \times H_1$.

- T est continu car les projecteurs $\Pi_{B_1^\perp}$ et $\Pi_{B_2^\perp}$ le sont.

- T est injectif. Soit en effet un élément x de $(B_1 \cap B_2)^\perp$ tel que $(\Pi_{B_1^\perp}(x), \Pi_{B_2^\perp}(x)) = (0, 0)$.

$$\left. \begin{array}{l} \Pi_{B_1^\perp}(x) = 0 \Rightarrow x \in B_1 \\ \Pi_{B_2^\perp}(x) = 0 \Rightarrow x \in B_2 \\ x \in (B_1 \cap B_2)^\perp \end{array} \right\} \Rightarrow x \in B_1 \cap B_2 \cap (B_1 \cap B_2)^\perp = \{0\}$$

- L'image de $(B_1 \cap B_2)^\perp$ par T est un sous-espace fermé de $H_1 \times H_1$. Soit en effet (x_n) une suite de $(B_1 \cap B_2)^\perp$ telle que la suite $(\Pi_{B_1^\perp}(x_n), \Pi_{B_2^\perp}(x_n))$ converge vers une limite (y_1, y_2) . Montrons qu'il existe alors un élément x_0 de $(B_1 \cap B_2)^\perp$ tel que $y_1 = \Pi_{B_1^\perp}(x_0)$ et $y_2 = \Pi_{B_2^\perp}(x_0)$.

Un élément x_n se décompose en

$$x_n = \Pi_{B_1^\perp}(x_n) + \Pi_{B_1}(x_n) \Rightarrow \Pi_{B_2^\perp}(x_n) = \Pi_{B_2^\perp} \circ \Pi_{B_1^\perp}(x_n) + \Pi_{B_2^\perp} \circ \Pi_{B_1}(x_n)$$

Par passage à la limite, la suite $(\Pi_{B_2^\perp} \circ \Pi_{B_1}(x_n))$ converge vers $y_2 - \Pi_{B_2^\perp}(y_1)$. Comme, par hypothèse, l'espace $B_1 + B_2$ est fermé, l'espace $\Pi_{B_2^\perp}(B_1)$ est fermé d'après le lemme 6. Les éléments de la suite $(\Pi_{B_2^\perp} \circ \Pi_{B_1}(x_n))$ appartiennent à $\Pi_{B_2^\perp}(B_1)$, leur limite $y_2 - \Pi_{B_2^\perp}(y_1)$ aussi. De plus, d'après le lemme 5, $\Pi_{B_2^\perp}(B_1) = \Pi_{B_2^\perp}(B_1 \cap (B_1 \cap B_2)^\perp)$, donc $y_2 - \Pi_{B_2^\perp}(y_1)$ peut s'écrire $\Pi_{B_2^\perp}(x_1)$, où x_1 est un élément de $B_1 \cap (B_1 \cap B_2)^\perp$.

Par ailleurs, les éléments $\Pi_{B_1^\perp}(x_n)$ appartiennent à $B_1^\perp$, qui est fermé, donc y_1 appartient à $B_1^\perp$. L'élément $x_0 = x_1 + y_1$ appartient à $(B_1 \cap B_2)^\perp$ car $x_1 \in B_1 \cap (B_1 \cap B_2)^\perp$, $y_1 \in B_1^\perp$ et $B_1^\perp \subset (B_1 \cap B_2)^\perp$. Il vérifie :

$$\Pi_{B_1^\perp}(x_0) = y_1 \quad \text{car} \quad x_1 \in B_1 \text{ et } y_1 \in B_1^\perp$$

$$\Pi_{B_2^\perp}(x_0) = y_2 - \Pi_{B_2^\perp}(y_1) + \Pi_{B_2^\perp}(y_1) = y_2 \quad \text{car} \quad \Pi_{B_2^\perp}(x_1) = y_2 - \Pi_{B_2^\perp}(y_1)$$

ce qui montre que l'image par T de $(B_1 \cap B_2)^\perp$ est bien un sous-espace fermé de $H_1 \times H_1$.

- T établit une bijection continue entre les espaces fermés $(B_1 \cap B_2)^\perp$ et $T((B_1 \cap B_2)^\perp)$. Par application du théorème 8 de l'inverse continu, l'opérateur inverse T^{-1} est aussi continu, ce qui signifie qu'une suite (x_n) de $(B_1 \cap B_2)^\perp$ converge si les suites $(\Pi_{B_1^\perp}(x_n))$ et $(\Pi_{B_2^\perp}(x_n))$ convergent. ■

5.5 Cas de lignes de courant qui se croisent

Montrons en utilisant les lemmes précédent que, dans le cas où Ω est une zone du premier type, c'est-à-dire où chaque ligne de courant croise une autre ligne de courant, l'espace somme $B + G$ est fermé.

Lemme 23 Soient les écoulements sur le domaine Ω tels qu'il existe deux dates r et s dont les fonctions $u(x, r)$ et $u(x, s)$, qui indicent les lignes de courant, forment un changement de variables admissible sur Ω . Soient M suites (b_n^t) de B_t et une suite (x_n) de H_1 telles que chaque suite $(b_n^t + x_n)$ converge. Il existe alors une suite c_n de constantes, telle que les suites $(x_n - c_n)$ et $(b_n^t + c_n)$ convergent.

Démonstration Par le changement de variables dû aux fonctions $u(\mathbf{x}, r)$ et $u(\mathbf{x}, s)$, une fonction $f(\mathbf{x})$ de H_1 s'écrit $f(u(\mathbf{x}, r), u(\mathbf{x}, s))$. D'après le théorème 21, l'espace $B_r + B_s$ est fermé. De plus, l'espace $B_r \cap B_s$ est l'ensemble des fonctions de la forme $f(u(\mathbf{x}, r), u(\mathbf{x}, s)) = b_1(u(\mathbf{x}, r)) = b_2(u(\mathbf{x}, s))$. $B_r \cap B_s$ correspond donc à l'espace C des fonctions constantes.

Par continuité du projecteur $\Pi_{B_r^\perp}$, la suite $\Pi_{B_r^\perp}(x_n + b_n^1) = \Pi_{B_r^\perp}(x_n)$ converge. Les éléments de cette suite peuvent aussi s'écrire $\Pi_{B_r^\perp} \circ \Pi_{C^\perp}(x_n)$ car $B_r^\perp \subset C^\perp$. De même que la suite $(\Pi_{B_r^\perp} \circ \Pi_{C^\perp}(x_n))$ converge, la suite $(\Pi_{B_s^\perp} \circ \Pi_{C^\perp}(x_n))$ converge aussi. Comme de plus $C = B_r \cap B_s$ et que l'espace $B_r + B_s$ est fermé, le lemme 22 peut s'appliquer à la suite $(\Pi_{C^\perp}(x_n))$, qui converge vers une limite x_0 .

Posons $c_n = \Pi_C(x_n)$, qui est une constante. Comme $x_n - c_n = x_n - \Pi_C(x_n) = \Pi_{C^\perp}(x_n)$, la suite $(x_n - c_n)$ converge vers x_0 .

Pour une date t donnée, comme les suites $(x_n + b_n^t)$ et $(x_n - c_n)$ convergent, la suite $(b_n^t + c_n)$ converge aussi. ■

Théorème 11 *Si les écoulements sont tels, que chaque ligne de courant croise une autre ligne de courant, de sorte que deux points du domaine Ω peuvent être reliés par des morceaux de lignes de courant, l'espace somme $B + G$ est fermé.*

Démonstration L'espace $B + G$ est fermé si la limite de toute suite convergente de $B + G$ appartient à $B + G$. Soit $(x_n + b_n^1, \dots, x_n + b_n^M)$, avec $b_n^t \in B_t$ pour tout t , $x_n \in H_1$, une suite de $B + G$. Supposons cette suite convergente vers y , c'est-à-dire chaque suite $(x_n + b_n^t)$ convergente vers y^t et montrons que pour tout t , y^t peut s'écrire $y^t = x_0 + b_0^t$, où x_0 est une même composante et $b_0^t \in B_t$.

Comme les lignes de courant se croisent, il existe au moins une zone Ω_1 sur laquelle les fonctions qui indiquent les lignes de courant pour deux dates r et s forment un changement de variables admissible. Par application du lemme précédent, il existe une suite de constantes c_n , telle que les suites $(b_n^t + c_n)$ convergent sur cette zone. Comme les fonctions b_n^t sont définies sur les lignes de courant, les suites $(b_n^t + c_n)$ convergent sur un domaine Ω_2 traversé par les mêmes lignes de courant que la zone Ω_1 . Sur le domaine Ω_2 , comme les suites $(b_n^t + c_n)$ convergent, la suite $(x_n - c_n)$ converge, et les suites $(b_n^t + c_n)$ convergent sur un domaine Ω_3 traversé par les mêmes lignes de courant que le domaine Ω_2 , etc...

Bref, au moyen des lignes de courant qui propagent la convergence des suites $(b_n^t + c_n)$ sur des domaines de plus en plus étendus, les suites $(b_n^t + c_n)$ convergent sur tout Ω vers une limite b_0^t , et la suite $(x_n - c_n)$ vers une limite x_0 . Comme l'espace C des constantes est inclus dans chaque espace B_t , chaque suite $(b_n^t + c_n)$ appartient à B_t , donc sa limite b_0^t aussi. Finalement, pour toute date t , la limite y^t de la suite $(x_n + b_n^t) = (x_n - c_n + b_n^t + c_n)$ vaut $x_0 + b_0^t$ avec $b_0^t \in B_t$, ce qui montre que l'espace $B + G$ est fermé. ■

5.6 Théorèmes fondamentaux

Cette partie très théorique s'achève. Les nombreux résultats intermédiaires, qui y ont été démontrés, sont maintenant rassemblés et résumés, sous la forme des théorèmes synthétiques suivants, pour n'en garder que l'essentiel.

Théorème 12 *Soient Ω un domaine de $\mathbb{R}^2$, H l'espace de Hilbert, pour le produit scalaire (12), des fonctions définies sur Ω aux M dates $t_1, \dots, t_M$. Soient G le sous-espace des fonctions invariantes dans le temps, B le sous-espace des fonctions constantes sur les lignes de courant. L'espace $\Pi_{B^\perp}(G)$ est un espace fermé.*

Démonstration Le domaine Ω peut se diviser en zones élémentaires Ω_z de deux types, suivant la terminologie introduite au paragraphe 2.5 : des zones du premier type, où toute ligne de courant croise une autre ligne de courant, et des zones du second type où toutes les lignes de courant sont parallèles. D'après le paragraphe 5.1, cette séparation permet de voir H comme le produit des espaces de Hilbert H_z , définis par restriction sur chaque zone Ω_z , et $B + G$ peut alors s'écrire comme le produit des espaces $B_z + G_z$.

D'après le théorème 11, les espaces $B_z + G_z$ sont fermés pour les zones Ω_z du premier type, où les lignes de courant se croisent, et d'après le théorème 10, les espaces $B_z + G_z$ sont fermés pour les zones Ω_z du second type, où les lignes de courant sont parallèles. L'espace $B + G$, produit des espaces fermés $B_z + G_z$, est donc fermé, ce qui implique finalement, d'après le lemme 6, que l'espace $\Pi_{B^\perp}(G)$ est fermé. ■

Théorème 13 Soit, pour une fonction f de H donnée, la fonctionnelle $J(g, f)$ définie sur l'ensemble des fonctions g de G par $J(g, f) = \min_{b \in B} \|g - b - f\|^2$. Pour toute fonction f , il existe des fonctions g_0 de G qui minimisent cette fonctionnelle, c'est-à-dire telles que

$$J(g_0, f) = \min_{g \in G} J(g, f) = \min_{g \in G} \left(\min_{b \in B} \|g - b - f\|^2 \right)$$

Ces fonctions g_0 de G , qui minimisent $J(., f)$, sont caractérisées par les relations :

$$\Pi_{B^\perp}(g_0) = \Pi_{\Pi_{B^\perp}(G)}(f) \quad (16)$$

$$\langle \Pi_{B^\perp}(g_0), \Pi_{B^\perp}(g) \rangle = \langle \Pi_{B^\perp}(f), \Pi_{B^\perp}(g) \rangle \quad \text{pour tout élément } g \text{ de } G \quad (17)$$

et diffèrent entre elles d'une fonction de l'espace $B \cap G$.

Démonstration Les fonctions qui minimisent la fonctionnelle $J(., f)$ sont solutions du problème $\mathcal{P}_2(f)$ défini au paragraphe 2.3. D'après le théorème 4, les solutions du problème $\mathcal{P}_2(f)$ existe pour toute fonction f si l'espace $\Pi_{B^\perp}(G)$ est fermé, ce qui a été démontré au théorème 12. Les propriétés de ces solutions sont également décrites par le théorème 4. ■

Théorème 14 La recherche des solutions du problème inverse, caractérisées par l'équation (16) :

$$\Pi_{B^\perp}(g_0) = \Pi_{\Pi_{B^\perp}(G)}(v)$$

peut être approchée par une approche discrétisée définie au paragraphe 4.1. Soient en effet (g_n) les solutions d'une approche discrétisée ; la suite $(\Pi_{(B \cap G)^\perp}(g_n))$ converge vers $\Pi_{(B \cap G)^\perp}(g_0)$. La convergence n'a pas lieu sur l'espace $B \cap G$ des indéterminations.

Démonstration D'après le théorème 12, l'espace $\Pi_{B^\perp}(G)$ est fermé, ce qui assure l'existence d'une unique solution g_3 au problème $\mathcal{P}_3(v)$ défini au paragraphe 3.5. Toute solution g_0 de l'équation (16), diffère de g_3 d'un élément de l'espace $B \cap G$, donc vérifie $\Pi_{(B \cap G)^\perp}(g_0) = \Pi_{(B \cap G)^\perp}(g_3)$.

D'après le théorème 9, et comme l'espace $\Pi_{B^\perp}(G)$ est fermé, la suite $(\Pi_{(B \cap G)^\perp}(g_n))$ converge vers $\Pi_{(B \cap G)^\perp}(g_3)$, donc vers $\Pi_{(B \cap G)^\perp}(g_0)$. ■

6 Discrétisation

Nous présentons ici un algorithme pour appliquer la méthode de moindres carrés, présentée en section 2, étudiée aux sections 3 à 5, et dont le but est d'intégrer l'information redondante provenant des écoulements aux différentes dates.

Cette méthode repose sur la résolution explicite, pour chaque date t , de l'équation de diffusivité 2 sous la forme de l'équation fonctionnelle 11 :

$$g(\mathbf{x}) = b(\mathbf{x}, t) + v(\mathbf{x}, t)$$

avec g est le logarithme de la perméabilité $k(\mathbf{x})$, dépendant des seules coordonnées d'espace, b une fonction arbitraire de l'espace B_t des indéterminations de la date t (c'est-à-dire une fonction constante sur les lignes de courant) et v une fonction donnée par calcul.

Dans la pratique, pour appliquer numériquement la méthode de moindres carrés, l'équation fonctionnelle 11, pour chaque date t doit être approchée sous la forme :

$$g_a = b_{a,t} + v_{a,t}$$

où g_a est une approximation de g , $b_{a,t}$ une fonction arbitraire d'un espace $B_{a,t}$, approximation de l'espace B_t , et v_a une approximation de la fonction v . Plusieurs moyens sont envisageables pour parvenir à cette approximation. Le moyen préconisé ici est de construire, par intégration numérique, des tubes de courant et d'écrire les égalités de flux sur ces tubes.

6.1 Discrétisation des espaces B et G

Dans l'algorithme proposé, les espaces de fonctions B et G de dimension infinie, sont remplacés par des espaces de dimension finie.

Espace G_a

L'espace G est l'ensemble des fonctions invariantes dans le temps. Dans la pratique, une fonction g de G est approchée par une fonction constante sur les cellules d'une grille régulière donnée a priori. Pour la cellule n , soit e_n la fonction indicatrice de la cellule, soit g^n la valeur constante sur la cellule. L'approximation s'écrit $g(\mathbf{x}) \approx \sum_n g^n e_n(\mathbf{x})$. L'espace d'approximation est noté G_a .

Tube de courant

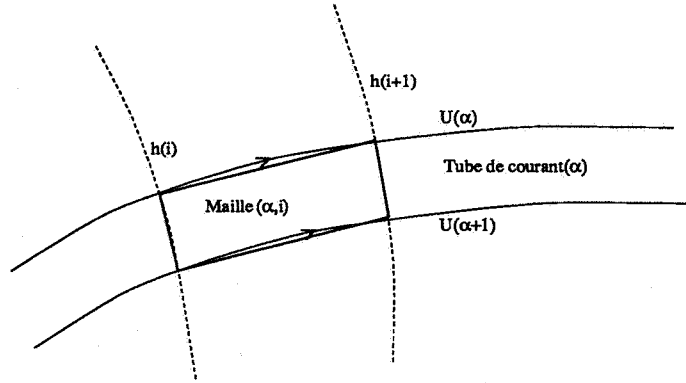
Il est possible de construire une autre discrétisation de l'espace, qui respecte les caractéristiques de l'écoulement à la date t , et qui dépend pour cela d'un maillage construit sur les lignes de courant et sur les lignes équipotentielles.

Les lignes de courant sont calculées par intégration numérique d'une équation différentielle portant sur les gradients de charge. Elles sont indicées par α . Un **tube de courant**, indicé par α , est l'ensemble des points $\mathbf{x}$ compris entre les deux lignes de courant d'indice α et $\alpha + 1$. Dans la pratique, les lignes de courant sont choisies pour que le tube de courant α n'excède pas une certaine épaisseur.

Maille

Un tube de courant est parcouru par le paramètre charge hydraulique h . Soient h_i des valeurs de h régulièrement espacées, c'est-à-dire telles que la différence $h_{i+1} - h_i = dh$ soit

constante. La **maille** indiquée par (i, α) est l'ensemble des points $\mathbf{x}$ du tubes de courant α dont les valeurs de charge vérifient $h_i < h(\mathbf{x}, t) < h_{i+1}$. La maille (i, α) est en fait approchée par un quadrilatère dont les sommets sont les intersections des lignes de courant α et $\alpha + 1$, et des lignes équipotentielles $h(\mathbf{x}, t) = h_i$ et $h(\mathbf{x}, t) = h_{i+1}$. Le tube de courant α est constitué de l'ensemble des mailles (i, α) .



Une maille (i, α) , qui repose sur les caractéristiques de l'écoulement à la date t , doit en fait être indiquée par le triplet (i, α, t) . La fonction $\epsilon_{i, \alpha, t}(\mathbf{x}, \tau)$, indicatrice de la maille (i, α, t) , est définie par :

$$\epsilon_{i, \alpha, t}(\mathbf{x}, \tau) = \begin{cases} 1 & \text{si } \tau = t, \text{ et si } \mathbf{x} \text{ appartient à la maille } (i, \alpha, t) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Une fonction $f(\mathbf{x}, \tau)$, dépendant des variables d'espace $\mathbf{x}$ et de temps τ est approchée par :

$$f(\mathbf{x}, \tau) \approx \sum_t \sum_\alpha \sum_i f^{i, \alpha, t} \epsilon_{i, \alpha, t}(\mathbf{x}, \tau)$$

Espace B_a

L'espace B est approché par l'espace B_a , de dimension finie, des fonctions constantes sur chaque tube de courant (t, α) . Les fonctions de B_a , caractérisées par une valeur unique $b^{\alpha, t}$ sur chaque tube de courant, s'écrivent :

$$b(\mathbf{x}, \tau) = \sum_t \sum_\alpha \sum_i b^{\alpha, t} \epsilon_{i, \alpha, t}(\mathbf{x}, \tau) = \sum_t \sum_\alpha b^{\alpha, t} \eta_{\alpha, t}(\mathbf{x}, \tau) \quad \text{avec} \quad \eta_{\alpha, t}(\mathbf{x}, \tau) = \sum_i \epsilon_{i, \alpha, t}(\mathbf{x}, \tau)$$

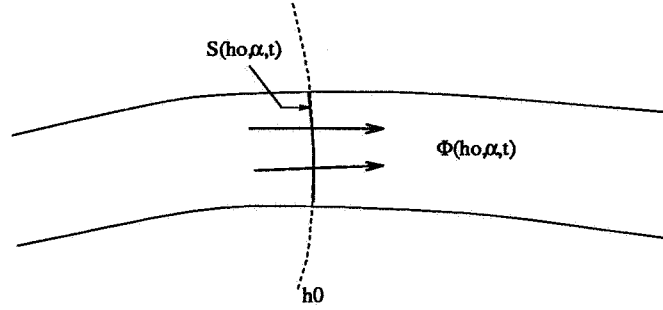
Les fonctions $\eta_{\alpha, t}(\mathbf{x}, \tau)$ sont les indicatrices des tubes de courant (α, t) et forment une base de B_a .

6.2 Conservation du flux

Une section orthogonale $S(h_0, \alpha, t)$ d'un tube de courant (α, t) , définie pour une valeur h_0 du paramètre h , est l'ensemble des points $\mathbf{x}$ du tube (α, t) qui vérifient $h(\mathbf{x}, t) = h_0$. Le flux d'eau $\Phi(h_0, \alpha, t)$ qui traverse cette section s'écrit

$$\Phi(h_0, \alpha, t) = - \int_{S(h_0, \alpha, t)} k(\mathbf{x}) \text{grad}(h)(\mathbf{x}, t) \cdot d\sigma(\mathbf{x})$$

où $d\sigma(\mathbf{x})$ est l'élément d'intégration normal de la section.



Pour une date t , la perméabilité $k(\mathbf{x})$ peut être approchée par une fonction de valeur constante $k^{i,\alpha,t}$ sur chaque maille (i, α, t) . Le flux $\Phi(i, \alpha, t)$ traversant la surface $S(h, \alpha, t)$, avec $h = \frac{h_i + h_{i+1}}{2}$, peut ainsi être approché par :

$$\Phi(i, \alpha, t) \approx -k^{i,\alpha,t} \int_{S(h,\alpha,t)} \text{grad}(h)(\mathbf{x}, t) \cdot d\sigma(\mathbf{x}) \approx -k^{i,\alpha,t} I_{h,a,t}$$

où $I_{h,a,t}$ est une approximation de l'intégrale $\int_{S(h,\alpha,t)} \text{grad}(h)(\mathbf{x}, t) \cdot d\sigma(\mathbf{x})$. Dans les programmes $I_{h,a,t}$ est calculé par une intégrale de Simpson.

Par conservation du flux dans le tube (α, t) , pour toute maille i , le flux $\Phi(i, \alpha, t)$ est égale à une constante $A_{\alpha,t}$, ce qui s'écrit :

$$A_{\alpha,t} \approx -k^{i,\alpha,t} I_{h,a,t} \Rightarrow k^{i,\alpha,t} \approx A_{\alpha,t} \frac{1}{-I_{h,a,t}} \quad (21)$$

L'expression (21) correspond à la version discrétisée de l'équation fonctionnelle (8) :

$$k(\mathbf{x}) = a(u(\mathbf{x}, t), t) F(\mathbf{x}, t)$$

Par identification des deux expressions, la fonction $v(\mathbf{x}, t) = \ln(F(\mathbf{x}, t))$ à projeter est approchée par une fonction $\nu(\mathbf{x}, t)$ de valeur constante $v^{i,\alpha,t} = -\ln(|I_{i,\alpha,t}|)$ sur chaque maille (i, α, t) , ce qui s'écrit : $v(\mathbf{x}, \tau) \approx \nu(\mathbf{x}, \tau) = \sum_i \sum_\alpha \sum_t v^{i,\alpha,t} \epsilon_{i,\alpha,t}(\mathbf{x}, \tau)$.

6.3 Domaine et produit scalaire

Certaines mailles du maillage sont retirées pour les raisons suivantes :

1. Les équations qui servent au calcul du problème inverse ne sont valables que sous la surface libre. Les mailles ne sont conservées que si la valeur de la pression pour tous les sommets dépasse 3 m. (Prendre 3 m au lieu de 0 m constitue une marge de sécurité).
2. L'intégrale $I_{i,\alpha,t}$ s'annule dans deux cas. Soit le gradient s'annule, soit l'épaisseur du tube de courant s'annule. Dans les deux cas, un manque de précision sur la valeur du gradient ou sur l'épaisseur du tube conduit à de grandes imprécisions sur le résultat du calcul. Pour remédier à ces instabilités une maille est retirée si les valeurs du gradient ou si l'épaisseur du tube sont trop faibles.

Si une maille est retirée au milieu d'un tube de courant les deux parties de part et d'autre de la maille sont considérées comme deux tubes de courant indépendants.

Pour chaque date t , le domaine Ω_t de définition des fonctions correspond à l'intersection de la grille avec les mailles restantes.

Remarque Le produit scalaire, défini pour deux fonctions f_1 et f_2 de H , par l'expression (12):

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \sum_{t=t_1}^{t_M} \int_{\Omega} f_1(\mathbf{x}, t) f_2(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}$$

était adapté aux développements théoriques, mais pas aux calculs numériques des projections sur l'espace $B^\perp$, car les lignes de courant ne sont pas définies sur le domaine $\Omega \setminus \Omega_t$. Il peut être remplacé par le produit scalaire :

$$\langle f_1, f_2 \rangle_2 = \sum_{t=t_1}^{t_M} \int_{\Omega_t} f_1(\mathbf{x}, t) f_2(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}$$

qui ne change pas les équations de projections, comme le montre la démonstration suivante :

Démonstration Soit D l'espace des fonctions qui prennent n'importe quelles valeurs sur le domaine $\Omega \setminus \Omega_t$ et s'annulent sur le domaine Ω_t . Son orthogonal $D^\perp$ est l'espace des fonctions qui prennent n'importe quelles valeurs sur le domaine Ω_t et s'annulent sur le domaine $\Omega \setminus \Omega_t$. La projection d'une fonction $f(\mathbf{x}, t)$ sur $D^\perp$ consiste à multiplier la fonction $f(\mathbf{x}, t)$ par l'indicatrice $1_{\Omega_t}(\mathbf{x}, t)$ du domaine Ω_t :

$$\Pi_{D^\perp}(f) = f(\mathbf{x}, t) \times 1_{\Omega_t}(\mathbf{x}, t)$$

Le produit scalaire des projections sur $D^\perp$ de deux fonctions f_1 et f_2 ,

$$\begin{aligned} \langle \Pi_{D^\perp}(f_1), \Pi_{D^\perp}(f_2) \rangle &= \sum_{t=t_1}^{t_M} \int_{\Omega} f_1(\mathbf{x}, t) f_2(\mathbf{x}, t) 1_{\Omega_t}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \\ &= \sum_{t=t_1}^{t_M} \int_{\Omega_t} f_1(\mathbf{x}, t) f_2(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \langle f_1, f_2 \rangle_2 \end{aligned}$$

est égal au produit scalaire de ces deux fonctions au sens du produit scalaire défini par :

$$\langle f_1, f_2 \rangle_2 = \sum_{t=t_1}^{t_M} \int_{\Omega_t} f_1(\mathbf{x}, t) f_2(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}$$

L'équation caractéristique du problème inverse (17),

$$\langle \Pi_{B^\perp}(g_0), \Pi_{B^\perp}(g) \rangle = \langle \Pi_{B^\perp}(f), \Pi_{B^\perp}(g) \rangle \quad \text{pour tout élément } g \text{ de } G$$

ne fait intervenir que des fonctions déjà projetées sur l'espace $B^\perp$. D est un sous-espace de B car les fonctions de B prennent des valeurs arbitraires sur le domaine $\Omega \setminus \Omega_t$. D'après le théorème 2, comme $B^\perp \subset D^\perp$, $\Pi_{B^\perp} = \Pi_{D^\perp} \circ \Pi_{B^\perp}$. L'équation caractéristique du problème inverse, qui peut ainsi s'écrire, pour tout élément g de G :

$$\begin{aligned} \langle \Pi_{D^\perp} \circ \Pi_{B^\perp}(g_0), \Pi_{D^\perp} \circ \Pi_{B^\perp}(g) \rangle &= \langle \Pi_{D^\perp} \circ \Pi_{B^\perp}(f), \Pi_{D^\perp} \circ \Pi_{B^\perp}(g) \rangle \\ \Leftrightarrow \langle \Pi_{B^\perp}(g_0), \Pi_{B^\perp}(g) \rangle_2 &= \langle \Pi_{B^\perp}(f), \Pi_{B^\perp}(g) \rangle_2 \end{aligned}$$

est donc inchangée si le produit scalaire défini par l'expression (12) est remplacé par le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$. ■

NB Dans la suite, le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ sera noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$, ce qui ne porte pas à confusion puisque ces produits scalaires sont équivalents pour le problème inverse.

6.4 Régularisation du système de projection

L'équation caractéristique du problème inverse discrétisé d'inconnue $g_0 \in G_a$:

$$\text{pour tout élément } g \text{ de } G_a \quad < \Pi_{B_a^\perp}(g_0), \Pi_{B_a^\perp}(g) > = < \Pi_{B_a^\perp}(\nu), \Pi_{B_a^\perp}(g) > \quad (22)$$

est une équation linéaire singulière (qui admet plusieurs solutions). Les éléments de son noyau $B_a \cap G_a$ sont de trois types :

- Une cellule n de la grille telle que $\Pi_{B_a^\perp}(e_n) = 0$, c'est-à-dire une cellule qui, pour aucune date t , n'intersecte le domaine Ω_t . Une telle cellule, facile à détecter, est retirée des calculs d'inversion de perméabilité.
- L'espace C des fonctions constantes est inclus dans $B_a \cap G_a$. En effet il est engendré par la fonction constante 1 qui peut s'écrire aussi bien $1 = \sum_n e_n$ que $1 = \sum_{t,\alpha} \eta_{t,\alpha}$, ce qui montre son appartenance aux deux espaces G_a et B_a .
- En pratique il n'existe pas d'autres éléments appartenant à $B_a \cap G_a$: pour qu'un tel élément existe, il faudrait qu'il puisse se décomposer simultanément suivant les bases (e_n) et $(\eta_{t,\alpha})$, c'est à dire que ce soit une fonction constante sur les cellules de la grille et les mailles du maillage. Pour cela il faudrait que certaines cellules de la grille coïncident avec les mailles du maillage. Cette situation, envisageable en théorie, est complètement impossible en pratique.

En dehors des cellules de grilles non recouvertes par l'écoulement, et qui sont retirées des calculs, le noyau $B_a \cap G_a$ se restreint à l'espace à une dimension des constantes, C . L'équation du problème inverse peut être régularisée au moyen du lemme suivant.

Lemme 24 *Le problème inverse discrétisé possède une unique solution g_0 sur $G_a \cap C^\perp$, caractérisée par l'équation : pour tout élément g de G_a ,*

$$< \Pi_{B_a^\perp}(g_0), \Pi_{B_a^\perp}(g) > + < \Pi_C(g_0), \Pi_C(g) > = < \Pi_{B_a^\perp}(\nu), \Pi_{B_a^\perp}(g) > \quad (23)$$

Démonstration Vérifions d'abord l'existence et l'unicité de l'élément g_0 , solution dans $G_a \cap C^\perp$ du problème inverse discrétisé.

Existence : Le problème inverse discrétisé : $\Pi_{B_a^\perp}(g) = \Pi_{\Pi_{B_a^\perp}(G_a)}(\nu)$ possèdent plusieurs solutions dans G_a qui diffèrent d'un élément de $B_a \cap G_a = C$. Soit g_1 une telle solution. L'élément $g_0 = \Pi_{C^\perp}(g_1)$ de $C^\perp$ s'écrit $g_0 = g_1 - \Pi_C(g_1)$, ce qui montre d'une part qu'il appartient à G_a , comme somme d'éléments de G_a , et d'autre part qu'il est solution du problème inverse discrétisé.

Unicité : La différence g de deux solutions dans $G_a \cap C^\perp$ du problème inverse discrétisé vérifie $\Pi_{B_a^\perp}(g) = 0$, donc appartient à B_a . Elle appartient finalement à $B_a \cap G_a \cap C^\perp = \{0\}$. Le problème inverse discrétisé possède donc une solution unique g_0 dans $G_a \cap C^\perp$.

Equation caractéristique : Montrons maintenant que l'équation (23) caractérise la solution sur $G_a \cap C^\perp$ du problème inverse discrétisé. L'équation (23), d'inconnue $g_0 \in G_a$, s'appuie sur les fonctions test $g \in G_a$. Or G_a se décompose suivants les deux espaces orthogonaux C et $G_a \cap C^\perp$.

L'équation caractéristique (23), écrite avec les fonctions test c de C , donne :

$$\begin{aligned} &< \Pi_{B_a^\perp}(g_0), \Pi_{B_a^\perp}(c) > + < \Pi_C(g_0), \Pi_C(c) > = < \Pi_{B_a^\perp}(\nu), \Pi_{B_a^\perp}(c) > \\ \Rightarrow &< \Pi_C(g_0), c > = 0 \end{aligned}$$

car, comme les espaces $B_a^\perp$ et C sont orthogonaux, $\Pi_{B_a^\perp}(c) = 0$. L'équation résultante montre que $\Pi_C(g_0) = 0$, donc que $g_0 \in G_a \cap C^\perp$.

L'équation caractéristique (23), écrite avec les fonctions test de $G_a \cap C^\perp$, qui s'écrivent $\Pi_{C^\perp}(g)$, donne :

$$\begin{aligned} & \langle \Pi_{B_a^\perp}(g_0), \Pi_{B_a^\perp} \circ \Pi_{C^\perp}(g) \rangle + \langle \Pi_C(g_0), \Pi_C \circ \Pi_{C^\perp}(g) \rangle \\ & \quad = \langle \Pi_{B_a^\perp}(\nu), \Pi_{B_a^\perp} \circ \Pi_{C^\perp}(g) \rangle \\ \Rightarrow & \quad \langle \Pi_{B_a^\perp}(g_0), \Pi_{B_a^\perp}(g) \rangle = \langle \Pi_{B_a^\perp}(\nu), \Pi_{B_a^\perp}(g) \rangle \end{aligned}$$

car, $\Pi_C \circ \Pi_{C^\perp}(g) = 0$ et, comme $B_a^\perp \in C^\perp$, $\Pi_{B_a^\perp} \circ \Pi_{C^\perp}(g) = \Pi_{B_a^\perp}(g)$. L'équation résultante est l'équation caractéristique (22) du problème inverse discrétisé.

Réciproquement, l'unique solution g_0 du problème inverse discrétisé appartenant à $G_a \cap C^\perp$ vérifie $\Pi_C(g_0) = 0$, ce qui peut s'écrire :

$$\text{pour tout élément } g \text{ de } G_a \quad \langle \Pi_C(g_0), \Pi_C(g) \rangle = 0$$

g_0 vérifie aussi l'équation caractéristique (22) du problème inverse discrétisé :

$$\text{pour tout élément } g \text{ de } G_a \quad \langle \Pi_{B_a^\perp}(g_0), \Pi_{B_a^\perp}(g) \rangle = \langle \Pi_{B_a^\perp}(\nu), \Pi_{B_a^\perp}(g) \rangle$$

donc, par sommation de ces expressions, vérifie l'équation (23). ■

6.5 Calcul des termes de l'équation caractéristique discrétisée

La solution g_0 du problème inverse régularisé se décompose sous la forme $g_0 = \sum g^n e_n$. Comme les cellules e_n forment une base de G_a , l'équation caractéristique régularisée (23) s'écrit sous forme du système caractéristique régularisé : pour tout m ,

$$\sum_n g^n (\langle \Pi_{B_a^\perp}(e_n), \Pi_{B_a^\perp}(e_m) \rangle + \langle \Pi_C(e_n), \Pi_C(e_m) \rangle) = \langle \Pi_{B_a^\perp}(\nu), \Pi_{B_a^\perp}(e_m) \rangle \quad (24)$$

Numériquement, les termes de ce système sont tous calculés à partir des volumes $\langle e_n, \epsilon_{i,\alpha,t} \rangle$ des intersections d'une cellule n avec une maille (i, α, t) , ainsi que des valeurs $v^{i,\alpha,t}$ de ν sur une maille. Les formules qui permettent de calculer les termes du système sont les suivantes :

1. Le volume d'une maille (i, α, t) vaut $\|\epsilon_{i,\alpha,t}\|^2 = \sum_n \langle e_n, \epsilon_{i,\alpha,t} \rangle$.
2. Le volume d'un tube de courant (α, t) vaut $\|\eta_{\alpha,t}\|^2 = \sum_i \|\epsilon_{i,\alpha,t}\|^2$.
3. Le volume de l'intersection d'une cellule n avec un tube de courant (α, t) vaut $\langle e_n, \eta_{\alpha,t} \rangle = \sum_i \langle e_n, \epsilon_{i,\alpha,t} \rangle$.
4. Le terme $\langle \Pi_{B_a^\perp}(e_n), \Pi_{B_a^\perp}(e_m) \rangle$ vaut

$$\langle \Pi_{B_a^\perp}(e_n), \Pi_{B_a^\perp}(e_m) \rangle = \langle e_n, e_m \rangle - \sum_t \sum_\alpha \frac{\langle e_n, \eta_{\alpha,t} \rangle \langle e_m, \eta_{\alpha,t} \rangle}{\|\eta_{\alpha,t}\|^2}$$

5. le volume d'une cellule n vaut $\|e_n\|^2 = \sum_{i,\alpha,t} \langle e_n, \epsilon_{i,\alpha,t} \rangle$.

6. le terme $\langle \Pi_C(e_n), \Pi_C(e_m) \rangle$ vaut $\langle \Pi_C(e_n), \Pi_C(e_m) \rangle = \frac{\|e_n\|^2 \|e_m\|^2}{\sum_k \|e_k\|^2}$.

7. le produit scalaire $\langle \nu, \eta_{\alpha,t} \rangle$ vaut $\langle \nu, \eta_{\alpha,t} \rangle = \sum_i v^{i,\alpha,t} \|\epsilon_{i,\alpha,t}\|^2$

8. le produit scalaire $\langle \nu, e_m \rangle$ vaut $\langle \nu, e_m \rangle = \sum_t \sum_\alpha \sum_i v^{i,\alpha,t} \langle e_n, \epsilon_{i,\alpha,t} \rangle$.

9. Le terme $\langle \Pi_{B_a^\perp}(\nu), \Pi_{B_a^\perp}(e_m) \rangle$ vaut

$$\langle \Pi_{B_a^\perp}(\nu), \Pi_{B_a^\perp}(e_m) \rangle = \langle \nu, e_m \rangle - \sum_t \sum_\alpha \frac{\langle \nu, \eta_{\alpha,t} \rangle \langle e_m, \eta_{\alpha,t} \rangle}{\|\eta_{\alpha,t}\|^2}$$

Démonstration Par définition, le volume $V(n)$ d'une cellule n , d'indicatrice e_n , vaut :

$$\begin{aligned} V(n) &= \sum_t \int_{\Omega_t} e_n(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \langle e_n, 1 \rangle \\ &= \sum_t \int_{\Omega_t} e_n^2(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \|e_n\|^2 \end{aligned}$$

car, comme e_n est une indicatrice, $e_n = e_n^2$. De même, le volume d'une maille (i, α, t_1) vaut $\langle \epsilon_{i,\alpha,t_1}, 1 \rangle = \|\epsilon_{i,\alpha,t_1}\|^2$. Comme $1 = \sum_n e_n = \sum_{i,\alpha,t_1} \epsilon_{i,\alpha,t_1}$, les formules 1. et 5. s'en déduisent.

Un tube de courant (α, t_1) est la somme des mailles (i, α, t_1) qui le composent, $\eta_{\alpha,t} = \sum_i \epsilon_{i,\alpha,t}$ ce qui donne les formules 2. et 3.. La décomposition de la fonction $\nu = \sum_{t,\alpha,i} v^{i,\alpha,t} \epsilon_{i,\alpha,t}$ sur les mailles fournit les formules 7. et 8..

Comme les indicatrices $\eta_{\alpha,t}$ des tubes de courant sont orthogonales, la projection d'une fonction f sur B_a , c'est-à-dire suivant les tubes de courant, vaut :

$$\Pi_{B_a}(f) = \sum_{t,\alpha} \frac{\langle f, \eta_{\alpha,t} \rangle}{\|\eta_{\alpha,t}\|^2} \eta_{\alpha,t}$$

Donc, pour deux fonctions f_1 et f_2 ,

$$\begin{aligned} \langle \Pi_{B_a}(f_1), \Pi_{B_a}(f_2) \rangle &= \sum_{t,\alpha} \frac{\langle f_1, \eta_{\alpha,t} \rangle \langle f_2, \eta_{\alpha,t} \rangle}{\|\eta_{\alpha,t}\|^2} \\ \Leftrightarrow \langle \Pi_{B_a^\perp}(f_1), \Pi_{B_a^\perp}(f_2) \rangle &= \langle f_1, f_2 \rangle - \sum_{t,\alpha} \frac{\langle f_1, \eta_{\alpha,t} \rangle \langle f_2, \eta_{\alpha,t} \rangle}{\|\eta_{\alpha,t}\|^2} \end{aligned}$$

ce qui donne les formules 4. et 9..

La projection de e_n sur l'espace C engendré par la fonction 1 vaut :

$$\Pi_C(e_n) = \frac{\langle e_n, 1 \rangle}{\|1\|^2} 1 \Rightarrow \langle \Pi_C(e_n), \Pi_C(e_m) \rangle = \frac{\langle e_n, 1 \rangle \langle e_m, 1 \rangle}{\|1\|^2} = \frac{\|e_n\|^2 \|e_m\|^2}{\sum_k \|e_k\|^2}$$

C'est la formule 6..

■

Références

- [1] N.I. Akhiezer and I. M. Glazman. *Theory of linear operators in Hilbert space*. Frederick Ungar Publishing co., New York, 1966.
- [2] J. Bass. *Cours de Mathématique*. Masson, Paris, 1968.
- [3] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*. Masson, Paris, 1992.
- [4] E. Castelier, C. de Fouquet. Estimation des perméabilités d'un barrage. In *Journées de Juin*. Centre de Géostatistique, 1995.
- [5] P. J. Laurent. *Approximation et optimisation*. Collection Enseignement des sciences. Hermann, Paris, 1972.
- [6] W. Rudin. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill, New York, 1966.