

Quelques méthodes de simulation de fonctions aléatoires intrinsèques

Jean–Paul CHILÈS

Bureau de Recherches Géologiques et Minières

BP 6009, 45060 Orléans Cedex 02

RÉSUMÉ. Il existe un grand nombre de méthodes de simulation de fonctions aléatoires stationnaires. Les principales d'entre elles peuvent être généralisées à la simulation de fonctions aléatoires intrinsèques ordinaires ou généralisées. On examine plus particulièrement le cas des fonctions aléatoires présentant un variogramme en $|h|^\alpha$ ou une covariance généralisée spline ou polynômiale. La méthode spectrale continue et les moyennes mobiles continues permettent une solution à peu près exacte mais coûteuse en calculs. Dans le cas discret, la méthode spectrale discrète est très performante et fournit une solution exacte. Sauf cas particulier, les méthodes approchées comme le déplacement du point médian ou la discrétisation du spectre continu sont à éviter.

ABSTRACT. A lot of methods are available for simulating stationary random functions. Most of them can be generalized to the simulation of intrinsic random functions. The case of random functions with a power variogram or a polynomial or spline generalized covariance is examined. The continuous spectral method and the continuous moving average give a rather exact, but computationally heavy, solution. In the discrete case, the discrete spectral method gives an efficient and quite exact solution. Approximate methods such as random midpoint displacement, random successive additions, or discretization of the continuous spectrum, shall be avoided.

Table des Matières

1 — INTRODUCTION	98
2 — SIMULATION D'UNE FAI–0	98
2.1. Représentation localement stationnaire d'une FAI–0	98
2.2. Simulation séquentielle gaussienne ou décomposition de la matrice des covariances	99
2.3. Moyenne mobile ou dilution de germes poissonniens	101
2.4. Méthode spectrale continue	104
2.5. Méthode spectrale discrète	105
3 — SIMULATION D'UNE FAI–k	108
3.1. Simulation d'une FAI–k par intégration	108
3.2. Simulation d'une covariance généralisée polynômiale sur la droite	109
3.3. Simulation d'une covariance spline	110
4 — CONCLUSION	110

1. INTRODUCTION

Il existe plusieurs méthodes relativement générales de simulation de fonctions aléatoires stationnaires (FASt) :

- simulation séquentielle gaussienne et diagonalisation de la matrice des covariances ;
- dilution de germes poissonniens et moyennes mobiles ;
- méthode spectrale continue et méthode spectrale discrète.

La plupart de ces méthodes ont des variantes, et il existe bien sûr une multitude de méthodes particulières. Il convient également d'ajouter la méthode des bandes tournantes, qui permet de construire des simulations dans $\mathbf{R}^n$ à partir de simulations sur des droites (Matheron, 1972b, 1973). Pour leur mise en pratique, et notamment pour le choix du nombre et des directions des droites, nous renvoyons le lecteur à Chilès (1977) à 2D et à Freulon et de Fouquet (1991) à 3D.

Ces méthodes se distinguent par la loi spatiale de la FASt simulée, leur plus ou moins grande rigueur, leur rapidité de mise en oeuvre, leurs limitations particulières. Le choix de l'une ou de l'autre dépend donc de l'application envisagée. Nous allons voir qu'elles se généralisent à la simulation de fonctions aléatoires intrinsèques ordinaires (FAI-0) ou d'ordre k (FAI- k). Seule la méthode séquentielle et la méthode par diagonalisation permettent de construire directement une simulation conditionnelle, mais dans un cadre assez limité. Pour les autres, on doit construire une simulation non conditionnelle puis la conditionner aux données à l'aide de l'algorithme classique qui consiste à ajouter au krigeage la simulation de l'erreur de krigeage (Delfiner, 1976).

Nous considérerons donc les variogrammes non bornés (les autres correspondant à des FASt), essentiellement les variogrammes en $|h|^\alpha$, puis les covariances généralisées en nous limitant en pratique au modèle en puissance et à ceux qui leur sont liés : covariance spline ou plus généralement en $h^{2n} \log(|h|)$, covariance généralisée polynômiale. Comme on le sait, si on simule de tels modèles dans $\mathbf{R}^1$, on obtient par bandes tournantes les mêmes modèles dans $\mathbf{R}^n$. Toute méthode de construction peut donc être intéressante même si elle est limitée à 1D.

2. SIMULATION D'UNE FAI-0

Nous considérerons principalement le cas du variogramme en $|h|^\alpha$, $0 < \alpha < 2$. Ce modèle doit une grande partie de sa popularité à la théorie fractale, car dans le cas de FAI-0 gaussiennes il correspond au mouvement brownien fractionnaire (Mandelbrot, 1975b), dont la dimension fractale est $D = n + \alpha/2$ si la FAI-0 est définie dans $\mathbf{R}^n$. Il a la particularité de rester invariant par bandes tournantes : l'opérateur des bandes tournantes transforme un variogramme en $|h|^\alpha$ dans $\mathbf{R}^1$ en un variogramme en $|h|^\alpha$ dans $\mathbf{R}^n$. Seul le coefficient multiplicatif change : il est multiplié par

$$B_{n\alpha} = \frac{\Gamma(\frac{n}{2}) \Gamma(\frac{\alpha+1}{2})}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{n+\alpha}{2})} \quad (1)$$

où Γ est la fonction eulérienne. Par conséquent, une méthode de simulation du variogramme en $|h|^\alpha$ qui ne serait utilisable que dans $\mathbf{R}^1$ peut servir de base à des simulations dans $\mathbf{R}^n$.

2.1. Représentation localement stationnaire d'une FAI-0

Un certain nombre de méthodes de simulation de FASt peuvent être utilisées pour simuler des FAI-0 lorsque celles-ci admettent des représentations localement stationnaires, c'est-à-dire dont la covariance entre deux points du domaine borné V à simuler est stationnaire. Or les FAI-0 usuelles

admettent des représentations localement stationnaires. A 1D par exemple, si $Z(x)$ est une FAI-0 de variogramme linéaire $\gamma(h) = |h|$ et si on s'intéresse au domaine $[-R, R]$, la FA définie par

$$Y(x) = Z(x) - \frac{Z(-R) + Z(R)}{2}$$

est d'espérance nulle et admet pour covariance entre deux points du domaine

$$E[Y(x) Y(y)] = R - |y-x| \quad x, y \in [-R, R]$$

Cette covariance est donc localement stationnaire sur $[-R, R] \times [-R, R]$. Plus généralement, comme l'a montré Matheron (1974), une FAI-0 de variogramme $\gamma(h) = \varpi|h|^\alpha$ admet des représentations localement stationnaires sur $[-R, R]$, et leur covariance y est localement de la forme

$$C(h) = \varpi(A - |h|^\alpha) \quad |h| \leq 2R \quad A \geq A_\alpha = \frac{R^\alpha}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \quad (2)$$

Il s'ensuit, par application de l'opérateur des bandes tournantes, que dans $\mathbf{R}^n$, une FAI-0 de variogramme $\gamma(h) = \varpi|h|^\alpha$ admet des représentations localement stationnaires sur la boule de rayon R , de covariance

$$C(h) = \varpi(A - |h|^\alpha) \quad |h| \leq 2R \quad A \geq \frac{\Gamma(\alpha + \frac{1+n}{2})}{\Gamma(1+\alpha) \Gamma(\frac{1+n}{2})} A_\alpha \quad (3)$$

Dans ce cas toute méthode qui, pour simuler une FAST dans une boule de rayon R , ne fait intervenir la covariance $C(h)$ que pour $|h| \leq 2R$, peut être utilisée pour simuler une représentation localement stationnaire de la FAI-0. C'est le cas de la méthode séquentielle gaussienne et de la méthode issue de la décomposition de la matrice de covariance.

2.2. Simulation séquentielle gaussienne ou décomposition de la matrice des covariances

Simulation séquentielle gaussienne : cas général

Soit à simuler $Z_i = Z(x_i)$ aux points x_i , $i = 1, \dots, N$. La méthode séquentielle consiste à choisir Z_1 dans sa loi a priori, puis Z_2 dans sa loi conditionnelle à Z_1 , puis Z_3 dans sa loi conditionnelle à Z_1 et Z_2 , etc.. Le cadre idéal d'application de cette méthode est bien sûr le cas de FAST gaussiennes (Alabert et Massonat, 1990) : la loi de Z_i conditionnellement à $Z_1, \dots, Z_{i-1}$ est gaussienne, de moyenne Z_i^* et de variance σ_{Ki}^2 , où Z_i^* est le krigeage simple de Z_i à partir des Z_j , $j < i$, et σ_{Ki}^2 la variance de krigeage correspondante. La méthode peut être employée tant qu'on est capable de résoudre numériquement le système de krigeage, c'est-à-dire jusqu'à environ 150 points. Elle permet de construire directement des simulations conditionnelles.

Pour aller au-delà de la limite de 150 points, on peut bien sûr ne conditionner Z_i que par les Z_j déjà simulés de son voisinage. La qualité de la simulation dépend alors de l'ordre des points simulés et du choix des voisinages (Gómez-Hernández et Cassiraga, 1994). A notre connaissance, le degré d'approximation de cette méthode pour des représentations localement stationnaires de FAI-0 n'a pas encore été examiné.

Simulation séquentielle gaussienne : cas du processus de Wiener-Lévy

Il existe un cas particulier où la méthode séquentielle est facilement utilisable, celui du mouvement brownien ou processus de Wiener-Lévy à 1D : c'est un processus gaussien à accroissements indépendants et à variogramme linéaire $\gamma(h) = \varpi |h|$ ($\varpi > 0$). Sa simulation en un ensemble de points $x_0 < x_1 < \dots < x_N$ à partir d'une valeur arbitraire $z_0 = Z(x_0)$ à l'origine x_0 découle immédiatement de sa définition. Elle peut être faite itérativement en appliquant la relation

$$Z(x_i) = Z(x_{i-1}) + U_i$$

où U_i est une variable aléatoire gaussienne centrée de variance $2 \varpi (x_i - x_{i-1})$, indépendante des variables aléatoires U_j précédentes.

Le mouvement brownien satisfait une propriété markovienne : si $x_0 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_N$ sont des points où le processus est connu et si le point x appartient à l'intervalle $]x_i, x_{i+1}[$, la loi de $Z(x)$ conditionnellement à $Z(x_0), \dots, Z(x_N)$ ne dépend que des observations les plus proches de part et d'autre du point x , qui font écran aux autres observations. Cette loi conditionnelle est gaussienne ; sa moyenne Z^* et sa variance σ_K^2 découlent du krigeage de $Z(x)$, qui se ramène dans ce cas à une interpolation linéaire entre x_i et x_{i+1} :

$$Z^* = \frac{(x_{i+1} - x)Z(x_i) + (x - x_i)Z(x_{i+1})}{x_{i+1} - x_i} \quad \sigma_K^2 = 2\varpi \frac{(x - x_i)(x_{i+1} - x)}{x_{i+1} - x_i}$$

Cette propriété markovienne est à l'origine d'un algorithme séquentiel qui permet de simuler entre des points expérimentaux et/ou d'affiner une simulation entre des points précédemment simulés. Dans le cas de points à maille régulière, cette méthode a été popularisée par Voss (1985) sous le nom de *déplacement aléatoire du point médian* : si $N+1$ points avec $N = 2^p$ doivent être simulés à l'intervalle Δx , on simule d'abord les points extrêmes, en choisissant un accroissement selon la loi de Gauss de moyenne nulle et de variance $\sigma^2 = 2 \gamma(N \Delta x) = 2 \varpi N \Delta x$. Puis on utilise la propriété markovienne pour simuler le point du milieu, si bien que les points simulés définissent maintenant deux intervalles. La méthode est à nouveau utilisée pour simuler les milieux de ces deux intervalles, et ainsi de suite. Après p iterations, tous les points sont simulés. Cette méthode est exacte pour le variogramme linéaire, mais ne l'est pas pour un variogramme en $|h|^\alpha$ avec $\alpha \neq 1$ (mouvement brownien fractionnaire), car la propriété markovienne n'est plus vérifiée. Sa transposition à 2D ou 3D n'est pas non plus valide, même pour un variogramme linéaire, pour la même raison.

Une autre limitation pratique de cette méthode est que le facteur d'agrandissement de l'échelle est limité aux puissances de 2. Un autre algorithme, celui des *additions aléatoires successives*, permet de s'affranchir de cette contrainte, mais lui aussi n'est valable que pour un variogramme linéaire à 1D. Ces deux algorithmes sont néanmoins couramment utilisés, même en dehors de ce cas. Ils constituent des raccourcis permettant de construire rapidement des simulations dont l'aspect est fractal. Mais ils donnent une image erronée du mouvement brownien fractionnaire.

Décomposition de la matrice des covariances

Dans la méthode séquentielle gaussienne, Z_i est une combinaison linéaire des Z_j simulés antérieurement, plus un terme $\sigma_{K_i} U_i$, où U_i est indépendant des Z_j . En raisonnant par récurrence, Z_i est donc de la forme :

$$Z_i = \sum_{j=1}^i a_{ij} U_j$$

La matrice $A = [a_{ij}]$ est une matrice triangulaire inférieure telle que $A A^T = C$, où $C = [C_{ij}]$ est la matrice des $N \times N$ covariances de la représentation localement stationnaire considérée.

Au lieu d'effectuer une simulation séquentielle, on peut décomposer d'abord la matrice C finale sous la forme $A A^T$, où A est une matrice triangulaire inférieure (décomposition de Cholesky ; cf. par exemple Press et al., 1992, pp. 96-98), puis simuler le vecteur Z des Z_i en faisant $Z = A U$, où U est un vecteur de N variables aléatoires normales réduites indépendantes.

Cette méthode a été introduite dans les applications géostatistiques par Davis (1987) et s'adapte aisément à la construction de simulations conditionnelles. Elle est applicable tant que la décomposition de Cholesky est réalisable, c'est-à-dire en général pour au plus une ou deux centaines de points à simuler. Il est possible d'aller au-delà si la covariance a une portée petite par rapport au champ, mais ce n'est pas le cas pour les représentations localement stationnaires de FAI-0. La méthode est donc limitée à des simulations portant sur peu de points.

2.3. Moyenne mobile ou dilution de germes poissoniens

Simulation de FAST par dilution

Soit $w(x)$ une fonction de $\mathbb{R}^n$ de carré sommable et $g(h)$ son covariogramme défini par :

$$g(h) = \int w(x) w(x+h) dx = w * \tilde{w}$$

Supposons aussi pour simplifier que la valeur absolue de $w(x)$ est sommable. Centrons la fonction w en chacun des points X_i d'un processus de points poissoniens de densité λ , en attribuant à chaque point le même poids σ . La somme des contributions de tous les X_i donne

$$Z(x) = \sigma \sum_i w(x - X_i) \quad (4)$$

$Z(x)$ est une FAST de moyenne m et de covariance $C(h)$ donnés par :

$$\begin{aligned} m &= \sigma \int w(x) dx \\ C(h) &= \lambda \sigma^2 g(h) \end{aligned} \quad (5)$$

Il est aisé de démontrer ces résultats de façon approximative. Une démonstration rigoureuse est présentée par Blanc-Lapierre et Fortet (1953).

On cherche généralement à obtenir des simulations de moyenne nulle. Si w n'est pas de somme nulle, il suffit de retrancher m à $Z(x)$. Une autre solution consiste à remplacer (4) par

$$Z(x) = \sum_i a_i w(x - X_i) \quad (6)$$

où les coefficients a_i sont égaux à $-\sigma$ ou $+\sigma$, alternativement, ou aléatoirement et selon la même loi de probabilité (ou encore aléatoires d'espérance nulle et de variance σ^2).

D'autres processus ponctuels que le processus de Poisson peuvent être utilisés. Considérons par exemple le cas où les points X_i constituent une grille régulière de maille Δx donnée et d'origine X_0 choisie aléatoirement à l'intérieur de la maille élémentaire centrée sur l'origine des axes :

$$Z(x) = \sum_{i \in \mathbb{Z}^n} a_i w(x - X_0 - i \Delta x) \quad (7)$$

Ce modèle constitue la généralisation des moyennes mobiles discrètes au cas continu. On démontre facilement que si les a_i sont des variables aléatoires non corrélées et de même loi, de moyenne nulle et de variance σ^2 , la covariance reste donnée par (5) avec $\lambda = 1 / |\Delta x|$. Le modèle (7) est souvent plus facile à calculer que le modèle (4). Pour que le choix de X_0 ne se fasse pas trop sentir sur la simulation, il est préférable de combiner un assez grand nombre de simulations. C'est le cas par exemple si on construit une simulation par bandes tournantes.

Si la simulation se fait elle-même à maille Δx , (7) prend la forme d'une moyenne mobile discrète :

$$Z_t = \sum_{i \in \mathbb{Z}^n} a_i w_{t-i} = \sum_{j \in \mathbb{Z}^n} w_j a_{t-j}$$

où Z_t représente $Z(t\Delta x)$, $t \in \mathbb{Z}^n$. A 1D et pour un nombre fini de termes, on retrouve les moyennes mobiles de Box et Jenkins (1970). Si Δx est petit, les pondérateurs w_j peuvent être pris en première approximation comme égaux aux termes $w(j\Delta x)$, moyennant éventuellement un facteur correctif. Boulanger (1990) propose une méthode rigoureuse de détermination des w_j à 1D et à 2D.

Généralisation à la simulation de FAI-0

Toutes ces constructions se généralisent à des fonctions $w(x)$ non nécessairement de carré sommable mais telles que

$$G(h) = \frac{1}{2} \int [w(x+h) - w(x)]^2 dx \quad (8)$$

existe. En raisonnant comme précédemment, on montre qu'on obtient des FAI-0 de variogramme

$$\gamma(h) = \lambda G(h)$$

Considérons plus particulièrement le cas d'un modèle en $|h|^\alpha$ dans $\mathbb{R}^1$. Ainsi que l'a montré Mandelbrot (1975a), la fonction $G(h) = \varpi |h|^\alpha$ peut se mettre sous la forme (8) avec

$$w(x) = \sqrt{\frac{\varpi}{R_\alpha}} |x|^{(\alpha-1)/2} \text{sign}(x)$$

et

$$R_\alpha = \int_0^\infty \left[(1+u)^{(\alpha-1)/2} - u^{(\alpha-1)/2} \right]^2 du + \frac{1}{2} \int_0^1 \left[(1-u)^{(\alpha-1)/2} + u^{(\alpha-1)/2} \right]^2 du$$

R_α est fini pourvu que $0 < \alpha < 2$, ce qui est précisément la condition pour que $|h|^\alpha$ soit un variogramme. Comme le support de w n'est pas borné, même les points poissoniens situés à une grande distance du domaine simulé ont un impact sur la simulation dans ce domaine. En pratique, seuls sont considérés les points situés à une distance n'excédant pas un seuil que l'on se donne, ce qui constitue une légère approximation. Ce seuil est choisi de façon que l'impact des points

négligés sur la domaine simulé puisse être considéré comme un terme à peu près constant. Un cas important est celui du variogramme linéaire ($\alpha = 1$), où $w(x)$ est une marche d'escalier, si bien que la simulation est exacte et constitue un processus de Poisson, c'est-à-dire une fonction qui progresse par sauts unité en chaque point d'un processus de points poissonniens et reste constante entre deux points du processus ponctuel.

On obtient des simulations à variogramme en $|h|^\alpha$ dans $\mathbf{R}^n$ en combinant des simulations 1D indépendantes par bandes tournantes. Si une simulation 1D est construite dans la direction centrale de tout angle solide $d\theta$ (en pratique dans un grand nombre de directions régulièrement réparties ou au moins équiréparties) et si chaque simulation est construite à partir d'un bruit gaussien (en pratique par moyenne mobile avec un pas petit), la simulation qui en résulte est une réalisation de mouvement brownien fractionnaire. Cette méthode se ramène à celle qui a été proposée par Chentsov (1957) pour le processus de Wiener-Lévy et qui a été généralisée au mouvement brownien fractionnaire par Mandelbrot (1975a).

Pour ce qui concerne la loi spatiale, les simulations par dilution de germes poissonniens ne sont pas gaussiennes. En effet, si le support de w est fini, ce qui est toujours le cas en pratique, $Z(x)$ est la somme de N variables aléatoires $a_i w(x - X_i)$, où N est une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson. Or la somme d'un nombre poissonnien de variables aléatoires indépendantes et de même loi ne peut pas être gaussienne, même si les variables aléatoires élémentaires le sont. De plus, la loi des a_i pour laquelle la loi spatiale de Z s'éloigne le moins d'une loi spatiale gaussienne est la loi à deux atomes $a_i = \pm 1$ avec équiprobabilité. L'approximation est d'autant meilleure que la densité λ est élevée.

Les simulations par moyennes mobiles quant à elles sont gaussiennes dès lors que les a_i le sont.

Simulation fondée sur des hyperplans poissonniens

Une méthode classique de simulation du variogramme linéaire dans le plan consiste à prendre un réseau de droites poissonniennes et à considérer chacune d'elles comme une faille qui crée un décalage aléatoire a_i de Z entre les deux demi-plans qu'elle délimite. Elle donne une simulation qui est constante dans chacun des polygones poissonniens (et qui n'est donc pas fractale). Cette construction se généralise au variogramme en $|h|^\alpha$ si on remplace le profil en marche d'escalier de chaque faille, regardé dans la direction orthogonale à la droite poissonnienne, par la fonction $a_i w$ où la w est la fonction vue plus haut. Cette méthode se généralise immédiatement à $\mathbf{R}^n$, en considérant cette fois un réseau d'hyperplans poissonniens. Elle a été proposée par Mandelbrot (1975a) pour simuler un variogramme en $|h|^\alpha$ dans $\mathbf{R}^n$.

En fait, cette méthode revient à diluer des points poissonniens X_i par les fonctions $W_i(x) = w(\langle x - X_i, U_i \rangle)$ où les U_i sont des vecteurs unitaires d'orientations aléatoires indépendantes à loi uniforme ($\langle \cdot, \cdot \rangle$ représente le produit scalaire de $\mathbf{R}^n$). Elle est aussi équivalente à une construction par bandes tournantes avec des droites de directions indépendantes et à loi uniforme lorsque le nombre de droites n_D tend vers l'infini et que la densité λ de points poissonniens sur chaque droite tend vers 0 de façon que $n_D \lambda$ reste constant : à partir du moment où on ne retient que les points de Poisson d'un domaine fini, seul un nombre fini de droites apportent une contribution à la simulation, et cette contribution est limitée à une seule discontinuité par droite.

2.4. Méthode spectrale continue

Simulation de FAST

La méthode spectrale continue repose sur les deux résultats suivants :

1. Toute covariance continue $C(h)$ de $\mathbf{R}^n$ est la transformée de Fourier (inverse) d'une mesure symétrique sommable non négative $F(du)$:

$$C(h) = \int e^{2\pi i \langle u, h \rangle} F(du) = \int \cos(2\pi \langle u, h \rangle) F(du) \quad (9)$$

avec

$$\int F(du) = C(0) = \sigma^2 < \infty$$

où i est l'unité imaginaire pure ($i^2 = -1$). F est la distribution spectrale de la FAST.

2. Soit U un vecteur aléatoire de $\mathbf{R}^n$ de distribution $F(du) / \sigma^2$ (fréquence aléatoire), et soit Φ une variable aléatoire de distribution uniforme sur $[0, 2\pi[$ (phase aléatoire), indépendante de U . Alors la fonction aléatoire de $\mathbf{R}^n$ définie par

$$Z(x) = \sigma \sqrt{2} \cos(2\pi \langle U, x \rangle + \Phi) \quad (10)$$

est stationnaire (au sens large), de moyenne nulle et de covariance $C(h)$ donnée par (9).

Une réalisation de (10) est une fonction sinusoïdale dans $\mathbf{R}^1$, un cylindre à base sinusoïdale dans $\mathbf{R}^2$, etc., et il en va de même de sa covariance régionale, même sur un domaine infini. La FAST définie par (10) n'est donc pas ergodique en ce qui concerne sa covariance. Aussi en pratique n'emploie-t-on cette méthode qu'en sommant un grand nombre de simulations élémentaires indépendantes (et en normant de façon appropriée). On obtient alors des FAST à loi spatiale approximativement gaussienne (cf. Lantuéjoul, 1994, pour plus de détails).

A 1D, U peut être obtenu à partir d'une variable aléatoire Y à loi uniforme sur $[0, 1]$ en appliquant à Y la fonction inverse de $F(u) / \sigma$. Il est à noter que si on additionne N simulations élémentaires, les résultats restent vrais si les U_i , $i = 1, \dots, N$, constituent un échantillonnage aléatoire stratifié de $[0, 1]$ ou une suite équirépartie dans cet intervalle. Ceci améliore grandement l'ergodicité des simulations. Cette construction se généralise sans peine à $\mathbf{R}^n$.

Généralisation aux FAI-0

La représentation spectrale d'une FAI-0 est très semblable à celle d'une FAST. La principale différence est que la mesure spectrale $F(du)$ associée au variogramme n'est plus nécessairement sommable : les basses fréquences peuvent avoir une variance infinie. En pratique, si on simule dans un domaine borné V , on peut définir un seuil de fréquence u_0 tel que toute composante de fréquence $u < u_0$ puisse être considérée comme constante à l'échelle du domaine V . Une FAI-0 étant définie à une constante près, on peut alors appliquer l'algorithme de simulation spectrale du cas continu (Section 5.3.2) en prenant pour loi de la fréquence aléatoire U la loi de distribution associée à la mesure spectrale $F(du)$ de la FAI-0 conditionnée par $|U| > u_0$.

Dans $\mathbf{R}^n$, la mesure spectrale du variogramme $\gamma(h) = |h|^\alpha$ est (Matheron, 1973) :

$$F(du) = \frac{\Gamma(\frac{\alpha+n}{2})}{\Gamma(-\frac{\alpha}{2})} \frac{du}{\pi^{\alpha+\frac{n}{2}} |u|^{\alpha+n}}$$

Pour les petites valeurs de α , il faut superposer un grand nombre de simulations élémentaires pour atteindre un comportement ergodique.

2.5. Méthode spectrale discrète

Représentations spectrales discrètes à 1D

Examinons le cas à une dimension. Si la simulation doit être construite à maille régulière aux points $x = n\Delta x$, $n = 0, 1, \dots, N-1$, d'un intervalle de longueur $L = N\Delta x$, il est commode de recourir au formalisme des transformées de Fourier discrètes. Dans ce formalisme, la suite $Z_n = Z(n\Delta x)$ est considérée comme un processus stationnaire sur Z , de période N , dont il suffit de considérer la valeur sur la période $\{0, 1, \dots, N-1\}$.

La plus petite fréquence observable est $\Delta u = 1 / (N\Delta x)$, et toutes les autres fréquences sont multiples de Δu , avec pour maximum $1 / (2\Delta x) = (N/2) \Delta u$. Il existe une bijection entre la suite $Z_n = Z(n\Delta x)$ et sa transformée discrète $Y_k = Y(k\Delta u)$:

$$Y_k = \sum_{n=0}^{N-1} Z_n e^{-2\pi i kn/N} \quad Z_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y_k e^{2\pi i kn/N} \quad (11)$$

ainsi qu'entre la suite des termes de covariance $C_m = C(m\Delta x)$ et sa transformée de Fourier discrète $F_k = F(k\Delta u)$:

$$F_k = \sum_{m=0}^{N-1} C_m e^{-2\pi i km/N} \quad C_m = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{2\pi i km/N} \quad (12)$$

Les Y_k satisfont $E[Y_k \overline{Y_{k'}}] = 0$ si $k \neq k'$, et $E[|Y_k|^2] = F_k$. Si les valeurs C_m constituent un modèle valide de covariance, les valeurs F_k du spectre sont non négatives.

Les relations (11) et (12) ne doivent pas être considérées comme une approximation discrète des relations du cas continu, mais comme un résultat exact qui peut être démontré sans faire référence au cas continu.

Comme la covariance est réelle et symétrique, les F_k sont aussi réels et symétriques. Notons que la périodicité et la symétrie par rapport à 0 impliquent une symétrie par rapport à $N/2$:

$$C_{N-m} = C_{-m} = C_m$$

$$F_{N-k} = F_{-k} = F_k$$

Comme les Z_n sont des variables aléatoires réelles, les Y_k sont des variables aléatoires complexes qui satisfont la symétrie hermitienne $Y_{N-k} = \overline{Y_k}$. Cela signifie que leurs parties réelle et imaginaire U_k et V_k satisfont $U_{N-k} = U_k$ et $V_{N-k} = -V_k$. En particulier $V_0 = 0$, et $V_{N/2} = 0$ si N est pair. La propriété d'orthogonalité est équivalente aux deux propriétés suivantes ::

1. U_k et V_k sont sans corrélation et ont même variance $\sigma_k^2 = F_k / 2$, sauf pour $k = 0$ et pour $k = N/2$ où U_k a la variance $\sigma_k^2 = F_k$ et $V_k = 0$.
2. Les U_k ($k = 0, \dots, N/2$) et les V_k ($k = 1, \dots, N/2-1$) sont mutuellement sans corrélation.

Il y a donc en fait N variables aléatoires réelles non nulles pour N points à simuler. Par conséquent, en simulant ces N variables aléatoires indépendamment les unes des autres avec les variances σ_k^2 appropriées et en les combinant par (11b) on obtient un processus $Z(x)$ aux points $x = n\Delta x$ dont la covariance aux distances $m\Delta x$ coïncide exactement avec les termes C_m . La formule (11b) ne doit pas être utilisée pour calculer $Z(x)$ en des points autres que les noeuds.

Simulation spectrale discrète à 1D

En pratique, la simulation se réalise comme suit :

$$C_m \rightarrow F_k \rightarrow Y_k \rightarrow Z_n$$

1. Calculer les termes de covariance $C_m = C(m\Delta x)$, $m = 0, \dots, N/2$, et compléter par symétrie.
2. Calculer la transformée de Fourier discrète des C_m conformément à (12a) pour obtenir les coefficients F_k du spectre et les variances σ_k^2 correspondantes.
3. Simuler U_0 , U_k et V_k pour $0 < k < N/2$, et $U_{N/2}$, avec les variances σ_k^2 , puis compléter par symétrie pour les U_k et par antisymétrie pour les V_k .
4. Inverser la suite des $Y_k = U_k + i V_k$ par la transformée de Fourier inverse (11b) pour obtenir les Z_n .
5. Éliminer les $N/2 - 1$ derniers (ou premiers) points Z_n .

Les U_k et les V_k sont pris généralement gaussiens. Le vecteur simulé est alors multigaussien par construction.

Les transformées de Fourier discrètes, directes et inverses, peuvent être calculées à l'aide d'un algorithme de transformée de Fourier rapide (cf. Press et al., 1992). Il est avantageux de prendre pour N une puissance de 2, mais des algorithmes permettent de prendre pour N un nombre qui se décompose en facteurs premiers autres que 2 mais restant petits.

La nécessité de supprimer une partie de la séquence simulée tient au caractère circulaire des transformées de Fourier discrètes. La covariance simulée étant symétrique et périodique de période $L = N\Delta x$, au-delà de $m = N/2$ on a $C_m = C_{N-m} = C((N-m)\Delta x)$, qui en général est différent de $C(m\Delta x)$. En ne retenant de la séquence simulée que les termes correspondant à $m = 0, 1, \dots, N/2$, on est sûr de reproduire correctement la covariance voulue (on peut aller au-delà lorsque la covariance atteint sa portée pour $a < L/2$).

Limitations sur les modèles de covariance

L'utilisation correcte de la méthode requiert de prendre pour F_k la transformée de Fourier discrète des C_m et non pas de discrétiser la distribution spectrale $F(du)$ de la covariance continue $C(h)$: par un effet stroboscopique, le spectre discret F_k ne représente pas $F(du)$ qu'à la fréquence $k\Delta u$ mais inclut aussi les contributions des fréquences $(k + pN)\Delta u$, $p \in \mathbb{Z}$.

Une autre différence avec le cas continu, souvent ignorée, est que l'on n'est pas toujours assuré d'obtenir des coefficients F_k non négatifs. En effet, la périodisation des termes C_m ne conduit pas nécessairement à un modèle valide de covariance. Il y a néanmoins deux cas où les F_k sont

nécessairement non négatifs parce que la périodisation de $C(h)$ à la période L est elle-même une covariance continue admissible :

1. Si la covariance a une portée finie a et si $L \geq 2a$.
2. Si $C(h)$ est une fonction convexe pour $0 < h < L/2$.

Le premier cas peut être vu facilement. Le second résulte de ce qu'une covariance convexe peut être mise sous la forme d'une somme de covariances triangles, et il est aisé de voir qu'une covariance triangle périodisée est un modèle admissible quels que soient L et a .

Extension à 2D et 3D

La méthode spectrale discrète peut sans difficulté être étendue à 2D et à 3D. Pardo-Iguzquiza et Chica-Olmo (1993) détaillent les algorithmes correspondants. Mais des deux cas où à une dimension on est assuré d'obtenir un spectre F_k non négatif, seul celui d'une covariance de portée finie se transpose à 2D et à 3D.

Simulation de FAI-0 à variogramme en $|h|^\alpha$

Voss (1985) présente des simulations par FFT de fonctions aléatoires browniennes fractionnaires, c'est-à-dire de FAI-0 à variogramme en $|h|^\alpha$. Il s'agit de simulations 2D du relief et 3D de nuages (à partir d'une simulation 3D de la température). Mais il utilise pour ce faire le spectre obtenu par discrétisation de la mesure spectrale $F(du)$, d'où il résulte un biais. Ce biais, qui dépend de α , est généralement très important. D'ailleurs nous allons voir qu'il n'est possible de simuler correctement un variogramme en $|h|^\alpha$ qu'à la double condition qu'on soit en 1D et que $\alpha \leq 1$.

En effet la méthode spectrale discrète ne peut en toute rigueur s'appliquer qu'à des fonctions aléatoires stationnaires à covariance périodique. Dans $\mathbf{R}^1$, une FAI-0 dont le variogramme est $\gamma(h) = |h|^\alpha$ admet des représentations localement stationnaires sur $[-R, R]$, dont la covariance locale est de la forme (2) pour $|h| \leq 2R$. Si on prolonge $C(h)$ en dehors de l'intervalle $[-2R, 2R]$ par périodisation (de période $L = 4R$), on obtient une fonction dont on vérifie facilement que la série de Fourier est positive si et seulement si $\alpha \leq 1$.

Autrement dit, une FAI-0 de variogramme $\gamma(h) = \omega|h|^\alpha$, $\alpha \leq 1$, peut être simulée par la méthode spectrale discrète sur un segment de longueur $L/2$ comme une FAST de covariance (2) avec $R = L/4$ (comme on l'a vu Section 5.4, la simulation porte sur un segment de longueur L , mais seule la première moitié en est retenue compte tenu de la symétrie introduite par la périodisation). Cette méthode de simulation n'est pas possible pour $\alpha > 1$. La méthode ne se transpose pas non plus à $\mathbf{R}^n$, $n > 1$: par bandes tournantes, la covariance stationnaire périodique engendre bien une covariance stationnaire dans $\mathbf{R}^n$, dont la forme est donnée par (3) dans la boule de diamètre L centrée sur l'origine, mais cette covariance n'est pas périodisable dans $\mathbf{R}^n$. Il reste néanmoins possible de construire des simulations dans $\mathbf{R}^1$ et de les composer par bandes tournantes pour obtenir une simulation dans $\mathbf{R}^n$.

Signalons aussi une variante présentée par Voss (1985), qui consiste à échantillonner les fréquences non pas en progression arithmétique mais en progression géométrique. A 1D, $Z(x)$ est défini par

$$Z(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k r^{k\alpha/2} \sin(2\pi r^{-k} x + \Phi_k)$$

où les A_k sont des variables aléatoires indépendantes de même variance et les Φ_k des phases aléatoires indépendantes à distribution uniforme sur $[0, 2\pi[$. Le paramètre r doit être choisi entre 0 et 1. L'amplitude des basses fréquences (valeurs négatives de k) tend vers l'infini quand k tend vers $-\infty$; l'amplitude des hautes fréquences tend au contraire vers zéro lorsque k tend vers $+\infty$. $Z(x)$ est la fonction de Weierstrass-Mandelbrot. Si on se donne une borne inférieure et une borne supérieure de fréquence, on peut facilement construire une simulation approchée de cette FA, car un nombre restreint de termes suffit. Mais cette FA n'est ni stationnaire ni intrinsèque. Si elle donne des simulations de relief à allure fractale, elle ne permet pas de construire réellement des réalisations de FAI-0 à variogramme en $|h|^\alpha$.

Généralisation aux FAI-0 à variogramme concave

La méthode peut être utilisée pour tout variogramme concave, c'est-à-dire vérifiant

$$\gamma(\lambda h_1 + (1-\lambda) h_2) \geq \lambda \gamma(h_1) + (1-\lambda) \gamma(h_2) \quad 0 < h_1 < h_2 \quad 0 < \lambda < 1$$

En effet, si on veut obtenir sur $[-L/2, L/2]$ une simulation dont le variogramme soit $\gamma(h)$, où $\gamma(h)$ est concave pour $0 < h < L/2$, $\gamma(h)$ peut être considéré comme de la forme $C(0) - C(h)$ avec $C(h) = \gamma(L/2) - \gamma(h)$ pour $|h| \leq L/2$ et $C(h) = 0$ pour $|h| \geq L/2$. $C(h)$ est une fonction convexe et est par conséquent une covariance. Comme on l'a vu, c'est une covariance dont la périodisation donne une covariance, et qui peut par conséquent être simulée parfaitement par la méthode spectrale discrète.

En fait la périodisation de $C(h) = C(0) - \gamma(h)$ donne un modèle admissible pourvu que $C(0) \geq A$ où la valeur minimale A est en général inférieure à $\gamma(L/2)$. En pratique, on peut construire la simulation correspondant à la valeur minimale de $C(0)$ en appliquant l'algorithme défini pour une covariance stationnaire, avec $C(h) = -\gamma(h)$, et en annulant la valeur F_0 du spectre, qui doit être la seule composante du spectre à être négative.

Matheron (1988) présente une autre méthode de simulation à 1D de FA à variogramme concave, dont la loi spatiale est mosaïque. Elle repose sur les processus $X(t)$ à accroissements positifs indépendants et stationnaires de P. Lévy. Dans un intervalle de temps fini, un tel processus peut présenter une infinité de sauts très petits, mais dont l'amplitude cumulée reste finie, et un nombre fini de grands sauts, dont l'amplitude cumulée peut toutefois être infinie. En projection sur l'axe des x , les points de discontinuité du processus engendrent un processus ponctuel qui peut présenter des points d'accumulation. On peut associer à ce processus ponctuel une FA mosaïque $Z(x)$ qui prend une valeur aléatoire constante entre deux points du processus ponctuels. Les variables aléatoires associées aux différents segments sont supposées indépendantes et de même loi. Matheron (1988) propose une méthode exacte pour simuler une telle FA à maille discrète. Elle permet de construire aisément dans $\mathbb{R}^1$ des simulations mosaïques à variogramme en $|h|^\alpha$, mais encore une fois seulement pour $\alpha < 1$.

3. SIMULATION D'UNE FAI- k

3.1. Simulation d'une FAI- k par intégration

A 1D, l'intégrale d'ordre k d'une FAI-0 est une FAI- k et sa covariance généralisée se déduit de celle de la FAI-0 par intégration d'ordre $2k$ (Matheron, 1973). Ainsi on obtient des simulations dont la covariance généralisée est en $|h|^{\alpha+2p}$ ($0 < \alpha < 2$, $0 \leq p \leq k$) en intégrant p fois des simulations de FAI-0 à variogramme en $|h|^\alpha$. En combinant les simulations 1D ainsi obtenues par bandes tournantes, on obtient une simulation à covariance généralisée en $|h|^{\alpha+2p}$ dans $\mathbb{R}^n$.

Les covariances généralisées polynômiales admettent des représentations localement stationnaires dans $\mathbf{R}^n$ quel que soit n (Matheron, 1973, 1974). De telles représentations peuvent donc être simulées directement dans $\mathbf{R}^n$ par la méthode de décomposition de la matrice de covariance. Mais comme cette méthode est limitée à environ 150 points, ces FAI- k sont généralement simulées par bandes tournantes. Les coefficients de la covariance polynômiale K_1 à simuler sur les droites se déduisent terme à terme de ceux de la covariance polynômiale K_n dans $\mathbf{R}^n$ par division par les B_{na} correspondants, la formule (1) restant valable pour les FAI- k . En particulier pour $k=2$ la correspondance explicite entre la covariance généralisée K_1 dans $\mathbf{R}^1$ et les covariances K_2 et K_3 engendrées par bandes tournantes est donnée par :

$$\begin{aligned} K_1(r) &= -b_0 r + b_1 r^3 - b_2 r^5 \\ K_2(r) &= -\frac{2}{\pi} b_0 r + \frac{4}{3\pi} b_1 r^3 - \frac{16}{15\pi} b_2 r^5 \\ K_3(r) &= -\frac{1}{2} b_0 r + \frac{1}{4} b_1 r^3 - \frac{1}{6} b_2 r^5 \end{aligned}$$

3.2. Simulation d'une covariance généralisée polynômiale sur la droite

La FAI- k demandée peut être obtenue par intégrations successives du *même* processus de Poisson ou de Wiener-Lévy $W(x)$. Matheron (1972a, 1973) propose une variante qui fournit des simulations de représentations localement stationnaires de la FAI- k sur $[-R, R]$. Elle consiste à prendre les intégrales centrées successives de $W(x)$:

$$Z(x) = c_0 Y_0(x) + c_1 Y_1(x) + \dots + c_k Y_k(x)$$

où les FA $Y_p(x)$ sont définies par

$$Y_0(x) = W(x) - \frac{1}{2} [W(-R) + W(R)]$$

et la relation de récurrence

$$Y_p(x) = \int_{-R}^x Y_{p-1}(u) du - \frac{1}{2} \int_{-R}^R Y_{p-1}(u) du$$

Les coefficients c_k dépendent des coefficients de la covariance généralisée polynômiale. En particulier, si on se limite à $k=2$, une FAI- k de covariance généralisée

$$K(h) = -b_0 |h| + b_1 |h|^3 - b_2 |h|^5$$

admet sur $[-R, R]$ une représentation localement stationnaire de covariance

$$C(h) = b_0 (R - |h|) + b_1 (2R^3 - 3Rh^2 + |h|^3) + b_2 (16R^5 - 20R^3 |h|^2 + 5R |h|^4 - |h|^5) \quad (h \leq 2R)$$

Si $W(x)$ a pour covariance généralisée $K_0(h) = -|h|$, les coefficients c_0, c_1, c_2 se déduisent de b_0, b_1, b_2 par

$$c_0 = \sqrt{b_0} \quad c_2 = \sqrt{120b_2} \quad c_1 = \sqrt{6b_1 + 2c_0 c_2}$$

Noter que les termes qui figurent sous les racines carrées sont non négatifs, ainsi qu'il résulte des conditions que doivent satisfaire les coefficients b_0, b_1, b_2 pour assurer que $K(h)$ est un modèle

admissible de covariance généralisée dans $\mathbf{R}^1$ (rappelons que b_0 et b_2 doivent être non négatifs, mais que b_1 peut être négatif, pourvu qu'il vérifie $b_1 \leq -\sqrt{40b_0b_2/3}$).

Si $W(x)$ est simulé par dilution de germes poissonniens (autrement dit, si c'est un processus de Poisson), $W(x)$ est constant par morceaux, et par conséquent $Z(x)$ est continue et linéaire par morceaux si $k = 1$, continue et quadratique par morceaux si $k = 2$. Par contre on a un léger biais si on part d'une simulation de $W(x)$ à maille régulière (autrement dit une marche aléatoire) : du fait de la discrétisation les intégrales de $W(x)$ ne sont pas exactes, et des termes de plus bas degré $(-1)^q |h|^{2q+1}$, $q < p$, s'introduisent dans la simulation de $(-1)^p |h|^{2p+1}$ (cf. Orfeuil, 1972). Ce biais disparaît toutefois si on randomise l'origine comme en (7).

3.3. Simulation d'une covariance spline

La covariance généralisée spline $K(h) = h^2 \log(|h|)$ est valable dans $\mathbf{R}^n$, pour $k \geq 1$. Comme l'a montré Matheron (1980), elle admet, dans $\mathbf{R}^1$, $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{R}^3$, les représentations localement stationnaires suivantes pour $|h| \leq 2R$:

$$C_1(h) = \frac{1}{2}R^2 - \left(\frac{3}{2} - \log 2\right)h^2 + h^2 \log(|h|/R)$$

$$C_2(h) = R^2 - h^2 + h^2 \log(|h|/R)$$

$$C_3(h) = \frac{3}{2}R^2 - \left(\frac{11}{6} - \log 2\right)h^2 + h^2 \log(|h|/R)$$

Ces représentations stationnaires peuvent être simulées par la méthode de diagonalisation de la matrice de covariance. Mais cette méthode est limitée à quelques centaines de points. Dans $\mathbf{R}^1$, Matheron (1988) propose une méthode très simple de simulation à maille régulière qui ne présente pas cette limitation : Soient $Z_i = Z(x_i)$ les valeurs prises par la FAI-1 $Z(x)$ aux points d'abscisse $x_i = x_0 + j \Delta x$, $j = 0, 1, \dots, N$, et soient $Y_j = Z_j - Z_{j-1}$, $j = 1, \dots, N$ les accroissements correspondants. $Z(x)$ étant une FAI-1, $Y(x) = Z(x) - Z(x - \Delta x)$ est une FAI-0. Si la covariance généralisée de $Z(x)$ est $K(h) = h^2 \log(|h|)$, le variogramme des accroissements Y_j et Y_{j+k} est :

$$\gamma(k \Delta x) = \left[(k+1)^2 \log(k+1) - 2k^2 \log(k) + (k-1)^2 \log(k-1) \right] (\Delta x)^2 \quad (k > 0)$$

C'est une fonction concave. Comme on l'a vu Section 2.5, on peut construire une simulation des accroissements Y_j par la méthode spectrale discrète. On en déduit alors une simulation des Z_j en prenant $Z_0 = 0$ et $Z_j = Z_{j-1} + Y_j$, $j = 1, \dots, N$. Pour obtenir une simulation dans $\mathbf{R}^n$, on peut procéder par bandes tournantes, car une covariance spline dans $\mathbf{R}^1$ se transforme en une covariance spline dans $\mathbf{R}^n$ (mais elle est divisée par 2 dans $\mathbf{R}^2$ et par 3 dans $\mathbf{R}^3$).

ADDENDUM

Suite à une discussion avec J.P. Marrero et P. Delfiner, il apparaît que le variogramme des différences finies d'une FAI-0 à variogramme en $|h|^\alpha$, $1 < \alpha < 2$, est concave. On peut donc simuler une telle FAI-0 de la même manière qu'une FAI-1 à covariance généralisée spline.

CONCLUSION

Moyennant quelques restrictions, les méthodes de simulation de FAST se transposent aux FAI :

- Pour effectuer des simulations dans $\mathbf{R}^n$, $n > 1$, il est recommandé de passer par la méthode des bandes tournantes, car les méthodes de simulation directe sont ou bien trop limitées (pas plus

- de 150 points pour la méthode séquentielle), ou bien trop lourdes dans R^n (méthode spectrale continue, dilution de germes), ou encore biaisées (déplacement du point médian).
- Le variogramme en $|h|^\alpha$ peut être obtenu de façon approchée par la méthode spectrale continue et par moyenne mobile continue. Le biais est négligeable pour les valeurs usuelles de α . Mais ces méthodes sont relativement lentes.
 - A maille régulière, la méthode spectrale discrète fournit de façon très performante des simulations exactes et multigaussiennes, soit directement si $\alpha \leq 1$, soit par l'intermédiaire d'une simulation des différences finies si $\alpha > 1$.
 - Les covariances généralisées polynômiales et splines peuvent être simulées exactement par intégration.

REMERCIEMENTS

La préparation de cet article (contribution scientifique N° 95031 du BRGM) a été financée par des fonds de recherche du BRGM.

RÉFÉRENCES

- Alabert, F.G., and G.J. Massonnat (1990). Heterogeneity in a complex turbiditic reservoir: stochastic modelling of facies and petrophysical variability. *SPE paper* 20604, 65th Annual Technical Conference and Exhibition of the Society of Petroleum Engineers, New Orleans, Louisiana, pp. 775-790.
- Blanc-Lapierre, A., and R. Fortet (1953). *Théorie des fonctions aléatoires*. Masson, Paris, 693 p.
- Boulanger, F. (1990). *Modélisation et simulation de variables régionalisées, par des fonctions aléatoires stables*. Thèse de doctorat, E.N.S. des Mines de Paris, 385 p.
- Box, G.E.P., and G.M. Jenkins (1970). *Time series analysis: forecasting and control*. Holden Day, San Francisco, California, 553 p. Revised edition (1976), 575 p.
- Chentsov, N.N. (1957). Levy's Brownian motion for several parameters and generalized white noise. *Theory of Probability and its Applications*, Vol. 2, pp. 265-266.
- Chilès, J.P. (1977). *Géostatistique des phénomènes non stationnaires (dans le plan)*. Thèse de docteur-ingénieur, Université de Nancy-I, 152 p.
- Davis, M.W. (1987). Production of conditional simulations via the LU triangular decomposition of the covariance matrix. *Mathematical Geology*, Vol. 19, No. 2, pp. 91-98.
- Delfiner, P. (1976). Linear estimation of non stationary spatial phenomena. In *Advanced geostatistics in the mining industry*, M. Guarascio, M. David, and C. Huijbregts (Eds.), D. Reidel Publishers, Dordrecht, Holland, pp. 49-68.
- Freulon, X., and C. de Fouquet (1991). Pratique des bandes tournantes à 3D. In *Compte-rendu des Journées de Géostatistique*, C. de Fouquet (Ed.), *Cahiers de Géostatistique*, Fasc. 1, E.N.S. des Mines de Paris, pp. 101-117.
- Gómez-Hernández, J.J., and E.F. Cassiraga (1994). Theory and practice of sequential simulation. In *Geostatistical simulations*, M. Armstrong and P.A. Dowd (Eds.), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Netherlands, pp. 111-124.
- Lantuéjoul, C. (1994). Non conditional simulation of stationary isotropic multigaussian random functions. In *Geostatistical simulations*, M. Armstrong and P.A. Dowd (Eds.), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Netherlands, pp. 147-177.
- Mandelbrot, B.B. (1975a). Fonctions aléatoires pluri-temporelles: approximation poissonienne du cas brownien et généralisations. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, Paris, t. 280A, pp. 1075-1078.
- Mandelbrot, B.B. (1975b). *Les objets fractals: forme, hasard, et dimension*. Flammarion, Paris, 190 p. Troisième édition, révisée et augmentée (1989), 268 p.

- Matheron, G. (1972a). *Les covariances généralisées polynômiales*. Note interne N-299, Centre de Géostatistique, Fontainebleau.
- Matheron, G. (1972b). *The turning bands: a method for simulating random functions in R^n* . Technical report N-303, Centre de Géostatistique, Fontainebleau.
- Matheron, G. (1973). The intrinsic random functions and their applications. *Advances in Applied Probability*, Vol. 5, pp. 439-468.
- Matheron, G. (1974). *Représentations stationnaires et représentations minimales pour les F.A.I.-k*. Note interne N-377, Centre de Géostatistique, Fontainebleau.
- Matheron, G. (1980). *Splines et krigeage : leur équivalence formelle*. Note interne N-667, Centre de Géostatistique, Fontainebleau.
- Matheron, G. (1988). Simulation de fonctions aléatoires admettant un variogramme concave donné. *Sciences de la Terre, Série Informatique Géologique*, No. 28, pp. 195-212.
- Orfeuill, J.P. (1972). *Simulation du Wiener-Lévy et de ses intégrales*. Note interne N-290, Centre de Géostatistique, Fontainebleau, 29 p.
- Pardo-Iguzquiza, E., and M. Chica-Olmo (1993). The Fourier integral method: an efficient spectral method for simulation of random fields. *Mathematical Geology*, Vol. 25, No. 2, pp. 177-217.
- Press, W.H., B.P. Flannery, S.A. Teukolsky, and W.T. Wetterling (1992). *Numerical recipes in C - The art of scientific computing* (Second edition). Cambridge University Press, 994 p.
- Voss, R.F. (1985). Random fractal forgeries. In *Fundamental algorithms for computer graphics*, R.A. Earnshaw (Ed.), Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, pp. 13-16 and 805-835.