

# GÉOSTATISTIQUE DES PHÉNOMÈNES NON STATIONNAIRES

( DANS LE PLAN )

---

THÈSE

présentée à

l'Université de Nancy - I

pour obtenir le titre de

docteur - ingénieur

par

Jean - Paul CHILÈS

Soutenu le 9 Novembre 1977

devant le jury composé de :

M. M. DEPAIX

M. G. MATHERON

M. C. CHAMBON

M. A. COMOLET-TIRMAN

Président

Examineurs

## REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à exprimer ma reconnaissance à Monsieur MATHERON, Directeur du Centre de Géostatistique et rapporteur de ma thèse, qui m'a initié aux probabilités et m'a fait découvrir le domaine passionnant de la Géostatistique ; en me donnant la possibilité de travailler au sein de son Centre, il m'a permis de donner un contenu concret à un vieux rêve diffus : chercher à maîtriser le "hasard".

Je dois témoigner également toute ma gratitude à mes camarades des Centres de Géostatistique et de Morphologie Mathématique. Il serait trop long de les mentionner tous, et seuls les noms de certains apparaîtront çà ou là parmi les références bibliographiques. Mais que tous sachent qu'au cours des nombreuses discussions amicales que nous avons eues, ils m'ont beaucoup apporté. Je mentionnerai tout de même plus particulièrement P. CHAUVET, avec qui j'ai cheminé, plusieurs années durant, sur les pistes des FAI-k, ainsi que P. DELFINER et J.P. DELHOMME, compagnons de travail sur les applications de la géostatistique non stationnaire.

Je sais infiniment gré à Monsieur CHAMBON, Professeur à l'Ecole des Mines de Nancy, de s'être intéressé à ce travail, et d'avoir accepté d'être mon directeur de thèse.

J'adresse mes remerciements les plus sincères à Monsieur DEPAIX, doyen de la Faculté des Sciences de Nancy, qui a bien voulu assurer la présidence de mon jury, et à Monsieur COMOLET-TIRMAN, directeur-adjoint du Service Hydrographique et Océanographique de la Marine, qui a permis le développement de la géostatistique en bathymétrie et m'a fait l'honneur de faire partie de mon jury.

Qu'il me soit enfin permis de remercier Monsieur LAURENT pour son aide et ses conseils de dessinateur, et surtout Madame de GRENIER de LATOUR, qui s'est acquittée à merveille de la réalisation matérielle de ce travail.

TABLE DES MATIERES
--------------------

	page
INTRODUCTION.....	1
PREMIERE PARTIE : LES MODELES DE FONCTION ALEATOIRE EN GEOSTATISTIQUE NON STATIONNAIRE	
<u>I - Généralités sur le choix des modèles</u>	
1 - Notations.....	7
2 - L'introduction d'une hypothèse probabiliste.....	7
3 - Hypothèses limitatives.....	8
<u>II - Les modèles de la géostatistique stationnaire (rappels)</u>	
1 - Le modèle stationnaire.....	13
2 - Le modèle intrinsèque.....	14
3 - L'inférence statistique dans le cadre des modèles sta- tionnaire et intrinsèque.....	15
<u>III - Le modèle du krigeage universel</u>	
1 - L'hypothèse du krigeage universel.....	17
2 - Le krigeage universel.....	18
3 - L'inférence statistique dans le cadre du modèle du kri- geage universel.....	19
<u>IV - Le modèle intrinsèque généralisé</u>	
1 - L'hypothèse intrinsèque généralisée.....	29
2 - Les estimateurs intrinsèques et le krigeage universel.	34
3 - L'inférence statistique des FAI-k.....	35

DEUXIEME PARTIE : APPLICATIONS DE LA GEOSTATISTIQUE  
NON STATIONNAIRE

V - <u>Présentation des applications</u>	
1 - Les grandes catégories d'applications.....	49
2 - Présentation des exemples.....	50
VI - <u>Exemple 1 : Reconstitution de la surface topographique à partir d'un échantillonnage photogrammétrique</u>	
1 - Cadre de l'étude.....	53
2 - Analyse structurale.....	53
3 - Etude de la carte reconstituée par krigeage.....	56
VII - <u>Exemple 2 : Exploitation de données bathymétriques disparates</u>	
1 - Cadre de l'étude.....	59
2 - Prise en compte d'incertitudes sur les données.....	59
3 - Analyse structurale.....	68
4 - Cartographie de l'ensemble de la minute et de sa précision.....	73
5 - Etude de la précision obtenue à partir de nouveaux levés.....	76
6 - Perspectives.....	83
VIII - <u>Exemple 3 : Simulations conditionnelles. Etude d'une île à partir de sondes en mer</u>	
1 - Cadre de l'étude.....	85
2 - La théorie des simulations conditionnelles.....	86
3 - Analyse structurale.....	92
4 - Estimation de la surface de l'île.....	94
5 - Contrôle de la qualité des simulations.....	102
CONCLUSION.....	109

ANNEXES	page
<u>Annexe 1 - Etude de la covariance des accroissements d'ordre k</u>	
1 - Objectif de l'étude.....	113
2 - Les accroissements d'ordre k sur la droite.....	115
3 - Les accroissements d'ordre k sur le cercle.....	115
4 - Corrélation entre combinaisons linéaires différentes.....	117
5 - Conclusion pratique.....	121
 <u>Annexe 2 - Modèles de schémas de transition adaptés aux simula- tions par bandes tournantes dans le plan</u>	
1 - Objectif de l'étude.....	123
2 - Les fonctions de dilution et les covariances $K_1(h)$	124
3 - Les covariances $K_2(h)$ obtenues par bandes tournan- tes dans $R^2$ .....	126
4 - Les covariances $K_3(h)$ obtenues par tranches tour- nantes dans $R^3$ .....	131
5 - Conclusions pratiques.....	133
 <u>Annexe 3 - Etude du biais dû à la discrétisation des directions des bandes tournantes</u>	
1 - Objectif de l'étude.....	137
2 - La covariance $K_n(h)$ effectivement simulée.....	137
3 - Biais pour les bandes tournantes dans $R^2$ .....	138
4 - Biais pour les tranches tournantes dans $R^3$ .....	140
5 - Conclusion pratique.....	146
 <u>REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES</u> .....	147

## INTRODUCTION

La géostatistique stationnaire classique est opérationnelle depuis une quinzaine d'années déjà [24]. Elle est particulièrement bien adaptée aux problèmes miniers. Dans ce domaine elle a d'ailleurs connu de nouveaux développements, comme le krigeage disjonctif [32], qui se situent toujours dans le cadre stationnaire. Par contre les phénomènes non stationnaires, qu'on rencontre fréquemment dans les autres domaines des Sciences de la Terre, ont posé problème beaucoup plus longtemps. Les difficultés n'étaient pas de nature mathématique : le krigeage universel [26] permettait dès 1969 de construire des estimateurs optimaux même en présence de dérive ; mais on ne savait pas, hormis certains cas particuliers, effectuer l'inférence statistique des caractéristiques structurales nécessaires. Jusque là, les praticiens utilisaient (et utilisent encore largement) les moindres carrés ; mais ceux-ci, même s'ils font intervenir une covariance, n'apportent qu'une solution incomplète aux problèmes d'estimation : d'une part ils ne fournissent qu'une estimation de la tendance, notion faussement intuitive, et non pas de la variable étudiée, alors que c'est généralement cette dernière qui nous intéresse ; d'autre part la covariance employée est habituellement injectée au hasard, sans inférence sérieuse. Certains auteurs ont cependant mis au point des méthodes plus rigoureuses, intermédiaires entre les moindres carrés et le krigeage universel, dans des domaines où l'inférence statistique est favorisée par le grand nombre des données : ainsi K. KRAUS et E.M. MIKHAIL [22] en topographie, N.K. GRIB et I.I. POLJAK [19] en météorologie. En fait il a fallu la théorie des fonctions aléatoires intrinsèques généralisées de G. MATHERON [28], [30] pour qu'on puisse développer des méthodes générales et opérationnelles d'inférence statistique. Notons toutefois qu'on trouve déjà le modèle de fonction aléatoire proposé par G. MATHERON dans la théorie des processus et champs stochastiques généralisée de I.M. GUELFAND et N.Y. VILENKIN [20].

Avec l'application de la théorie des fonctions aléatoires intrinsèques généralisées, la géostatistique a pris un grand essor dans le traitement des phénomènes non stationnaires. Elle a été appliquée dans des domaines très divers : bathymétrie [5], topographie [6], météorologie [2], pluviométrie [11], piézométrie [15], pétrole [14], pollution [7], etc... Elle permet d'y résoudre des problèmes aussi variés que la cartographie d'une variable, l'étude de la précision de la carte, le choix de l'implantation et de la densité d'un nouveau levé des données, le calage d'un modèle mathématique ou numérique, l'estimation des réserves, etc... Les applications au domaine minier ont par contre été marginales (cf. [18] p. 56-57). La réalisation de programmes d'analyse structurale automatique et d'estimation optimale comme KRIGEPACK [38] et BLUEPACK [13] permet de traiter rapidement les problèmes les plus courants.

Nous nous proposons ici de faire le point sur la géostatistique non stationnaire. Nous nous limiterons au cas des variables ponctuelles définies dans le plan, car toutes les études effectuées jusqu'à présent se situent dans ce cadre, ou s'y ramènent.

La première partie est consacrée à la présentation des différents modèles de fonction aléatoire utilisés en géostatistique non stationnaire. Nous nous attacherons tout particulièrement aux problèmes d'inférence statistique des paramètres de chaque modèle, qui constituent le point crucial du point de vue des applications. En effet, seule une inférence correcte peut permettre d'effectuer des estimations optimales, et d'obtenir des variances d'estimation ayant un sens. Ces problèmes d'inférence seront abordés essentiellement d'un point de vue de praticien et non de théoricien (il reste un énorme travail de statistique mathématique à faire sur ce sujet, mais sans qu'on soit assuré qu'il ait des retombées pratiques décisives). L'exposition des différents modèles de fonction aléatoire suivra l'ordre chronologique. Ce n'est pas la meilleure méthode si on veut seulement avoir une photographie de la géostatistique non stationnaire à un instant précis. Mais il est bon de connaître les possibilités des modèles apparemment dépassés. Car il faut bien reconnaître que ce qu'on gagne en généralité et en rapidité par l'application de la théorie des fonctions aléatoires intrinsèques généralisées, on le perd parfois en finesse et en robustesse. Dans certaines applications, on peut encore tirer profit des méthodes mises au point antérieurement.

Dans une seconde partie, nous présentons trois études pratiques qui illustrent bien les possibilités variées de la géostatistique non stationnaire. Elles ont toutes été choisies dans le domaine de l'étude du relief (terrestre ou sous-marin), qui offre l'avantage qu'on y étudie une variable connue de tous.

PREMIERE PARTIE

LES MODELES DE FONCTION ALEATOIRE  
EN GEOSTATISTIQUE NON STATIONNAIRE

- HYPOTHESES
- ESTIMATION OPTIMALE
- INFERENCE STATISTIQUE

CHAPITRE I  
GENERALITES SUR LE CHOIX DES MODELES

1 - NOTATIONS

Dans la suite de l'exposé, on utilisera la notation synthétique à une dimension. Ainsi, si  $x_1$  et  $x_2$  désignent les deux coordonnées du point  $x$ , on notera  $Z(x)$  au lieu de  $Z(x_1, x_2)$

De même, on notera  $h$  un vecteur de composantes  $h_1$  et  $h_2$ . Toutefois, si une fonction de  $h$  est isotrope et ne dépend que du module de ce vecteur,  $h$  désignera également ce module ; on verra qu'en pratique, il n'y a pas confusion.

D'autre part, pour ce qui concerne les sommations, on emploiera la convention selon laquelle on doit sommer sur tout indice apparaissant deux fois, une fois en position supérieure, et l'autre fois en position inférieure. Ainsi un estimateur linéaire formé à partir des valeurs  $Z(x_\alpha)$  en  $n$  points  $x_\alpha$  s'écrira sous la forme  $Z^x = \lambda^\alpha Z(x_\alpha)$  au lieu de  $Z^x = \sum_{\alpha=1}^n \lambda^\alpha Z(x_\alpha)$ .

2 - L'INTRODUCTION D'UNE HYPOTHESE PROBABILISTE

Les phénomènes que l'on rencontre en Sciences de la Terre ont généralement des traits structuraux d'ensemble que l'on peut décrire assez simplement ; mais en même temps ils présentent une irrégularité et une variabilité locale telles qu'ils échappent à toute représentation fonctionnelle simple. C'est cet aspect chaotique qui suggère une interprétation probabiliste. Notons bien qu'il ne s'agit pas là d'une hypothèse, susceptible d'être confirmée ou infirmée, mais d'un choix méthodologique : puisque les modèles déterministes sont impuissants à rendre compte de la complexité du phénomène, nous recourons à des modèles fondés sur la théorie des probabilités. Le seul fondement de cette démarche est qu'elle permet de poser en termes opératoires les problèmes qui nous intéressent et que nous ne saurions pas résoudre, ni même parfois formuler, dans un cadre déterministe.

Nous considérons donc que la variable régionalisée étudiée est une réalisation de fonction aléatoire  $Z(x)$ . (Sauf cas particulier, nous confondons dans une même notation la réalisation et la fonction aléatoire). Mais il nous faut définir les caractéristiques de cette fonction aléatoire. Classiquement, on définit une fonction aléatoire  $Z(x)$  par sa loi spatiale, c'est-à-dire par la donnée de toutes les lois de distribution

$$P [Z(x_1) < z_1, Z(x_2) < z_2, \dots, Z(x_n) < z_n]$$

pour tous les entiers  $n$  et pour tous les choix possibles des points d'appui  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Mais ici, on se heurte au problème de l'inférence statistique : il n'est manifestement pas possible de procéder à l'estimation de toutes ces lois à partir de l'information disponible. En effet, on ne dispose habituellement que d'une réalisation unique du phénomène. Et même si, comme en météorologie, on dispose de plusieurs réalisations, celles-ci ne sont connues qu'en un certain nombre de points de mesure.

Nous devons donc introduire des hypothèses limitatives, ayant pour but de réduire le nombre de paramètres de la fonction aléatoire, et d'en permettre l'inférence statistique. Ces hypothèses sont pour l'essentiel de deux ordres : les unes concernent les méthodes d'estimation, les autres le modèle de fonction aléatoire. Elles sont évidemment liées à la nature du problème que l'on veut résoudre.

### 3 - HYPOTHESES LIMITATIVES

#### A - Le problème à résoudre

Il ne faut pas perdre de vue que la modélisation d'une variable régionalisée par une fonction aléatoire n'est pas un but en soi, mais est le point de départ de la résolution d'un problème pratique. En géostatistique non stationnaire, il s'agit généralement d'estimer  $Z(x)$  en un point  $x$  (ou aux noeuds d'une grille régulière) où on n'a pas de mesure, et en même temps de fournir une sorte d'intervalle de confiance de cette estimation. Il peut s'agir également d'estimer une valeur moyenne par maille ou, plus rarement, la valeur moyenne sur

un certain domaine, ou encore le gradient. Il y a bien sûr des problèmes plus complexes, mais nous ne les envisagerons pas, car la géostatistique non stationnaire ne s'y est pas encore attaqué. Nous nous limiterons donc à l'estimation optimale de  $Z(x)$ , ou d'une fonctionnelle linéaire de  $Z(x)$  (et nous ne traiterons d'ailleurs que le premier cas, le second s'en déduisant immédiatement). Puisque nous parlons d'optimalité, cela suppose qu'on définisse un critère permettant de déterminer quel est, parmi une classe d'estimateurs possibles, celui qui est le meilleur. Nous utiliserons ici le critère le plus simple du point de vue des applications, qui consiste à minimiser la variance d'estimation. C'est d'ailleurs cette variance qui caractérisera la précision de l'estimation.

### B - Choix d'une classe d'estimateurs

Etant donnée la façon dont on vient de poser le problème, l'estimateur le plus puissant est l'espérance conditionnelle. Mais son calcul nécessite la connaissance de toute la loi spatiale. Comme l'estimateur peut varier notablement selon la loi spatiale, il serait dangereux de faire une hypothèse invérifiable sur celle-ci. On se limitera donc à une classe d'estimateurs moins large.

Une méthode encore très puissante est le krigeage disjonctif [32], où l'on prend comme estimateur une somme de fonctions mesurables d'une seule variable. Sa mise en oeuvre nécessite cependant la connaissance de toutes les lois à deux variables, et l'inférence statistique n'est possible que pour les phénomènes strictement stationnaires.

Comme nous nous intéressons précisément à des variables non stationnaires, nous nous restreindrons à une classe encore plus réduite, celle des estimateurs linéaires, voire à une sous-classe de celle-ci. Son utilisation ne nécessite que la connaissance des moments d'ordre 2 de la fonction aléatoire.

Nous nous plaçons donc désormais dans le cadre de la classe des estimateurs linéaires, associée à des modèles de fonction aléatoire d'ordre 2.

### C - Choix d'un modèle de fonction aléatoire

Si on n'introduit pas d'hypothèse supplémentaire, la résolution des problèmes d'estimation linéaire optimale nécessite la connaissance de la covariance non centrée

$$C(x,y) = E [Z(x) Z(y)]$$

En effet, l'estimation de  $Z(x_0)$  par une combinaison linéaire  $Z^x = \lambda^\alpha Z(x_\alpha)$  des données aux  $n$  points expérimentaux  $x_\alpha$  a pour variance :

$$E [Z^x - Z(x_0)]^2 = \lambda^\alpha \lambda^\beta C(x_\alpha, x_\beta) - 2 \lambda^\alpha C(x_0, x_\alpha) + C(x_0, x_0)$$

Sa minimisation conduit au système de krigeage

$$\lambda^\beta C(x_\alpha, x_\beta) = C(x_0, x_\alpha) \quad \alpha = 1, 2, \dots, n$$

La variance de krigeage vaut alors :

$$E [Z^x - Z(x_0)]^2 = C(x_0, x_0) - \lambda^\alpha C(x_0, x_\alpha)$$

Mais quand on dispose d'une seule réalisation de la fonction aléatoire, il est impossible de faire l'inférence de  $C(x_\alpha, x_\beta)$  entre deux points expérimentaux, et encore moins de  $C(x_0, x_\alpha)$  ou  $C(x_0, x_0)$ .

On est donc conduit à formuler des hypothèses d'homogénéité spatiale du phénomène, du point de vue statistique. Plus précisément, on supposera que certaines caractéristiques de la fonction aléatoire sont stationnaires. L'inférence statistique des paramètres structuraux de la fonction aléatoire liés à ces caractéristiques est alors possible. Si on veut pouvoir utiliser toute la classe des estimateurs linéaires, une hypothèse de stationnarité d'ordre 2 de la fonction aléatoire est requise afin de permettre l'inférence de la covariance. Mais dans beaucoup d'applications, cette hypothèse très stricte n'est pas compatible avec les données, celles-ci manifestant nettement la présence d'une dérive. On peut admettre que cette dérive est, au moins localement, de forme polynômiale. On se limite alors à ne travailler, au niveau des calculs de variance, qu'avec des combinaisons linéaires qui filtrent les polynômes de degré inférieur ou égal à  $k$  donné, et on n'impose plus la condition de stationnarité qu'à ces combinaisons linéaires. Bien sûr, on ne peut plus faire l'inférence statistique de toute la covariance, mais seulement d'une partie de celle-ci. Mais du fait qu'on se limite à une sous-classe d'estimateurs telle que l'erreur d'estimation filtre les polynômes de degré inférieur ou égal à  $k$ , les problèmes d'estimation optimale n'exigeront précisément la connaissance que de cette part de la covariance.

#### D - Modèle global - modèle local

La plupart des applications concernent une estimation locale (valeur en un point de grille par exemple), qui est effectuée à l'aide des données disponibles dans le voisinage (de 10 à 20 points). On n'a donc pas besoin d'un modèle global, s'étendant à tout le champ des données ; un modèle local suffit : la stationnarité devra être vérifiée seulement à l'échelle

des voisinages de krigeage. Et on pourra utiliser des modèles de covariance (généralisée) quasi-stationnaire du type

$$K(x, x+h) = b_p(x) K^P(h)$$

où les  $K^P(h)$  sont des schémas stationnaires élémentaires, et les  $b_p(x)$  des facteurs lentement variables dans l'espace, que l'on peut considérer comme constants dans des zones suffisamment grandes pour pouvoir en faire l'inférence.

Même dans le cas où on effectue une estimation globale (valeur moyenne dans le champ), on peut se contenter d'un modèle local ; il suffit d'effectuer l'estimation globale par recollement de krigeages locaux (valeurs moyennes par maille) ; on aura cependant quelque difficulté à calculer la variance d'estimation.

Le seul cas où on a vraiment besoin d'un modèle global est celui où on travaille en voisinage unique, ce qui a l'avantage qu'on inverse une fois pour toutes la matrice du premier membre du système de krigeage. Mais, pour des raisons de précision numérique, cette méthode ne peut être employée que si on dispose de peu de données (moins de 100). Il y a alors peu de différence entre un modèle global et un modèle local.

Les pages qui viennent sont consacrées à l'étude des hypothèses les plus courantes, en allant de la plus forte (stationnarité de la fonction aléatoire) à la plus faible (stationnarité des accroissements d'ordre  $k$ ). Bien que nous ne le précisions plus, dans la plupart des applications ces hypothèses concernent le comportement local de la fonction aléatoire. Nous examinerons chaque fois comment se résoud le problème de l'estimation optimale, en nous limitant pour plus de simplicité au krigeage ponctuel, et nous présenterons les méthodes d'inférence statistique des paramètres structuraux.

CHAPITRE II  
 LES MODELES DE LA GEOSTATISTIQUE  
 STATIONNAIRE (rappels)

1 - LE MODELE STATIONNAIRE

A - L'hypothèse stationnaire (d'ordre 2)

C'est l'hypothèse la plus sévère : une fonction aléatoire  $Z(x)$  est dite stationnaire (d'ordre 2) si ses deux premiers moments sont stationnaires. Son espérance est alors une constante  $m$ , et la covariance (centrée) entre deux points  $x$  et  $y$  ne dépend que du vecteur  $h = y - x$  :

$$E [Z(x)] = m$$

$$E [Z(x) - m] [Z(x+h) - m] = C(h)$$

B - Le krigeage dans le cadre du modèle stationnaire

La moyenne  $m$  étant habituellement inconnue, l'estimation de  $Z(x_0)$  par une combinaison  $Z^x = \lambda^\alpha Z(x_\alpha)$  des données aux  $n$  points de mesure  $x_\alpha$  conduit à imposer la condition de non biais :

$$\sum \lambda^\alpha = 1$$

Cette condition assure que  $E [Z^x] = E [Z(x_0)]$ .

La variance d'estimation de  $Z(x_0)$  par  $Z^x$  s'écrit :

$$E [Z^x - Z(x_0)]^2 = \lambda^\alpha \lambda^\beta C(x_\beta - x_\alpha) - 2 \lambda^\alpha C(x_\alpha - x_0) + C(o)$$

Sa minimisation compte tenu de la condition de non biais conduit à un système de krigeage de  $n+1$  équations à  $n+1$  inconnues où intervient un paramètre de Lagrange  $\mu$  :

$$\begin{cases} \lambda^\beta C(x_\beta - x_\alpha) = C(x_\alpha - x_0) + \mu & \alpha = 1, 2, \dots, n \\ \sum \lambda^\alpha = 1 \end{cases}$$

La variance de krigeage vaut alors

$$E [Z^x - Z(x_0)]^2 = C(0) + \mu - \lambda^\alpha C(x_\alpha - x_0)$$

## 2 - LE MODELE INTRINSEQUE

### A - L'hypothèse intrinsèque

L'hypothèse stationnaire suppose implicitement que  $Z(x)$  a une variance finie  $C(0)$ . Mais dans de nombreux cas, le phénomène n'a pas de variance a priori finie. On introduit alors, si elle est compatible avec les données, l'hypothèse intrinsèque, plus faible que la précédente, mais de signification analogue.

On dit que la fonction aléatoire  $Z(x)$  est intrinsèque si ses accroissements sont stationnaires (d'ordre 2). Ici nous supposons de plus que ces accroissements sont d'espérance nulle.  $Z(x)$  est alors caractérisée par :

$$E [Z(x+h) - Z(x)] = 0$$

$$\text{Var} [Z(x+h) - Z(x)] = 2 \gamma(h) \quad (\text{le symbole Var désigne la variance})$$

$\gamma(h)$  est le demi-variogramme : conformément à une habitude bien établie, nous l'appellerons en fait variogramme.

Il est à noter que si  $Z(x)$  est stationnaire, elle vérifie également l'hypothèse intrinsèque, et on a alors :

$$\gamma(h) = C(0) - C(h)$$

Nous ne présenterons pas les propriétés de la covariance et du variogramme, qui sont supposées connues.

### B - Le krigeage dans le cadre du modèle intrinsèque

Le problème du krigeage se pose en termes analogues au cas précédent. Du fait que l'on travaille sur des accroissements, l'erreur de krigeage  $Z^x - Z(x_0)$  doit être une combinaison linéaire de somme nulle, ce qui implique la condition d'universalité :

$$\sum \lambda^\alpha = 1$$

On retrouve là la condition de non biais du cas stationnaire.

La variance d'estimation s'exprime alors comme précédemment, à condition de remplacer  $C$  par  $-\gamma$ . On aboutit au même système de krigeage, où  $C$  est remplacé par  $-\gamma$ .

### 3 - L'INFERENCE STATISTIQUE DANS LE CADRE DES MODELES STATIONNAIRE ET INTRINSEQUE

#### A - L'analyse structurale

L'inférence statistique de la covariance ou du variogramme s'inscrit dans le cadre plus large de l'analyse structurale, dont le but est l'élaboration d'un modèle opérationnel caractéristique de la régionalisation. Cette analyse débute par une critique des données, notamment du point de vue de leur qualité, de leur implantation, de leur nombre. Après quoi, on peut recourir aux outils statistiques. Mais, outre le variogramme, on peut employer des outils plus classiques : histogrammes, nuages de corrélation, analyse des données (analyse factorielle, analyse des correspondances, etc...).

#### B - L'inférence du variogramme

Dans l'hypothèse stationnaire, l'inférence statistique de la covariance pose quelques problèmes, car on risque d'introduire un biais du fait que la moyenne est inconnue et doit être remplacée par une estimation. De plus, on risque des ennuis si la stationnarité n'est pas strictement vérifiée. Mais comme l'hypothèse stationnaire est un cas particulier de l'hypothèse intrinsèque et qu'il y a une liaison fonctionnelle simple entre la covariance et le variogramme, on effectue en fait l'inférence de ce dernier. Le problème de la moyenne s'évanouit alors.

Nous n'insisterons pas sur l'inférence du variogramme, supposée connue : on calcule le variogramme expérimental à partir des données ; son examen fait éventuellement apparaître des structures gigognes (notamment un effet de pépite), des anisotropies, etc... Il permet de vérifier que l'hypothèse stationnaire ou intrinsèque est compatible avec les données. On effectue ensuite un ajustement du variogramme expérimental à un modèle théorique qui rende compte des principales caractéristiques structurales observées, et qui soit adapté à l'emploi qui en sera fait; en particulier, si on a pour seul objectif une estimation locale, il est inutile de compliquer le modèle pour obtenir un meilleur ajustement aux grandes distances ; de même, on ne tiendra compte des anisotropies observées que si elles sont bien marquées.

CHAPITRE III LE MODELE DU KRIGEAGE UNIVERSEL
---

1 - L'HYPOTHESE DU KRIGEAGE UNIVERSEL

C'est dans le cadre des hypothèses précédentes que se situe habituellement la géostatistique minière. Mais dans les autres domaines des Sciences de la Terre, de nombreux phénomènes ne sont pas assimilables à une fonction aléatoire stationnaire ou intrinsèque. C'est notamment le cas de tous les phénomènes présentant une tendance ou dérive, comme la profondeur des fonds marins, qui augmente quand on s'éloigne des côtes. C'est précisément l'étude des fonds marins par A. JOURNEL [17] qui a conduit G. Matheron à la formulation du krigeage universel [26].

On fait alors l'hypothèse que la fonction aléatoire  $Z(x)$  se décompose en deux termes :

- une dérive fonctionnelle  $m(x)$ , définie comme l'espérance de  $Z(x)$ .
- une fonction aléatoire  $Y(x)$  stationnaire et d'espérance nulle, ou intrinsèque.

Cette dichotomie n'a d'intérêt que si chaque terme prend en compte des caractéristiques structurales bien différentes. Cela suppose que la dérive soit une fonction suffisamment régulière, qui doit donc se mettre, au moins localement, sous la forme

$$m(x) = a_1 f^1(x)$$

où les  $f^1(x)$  sont  $k+1$  fonctions de base que l'on se donne et les  $a_1$  des coefficients inconnus. On prend habituellement pour fonctions de base les monômes de degré inférieur ou égal à  $k$ , y compris la fonction constante  $f^0(x) = 1$  (on parle alors de dérive de degré  $k$ , linéaire si  $k = 1$ , quadratique si  $k = 2$ , etc...). Notons que si  $Y(x)$  est seulement intrinsèque, cette dérive n'est définie qu'à une constante additive près.

On a donc :

$$Z(x) = m(x) + Y(x)$$

avec  $E[Z(x)] = m(x) = a_1 f^1(x)$

et soit  $E[Y(x) Y(x+h)] = C(h)$

soit  $\text{Var}[Y(x+h) - Y(x)] = 2\gamma(h)$

Remarquons que la forme de la dérive étant définie localement, celle-ci est liée à l'échelle à laquelle on travaille. En topographie par exemple, selon l'échelle à laquelle on se place, une montagne sera considérée comme un bel exemple de phénomène avec dérive, ou comme un simple accident de relief.

## 2 - LE KRIGEAGE UNIVERSEL

Le problème de l'estimation optimale se résoud encore facilement. Soit  $Z^x = \lambda^\alpha Z(x_\alpha)$  l'estimateur de  $Z(x_0)$ . On exige d'abord que l'erreur de krigeage  $Z^x - Z(x_0)$  soit d'espérance nulle, c'est-à-dire que :

$$\lambda^\alpha m(x_\alpha) = m(x_0)$$

En développant  $m(x)$ , cette condition fait intervenir les  $a_1$ . Comme ceux-ci sont inconnus, on impose en fait la condition un peu plus forte que l'erreur soit d'espérance nulle quels que soient les  $a_1$ . Cela conduit aux  $k+1$  conditions d'universalité :

$$\lambda^\alpha f^1(x_\alpha) = f^1(x_0) \quad l = 0, 1, \dots, k$$

La minimisation de la variance de l'erreur  $Z^x - Z(x_0)$  compte tenu de ces conditions conduit alors au système du krigeage universel, où interviennent  $k+1$  paramètres de Lagrange  $\mu_1$  :

$$\begin{cases} \lambda^\beta C(x_\beta - x_\alpha) = C(x_\alpha - x_0) + \mu_1 f^1(x_\alpha) & \alpha = 1, 2, \dots, n \\ \lambda^\alpha f^1(x_\alpha) = f^1(x_0) & l = 0, 1, \dots, k \end{cases}$$

On a alors

$$E[Z^x - Z(x_0)]^2 = C(0) + \mu_1 f^1(x_0) - \lambda^\alpha C(x_\alpha - x_0)$$

Dans le cas où il n'y a pas de covariance, mais seulement un variogramme, on aboutit exactement aux mêmes résultats, à condition de remplacer  $C$  par  $-\gamma$ .

### 3 - L'INFERENCE STATISTIQUE DANS LE CADRE DU MODELE DU KRIGEAGE UNIVERSEL

#### A - Généralités

Il s'agit ici de choisir la famille de fonctions de base  $f^1$ , c'est-à-dire en pratique le degré de la dérive, et de déterminer la covariance ou le variogramme. Comme précédemment, nous ferons toujours l'inférence du variogramme. Mais ici il ne suffit plus de calculer le variogramme brut expérimental (calculé directement à partir des données, sans retrancher la dérive, celle-ci étant inconnue). En effet, on a :

$$\frac{1}{2} E [Z(x+h) - Z(x)]^2 = \gamma(h) + \frac{1}{2} [m(x+h) - m(x)]^2$$

Le variogramme brut est donc la somme du variogramme  $\gamma(h)$  qui nous intéresse, et d'un terme positif ou nul lié à la dérive (parabolique si la dérive est linéaire, en forme de dôme si la dérive forme un dôme, etc...). Pour exprimer que le variogramme  $\gamma(h)$  est plus ou moins masqué par la dérive, nous l'appellerons variogramme sous-jacent. Pour l'estimer, on doit recourir à d'autres méthodes d'inférence statistique, plus lourdes et moins précises ; ou alors il faut chercher un autre modèle de fonction aléatoire, dont l'inférence soit plus aisée (c'est ce que nous verrons avec l'hypothèse intrinsèque d'ordre  $k$ ). Dans certains cas cependant, on peut encore accéder directement au variogramme sous-jacent, du moins en première approximation. Nous allons donc commencer par les examiner, avant d'aborder les autres méthodes d'inférence statistique.

#### B - Cas particuliers d'analyse structurale directe

Il arrive assez fréquemment qu'il soit superflu de recourir à des méthodes d'inférence statistique sophistiquées, qui seraient moins précises. Dans ces cas, le choix du degré de la dérive ne pose pas de problème sérieux. Nous concentrerons donc notre intérêt sur le variogramme.

- dérive dans une zone de bordure : souvent la variable étudiée a un comportement stationnaire, sauf dans la zone de bordure où une légère dérive se fait sentir. Il est alors généralement légitime d'étendre le variogramme de la zone stationnaire à l'ensemble du champ, et d'ajouter, pour le krigeage de points situés en bordure, des conditions d'universalité. D'ailleurs on dispose habituellement de trop peu de données en bordure pour faire une analyse structurale

sérieuse de ces seules données.

- dérive peu marquée : lorsque la dérive a une faible amplitude, sa répercussion sur le variogramme brut est négligeable aux petites distances. On peut donc effectuer un ajustement qui sera valable aux courtes ou moyennes distances, ce qui est suffisant pour le krigeage ponctuel.

- une direction sans dérive : il est fréquent que la dérive ne se fasse pas sentir dans toutes les directions. Si tel est le cas, et si l'hypothèse d'une isotropie du variogramme sous-jacent paraît raisonnable, on peut prendre pour variogramme un schéma isotrope ajusté sur la courbe expérimentale obtenue dans la direction sans dérive.

- dérive globale nettement polynômiale : ce cas est peu fréquent. Néanmoins, s'il se présente, on peut soustraire aux données une estimation de la dérive (obtenue par exemple par moindres carrés), et travailler sur les résidus. On sait que le variogramme des résidus est biaisé, mais ce biais reste faible aux petites distances. Si donc le champ complet est grand par rapport aux voisinages qui seront utilisés lors du krigeage, la connaissance du variogramme aux petites distances suffit, et son inférence est possible.

### C - Le variogramme des résidus

#### a - Définition des résidus et du variogramme des résidus

Nous avons déjà vu que le variogramme brut ne nous donne guère d'information sur  $\gamma(h)$  dès que la dérive est forte, à cause du terme parasite qu'introduit cette dérive. Son seul intérêt est dans ce cas de montrer qu'il y a bien une dérive. Pour pouvoir calculer le variogramme sous-jacent expérimental, il nous faudrait, non pas les mesures  $Z(x_\alpha)$ , mais les valeurs  $Y(x_\alpha) = Z(x_\alpha) - m(x_\alpha)$ . Puisqu'on ne dispose pas de la vraie dérive  $m(x)$ , l'idée la plus simple consiste à la remplacer par une estimation  $m^x(x)$  ; on obtient ainsi des résidus  $R(x_\alpha)$  aux points expérimentaux :

$$R(x_\alpha) = Z(x_\alpha) - m^x(x_\alpha)$$

Ces résidus sont des estimations des  $Y(x_\alpha)$ .

On peut alors calculer le variogramme expérimental des résidus  $R(x_\alpha)$ . Malheureusement, du fait que  $R(x_\alpha)$  n'est qu'une estimation de  $Y(x_\alpha)$  et non pas sa vraie valeur, le variogramme obtenu constitue une estimation profondément biaisée du variogramme sous-jacent.

Néanmoins, deux remarques tempèrent cette conclusion décourageante :

- le biais est négligeable pour les distances petites par rapport aux dimensions du voisinage qui a permis d'estimer la dérive. On pourra donc au moins évaluer l'effet de pépité éventuel, et le comportement du variogramme sous-jacent au voisinage de l'origine, ce qui est déjà appréciable.

- on peut toujours calculer la forme théorique du variogramme des résidus dans l'hypothèse où le variogramme sous-jacent  $\gamma(h)$  a une forme donnée. On peut donc, à tout schéma du variogramme sous-jacent  $\gamma(h)$ , associer le variogramme des résidus  $\gamma_R(h)$ . On est alors ramené au problème de l'ajustement du variogramme expérimental des résidus à un modèle de variogramme des résidus. Par correspondance entre  $\gamma(h)$  et  $\gamma_R(h)$ , on en déduit le variogramme sous-jacent.

Il ne faut cependant pas se faire trop d'illusions :

Dans le cas général, le calcul des modèles théoriques  $\gamma_R(h)$  est coûteux, et on ne peut le faire une fois pour toutes, car il dépend à la fois de l'estimateur de la dérive, de la position des points expérimentaux, et de la façon dont on calcule le variogramme expérimental des résidus :

#### b - Calcul de la forme théorique du variogramme des résidus

D'après la définition des résidus, leur variogramme dépend d'abord de l'estimateur de la dérive choisi. On souhaiterait naturellement utiliser autant que possible l'estimateur linéaire optimal de  $m(x)$ . Le problème se pose dans des termes analogues aux krigeage, et on obtient le même système d'équations, à ceci près que les covariances du second membre disparaissent. Mais ceci suppose connue la vraie covariance, ce qui n'est pas le cas. On se contente alors d'un estimateur sans biais de la dérive, c'est-à-dire qui satisfasse aux conditions d'universalité, mais non optimal. Habituellement, on utilise l'estimateur qui serait optimal si le variogramme était un modèle  $\gamma_0(h)$  donné (par exemple linéaire). Au point expérimental  $x_\alpha$ , on obtient en particulier un estimateur de la dérive de la forme  $m^x(x_\alpha) = \lambda_\alpha^\beta Z(x_\beta)$ .

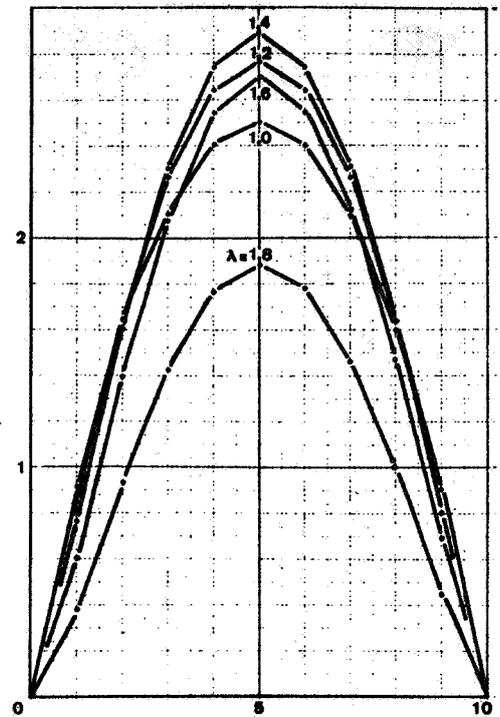
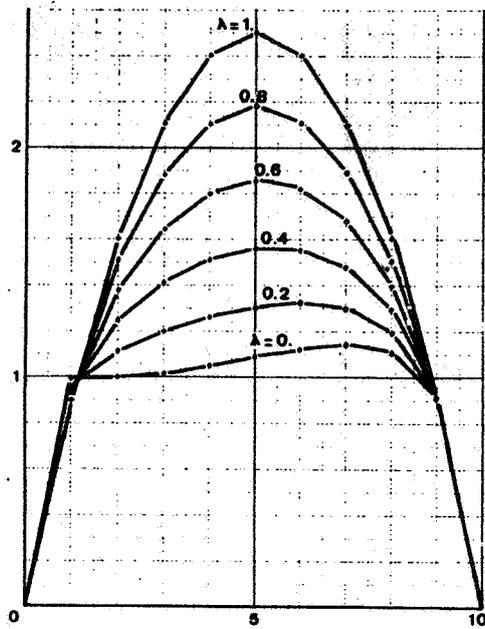


Schéma en  $h^\lambda$

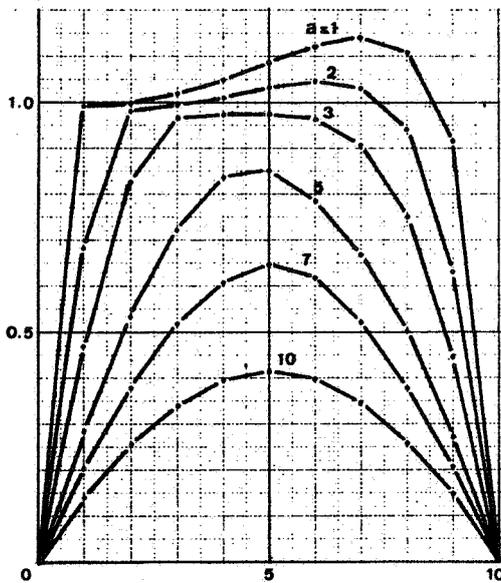


Schéma sphérique

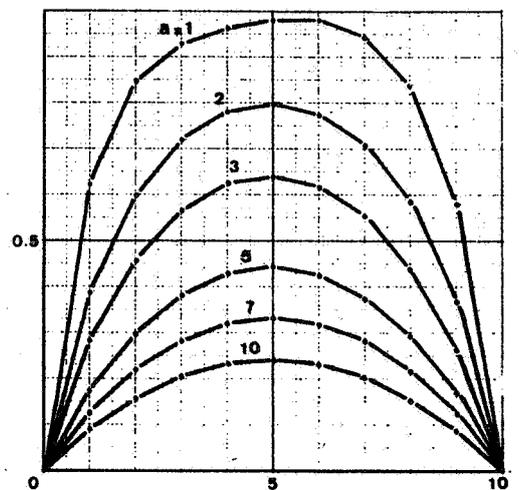


Schéma exponentiel

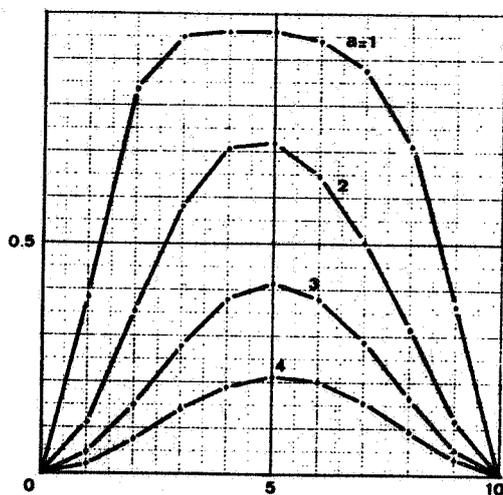


Schéma gaussien

Fig.1 - Variogrammes des résidus associés aux schémas classiques de variogramme sous-jacent pour une dérive linéaire ( $p=10$  ;  $\gamma_0(h) = h$  ; pour les schémas de transition, palier  $C=1$ , portée  $a$  variable)

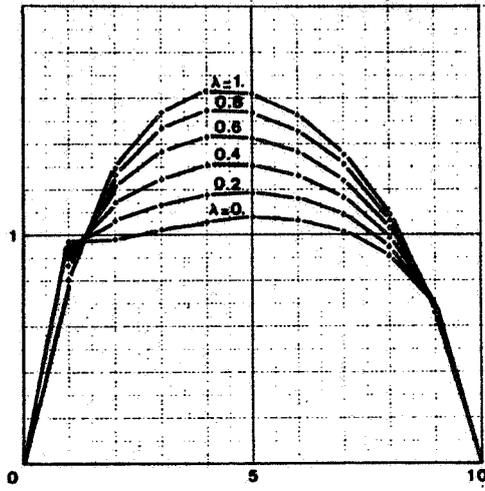


Schéma en  $h^\lambda$

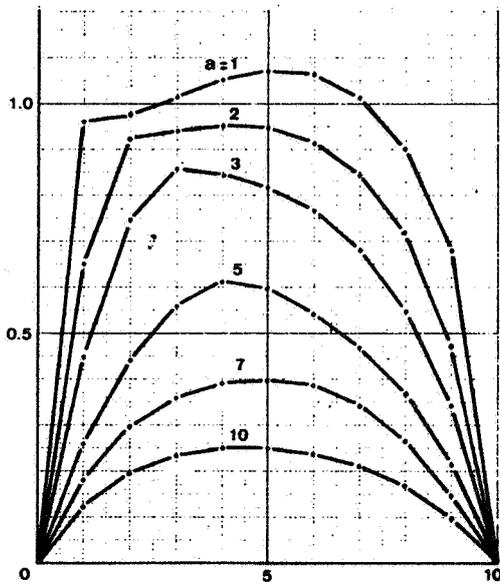
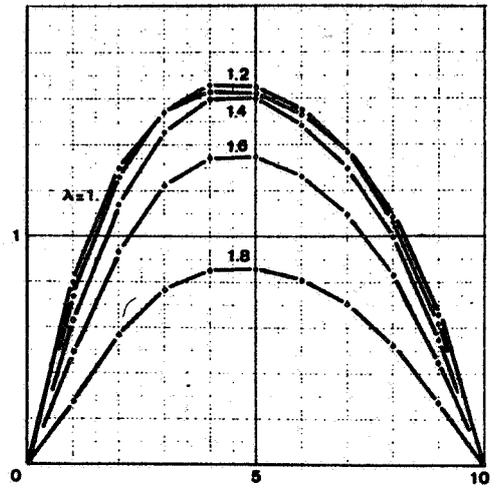


Schéma sphérique

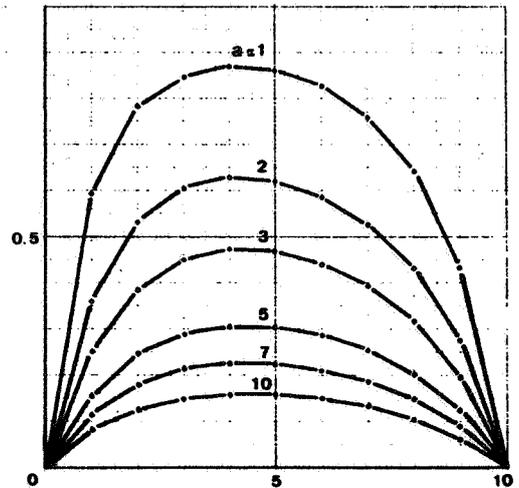


Schéma exponentiel

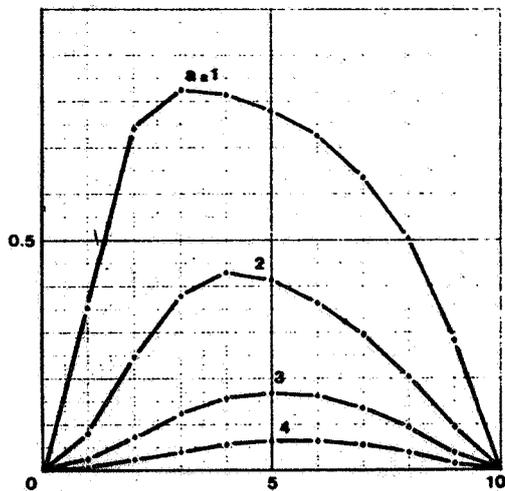


Schéma gaussien

*Fig.1 (suite) - Variogrammes des résidus associés aux schémas classiques de variogramme sous-jacent pour une dérive quadratique*

*( $p=10$  ;  $\gamma_0(h) = h$  ; pour les schémas de transition, palier  $C=1$ , portée  $a$  variable)*

Il est à noter que, la représentation de la dérivée sous la forme

$$m(x) = a_1 f^1(x)$$

étant une hypothèse locale, l'estimation de  $m(x_\alpha)$  n'est faite qu'à partir des mesures aux points  $x_\beta$  du voisinage. Donc un bon nombre de  $\lambda_\alpha^R$  sont nuls.

On peut alors calculer la forme théorique du variogramme des résidus entre deux points expérimentaux d'un même voisinage (on se limite à des points d'un même voisinage, car la dérivée n'est calculée qu'à une constante près ; dans ce cas, la constante est la même pour tous les points du voisinage, et s'élimine d'elle-même lors du passage aux accroissements). On a :

$$\begin{aligned} \gamma_R(x_\alpha, x_\beta) &= \frac{1}{2} E [R(x_\beta) - R(x_\alpha)]^2 \\ &= \frac{1}{2} \text{Var} [Z(x_\beta) - Z(x_\alpha)] - \text{Cov} [Z(x_\beta) - Z(x_\alpha)] [m^*(x_\beta) - m^*(x_\alpha)] \\ &\quad + \frac{1}{2} \text{Var} [m^*(x_\beta) - m^*(x_\alpha)] \end{aligned}$$

Le premier terme est le variogramme sous-jacent  $\gamma(x_\beta - x_\alpha)$ , les deux autres représentent le biais. Ils s'expriment linéairement en fonction du variogramme  $\gamma$ , puisque  $m^*(x_\beta) - m^*(x_\alpha)$  est une combinaison linéaire des valeurs  $Z(x)$  aux points expérimentaux, dont la somme des poids est nulle.

Ce variogramme théorique des résidus n'est pas stationnaire. Mais le variogramme expérimental des résidus que l'on calcule est, lui, un variogramme moyen, faute de mieux (on ne dispose que d'un couple  $(x_\alpha, x_\beta)$ ). On doit donc calculer le modèle du variogramme moyen des résidus  $\gamma_R(h)$ , cette moyenne étant entendue au sens où s'effectuera le calcul du variogramme expérimental des résidus  $\gamma_R^X(h)$ .

### c - Cas de données implantées à maille régulière

Comme on le voit, il est possible de calculer les modèles  $\gamma_R(h)$  associés à des schémas  $\gamma(h)$ , mais les calculs sont généralement inextricables. En fait, cette méthode n'a été utilisée que pour des données à maille régulière, et en travaillant sur des voisinages à une dimension formés de  $p+1$  points consécutifs à maille  $a$  [1], [16] : sur chaque voisinage, on estime la dérivée, les résidus, le variogramme des résidus. Les expressions théoriques sont les mêmes d'un voisinage à l'autre, et on peut mettre  $\gamma_R(ha)$  sous la forme (pour  $h$  entier) :

$$\gamma_R(ha) = \sum_{m=1}^p \alpha_{mh} \gamma(ma)$$

On peut alors facilement tracer des abaques donnant  $\gamma_R$  en fonction de  $\gamma$  lorsque la dimension  $p$  du voisinage et le variogramme  $\gamma_0$  servant à estimer la dérive sont fixés. En pratique, la dimension du voisinage est déterminée par le problème posé ; quand à  $\gamma_0$ , on prend généralement un schéma linéaire.

La figure 1 montre un exemple de tels abaques. On voit que les courbes sont plus complexes que les schémas initiaux, et que de plus elles se ressemblent souvent fortement. Aussi les ajustements sont-ils plus délicats. Cela tient à ce que la recherche du variogramme sous-jacent est entachée d'une indétermination de nature algébrique : deux variogrammes différents peuvent donner le même variogramme des résidus (mais heureusement, ils donneront alors les mêmes estimateurs, et la même variance de krigeage universel). C'est ce qui explique que, à maille régulière, la connaissance des  $p$  valeurs  $\gamma_R$  (ha) ne permet pas d'en déduire les  $p$  valeurs  $\gamma$  (ha) : la matrice des coefficients  $\alpha_{mh}$  est singulière (et ceci quel que soit le schéma  $\gamma_0$  de départ).

#### D - Les estimateurs quadratiques universels

Cette méthode permet de mieux cerner le degré d'indétermination qui affecte la recherche du variogramme sous-jacent. Elle est fondée sur le fait que les seuls estimateurs qu'on puisse utiliser pour estimer la covariance ou le variogramme sont des estimateurs quadratiques, c'est-à-dire de la forme

$$Q^x = Q^{\alpha\beta} Z(x_\alpha) Z(x_\beta)$$

De plus, lorsque les coefficients  $a_1$  de la dérive sont inconnus, les seuls qui soient utilisables pour l'inférence statistique sont ceux qui ne dépendent pas des coefficients  $a_1$ , c'est-à-dire vérifient

$$Q^{\alpha\beta} f^1(x_\alpha) f^s(x_\beta) = 0 \quad 1, s = 0, 1, \dots, k$$

De tels estimateurs sont dits universels.

L'étude de ces estimateurs quadratiques universels conduit G. MATHERON [27] à proposer la décomposition suivante :

$$\begin{aligned} \gamma(x_\alpha, x_\beta) = \frac{1}{2} \text{Var} [Z(x_\beta) - Z(x_\alpha)] &= \frac{1}{2} E \left[ [Z(x_\beta) - Z(x_\alpha)]^2 - [m^x(x_\beta) - m^x(x_\alpha)]^2 \right] \\ &+ \frac{1}{2} \text{Var} [m^x(x_\beta) - m^x(x_\alpha)] \end{aligned}$$

Le premier terme, que nous noterons  $\Gamma(x_\alpha, x_\beta)$ , représente la partie accessible du variogramme sous-jacent, et le second sa partie inaccessible.

On montre [27] que l'estimateur  $m^x(x)$  de la dérive est de la forme

$$m^x(x) = a_1^x f^1(x)$$

où les  $a_1^x$  sont des estimateurs linéaires des  $a_1$ . Notons  $\mu_{1s}$  la covariance de  $a_1^x$  et  $a_s^x$  (inconnue) :

$$\mu_{1s} = \text{Cov}(a_1^x - a_1, a_s^x - a_s)$$

La partie inaccessible de  $\gamma(x_\alpha, x_\beta)$  se met alors sous la forme :

$$\frac{1}{2} \mu_{1s} [f^1(x_\beta) - f^1(x_\alpha)] [f^s(x_\beta) - f^s(x_\alpha)] = \frac{1}{2} \mu_{1s} T^{1s}(x_\alpha, x_\beta)$$

Les estimateurs et les variances de krigeage ne dépendent que de la partie directement accessible du variogramme, et non des  $\mu_{1s}$ . On est cependant obligé de choisir des  $\mu_{1s}$  particuliers pour pouvoir modéliser le variogramme.

Pour déterminer ces  $\mu_{1s}$ , on fait l'hypothèse, que nous avons toujours faite implicitement, que le variogramme est le plus stationnaire possible. En pratique, les calculs ne peuvent être conduits qu'en travaillant comme précédemment sur des voisinages de points alignés à maille régulière, tous analogues : on calcule alors les valeurs expérimentales moyennes  $\Gamma^x(x_\alpha, x_\beta)$  où  $x_\alpha$  et  $x_\beta$  désignent la position relative de deux points d'un voisinage ; en même temps on calcule les termes  $T^{1s}(x_\alpha, x_\beta)$ .

En considérant les différents couples tels que  $x_\beta - x_\alpha = h$ , on en déduit alors les valeurs moyennes  $\Gamma^x(h)$  et  $T^{1s}(h)$ , et on détermine les  $\mu_{1s}$  par la condition que

$$\sum_{\alpha} \sum_{\beta} [\Gamma^x(x_\alpha, x_\beta) + \frac{1}{2} \mu_{1s} T^{1s}(x_\alpha, x_\beta) - \Gamma^x(x_\beta - x_\alpha) - \frac{1}{2} \mu_{1s} T^{1s}(x_\beta - x_\alpha)]^2$$

soit minimum.

Cette condition définit tous les  $\mu_{1s}$  qui nous intéressent (c'est-à-dire pour  $l, s = 1, 2 \dots k$ ) sauf  $\mu_{11}$ . On obtient donc une estimation du variogramme sous-jacent  $\gamma(h)$  à une parabole près. Par essais successifs, on détermine alors la parabole qui fournit un variogramme expérimental susceptible de bien s'ajuster à un modèle théorique.

### E - Conséquences pour les applications

Comme on s'en rend compte, ces deux méthodes doivent être manipulées avec prudence. Elles ont surtout le désavantage d'être impraticable dès qu'on ne dispose pas de données à maille régulière. Et comme en fait on a généralement affaire à des données à implantation irrégulière, elles ont été pratiquement abandonnées au profit des méthodes d'inférence développées dans le cadre des fonctions intrinsèques généralisées, qui sont moins fines, mais s'appliquent sans problème quelle que soit l'implantation des données. Mais si l'on dispose par chance de données à maille régulière, ou régulièrement prélevées sur des profils, on peut avoir intérêt à ne pas négliger ces vieilles méthodes où l'on "sent" mieux les données sur lesquelles on travaille. On pourra utiliser pour cela les programmes de la programmathèque de 1971 [4]. On trouvera dans un article de R. SABOURIN [37] relativement récent, une application intéressante de ces deux méthodes utilisées conjointement.

CHAPITRE IV  
LE MODELE INTRINSEQUE GENERALISE

Nous avons vu que si les hypothèses du krigeage universel apportent sans conteste une solution aux problèmes d'estimation optimale de la fonction aléatoire  $Z(x)$  lorsque ses caractéristiques structurales sont connues, l'inférence statistique de ces caractéristiques pose par contre de sérieux problèmes. Pour sortir de l'impasse, il faut recourir à la théorie des fonctions intrinsèques généralisées, développée par G. MATHERON [28], [30].

1 - L'HYPOTHESE INTRINSEQUE GENERALISEE

A - Les combinaisons linéaires d'ordre k

Convenons d'appeler combinaison linéaire autorisée à l'ordre  $k$  toute combinaison linéaire qui filtre les polynômes de degré inférieur ou égal à  $k$ , c'est-à-dire toute combinaison linéaire attribuant des poids  $\lambda^\alpha$  à des points  $x_\alpha$  et telle que :

$$\lambda^\alpha f^l(x_\alpha) = 0 \quad l = 0, 1, \dots, k$$

Il s'agit là de la notation condensée à une dimension où la fonction de base  $f^l(x)$  représente le monôme  $x^l$ ; à deux dimensions, il y a en fait  $(k+1)(k+2)/2$  monômes de degré inférieur ou égal à  $k$ .

On définit de même des mesures autorisées à l'ordre  $k$ , mais nous n'insisterons pas là dessus, car les mesures que nous utiliserons ici seront toujours des combinaisons linéaires. Nous noterons  $\lambda$  la mesure  $\lambda^\alpha \delta_{x_\alpha}$  qui attribue des poids  $\lambda^\alpha$  à des points  $x_\alpha$ , et  $Z(\lambda)$  la combinaison linéaire  $\lambda^\alpha Z(x_\alpha)$ . Enfin nous noterons  $\Lambda_k$  l'espace des mesures autorisées à l'ordre  $k$ .

On trouvera à l'annexe 1 des exemples de combinaisons linéaires d'ordre  $k$  particulièrement simples.

B - L'hypothèse intrinsèque d'ordre k

Par définition, la fonction aléatoire  $Z(x)$  est intrinsèque d'ordre  $k$  si ses accroissements d'ordre  $k$  sont stationnaires, c'est-à-dire si, pour toute combinaison linéaire d'ordre  $k$ , la fonction aléatoire :

$$x \rightarrow \lambda^\alpha Z(x_\alpha + x)$$

est stationnaire.

Nous supposons de plus que ces accroissements d'ordre  $k$  sont d'espérance nulle (sinon il suffirait de passer à l'ordre  $k+1$  pour que cela soit vrai).

C - La covariance généralisée  $K(h)$

On montre que si  $Z(x)$  vérifie l'hypothèse intrinsèque d'ordre  $k$ , il existe une fonction  $K(h)$ , appelée covariance généralisée, telle que l'on ait, pour toutes combinaisons linéaires  $\lambda, \mu$  appartenant à  $\Lambda_k$  :

$$E [Z(\lambda) Z(\mu)] = \lambda^\alpha \mu^\beta K(x_\beta - x_\alpha)$$

Cette covariance généralisée est définie à un polynôme pair près, de degré inférieur ou égal à  $2k$  ; mais ceci importe peu, car ces termes apportent une contribution nulle à toutes les variances et covariances de combinaisons linéaires autorisées.

D - Les fonctions aléatoires intrinsèques d'ordre  $k$  (FAI- $k$ )

Il est à noter qu'on peut remplacer  $Z(x)$  par  $Z(x) + a_1 f^1(x)$  sans changer la valeur des combinaisons linéaires autorisées. Le véritable instrument de travail n'est donc pas  $Z(x)$  elle-même, mais la classe de toutes les fonctions aléatoires égales à  $Z(x)$  à un polynôme près, de degré inférieur ou égal à  $k$ . C'est cette classe d'équivalence que nous appelons fonction aléatoire intrinsèque d'ordre  $k$ , ou FAI- $k$ . Cependant, par abus de langage, nous continuerons de dire que  $Z(x)$  est une FAI- $k$ .

E - Comparaison aux hypothèses stationnaires

On remarque que l'hypothèse intrinsèque d'ordre k est la simple généralisation de l'hypothèse intrinsèque ordinaire : les fonctions aléatoires intrinsèques sont des FAI-0, de covariance généralisée  $K(h) = -\gamma(h)$ , à une constante près.

L'hypothèse de stationnarité des accroissements a conduit à la classe des fonctions aléatoires intrinsèques, plus générale que la classe des fonctions aléatoires stationnaires. De même les FAI-k ont un degré de généralité encore bien supérieur. D'ailleurs, de par la définition, une FAI-k est également une FAI-k' pour tout  $k' > k$ .

F - Les modèles de covariance généralisée

Ceci a pour conséquence que la famille des covariances généralisées est bien plus riche que celle des covariances ordinaires. On sait que la condition de positivité requise pour qu'une fonction soit une covariance (ordinaire) exprime simplement que les variances de toutes les combinaisons linéaires que l'on peut imaginer doivent être positives ou nulles. Dans le cadre de la théorie des FAI-k, cette condition n'est plus impérative que pour les mesures appartenant à  $\Lambda_k$ . Or, pour  $k' > k$  on a  $\Lambda_{k'} \subset \Lambda_k$ . Donc plus k est grand, plus  $\Lambda_k$  est petit, et plus l'espace des covariances généralisées est large. En particulier le modèle isotrope

$$K(h) = \Gamma(-\frac{\alpha}{2}) h^\alpha$$

est une covariance généralisée si  $0 < \alpha < 2k + 2$ .

G - Les éléments localement stationnaires d'une FAI-k

On a vu qu'une FAI-k est en fait une classe d'équivalence de fonctions aléatoires différant l'une de l'autre d'un polynôme de degré inférieur ou égal à k; la fonction aléatoire Z(x) associée à la variable étudiée n'est donc qu'un élément particulier de la FAI-k, et les autres éléments sont de la forme

$$Y(x) = Z(x) + a_1 f^1(x)$$

Si on se donne un disque S interne au champ, ou même contenant tout le champ, on montre, pour les schémas usuels, que, parmi ces éléments Y(x), il en existe qui sont stationnaires sur S.

Autrement dit, on peut considérer que, localement, Z(x) est la somme

d'une fonction aléatoire stationnaire et d'un polynôme de degré inférieur ou égal à k (cf. [29], [31]).

On montre également que la covariance locale d'un tel élément Y (x) est de la forme

$$C(x - y) = K(x - y) + Q(x - y)$$

où Q est un polynôme pair de degré inférieur ou égal à 2 k. Tant qu'on ne travaille que sur des éléments de  $\Lambda_k$  à support dans S, les variances ne dépendent pas des coefficients du polynôme Q (ce qui est cohérent avec le fait que ces variances peuvent s'exprimer directement à l'aide de K).

Le degré de généralité des covariances généralisées (par rapport aux covariances ordinaires) ne doit donc pas trop faire illusion : finalement, à tout modèle de covariance généralisée, on peut associer des modèles de covariance stationnaire (du moins localement). Comme on dispose déjà d'une gamme de schémas stationnaires très étendue et correspondant à des comportements à l'origine très variés, les covariances généralisées n'apporteront pas de modèle à comportement très nouveau. Par contre elles enrichissent considérablement la gamme des formes analytiques de covariance possibles. Parmi celles-ci, les modèles polynômiaux sont particulièrement intéressants.

#### H - Les covariances généralisées polynômiales

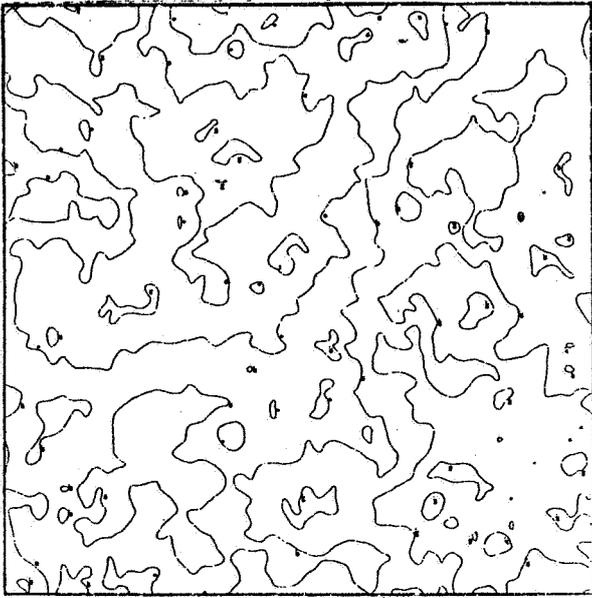
Des modèles en  $h^\alpha$  on déduit que, si on prend k + 1 coefficients positifs  $b_0, b_1, \dots, b_k$ , la fonction isotrope

$$K(h) = \sum_{p=0}^k (-1)^{p+1} b_p h^{2p+1}$$

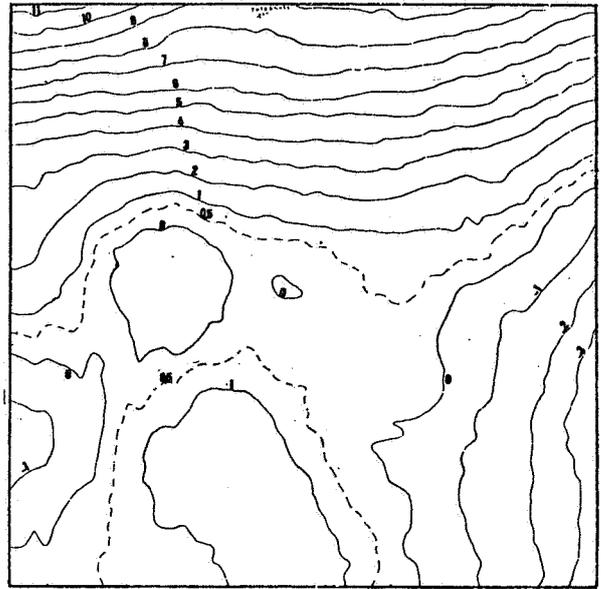
est une covariance généralisée, dite polynômiale.

Si on lui adjoint un terme pépitique, ce modèle est bien adapté dans un grand nombre d'applications, car ses différents termes correspondent à des comportements très différents : bruit blanc pour l'effet de pépite, composante continue, mais non dérivable, pour le terme linéaire, composante dérivable pour le terme cubique, etc.... On pourra juger de son aptitude à rendre compte de phénomènes très divers en se reportant à la figure 2 où sont représentées trois réalisations de FAI respectivement d'ordre 0, 1 et 2.

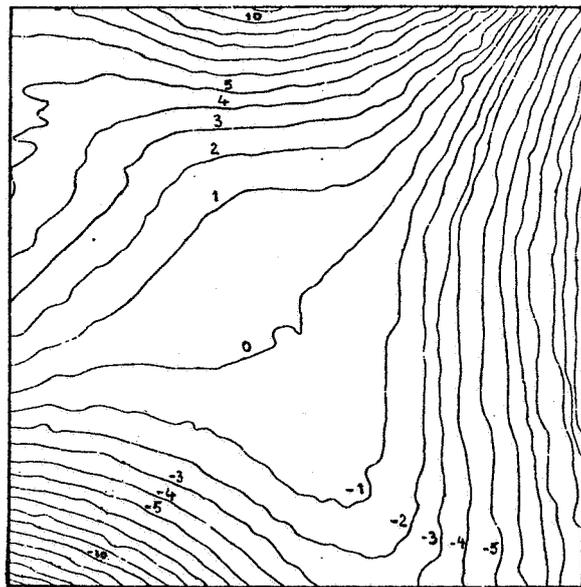
De plus, ce modèle se prête bien à une inférence statistique, car, contrairement à la plupart des schémas de covariance classiques, les différents paramètres  $b_p$  interviennent linéairement. Mais avant d'examiner l'inférence statistique des FAI-k, voyons comment s'expriment les problèmes d'estimation optimale.



F.A.I. - 0  
 $K(h) = -h$



F.A.I. - 1  
 $K(h) = h^3$



F.A.I. - 2  
 $K(h) = -h^5$

*Fig.2 - Réalisations de F.A.I. généralisées d'ordre 0, 1 et 2  
(d'après [35])*

## 2 - LES ESTIMATEURS INTRINSEQUES ET LE KRIGEAGE UNIVERSEL DANS LE CADRE DU MODELE INTRINSEQUE GENERALISE

### A - Les estimateurs intrinsèques

Ne perdons pas de vue que notre objectif final est l'estimation de la variable régionalisée considérée à partir des données expérimentales en  $n$  points  $x_\alpha$ . Comme précédemment, nous nous limiterons au cas de l'estimation ponctuelle, ce qui simplifie les notations ; le cas plus général de l'estimation d'une valeur moyenne se traite de façon tout à fait analogue et ne pose pas de problème particulier.

Dans les applications, nous considérons le phénomène étudié comme une réalisation d'une FAI-k  $Z(x)$  ; plus précisément  $Z(x)$  est un élément d'une FAI-k, puisqu'une FAI-k est une classe d'équivalence de fonctions aléatoires mais sans qu'on sache préciser lequel. C'est pourquoi les seuls éléments dont on sache calculer la variance sont les mesures autorisées de  $\Lambda_k$ , qui, elles, ne dépendent que de la FAI-k et non pas de l'élément particulier  $Z(x)$  considéré.

Soit alors à estimer  $Z(x)$  au point  $x_0$ . Nous nous imposons de n'utiliser que des estimateurs  $Z^x$  tels que l'erreur  $Z^x - Z(x_0)$  appartienne à  $\Lambda_k$ . C'est en effet la condition pour que l'on puisse calculer la variance de cette erreur, qui ne dépend alors que de la covariance généralisée  $K(h)$ . Par définition, de tels estimateurs sont dits intrinsèques.

En d'autres termes, la particularité essentielle de ces estimateurs intrinsèques est que l'erreur d'estimation  $Z^x - Z(x_0)$  filtre les composantes polynômiales de degré inférieur ou égal à  $k$ , ou encore, que les estimateurs intrinsèques interpolent sans erreur ces composantes polynômiales. (Rappelons qu'une FAI-k peut être assimilée localement à la somme d'une fonction aléatoire stationnaire et d'un polynôme de degré inférieur ou égal à  $k$ ).

### B - Le krigeage universel dans le cadre du modèle des FAI-k

L'estimateur étant de la forme  $Z^x = \lambda^\alpha Z(x_\alpha)$ , la condition que  $Z^x - Z(x_0)$  appartienne à  $\Lambda_k$  s'écrit :

$$\lambda^\alpha f^1(x_\alpha) - f^1(x_0) = 0 \quad l = 0, 1, \dots, k$$

On retrouve là les conditions d'universalité du krigeage universel classique. La variance de l'erreur  $Z^x - Z(x_0)$  se mettant sous la même forme,

à condition de remplacer la covariance C par la covariance généralisée K, sa minimisation compte tenu des conditions précédentes aboutit au système de krigeage universel habituel, où K remplace simplement C :

$$\begin{cases} \lambda^\beta K(x_\beta - x_\alpha) = K(x_\alpha - x_0) + \mu_1 f^1(x_\alpha) & \alpha = 1, 2, \dots, n \\ \lambda^\alpha f^1(x_\alpha) = f^1(x_0) & \alpha = 0, 1, \dots, k \end{cases}$$

et alors  $E [Z^x - Z(x_0)]^2 = K(0) + \mu_1 f^1(x_0) - \lambda^\alpha K(x_\alpha - x_0)$

Il n'y a rien de surprenant à cela. Du fait que les coefficients  $a_1$  de la dérive étaient inconnus, la classe des estimateurs utilisés dans le cadre de la théorie classique du krigeage universel était définie par la condition que l'erreur d'estimation filtre toute dérive polynômiale de degré k, c'est-à-dire soit une combinaison linéaire d'ordre k. Et à partir du moment où on se limite à ne travailler que sur les éléments de  $\Lambda_k$ , l'inférence statistique des combinaisons linéaires de  $\Lambda_k$  est seule nécessaire. Quand on dispose d'une réalisation unique, l'inférence statistique n'est possible que moyennant une hypothèse de stationnarité. Mais il n'est pas nécessaire de l'imposer à la fonction aléatoire Z(x) elle-même, ni à ses résidus Z(x) - m(x) mais seulement aux combinaisons linéaires de  $\Lambda_k$ . C'est là toute la différence entre le modèle du krigeage universel et le modèle des FAI-k.

### 3 - L'INFERENCE STATISTIQUE DES FAI-k

#### A - Généralités. Choix d'un modèle limitatif

Le mérite essentiel de la théorie des FAI-k est de bien préciser quelles sont les caractéristiques structurales indispensables. Pour résoudre un problème de krigeage, il nous faut connaître ici :

- l'ordre k
- la covariance généralisée K(h), et encore seulement la partie irrégulière de celle-ci : comme elle est définie à un polynôme pair près, de degré inférieur ou égal à 2k, et qu'un tel polynôme apporte une contribution nulle aux variances des combinaisons linéaires de  $\Lambda_k$ , ces termes pairs importent peu.

La classe des covariances généralisées étant bien plus riche que la classe des covariances ou des variogrammes ordinaires, l'inférence de  $K(h)$  peut paraître à première vue plus complexe que précédemment. Mais en fait, nous nous restreindrons à la sous-classe des covariances généralisées polynômiales avec effet de pépite. La limitation à ce modèle peut paraître sévère, d'une part parce qu'il est isotrope, d'autre part parce que sa forme analytique laisse peu de choix. On peut cependant raisonnablement penser que l'anisotropie éventuelle sera essentiellement prise en compte par la "dérive". D'autre part, ce modèle, si limité soit-il, permet tout de même de représenter n'importe quel comportement à l'origine usuel. C'est ce qui explique que, dans la pratique, il est généralement bien adapté. Nous verrons d'ailleurs plus loin un exemple qui illustre bien le lien qui existe entre les modèles polynômiaux et les modèles plus classiques de la géostatistique.

Cette restriction aux schémas polynômiaux nous est de toute façon pratiquement imposée par la méthode d'inférence qui va être développée. Elle est opérationnelle quelle que soit l'implantation des données, mais suppose par contre que la covariance dépende linéairement de ses paramètres. En l'absence d'autre indication sur le phénomène étudié, l'approximation d'un modèle polynômial paraît la plus raisonnable.

Remarquons qu'on peut mettre en oeuvre des techniques plus élaborées dans le cas où les données sont implantées à maille régulière. Mais nous n'en parlerons pas ; d'une part parce qu'elles n'ont jamais été employées dans des études pratiques ; d'autre part parce que dans ce cas, on peut toujours recourir aux méthodes qui ont été exposées dans le cadre des hypothèses du krigeage universel classique.

## B - Démarche générale des méthodes d'inférence statistique de la covariance généralisée

Les méthodes mises au point permettent d'identifier les paramètres d'une covariance du type

$$K(h) = b_p K^p(h)$$

où les  $K^p(h)$  sont des modèles de covariance élémentaires, que l'on se fixe, et les  $b_p$  les paramètres à déterminer. En général, on cherche à identifier les coefficients d'une covariance polynômiale avec effet de pépite.

Pour ce faire, on pratique de la manière suivante : à partir des données expérimentales, on construit des combinaisons linéaires autorisées. Pour chaque combinaison linéaire  $\lambda$ , on calcule :

- sa valeur expérimentale  $Z(\lambda) = \lambda^\alpha Z(x_\alpha)$
  - sa variance expérimentale  $V(\lambda) = Z(\lambda)^2$
  - les variances théoriques élémentaires  $K^p(\lambda) = \lambda^\alpha \lambda^\beta K^p(x_\beta - x_\alpha)$
- associées aux différentes covariances élémentaires  $K^p(h)$  (pépite,  $-h$ ,  $h^3$  par exemple).

Ces différentes variances sont liées par la relation

$$E[V(\lambda)] = K(\lambda) = b_p K^p(\lambda)$$

Pour estimer les coefficients  $b_p$ , on construit un certain nombre de mesures  $\lambda$ , que nous indiquerons par  $m$ . Et on prend pour estimateurs des  $b_p$  les coefficients  $b_p^x$  qui minimisent :

$$Q(b) = \sum_m \bar{\omega}_m [V(\lambda_m) - b_p K^p(\lambda_m)]^2$$

où  $b$  désigne le vecteur des  $b_p$ , et où les  $\bar{\omega}_m$  sont des pondérateurs qui ont pour but de ne pas attribuer trop de poids aux termes qui ont une forte variance.

Cette condition de moindres carrés se résoud simplement. On vérifie sans peine que, si le modèle est bon, ces estimateurs sont sans biais. Mais on n'est pas assuré que tous les coefficients  $b_p^x$  obtenus soient positifs (ce qui est une condition suffisante pour que  $K(h)$  soit bien une covariance généralisée). Si l'un des coefficients est négatif, on recherche les différentes solutions comportant un terme nul, et on retient celle qui minimise  $Q(b)$  ; si aucune d'elles n'est admissible, on recherche les solutions ayant deux termes nuls, et ainsi de suite. On est certain d'aboutir à une solution admissible, car les solutions à un seul terme fournissent obligatoirement un coefficient positif.

Voilà pour les grandes lignes de cette méthode. Elle est particulièrement simple. Sa mise en oeuvre pose cependant quelques problèmes que nous allons maintenant étudier.

### C - La construction des combinaisons linéaires $\lambda$

Une remarque préliminaire s'impose. Sauf cas particulier (peu de données par exemple), on ne cherche pas un ajustement valable sur tout le champ, mais seulement pour des distances ne dépassant pas les dimensions des voisinages qui seront utilisés pour le krigeage. Les combinaisons linéaires  $\lambda$  seront donc construites dans des voisinages analogues aux voisinages de krigeage.

Ceci dit, pour pouvoir estimer les différents paramètres  $b_p$ , il faut des combinaisons linéaires suffisamment variées, de manière à différencier le comportement des différentes variances qui interviennent (Si on construit toujours la même combinaison linéaire, à une translation près, on ne peut estimer qu'un seul coefficient). Un moyen d'y parvenir est de subdiviser chaque voisinage en deux ou trois auréoles, et de construire les combinaisons linéaires sur ces auréoles.

Pour obtenir les combinaisons linéaires elles-mêmes, on peut prendre des configurations comprenant le minimum de points (le nombre de conditions d'universalité plus 1) ; sauf configuration dégénérée, les poids  $\lambda^\alpha$  sont alors définis à un facteur multiplicatif près, mais celui-ci est éliminé par le pondérateur  $\bar{\omega}$  (méthode utilisée dans le programme KRIGEPACK [38]). On peut également prendre des configurations plus importantes, et prendre la combinaison  $\lambda$  associée à l'erreur d'estimation d'un des points de la configuration à partir des autres par moindres carrés (méthode employée dans le programme BLUEPACK [13]).

#### D - Le choix du pondérateur $\bar{\omega}$

Rappelons qu'on minimise :

$$Q(b) = \sum_m \bar{\omega}_m [V(\lambda_m) - b_p K^p(\lambda_m)]^2$$

Le mieux serait de prendre pour pondérateur  $\bar{\omega}_m$  l'inverse de la variance  $V(\lambda_m)$ . Mais cela suppose connus les moments d'ordre 4 de la FAI-k, alors qu'on ne connaît même pas les moments d'ordre 2. La première approximation qu'on peut faire consiste à prendre le pondérateur que l'on aurait si la FAI-k était gaussienne. On aurait alors :

$$E[V(\lambda_m)] = K(\lambda_m) \quad E[V(\lambda_m)^2] = 3K(\lambda_m)^2$$

D'où

$$\text{Var}[V(\lambda_m)] = 2K(\lambda_m)^2 \quad \bar{\omega}_m = \frac{1}{2K(\lambda_m)^2}$$

Néanmoins, on ne connaît pas les paramètres  $b_p$  permettant de calculer  $K(\lambda_m)$ . On pourrait bien sûr mettre en route une procédure itérative. En fait, on se contente d'utiliser la formule précédente en y remplaçant  $K(\lambda_m)$  par le terme  $K^p(\lambda_m)$  associé à l'un des schémas élémentaires.

Quel schéma élémentaire choisir ? Une étude détaillée [8] montre que le schéma élémentaire le plus régulier est celui qui minimise les risques de grosse erreur. Ceci se conçoit assez bien : si on prend un pondérateur associé à un schéma très régulier, et que la vraie covariance est pépitique, on va donner un poids trop faible aux combinaisons linéaires très étalées; l'ajustement se fera essentiellement sur des combinaisons linéaires concentrées ; ce n'est certes pas l'idéal. Mais si par contre, on prend le pondérateur associé à l'effet de pépite, et que la vraie covariance est en  $h^3$ , on va cette fois effectuer l'ajustement essentiellement à partir des combinaisons linéaires très étalées de forte variance. Et de même qu'un variogramme est moins bien connu aux grandes distances qu'aux petites, on obtiendra un résultat bien plus mauvais que dans le cas précédent.

On peut faire exception à cette règle si l'on sait que, dans  $K(h)$ , le terme le plus régulier n'est pas prépondérant. Ainsi, pour  $k = 1$ , si l'on sait que la variable est loin d'être dérivable, et que le terme en  $h^3$  ne peut jouer qu'un rôle accessoire, il est préférable d'utiliser le pondérateur associé au schéma linéaire.

Une autre exception concerne le cas où l'on fait intervenir des schémas plus réguliers que  $h^3$ . Il est alors généralement conseillé de prendre le pondérateur associé au schéma en  $h^3$ .

#### E - Nombre de combinaisons linéaires à construire

On montre facilement que, dans le cas où la FAI-k est gaussienne, si on a un seul paramètre à estimer ( $K(h) = b K^0(h)$ ) et si on construit  $n$  combinaisons linéaires non corrélées (cas très favorable), la variance relative de l'estimateur  $b^x$  obtenue par la minimisation de  $Q(b)$  est :

$$\frac{\text{Var} [b^x - b]}{b^2} = \frac{2}{n}$$

Ainsi, si l'on veut que  $b$  soit connu avec un écart-type relatif de 10 % il faut 200 combinaisons linéaires non corrélées. Il va de soi que si on veut estimer plusieurs paramètres qui aient un sens, il faut beaucoup plus de combinaisons linéaires. On en construit si possible plusieurs centaines, voire quelques milliers si on a beaucoup de données et un champ très homogène. Mais souvent, on a peu de données ; il est alors superflu de construire à tout prix

un grand nombre de combinaisons linéaires : si on fait intervenir chaque donnée dans plus de deux ou trois combinaisons linéaires, on utilise une information redondante : chaque combinaison linéaire est fortement corrélée à plusieurs autres, et l'expérience montre qu'on n'améliore pas l'ajustement (on peut même en théorie aboutir à l'effet contraire). On trouvera à l'annexe 1 une étude de la corrélation entre les différentes combinaisons linéaires.

#### F - Combien de coefficients peut-on estimer ?

Si on fait l'hypothèse gaussienne, on peut calculer la variance des différents estimateurs  $b_p^x$  auxquels on aboutit. Précisons toutefois que les coefficients  $b_p$  n'ont pas d'existence en soi ; ce sont seulement des paramètres du modèle. Ce que nous voulons, ce n'est d'ailleurs pas connaître de façon précise chaque  $b_p$ , mais obtenir une covariance  $K^x(h) = b_p^x K^p(h)$  qui fournisse des variances d'estimation correctes pour le type de configuration que nous utiliserons. Si les  $b_p^x$  ont une forte variance, il est donc possible que globalement on obtienne une covariance  $K^x(h)$  acceptable (mais c'est loin d'être certain) ; cela signifiera cependant que le modèle comporte plus de paramètres qu'il n'est possible d'en inférer correctement, et qu'il vaut donc mieux se restreindre à un modèle moins riche.

Il est cependant hors de question de calculer la variance des  $b_p^x$  lors de chaque étude, car cela exige des calculs extrêmement longs et coûteux (essentiellement les covariances des différentes combinaisons linéaires entre elles). C'est pourquoi ces calculs n'ont été effectués que pour des données à maille régulière à une dimension [8]. On en conclut que si la vraie covariance est à dominante irrégulière, et si les termes en  $h^3$  ou  $-h^5$  n'ont qu'un rôle accessoire, on peut estimer jusqu'à trois ou quatre paramètres avec une précision acceptable. Si par contre le phénomène est à dominante très régulière, il serait illusoire de vouloir estimer plus de deux paramètres. C'est pourquoi on se limite généralement, pour  $k > 0$ , à un ajustement avec un effet de pépite, un terme linéaire, et un terme en  $h^3$ .

#### G - Indices de la qualité de l'ajustement

L'indice le plus simple est le rapport  $\frac{Q(b^x)}{Q(o)}$ . Il est inférieur à 1, puisque  $\frac{Q(b^x)}{Q(o)} = 1$  correspond à  $b^x = 0$ , qui n'est pas optimal. Un mauvais ajustement sera caractérisé par un rapport  $\frac{Q(b^x)}{Q(o)}$  peu inférieur à 1. Si par

contre l'ajustement est bon, ce rapport sera nettement plus faible ; dans le cas gaussien, il sera de l'ordre de  $\frac{2}{3}$  ; en effet, on a alors, pour le vecteur b réel :

$$\begin{aligned} E [Q (o)] &= \sum_m \bar{\omega}_m E [V (\lambda_m)]^2 = \sum_m \bar{\omega}_m \cdot 3 K (\lambda_m)^4 \\ E [Q (b)] &= \sum_m \bar{\omega}_m \text{Var} [V (\lambda_m)] = \sum_m \bar{\omega}_m \cdot 2 K (\lambda_m)^4 \end{aligned}$$

d'où

$$E [Q (b)] = \frac{2}{3} E [Q (o)]$$

On peut construire d'autres critères. Ainsi, il est intéressant de tester si la covariance obtenue  $K^x (h) = b_p^x K^D (h)$  est bien telle que :

$$E [V (\lambda_m)] = E [K^x (\lambda_m)]$$

En effet le procédé utilisé pour déterminer les  $b_p^x$  fournit toujours un résultat numérique, mais celui-ci n'a de sens que si le modèle choisi est bien adapté.

On ne peut effectuer le test pour chaque mesure m ; en effet les  $b_p^x$ , et par conséquent  $K^x (\lambda_m)$ , sont des combinaisons de toutes les variances  $V (\lambda_m)$  et sont donc déterminés de façon relativement stable, si toutefois le champ est suffisamment grand ; par contre,  $E [V (\lambda_m)]$  ne peut être évalué correctement à partir de la seule combinaison linéaire  $\lambda_m$ . On fera donc porter le test sur un ensemble M d'indices m correspondant à des mesures analogues. On doit avoir :

$$\sum_{m \in M} E [V (\lambda_m)] = \sum_{m \in M} E [K^x (\lambda_m)]$$

et on dispose d'estimateurs sans biais de chaque membre avec  $\sum_{m \in M} V (\lambda_m)$  et

$\sum_{m \in M} K^x (\lambda_m)$ . Si on a suffisamment de données, chaque terme est connu avec une

bonne précision. On pourra caractériser l'adéquation de l'ajustement par :

$$\rho^x = \frac{\sum_{m \in M} V (\lambda_m)}{\sum_{m \in M} K^x (\lambda_m)}$$

c'est un estimateur, éventuellement légèrement biaisé, de

$$\rho = \frac{\sum_{m \in M} E [V (\lambda_m)]}{\sum_{m \in M} E [K^x (\lambda_m)]}$$

Si le modèle est correct, on a  $E [K^x (\lambda_m)] = E [V (\lambda_m)]$  et  $\rho = 1$  ; si par contre le modèle est mal adapté, les résultats numériques n'ont aucun sens, et on ne peut pas avoir  $\rho = 1$  pour les différentes familles M.

Notons que ce test ne demande pas de stocker toutes les mesures  $\lambda_m$ . Il suffit de les répartir dans quelques familles M, et de calculer pour chacune d'elles les sommes correspondantes. Si par contre on conserve tous les termes  $V (\lambda_m)$  et  $K^p (\lambda_m)$ , on peut effectuer d'autres statistiques (histogramme de  $\frac{V (\lambda_m)}{K^x (\lambda_m)}$  par exemple).

Bien sûr, on ne pourra pas effectuer de test très précis, car on ne connaît pas la loi de  $\rho^x$ . Cependant tout ceci permet de se faire une idée de la qualité des ajustements, et d'effectuer un premier tri parmi les solutions possibles. Mais la détermination automatique des coefficients  $b_p^x$  est une méthode aveugle : on n'est pas, comme dans le cas sans dérive, confronté à une courbe expérimentale dont on sent bien quel degré de confiance on peut lui accorder. Ces indices ne sont donc pas suffisants.

#### H - Test de la validité de l'ajustement

On a tout intérêt à tester la validité des ajustements opérés par rapport à l'objectif poursuivi, à savoir l'estimation de  $Z (x)$ . De plus, si on hésite encore entre plusieurs ajustements possibles, il faut expérimenter lequel donne les meilleurs résultats.

Un test simple et efficace consiste à kriguer des points expérimentaux, comme s'ils étaient inconnus, à partir des données voisines : à chaque point expérimental krigé  $x_\alpha$ , on connaît alors la valeur réelle  $Z (x_\alpha)$ , l'estimation  $Z^x (x_\alpha)$  faite à partir des points voisins, donc l'erreur  $s_\alpha = Z^x (x_\alpha) - Z (x_\alpha)$ , ainsi que la variance théorique  $\sigma_\alpha^2$ . Si l'ajustement est correct, on doit avoir à peu près (puisque  $s_\alpha^2$  n'est égal à  $\sigma_\alpha^2$  qu'en espérance) :

$$\frac{1}{n} \sum_{\alpha=1}^n \frac{s_\alpha^2}{\sigma_\alpha^2} = 1$$

Dans le cas où les variables aléatoires  $\frac{s_\alpha}{\sigma_\alpha}$  sont gaussiennes et indépendantes (cette seconde condition est à peu près réalisée lorsque les différentes combinaisons linéaires sont construites sur des voisinages disjoints), le premier membre de cette relation est, au facteur  $\frac{1}{n}$  près, une loi du  $\chi^2$  à n degrés de liberté; sa variance vaut alors  $\frac{2}{n}$ . Il faut donc au moins une trentaine de valeurs pour obtenir une moyenne correcte.

Ce test permet non seulement de vérifier si un ajustement est valable, mais également de choisir entre deux ou plusieurs ajustements possibles : on retiendra celui qui donne les variances expérimentales  $s_{\alpha}^2$  les plus faibles tout en aboutissant à des écarts réduits  $\frac{s_{\alpha}}{\sigma_{\alpha}}$  corrects.

On peut utiliser également d'autres critères, qui réduisent l'influence des données erronées, ou trop extrêmes : travailler sur l'histogramme des écarts réduits plutôt que sur leur moyenne quadratique, compter combien de fois tel ajustement donne de meilleurs résultats que tel autre, etc...

Notons enfin qu'une étude des écarts réduits est toujours très utile : elle permet de vérifier si le champ est homogène, ou au contraire de déceler des anisotropies zonales ; elle met en évidence les données suspectes, caractérisées par un écart réduit excessif, etc...

#### I - Le choix de l'ordre k

Jusqu'à présent, on a toujours supposé qu'on s'était fixé k. Mais reste à voir comment le choisir. Et on a tout intérêt à le choisir correctement. En effet, si on travaille à un ordre trop faible, le champ comportera des composantes polynômiales encore fortes qui ne seront pas interpolées exactement, d'où des erreurs (sans compter qu'alors la covariance sera mal déterminée). Si au contraire, on se fixe un ordre trop élevé, on réduira inutilement l'espace des combinaisons linéaires autorisées, et on en déduira des estimateurs moins précis.

Pour déterminer l'ordre k, on procède un peu comme précédemment pour tester la validité d'un ajustement, en estimant des points expérimentaux à partir d'autres données, pour différentes hypothèses sur l'ordre k. Une étude détaillée [8] pour différentes configurations de données, a montré qu'il vaut mieux, au lieu de prendre un voisinage qui entoure bien le point krigé, estimer un point d'une auréole externe par une auréole interne bien fournie (comprenant une douzaine de points si on recherche  $k \leq 2$ ). En effet un voisinage bien régulier filtre trop, de lui-même, les composantes polynômiales, et conduit souvent à sous-estimer k. De même, si l'auréole interne contient trop peu de données, l'extrapolation à l'auréole externe donnera de mauvais résultats, et on sous-estimera également k.

L'idéal est bien sûr de faire ces estimations à partir de la covariance que l'on a préalablement ajustée (avec éventuellement un modèle différent pour chaque valeur de  $k$ ). Mais dans certains cas, on est obligé de choisir  $k$  sans connaître la covariance  $K(h)$ , ou sans en tenir compte. Il en est ainsi notamment si l'on traite simultanément plusieurs variables, et qu'on veut éviter de résoudre un système de krigeage différent pour chaque variable. Lorsqu'on utilise les configurations de krigeage proposées plus haut, c'est alors l'estimateur des moindres carrés qui présente le moins de risques d'un diagnostic erroné sur l'ordre  $k$ .

Notons qu'habituellement, on ne dépasse pas l'ordre 2. Cependant si on a peu de données et si on recherche un ajustement global pour travailler en voisinage unique, on peut être conduit à tester un ordre supérieur.

#### J - Inférence d'un champ hétérogène

En cas d'hétérogénéité du champ, le mieux est de le subdiviser en zones à peu près homogènes, et d'ajuster un modèle dans chaque zone. Cependant il serait illusoire de prétendre différencier valablement des zones ne contenant que quelques dizaines de points ; si l'hétérogénéité se manifeste vraiment très localement, l'inférence statistique ne pourra pas être faite à ce niveau de précision; on se contentera alors d'un ajustement dans des zones plus larges, qui fourniront une sorte de structure moyenne.

Il est à noter que si on effectuait le krigeage dans chaque zone à partir de la covariance qui y a été ajustée, on introduirait des discontinuités factices aux frontières (surtout pour les variancés). En fait, pour le krigeage du point  $x$  on adopte un modèle de la forme :

$$K(h) = b_p(x) K^p(h)$$

où les  $b_p(x)$  sont obtenus par interpolation des coefficients des zones voisines.

#### K - Limites de la méthode et perspectives

Comme on vient de le voir, il est assez facile de faire l'inférence statistique d'une FAI- $k$  à covariance polynômiale. Cette méthode a d'ailleurs été mise en oeuvre dans des programmes comme KRIGEPACK [38] et BLUEPACK [12], [13]. Elle est donc tout à fait opérationnelle. Mais il est bon d'en connaître les limites.

Tout d'abord le modèle polynômial peut être mal adapté. C'est surtout le cas si  $k = 0$ , puisqu'on se limite alors à un schéma linéaire avec effet de pépite. Mais ce n'est pas très gênant, car il vaut mieux alors effectuer un ajustement à partir du variogramme brut.

Le principal défaut de la méthode réside en fait dans son manque de robustesse vis à vis des variables qui vérifient mal les hypothèses intrinsèques : présence de quelques pics isolés, imbrication de zones calmes et de zones chaotiques, données erronées....; toutes ces hétérogénéités se répercutent très fortement sur la forme quadratique  $Q(b)$  que l'on minimise. On dispose heureusement de moyens de contrôle, mais seulement après coup.

Les recherches dans ce domaine devront donc naturellement s'orienter vers des techniques plus robustes, moins sensibles aux hétérogénéités et aux anomalies des données, et qui permettent un minimum de contrôle au cours de la phase d'estimation des coefficients de la covariance.

#### L - Conséquences pour le krigeage

Dans les cas où le modèle des FAI-k ne colle pas très bien au phénomène considéré, et où on est obligé d'y recourir, faute de mieux, l'imprécision relative de la covariance ajustée a généralement peu de répercussions sur les estimateurs de krigeage eux-mêmes. Par contre, elle réagit directement sur les variances d'estimation. Il ne faut donc pas interpréter celles-ci de manière trop stricte. Et ceci d'autant plus qu'on en déduit souvent une fourchette conventionnelle ( $\pm 2$  écarts-types autour du krigeage), alors que la loi de l'erreur de krigeage est rarement gaussienne. C'est l'expérience qui montre, compte tenu des résultats de l'analyse structurale, et tout particulièrement de l'étude des erreurs de krigeage de points expérimentaux, quel degré de confiance on peut accorder aux variances calculées.

DEUXIEME PARTIE

APPLICATIONS DE LA GEOSTATISTIQUE

NON STATIONNAIRE

CHAPITRE V PRESENTATION DES APPLICATIONS
---

1 - LES GRANDES CATEGORIES D'APPLICATIONS

On imagine souvent que le domaine privilégié du krigeage universel est la cartographie automatique, du moins pour tout ce qui touche aux problèmes d'interpolation. Cette idée est sans doute renforcée par la réalisation de programmes comme KRIGEPACK [38] et BLUEPACK [13] qui apportent effectivement une solution entièrement automatisée à ce type de problème, du moins dans les cas simples (champ homogène). Mais il existe bien d'autres méthodes (interpolation polynômiale, moindres carrés, pondération par l'inverse de la distance, etc....), dont chacune donne des résultats analogues au krigeage dans certains cas particuliers ; leur utilisation judicieuse permet d'obtenir des tracés satisfaisants. Ceci explique que, de fait, l'interpolation ne relève pas uniquement du krigeage universel.

La qualité majeure de la géostatistique est ailleurs : elle réside dans le fait qu'en tenant compte des caractéristiques structurales du phénomène, le krigeage fournit en même temps que l'estimation optimale une variance d'estimation, qui caractérise donc la précision de l'interpolation. Un grand nombre d'applications ont pour objectif justement la connaissance de la précision de l'estimation. Il permet également d'étudier quelle précision on obtiendrait si on effectuait des travaux de reconnaissance supplémentaires ; en effet, le calcul des variances ne fait intervenir que les caractéristiques structurales et la localisation des données, et non pas la valeur de la variable aux points expérimentaux ; on peut ainsi envisager plusieurs campagnes de sondages, et les comparer tant du point de vue de leur coût que du point de vue de l'information qu'elles apportent.

Une autre originalité de la géostatistique est la possibilité de générer des simulations conditionnelles. Rappelons de quoi il s'agit : le krigeage fournit l'estimateur optimal  $Z(x)$ , mais il lisse la réalité, car tout estimateur, même optimal, ne peut restituer les détails qui n'ont pas été observés. Or dans certains cas (visualisation des fluctuations possibles du phénomène, initialisation d'un modèle numérique), on souhaite disposer d'un champ qui présente le

même degré de variabilité que le phénomène réel, et qui coïncide avec ce qu'on connaît du champ réel. Une simulation conditionnelle répond précisément à ces exigences : elle a mêmes caractéristiques structurales que le phénomène réel, et passe par les points expérimentaux. Elle n'est pas la réalité, qui reste inconnue, ni un bon estimateur de celle-ci, puisque le meilleur estimateur reste le krigeage, mais elle représente une variante possible de la réalité. (cf. [11], [18]). Une application très intéressante des simulations conditionnelles concerne l'estimation de grandeurs ne dépendant pas linéairement de  $Z(x)$ , comme un volume d'huile au-dessus d'un plan d'eau (dans ce cas, il y a coupure de  $Z(x)$  au niveau du plan d'eau) ; le krigeage n'apporte pas de solution à ce problème ; on génère alors plusieurs simulations, et on calcule la valeur de cette grandeur sur chaque simulation ; on peut alors en déduire une estimation (cf. [14]).

Nous venons de voir les grandes catégories d'applications. Mais la géostatistique est riche en nouvelles possibilités ; très souvent, on a effectué des adaptations et des développements de la théorie en fonction des besoins (ainsi pour l'analyse tridimensionnelle des champs météorologiques [2]). Le champ d'intervention de la géostatistique est donc vaste.

## 2 - PRESENTATION DES EXEMPLES

Nous avons choisi d'illustrer les possibilités de la géostatistique non stationnaire par trois applications empruntées à la topographie et à la bathymétrie, et qui constituent un bon échantillonnage des cas rencontrés en pratique. Les objectifs poursuivis sont chaque fois très différents, ainsi que les méthodes d'inférence statistique :

- le premier (restitution d'une carte topographique à partir d'un échantillonnage) illustre parfaitement les possibilités interpolatoires du krigeage, car on dispose déjà de la carte réelle ; de plus, il fait apparaître le lien profond qui unit l'inférence statistique classique (ajustement du variogramme brut expérimental) et l'inférence automatique en termes de FAI-k.

- le second (étude de la précision de cartes bathymétriques à partir de données disparates) présente une adaptation du krigeage au cas où les données sont affectées d'une incertitude de localisation ; pour ce qui concerne l'analyse structurale, on doit subdiviser le champ en zones à peu près homogènes, où on ajuste un modèle à partir du variogramme brut, malgré la présence d'une dérive.

- le troisième (étude d'une île à partir de sondes en mer) est un cas d'école servant à illustrer l'intérêt des simulations conditionnelles pour des estimations de surface ou de volume ; on y a fait une inférence statistique automatique, mais adaptée à la présence d'une forte anisotropie zonale.

CHAPITRE VI - EXEMPLE 1 :  
RECONSTITUTION DE LA SURFACE TOPOGRAPHIQUE  
A PARTIR D'UN ECHANTILLON PHOTOGRAMMETRIQUE

1 - CADRE DE L'ETUDE

Les cartes topographiques obtenues par restitution photogrammétrique sont précises, mais demandent un travail assez long. Or beaucoup d'applications n'exigent pas une grande précision. D'où l'intérêt de rechercher des méthodes de restitution plus rapides, quitte à perdre un peu en précision. C'est dans ce but qu'est faite cette étude d'une partie de la carte de Noirétable (Massif Central) au 1 : 25000. La méthode proposée consiste à ne retenir qu'un échantillonnage photogrammétrique, et à restituer la carte à partir de celui-ci par krigeage. On dispose déjà de la carte réalisée par restitution photogrammétrique, qui sert donc de référence.

La zone étudiée est un carré de 10 cm de côté sur la carte, soit 2500 mètres sur le terrain. L'Institut Géographique National a effectué trois schémas d'échantillonnage différents, tous assez denses, car on veut quand même obtenir une bonne restitution de la topographie : le premier comprend environ 200 points échantillonnés sur les lignes de niveau de la carte de référence, le second environ 400 points situés sur les lignes de crête et les thalwegs ; le troisième est une combinaison des deux premiers. Seul ce dernier donne des résultats vraiment satisfaisants du point de vue de la lecture de la carte qui en résulte. Nous retracerons ici l'étude de ce troisième schéma. (On trouvera l'étude complète en [6]).

2 - ANALYSE STRUCTURALE

A - Etude du variogramme brut

On a calculé le variogramme brut expérimental dans différentes directions (cf. figure 3).

Aux grandes distances, on observe des comportements très divers. Ainsi les variogrammes des directions NE-SW et N-S sont très voisins jusqu'à 1500 m, puis se mettent à diverger considérablement, suggérant l'existence d'une

dérive à cette échelle.

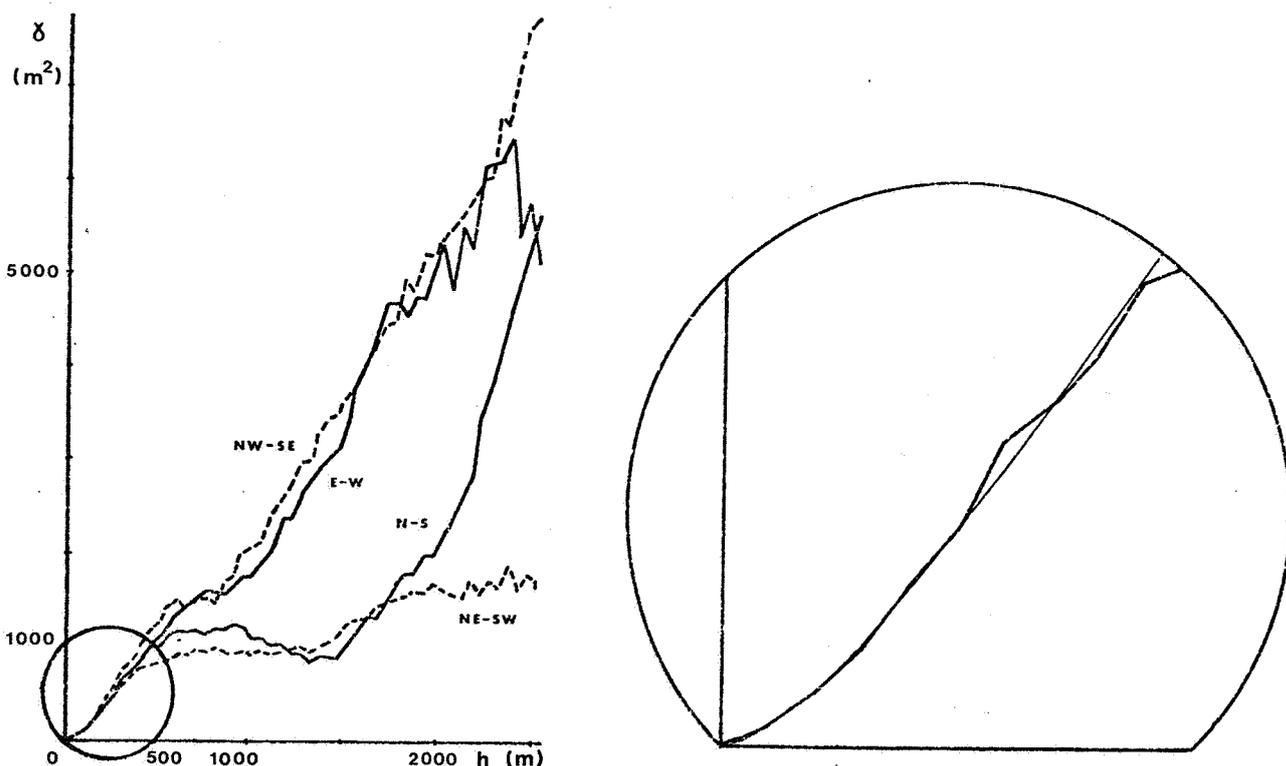
Aux courtes distances par contre, et jusqu'à 500 m. environ, le variogramme est isotrope. Son comportement est à peu près linéaire, sauf au voisinage immédiat de l'origine où il est plus régulier. Or c'est ce comportement aux courtes distances qui nous intéresse ici, car les données sont réparties de manière assez uniforme, si bien qu'un cercle de 500 m. de diamètre contient en moyenne 18 points expérimentaux, ce qui suffit amplement pour le krigeage.

On a donc cherché un ajustement à un schéma isotrope qui soit valable jusqu'à 500 m. environ. L'allure de la courbe expérimentale a suggéré de se raccorder à un variogramme linéaire monté, dont la forme analytique pour une montée droite sous puissance 1 est :

$$\gamma_1(h) = \bar{\omega} \left[ \frac{1}{3}(\sqrt{l^2+h^2} - l) - \frac{2}{3} \frac{h^2}{l^2}(\sqrt{l^2+h^2} - h) + \frac{h^2}{l} \log \frac{l + \sqrt{l^2+h^2}}{h} \right]$$

On a obtenu un excellent ajustement pour  $l = 500$  m et  $\bar{\omega} = 3.1$

Comme le variogramme laisse pressentir l'existence d'une dérive, on a également effectué, par curiosité, l'analyse structurale automatique élaborée pour les FAI-k.



*Fig.3 - Variogramme expérimental, et ajustement du variogramme moyen dans la zone utile à un schéma linéaire monté*

B - Analyse en termes de FAI-k

Les programmes d'inférence statistique proposent comme solution :

$$k = 1 \quad K(h) = -0.23h + 0.96 \times 10^{-5} h^3$$

Le rapport  $\frac{Q(b^x)}{Q(0)}$  obtenu est de 0.74, ce qui est satisfaisant.

C - Synthèse des deux analyses

L'analyse du variogramme expérimental a montré qu'on pouvait en fait se contenter d'une hypothèse intrinsèque ( $k=0$ ) locale, puisque la dérive ne se fait pas sentir à l'échelle des voisinages de krigeage. Ceci suggère que l'analyse automatique ne donne  $k=1$  que parce que cela permet d'utiliser un modèle de covariance comportant un terme régulier en  $h^3$ . Par conséquent, le champ étudié doit être, localement, une réalisation d'un élément localement intrinsèque (d'ordre 0) de la FAI-1 dont on a identifié la covariance généralisée. (Une FAI-k, rappelons le, est une famille de fonctions aléatoires, qui diffèrent l'une de l'autre d'un polynôme de degré inférieur ou égal à  $k$  ; et nous avons vu en IV-1-G que parmi les éléments de la FAI-k, il en existe qui sont localement stationnaires ; à plus forte raison, certains éléments sont localement intrinsèques d'ordre 0).

Or si une FAI-1 admet une covariance généralisée de la forme

$$K(h) = -b_1 h + b_2 h^3$$

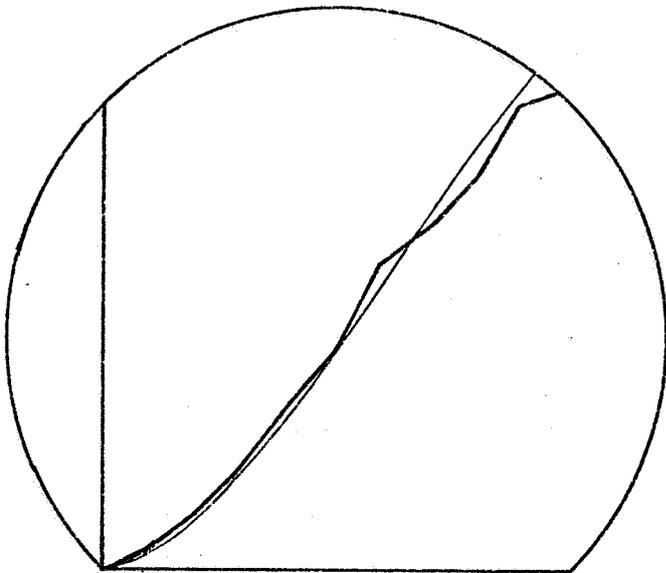
la forme générale des variogrammes des éléments de cette FAI-1 qui sont localement intrinsèques sur un disque de diamètre  $L$  est :

$$\gamma(h) = b_1 h + \beta h^2 - b_2 h^3 \quad (h \leq L)$$

avec  $\beta \geq \frac{b_2}{18\pi} \left[ \frac{L}{2} - \frac{1}{\sqrt{\frac{b_2}{b_1}} \operatorname{th} \left( \sqrt{\frac{b_2}{b_1}} \frac{L}{2} \right)} \right]$  (cf. [31])

On obtient effectivement un excellent ajustement au variogramme brut avec  $\beta = 0.0089$  (cf. figure 4), et cet ajustement est compatible avec un diamètre  $L$  d'environ 600 mètres, ce qui correspond précisément au domaine de validité de l'hypothèse intrinsèque locale, compte tenu de l'allure du variogramme expérimental.

On voit que, malgré les apparences, les covariances généralisées polynômiales restent très proches des schémas de variogramme classiques.



*Fig.4 - Ajustement du variogramme  
moyen dans la zone utile à un  
schéma polynômial local*

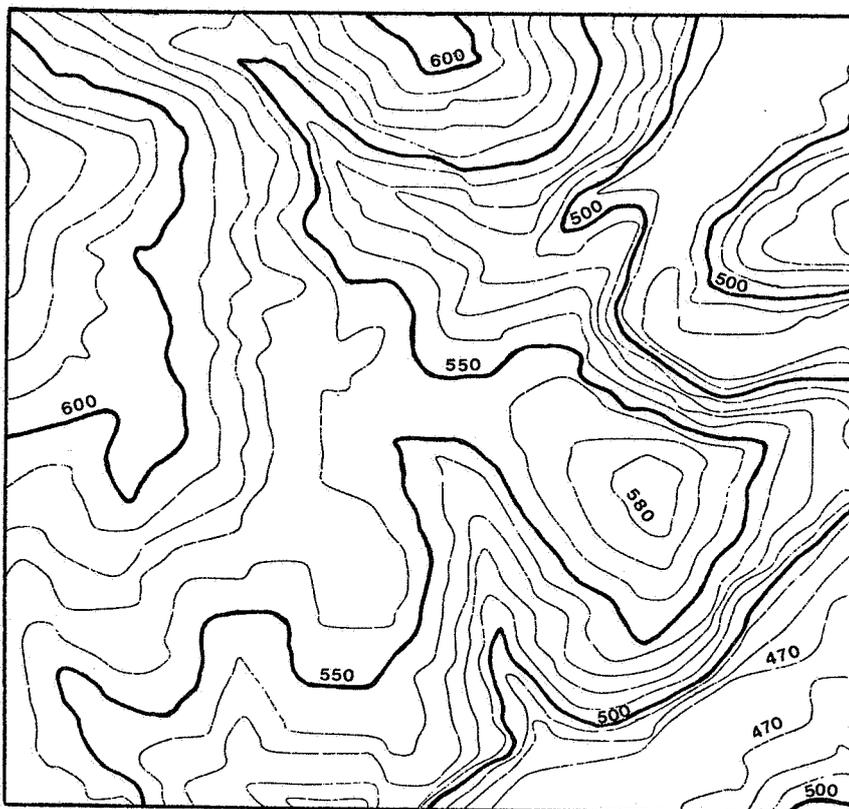
On dispose donc de trois ajustements possibles : le schéma linéaire monté, la covariance généralisée avec  $k = 1$ , et le schéma intrinsèque qui s'en déduit (mais qu'il ne faut surtout pas utiliser au delà de la distance  $L$ )

Ces trois ajustements fournissent des résultats très comparables, comme le montre le krigeage de 48 points expérimentaux à partir des données voisines (comme les données se trouvent sur des lignes caractéristiques, on a tout de même éliminé les deux points les plus proches, afin d'être dans des conditions voisines du krigeage d'un point non connu). L'erreur quadratique moyenne est pratiquement la même pour les trois ajustements (32 à 35). Par contre les ajustements polynômiaux semblent donner de meilleures variances de krigeage, puisqu'ils fournissent une erreur quadratique réduite moyenne de 0.96, ce qui est excellent, contre 0.56 pour le schéma linéaire monté.

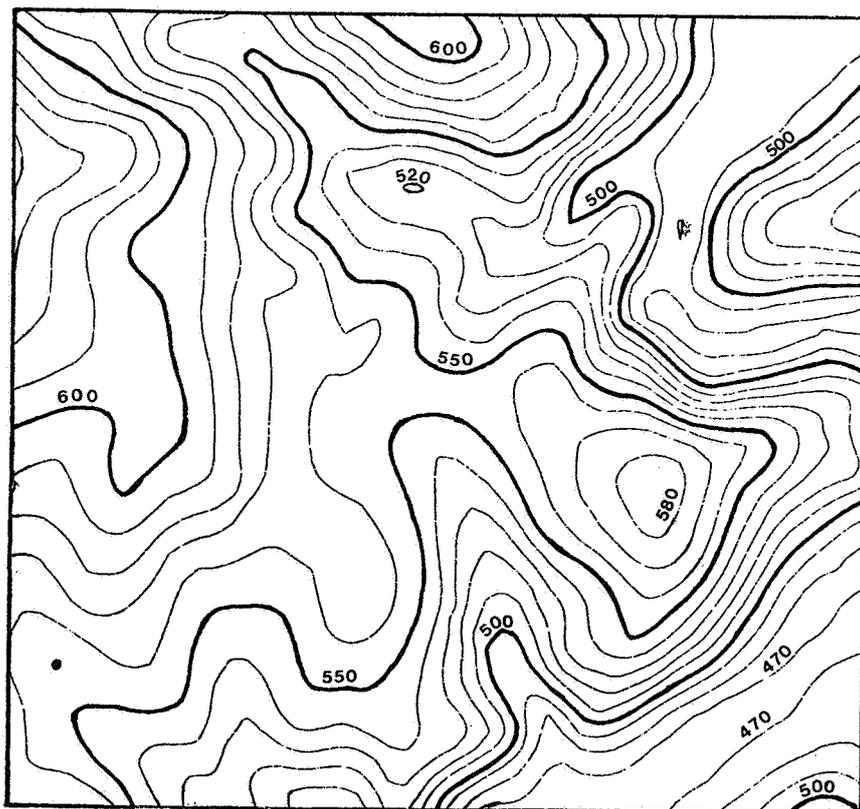
### 3 - ETUDE DE LA CARTE RESTITUEE PAR KRIGEAGE

On a effectué le krigeage pour chacun des trois ajustements. On obtient des cartes pratiquement identiques. Si on caractérise l'écart entre les valeurs krigées obtenues par deux ajustements différents par leur écart-type sur les 651 noeuds de la grille (la moyenne de cet écart est nulle), on obtient de 0.40 à 0.65 m, ce qui est vraiment très peu.

La figure 5 montre d'une part la carte obtenue par restitution photogrammétrique, et d'autre part la carte obtenue par krigeage, avec le schéma linéaire monté. Si on compare la carte krigée à la précédente, qui est très proche de la carte réelle, on constate qu'on obtient un bon tracé des lignes de



*Carte obtenue par restitution photogrammétrique*



*Carte reconstituée par krigeage*

*Fig. 5*

niveau, et que les éléments caractéristiques du relief (lignes de crête et thalwegs) sont bien rendus. La différence entre les deux cartes n'est guère plus grande que la différence que l'on observe entre 2 cartes réalisées par restitution photogrammétrique par deux techniciens différents. Compte tenu des résultats, on doit obtenir une restitution encore bonne avec un schéma moins dense, comprenant environ 400 échantillons. On retrouve d'ailleurs là la règle empirique de la topographie des fonds marins, qui veut que pour obtenir une carte correcte on ait un échantillonnage dont la maille soit d'environ 5 mm à l'échelle de la carte.

CHAPITRE VII - EXEMPLE 2 :  
EXPLOITATION DE DONNEES BATHYMETRIQUES  
DISPARATES\*

1 - CADRE DE L'ETUDE

Les minutes GEBCO sont des documents de compilation rassemblant à l'échelle de 1/1.000.000 des sondages océaniques obtenus par des bâtiments divers, en général non spécialisés. Ces données sont disparates par leur répartition spatiale et par leur précision tant sur la position que sur la profondeur. L'objet de l'étude est de mettre au point une méthode avec laquelle on puisse :

- évaluer la précision avec laquelle ces données permettent de connaître le fond ;
- définir les travaux à la mer minimaux nécessaires à l'obtention d'une précision donnée.

La méthode employée est bien sûr le krigeage. Mais on est ici confronté à un problème nouveau, qui est la présence d'incertitudes de localisation trop importantes pour pouvoir être négligées. On a donc adapté le krigeage de façon à ce qu'il prenne en compte ces incertitudes, ce qui se fait assez simplement, moyennant quelques approximations qui sont ici légitimes. La méthode a été testée sur la minute GEBCO 43 (golfe de Gascogne) . Mais avant de présenter les résultats, voyons la méthode employée.

2 - PRISE EN COMPTE D'INCERTITUDES SUR LES DONNEES

Il nous faut prendre en compte les deux sortes d'erreur qui affectent ici les données. Le problème soulevé par la présence d'erreurs de mesure sur la profondeur est assez classique, et se résoud par une méthode de cokrigeage. On traitera rapidement ce premier point, avant d'aborder le problème nouveau des incertitudes sur la localisation.

---

\* Etude effectuée en collaboration avec P. CHAUVET et R. DUMAY pour le Service Hydrographique et Océanographique de la Marine, dans le cadre de la Convention DRME n° 74/548

A - Filtrage des erreurs de mesure

En un point  $x_\alpha$ , on dispose en fait de la donnée

$$Z'(x_\alpha) = Z(x_\alpha) + \varepsilon(x_\alpha)$$

où  $Z(x_\alpha)$  est la vraie valeur, inconnue, et  $\varepsilon(x_\alpha)$  une erreur de mesure.

Ici l'erreur de mesure sur la profondeur est d'espérance nulle, et n'est pas corrélée avec le champ réel  $Z(x)$ . Par contre les erreurs de mesure ne sont pas forcément indépendantes. Nous supposons connues les covariances  $\sigma_{\alpha\beta}$  des erreurs aux points de mesure :

$$\sigma_{\alpha\beta} = E[\varepsilon(x_\alpha)\varepsilon(x_\beta)]$$

Nous cherchons à estimer  $Z(x_0)$  par une combinaison linéaire des données disponibles, c'est-à-dire par un estimateur de la forme :

$$Z^x = \sum_{\alpha} \lambda^{\alpha} [Z(x_{\alpha}) + \varepsilon(x_{\alpha})]$$

Le problème est tout à fait analogue à celui du krigeage universel classique.

On aboutit au système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{\beta} \lambda^{\beta} [C(x_{\alpha} - x_{\beta}) + \sigma_{\alpha\beta}] = C(x_{\alpha} - x_0) + \sum_1 \mu_1 f^1(x_0) \quad \alpha = 1, 2, \dots, n \\ \sum_{\alpha} \lambda^{\alpha} f^1(x_{\alpha}) = f^1(x_0) \quad l = 0, 1, \dots, k \end{array} \right.$$

La variance d'estimation est alors :

$$\text{Var}[Z^x - Z(x_0)] = C(0) - \sum_{\alpha} \lambda^{\alpha} C(x_{\alpha} - x_0) + \sum_1 \mu_1 f^1(x_0)$$

Il est à remarquer que généralement, la seule covariance accessible expérimentalement est la covariance de  $Z(x) + \varepsilon(x)$ . On a besoin de faire certaines hypothèses concernant l'erreur si l'on veut séparer les deux covariances. Dans le cas simple où les erreurs de mesure sont indépendantes, et de même amplitude, elles se traduisent sur la covariance par un effet de pépité supplémentaire, égal à la variance de l'erreur de mesure. Ici le problème est un peu plus complexe: on suppose que l'erreur est la même le long d'un profil, et que les erreurs sur deux profils sont indépendantes. De plus l'écart-type de l'erreur est approximativement proportionnel à la profondeur. On a donc ici :

$$\sigma_{\alpha\beta} = \begin{cases} 0 & \text{si } x_{\alpha} \text{ et } x_{\beta} \text{ appartiennent à deux profils différents} \\ \eta^2 s^2 & \text{si } x_{\alpha} \text{ et } x_{\beta} \text{ appartiennent au même profil} \end{cases}$$

s désignant la profondeur moyenne du voisinage considéré  
 $\eta$  étant un facteur de proportionnalité, égal ici à 0.006 (cf. l'analyse structurale).

B - Prise en compte de l'incertitude de localisation

On doit considérer que la localisation d'un point de mesure  $x_{\alpha}$  est entachée d'une erreur  $u_{\alpha}$ . Ainsi la mesure attribuée au point  $x_{\alpha}$  a en fait été prise en  $(x_{\alpha} + u_{\alpha})$  et l'on estime  $Z(x_0)$  à partir des n mesures  $Z(x_{\alpha} + u_{\alpha})$  par un estimateur de la forme :

$$Z^x = \sum_{\alpha} \lambda^{\alpha} Z(x_{\alpha} + u_{\alpha})$$

Les erreurs  $u_{\alpha}$  seront traitées comme des vecteurs aléatoires. Nous supposons que ces erreurs sont d'espérance nulle et que nous connaissons :

- la densité  $p_{\alpha}(u_{\alpha})$  de l'erreur de localisation en chaque point  $x_{\alpha}$  ;
- la densité  $p_{\alpha\beta}(u_{\alpha}, u_{\beta})$  des erreurs pour chaque couple  $(x_{\alpha}, x_{\beta})$ .

En premier lieu, nous allons voir que cette incertitude de position peut être aisément prise en compte dans le cas stationnaire, tandis qu'en présence d'une dérive, il n'y a apparemment pas de solution rigoureuse. Pour une dérive linéaire cependant, on parvient à résoudre ce problème moyennant quelques approximations.

a - si  $Z(x)$  est stationnaire

La condition de non biais  $E[Z^x - Z(x_0)] = 0$  implique la relation habituelle :  $\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} = 1$ .

La variance d'estimation, conditionnellement aux vecteurs  $u_{\alpha}$ , s'écrit :

$$E[(Z^x - Z(x_0))^2 | u_{\alpha}, \alpha=1, 2, \dots, n] = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \lambda^{\alpha} \lambda^{\beta} C(x_{\alpha} + u_{\alpha} - x_{\beta} - u_{\beta}) - 2 \sum_{\alpha} \lambda^{\alpha} C(x_{\alpha} + u_{\alpha} - x_0) + C(0)$$

En déconditionnant, il vient :

$$E[(Z^x - Z(x_0))^2] = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \lambda^{\alpha} \lambda^{\beta} \tilde{C}_{\alpha\beta} - 2 \sum_{\alpha} \lambda^{\alpha} \tilde{C}_{\alpha 0} + C(0)$$

$$\text{où } \tilde{C}_{\alpha\beta} = \begin{cases} \iint C(x_{\alpha} - x_{\beta} + u_{\alpha} - u_{\beta}) p_{\alpha\beta}(u_{\alpha}, u_{\beta}) du_{\alpha} du_{\beta} & \text{pour } \alpha \neq \beta \\ C(0) & \text{pour } \alpha = \beta \end{cases}$$

$$\text{et } \tilde{C}_{\alpha 0} = \int C(x_{\alpha} + u_{\alpha} - x_0) p_{\alpha}(u_{\alpha}) du_{\alpha}$$

La minimisation de cette variance conduit donc au système de krigeage classique, où la covariance ponctuelle  $C(h)$  est remplacée par ces régularisées.

b - Si  $Z(x)$  n'est pas stationnaire

En utilisant les notations explicites à deux dimensions, nous posons :  $Z(x, y) = a_0 + a_1 x + a_2 y + Y(x, y)$  où  $Y(x, y)$  est une fonction aléatoire stationnaire, d'espérance nulle, de covariance  $C(h)$ .

$Z_0 = Z(x_0, y_0)$  est estimé par  $Z^x = \sum_{\alpha} \lambda^{\alpha} Z(x_{\alpha} + u_{\alpha}, y_{\alpha} + v_{\alpha})$

Condition de non biais :

En supposant fixés les vecteurs  $(u_{\alpha}, v_{\alpha})$  l'espérance de l'erreur s'écrit :

$$E[Z^x - Z_0 | (u_{\alpha}, v_{\alpha}), \alpha=1, 2, \dots, n] = a_0 (1 - \sum_{\alpha} \lambda^{\alpha}) + a_1 (x_0 - \sum_{\alpha} \lambda^{\alpha} x_{\alpha} - \sum_{\alpha} \lambda^{\alpha} u_{\alpha}) + a_2 (y_0 - \sum_{\alpha} \lambda^{\alpha} y_{\alpha} - \sum_{\alpha} \lambda^{\alpha} v_{\alpha})$$

L'hypothèse  $E[u_{\alpha}] = E[v_{\alpha}] = 0, \forall \alpha$ , entraîne :

$$E[Z^x - Z_0] = a_0 (1 - \sum_{\alpha} \lambda^{\alpha}) + a_1 (x_0 - \sum_{\alpha} \lambda^{\alpha} x_{\alpha}) + a_2 (y_0 - \sum_{\alpha} \lambda^{\alpha} y_{\alpha})$$

L'erreur est donc d'espérance nulle, quels que soient les coefficients inconnus  $a_0, a_1, a_2$  de la dérive, si :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{\alpha} \lambda^{\alpha} = 1 \\ \sum_{\alpha} \lambda^{\alpha} x_{\alpha} = x_0 \\ \sum_{\alpha} \lambda^{\alpha} y_{\alpha} = y_0 \end{array} \right.$$

Ce sont là les conditions d'universalité habituelles.

Condition d'optimalité

La variance d'estimation s'écrit alors, à  $(u_{\alpha}, v_{\alpha})$  fixés :

$$E[(Z^x - Z_0)^2 \mid (u_{\alpha}, v_{\alpha}), \alpha = 1, 2, \dots, n] = E[(Y^x - Y_0)^2 \mid (u_{\alpha}, v_{\alpha}), \alpha = 1, 2, \dots, n] \\ + \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \lambda^{\alpha} \lambda^{\beta} [a_1^2 u_{\alpha} u_{\beta} + a_1 a_2 (u_{\alpha} v_{\beta} + v_{\alpha} u_{\beta}) + a_2^2 v_{\alpha} v_{\beta}]$$

où  $Y^x = \sum_{\alpha} \lambda^{\alpha} Y(x_{\alpha} + u_{\alpha})$

On en déduit en déconditionnant :

$$E[(Z^x - Z_0)^2] = E[(Y^x - Y_0)^2] + \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \lambda^{\alpha} \lambda^{\beta} [a_1^2 E(u_{\alpha} u_{\beta}) + a_1 a_2 E(u_{\alpha} v_{\beta} + u_{\beta} v_{\alpha}) \\ + a_2^2 E(v_{\alpha} v_{\beta})]$$

Les conditions d'universalité ne suffisent donc pas à rendre la variance indépendante des coefficients de la dérive. Et aucune condition supplémentaire n'y parviendrait, puisque les termes qu'il faudrait annuler sont des espérances de carrés. On aboutit donc apparemment à une impasse. Cependant on peut obtenir une solution approchée en remplaçant les valeurs  $a_1$  et  $a_2$  inconnues par des estimations  $a_1^x$  et  $a_2^x$ . En théorie on pourrait d'ailleurs partir d'un premier jeu d'estimateurs  $a_1^x$  et  $a_2^x$  (obtenu par exemple sans tenir compte de l'incertitude de localisation), et en déduire un second jeu par krigeage de  $a_1$  et  $a_2$  etc... ; après quelques itérations, on devrait aboutir à une solution convenable. Cependant cette méthode serait lourde et coûteuse, car, dans le cas présent du moins, il faudrait faire intervenir des voisinages de travail comprenant une trentaine de points expérimentaux. Comme les essais ont montré que le résultat n'était pas très sensible à une modification de  $a_1^x$  et  $a_2^x$ , on s'est contenté ici de déduire les valeurs locales de  $a_1^x$  et  $a_2^x$  de moyennes mobiles de la variable étudiée. Ces moyennes ont été calculées sur des carreaux de 20 minutes de côté.

Posons alors :

$$D_{\alpha\beta} = a_1^{x_1^2} E[u_\alpha u_\beta] + a_1^x a_2^x E[u_\alpha v_\beta + v_\alpha u_\beta] + a_2^{x_2^2} E[v_\alpha v_\beta]$$

La variance d'estimation s'écrit alors en première approximation :

$$\text{Var}[\tilde{z}^x - z_0] = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \lambda^\alpha \lambda^\beta [\tilde{C}_{\alpha\beta} + D_{\alpha\beta}] - 2 \sum_{\alpha} \lambda^\alpha \tilde{C}_{0\alpha} + C(0)$$

Sa minimisation compte tenu des conditions d'universalité conduit au système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{\beta} \lambda^\beta (\tilde{C}_{\alpha\beta} + D_{\alpha\beta}) = \tilde{C}_{0\alpha} + \mu_0 + \mu_1 x_\alpha + \mu_2 y_\alpha \quad \alpha = 1, 2, \dots, n \\ \sum_{\alpha} \lambda^\alpha = 1 \\ \sum_{\alpha} \lambda^\alpha x_\alpha = x_0 \\ \sum_{\alpha} \lambda^\alpha y_\alpha = y_0 \end{array} \right.$$

La variance d'estimation est alors :

$$\text{Var}[\tilde{z}^x - z_0] = C(0) - \sum_{\alpha} \lambda^\alpha \tilde{C}_{0\alpha} + \mu_0 + \mu_1 x_0 + \mu_2 y_0$$

Restent à expliciter la forme analytique des covariances régularisées  $\tilde{C}_{\alpha\beta}$  et  $\tilde{C}_{0\alpha}$  et les covariances des erreurs de localisation intervenant dans le calcul des termes  $D_{\alpha\beta}$ . Pour cela, on doit préciser les lois des erreurs de localisation. Plus précisément, nous avons besoin de la loi de l'erreur de localisation d'une sonde, et de la loi de la différence d'erreur de position entre deux sondes. C'est donc par là que nous allons commencer.

### C - Hypothèses concernant les lois des erreurs de localisation

Conformément aux indications du Service Hydrographique et Océanographique de la Marine, les hypothèses suivantes ont été avancées :

- l'incertitude de localisation d'une sonde peut être assimilée à une variable vectorielle gaussienne isotrope de moyenne nulle et d'écart-type circulaire  $\sigma_0$  égal à environ 5 km (sauf pour les sondes de l'Amiral MOUCHEZ, pour lesquelles  $\sigma_0$  est de 70 m seulement). L'erreur  $(u_\alpha, v_\alpha)$  suit donc une loi gaussienne telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} E[u_{\alpha}^2] = E[v_{\alpha}^2] = \sigma^2 \\ E[u_{\alpha} v_{\alpha}] = 0 \end{array} \right. \quad (\text{avec } \sigma^2 = \frac{\sigma_0^2}{2})$$

- Les erreurs de localisation entre sondes de lignes différentes sont indépendantes. La loi de la différence des erreurs  $(u_{\beta}-u_{\alpha}, v_{\beta}-v_{\alpha})$  entre deux telles sondes est donc une loi gaussienne isotrope de variance égale à la somme des variances associées à chaque sonde.

- La différence des erreurs de localisation entre deux sondes d'une même ligne suit la loi d'une variable vectorielle gaussienne isotrope de moyenne nulle et d'écart-type proportionnel à la distance entre les deux sondes (du moins pour des distances inférieures à quelques dizaines de kilomètres). On a donc aux petites distances :

$$E[(u_{\beta}-u_{\alpha})^2] = \frac{\sigma^2}{p^2} h_{\alpha\beta}^2 \quad \text{avec } h_{\alpha\beta}^2 = (x_{\beta}-x_{\alpha})^2 + (y_{\beta}-y_{\alpha})^2$$

Le facteur de proportionnalité  $p$ , analogue à une portée, est évalué à 50 km.

Aux grandes distances par contre,  $u_{\alpha}$  et  $u_{\beta}$  sont indépendants, et alors :

$$E[(u_{\beta}-u_{\alpha})^2] = 2 \sigma^2$$

Comme  $E[(u_{\beta}-u_{\alpha})^2]$ , pris comme fonction de la distance  $h_{\alpha\beta}$ , est un variogramme, on prend finalement comme forme analytique, valable quelle que soit la distance entre les deux sondes :

$$E[(u_{\beta}-u_{\alpha})^2] = 2 \sigma^2 \left(1 - e^{-\frac{h_{\alpha\beta}^2}{2p^2}}\right)$$

Il en est évidemment de même pour  $v_{\beta}-v_{\alpha}$ . La différence d'erreur de localisation entre deux sondes d'un même profil est donc caractérisée par :

$$E[(u_{\beta}-u_{\alpha})^2] = E[(v_{\beta}-v_{\alpha})^2] = 2 \sigma^2 \left(1 - e^{-\frac{h_{\alpha\beta}^2}{2p^2}}\right)$$

$$E[(u_{\beta}-u_{\alpha})(v_{\beta}-v_{\alpha})] = 0$$

D - Calcul des termes  $D_{\alpha\beta}$

Les termes  $D_{\alpha\beta}$  font intervenir les covariances des erreurs  $(u_\alpha, v_\alpha)$  et  $(u_\beta, v_\beta)$ . D'après ce qui précède, deux cas sont à distinguer :

- si les deux sondes appartiennent à deux lignes différentes, les covariances intervenant dans  $D_{\alpha\beta}$  sont nulles et  $D_{\alpha\beta} = 0$ .

- si les deux sondes appartiennent à la même ligne, on déduit de ce qui précède que :

$$E[u_\alpha u_\beta] = E[v_\alpha v_\beta] = \sigma^2 e^{-\frac{h_{\alpha\beta}^2}{2p^2}}$$

$$E[u_\alpha v_\beta + v_\alpha u_\beta] = 0$$

Ainsi donc :

$$-\frac{h_{\alpha\beta}^2}{2p^2}$$

$$D_{\alpha\beta} = \begin{cases} a^{x^2} \sigma^2 e^{-\frac{h_{\alpha\beta}^2}{2p^2}} & \text{si les sondes } \alpha \text{ et } \beta \text{ appartiennent à la même ligne} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où  $a^x$  désigne la valeur approchée de la pente de la dérive ( $a^{x^2} = a_1^{x^2} + a_2^{x^2}$ ), et  $h_{\alpha\beta}$  la distance entre les deux points.

E - Forme analytique des covariances ou variogrammes régularisés

Les covariances  $\tilde{C}_{\alpha\alpha}$  sont des régularisées de la covariance  $C(h)$  par la densité de la loi de l'erreur de localisation de la sonde  $\alpha$ . De même les covariances  $\tilde{C}_{\alpha\beta}$  se ramènent à des régularisations par la densité de la loi de la différence des erreurs de position des sondes  $\alpha$  et  $\beta$ . Dans tous les cas, on est donc conduit ici à régulariser  $C(h)$  par la densité d'une loi vectorielle gaussienne isotrope caractérisée par l'écart-type  $\sigma$  commun à chaque composante ( $\sigma^2$  représente ici, soit  $E[u_\alpha^2]$  ou  $E[v_\alpha^2]$  pour  $\tilde{C}_{\alpha\alpha}$ , soit

$$E[(u_\beta - u_\alpha)^2] \text{ ou } E[(v_\beta - v_\alpha)^2] \text{ pour } \tilde{C}_{\alpha\beta}$$

Pour un schéma  $C(h)$  isotrope, la covariance régularisée  $\tilde{C}(h)$  reste isotrope. On peut donc la calculer par exemple dans la direction  $Ox$ . On a alors :

$$\tilde{C}(h) = \iint C(\sqrt{(h+u)^2 + v^2}) p(u,v) du dv$$

avec ici

$$p(u,v) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{u^2+v^2}{2\sigma^2}}$$

En passant en coordonnées polaires, on obtient :

$$\tilde{C}(h) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} C(\sqrt{(h+\rho\cos\theta)^2 + (\rho\sin\theta)^2}) e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}} \rho d\rho d\theta$$

Cas d'un variogramme linéaire

Rappelons que si l'on utilise le variogramme  $\gamma(h)$  au lieu de la covariance  $C(h)$ , les résultats sont les mêmes à condition de remplacer  $C(h)$  par  $-\gamma(h)$ . Nous verrons que, dans cette étude, on obtient des ajustements à des variogrammes linéaires. Pour  $\gamma(h) = h$  on a alors :

$$\tilde{\gamma}(h) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \sqrt{(h+\rho\cos\theta)^2 + (\rho\sin\theta)^2} e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}} \rho d\rho d\theta$$

On en déduit les développements limités suivants :

- à l'origine :  $\tilde{\gamma}(h) \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma (1 + \frac{h^2}{4\sigma^2})$
- à l'infini :  $\tilde{\gamma}(h) \simeq h(1 + \frac{\sigma^2}{2h^2})$

Pour obtenir une définition complète de  $\tilde{\gamma}(h)$ , on raccorde les deux développements par leur tangente commune. On a alors :

$$\tilde{\gamma}(h) \simeq \begin{cases} 1.253\sigma(1 + \frac{h^2}{4\sigma^2}) & \text{si } 0 \leq h \leq 0.486 \sigma \\ 1.327\sigma + 0.305 (h-0.486\sigma) & \text{si } 0.486\sigma \leq h \leq 0.848\sigma \\ h(1 + \frac{\sigma^2}{2h^2}) & \text{si } h \geq 0.848\sigma \end{cases}$$

La figure 6 montre la courbe obtenue ; le raccordement des deux extrémités est excellent. On observe que l'erreur de localisation se traduit notamment par un effet de pépité apparent

$$\tilde{\gamma}(0) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma \simeq 1.25\sigma.$$

Si le demi-variogramme  $\gamma(h)$  n'est pas de pente 1, mais de pente  $\bar{\omega}$ , il faut évidemment multiplier tous ces résultats par  $\bar{\omega}$ .

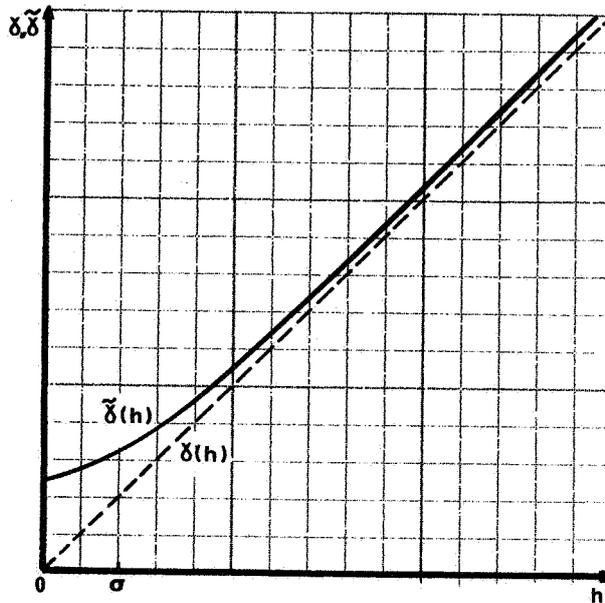


Fig.6 - Schéma linéaire  $\gamma(h)$  et schéma régularisé  $\tilde{\gamma}(h)$

### 3 - ANALYSE STRUCTURALE

On dispose d'environ 16300 données sur une zone d'environ 50 degrés carrés (cf. fig.7). Compte tenu de l'étendue et de l'hétérogénéité du domaine étudié, une analyse structurale globale n'aurait aucune signification. C'est pourquoi on a dû étudier la carte sur des zones plus petites, qui contiennent cependant suffisamment de données pour permettre une estimation correcte de la fonction de structure. Ceci a conduit à un découpage de la carte en une cinquantaine de zones d'un degré de longitude sur un degré de latitude, et à une analyse structurale zone par zone. Mais ici l'analyse structurale est compliquée par la présence de l'incertitude de localisation.

#### A - Influence de l'incertitude de localisation

Du fait de cette incertitude, deux cas sont à considérer :

a) lorsqu'interviennent deux sondes d'un même profil dans le calcul de  $\gamma(h)$ , l'incertitude sur le vecteur  $h$  est faible, et en tout cas négligeable par rapport au vecteur  $h$  lui-même.

Par suite en ne prenant que des couples d'un même profil, on obtient une estimation assez bonne de  $\gamma(h)$ .

Cependant, le nombre de tels couples n'est pas très élevé, et surtout, les profils sont souvent orientés dans une direction préférentielle.

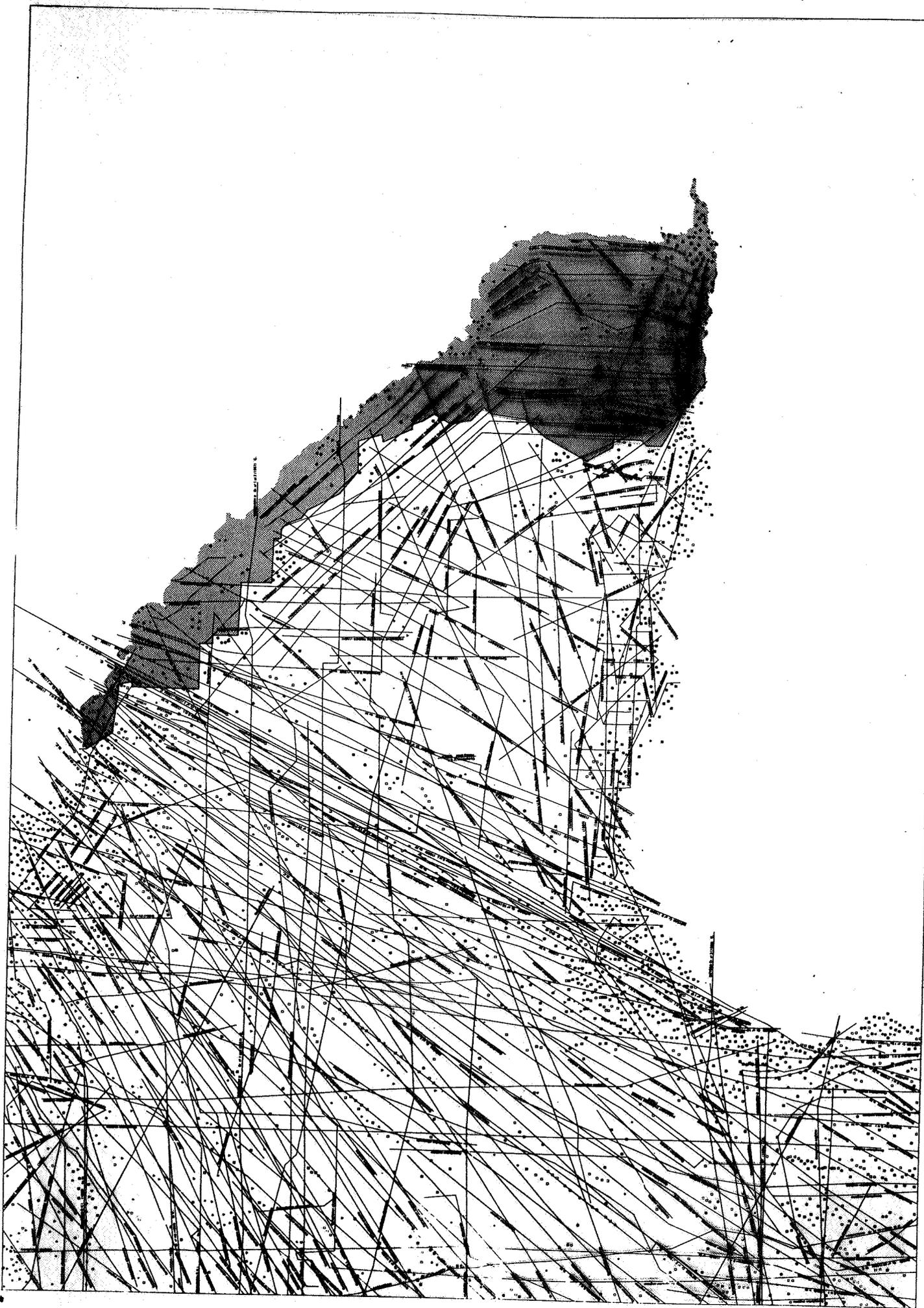


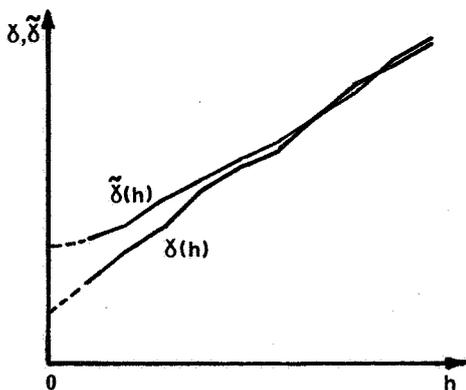
Fig. 7 - Minute GEBCO 43 (réduction).

■ zone couverte par les sondes de l'Amiral Mouchez

De ce fait, certains variogrammes ne sont pas très bien connus, et il faut tenir compte du reste de l'information.

b) Mais alors, quand deux sondes appartiennent à des lignes différentes, les incertitudes de localisation des deux sondes sont indépendantes; on estime alors le variogramme régularisé avec un écart-type  $\sigma$  de l'ordre de 5 Km, ce qui n'est pas négligeable ; cette régularisation se traduit notamment, on l'a vu, par un effet de pépite apparent.

Par conséquent il vaut mieux se garder de mélanger les données : sur chaque zone, on obtient ainsi deux variogrammes expérimentaux du type de ceux représentés ci-dessous :



$\gamma(h)$  : variogramme entre sondes d'un même profil  
 $\tilde{\gamma}(h)$  : variogramme entre sondes de profils différents

#### B - Etude de la dérive

Chaque variogramme a été calculé dans quatre directions, et jusqu'à une distance de 50 km. Dans la plupart des zones, la présence d'une dérive se manifeste par un comportement parabolique des variogrammes. Mais il y a toujours une ou deux directions où la dérive ne se fait pas sentir, ce qui a permis d'effectuer un ajustement direct à un modèle isotrope. En ce qui concerne l'allure locale de la dérive, c'est-à-dire au niveau d'un voisinage d'une douzaine de points, un comportement linéaire suffit à la représenter.

#### C - Etude de la précision de la localisation

Dans certaines zones où les courbes expérimentales  $\gamma(h)$  et  $\tilde{\gamma}(h)$  se raccordent très bien aux grandes distances, on a pu déterminer l'écart-type  $\sigma$  qui permet le meilleur ajustement simultané des deux courbes expérimentales aux courbes théoriques.

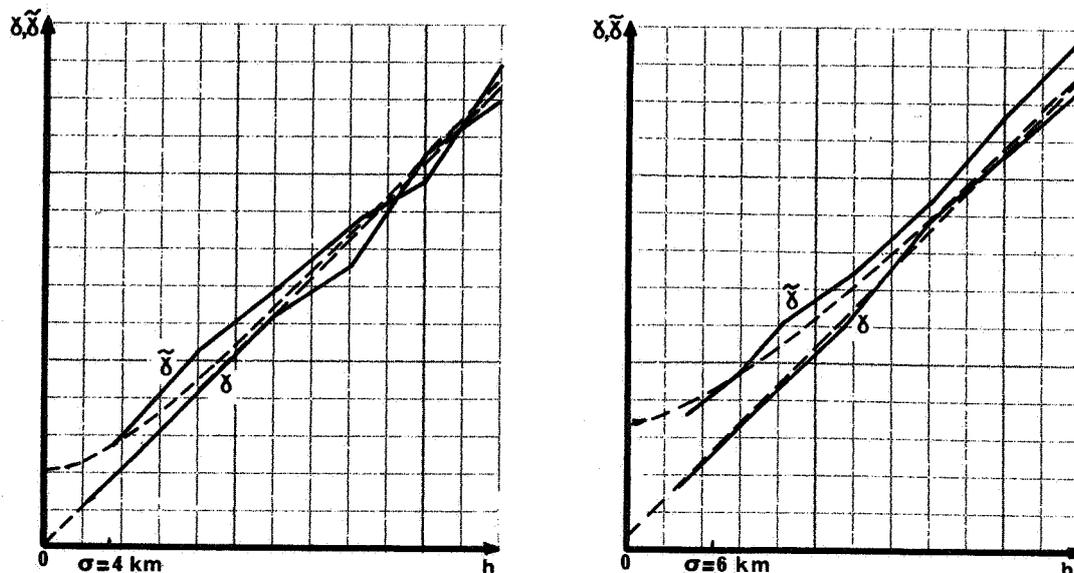


Fig. 8 - Exemples d'ajustement simultané de  $\tilde{\gamma}(h)$ ,  $\gamma(h)$  et  $\sigma$ .

La figure 8 montre des exemples de tels ajustements simultanés. On a trouvé des valeurs de  $\sigma$  allant de 3 à 8 km, la moyenne se situant à 5 km. Ceci correspond justement à la précision avancée par le Service Hydrographique et Océanographique de la Marine. C'est donc cette valeur qui a été retenue (rappelons que  $\sigma^2$  est la variance de la différence  $u_\beta - u_\alpha$  ou  $v_\beta - v_\alpha$  sur une composante ; c'est donc la somme des variances de  $u_\alpha$  et  $u_\beta$ , ou de  $u_\alpha$  et  $v_\alpha$  puisqu'elles sont toutes égales, du moins pour des profils positionnés avec la même précision ; c'est donc également la variance circulaire  $\sigma_0^2$  de l'erreur de localisation d'une sonde).

Sur quelques zones, dont la figure 9 est un exemple caractéristique, les deux courbes  $\gamma(h)$  et  $\tilde{\gamma}(h)$  sont par contre confondues. Cela correspond justement aux zones où se trouvent les sondes de l'Amiral MOUCHEZ, très bien localisées, puisque l'écart-type circulaire  $\sigma_0$  y est évalué à 70 m.

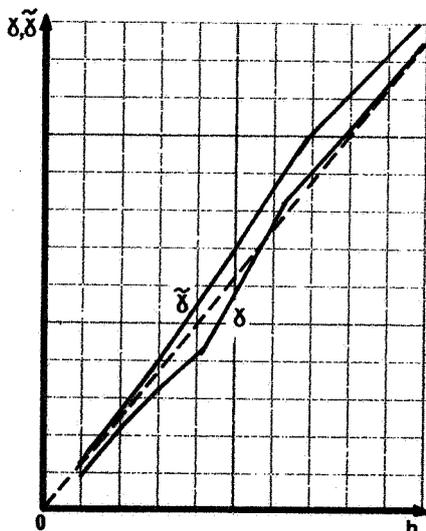


Fig. 9 - Exemple de courbes  $\gamma(h)$  et  $\tilde{\gamma}(h)$  correspondant à des données localisées avec une bonne précision

D - Etude de l'erreur de mesure de la profondeur

La mesure de la profondeur est elle aussi entachée d'erreur. On peut admettre que cette erreur est à peu près la même le long d'un profil, mais que les erreurs affectant deux lignes différentes sont indépendantes. Ceci se traduit par un effet de pépité supplémentaire qui affecte seulement le variogramme régularisé  $\tilde{\gamma}(h)$ . Dans la plupart des zones, la structure du fond présente des irrégularités d'amplitude bien plus grande que cette erreur, et cet effet de pépité n'est pas perceptible. Mais par contre dans les zones presque plates du centre, le décalage entre les deux courbes  $\gamma(h)$  et  $\tilde{\gamma}(h)$  est net. La figure 10 montre le cas du carreau qui va de  $45^\circ$  à  $46^\circ$  en latitude et  $6^\circ$  à  $7^\circ$  en longitude, où la profondeur est partout de 4800 m environ. L'effet de pépité dû à l'erreur de mesure  $y$  est égal à  $900 \text{ m}^2$  environ. Pour les autres zones, on fait l'hypothèse que l'écart-type de l'erreur est proportionnel à la profondeur ; le résultat précédent aboutit à prendre un écart-type égal à 0.6 % de la profondeur.

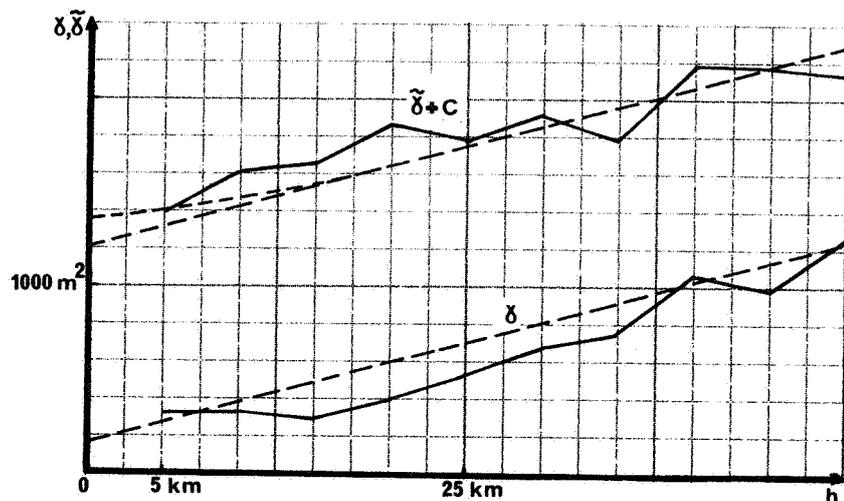


Fig.10 - Mise en évidence de l'effet de pépité C dû à l'erreur de mesure de la profondeur.

E - Caractéristiques structurales des différentes zones

Le variogramme sous-jacent peut toujours se ramener à un schéma linéaire avec effet de pépité. La composante linéaire correspond à une variable continue, mais assez irrégulière. L'effet de pépité est souvent nul ou négligeable, mais dans certains cas, il est important ; il correspond alors à une structure de faible portée.

La nécessité d'une analyse par zone se trouve confirmée par la variation importante des résultats d'une zone à l'autre. L'opposition entre les zones proches de la côte, pleines d'irrégularités, et les zones plutôt plates, au centre de la minute, se manifeste bien sûr nettement. La pente de la composante linéaire varie de 20 à 24.000 m<sup>2</sup>/km (20 à 500 dans les zones plates, 12.000 à 24.000 dans les zones côtières). L'effet de pépité varie de 0 à 25.000 m<sup>2</sup>, ce qui correspond à un écart-type variant de 0 à 160 m. Et les grandes valeurs de l'effet de pépité sont associées à de grandes valeurs de la pente.

#### 4 - CARTOGRAPHIE DE L'ENSEMBLE DE LA MINUTE ET DE SA PRECISION

Le krigeage a été effectué par un programme spécialement adapté au problème. On constate que la carte d'estimation obtenue (figure 11) lisse parfois considérablement les extrêmes locaux : ceci est dû à l'incertitude de localisation, qui conduit à l'attribution d'un poids non négligeable aux données éloignées.

Près des côtes, la carte est arrêtée à l'isoligne 400 m, car les minutes GEBCO ne traitent pas les zones côtières et ne comprennent que les sondes supérieures à 200 m (sauf accident local).

Pour ce qui est de l'écart-type (figure 12), précisons qu'il n'est pas connu avec une très grande précision. D'une part parce que les variogrammes expérimentaux ne sont pas toujours de très bonne qualité, en particulier à cause de données erronées. D'autre part parce que, dans le calcul de la variance, on a dû substituer l'estimation  $a^x$  de la pente de la dérive à sa valeur réelle. De plus, on est certain, du fait de la présence de hauts fonds, que l'erreur de krigeage n'est pas gaussienne. Néanmoins la carte de l'écart-type donne une bonne indication de la précision de la carte bathymétrique.

Comme le laissait prévoir l'hétérogénéité de structure de la variable sur un domaine aussi vaste, les variations spatiales de l'écart-type sont importantes : il varie de 25 à 200 m. Les fortes valeurs (300 à 400 m) correspondent à un manque de données, auquel s'ajoute, près des côtes, la présence d'une dérive importante.

Sur la partie droite de la carte, les petites fluctuations de l'écart-type correspondent à la présence des sondes de l'Amiral MOUCHEZ : la faible incertitude sur leur localisation fait qu'il ne se produit pas de lissage. L'écart-type passe par un minimum bien marqué au voisinage de chaque point expérimental.

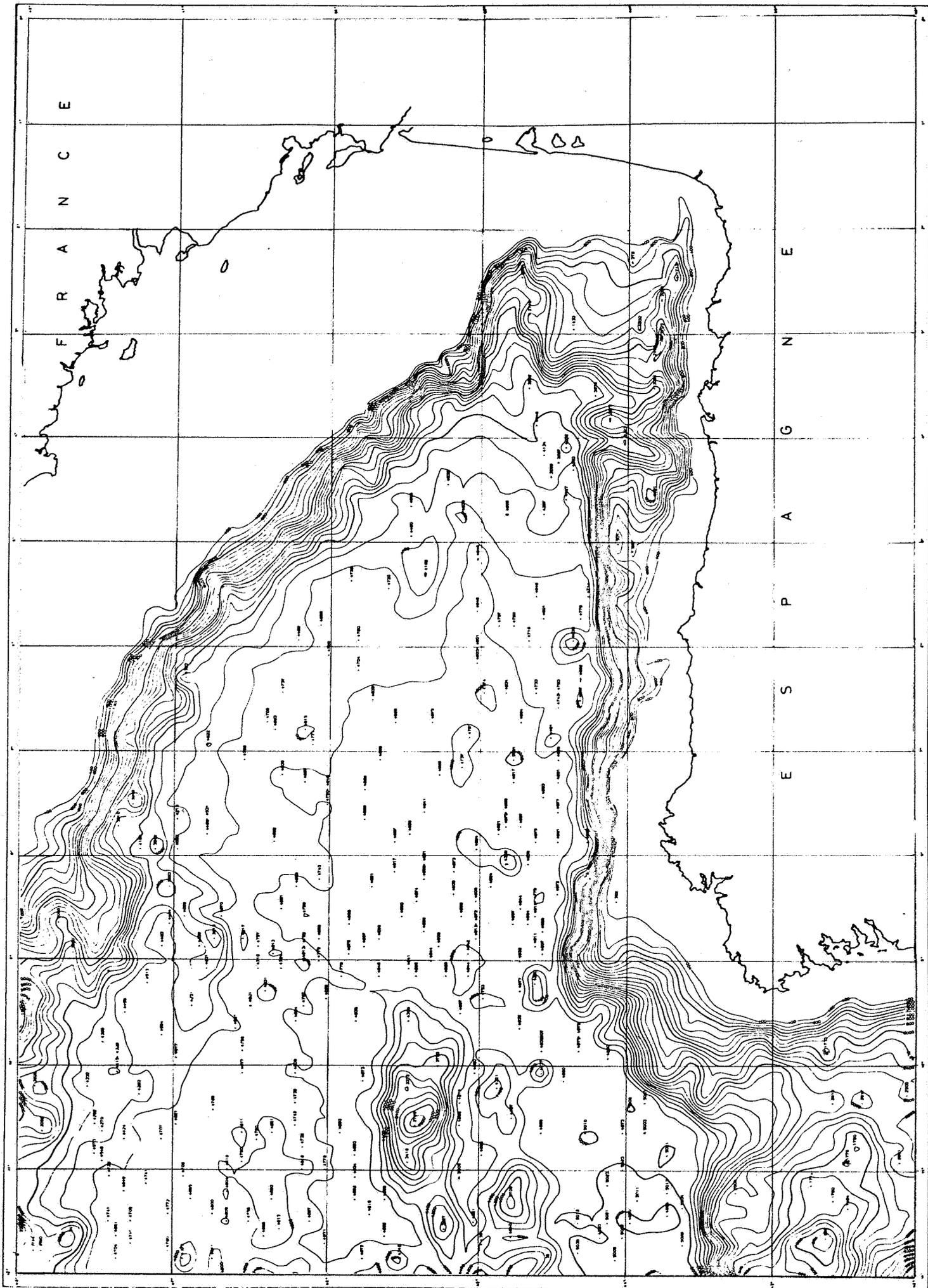


Fig. 11 - Carte GEBCO 43 (réduction) : estimation optimale de la profondeur ; espacement des isobathes : 200 m.

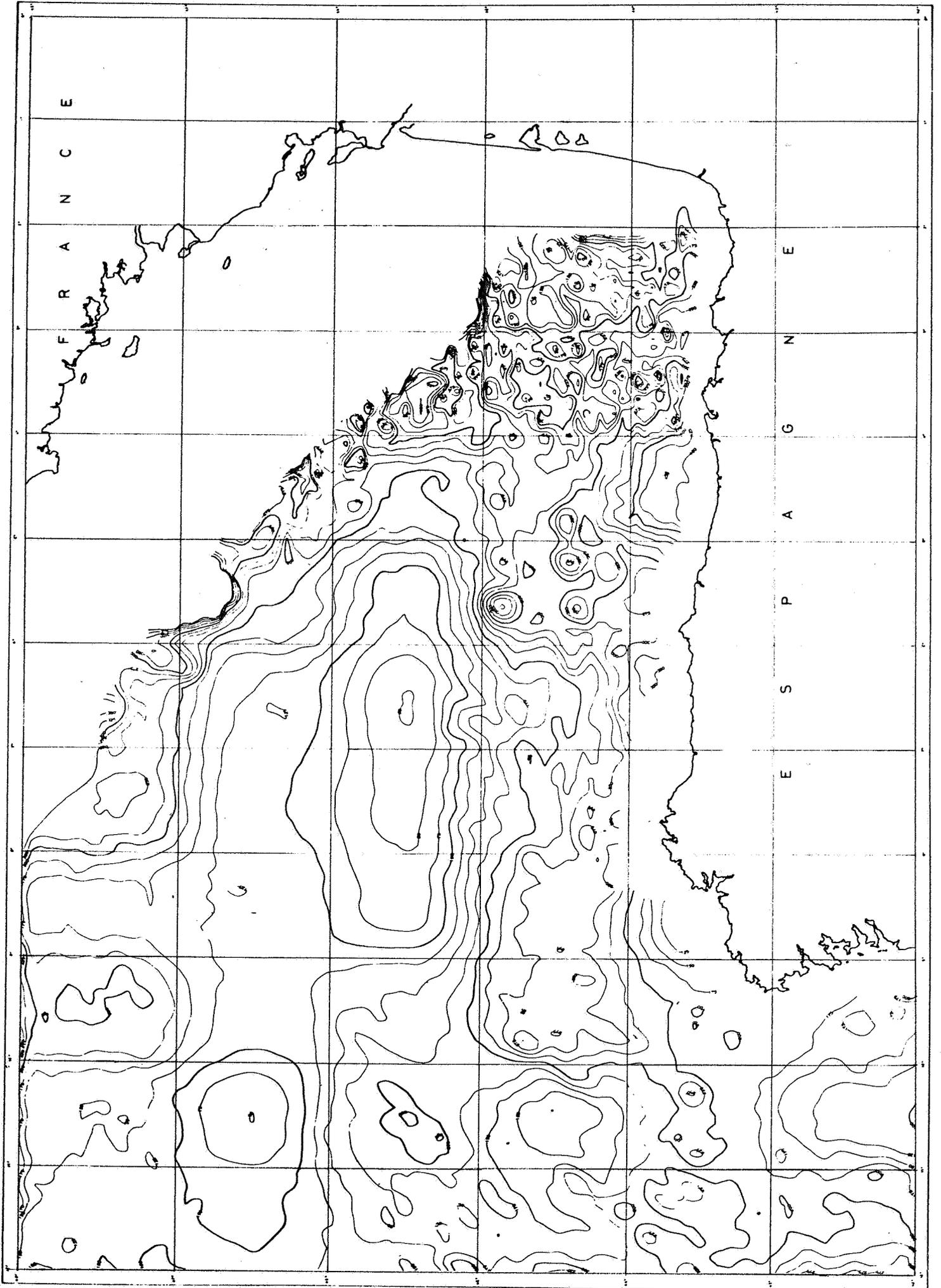


Fig. 12 - Carte GEBCO 43 (réduction) : écart-type d'estimation ; espacement des isolignes : 25 m.

## 5 - ETUDE DE LA PRECISION OBTENUE A PARTIR DE NOUVEAUX LEVES

La carte étant connue avec une précision qui n'est généralement pas très bonne, il serait utile de faire de nouveaux levés mieux localisés. Mais comme ceux-ci sont coûteux, il est intéressant de déterminer préalablement la densité de profils nécessaire à l'obtention d'une précision donnée, ou, ce qui revient au même, la précision obtenue à densité de profils fixée. Dans le cadre de la théorie du krigeage, c'est la seconde approche qui est la plus commode : il suffit de se donner les positions des nouvelles données ; en effet la variance d'estimation dépend de la répartition spatiale des différents points, mais pas des valeurs mesurées (celles-ci n'interviennent que dans l'estimation). On peut donc calculer les variances d'estimation correspondant à différents levés et déterminer ainsi le minimum de travaux nécessaire si l'on veut obtenir une certaine précision. En ce qui concerne les nouveaux levés, on peut a priori envisager plusieurs possibilités :

- un seul réseau de lignes toutes parallèles ou deux réseaux orthogonaux,
- divers espacements des lignes de sonde,
- prise en compte seulement des nouvelles données, ou également des données actuelles.

Si on veut éviter des calculs inutiles, il faut donc commencer par quelques études préliminaires qui permettent de déterminer les types de travaux intéressants.

### A - Hypothèses concernant l'incertitude de localisation des nouveaux levés

On suppose que ces travaux seront effectués par des bâtiments qui se positionnent par récepteur de navigation par satellite : la position est connue à 250 mètres près à chaque passage du satellite, soit toutes les 90 minutes environ, et on peut admettre qu'il n'y a pas de corrélation entre les erreurs de position à deux passages successifs du satellite. Sur des données réelles, on pourrait prendre en compte une incertitude de localisation dépendant du temps écoulé depuis le dernier passage du satellite. Ici on a pris une précision moyenne, correspondant à un écart-type circulaire de 500 m, et à une absence de corrélation au bout d'une trentaine de kilomètres.

## B - Etude de la discrétisation des profils

Les lignes de sonde sont pratiquement connues en continu. Une discrétisation à maille très serrée a donc deux avantages :

- elle permet une très bonne estimation du comportement du variogramme à l'origine, ce qui est souvent d'une grande importance pour la qualité des estimateurs de krigeage.

- elle permet une bonne estimation le long des profils.

Mais par contre, lorsqu'on cherche à estimer un point qui se trouve entre deux profils, il faut, ou bien mettre en oeuvre une sélection complexe des points du voisinage à faire intervenir, ou bien résoudre un système d'équations énorme ; et ceci, pour une précision à peine meilleure que celle qui résulterait d'une discrétisation assez lâche. Au niveau de cette étude, c'est surtout la valeur de l'écart-type pour des points situés entre les nouveaux profils qui nous intéresse : on ne connaît pas encore les valeurs de la profondeur qui permettraient d'affiner le variogramme, et on sait bien qu'au voisinage immédiat des sondes, la précision sera bonne. On a donc recherché la discrétisation qui permette d'avoir une bonne précision entre les profils avec des voisinages de 12 à 16 points. Des essais ont montré qu'avec les schémas de variogrammes ajustés ici, on obtenait des résultats voisins de l'optimum en discrétisant les profils à une maille égale au tiers de la distance entre deux profils. C'est donc ce qui a été retenu.

## C - Un seul réseau de lignes de sonde ou deux réseaux orthogonaux ?

On a calculé l'écart-type d'estimation obtenu au centre de configurations de 16 points correspondant à un ou deux réseaux de profils espacés de 1 à 20 km. On a traité deux hypothèses en ce qui concerne la structure, définie ici par l'effet de pépité  $C_0$ , la pente  $\bar{\omega}$  du variogramme linéaire et la pente  $a$  de la dérive :

$$- C_0 = 0 \quad \bar{\omega} = 1 \quad a^2 = 0$$

$$- C_0 = 0 \quad \bar{\omega} = 1 \quad a^2 = 1$$

(Le rapport  $a^2/\omega$  atteint presque 1 dans les zones proches des côtes, mais ne dépasse jamais 1 ; l'effet de pépité est pris nul, car on sait qu'en cas d'effet de pépité pur, la localisation précise des données a peu d'intérêt).

Rappelons qu'on fait ici l'hypothèse que l'erreur de localisation a un écart-type circulaire de 500 m.

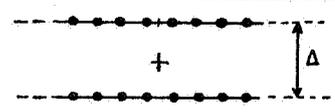
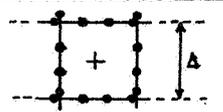
$\Delta$			
20 Km	$\frac{a}{b}$	3.04 3.05	2.78 2.78
10 Km	$\frac{a}{b}$	2.15 2.16	1.97 1.97
5 Km	$\frac{a}{b}$	1.53 1.55	1.40 1.41
2 Km	$\frac{a}{b}$	1.00 1.03	0.91 0.93
1 Km	$\frac{a}{b}$	0.79 0.83	0.71 0.73

Fig.13 - Ecart-type au centre de la configuration

- a - pour  $C_0 = 0$   $\bar{\omega} = 1$   $a^2 = 0$
- b - pour  $C_0 = 0$   $\bar{\omega} = 1$   $a^2 = 1$

La figure 13 présente les résultats obtenus. On observe que dans tous les cas, si on raisonne à somme des longueurs des profils fixée, mieux vaut faire un seul réseau de lignes que deux réseaux orthogonaux ; par exemple un réseau de profils espacés de 5 km donne une meilleure précision que deux réseaux orthogonaux de lignes espacées de 10 km: le gain obtenu en divisant par deux l'écartement des profils est appréciable (environ 30 %), alors qu'en ajoutant un réseau orthogonal à un réseau simple, l'écart-type diminue au plus de 10 %. Il va de soi que si l'équidistance des lignes du réseau orthogonal était plus grande, la longueur des profils ajoutés serait plus faible, mais le gain de précision au centre de la configuration serait de beaucoup moins que 10 %. Donc pour une méthode d'estimation comme celle qui est utilisée ici, où on mêle l'incertitude de localisation et l'erreur d'interpolation entre les données, on se limitera à considérer le cas des lignes de sondes toutes parallèles.

Il faut noter que pour un traitement des données différent, on pourrait aboutir à une conclusion différente. Ainsi si on cherchait à recalculer les profils en position, il est évident qu'il serait utile de disposer d'un réseau orthogonal, probablement moins dense que le réseau principal ; il se poserait d'ailleurs le problème de la détermination de l'espacement optimum des lignes du réseau secondaire.

D - Précision obtenue à l'aide des nouvelles données uniquement

Nous nous sommes donc limités à un seul réseau de lignes de sondes toutes parallèles, et nous avons cartographié l'écart-type obtenu pour différents espacements des nouvelles lignes de sonde : 20, 10, 5, 2 et 1 km. Comme la maille de la grille de krigeage correspond à 5 km environ, on ne peut faire apparaître les fluctuations locales de l'écart-type correspondant à la position du point considéré par rapport aux profils voisins (du moins pour les écartements de 5, 2 ou 1 km). On a donc cartographié l'écart-type maximum, c'est-à-dire l'écart-type d'un point qui serait toujours entre deux profils (en pratique, on n'a pas fixé les profils, mais on a déplacé la configuration de krigeage sur chaque point à estimer). De plus, on a limité ici l'étude aux neufs carreaux qui s'étendent de 5° W à 8° W en longitude et 44° N à 47° N en latitude, et qui sont représentatifs de l'ensemble de la minute, tant pour la densité des données que pour la variabilité de la structure du fond océanique. La figure 15 reprend la carte krigée et la carte de l'écart-type dans cette zone. Les cartes de la figure 16 présentent l'écart-type maximum pour les différentes hypothèses d'espacement des profils. Pour synthétiser les résultats, on a calculé le minimum, le maximum et la moyenne du gain d'écart-type quand on passe d'une hypothèse d'écartement des lignes à la suivante (figure 14).

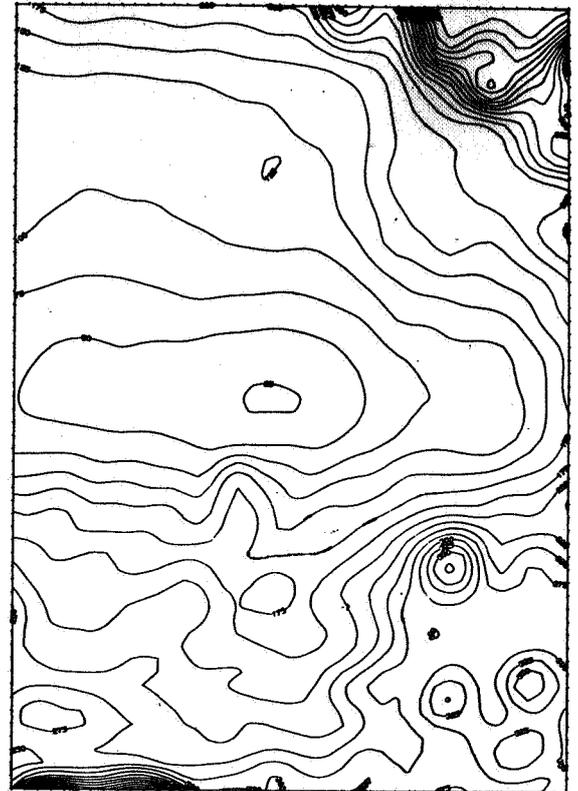
$\Delta_1$	$\Delta_2$	$(\sigma_1 - \sigma_2) / \sigma_1$		
		minimum	maximum	moyenne
20 Km	10 Km	2.7 %	29.2 %	21.3 %
10 Km	5 Km	1.4 %	28.9 %	18.9 %
5 Km	2 Km	0.8 %	34.4 %	19.9 %
2 Km	1 Km	0.3 %	21.1 %	10.7 %

Fig.14 - Etude de la diminution  $\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1}$  de l'écart-type quand on passe de l'espacement  $\Delta_1$  à l'espacement  $\Delta_2$ .

Les zones où le gain est faible correspondent à un effet de pépité fort. Si on y fait de nouveaux travaux, cet effet de pépité sera transformé, au moins en partie, en une composante de faible portée (moins de 5 km, cette distance correspondant à la densité actuelle des sondes) ; les écarts-types qui seront alors obtenus seront évidemment plus faibles.



estimation



écart-type

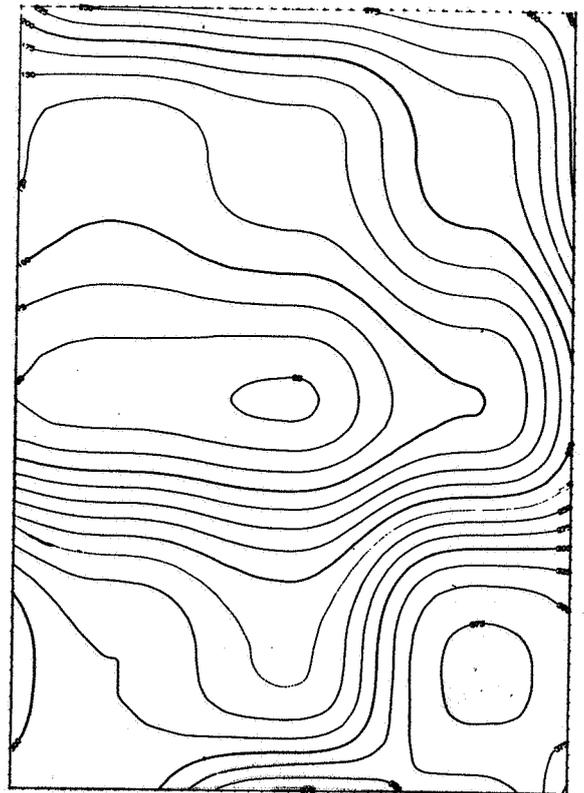
*Ci-dessus :*

*Fig.15 - Cartes de l'estimation et de l'écart-type d'estimation dans la zone 44°N - 47°N, 5°W - 8°W*

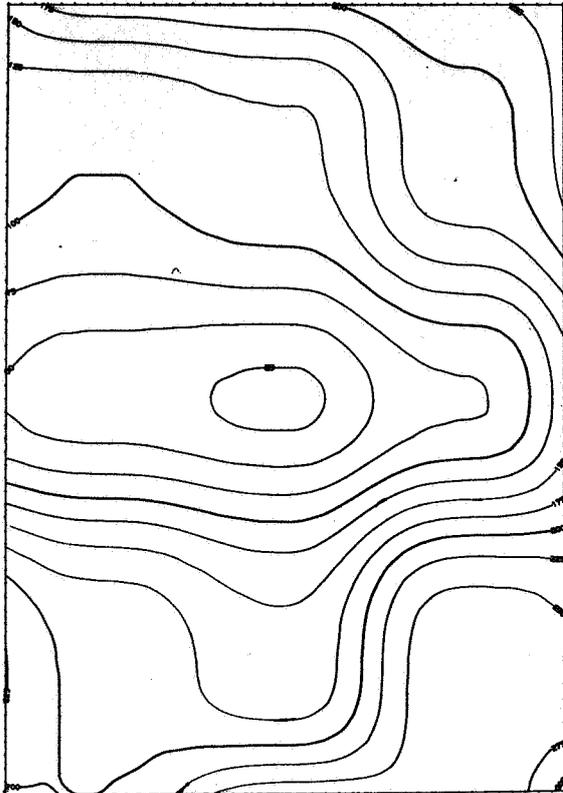
*Ci-contre et page suivante :*

*Fig.16 - Carte de l'écart-type maximum dans cette zone selon l'espacement  $\Delta$  des nouvelles lignes de sonde*

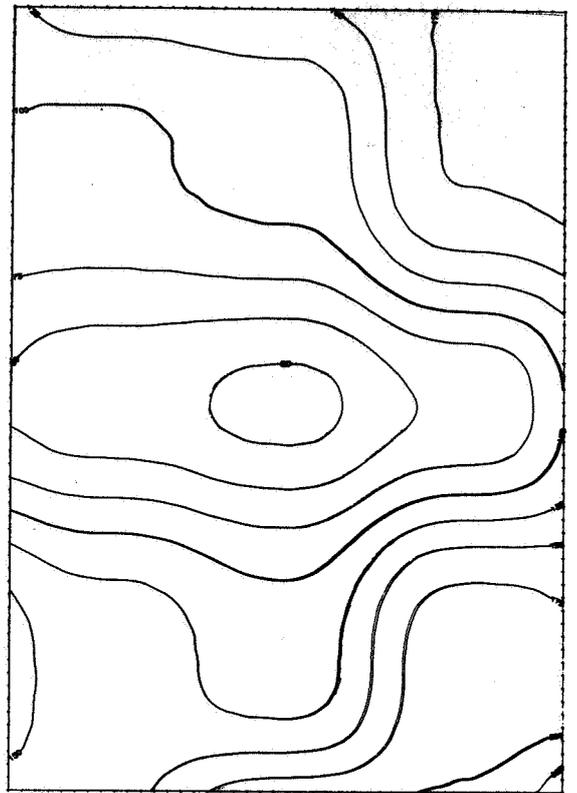
*(réductions)*



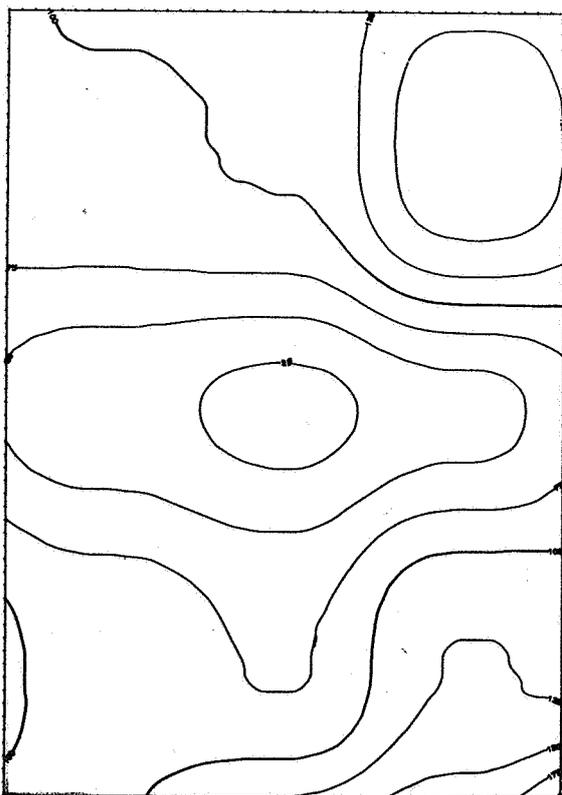
$\Delta = 20$  km.



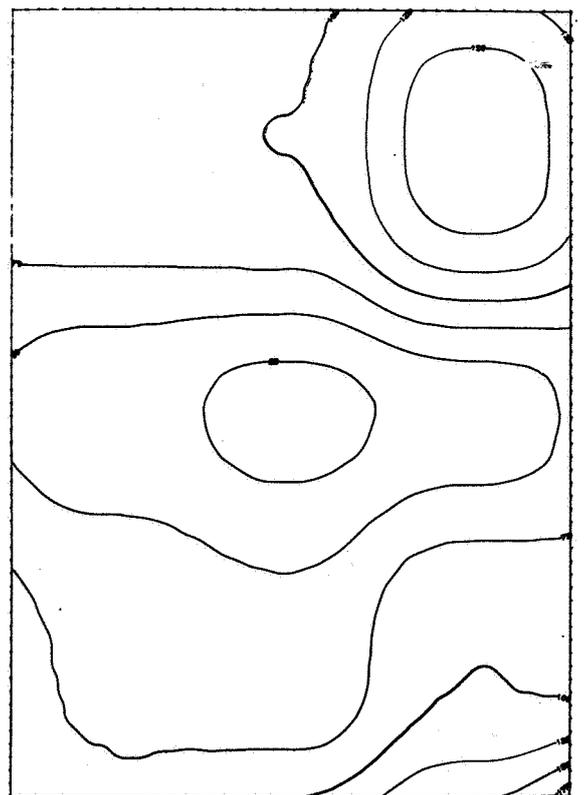
$\Delta = 10$  km.



$\Delta = 5$  km.



$\Delta = 2$  km.



$\Delta = 1$  km.

E - Faudra-t-il encore prendre en compte les données actuelles ?

Pour pouvoir comparer la précision obtenue avec ou sans les données actuelles, nous avons cette fois choisi un réseau bien fixé de lignes de sondes. Les résultats obtenus pour des espacements de 20 et de 10 km sont suffisants pour permettre de conclure. Nous avons encore synthétisé les résultats en étudiant les valeurs caractéristiques de la diminution de l'écart-type quand on passe d'un jeu de données à un autre (figure 17)

Jeu de données n° 1	Jeu de données n° 2	$(\sigma_1 - \sigma_2) / \sigma_1$		
		minimum	maximum	moyenne
R	R + R20	-18.5 %	67.7 %	8.3 %
R	R20	-52.7 %	67.6 %	1.5 %
R	R + R10	- 0.8 %	82.8 %	19.9 %
R	R10	-35.2 %	82.8 %	19.2 %
R20	R + R20	-67.1 %	38.7 %	6.0 %
R10	R + R10	-35.0 %	30.8 %	0.8 %
R20	R10	-29.6 %	68.5 %	16.4 %
R + R20	R + R10	-31.2 %	65.2 %	12.1 %

*Fig. 17 - Etude de la diminution  $\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1}$  de l'écart-type quand on passe d'un jeu de données à un autre (R : données actuelles ; R20 ou R10 : réseau de profils espacés de 20 ou 10 Km).*

Les minima négatifs tiennent à ce qu'on fait l'estimation à partir d'un voisinage d'une douzaine de points. Quand on superpose deux réseaux, le voisinage utilisé n'est donc pas la réunion des voisinages utilisés pour chaque réseau seul et peut alors, dans certains cas, conduire à des estimations moins précises. On aurait certes pu prendre la réunion des deux voisinages, mais ça n'aurait pas été très réaliste, car il est hors de question en pratique de travailler sur des voisinages de 24 points.

Ceci dit, on peut tirer de ce tableau les conclusions suivantes :

- pour un réseau de profils espacés de 10 Km, il est inutile de tenir compte des données actuelles (le gain moyen est inférieur à 1 %) ; même conclusion bien sûr si l'espacement est inférieur à 10 Km.

- pour un réseau de profils espacés de 20 Km, la prise en compte des données actuelles permet de diminuer l'écart-type de 6% en moyenne : si on tient compte que les données actuelles sont de qualités très disparates et qu'un certain nombre sont erronées, il est sans doute encore préférable de ne retenir que les nouvelles données.

- si on remplace les données actuelles par un réseau de profils, l'écart-type diminue en moyenne de 1,5 % pour un espacement de 20 km (soit une précision analogue) et de près de 20 % pour un espacement de 10 km.

- pour des raisons de sécurité cependant, il faudrait, au moins temporairement, conserver les anciennes données correspondant à des hauts fonds qui n'auraient pas été retrouvés sur les nouveaux profils ; comme ces anciennes données sont suspectes, on ne les utiliserait pas pour le tracé des isobathes, mais on pourrait les pointer sur la carte.

## 6 - PERSPECTIVES

La méthode développée est donc opérationnelle. Son automatisation poserait cependant des problèmes, surtout du fait de la présence de nombreuses données erronées (la phase d'analyse et de critique des données a été ici particulièrement longue).

Notons qu'on aurait pu mettre en oeuvre une autre méthode, - mais ce n'était pas l'objet de l'étude - qui consiste à recalculer les profils en position par une méthode de maximum de vraisemblance (cf. [33]) et à effectuer ensuite un krigeage classique sur les données recalculées considérées comme bien localisées. On obtiendrait ainsi une carte de fond qui ferait mieux apparaître les hauts fonds, et à laquelle seraient associées deux cartes d'écart-type, l'une donnant la précision avec laquelle est effectué le recalage des profils, l'autre donnant la précision de l'estimation de la profondeur. Une telle méthode ne donnerait peut être pas de résultats très intéressants sur ces données, car leur qualité est relativement médiocre et la discrétisation des profils est assez lâche. Elle serait par contre très utile pour le traitement de nouveaux levés, à condition cette fois d'adjoindre au réseau de lignes de sondes un réseau orthogonal, de plus faible densité, qui permette un bon calage.

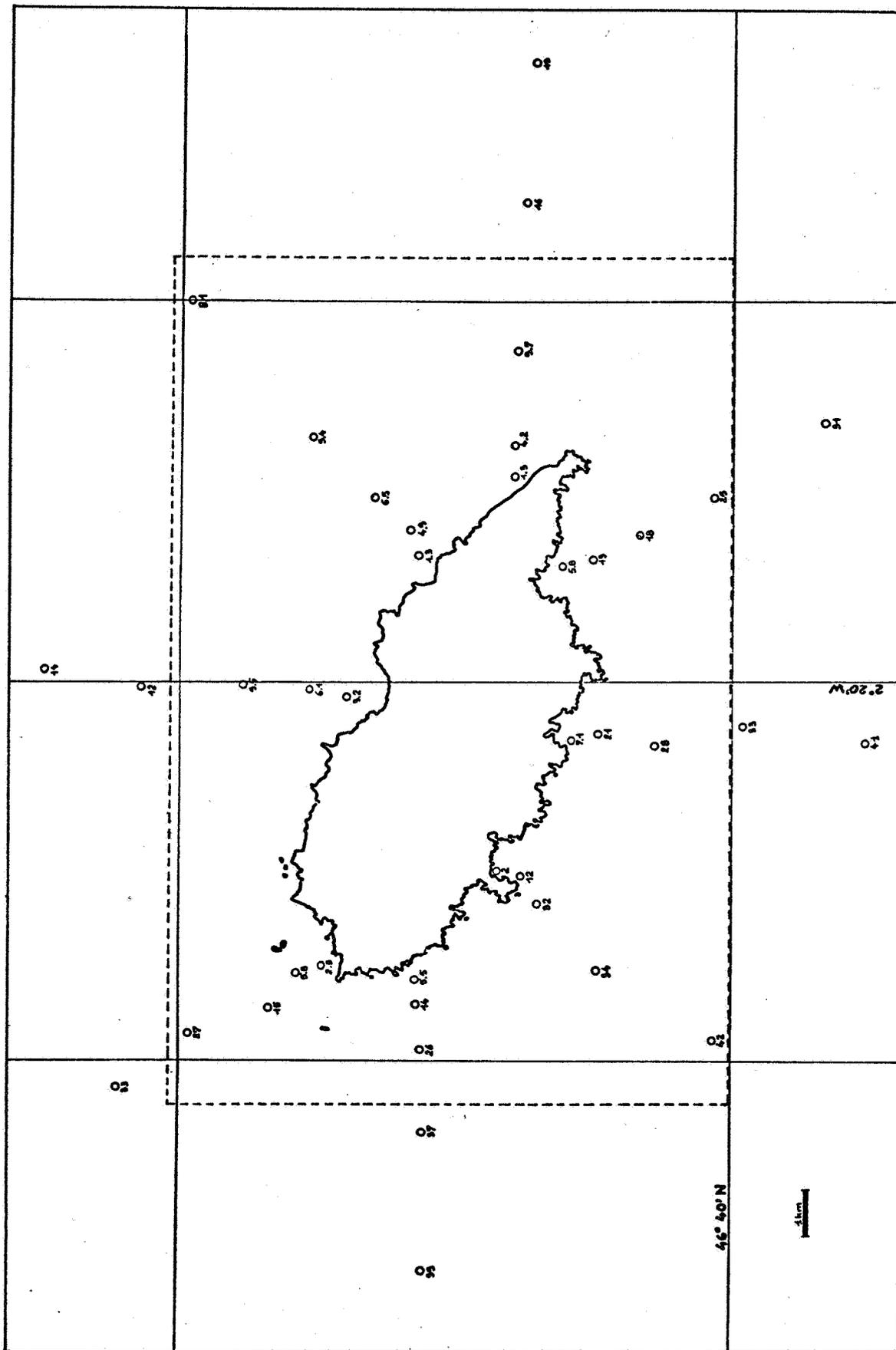


Fig.18 - L'île réelle et les 40 sondes retenues  
En pointillés; la grille de krigeage

CHAPITRE VIII - EXEMPLE 3 :  
SIMULATIONS CONDITIONNELLES. ETUDE D'UNE  
ILE A PARTIR DE SONDES EN MER

1 - CADRE DE L'ETUDE

Cet exemple a pour objet d'illustrer l'intérêt des simulations conditionnelles de FAI-k. Le problème peut paraître farfelu ; il faut le considérer comme un cas d'école (on trouvera en [14] une étude plus sérieuse, mais tout à fait analogue) : on suppose qu'on connaît le voisinage de l'île d'Yeu par une quarantaine de sondes situées sur 8 profils (cf. fig. 18), et qu'on n'a aucune autre information sur le relief. Les données étant toutes en mer, on se pose la question de savoir s'il peut y avoir une île ou non, et dans le cas affirmatif, on veut estimer sa surface et avoir une idée de sa forme possible.

Le krigeage permet de répondre à la question de l'existence de terres émergées. Soient  $Z^X(x)$  et  $\sigma(x)$  le krigeage et l'écart-type de krigeage en  $x$ . De l'examen des surfaces limites  $Z^X(x) + 2\sigma(x)$  et  $Z^X(x) - 2\sigma(x)$ , on peut conclure à la possibilité d'existence d'une île.

Par contre le krigeage ne fournira pas l'estimation de la surface de l'île. En effet, la quantité à estimer est :

$$S = \int_{R^2} 1_{\{Z(x) < 0\}} dx$$

Et on ne dispose pour l'estimer que des valeurs  $Z(x_\alpha)$  à l'emplacement des sondes. Il s'agit là d'un problème typiquement non linéaire. Si on prend pour estimateur la surface de l'île krigée, on risque donc de commettre un biais. La solution correcte de ce problème nécessite le recours à une méthode comme le krigeage disjonctif [32]. Mais son emploi exige la connaissance des lois à deux variables, ce qui ne peut se faire que moyennant une hypothèse de stationnarité assez stricte, qui n'est pas réalisée ici. Pour obtenir une solution approchée, on est alors amené à travailler sur des simulations conditionnelles, et à étudier la surface des îles des simulations. Si on construit suffisamment de simulations, on obtiendra ainsi un histogramme de la surface possible de l'île. Et en même temps, on verra quelles formes l'île éventuelle peut avoir.

Mais rappelons tout d'abord les grandes lignes de la théorie des simulations conditionnelles et de son application aux FAI-k dans le plan.

2 - LA THEORIE DES SIMULATIONS CONDITIONNELLES

A - Principes généraux

Nous nous contenterons d'en présenter les grandes lignes. Soit  $Z(x)$  la variable régionalisée étudiée, que nous considérons comme une réalisation d'une FAI-k, et qui n'est connue qu'en  $n$  points  $x_\alpha$ . On appelle simulation conditionnelle de  $Z(x)$  toute réalisation  $T(x)$  de la même FAI-k qui passe par les données aux points  $x_\alpha$ . Comme une FAI-k est caractérisée par l'ordre  $k$  et la covariance généralisée  $K(h)$ , une simulation conditionnelle est donc caractérisée par les deux propriétés suivantes :

- elle a la même covariance généralisée que le phénomène considéré
- elle passe par les points expérimentaux

On montre [18] que pour construire une simulation conditionnelle  $T(x)$ , il suffit d'ajouter au krigeage une simulation de l'erreur de krigeage, celle-ci se fait à partir d'une simulation  $S(x)$  non conditionnelle (c'est-à-dire non astreinte à passer par les points expérimentaux) :

$$T(x) = Z^X(x) + (S(x) - S^X(x))$$

$Z^X(x)$  : krigeage de  $Z(x)$  à partir des données  $Z(x_\alpha)$

$S^X(x)$  : krigeage de  $S(x)$  à partir des valeurs  $S(x_\alpha)$  aux mêmes points  $x_\alpha$ .

Du fait que le krigeage et l'erreur de krigeage sont orthogonaux (du moins au niveau des combinaisons linéaires d'ordre  $k$  [12]), la covariance généralisée de  $T(x)$  est bien  $K(h)$ . Et aux points expérimentaux, on a bien  $T(x_\alpha) = Z(x_\alpha)$  puisque les erreurs de krigeage y sont nulles.

On vérifie immédiatement que l'on a :

$$E [T(x) | Z^X(x)] = Z^X(x)$$

$$\text{Var} [T(x) | Z^X(x)] = \sigma^2(x)$$

$\sigma^2(x)$  désignant la variance de krigeage de  $Z(x)$  au point  $x$ .

Les simulations conditionnelles ne sont pas de bons estimateurs du champ réel (le meilleur estimateur est le krigeage), mais elles sont des variantes possibles du champ réel : elles présentent le même degré de variabilité (au sens de la covariance  $K(h)$ ), et elles respectent ce que l'on connaît du champ réel. Elles permettent de visualiser les fluctuations possibles du phénomène mieux que ne le font le krigeage (qui lisse la réalité) et l'écart-type de krigeage (qui ne donne pas d'indication sur la structure spatiale de l'erreur d'esti-

mation). Elles restent cependant liées au krigeage: si on a construit un grand nombre de simulations conditionnelles, leur moyenne et leur variance en un point redonnent le krigeage et la variance de krigeage.

### B - La méthode des bandes tournantes

Reste maintenant à générer des simulations (non conditionnelles)  $S(x)$ . Certains schémas peuvent être simulés directement dans le plan (dilution par des cercles [21], polyèdres poissoniens [1]). Mais il est beaucoup plus simple, et beaucoup moins coûteux en temps calcul, d'utiliser la méthode des bandes tournantes [18], [30].

Elle consiste à sommer un grand nombre de simulations indépendantes définies sur des droites balayant le plan (cf. figure 19). On se ramène alors à la génération de simulations à une dimension, ce qui est beaucoup plus simple.

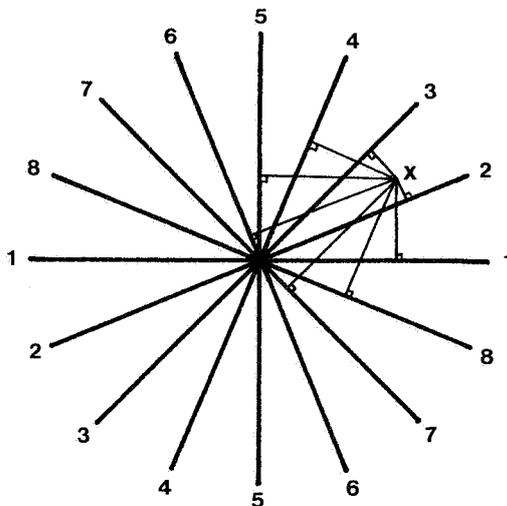


Fig.19 - Schéma de principe des bandes tournantes

Pour simuler la valeur en tout point  $x$  du plan, on prend la moyenne des valeurs prises, aux projections de  $x$  sur les différentes droites, par les simulations à une dimension correspondantes. Si le balayage du plan par les droites est suffisamment fin pour pouvoir être considéré comme continu, la covariance  $K(h)$  obtenue à deux dimensions est liée à la covariance  $K_1(h)$  simulée sur les droites par la relation :

$$K(h) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} K_1(h|\cos \theta|) d\theta$$

En pratique, lorsqu'on veut simuler une covariance  $K(h)$  donnée, on cherche la covariance  $K_1(h)$  qui lui est associée ; mais, en dehors des schémas en  $h^\alpha$ , il n'y a pas toujours de solution immédiate. On peut songer recourir aux transformées de Laplace. En effet, en calculant la valeur moyenne sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$  au lieu de  $[0, \pi]$ , par raison de symétrie, et en effectuant le changement de variable tel que  $h \cos \theta = \sqrt{t}$ , on obtient :

$$K(h) = \frac{1}{\pi} \int_0^{h^2} \frac{K_1(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{h^2-t}} dt$$

autrement dit :

$$K(\sqrt{h}) = \frac{1}{\pi} \frac{K_1(\sqrt{h})}{\sqrt{h}} * \frac{1}{\sqrt{h}}$$

Mais on est souvent bloqué dès le calcul de la transformée de  $K(\sqrt{h})$ . C'est le cas en particulier pour tous les schémas de transition polynômiaux (jusqu'à la portée).

### C - Simulation des schémas de transition

Il n'est généralement pas possible de déterminer  $K_1(h)$ . On a alors le choix entre deux possibilités :

- soit prendre la section plane d'une simulation par tranches tournantes dans l'espace à trois dimensions (méthode analogue à celle des bandes tournantes, à ceci près que les droites balayent l'espace et non le plan) ; la relation entre la covariance  $K_3(h)$  dans l'espace et la covariance  $K_1(h)$  sur les droites est alors plus simple :

$$K_3(h) = \frac{1}{h} \int_0^h K_1(u) du \quad K_1(h) = \frac{d}{dh} h K_3(h)$$

et on sait simuler les schémas courants [18].

- soit rechercher un schéma de forme analytique différente, mais de comportement très voisin de la covariance  $K(h)$ , et que l'on sache simuler dans le plan ; généralement, ce schéma a une forme analytique complexe, inutilisable pour le krigeage ; on génère alors les simulations non conditionnelles à partir de ce nouveau schéma, et on effectue la conditionnalisation en utilisant la covariance initiale  $K(h)$ .

Dans le cadre de la seconde méthode, notons qu'on sait simuler facilement sur un segment  $[-R, R]$  une fonction aléatoire de covariance  $K_1(h)$  lorsque celle-ci peut se mettre sous la forme du produit de convolution d'une fonction  $f$  et de sa transposée :

$$K_1(h) = f \times f = \int f(u) f(u+h) du$$

Il suffit en effet de diluer des germes poissoniens par la fonction  $f$ , ce qui ne pose aucun problème si le support de  $f$  est borné (c'est le cas en pratique) : soit par exemple  $[0, a]$  le support de  $f$  ; on vérifie immédiatement qu'en choisissant un point  $x_0$  au hasard sur  $[-R-a, R]$  selon une loi de densité uniforme, et en y implantant la fonction  $f$ , on a, pour  $x$  et  $x+h$  appartenant à  $[-R, R]$  :

$$Y(x) = f(x - x_0)$$

$$E[Y(x)] = \frac{1}{2R+a} \int f(x) dx$$

$$E[Y(x)Y(x+h)] = \frac{1}{2R+a} f \times f$$

On trouvera à l'annexe 2 une étude de covariances  $K(h)$  obtenues à partir de fonctions de dilution polynômiales sur  $[0, a]$ . On en déduit notamment qu'avec

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{15}{2}} \frac{c}{a} \left(-2 \frac{x}{a} + 3 \frac{x^2}{a^2}\right) & \text{si } 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

on obtient par bandes tournantes une covariance très voisine d'un schéma sphérique de palier  $C$  et de portée  $\frac{\pi}{5} a$ . On y propose également une solution concernant la simulation de schémas de transition à comportement en  $h^3$  à l'origine.

#### D - Simulation d'une covariance généralisée polynômiale

Pour les modèles les plus utilisés en géostatistique non stationnaire, à savoir les schémas polynômiaux, on n'a pas ces problèmes. Si  $K(h)$  est de la forme

$$K(h) = \sum_{p=0}^k (-1)^{p+1} b_p h^{2p+1}$$

on déduit immédiatement de la relation liant  $K(h)$  et  $K_1(h)$  que :

$$K_1(h) = \sum_{p=0}^k (-1)^{p+1} B_p h^{2p+1} \quad \text{avec } b_p = \left[ \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos \theta^{2p+1} d\theta \right]^{-1} \cdot B_p \left[ \frac{2}{\pi} \frac{2.4 \dots (2p)}{3.5 \dots (2p+1)} \right]^{-1} B_p$$

Notons que si on effectue les simulations par tranches tournantes dans  $R^3$ , on obtient la même relation, mais avec  $b_p = \frac{B_p}{2p+2}$

Pour ces schémas, on est donc ramené à la simulation d'une covariance polynômiale sur la droite, ou plus précisément sur un segment  $[-R, R]$ ,  $R$  désignant le rayon du cercle englobant l'ensemble des points à simuler. Pour cela, il suffit de partir d'une simulation  $W(x)$  d'un Wiener-Levy de covariance  $-h$  et

de lui associer la simulation :

$$S(x) = \beta_0 W(x) + \beta_1 \int_0^x W(u) du + \dots + \beta_k \int_0^x \frac{(x-u)^{k-1}}{(k-1)!} W(u) du$$

avec des coefficients  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$  adaptés [30].

Si on veut par exemple simuler une FAI-k de covariance

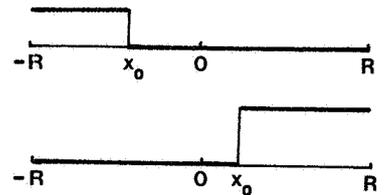
$$K_1(h) = -B_0 h + B_1 h^3 - B_2 h^5$$

Les coefficients  $\beta_0, \beta_1, \beta_2$  doivent satisfaire :

$$\begin{aligned} B_0 &= \beta_0^2 \\ B_1 &= 3(\beta_1^2 - 2\beta_0\beta_2) \\ B_2 &= 5\beta_2^2 \end{aligned}$$

Quant à la simulation d'un processus de Wiener-Lévy, sur  $[-R, R]$ , il existe plusieurs façons de l'effectuer. La plus simple d'entre elles, qui a été employée ici, est la suivante : on choisit un point  $x_0$  au hasard dans  $[-R, R]$ , selon une loi de densité uniforme, ainsi qu'une valeur aléatoire  $a$  selon une loi de moyenne nulle et de variance  $\sigma^2$ , et on pose :

$$\begin{aligned} - \text{ si } x_0 < 0 & : W(x) = a \cdot 1_{\{x < x_0\}} \\ - \text{ si } x_0 > 0 & : W(x) = a \cdot 1_{\{x > x_0\}} \end{aligned}$$



On vérifie immédiatement qu'on a ainsi, pour  $x$  et  $x+h$  appartenant à  $[-R, R]$

$$\frac{1}{2} E [W(x+h) - W(x)]^2 = \frac{\sigma^2 h}{4R}$$

L'emploi d'une méthode si fruste peut surprendre. En effet si on considère une réalisation isolée, il paraît téméraire d'affirmer a posteriori que le modèle qui la décrit le mieux est celui d'une fonction aléatoire sans dérive à variogramme linéaire. Mais si on additionne un grand nombre de simulations (et c'est à peu près ce que l'on fait par les bandes tournantes, puisqu'en pratique on utilise 180 droites), on obtient une simulation qui a une allure plus conforme à ce qu'on en attend.

E - Biais dû à la discrétisation des directions des droites

Toutes les relations qui précèdent sont vraies dans le cas où la direction des droites varie continûment. En pratique, on doit discrétiser ces directions. Lorsqu'on utilise la méthode des bandes tournantes dans le plan selon la méthode décrite plus haut, on construit 180 droites. Il s'ensuit que le biais est pratiquement nul. Par contre, lorsqu'on prend la section plane d'une simulation effectuée dans  $R^3$ , on utilise habituellement 15 directions différentes seulement, car on ne peut pas trouver plus de 15 directions régulièrement réparties dans  $R^3$ . On obtient alors un biais qui peut être relativement important, et qu'on ne peut pas corriger, car il se manifeste sous la forme d'une anisotropie. On trouvera des précisions sur ces problèmes de biais à l'annexe 3.

F - Faut-il simuler l'effet de pépite ?

On a souvent affaire à des phénomènes présentant un effet de pépite. Faut-il le simuler, et si oui, comment ? La réponse dépend d'une part de ce que couvre cet effet de pépite, d'autre part de l'utilisation qu'on veut faire des simulations.

Au niveau de l'estimation, on aura déjà intérêt à effectuer un krigeage avec filtrage de l'effet de pépite (cf. l'exemple qui précède) ; en effet, l'estimation d'une composante pépitique a peu d'intérêt ; seule sa valeur moyenne importe ; et la cartographie d'un effet de pépite n'a aucun sens.

Pour les simulations, éliminons le cas où l'effet de pépite est dû à une erreur de mesure ; sa simulation nous importera peu. Il faut alors préciser l'objectif qu'on se propose :

- s'il s'agit simplement de visualiser les fluctuations possibles du phénomène autour du krigeage, mieux vaut ne pas simuler l'effet de pépite : même si cela a un sens, la carte risque de s'en trouver fortement brouillée et d'être peu exploitable. Il est plus intéressant de voir quelles sont les fluctuations possibles de la partie non pépitique, tout en sachant par ailleurs que se superpose une composante pépitique d'amplitude donnée.

- s'il s'agit d'initialiser un modèle numérique (pour un calcul de volume par exemple) à partir d'une simulation aux noeuds d'une grille, on demande en fait à chaque valeur simulée d'être représentative d'une maille. En toute rigueur, c'est la valeur moyenne par maille qu'il faudrait simuler. A partir du moment où la maille est assez fine, cela revient, à peu de chose près, à prendre la simulation de la composante non pépitique. La seule exception est le cas où

l'effet de pépite correspond à une microstructure dont la portée est de l'ordre de grandeur de la maille. Là, on pourra éventuellement le simuler.

D'un point de vue pratique, il reste à faire deux remarques :

- si on simule une composante pépitique, il arrive fréquemment que sa loi ne soit ni gaussienne, ni uniforme (cf. les hauts fonds en topographie marine). Si on a une bonne idée de la loi de l'effet de pépite, autant en tenir compte dans la simulation (il suffit de tirer une valeur au hasard entre 0 et 1 et d'en faire l'anamorphose).

- Dans tous les cas, il faut impérativement simuler l'effet de pépite aux points expérimentaux  $x_\alpha$  qui servent à la conditionnalisation. En effet, celle-ci se fait à partir de données simulées qui sont sensées être de même nature et de même qualité que les données réelles.

### 3 - ANALYSE STRUCTURALE

Le demi-variogramme brut n'apporte pas grand chose, si ce n'est la confirmation de la présence d'une dérive. On a donc effectué une analyse automatique, mais en l'adaptant au cas particulier. En effet, une première étude des erreurs d'estimation de chaque auréole de données à partir des autres révèle une forte anisotropie zonale, qu'il est indispensable de prendre en compte. On voit d'ailleurs sur les données que la variabilité de la profondeur est plus grande au centre qu'à la périphérie. On est donc conduit à rechercher un modèle du type

$$K(x, x+h) = \bar{\omega}^2(x) K_0(h)$$

où  $\bar{\omega}(x)$  varie lentement dans l'espace. Dans un tel modèle, le krigeage est indépendant de  $\bar{\omega}(x)$ , et l'écart-type d'estimation de  $Z(x)$  se met sous la forme :

$$\sigma(x) = \bar{\omega}(x) \cdot \sigma_0(x)$$

où  $\sigma_0(x)$  désigne l'écart-type de krigeage associé à la covariance  $K_0(h)$ .

Comme ici on a peu de données et qu'on travaille en voisinage unique, on a fait l'approximation suivante : on effectue le krigeage (en voisinage unique) à l'aide de la covariance  $K_0(h)$ , et on multiplie les écarts-types de krigeage par le facteur  $\bar{\omega}(x)$ .

D'autre part, compte tenu de l'allure de l'anisotropie zonale, on a pris pour  $\bar{\omega}(x)$  une fonction de la distance  $d$  du point  $x$  au polygone dont les sommets sont les points de l'auréole interne.

On obtient un modèle satisfaisant avec  $k=1$ ,  $K_0(h) = 0.001 h^3$ , et une fonction  $\bar{\omega}(x)$  décroissant de 0.95 au centre à 0.20 à la périphérie.

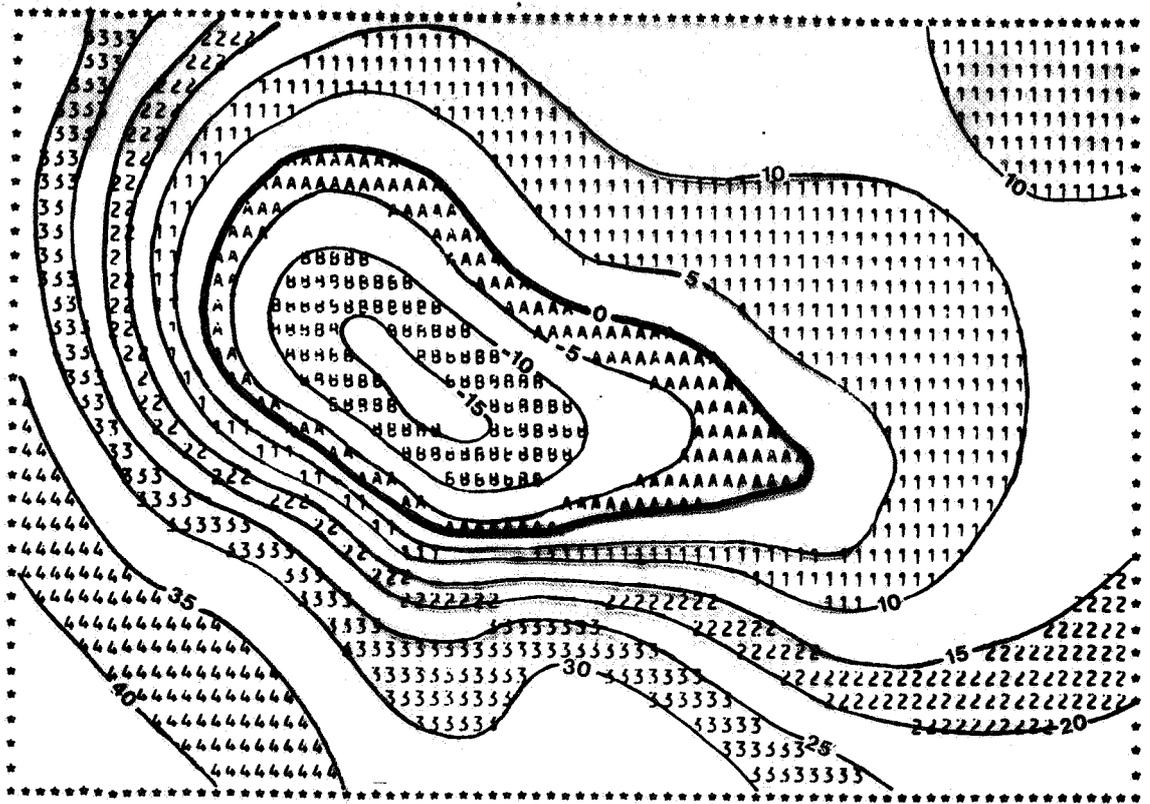


Fig. 20 - Estimation de la profondeur ; intervalle des isolignes : 5 m.  
Les profondeurs négatives correspondent aux terres émergées.

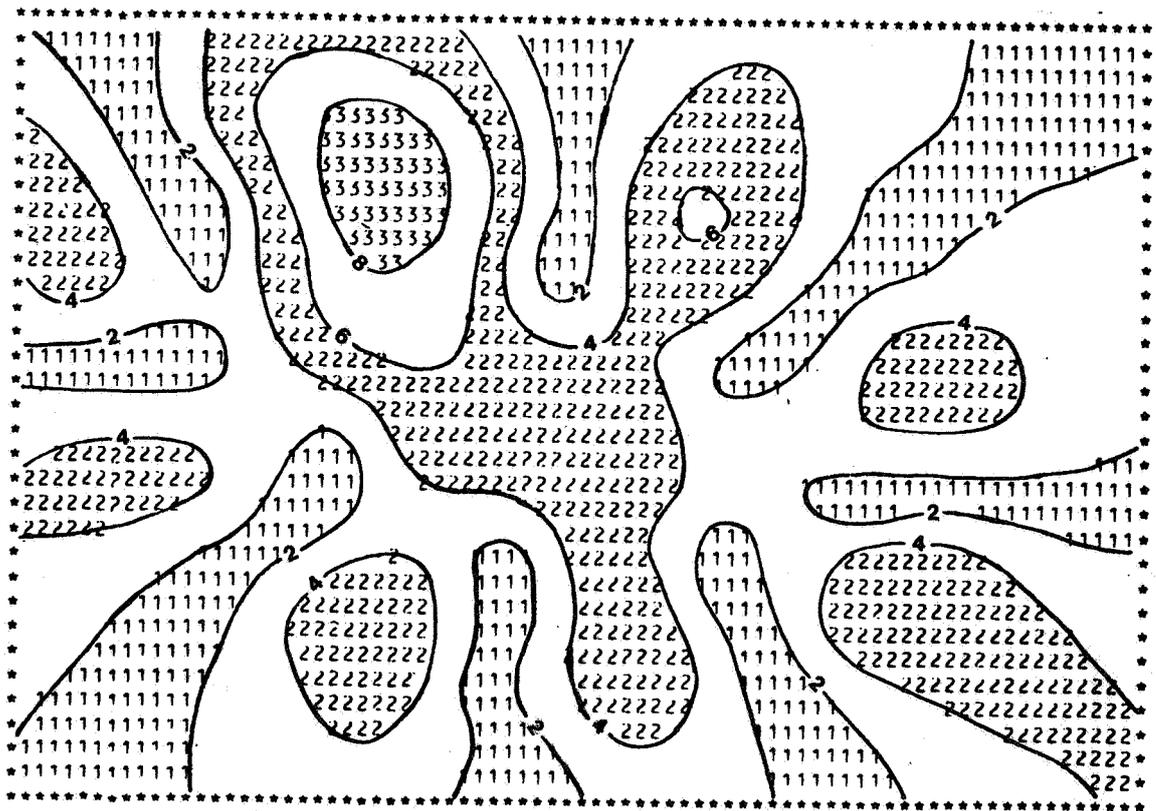


Fig. 21 - Ecart-type d'estimation ; intervalle des isolignes : 2 m.

#### 4 - ESTIMATION DE LA SURFACE DE L'ILE

##### A - Le krigeage et l'estimation de la surface de l'île

Les figures 20 et 21 fournissent la carte krigée et l'écart-type d'estimation. On observe que le krigeage fait bien ressortir une île, de taille assez importante. Des deux cartes, on peut déduire l'existence presque certaine d'une île : en effet pour certains points l'altitude au-dessus du niveau de la mer dépasse trois fois l'écart-type d'estimation.

Par la suite, nous assimilerons la surface des terres émergées au nombre de noeuds de la grille de krigeage pour lesquels on trouve une profondeur négative. La surface unité correspondra donc à une maille de krigeage, soit un carré de 10 mm de côté sur la carte, ou 469 m. sur le terrain. Ainsi mesurée la surface de l'île krigée est de 104 unités.

On peut d'ailleurs tirer quelques renseignements complémentaires du calcul de la surface des terres associée à une profondeur :

$$Z_{\alpha}(x) = Z^{\times}(x) + \alpha\sigma(x)$$

où  $Z^{\times}$  et  $\sigma$  désignent le krigeage et l'écart-type (cf. figures 22 et 23). Il faut bien remarquer cependant que, par exemple, la surface associée à  $\alpha=2$  n'est pas du tout la surface qui a 97,5% de chances d'être dépassée : pour qu'il en soit ainsi, il faudrait que les erreurs de krigeage soient corrélées d'un point à l'autre avec un coefficient de corrélation égal à 1, ce qui est loin d'être le cas. On ne peut pas par conséquent utiliser ces valeurs pour construire un histogramme ou calculer une variance d'estimation de la surface estimée. Au demeurant, la surface de l'île krigée n'est pas un estimateur correct de la surface de l'île, puisque ce problème n'est pas linéaire (coupure au niveau de la mer).

$\alpha$	surface
- 4	≥ 325
- 3	≥ 264
- 2	199
- 1	141
0	104
1	70
2	33
3	3
4	0

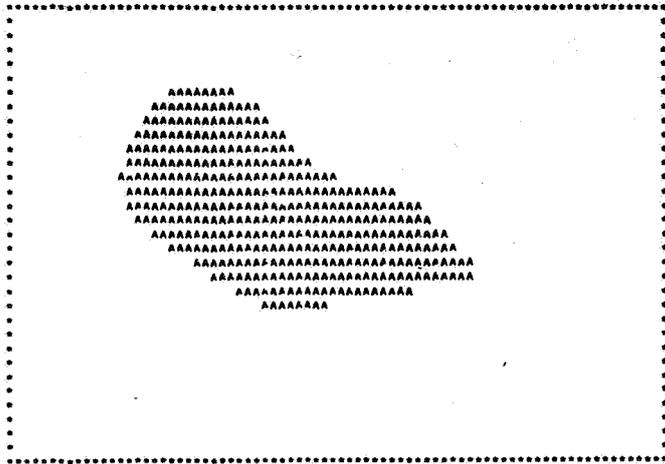
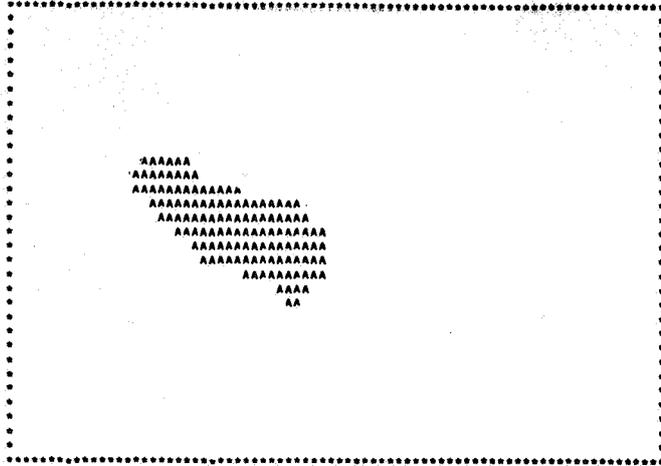
Fig. 22 - Surface de l'île associée à

$$\underline{Z_{\alpha}(x) = Z^{\times}(x) + \alpha\sigma(x)}$$

(pour  $\alpha < -2$ , l'île déborde du cadre de la grille étudiée, et la surface est certainement supérieure aux chiffres fournis).

Estimation + 2 écarts-types

S = 33



Estimation

S = 104

Estimation - 2 écarts-types

S = 199

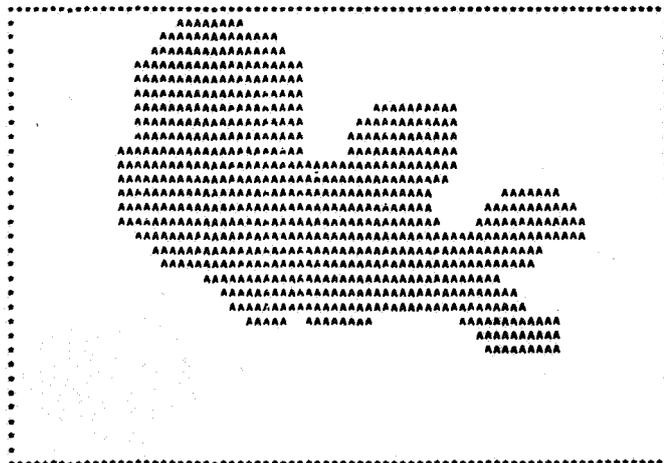


Fig. 23 - Iles associées à l'estimation ainsi qu'à l'estimation ± 2 écarts-types

(S : surface de l'île dans les unités de travail)

B - Les simulations et l'estimation de la surface de l'île

Avant d'étudier les simulations, voyons comment on construit une simulation conditionnelle tenant compte de l'anisotropie zonale. Soit  $T_0(x)$  une simulation non conditionnelle de covariance  $K_0(h)$ . Pour avoir une simulation conditionnelle associée à une fonction aléatoire de covariance  $\bar{\omega}^2 K_0(h)$ , il suffit de prendre :

$$T_0(x) = Z^x(x) + \bar{\omega}(S_0(x) - S_0^x(x))$$

où  $Z^x(x)$  désigne le krigeage de  $Z(x)$   
et  $S_0^x(x)$  désigne le krigeage de  $S_0$  en  $x$  à partir des mêmes points que ceux où  $Z$  est connu.

Ici on a procédé de cette façon, mais avec le coefficient  $\bar{\omega}(x)$  variable associé à l'anisotropie zonale.

On a effectué 100 simulations. Les figures 24 et 25 fournissent la moyenne et l'écart-type des 100 simulations (valeurs calculées à  $x$  fixé) : on retrouve bien les cartes du krigeage et de l'écart-type de krigeage.

On constate sur ces 100 simulations qu'il y a toujours des terres émergées. En général il y a une seule île ; mais dans une vingtaine de cas on observe deux îles, ou une île et un ou deux îlots minuscules. La figure 26 présente les îles obtenues sur 10 simulations qui représentent un bon échantillon des 100 simulations, du point de vue de la forme et de la superficie des îles. Certaines sont plus proches de l'île réelle que l'île krigée, mais beaucoup s'en éloignent. A titre d'illustration, la figure 27 présente, pour chacune de ces 10 simulations, la coupe selon la deuxième diagonale.

Du point de vue de l'estimation de la surface de l'île, on peut construire l'histogramme de la surface des terres émergées à partir de ces 100 simulations (cf. figure 28). On observe que cet histogramme est assez dissymétrique. On en déduit notamment les caractéristiques suivantes :

- moyenne : 106.10
- écart-type : 16.80
- probabilité 5% que la surface soit supérieure à 129
- probabilité 95% que la surface soit supérieure à 78.

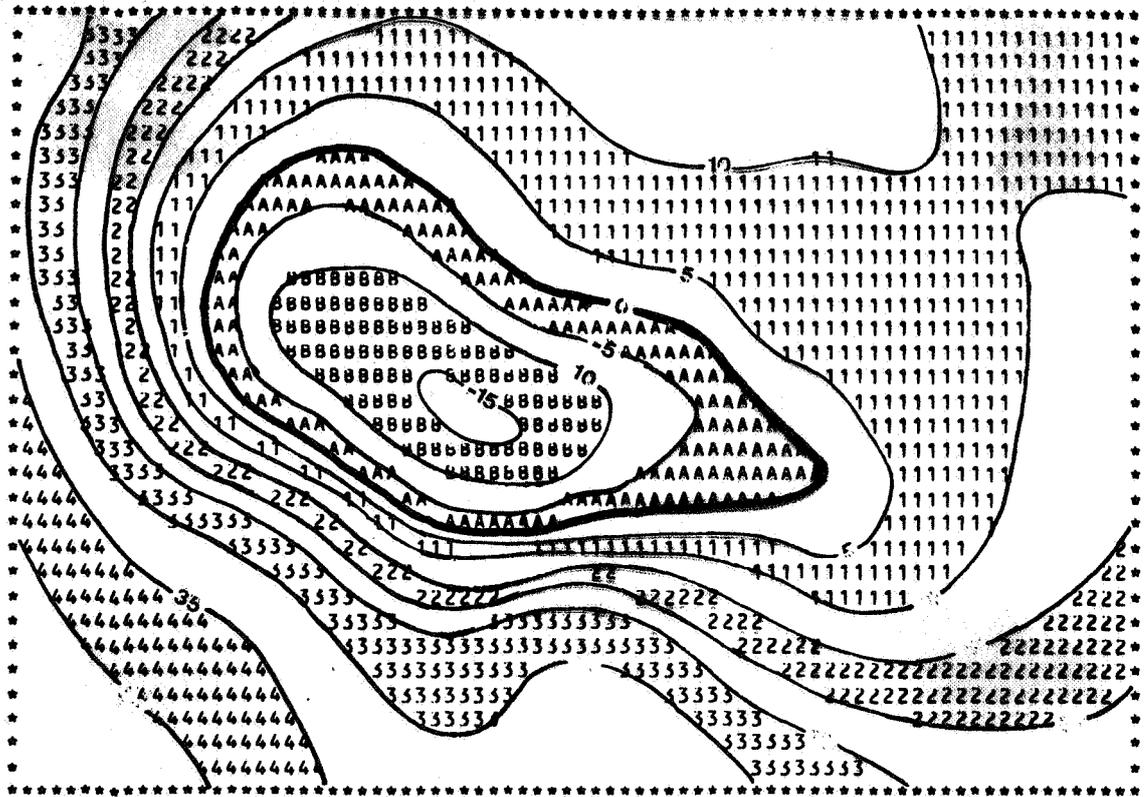


Fig.24 - Moyenne des 100 simulations ; intervalle des isolignes : 5 m.

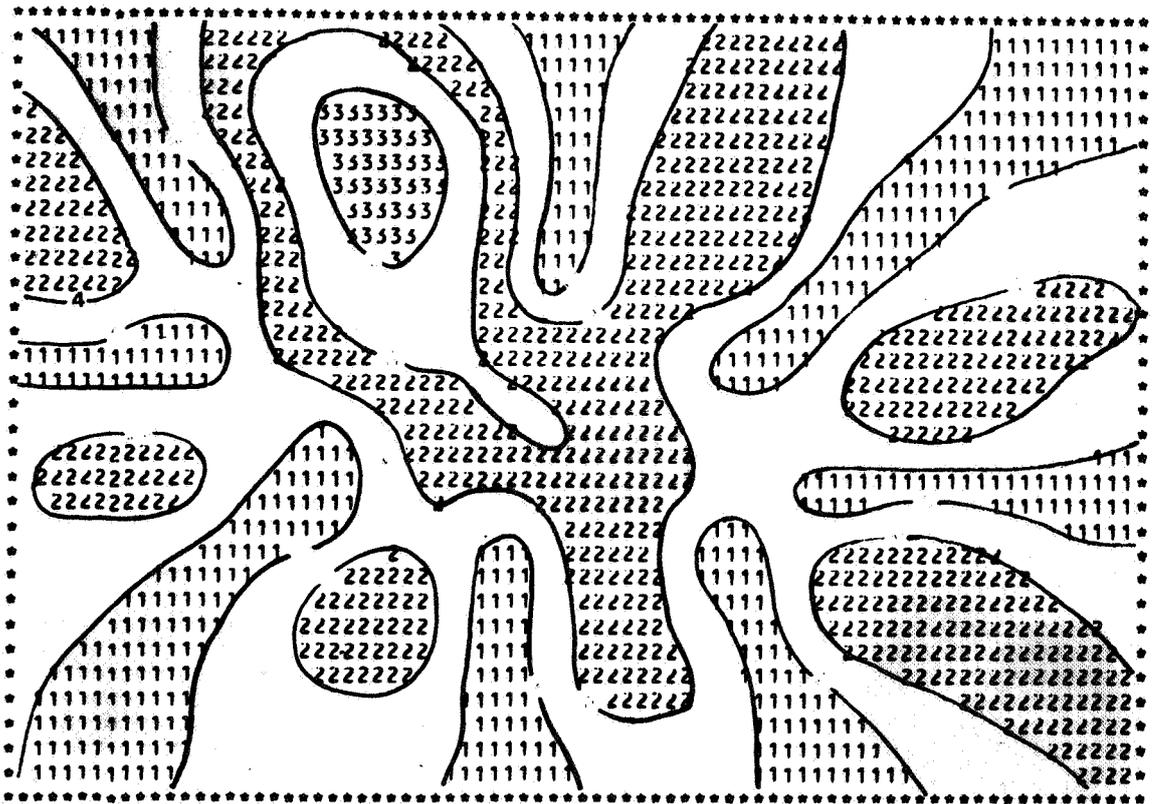
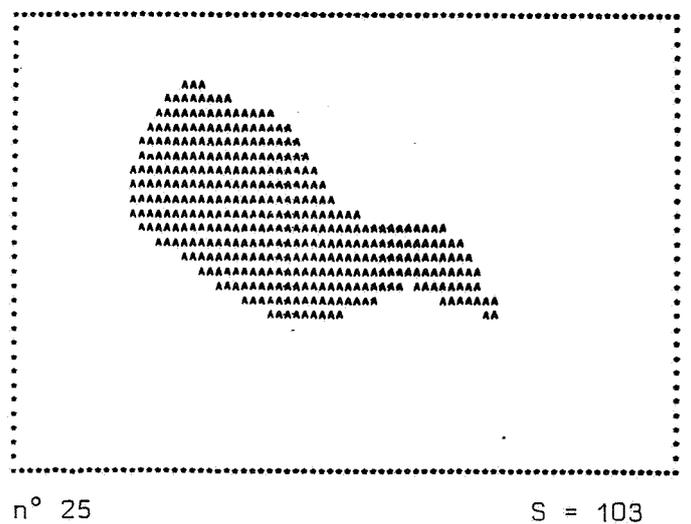
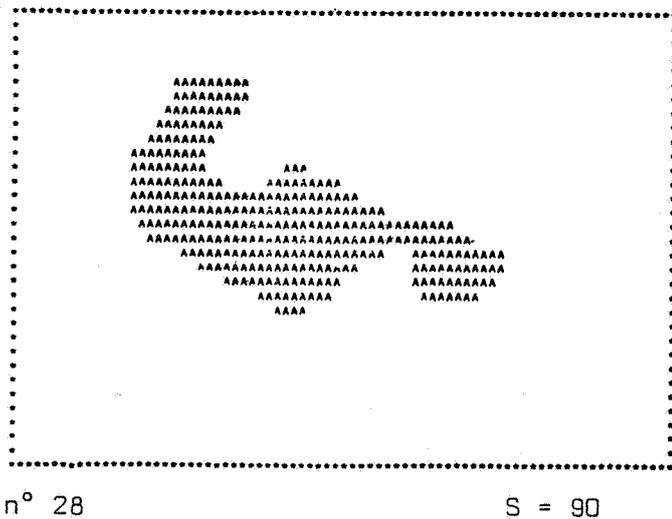
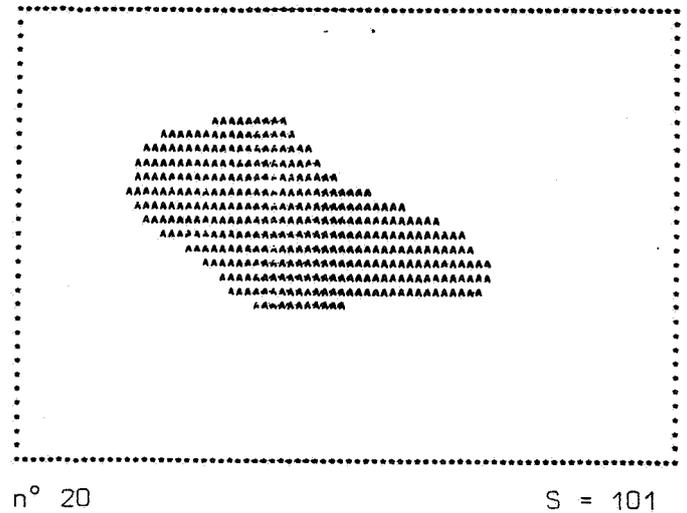
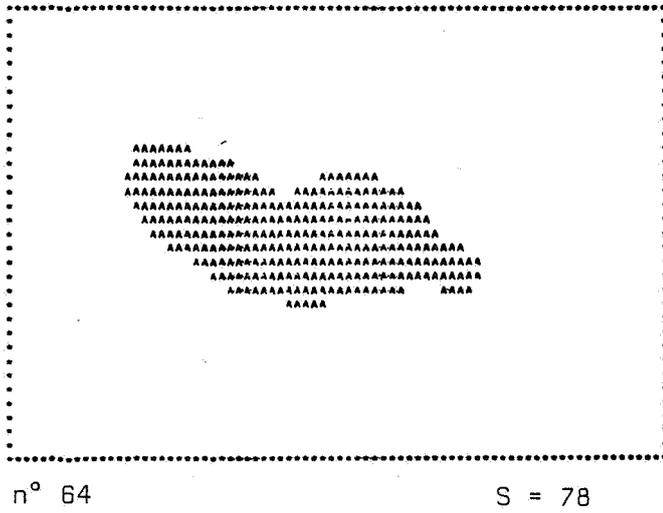
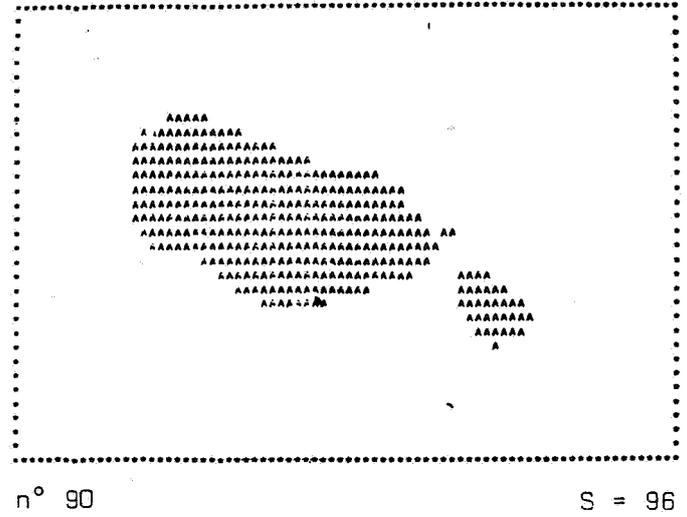


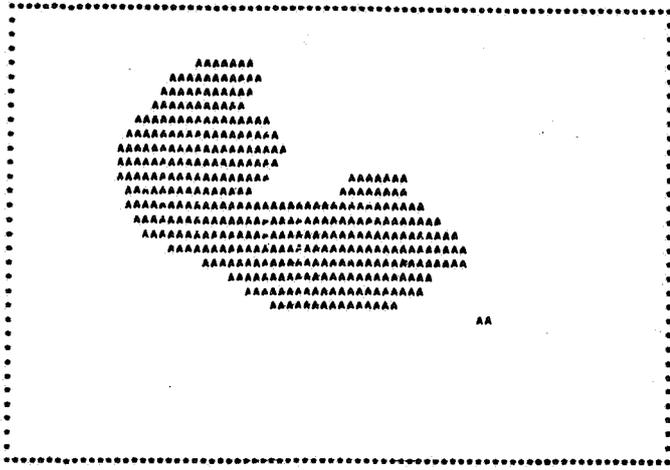
Fig.25 - Ecart-type des 100 simulations ; intervalle des isolignes : 2 m.

Fig.26 - Iles obtenues sur un échantillon de 10 simulations

n° : numéro de la simulation

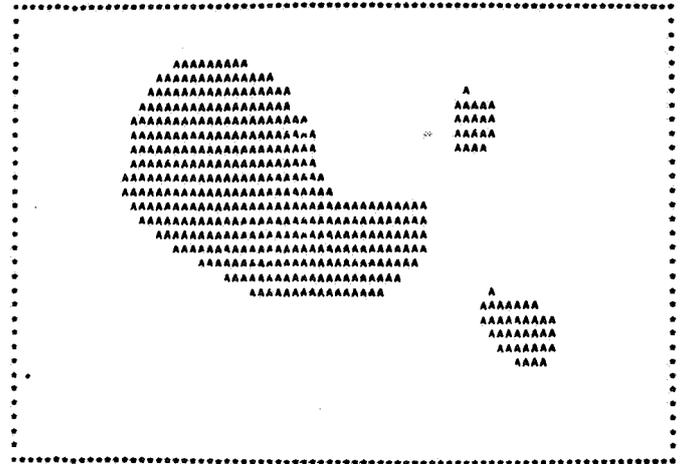
S : Surface de l'île





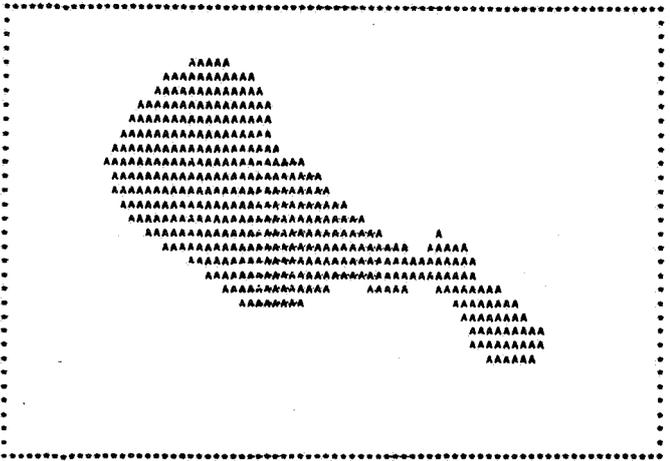
n° 41

S = 108



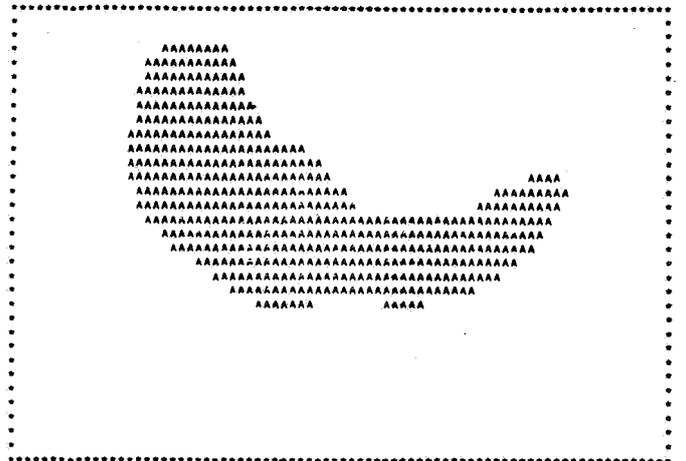
n° 87

S = 120



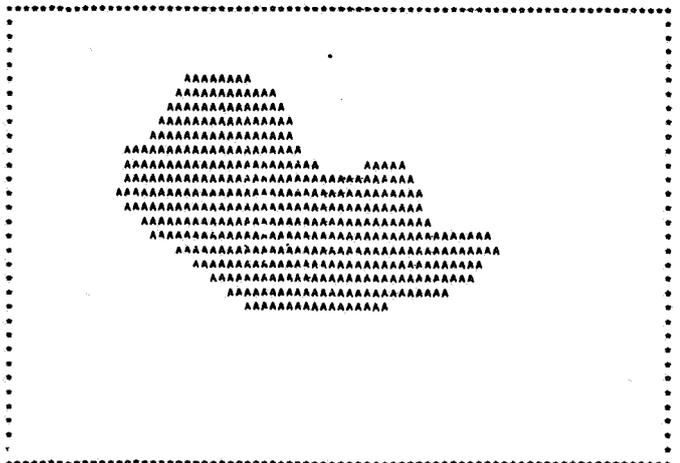
n° 37

S = 113



n° 30

S = 131



n° 42

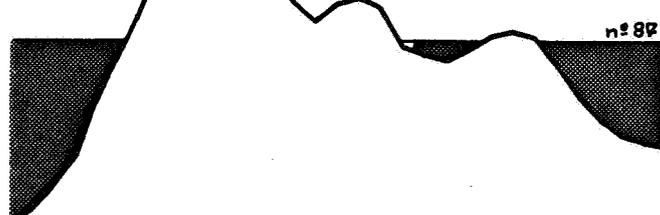
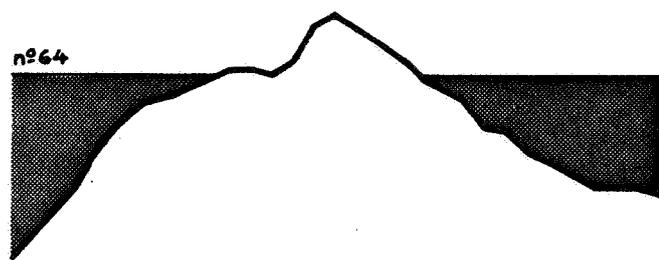
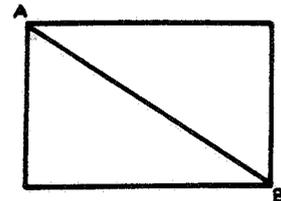
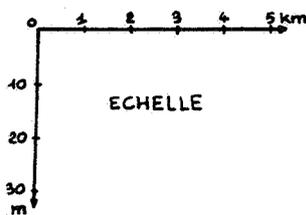
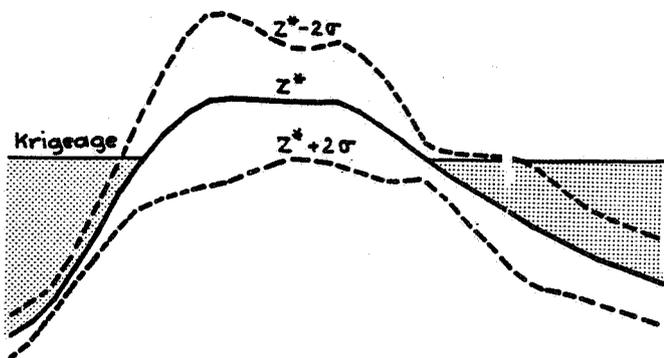
S = 116

Fig.26 (suite) - Iles obtenues sur un échantillon de 10 simulations

n° : numéro de la simulation

S : surface de l'île

Fig.27 - Coupe AB sur le krigeage (avec la fourchette associée à  $\pm 2$  écarts-types) et sur les 10 simulations de la figure précédente.



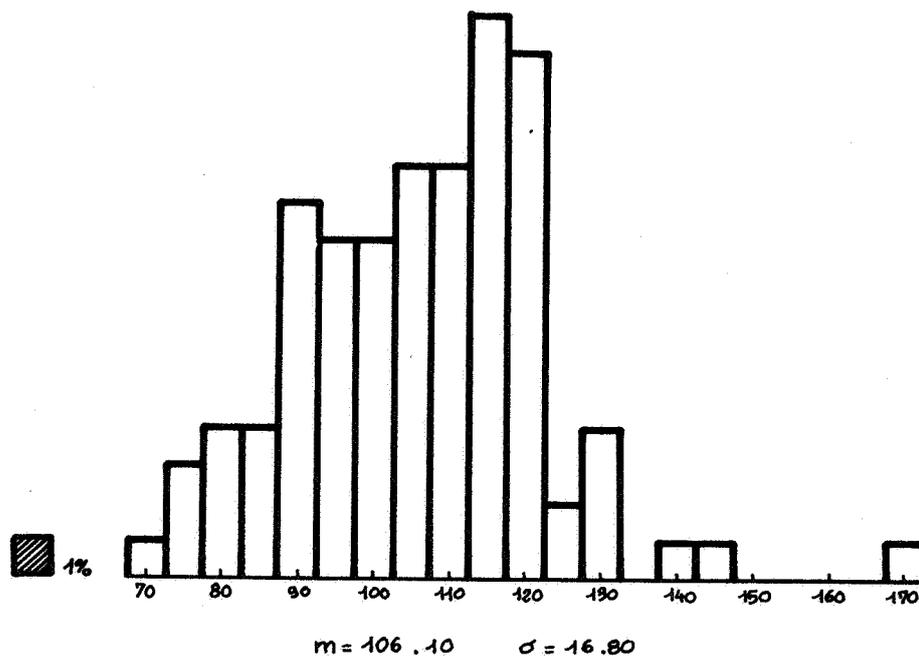


Fig. 28 - Histogramme de la surface des terres émergées

C - Quelques remarques

On observe que, dans ce cas, l'île obtenue par krigeage fournit déjà une estimation très voisine de celle qui est obtenue par les 100 simulations (104 dans le premier cas, 106 dans le second). Cela est sans doute dû à la régularité de la variable, jointe au fait que l'île est bien entourée de points conditionnants. On a d'ailleurs refait l'étude sans les deux auréoles centrales. Le krigeage ne laisse alors plus apparaître d'île, alors que sur les 100 simulations (effectuées à partir des mêmes simulations non conditionnelles que précédemment), la surface de l'île varie de 0 (21 cas) à 151.

Dans le même ordre d'idée, on a aussi cherché les polynômes des moindres carrés associés aux 40 données, pour des polynômes de degré 2 à 7. Ou bien on ne retrouve pas l'île (pour  $k = 2$  et  $k = 3$ , l'île est engloutie), ou alors on voit apparaître des continents (pour  $k > 3$ , on obtient un relief aberrant).

Les simulations conditionnelles ne sont donc pas à négliger. Et

même si le krigeage donne comme ici un résultat correct, elles seules permettent d'évaluer la précision de l'estimation. Ici, on a utilisé 100 simulations. C'est beaucoup. Une étude de sous-ensembles de ces 100 simulations montre qu'en pratique, pour avoir une estimation raisonnable, il suffit d'une trentaine de simulations.

Pour terminer, disons quelques mots du contrôle de la qualité des simulations.

## 5 - CONTROLE DE LA QUALITE DES SIMULATIONS

La construction d'une simulation se fait à partir de nombres tirés "au hasard". Or on maîtrise encore mal la génération de nombres au hasard. Aussi est-on conduit à effectuer des contrôles donnant une indication sur la qualité des simulations. On peut mettre en oeuvre plusieurs sortes de contrôles. Nous allons en énumérer quelques uns, et pour les tests globaux nous donnerons les résultats obtenus ici.

### A - Tests portant sur la génération des nombres au hasard

On utilise toujours au départ un sous-programme qui génère des nombres compris entre 0 et 1 selon une loi de densité uniforme. On peut donc effectuer directement certains tests sur des séries de nombres (histogramme, moyenne, variance, variogramme...). Nous n'insisterons pas sur cet aspect, qui a été développé par ailleurs (cf. (23), (35) et (39)).

### B - Tests portant sur les simulations non conditionnelles

Deux types de tests peuvent être mis en oeuvre :

- calcul de la covariance de la simulation : on doit théoriquement retrouver la covariance fournie, du moins à quelques fluctuations près, mais justement on connaît mal l'amplitude des écarts permis ; de plus on est généralement contraint de recourir à une analyse automatique dont la précision est mal connue.

- étude de combinaisons linéaires autorisées : par translation de la combinaison linéaire, on doit avoir une fonction aléatoire stationnaire de covariance liée à la covariance généralisée, ce que l'on peut tester.

La première méthode a déjà été mise en oeuvre sur d'autres données, et a donné des résultats satisfaisants. Ici ces méthodes n'ont pas été mises en oeuvre.

C - Tests portant sur les simulations conditionnelles

Ces tests portent en fait sur la simulation de l'erreur de krigeage réduite :

$$\varepsilon(x) = \frac{S(x) - S^{\hat{x}}(x)}{\sigma(x)} = \frac{T(x) - Z^{\hat{x}}(x)}{\sigma(x)}$$

selon la notation déjà utilisée (S : simulation non conditionnelle ; T : simulation conditionnelle ;  $Z^{\hat{x}}$ ,  $S^{\hat{x}}$  : krigeage à partir des valeurs aux points expérimentaux  $x_{\alpha}$  ;  $\sigma$  : écart-type de krigeage).

$\varepsilon(x)$  est une fonction aléatoire de moyenne nulle et de variance unité. L'histogramme obtenu à partir des 65100 valeurs des 100 simulations aux 651 noeuds de la grille est gaussien (cf. figure 29).

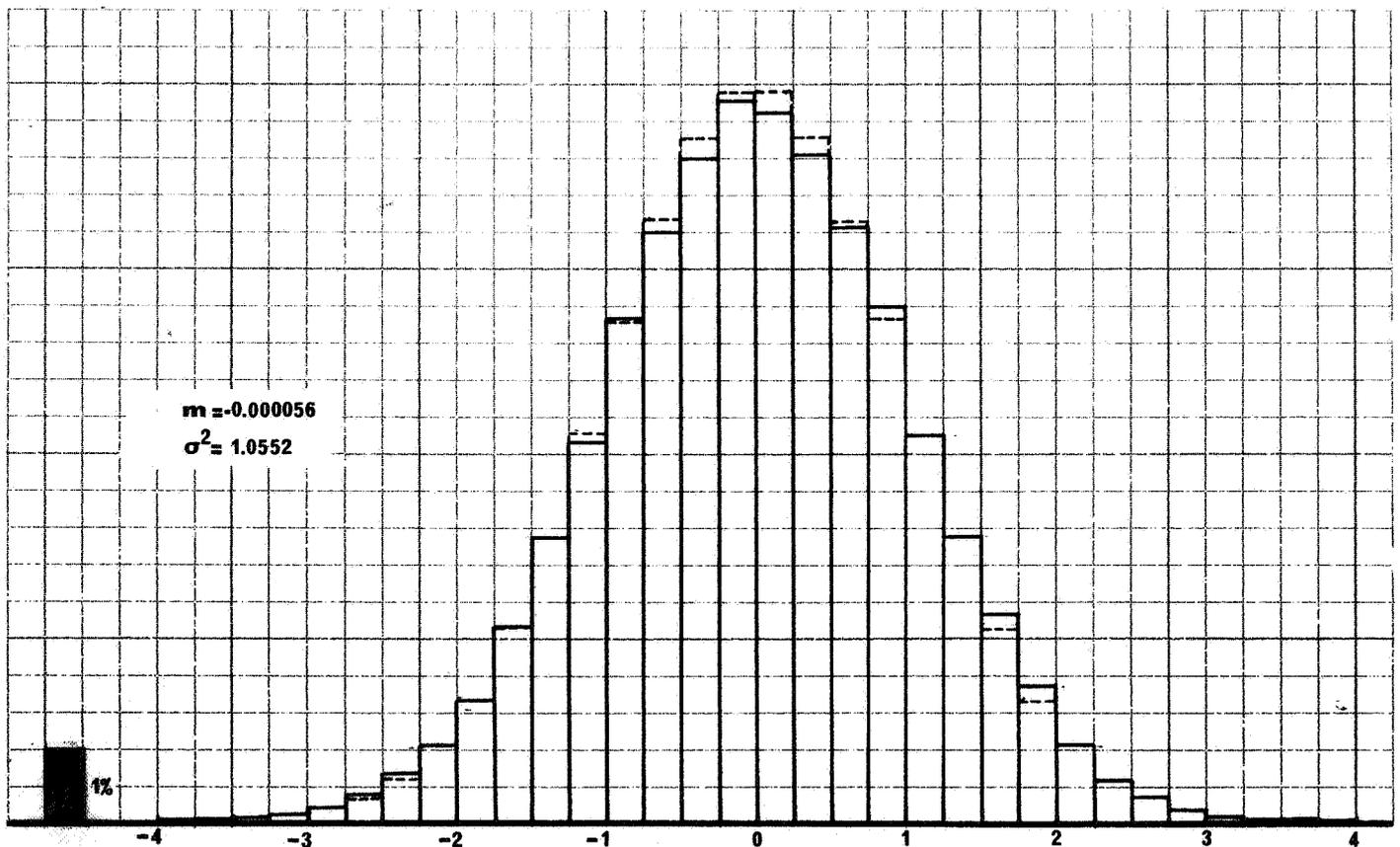


Fig. 29 - Histogramme de l'erreur réduite  $\varepsilon(x)$

(d'après les 100 simulations aux 651 noeuds de la grille)  
en tireté, histogramme d'une gaussienne réduite.

On peut mettre en oeuvre trois sortes de tests :

a - Test portant sur chaque simulation

On peut chercher à vérifier que  $\epsilon(x)$  est de moyenne 0 et de variance 1. Mais le test est limité, car  $\epsilon(x)$  est structuré, et de façon suffisamment complexe pour qu'on n'ait pas envie d'en calculer la covariance (non stationnaire). On peut cependant :

- cartographier l'erreur réduite  $\epsilon(x)$ , ce qui donne une idée de sa "portée";
- tracer l'histogramme de  $\epsilon(x)$ , du moins dans le cas où le champ est grand vis à vis de la portée ci-dessus ; cet histogramme doit être à peu près gaussien;
- calculer la moyenne et la moyenne quadratique.

Mais du fait que  $\epsilon(x)$  est structuré, on ne pourra faire de test très précis.

Ici on observe que sur les 100 simulations, la moyenne aux 651 noeuds varie entre -0.33 et +0.33, et la moyenne quadratique entre 0.6 et 1.9 (en omettant les 5% extrêmes). Cela indique, si les simulations sont bonnes, que les 651 noeuds de la grille sont équivalents à une vingtaine de points non corrélés au plus. Dans ce cas, la moyenne quadratique des 65100 valeurs de  $\epsilon(x)$ , qui peut paraître un peu forte (1.0552) est acceptable.

On peut en déduire que  $\epsilon(x)$  a une "portée" de l'ordre de 60 à 100.

La figure 30 montre les histogrammes obtenus sur les 10 simulations présentées à la figure 26. On voit que l'histogramme est parfois éloigné de celui d'une gaussienne réduite ; mais il n'y a pas incompatibilité si on considère qu'il n'est établi qu'avec l'équivalent d'une vingtaine de données indépendantes.

b - Test portant sur la moyenne de n simulations conditionnelles

On pourra étudier deux variables :

$$-\bar{\epsilon}(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \epsilon_i(x) \text{ variable de moyenne nulle et de variance 1}$$

$$-\chi^2(x) = \sum_{i=1}^n \epsilon_i^2(x) \text{ variable de moyenne n.}$$

De plus, à x fixé, si on suppose que  $\epsilon_i(x)$  est gaussien,  $\bar{\epsilon}(x)$  suit une loi normale réduite, et  $\chi^2(x)$  suit une loi du  $\chi^2$  de paramètre  $\nu=n$ .

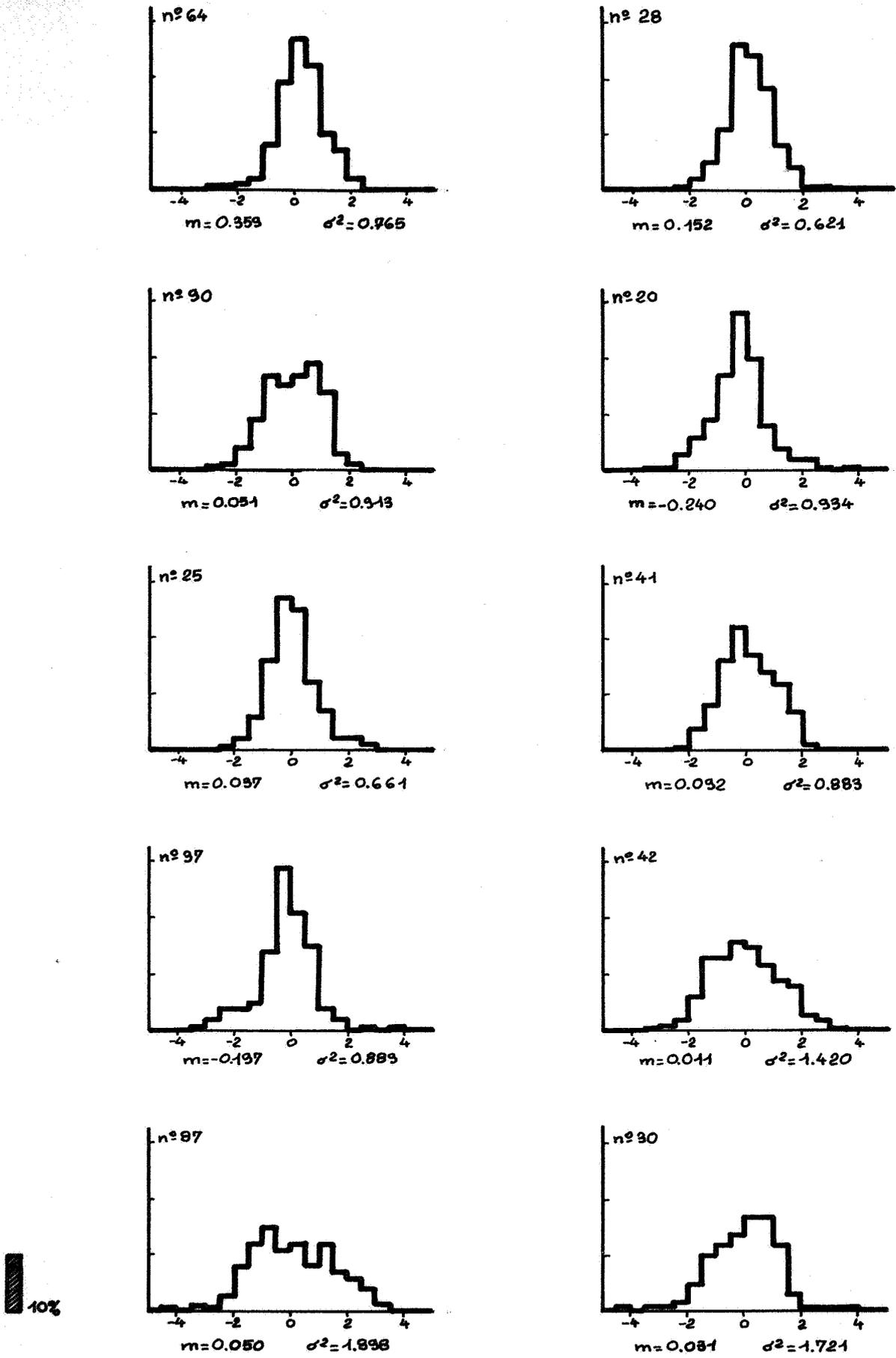


Fig.30 - Histogrammes de la simulation de l'erreur de krigeage réduite  $\epsilon(x)$  sur les 10 simulations de la fig.26  
 (histogrammes calculés d'après les 651 noeuds de la grille)  
 $m$  : moyenne  $\sigma^2$  : moyenne quadratique



En pratique, dès qu'on a six simulations, on travaillera sur une variable pseudo-gaussienne associée à  $\chi^2$ , plutôt que sur  $\chi^2$  directement. En effet Wilson et Hilferty ont montré que  $(\chi^2/\nu)^{1/3}$  converge vers la loi normale de moyenne  $m = 1 - \frac{2}{9\nu}$  et de variance  $\sigma^2 = \frac{2}{9\nu}$  quand  $\nu$  croît. Et cette convergence est très rapide. On remplace donc  $\chi^2$  par la variable normale réduite

$$G = \frac{(\chi^2/\nu)^{1/3} - m}{\sigma}$$

On peut étudier  $\bar{\epsilon}$  et  $G$  comme il a été dit pour  $\epsilon$  au §a.

Les figures 31 à 33 présentent la cartographie et l'histogramme de  $\bar{\epsilon}(x)$  et  $G(x)$ , obtenus sur la moyenne des 100 simulations. On voit que  $\bar{\epsilon}(x)$  et  $G(x)$  sont assez structurés et semblent bien avoir une "portée" de l'ordre de 50 à 100 ; les histogrammes sont à peu près gaussiens ; la moyenne de  $G(x)$  paraît forte, mais est admissible si on considère qu'on a l'équivalent de 20 données indépendantes.

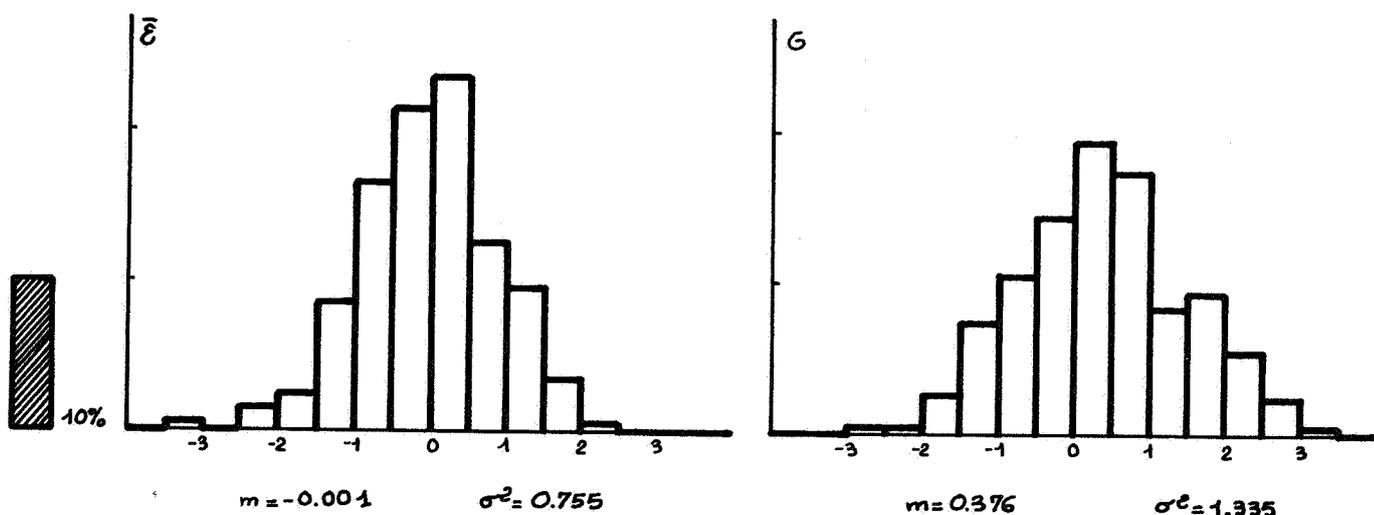


Fig. 33 - Histogrammes de  $\bar{\epsilon}(x)$  et  $G(x)$  associés aux 100 simulations  
(histogrammes calculés d'après les 651 noeuds de la grille)

$m$  : moyenne

$\sigma^2$  : moyenne quadratique

c - Test portant directement sur n simulations

Au lieu d'effectuer des tests spatiaux, on peut se donner un point  $x$  et  $y$  considérer les valeurs des erreurs réduites  $\epsilon_i(x)$ . Là les différents  $\epsilon_i$  sont des variables indépendantes de même loi, de moyenne nulle et de variance unité. Si on fait l'approximation gaussienne, on peut étudier l'histogramme des  $\epsilon_i$  et tester si un raccordement à une loi normale de moyenne 0 et variance 1 est admissible.

On a effectué ici ce test en regroupant les erreurs en 10 classes d'égal probabilité et en mettant en oeuvre un test du  $\chi^2$  (à 9 degrés de liberté). A la variable du  $\chi^2$  on a associé la pseudo-gaussienne G évoquée au §b.

Ce test n'a pas été effectué en chaque point de la grille simulée, puisque les erreurs sont corrélées. On l'a fait en 35 points répartis selon une maille 5 fois plus large que la maille de la grille de krigeage. La figure 34 donne les histogrammes obtenus en 9 de ces points (les coins, les milieux des côtés et le centre). On voit que le raccordement à une loi normale réduite est bon.

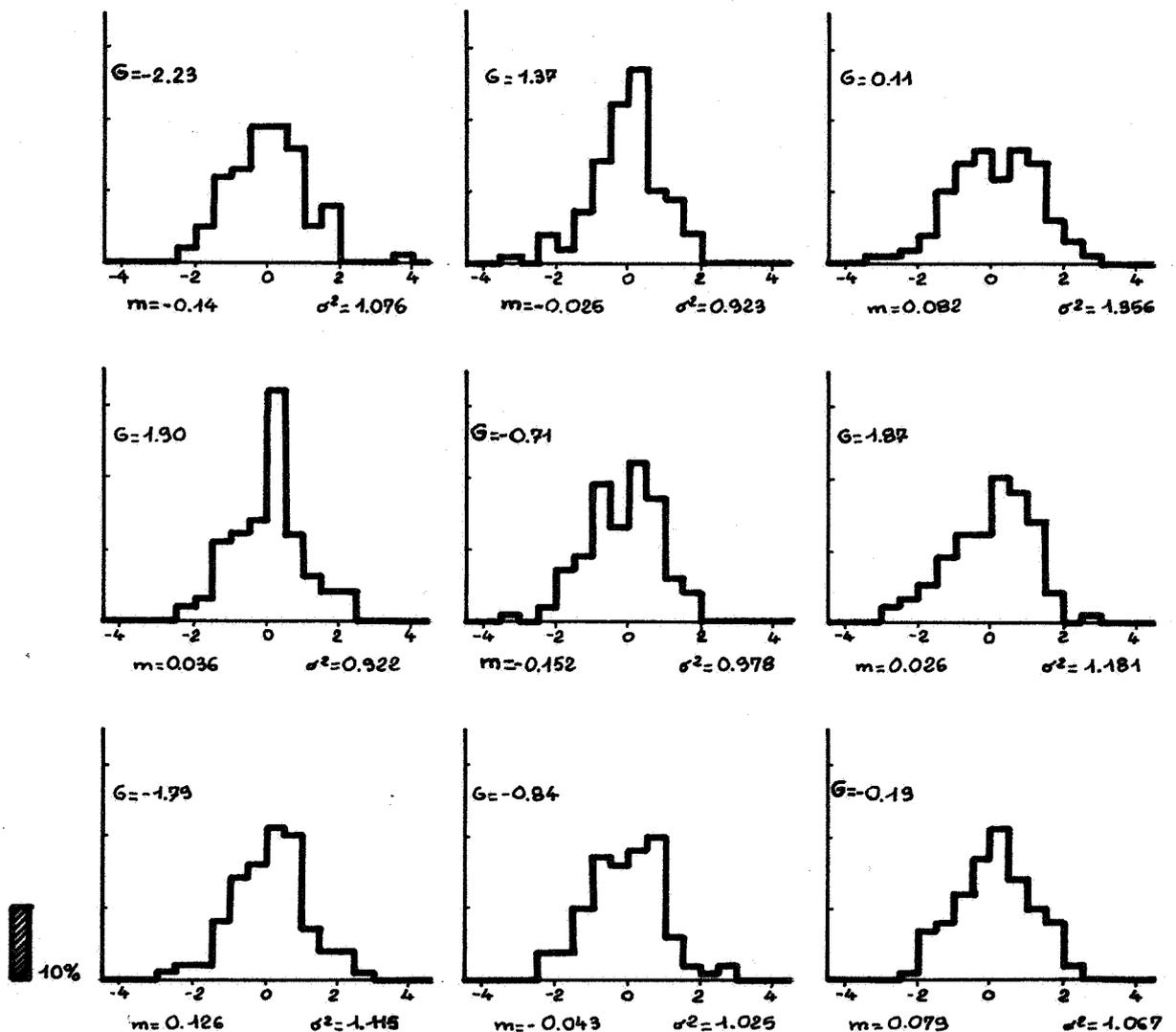


Fig. 34 - Histogrammes de  $\epsilon_i$  en neuf noeuds de la grille

(les coins, les milieux des côtés, le centre)

(histogrammes calculés d'après les 100 simulations)

m : moyenne  $\sigma^2$  : moyenne quadratique

G : pseudo-gaussienne associée au  $\chi^2$  du test d'ajustement à une loi normale réduite.

CONCLUSION

La géostatistique non stationnaire est maintenant pleinement opérationnelle, mais elle n'en est encore qu'à ses débuts, et il reste de nombreuses voies à développer. Nous avons déjà mentionné tout le travail qui reste à faire en ce qui concerne l'inférence statistique : mise au point de méthodes plus robustes et plus souples d'une part, études de mathématique statistique d'autre part.

Mais ce sont aussi les possibilités d'application qui doivent être élargies. L'utilisation des simulations conditionnelles est récente, et ouvre de larges perspectives dans la résolution des problèmes non linéaires. Des progrès sont également à faire sur certains problèmes plus particuliers, comme la prise en compte des incertitudes de localisation. D'autre part, des développements certainement très féconds interviendront dans le traitement des corrégonalisations. En effet, il arrive fréquemment qu'on ait affaire à plusieurs variables liées entre elles, et il faut en tenir compte, tant au niveau du krigeage qu'au niveau de la génération de simulations conditionnelles cohérentes. Les problèmes ne sont pas de nature théorique (cf. [3]), mais proviennent encore une fois des difficultés de l'inférence statistique.

La géostatistique doit aussi tirer parti d'autres méthodes. Ainsi la collaboration de la géostatistique et des techniques d'analyse des données (analyse en composantes principales, analyse des correspondances, etc...) a déjà conduit à des résultats très intéressants, et doit être poursuivie.

Enfin la géostatistique devrait s'épanouir dans des domaines nouveaux (problèmes du pétrole et géophysique notamment) où la grande variété des problèmes posés amènerait de nouveaux développements.

ANNEXES

ANNEXE 1  
ETUDE DE LA COVARIANCE  
DES ACCROISSEMENTS D'ORDRE k

1 - OBJECTIF DE L'ETUDE

Au cours de la phase d'inférence statistique automatique des paramètres d'une FAI-k, on utilise, à plusieurs reprises, des combinaisons linéaires d'ordre k : tout d'abord lors de la détermination des coefficients de la covariance, qui se fait par régression de valeurs expérimentales  $V(\lambda) = Z(\lambda)^2$  aux variances théoriques  $K^P(\lambda)$ ; ensuite lors du choix du degré k et de l'ajustement optimum, où on étudie encore une fois des valeurs  $V(\lambda)$ , les combinaisons linéaire  $\lambda$  étant cette fois des mesures de krigeage.

Lorsqu'on a beaucoup de données, on peut construire ces différentes mesures sur des supports disjoints ; on obtient ainsi des combinaisons linéaires peu corrélées. Mais ce cas se produit assez rarement, et on est conduit à chevaucher les supports des mesures. Il est alors utile de savoir si les différentes mesures construites sont très corrélées ou non ; en effet, il est inutile de multiplier les combinaisons linéaires si elles sont fortement corrélées.

Ce qui nous intéresse surtout, c'est le coefficient de corrélation  $r(\lambda, \mu)$  entre les valeurs  $V(\lambda)$  et  $V(\mu)$  associées à deux combinaisons linéaires autorisées. Celui-ci dépend de la loi de la fonction aléatoire. Pour avoir une idée de l'ordre de grandeur de  $r(\lambda, \mu)$  on fera l'hypothèse que cette loi est gaussienne : on sait qu'on a alors

$$\text{cov}(V(\lambda), V(\mu)) = E[V(\lambda) - K(\lambda)][V(\mu) - K(\mu)] = 2K(\lambda, \mu)^2$$

avec

$$K(\lambda, \mu) = E[Z(\lambda)Z(\mu)] \qquad K(\lambda) = E[Z(\lambda)^2] = K(\lambda, \lambda)$$

On est donc ramené à l'étude de la covariance de  $Z(\lambda)$  et  $Z(\mu)$ , et le coefficient de corrélation  $r(\lambda, \mu)$  entre  $V(\lambda)$  et  $V(\mu)$  est égal au carré du coefficient  $\rho(\lambda, \mu)$  entre  $Z(\lambda)$  et  $Z(\mu)$ . Il s'ensuit que r est toujours positif, et qu'il est faible dès que  $\rho$  n'est pas grand.

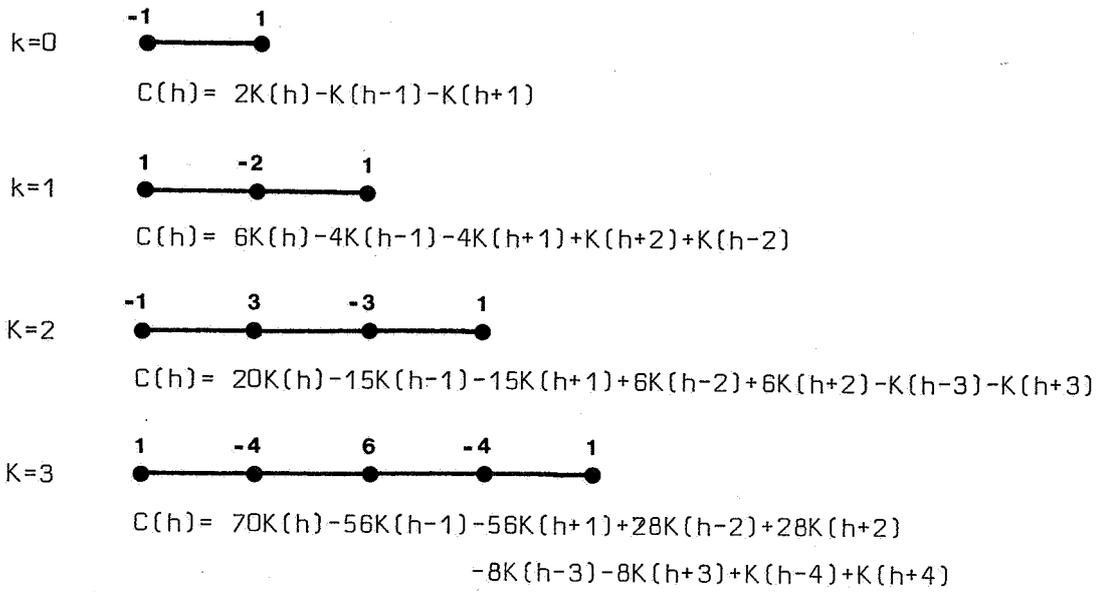


Fig.35 - Mesures  $\lambda$  des accroissements d'ordre  $k$  (au pas  $a=1$ ) et formule de la covariance  $C(h) = E[Z(\lambda)Z(\tau_h\lambda)]$

K	h K(h)	0	1	2	3	4	$\geq 5$
		0	$\delta$	2	-1	0	0
	$-h$	2	0	0	0	0	0
1	$\delta$	6	-4	1	0	0	0
	$-h$	4	-2	0	0	0	0
	$h^3$	8	2	0	0	0	0
2	$\delta$	20	-15	6	-1	0	0
	$-h$	12	-8	2	0	0	0
	$h^3$	12	-4	-2	0	0	0
	$-h^5$	132	52	2	0	0	0
3	$\delta$	70	-56	28	-8	1	0
	$-h$	40	-30	12	-2	0	0
	$h^3$	32	-18	0	2	0	0
	$-h^5$	160	-30	-48	-2	0	0
	$h^7$	4832	2382	240	2	0	0

Fig.36 - Covariance  $C(h)$  des accroissements d'ordre  $k$  pour les modèles élémentaires usuels de covariance généralisée  $K(h)$ .

Nous allons donc étudier la covariance  $K(\lambda, \mu)$  entre deux combinaisons linéaires  $Z(\lambda)$  et  $Z(\mu)$ . Nous traiterons essentiellement le cas où  $\mu$  est la translatée de  $\lambda$  d'un vecteur  $h$ , ce que nous noterons  $\mu = \tau_h \lambda$ . Par définition, la variable  $Z(\tau_h \lambda)$  est stationnaire en  $h$ , et  $K(\lambda, \mu)$  et  $\rho(\lambda, \mu)$  sont de la forme

$$K(\lambda, \tau_h \lambda) = C(h) \quad \rho(\lambda, \tau_h \lambda) = \frac{C(h)}{C(o)}$$

Nous calculerons la covariance  $C(h)$  associée aux accroissements d'ordre  $k$  dans  $R^1$ , ou sur un cercle dans  $R^2$ . Nous étudierons ensuite  $\rho(\lambda, \mu)$  pour des mesures différentes, correspondant à celles que l'on utilise en pratique ; les résultats seront voisins de ceux qui concernent les accroissements d'ordre  $k$ .

## 2 - LES ACCROISSEMENTS D'ORDRE $k$ SUR LA DROITE

Un accroissement d'ordre  $k$  est une combinaison linéaire associée à une mesure de la forme :

$$\lambda = \sum_{q=0}^{k+1} (-1)^q C_{k+1}^q \delta_{x_0 + (k+1-q)a}$$

C'est une combinaison linéaire autorisée à l'ordre  $k$ , et, pour  $h$  multiple de la maille  $a$ , la covariance  $C(h)$  de  $Z(\lambda)$  et  $Z(\tau_h \lambda)$  est :

$$C(h) = (-1)^{k+1} \sum_{p=0}^{2k+2} (-1)^p C_{2k+2}^p K(h + (k+1-p)a)$$

(cf. [28])

Les figures 35 et 36 donnent  $C(h)$  pour  $a=1$ , et pour les schémas élémentaires usuels de covariance. On remarque que le coefficient de corrélation  $\frac{C(h)}{C(o)}$  est nul lorsque les supports de  $\lambda$  et  $\tau_h \lambda$  sont disjoints, et est très faible dès que les supports n'ont pas plus de la moitié des points en commun.

## 3 - LES ACCROISSEMENTS D'ORDRE $k$ SUR LE CERCLE

Dans le plan, il faut habituellement au moins  $(k+1)(k+2)/2+1$  points pour pouvoir construire une combinaison linéaire autorisée à l'ordre  $k$ , puisqu'il y a  $(k+1)(k+2)/2$  monômes de degré inférieur ou égal à  $k$ . Mais si on prend les points sur un cercle, ces fonctions de base ne sont pas linéairement indépendantes : si on raisonne sur le cercle  $\mathcal{C}$  de rayon unité, et si on travaille avec l'angle polaire  $\theta$ , les monômes se mettent sous la forme

$$x^m y^n = \cos^m \theta \sin^n \theta$$

Du fait que  $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ , il n'y a en fait que  $2k+1$  monômes linéairement indépendants sur  $\mathcal{E}$ , de degré inférieur ou égal à  $k$ , par exemple la famille constituée de :

$$\begin{aligned} \cos\theta^m & \quad 0 \leq m \leq k \\ \sin\theta \cos\theta^m & \quad 0 \leq m \leq k-1 \end{aligned}$$

Il suffit donc de  $2k+2$  points sur  $\mathcal{E}$  pour qu'on puisse définir une combinaison linéaire autorisée à l'ordre  $k$ . Montrons que la mesure  $\lambda$  définie sur  $\mathcal{E}$  par :

$$\lambda = \sum_{p=0}^{2k+1} (-1)^p \delta_{\frac{p\pi}{k+1}}$$

est autorisée à l'ordre  $k$ .

Pour cela, considérons la mesure

$$\mu = \sum_{p=0}^{2k+1} \frac{1}{2k+2} \delta_{\frac{p\pi}{k+1}}$$

Les fonctions  $f_n(\theta) = e^{in\theta}$ , pour  $-k \leq n \leq k+1$  forment une famille de fonctions orthogonales pour  $\mu$ ; en effet on a :

$$\langle f_m, f_n \rangle = \int f_m(\theta) \overline{f_n(\theta)} \mu(d\theta) = \sum_{p=0}^{2k+1} \frac{1}{2k+2} e^{i(m-n)\frac{p\pi}{k+1}}$$

d'où :

- si  $m = n$  :  $\langle f_m, f_n \rangle = 1$

- si  $m \neq n$  :  $\langle f_m, f_n \rangle = \frac{1}{2k+2} \frac{1 - e^{-(m-n)2p\pi}}{1 - e^{-(m-n)\frac{p\pi}{k+1}}} = 0$

En particulier,  $f_{k+1}$  est orthogonale aux  $f_m$ , pour  $-k \leq m \leq k$ . Or :

$$f_{k+1} \left( \frac{p\pi}{k+1} \right) = e^{i(k+1)\frac{p\pi}{k+1}} = e^{ip\pi} = (-1)^p$$

Quant aux  $f_m$ , pour  $-k \leq m \leq k$ , on peut les mettre sous la forme :

$$\left. \begin{aligned} f_0(\theta) &= 1 = P_0(\theta) \\ f_m(\theta) &= e^{im\theta} = (\cos\theta + i\sin\theta)^m = P_m(\theta) + iQ_m(\theta) \\ f_{-m}(\theta) &= e^{-im\theta} = (\cos\theta - i\sin\theta)^m = P_m(\theta) - iQ_m(\theta) \end{aligned} \right\} \text{ pour } 0 < m \leq k$$

où  $P_m(\theta)$  et  $Q_m(\theta)$  sont des polynômes de degré  $m$  en  $\cos\theta$  et  $\sin\theta$ .

Du fait que  $\langle f_m, f_n \rangle = \delta_{mn}$ , on a :

$$\langle P_m, P_n \rangle = \langle Q_m, Q_n \rangle = \frac{1}{2} \delta_{mn}$$

$$\langle P_m, Q_n \rangle = 0$$

$$\langle P_m, f_{k+1} \rangle = \langle Q_m, f_{k+1} \rangle = 0$$

Les  $2k+1$  polynômes  $P_m$  ( $0 \leq m \leq k$ ) et  $Q_m$  ( $1 \leq m \leq k$ ) forment donc  $2k+1$  fonctions linéairement indépendantes sur les  $2k+2$  points constituant le support de  $\mu$ , et sont orthogonaux à  $f_{k+1}$ . Comme il ne peut y avoir plus de  $2k+1$  polynômes de degré inférieur ou égal à  $k$  linéairement indépendants sur  $\mathcal{E}$ , ces polynômes  $P_m$  et  $Q_m$  constituent une base de l'espace engendré par les polynômes de degré inférieur ou égal à  $k$  sur  $\mathcal{E}$ . Ces derniers sont donc orthogonaux à  $f_{k+1}$  ; or on a :

$$\langle P_m, f_{k+1} \rangle = \int P_m(\theta) f_{k+1}(\theta) \mu(d\theta) = \frac{1}{2k+2} \sum_{p=0}^{2k+1} (-1)^p P_m\left(\frac{p\pi}{k+1}\right) = \frac{1}{2k+2} \int P_m(\theta) \lambda(d\theta)$$

et de même pour  $Q_m$  ; on en déduit

$$\int P_m(\theta) \lambda(d\theta) = 0 \quad \int Q_m(\theta) \lambda(d\theta) = 0$$

Par conséquent  $\lambda$  est bien une mesure autorisée à l'ordre  $k$ . Par définition, nous dirons que  $\lambda$  est la mesure des accroissements d'ordre  $k$  sur le cercle.

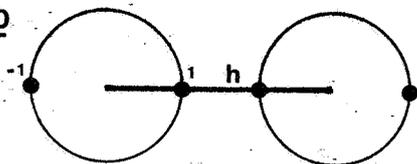
La covariance  $C(h)$  entre  $Z(\lambda)$  et  $Z(\tau_h \lambda)$  n'est pas isotrope ; on l'a donc calculée dans différentes directions, du moins pour  $k$  égal à 0 ou 1 ; au-delà, la mesure  $\lambda$  est constituée d'au moins 6 points, et l'anisotropie est faible. Après des calculs un peu longs, mais sans difficulté, on aboutit aux résultats présentés sur la figure 37. La figure 38 donne le graphe du corrélogramme  $\rho(\lambda, \tau_h \lambda) = \frac{C(h)}{C(0)}$  pour les modèles élémentaires usuels de covariance généralisée  $K(h)$ . On constate que, pour des voisinages disjoints ( $h > 2$ ),  $\rho$  est faible, de l'ordre de 0.1 en valeur absolue ; et pour  $h < 0.5$ , la valeur absolue de  $\rho$  est inférieure à 0.5, ce qui correspond à  $r$  inférieur à 0.25. La seule exception concerne le schéma en  $(-1)^k h^{2k+1}$  ( $-h$  pour  $k=0$ ,  $h^3$  pour  $k=1$ , etc...) ; dans ce cas  $\rho$  reste encore de l'ordre de 0.6 en  $h=1$  et 0.3 en  $h=2$ .

#### 4 - CORRELATION ENTRE COMBINAISONS LINEAIRES DIFFERENTES

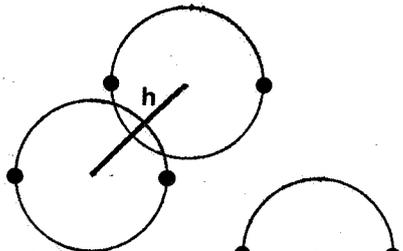
Dans la pratique, on dispose rarement de données à maille régulière permettant de construire des accroissements d'ordre  $k$  sur des cercles



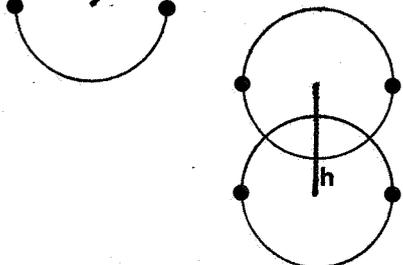
k=0



$$C(h) = 2K(h) - K(h-2) - K(h+2)$$

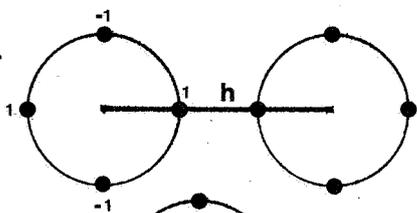


$$C(h) = 2K(h) - K(\sqrt{h^2 - 2\sqrt{2}h + 4}) - K(\sqrt{h^2 + 2\sqrt{2}h + 4})$$

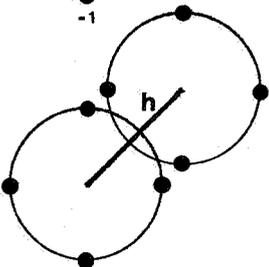


$$C(h) = 2K(h) - 2K(\sqrt{h^2 + 4})$$

k=1

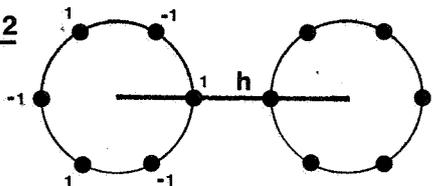


$$C(h) = 4K(h) + 2K(\sqrt{h^2 + 4}) + K(h-2) + K(h+2) - 4K(\sqrt{h^2 - 2h + 2}) - 4K(\sqrt{h^2 + 2h + 2})$$



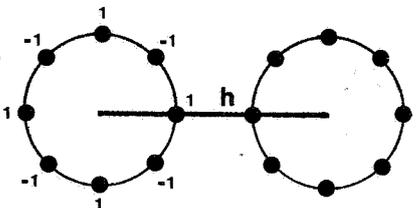
$$C(h) = 4K(h) + 2K(\sqrt{h^2 - 2\sqrt{2}h + 4}) + 2K(\sqrt{h^2 + 2\sqrt{2}h + 4}) - 2K(h - \sqrt{2}) - 2K(h + \sqrt{2}) - 4K(\sqrt{h^2 + 2})$$

k=2



$$C(h) = 6K(h) + 4K(\sqrt{h^2 + 3}) + 4K(\sqrt{h^2 - 3h + 3}) + 4K(\sqrt{h^2 + 3h + 3}) - 2K(h-1) - 2K(h+1) - K(h-2) - K(h+2) - 4K(\sqrt{h^2 - h + 1}) - 4K(\sqrt{h^2 + h + 1}) - 2K(\sqrt{h^2 - 2h + 4}) - 2K(\sqrt{h^2 + 2h + 4})$$

k=3



$$C(h) = 8K(h) + 2K(h - \sqrt{2}) + 2K(h + \sqrt{2}) + K(h-2) + K(h+2) + 4K(\sqrt{h^2 - 2h + 2}) + 4K(\sqrt{h^2 + 2}) + 4K(\sqrt{h^2 + 2h + 2}) + 2K(\sqrt{h^2 - 2\sqrt{2}h + 4}) + 2K(\sqrt{h^2 + 4}) + 2K(\sqrt{h^2 + 2\sqrt{2}h + 4}) - 4K(\sqrt{h^2 - \sqrt{2}h + 2 + \sqrt{2}}) - 4K(\sqrt{h^2 - \sqrt{2}h + 2 - \sqrt{2}}) - 4K(\sqrt{h^2 + \sqrt{2}h + 2 - \sqrt{2}}) - 4K(\sqrt{h^2 + \sqrt{2}h + 2 + \sqrt{2}}) - 4K(\sqrt{h^2 - (2 + \sqrt{2})h + 2 + \sqrt{2}}) - 4K(\sqrt{h^2 - (2 - \sqrt{2})h + 2 - \sqrt{2}}) - 4K(\sqrt{h^2 + (2 - \sqrt{2})h + 2 - \sqrt{2}}) - 4K(\sqrt{h^2 + (2 + \sqrt{2})h + 2 + \sqrt{2}})$$

Fig. 37 - Covariance  $C(h)$  des accroissements d'ordre  $k$  sur le cercle

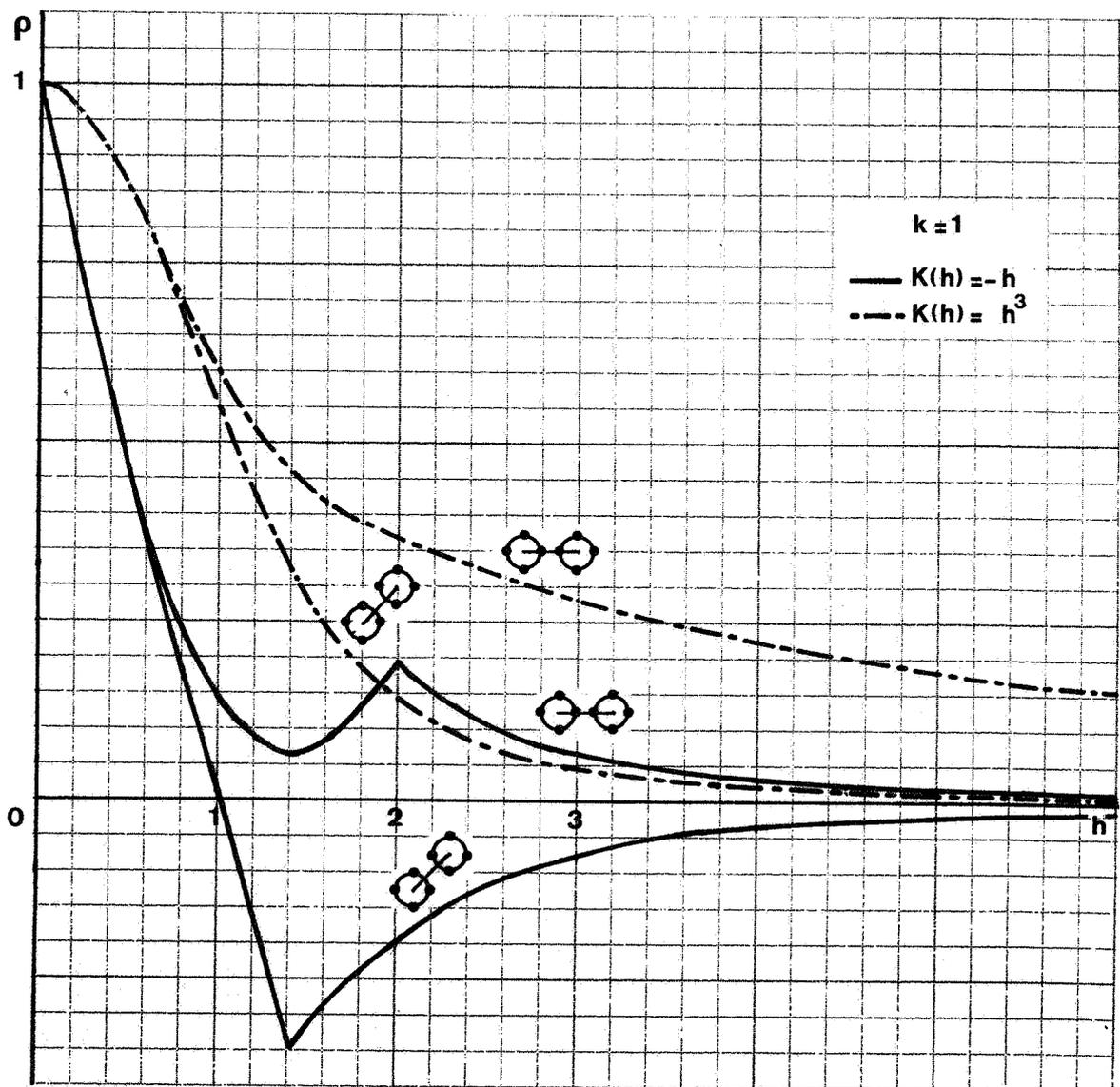
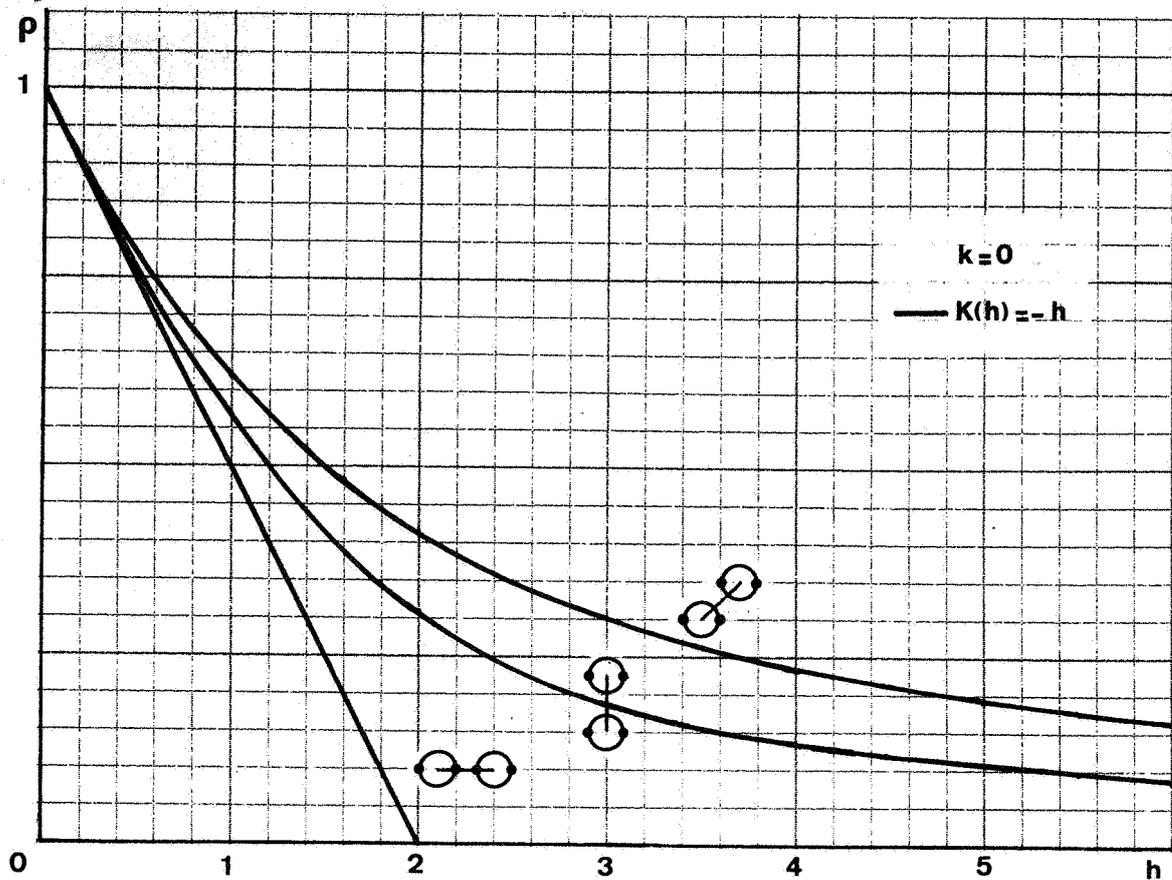


Fig.38 - Corrélogramme des accroissements d'ordre k sur le cercle

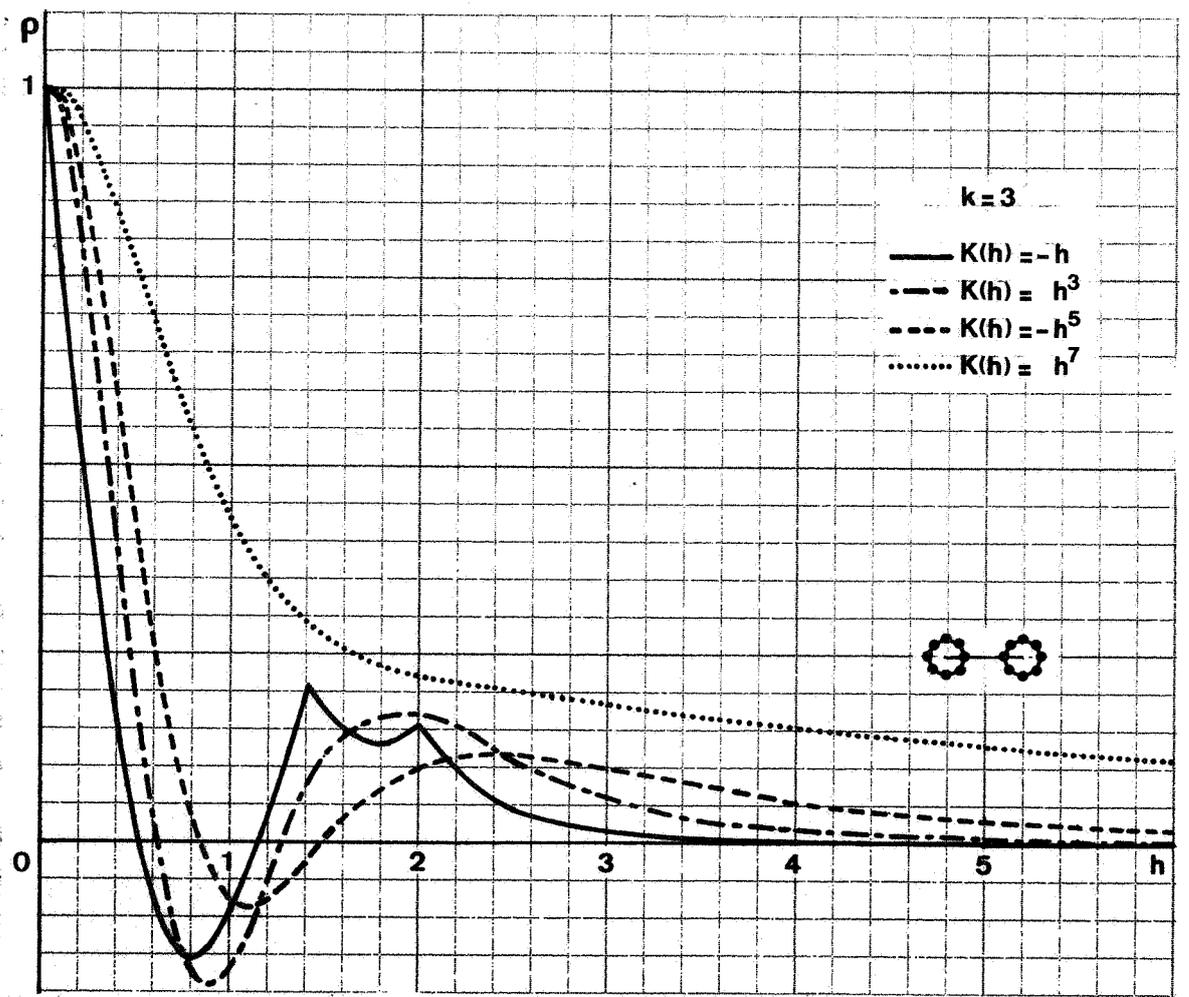
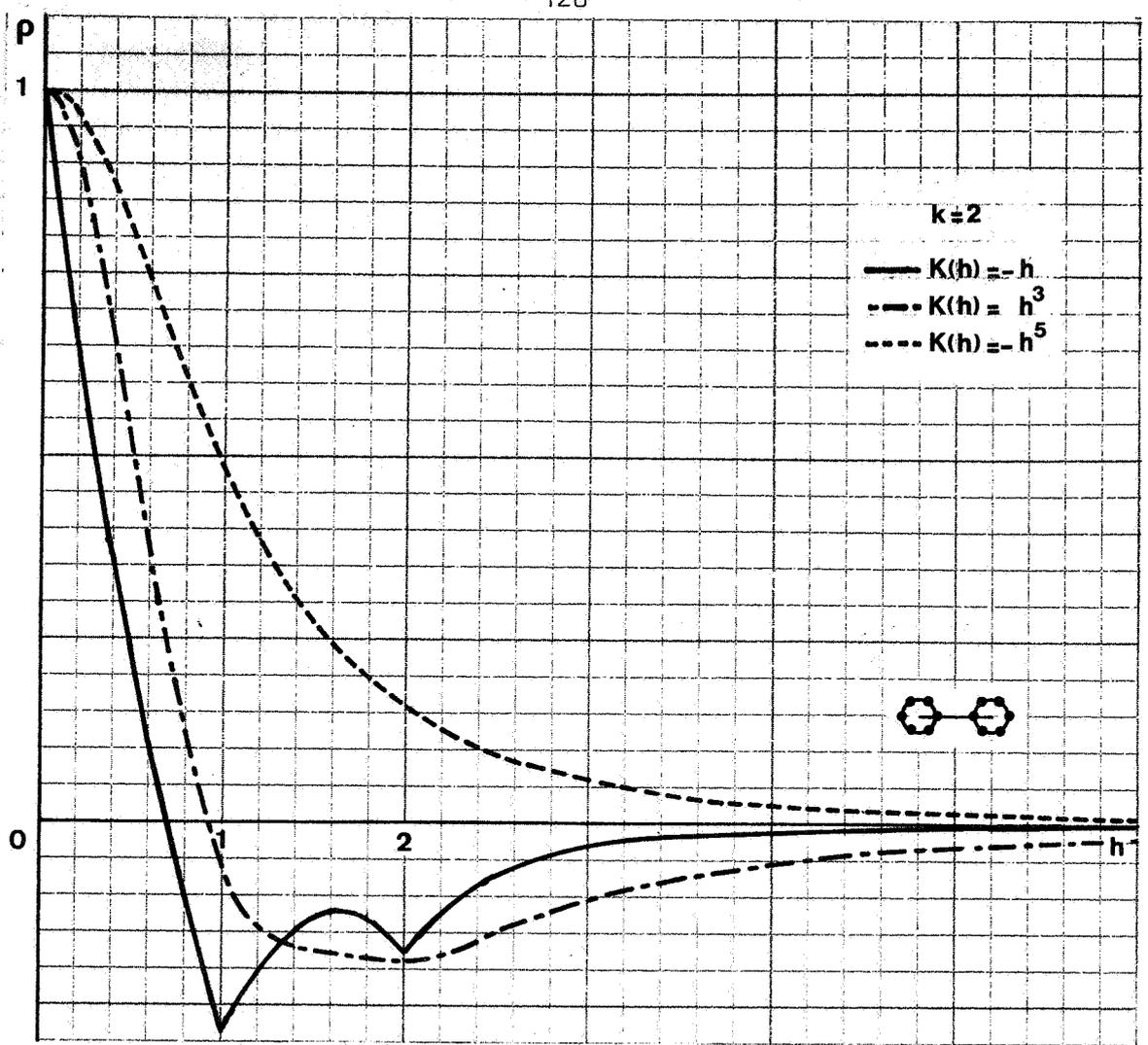


Fig.38 (suite) - Corrélogramme des accroissements d'ordre k sur le cercle

(ou des ellipses). C'est pourquoi on a effectué une étude du coefficient de corrélation  $\rho(\lambda, \mu)$  pour des mesures  $\lambda, \mu$  analogues à celles que l'on peut construire effectivement. Pour cela on a pris des données à maille régulière, ou aléatoire stratifiée, ou aléatoire pure, et on a considéré des mesures formées avec le minimum de points, c'est-à-dire  $(k+1)(k+2)/2+1$ . Ces points sont pris dans des auréoles de voisinages analogues aux voisinages de krigeage. On constate alors que la valeur absolue de  $\rho(\lambda, \mu)$  est généralement inférieure à 0.5 dès que les supports de  $\lambda$  et  $\mu$  n'ont pas plus de deux tiers de points communs, et qu'elle est pratiquement nulle dès que les supports sont disjoints.

#### 5 - CONCLUSION PRATIQUE

Les deux études qui précèdent indiquent que, lorsqu'on utilise des mesures construites sur des auréoles, on peut laisser les auréoles se chevaucher assez largement. De même on vérifie que les voisinages dans lesquels on construit ces auréoles n'ont pas besoin d'être disjoints : il suffit qu'ils n'aient pas plus de deux tiers de points communs avec le voisinage voisin pour que les auréoles des deux voisinages fournissent des combinaisons linéaires peu corrélées.

ANNEXE 2

MODELES DE SCHEMAS DE TRANSITION ADAPTES  
AUX SIMULATIONS PAR BANDES TOURNANTES DANS LE PLAN

1 - OBJECTIF DE L'ETUDE

Soit  $C_1(h)$  une covariance dans  $R^1$ . La méthode des bandes tournantes appliquée dans  $R^n$  lui fait correspondre dans  $R^n$  la covariance

$$C_n(h) = \int C_1(\langle h, s \rangle) \bar{\omega}_n(ds)$$

où  $\bar{\omega}_n$  est la probabilité uniforme sur la sphère unité de  $R^n$ .

Cette covariance est isotrope. Dans  $R^2$  ou  $R^3$  qui nous intéressent plus particulièrement, on a alors les relations :

$$C_2(h) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} C_1(h \cos \theta) d\theta$$

$$C_3(h) = \frac{1}{h} \int_0^h C_1(u) du \quad C_1(h) = \frac{d}{dh} h C_3(h)$$

D'autre part, on sait simuler facilement sur un segment une fonction aléatoire de covariance  $C_1(h)$  lorsque  $C_1(h)$  peut se mettre sous la forme du produit de convolution d'une fonction  $f$  et de sa transposée :

$$C_1(h) = fxf^v = \int f(u) f(u+h) du$$

Il suffit en effet de diluer des germes poissonniens par la fonction  $f$ .

Mais dans  $R^2$ , on n'est pas capable de déterminer la forme analytique des covariances  $C_1(h)$  associées aux schémas de transition classiques. Aussi est-on conduit à adopter la démarche qui consiste à se donner une famille de fonctions  $f(x)$ , à en déduire les covariances  $C_1(h)$  et  $C_2(h)$ , et à sélectionner les fonctions  $f(x)$  qui fournissent des schémas de transition intéressants. Comme ici nous recherchons des schémas de transition, nous nous limiterons à des fonctions  $f(x)$  de support borné. De plus, on sait que dans  $R^3$ , la fonction  $f(x)$  associée au schéma sphérique est une droite (sur un intervalle de longueur égale à la portée). Par analogie, nous étudierons uniquement des fonctions polynômiales, en général de degré inférieur ou égal à 2.

Avant de passer à cette étude, il est bon de remarquer que le comportement à l'origine de la covariance  $C_1(h)$  n'est pas modifié par les bandes tournantes. Supposons en effet qu'au voisinage de l'origine on ait :

$$C_1(h) = \sum_{\alpha} a_{\alpha} h^{\alpha}$$

on en déduit :  $C_2(h) = \sum_{\alpha} a_{\alpha} b_{\alpha} h^{\alpha}$  avec  $b_{\alpha} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta)^{\alpha} d\theta$

$$C_3(h) = \sum_{\alpha} \frac{a_{\alpha}}{\alpha+1} h^{\alpha}$$

## 2 - LES FONCTIONS DE DILUTION ET LES COVARIANCES $K_1(h)$

### A - La famille F des fonctions de dilution $f(x)$

On considère les fonctions  $f(x)$  qui sont de la forme d'un polynôme tronqué. On se limitera en pratique (sauf dans la dernière partie) à des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. Sans nuire à la généralité du problème, nous nous limiterons à des fonctions de support  $[0,1]$  et dont le covariogramme  $g(h)$  vérifie  $g(0) = 1$  (portée et palier unité).

Ainsi la famille F est constituée des fonctions  $f(x)$  telles que

$$f(x) = \begin{cases} a+bx+cx^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\int_0^1 f(x)^2 dx = 1$$

Par la suite, F désignera indifféremment la famille des fonctions  $f$ , la famille des covariogrammes associés, ou la famille des covariances qui s'en déduisent par bandes tournantes.

### B - Le covariogramme $g(h)$ et la covariance $K_1(h)$

$$g(h) = \int_0^h f(x) f(x+h) dx$$

Puisque le support de  $f$  est le segment  $[0,1]$ , on a ici :

$$g(h) = \int_0^{1-h} (a+bx+cx^2) (a+b(x+h)+c(x+h)^2) dx$$

$g(h)$  est en même temps un modèle de covariance  $K_1(h)$  dans  $R^1$

(nous noterons ici  $K(h)$  les covariances pour éviter une confusion de notation).

On obtient :

$$K_1(h) \equiv g(h) \begin{cases} a^2 A_1(h) + b^2 B_1(h) + c^2 C_1(h) + bc D_1(h) + ca E_1(h) + ab F_1(h) & \text{si } h \leq 1 \\ 0 & \text{si } h \geq 1 \end{cases}$$

avec :

$$\begin{aligned} A_1(h) &= 1-h \\ B_1(h) &= \frac{1}{3} - \frac{h}{2} + \frac{h^3}{6} \\ C_1(h) &= \frac{1}{5} - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{3} - \frac{h^5}{30} \\ D_1(h) &= \frac{1}{2} - h + \frac{h^2}{2} \\ E_1(h) &= \frac{2}{3} - h + h^2 - \frac{2}{3} h^3 \\ F_1(h) &= 1-h = A_1(h) \end{aligned}$$

La condition  $g(0) = 1$ , qui sera invariante par bandes tournantes, s'écrit alors :

$$a^2 + \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{5} + \frac{bc}{2} + \frac{2ca}{3} + ab = 1 \quad (1)$$

Les modèles élémentaires correspondent aux fonctions  $1, \sqrt{3} x, \sqrt{5} x^2$  sur  $[0,1]$ .

### C - Etude du comportement à l'origine

Cette covariance peut également se mettre sous la forme :

$$K_1(h) = 1 + \alpha_1 h + \alpha_2 h^2 + \alpha_3 h^3 + \alpha_4 h^4 + \alpha_5 h^5 \quad (2)$$

avec :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\frac{1}{2}(2a^2 + b^2 + c^2 + 2bc + 2ca + 2ab) \\ \alpha_2 &= \frac{1}{6}(2c^2 + 3bc + 6ca) \\ \alpha_3 &= \frac{1}{6}(b^2 - 4ca) \\ \alpha_4 &= 0 \\ \alpha_5 &= -\frac{c^2}{30} \end{aligned}$$

On obtient donc généralement un schéma linéaire à l'origine, de pente

$$\alpha_1 = -\frac{1}{2} [a^2 + (a+b+c)^2]$$

Il existe cependant une covariance sans terme linéaire ; elle est associée à :

$$a = 0 \quad b = -c = \pm \sqrt{30}$$

Le coefficient de  $h^3$  est alors :

$$\alpha_3 = 5$$

Par contre, on ne peut éliminer simultanément les termes en  $h$  et  $h^3$ .

### 3 - LES COVARIANCES $K_2(h)$ OBTENUES PAR BANDES TOURNANTES DANS $R^2$

#### A - Forme générale de $K_2(h)$

$K_2(h)$  se déduit de  $K_1(h)$  par la relation :

$$K_2(h) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} K_1(h \cos \theta) d\theta$$

Ici la covariance  $K_1(h)$  est un polynôme tronqué ; pour  $h \geq 1$ , la borne inférieure est donc en fait  $\text{Arc cos } \frac{1}{h}$ . On obtient :

$$K_2(h) = a^2 A_2(h) + b^2 B_2(h) + c^2 C_2(h) + bc D_2(h) + ca E_2(h) + ab F_2(h)$$

avec pour  $h \leq 1$  :

$$A_2(h) = 1 - \frac{2}{\pi} h$$

$$B_2(h) = \frac{1}{3} - \frac{2}{\pi} \left( \frac{h}{2} - \frac{h^3}{9} \right)$$

$$C_2(h) = \frac{1}{5} + \frac{h^2}{6} - \frac{2}{\pi} \left( \frac{h}{2} + \frac{4}{225} h^5 \right)$$

$$D_2(h) = \frac{1}{2} + \frac{h^2}{4} - \frac{2}{\pi} h$$

$$E_2(h) = \frac{2}{3} + \frac{h^2}{2} - \frac{2}{\pi} \left( h + \frac{4}{9} h^3 \right)$$

$$F_2(h) = A_2(h)$$

pour  $h \geq 1$  :

$$A_2(h) = 1 - \frac{2}{\pi} \text{Arc cos } \frac{1}{h} - \frac{2}{\pi} \left[ h - \sqrt{h^2 - 1} \right]$$

$$B_2(h) = \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{2}{\pi} \text{Arc Cos } \frac{1}{h} \right) - \frac{2}{\pi} \left[ \frac{h}{2} - \frac{h^3}{9} - \left( \frac{4}{9} - \frac{h^2}{9} \right) \sqrt{h^2 - 1} \right]$$

$$C_2(h) = \left( \frac{1}{5} + \frac{h^2}{6} \right) \left( 1 - \frac{2}{\pi} \text{Arc cos } \frac{1}{h} \right) - \frac{2}{\pi} \left[ \frac{h}{2} + \frac{4}{225} h^5 - \left( \frac{17}{50} + \frac{2}{225} h^2 + \frac{4}{225} h^4 \right) \sqrt{h^2 - 1} \right]$$

$$D_2(h) = \left(\frac{1}{2} + \frac{h^2}{4}\right) \left(1 - \frac{2}{\pi} \text{Arc cos } \frac{1}{h}\right) - \frac{2}{\pi} \left[h - \frac{3}{4} \sqrt{h^2-1}\right]$$

$$E_2(h) = \left(\frac{3}{2} + \frac{h^2}{2}\right) \left(1 - \frac{2}{\pi} \text{Arc cos } \frac{1}{h}\right) - \frac{2}{\pi} \left[h + \frac{4}{9} h^3 - \left(\frac{13}{18} + \frac{4}{9} h^2\right) \sqrt{h^2-1}\right]$$

$$F_2(h) = A_2(h)$$

Ces schémas se raccordent généralement assez lentement à leur palier. On trouve en effet comme développement en  $\frac{1}{h}$  aux grandes distances :

$$K_2(h) = \frac{2}{\pi} \left[ (6a+3b+2c)^2 \frac{1}{72h} + (60a^2+10b^2+3c^2+12bc+44ca+60ab) \frac{1}{1440h^3} + O\left(\frac{1}{h^4}\right) \right] \quad (3)$$

B - La sous-famille G des schémas sans terme en 1/h à l'infini

Nous nous intéresserons maintenant aux schémas qui atteignent leur palier le plus vite possible, autrement dit aux covariances dont le terme en  $\frac{1}{h}$  s'annule. Nous noterons G la sous-famille de F constituée de ces covariances (ou des fonctions f ou des covariogrammes g associés à ces covariances). Les éléments de G sont caractérisés par la relation :

$$6a+3b+2c = 0 \quad (4)$$

Si on ajoute la condition (1) exprimant que  $K_2(0) = 1$ , on obtient une famille à un seul paramètre. Si on prend c comme paramètre principal, on obtient :

$$a = \frac{c}{6} - \frac{\epsilon}{2} \sqrt{\frac{180-c^2}{15}} \quad b = -c + \epsilon \sqrt{\frac{180-c^2}{15}} \quad \epsilon = \pm 1$$

sous la condition que  $|c| \leq \sqrt{180}$

En fait les fonctions f et -f donnant le même covariogramme, on peut se limiter à  $\epsilon = +1$ . Si on reporte les valeurs de a et b dans (2), on obtient :

$$g(h) = 1 - \left(3 + \frac{c^2}{90}\right)h + \left(2 + \frac{2c^2}{45}\right)h^3 - \frac{c^2}{30} h^5 \quad (h \leq 1)$$

Le covariogramme ne dépend que de  $c^2$ ; on peut donc se limiter à  $c \geq 0$ , et paramétrer la famille G par :

$$\lambda = \frac{c^2}{180} \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

Le covariogramme s'écrit alors :

$$g(h) = 1 - (3+2\lambda)h + (2+8\lambda)h^3 - 6\lambda h^5$$

La famille G est donc un cône de covariogrammes de la forme

$$g(h) = (1-\lambda) g_1(h) + \lambda g_2(h) \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

avec pour éléments extrêmes :

$$\begin{aligned} g_1(h) &= 1-3h+2h^3 \\ g_2(h) &= 1-5h+10h^3-6h^5 \end{aligned} \quad (h \leq 1)$$

Les fonctions f associées sont définies par :

$$a = \sqrt{5\lambda} - \sqrt{3(1-\lambda)} \quad b = -6\sqrt{5\lambda} + 2\sqrt{3(1-\lambda)} \quad c = 6\sqrt{5\lambda}$$

En particulier, les fonctions  $f_1$  et  $f_2$  associées à  $g_1$  et  $g_2$  sont :

$$\begin{aligned} f_1(x) &= (-1+2x) \sqrt{3} \\ f_2(x) &= (1-6x+6x^2) \sqrt{5} \end{aligned} \quad \text{sur } [0,1]$$

De (3) on déduit qu'il existe dans G une covariance  $K_2(h)$  pour laquelle le coefficient du terme en  $\frac{1}{h^3}$  est nul ; c'est précisément celle qui correspond à  $\lambda=1$ , c'est-à-dire celle qui est associée à  $f_2$ .

Les covariances de G ont toutes un comportement linéaire à l'origine. Pour les covariogrammes, de (2) on déduit :

$$\alpha_1 = -(3+2\lambda)$$

pour les covariances  $K_2(h)$ , la pente à l'origine  $\bar{\omega}$  est donc :

$$\bar{\omega} = -\frac{2}{\pi}(3+2\lambda)$$

Les covariances  $K_2(h)$  de G présentent toutes un effet de trou plus ou moins marqué. L'effet de trou maximum (environ -0.15) est obtenu pour  $\lambda=1$ . L'effet de trou le plus faible (environ -0.08) correspond apparemment au paramètre qui donne  $a = 0$ , c'est-à-dire à  $\lambda = \frac{3}{8}$ . Ce schéma est associé à :

$$\begin{aligned} f_3(x) &= (-2x+3x^2) \sqrt{\frac{15}{2}} \\ g_3(x) &= 1 - \frac{15}{4} h + 5h^3 - \frac{9}{4} h^5 \end{aligned}$$

Ce schéma est particulièrement intéressant en pratique, car, parmi tous ceux de la famille F, c'est celui qui se rapproche le plus d'un schéma sphérique. Sa pente à l'origine est  $\bar{\omega} = -\frac{15}{2\pi}$

On trouvera aux figures 39 et 40 les courbes associées, dans  $R^1$  et  $R^2$ , aux fonctions  $f_1$ ,  $f_2$  et  $f_3$ , qui sont les plus caractéristiques de la famille.

C - Schémas sans terme linéaire à l'origine

Le seul que nous ayons obtenu à partir d'une fonction de F n'appartient pas à G. Il est associé à :

$$f_4(x) = (x-x^2) \sqrt{30}$$

$$g_4(h) = 1-5h^2+5h^3-h^5$$

La covariance  $K_2(h)$  qui s'en déduit a un terme en  $h^3$  de coefficient  $\frac{20}{3\pi}$ .

Mais ce schéma, n'appartenant pas à G, rejoint lentement son palier. Nous allons donc construire un autre schéma, en partant d'une fonction analogue aux précédentes, mais de degré 3. Remarquons tout d'abord que la relation (4) qui caractérise la famille G est identique à celle qui exprime que f est de somme nulle, puisque

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (a+bx+cx^2) dx = a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}$$

Cette propriété reste vraie pour des fonctions f de degré supérieur. En effet, soit f de la forme

$$f(x) = \begin{cases} \sum a_p x^p & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Il lui correspond un covariogramme de la forme :

$$g(h) = \begin{cases} \sum A_n h^n & \text{si } h \leq 1 \\ 0 & \text{si } h > 1 \end{cases}$$

Par bandes tournantes, quand h tend vers l'infini, on obtient, par développement limité à l'ordre 1 :

$$\begin{aligned} K_2(h) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{g(h \cos \theta)}{\text{Arc cos } \frac{1}{h}} d\theta \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{g(h \sin \tau)}{\frac{\pi}{2} - \text{Arc cos } \frac{1}{h}} d\tau \\ &\approx \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{1}{h}} \sum A_n h^n \tau^n d\tau \\ &= \frac{2}{\pi} \sum \frac{A_n}{n+1} \frac{1}{h} \end{aligned}$$

La condition pour que le terme en  $\frac{1}{h}$  disparaisse est donc que :

$$\sum \frac{A_n}{n+1} = 0$$

Cette condition peut également s'écrire :

$$\int g(h) dh = 0$$

puisque l'on a :

$$\int g(h) dh = 2 \int_0^1 \sum A_n h^n dh = 2 \sum \frac{A_n}{n+1}$$

or ceci équivaut à :

$$\int f(x) dx = 0$$

soit à la condition

$$\sum \frac{A_p}{p+1} = 0 \quad (5)$$

Nous cherchons donc une covariance  $K_2(h)$  obtenue à partir d'une fonction  $f$  de degré 3 et telle que son comportement ne comprenne pas de terme linéaire à l'origine, ni de terme en  $\frac{1}{h}$  à l'infini.

La première condition a pour conséquence que le covariogramme  $g$  associé à  $f$  n'a pas de terme linéaire, et admet donc une dérivée seconde, qui de plus est de somme nulle, et appartient donc, au signe près, à  $G$ . Donc  $f$  est l'intégrale d'une fonction de  $G$ , c'est-à-dire de la forme :

$$f(x) = (\sqrt{5\lambda} - \sqrt{3(1-\lambda)})x + (-3\sqrt{5\lambda} + \sqrt{3(1-\lambda)})x^2 + 2\sqrt{5\lambda}x^3$$

La seconde condition, qui s'exprime par la relation (5), conduit à  $\lambda=1$ .

Ainsi la seule fonction de degré 3 qui réponde au problème est :

$$f(x) = (x-3x^2+2x^3) \sqrt{5}$$

C'est l'intégrale de  $f_2$ . Son covariogramme est donc l'intégrale double de  $-g_2$ , au terme constant près. Ce terme constant vaut :

$$g(0) = \int f(x)^2 dx = \int_0^1 5 (x-3x^2+2x^3)^2 dx = \frac{1}{42}$$

Pour se ramener à un covariogramme tel que  $g(0) = 1$ , on prendra donc :

$$f(x) = (x-3x^2+2x^3) \sqrt{210} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

On en déduit :

$$g(h) = 1-21h^2+35h^3-21h^5+6h^7 \quad (h \leq 1)$$

$$K_2(h) = \begin{cases} 1 - \frac{21}{2} h^2 + \frac{2}{105\pi} (2450h^3 - 1176h^5 + 288h^7) & \text{si } h \leq 1 \\ (1 - \frac{21}{2} h^2) (1 - \frac{2}{\pi} \text{Arc cos } \frac{1}{h}) + \frac{2}{105\pi} [2450h^3 - 1176h^5 + 288h^7 - \frac{\sqrt{h^2-1}}{2} (-457 + 3940h^2 - 2064h^4 + 576h^6)] & \text{si } h \geq 1 \end{cases}$$

4 - LES COVARIANCES  $K_3(h)$  OBTENUES PAR TRANCHES TOURNANTES DANS  $R^3$

A - Forme générale de  $K_3(h)$

Ici les calculs sont beaucoup plus simples, car  $K_3(h)$  se déduit de  $K_1(h)$  par la relation :

$$K_3(h) = \frac{1}{h} \int_0^h K_1(u) du \quad (6)$$

Pour les covariances de la famille F, on obtient :

$$K_3(h) = a^2 A_3(h) + b^2 B_3(h) + c^2 C_3(h) + bc D_3(h) + ca E_3(h) + ab F_3(h) \text{ avec :}$$

pour  $h \leq 1$  :

$$A_3(h) = 1 - \frac{h}{2}$$

$$B_3(h) = \frac{1}{3} - \frac{h}{4} + \frac{h^3}{24}$$

$$C_3(h) = \frac{1}{5} - \frac{h}{4} + \frac{h^2}{9} - \frac{h^5}{180}$$

$$D_3(h) = \frac{1}{2} - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{6}$$

$$E_3(h) = \frac{2}{3} - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{3} - \frac{h^3}{6}$$

$$F_3(h) = A_3(h)$$

pour  $h \geq 1$  :

$$A_3(h) = \frac{1}{2h} \quad B_3(h) = \frac{1}{8h} \quad C_3(h) = \frac{1}{18h}$$

$$D_3(h) = \frac{1}{6h} \quad E_3(h) = \frac{1}{3h} \quad F_3(h) = A_3(h)$$

ainsi, pour  $h \geq 1$ , on a :

$$K_3(h) = (6a+3b+2c)^2 \frac{1}{72h}$$

B - La sous famille G

La condition pour que le terme en  $\frac{1}{h}$  s'élimine est encore que  $f$  appartienne à G. Ici, on peut sans peine calculer explicitement l'expression analytique des covariances extrêmes du cône G :

$$\bullet f_1(x) = (-1+2x) \sqrt{3} \rightarrow K_3(h) = 1 - \frac{3}{2} h + \frac{h^3}{2} \quad (\text{schéma sphérique})$$

$$\bullet f_2(x) = (1-6x+6x^2) \sqrt{5} \rightarrow K_3(h) = 1 - \frac{5}{2} h + \frac{5}{2} h^3 - h^5$$

Les covariances  $K_3(h)$  de G sont rigoureusement nulles pour  $h \geq 1$ . Leur pente à l'origine varie entre  $-\frac{3}{2}$  et  $-\frac{5}{2}$ .

Les covariances  $K_3(h)$  de G présentent un effet de trou pour  $\lambda > \frac{3}{8}$ , qui varie entre 0 pour  $\lambda = \frac{3}{8}$  et  $1 - \frac{3\sqrt{2}}{4} \approx -0.06$  en  $h \frac{\sqrt{2}}{2}$  pour  $\lambda = 1$ . Pour la valeur remarquable  $\lambda = \frac{3}{8}$ , que l'on avait déjà rencontrée précédemment, le raccordement au palier est en  $(1-h)^3$ .

$$f_3(x) = (-2x+3x^2) \sqrt{\frac{15}{2}} \rightarrow K_3(h) = 1 - \frac{15}{8} h + \frac{5}{4} h^3 - \frac{3}{8} h^5 = (1-h)^3 \left(1 - \frac{9}{8} h + \frac{3}{8} h^2\right)$$

On trouvera ces courbes à la figure 41.

C - Schémas sans terme linéaire à l'origine

La covariance en  $h^3$ , de F, associée à  $f_4$  est ici :

$$f_4(x) = (x-x^2) \sqrt{30} \rightarrow K_3(h) = \begin{cases} 1 - \frac{5}{3} h^2 + \frac{5}{4} h^3 - \frac{h^5}{6} & \text{si } h \leq 1 \\ \frac{1}{72h} & \text{si } h \geq 1 \end{cases}$$

De la relation (6), on déduit immédiatement que la condition pour qu'une fonction  $f$  de degré supérieur donne après tranches tournantes un schéma  $K_3(h)$  sans terme en  $\frac{1}{h}$  pour  $h > 1$  est la même que celle qu'on a obtenue précédemment pour  $K_2(h)$ . Il existe donc une seule solution  $f$  de degré 3 telle que  $K_3(h)$  ne comporte pas de terme linéaire et soit nulle pour  $h \geq 1$ . C'est la fonction  $f$  trouvée pour  $K_2(h)$  :

$$f(x) = (x-3x^2+2x^3) \sqrt{210} \rightarrow K_3(h) = 1-7h^2 + \frac{35}{4} h^3 - \frac{7}{2} h^5 + \frac{3}{4} h^7$$

## 5 - CONCLUSIONS PRATIQUES

Nous nous bornerons à quelques remarques concernant les simulations dans le plan par bandes tournantes (et non en prenant une section de simulation dans  $R^3$  par tranches tournantes).

### A - Simulation d'un schéma sphérique

On n'a pas trouvé de fonction  $f$  donnant exactement le schéma sphérique. Par contre la fonction  $f_3$  donne un schéma qui en est assez proche. Donc en prenant :

$$f(x) = \left(-2 \frac{x}{a} + 3 \frac{x^2}{a^2} \sqrt{\frac{15}{2} \frac{C}{a}}\right) \quad (0 \leq x \leq a)$$

on obtiendra un schéma de palier théorique  $C$ , de portée théorique  $a$ , de pente à l'origine  $\bar{\omega} = \frac{15}{2\pi} \frac{C}{a}$ , et présentant un faible effet de trou. Ce schéma est voisin d'un schéma sphérique de palier  $C$  et de portée  $\frac{\pi}{5} a$ .

### B - Simulation d'un schéma de transition en $h^3$

On pourra utiliser la fonction

$$f(x) = \left(\frac{x}{a} - 3 \frac{x^2}{a^2} + 2 \frac{x^3}{a^3}\right) \sqrt{210 \frac{C}{a}} \quad (0 \leq x \leq a)$$

Elle fournit un schéma de portée théorique  $a$ , de palier  $C$ , et dont le comportement au voisinage de l'origine est en  $\frac{140}{3\pi} C \frac{h^3}{a^3}$ . Notons que sa portée pratique est en fait de l'ordre de  $\frac{a}{2}$ .

Pour ce qui est du modèle de covariance à utiliser pour le krigeage, lors de la conditionnalisation, on pourra prendre le schéma associé à  $f(x)$  par tranches tournantes dans  $R^3$ , qui est voisin, mais avec une portée  $b$  différente de  $a$  telle que le coefficient du terme en  $h^3$  soit inchangé:

$$K(h) = C \left(1 - 7 \frac{h^2}{b^2} + \frac{35}{4} \frac{h^3}{b^3} - \frac{7}{2} \frac{h^5}{b^5} + \frac{3}{4} \frac{h^7}{b^7}\right) \quad (h \leq b)$$

avec  $b$  tel que

$$\frac{35}{4b^3} = \frac{140}{3\pi a^3}$$

soit :

$$b = \sqrt[3]{\frac{3\pi}{16} a}$$

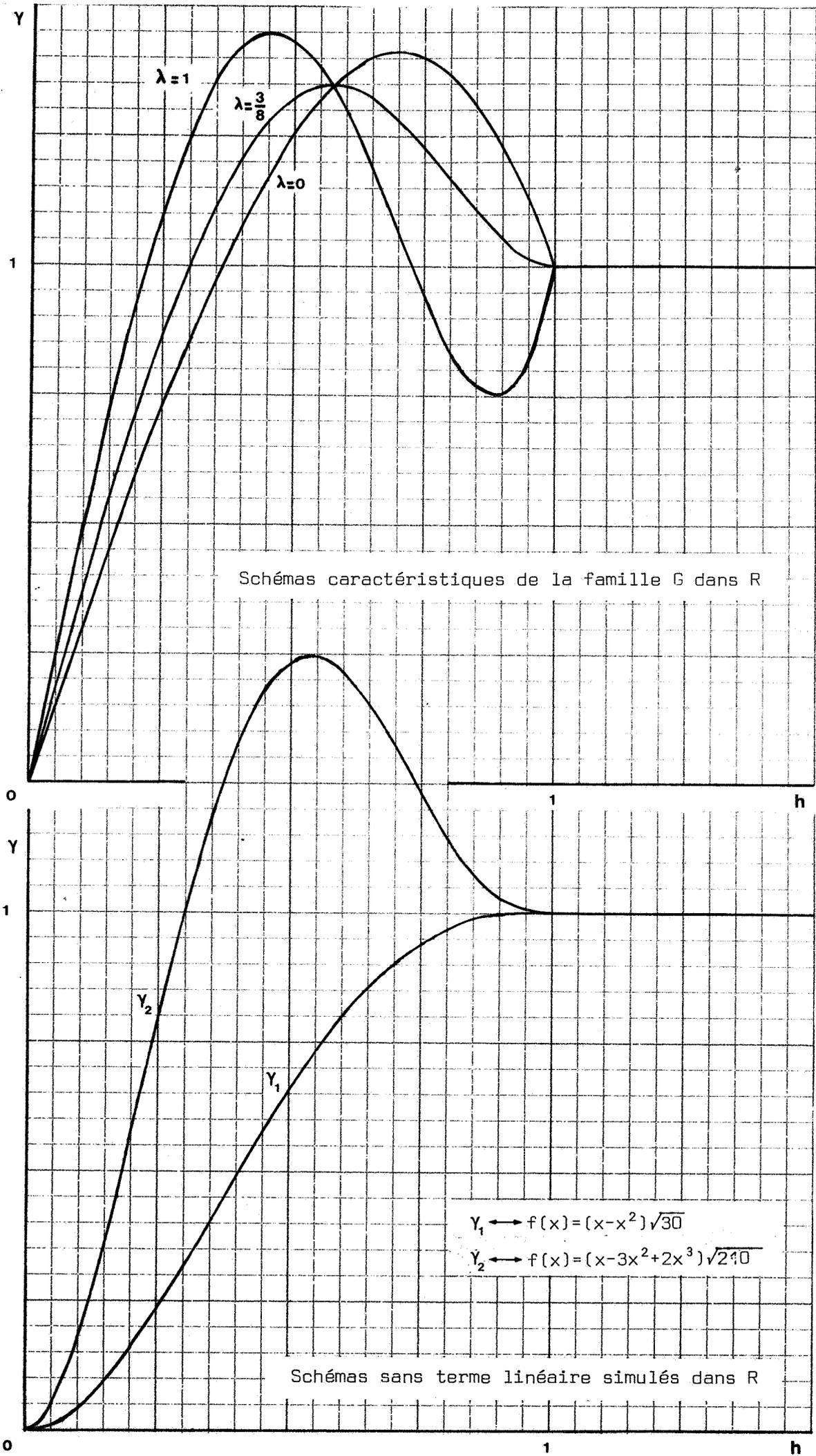


Fig. 39

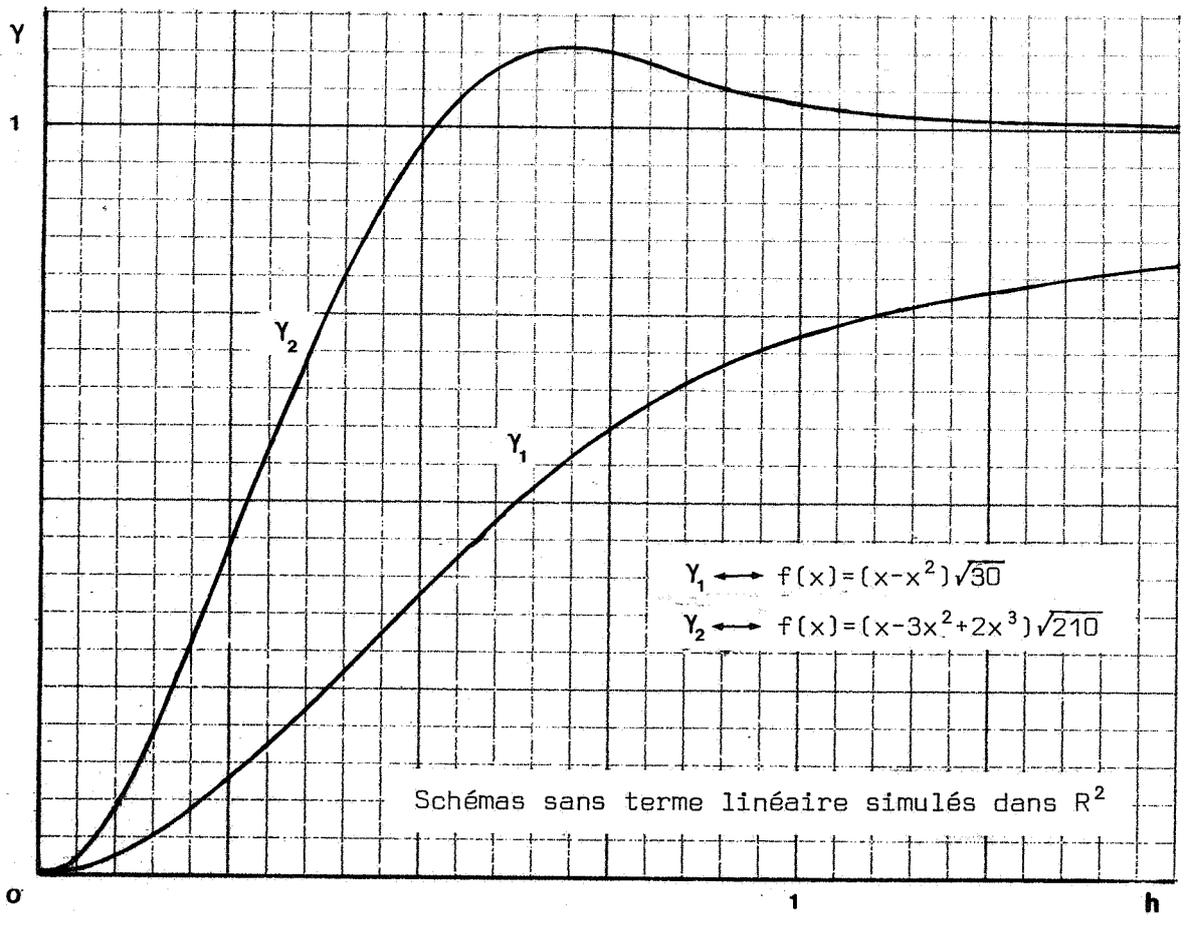
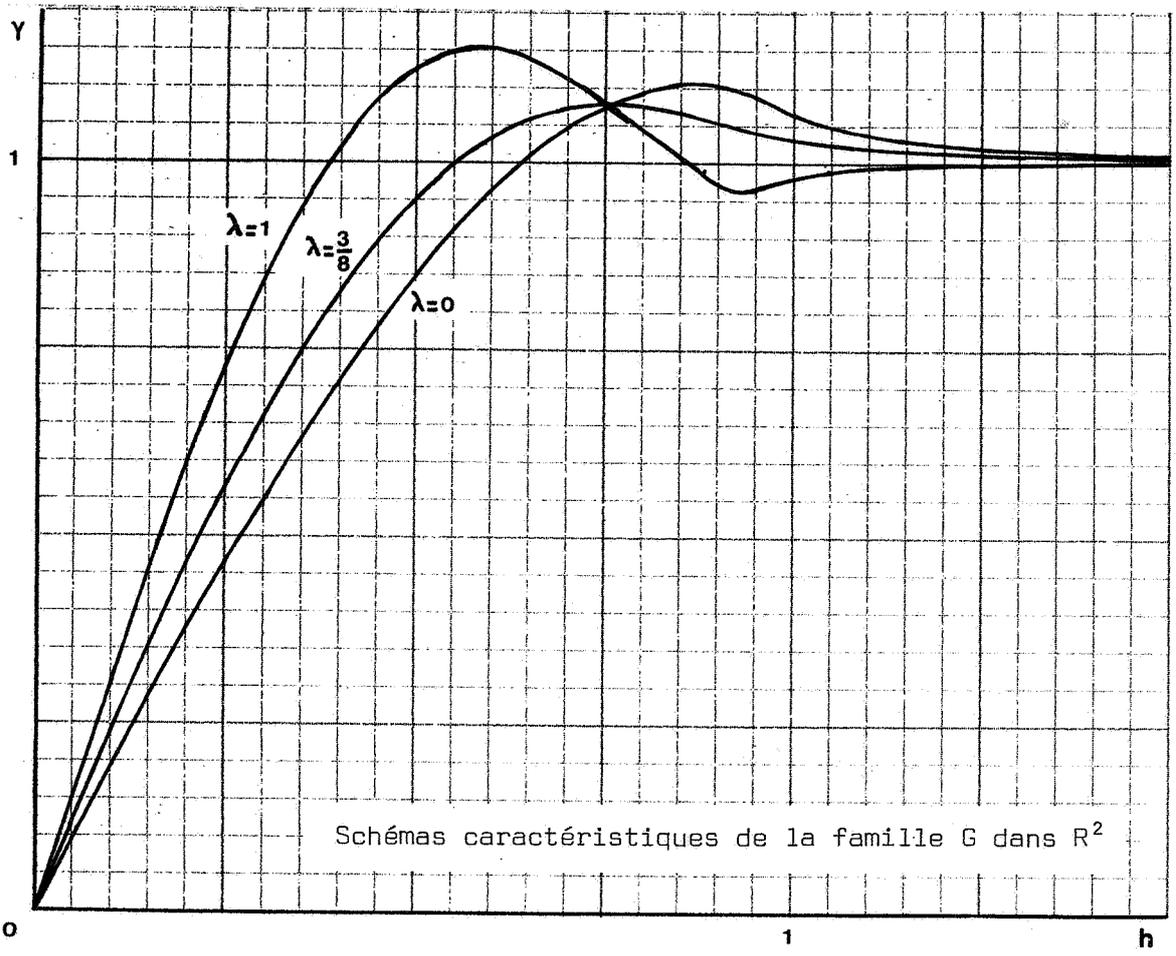


Fig. 40

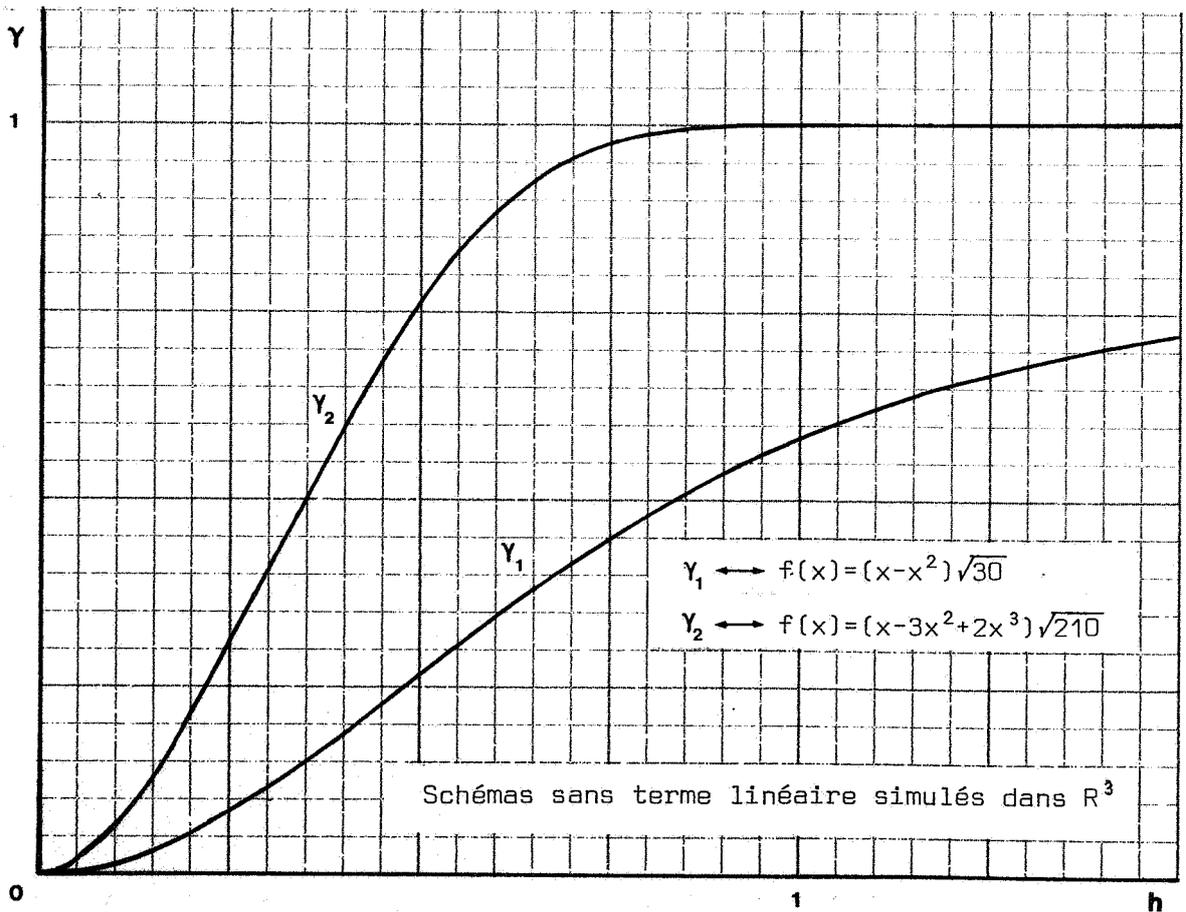
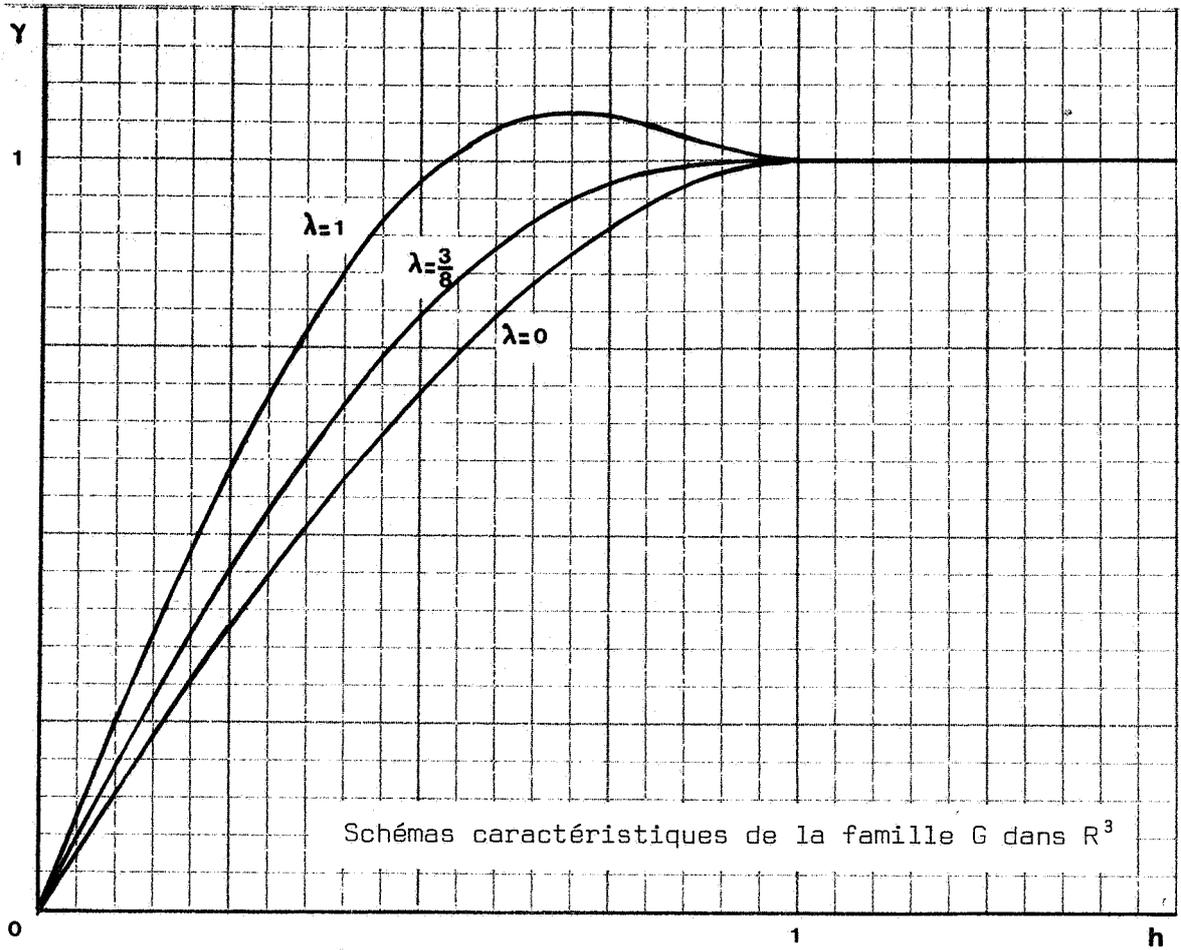


Fig. 41

ANNEXE 3  
 ETUDE DU BIAIS DU A LA DISCRETISATION  
 DES DIRECTIONS DES BANDES TOURNANTES

 1 - OBJECTIF DE L'ETUDE

La méthode des bandes tournantes permet de simuler une covariance  $K_n(h)$  dans  $R^n$  à partir de simulations, de covariance  $K_1(h)$ , sur des droites. Mais en toute rigueur, elle suppose que l'on utilise une infinité de simulations à une dimension, les directions des droites décrivant de façon continue et uniforme toutes les directions de  $R^n$ . Or en pratique, on remplace l'intégrale par une somme discrète. Il s'ensuit un biais, qui se manifeste par une anisotropie de la covariance effectivement simulée. Nous nous proposons ici d'évaluer l'importance de ce biais, en nous situant surtout du point de vue des applications dans l'espace à deux dimensions : simulations par bandes tournantes dans  $R^2$ , ou sections planes de simulations dans  $R^3$ .

 2 - LA COVARIANCE  $\tilde{K}_n(h)$  EFFECTIVEMENT SIMULEE

Comme nous obtiendrons des covariances anisotropes, nous emploierons fréquemment pour le vecteur  $h$  la notation  $h=ru$  où  $r = |h|$  et  $u = \frac{h}{r}$  (vecteur unitaire de même sens que  $h$ ).

Considérons tout d'abord le cas où on ne construirait qu'une seule bande tournante, associée à une droite de vecteur unitaire  $v$  ; le cas général s'en déduira par linéarité. Soit  $K_1(h)$  la covariance sur la droite. La covariance qui s'en déduit dans  $R^n$  par bandes tournantes est alors, pour  $h=ru$  :

$$\tilde{K}_n(h) = K_1(r\langle u, v \rangle)$$

C'est un modèle anisotrope. Mais si  $u$  est un vecteur aléatoire ayant une densité de probabilité uniforme  $\bar{\omega}_n(u)$  sur la sphère unité  $S_n$  de  $R^n$ , on a :

$$E[\tilde{K}_n(h)] = \int_{S_n} K_1(r\langle u, v \rangle) \bar{\omega}_n(u) du = K_n(r)$$

Ainsi le schéma moyen est bien  $K_n$  ; cependant l'anisotropie est importante : dans la direction de  $v$ ,  $\tilde{K}_n$  est égal à  $K_1$  ; dans les directions orthogonales,  $\tilde{K}_n$  est nul (ou constant, ce qui revient au même).

Il était évident dès le départ qu'on ne peut obtenir de bons résultats avec une seule bande tournante. En pratique, on utilise n bandes tournantes, et on a alors :

$$\tilde{K}_n(h) = \frac{1}{m} \sum_j K_1(r \langle u, v_j \rangle) \quad (1)$$

les m vecteurs  $v_j$  définissant les directions des droites des bandes tournantes.

Si u est aléatoire, de densité de probabilité uniforme sur  $S_n$ , on a encore :

$$E[\tilde{K}_n(h)] = K_n(r)$$

Quant à l'anisotropie, elle subsiste, mais elle est d'autant moins marquée que m est grand, du moins si les directions  $v_j$  sont bien réparties sur  $S_n$ .

Dans les paragraphes qui suivent, on étudie les anisotropies dans  $R^2$  et dans  $R^3$ . On se limitera aux schémas en  $r^\lambda$ , qui décrivent les différents comportements à l'origine possibles, et au schéma sphérique, représentatif des schémas de transition pour les distances supérieures à la portée.

### 3 - BIAIS POUR LES BANDES TOURNANTES DANS $R^2$

Nous utiliserons les coordonnées polaires : soit  $\theta$  l'angle polaire associé à u et  $\theta_j$  l'angle polaire associé au vecteur unitaire  $v_j$  d'une droite des bandes tournantes. La relation (1) s'écrit alors :

$$\tilde{K}_2(h) = \frac{1}{m} \sum_j K_1(r \cos(\theta - \theta_j)) \quad (2)$$

En pratique, on prend les  $\theta_j$  à maille régulière sur un intervalle d'amplitude  $\pi$ , soit :

$$\theta_j = \theta_0 + \frac{j\pi}{m}$$

#### A - Cas d'un schéma en $r^\lambda$

Soit  $K_1(h) = r^\lambda$  (au signe près).

On a alors :

$$\tilde{K}_2(h) = \frac{1}{m} \sum_j |\cos(\theta - \theta_j)|^\lambda r^\lambda = \tilde{A}_\lambda r^\lambda$$

$$K_2(h) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi |\cos(\theta - \xi)|^\lambda r^\lambda d\xi = A_\lambda r^\lambda$$

avec :

$$\tilde{A}_\lambda = \frac{1}{m} \sum_j |\cos(\theta - \theta_j)|^\lambda$$

$$A_\lambda = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \xi)^\lambda d\xi$$

Intéressons nous plus particulièrement au cas où  $\lambda = 2p+1$  ( $p \leq k$ ).  
De la relation

$$\frac{d}{d\xi} (\sin \xi \cos^n \xi) = (n+1) \cos^{n+1} \xi - n \cos^{n-1} \xi$$

On déduit par récurrence :

$$A_{2p+1} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2 \cdot 4 \dots (2p)}{3 \cdot 5 \dots (2p+1)}$$

On utilise couramment 180 droites tournantes ; l'erreur relative  $\frac{|\tilde{A}_\lambda - A_\lambda|}{A_\lambda}$  est alors de l'ordre de  $10^{-5}$  pour  $\lambda=1$ , et  $10^{-8}$  pour  $\lambda=3$  ou  $\lambda=5$ , soit une erreur infime. Même avec 15 droites, l'erreur relative est faible : de l'ordre de  $10^{-3}$  pour  $\lambda=1$ ,  $10^{-5}$  pour  $\lambda=3$ ,  $10^{-7}$  pour  $\lambda=5$ .

### B - Cas d'un schéma de transition

Pour  $h$  faible, on est ramené au cas précédent. Considérons alors le cas où  $h$  est supérieur à la portée. Nous supposons que  $K_1(h)$  et  $K_2(h)$  atteignent effectivement leur palier commun  $-C$  à la portée pratique  $a$ . Et nous raisonnerons sur la covariance généralisée qui s'annule en  $h=0$  ( $K=-\gamma$ ). Lorsque  $r$  tend vers l'infini, on a alors d'après (2) :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \tilde{K}_2(ru) = \frac{1}{m} \sum_j \lim_{r \rightarrow \infty} K_1(r \cos(\theta - \theta_j))$$

Deux cas se présentent :

- si  $u$  n'est orthogonal à aucun  $v_j$ , alors  $\lim_{r \rightarrow \infty} \tilde{K}_2(ru) = -C$
- si  $u$  est orthogonal à l'un des  $v_j$ , alors  $\lim_{r \rightarrow \infty} \tilde{K}_2(ru) = \frac{m-1}{m} C$

Il subsiste donc un léger biais, le variogramme n'atteignant pas réellement son palier dans les directions orthogonales à l'une des bandes tournantes. En pratique, quand on travaille avec 180 droites, ce biais est minime, et reste ridiculement faible par rapport à l'amplitude des fluctuations naturelles du variogramme expérimental d'une simulation autour du schéma théorique.

4 - BIAIS POUR LES TRANCHES TOURNANTES DANS  $R^3$

Ici le problème est plus complexe que dans le cas précédent, et ceci pour deux raisons : la première est que, si on s'intéresse à une section plane d'une simulation, la covariance anisotrope  $\tilde{K}_3(h)$  n'est même plus égale en moyenne à  $K_3(r)$ ; la seconde est qu'on ne peut discrétiser les directions des droites des bandes tournantes de façon régulière avec plus de 15 droites. Examinons ces points avant de passer à l'étude des conséquences sur les deux types de schémas.

A - Biais sur une section plane

On a vu que si  $u$  est un vecteur aléatoire de densité uniforme  $\bar{\omega}_3$  sur la sphère de rayon unité, on a :

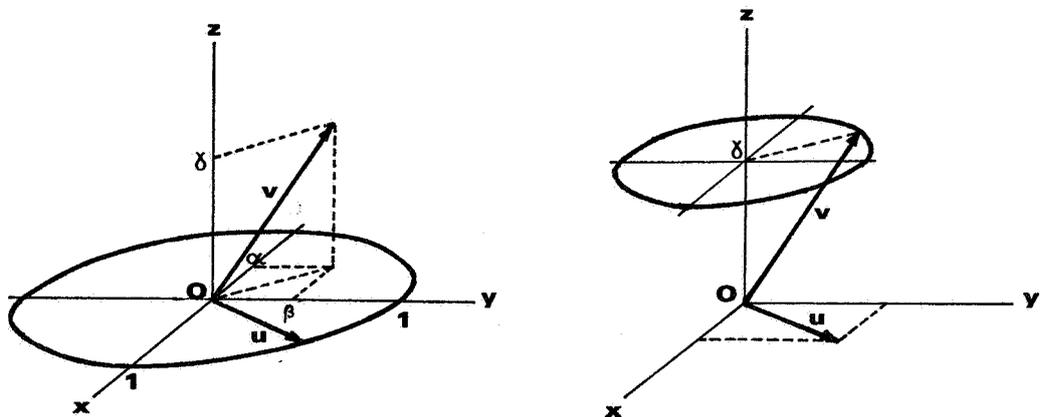
$$E[\tilde{K}_3(h)] = K_3(r)$$

Mais si on utilise la simulation dans  $R^3$  simplement pour en déduire, par section plane, une simulation dans  $R^2$ , on s'intéresse alors à la valeur moyenne de  $\tilde{K}_3(h)$  lorsque la loi de  $u$  est la densité uniforme  $\bar{\omega}_2(u)$  sur le cercle de rayon unité. Nous supposons, sans nuire à la généralité du problème, que  $u$  est dans le plan  $Oxy$ .

Considérons une seule droite des bandes tournantes, de vecteur unitaire  $v$ , ayant pour composantes  $(\alpha, \beta, \gamma)$ . On a alors :

$$E[\tilde{K}_3(h)] = E[K_1(r\langle u, v \rangle)]$$

où  $v$  est fixe et l'extrémité de  $u$  décrit uniformément le cercle de rayon unité. Mais par raison de symétrie, on obtient le même résultat en fixant  $u$ , et en faisant décrire uniformément à l'extrémité de  $v$  le cercle de rayon  $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$  situé dans le plan parallèle à  $Oxy$  au niveau  $z = \gamma$



Le résultat est indépendant du vecteur  $u$  choisi. Prenons donc  $u$  sur l'axe  $Ox$ . On a alors :

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cos\theta \\ \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \sin\theta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

avec  $\theta$  aléatoire, suivant une loi de densité uniforme sur  $[0, 2\pi]$ . On en déduit, en tenant compte des symétries :

$$E[\tilde{K}_3(h)] = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} K_1(r\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cos\theta) d\theta \quad (3)$$

Il subsiste bien un biais. Lorsqu'on multiplie le nombre des bandes tournantes, ce biais diminue. A la limite, si on utilise une infinité de droites, dont les directions sont réparties uniformément sur la sphère, on obtient  $E[\tilde{K}_3(h)] = K_3(r)$ . Mais en pratique, on se limite généralement aux 15 droites associées à l'icosaèdre, et le biais reste appréciable.

#### B - La discrétisation des directions des droites des tranches tournantes

Le mieux, a priori, est de prendre des droites nombreuses et uniformément réparties, c'est-à-dire déterminant des angles solides égaux ; on est alors conduit à utiliser les droites remarquables de polyèdres réguliers, et on ne peut obtenir plus de 15 droites, à savoir les 15 droites joignant les milieux de deux arêtes opposées de l'icosaèdre. Ces 15 droites se répartissent en 5 groupes de trièdres trirectangles se déduisant l'un de l'autre par la matrice de rotation  $S$  :

$$S = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -(k+1) & k \\ k+1 & k & -1 \\ k & 1 & k+1 \end{bmatrix}$$

où  $k$  désigne ici le nombre d'or  $k = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ . Pour plus de détails, on consultera [21].

On obtient ainsi une partition régulière de l'espace, mais les droites sont assez peu nombreuses, ce qui va se ressentir sur les simulations.

C - Cas des schémas en  $r^\lambda$

a - Biais moyen sur une section plane

Pour une bande tournante, associée à  $v$  de composantes  $(\alpha, \beta, \gamma)$ , et pour  $K_1(h) = r^\lambda$  (au signe près), la relation (3) s'écrit :

$$E[\tilde{K}_3(h)] = \tilde{A}(\alpha, \beta) r^\lambda$$

avec 
$$\tilde{A}(\alpha, \beta) = (\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{\lambda}{2}} \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta)^\lambda d\theta$$

En particulier, pour  $\lambda = 2p+1$ , on a :

$$\tilde{A}(\alpha, \beta) = (\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{2p+1}{2}} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2 \cdot 4 \dots (2p)}{3 \cdot 5 \dots (2p+1)}$$

Si on utilise  $m$  bandes tournantes, on aura de même

$$E[\tilde{K}_3(h)] = \tilde{A} r^\lambda \quad \text{avec} \quad \tilde{A} = \frac{1}{m} \sum_j \tilde{A}(\alpha_j, \beta_j)$$

Ainsi si on prend les 15 droites de l'icosaèdre comprenant les axes du trièdre  $O x y z$ , on obtient, pour  $\lambda = 2p+1$  :

$$A = \frac{1}{15} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2 \cdot 4 \dots (2p)}{3 \cdot 5 \dots (2p+1)} \cdot \frac{1}{2^p} \left[ 2^{2p} + (1+k^2)^{\frac{2p+1}{2}} + (1+(k+1)^2)^{\frac{2p+1}{2}} + (k^2+(k+1)^2)^{\frac{2p+1}{2}} \right]$$

Ceci au lieu d'obtenir

$$K_3(h) = A r^{2p+1} \quad \text{avec} \quad A = \frac{1}{2p+2}$$

Ce biais est relativement faible ; on a :

- pour $\lambda=1$	$A = \frac{1}{2}$	$\tilde{A} = 0.49314$
- pour $\lambda=3$	$A = \frac{1}{4}$	$\tilde{A} = 0.25044$
- pour $\lambda=5$	$A = \frac{1}{6}$	$\tilde{A} = 0.16617$

Il serait évidemment différent si on partait d'un trièdre différent ; mais il reste toujours assez faible.

b - Etude de l'anisotropie de  $\tilde{K}_3(h)$

D'après (1),  $\tilde{K}_3(h)$  est ici de la forme :

$$\tilde{K}_3(h) = \tilde{A}(u) K_3(r) \quad \text{avec} \quad \tilde{A}(u) = \frac{1}{m} \sum_j |\langle u, v_j \rangle|^\lambda$$

L'anisotropie de  $\tilde{K}_3(h)$  est donc représentée par  $\tilde{A}(u)$  ;  $\tilde{A}(u)$  dépend des vecteurs  $v_j$ , ou plus précisément de la position relative de  $u$  par rapport aux  $v_j$ . Pour étudier l'amplitude de l'anisotropie dans le cas où on utilise les 15 droites de l'icosaèdre, on peut donc fixer les  $v_j$ , et faire varier  $u$ . On peut donc prendre parmi ces 15 droites les axes du trièdre  $O x y z$ . En discrétisant  $u$  de façon régulière en coordonnées sphériques  $(\theta, \psi)$  de 5 degrés en 5 degrés, on a une bonne idée de l'anisotropie de  $\tilde{A}(u)$ . Les résultats pour les schémas en  $r^{2p+1}$  sont présentés à la figure 42. La moyenne de  $A$  est à peu de chose près égale à  $A = \frac{1}{2p+2}$  (l'espérance de  $\tilde{A}$  si la densité de  $u$  était uniforme sur la sphère unité). Les écarts de  $\tilde{A}(u)$  autour de  $A$  restent faibles, et ne dépassent guère 1 ou 2%.

$K_1(h)$	moyenne	écart-type	minimum	maximum
$-r$	0.499	0.009	0.465	0.507
$r^3$	0.250	0.001	0.249	0.254
$-r^5$	0.166	0.002	0.162	0.169

Fig. 42 - Caractéristiques de  $\tilde{A}(u)$  selon le schéma  $K_1(h)$

D - Cas des schémas de transition

On s'intéresse ici aux distances grandes par rapport à la portée. Comme précédemment, nous raisonnerons sur des covariances généralisées qui s'annulent en  $h=0$ , et qui atteignent leur palier commun  $-C$  à la portée pratique  $a$ . D'après (1), on a alors, lorsque  $r$  tend vers l'infini :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \tilde{K}_3(ru) = \frac{1}{m} \sum_j \lim_{r \rightarrow \infty} K_1(r \langle u, v_j \rangle)$$

Deux cas se présentent :

- si u n'est orthogonal à aucun des  $v_j$ , alors  $\lim_{r \rightarrow \infty} \tilde{K}_3(ru) = -C$
- si u est orthogonal à q des  $v_j$ , alors  $\lim_{r \rightarrow \infty} \tilde{K}_3(ru) = \frac{m-q}{m} C$

a - Biais moyen sur une section plane

Ce biais dépend de l'orientation du plan :

- si le plan n'est orthogonal à aucun des  $v_j$ , on aura, pour un vecteur u aléatoire de densité uniforme sur le cercle unité :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} E[\tilde{K}_3(h)] = -C$$

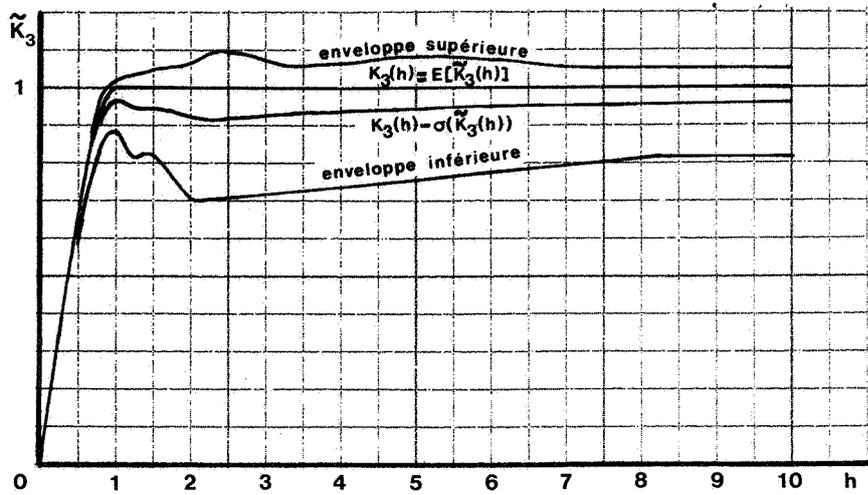
- si le plan est orthogonal à l'un des  $v_j$ , toutes les droites du plan lui sont orthogonales, et  $\lim_{r \rightarrow \infty} E[\tilde{K}_3(h)] = -\frac{m-1}{m} C$ .

Si l'on utilise les 15 droites de l'icosaèdre, le biais moyen peut donc être important : si les axes du trièdre O x y z appartiennent aux 15 droites, le variogramme n'atteindra, dans le plan Oxy, que le palier  $\frac{14}{15}C$ . Si on veut seulement obtenir une simulation sur une section plane, on a donc intérêt à choisir les 15 droites de façon qu'aucune ne soit orthogonale au plan. Mais on ne pourra éviter que  $\tilde{K}_3$  reste assez fortement anisotrope.

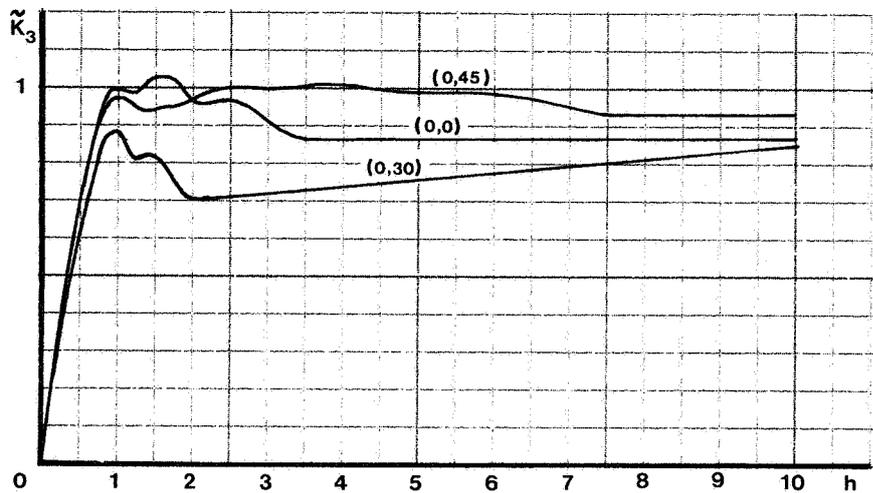
b - Etude de l'anisotropie de  $\tilde{K}_3(h)$

Elle est forte. Toujours dans le cas des 15 droites de l'icosaèdre, le variogramme simulé n'atteint que  $\frac{14}{15} C$  dans les directions orthogonales à l'une des droites, et  $\frac{13}{15} C$  dans les directions parallèles à l'une des droites.

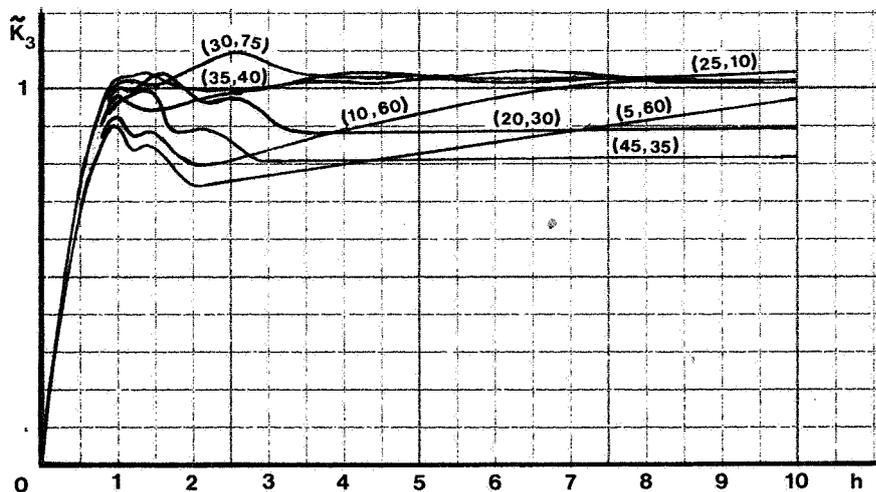
De même que pour les schémas en  $r^\lambda$ , on a calculé  $\tilde{K}_3(h)$  pour les directions de u correspondant à une discrétisation des coordonnées sphériques  $\theta$  et  $\psi$  de 5 degrés en 5 degrés ; ce calcul a été effectué pour le schéma sphérique de portée  $a=1$  et de palier  $C=1$ . La figure 43 synthétise les résultats. On voit que l'anisotropie est forte. Même dans des directions où le palier du variogramme est égal à 1, on ne l'atteint que très lentement : dans ces directions  $\tilde{K}_3(h)$  varie de 0.74 à 1.06 en  $h=2$ , et de 0.81 à 1.05 en  $h=10$ , ce qui est quand même beaucoup.



moyenne, écart-type  $\sigma$ , et enveloppes de  $\tilde{K}_3(h)$



exemples de courbes  $\tilde{K}_3(h)$  pour des directions  $u = (\theta, \phi)$   
où le palier n'est que 14/15 ou 13/15



exemples de courbes  $\tilde{K}_3(h)$  pour des directions  $u = (\theta, \phi)$   
où le palier est égal à 1.

( $\theta$  : longitude ;  $\phi$  : latitude)

Fig. 43 - Etude de l'anisotropie de  $\tilde{K}_3(h)$  pour un schéma de portée et de palier égaux à 1

5 - CONCLUSION PRATIQUE

On a vu que l'anisotropie de  $\tilde{K}_3(h)$  n'est notable que pour des simulations de schémas de transition dans  $R^3$ . Du point de vue de simulations dans le plan, cela enlève beaucoup d'intérêt à l'emploi de sections planes de simulations dans  $R^3$  : les fluctuations de  $\tilde{K}_3(h)$  selon la direction sont généralement bien plus importantes que l'écart entre le modèle que l'on veut simuler et le modèle que l'on sait effectivement simuler dans  $R^2$  (cf. l'annexe 2) ; il est alors préférable de s'en tenir aux simulations effectuées directement dans  $R^2$ . Une autre solution consiste à utiliser plus de droites que les 15 droites de l'icosaèdre ; leur choix pose évidemment un problème, car on ne pourra pas les répartir uniformément ; mais si elles sont suffisamment nombreuses, on doit tout de même obtenir des résultats meilleurs ; notons toutefois que cette solution ne peut être retenue que si elle n'allonge pas les calculs démesurément.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] P. CHAUVET et J.P. CHILES (1970)  
Application des théories du krigeage universel  
Rapport de stage, Compagnie Française des Pétroles, direction  
exploration
- [2] P. CHAUVET, J. PAILLEUX et J.P. CHILES (1976)  
Analyse objective des champs météorologiques par cokrigeage  
La météorologie, Sciences et Techniques, 6<sup>e</sup> série, N°4, mars 1976,  
p. 37-54
- [3] P. CHAUVET (1977)  
Exemple d'application de la géostatistique non stationnaire :  
le cokrigeage  
Proceedings Symposium the Mining Pribram in Science and Technique  
1977
- [4] J.P. CHILES (1972)  
Programmathèque  
Ecole des Mines de Paris, Centre de Morphologie Mathématique,  
N-276
- [5] J.P. CHILES et P. CHAUVET (1974)  
Le krigeage : méthode de cartographie des fonds marins  
Revue Hydrographique Internationale, Vol. LII, n°1, janvier 1975,  
p. 29-45
- [6] J.P. CHILES et P. DELFINER (1974)  
Reconstitution par krigeage de la surface topographique à partir  
de divers schémas d'échantillonnage photogrammétrique  
Société Française de Photogrammétrie, bulletin n° 57, janvier  
1975, p.42-50
- [7] J.P. CHILES (1976)  
Etude de la pollution de la forêt de Roumare en soufre et en  
fluor  
Ecole des Mines de Paris, Centre de Géostatistique, N-489

- [8] J.P. CHILES (1977)  
L'inférence statistique automatique des FAI-k  
Ecole des Mines de Paris, Centre de Géostatistique
- [9] J.P. CHILES (1977)  
SIMPACK : notice d'utilisation  
Ecole des Mines de Paris, Centre de Géostatistique
- [10] P. DELFINER (1973)  
Analyse objective du géopotential et du vent géostrophique par  
krigeage universel  
La Météorologie, Vol.25, p. 1-57  
Météorologie Nationale, note interne EERM n°321
- [11] P. DELFINER et J.P. DELHOMME (1973)  
Optimum interpolation by kriging  
Proceedings of NATO-ASI for Display and Analysis Spacial Data,  
Nottingham, 1973  
Ed. Wiley and Sons, London
- [12] P. DELFINER (1975)  
Linear estimation of non stationary spatial phenomena  
Proceedings of NATO-ASI, Advanced Geostatistics in the Mining  
Industry, Rome 1975  
D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland
- [13] P. DELFINER, J.P. DELHOMME et J.P. CHILES (1975)  
BLUEPACK : notice d'utilisation  
Ecole des Mines de Paris, Centre de Morphologie Mathématique -  
Centre d'Informatique Géologique
- [14] P. DELFINER et J.P. CHILES (1977)  
Conditional simulations : a new Monte Carlo approach to probabilis-  
tic évaluation of hydrocarbon in place  
à paraître
- [15] J.P. DELHOMME (1976)  
Applications de la théorie des variables régionalisées dans les  
Sciences de l'eau - Thèse de Docteur Ingénieur, Université Pierre  
et Marie Curie (Paris-6) - Ecole des Mines de Paris

- [16] C. HUIJBREGTS (1970)  
Le variogramme des résidus  
Ecole des Mines de Paris, Centre de Morphologie Mathématique,  
N-200
- [17] A. JOURNEL (1969)  
Rapport d'études sur l'estimation d'une variable régionalisée  
Ecole des Mines de Paris, Centre de Morphologie Mathématique,  
N-156
- [18] A. JOURNEL (1974)  
Simulations conditionnelles, théorie et pratique  
Thèse de Docteur Ingénieur, Université de Nancy I
- [19] N.K. GRIB et I.I. POLJAK (1972)  
Méthodes statistiques pour l'analyse objective des champs  
météorologiques (traduction)  
Trudy GGO n°272, Leningrad Gidrométéoizdat 1972, p.94-104
- [20] I.M. GUELFAND et N.Y. VILENKIN (1967)  
Les distributions, tome 4, Applications de l'analyse harmonique  
Dunod, Paris
- [21] D. GUIBAL (1972)  
Simulation de schémas intrinsèques  
Ecole des Mines de Paris, Centre de Morphologie Mathématique,  
N-291
- [22] K. KRAUS et E.M. MIKHAIL (1972)  
Linear least squares interpolation and filtering in computational  
photogrammetry  
Photogrammetric engineering, juin 1972
- [23] J.P. MARBEAU (1974)  
Test du nouvel algorithme de génération de nombres au hasard  
Ecole des Mines de Paris, Centre de Morphologie Mathématique,  
N-391

- [24] G. MATHERON (1962-1963)  
Traité de Géostatistique Appliquée (2 tomes)  
Ed. Technip, Paris
- [25] G. MATHERON (1965)  
Les variables régionalisées et leur estimation  
Masson & Cie, Paris
- [26] G. MATHERON (1969)  
Le krigeage universel  
Ecole des Mines de Paris, Cahiers du Centre de Morphologie  
Mathématique de Fontainebleau, fasc. 1
- [27] G. MATHERON (1970)  
La théorie des variables régionalisées, et ses applications  
Ecole des Mines de Paris, Cahiers du Centre de Morphologie  
Mathématique de Fontainebleau, fasc. 5.
- [28] G. MATHERON (1971)  
La théorie des fonctions aléatoires intrinsèques généralisées  
Ecole des Mines de Paris, Centre de Morphologie Mathématique,  
N-252
- [29] G. MATHERON (1972)  
Les covariances généralisées polynômiales  
Ecole des Mines de Paris, Centre de Morphologie Mathématique,  
N-299
- [30] G. MATHERON (1973)  
The intrinsic random functions and their applications  
Advances in Applied Probability, déc.73, n° 5, p. 439-468
- [31] G. MATHERON (1974)  
Représentations stationnaires et représentations minimales  
pour les FAI-k  
Ecole des Mines de Paris, Centre de Morphologie Mathématique,  
N-377

- [32] G. MATHERON (1975)  
A simple substitute for conditional expectation : the disjunctive kriging  
Proceedings of NATO-ASI, Advanced Geostatistics in the Mining Industry, Rome, 1975  
D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland
- [33] G. MATHERON (1975)  
Calage d'un réseau de points  
Ecole des Mines de Paris, Centre de Morphologie Mathématique, N-412
- [34] G. MATHERON (1976)  
Le choix et l'usage des modèles topo-probabilistes  
Ecole des Mines de Paris, Centre de géostatistique
- [35] J.P. ORFEUIL (1972)  
Simulation du Wiener-Lévy et de ses intégrales  
Ecole des Mines de Paris, Centre de Morphologie Mathématique, N-290
- [36] J.P. ORFEUIL (1973)  
Sur le programme RANDOM  
Ecole des Mines de Paris, Centre de Morphologie Mathématique, N-316
- [37] R. SABOURIN (1975)  
Application of two methods for an interpretation of the underlying variogram  
Proceedings of NATO-ASI Advanced Geostatistics in the Mining Industry, Rome 1975  
D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland
- [38] Total Compagnie Française des Pétroles et Société Nationale des Pétroles d'Aquitaine (1973)  
KRIGEPACK, manuel d'utilisation  
Société des Pétroles d'Aquitaine

[39] M. BECKER - JOUVINROUX (1976)

Validité des simulations de files d'attente

thèse d'Etat, Université Pierre et Marie Curie (Paris-6)