

## **RÉGULARISATION ET KRIGEAGE POUR LES PROBLÈMES MAL POSÉS UNE APPLICATION AU PROBLÈME DE POISSONISATION**

**Colin DALY**  
*ENSMP  
Centre de Géostatistique  
35 rue St-Honoré  
77305 Fontainebleau, France*

### **Abstract**

A problem is ill posed if it has a unique solution, but that this solution is not continuous with respect to small variations in the data. Regularisation is a method often used to stabilise ill posed problems by replacing the original problem with a similar one which is well posed. For the class of linear ill posed problems on a Hilbert space, we can find a dual formalism for the problem which may be interpreted as a kriging. This allows us to better understand, and sometimes to fit, the parameters used in the regularisation method. In the poissonisation problem we would like to estimate the underlying probability law given an observed histogram of data measured with Poisson noise. This problem is ill posed. We will apply the regularisation technique to obtain stable estimates.

### **Résumé**

Un problème est mal posé s'il a une solution unique, mais que cette solution n'est pas continue par rapport aux faibles variations des données expérimentales. La Régularisation est une méthode souvent utilisée pour stabiliser les problèmes mal posés en remplaçant le problème original par un autre problème qui lui ressemble mais qui est bien posé. Pour la classe des problèmes linéaires mal posés dans un espace de Hilbert, on peut trouver un formalisme dual qui admet une interprétation en termes de krigeage. Ceci nous aide à mieux comprendre, et parfois à ajuster, les paramètres utilisés dans la méthode de régularisation. Dans le problème de poissonisation, on veut estimer la loi de probabilité sous-jacente à partir d'un histogramme observé avec un bruit poissonien. Ce problème est mal posé. Nous appliquons la technique de régularisation pour obtenir des estimateurs stables.

### **TABLE DES MATIERES**

<b>1. INTRODUCTION</b> .....	
<b>2. LES PROBLÈMES MAL POSÉS</b> .....	
<b>3. SOLUTIONS DANS UN ENSEMBLE COMPACT</b> .....	
<b>4. LA RÉGULARISATION</b> .....	
<b>5. LA SOLUTION SOUS CONTRAINTES CONVEXES</b> .....	
<b>6. RÉGULARISATION ET KRIGEAGE</b> .....	
<b>7. APPLICATION AU PROBLÈME DE POISSONISATION</b> .....	
<b>8. CALCUL D'UNE SOLUTION POUR LE PROBLÈME DE POISSONISATION</b> .....	
<b>RÉFÉRENCES</b>	

## 1. INTRODUCTION

Dans la physique appliquée on rencontre assez souvent des problèmes inverses qui sont mal posés. Intuitivement un problème est mal posé si une petite variation des données observées implique de grandes variations de la solution. Une définition plus rigoureuse sera donnée par la suite. Un des premiers traitements des problèmes mal posés a été l'étude du problème de Cauchy pour l'équation de Laplace par J. Hadamard [1], qui a aussi proposé de classer les problèmes selon qu'ils sont bien posés ou mal posés. En fait, il a suggéré que les problèmes mal posés soient si possible reformulés en termes des problèmes bien posés et que seuls les problèmes bien posés puissent être traités correctement. Malheureusement on trouve des problèmes mal posés dans un grand nombre d'applications pour lesquelles la reformulation en termes de problèmes bien posés est difficile pour les calculs numériques ou n'est pas naturelle pour le problème. Il faut donc trouver une méthode qui dépende d'hypothèses réalistes stabilisant la solution du problème. Une telle méthode est la régularisation, [2]. Dans certains cas, la régularisation est équivalente au krigeage, ce qui peut nous permettre de mieux interpréter, et même dans certains cas de choisir, les paramètres nécessaires pour la mise en œuvre d'une régularisation.

Dans cette note, nous considérons l'application de la méthode de régularisation au problème de poissonisation : Si l'on bombarde un échantillon d'acier avec un faisceau d'électrons sur un certain nombre de points ou de pixels et qu'on compte le nombre de photons X qui sont émis avec une énergie fixe caractéristique d'un élément, alors pour chaque pixel le nombre de photons est une variable de Poisson ayant pour paramètre une variable proportionnelle à la concentration de l'élément. La carte ou l'image qu'on observe donne une représentation de la répartition spatiale de la concentration de notre élément mais contient un bruit poissonien qui à chaque pixel dépend de la concentration vraie. Un problème d'intérêt pour le métallurgiste est de connaître la loi sous-jacente à partir de l'histogramme de l'image observée. De plus il est important d'avoir un estimateur de la loi sous-jacente si l'on veut appliquer des méthodes statistiques de filtrage non-linéaires qui sont nécessaires pour l'estimation de certaines variables locales non-linéaires telles que l'histogramme local [3].

## 2. LES PROBLÈMES MAL POSÉS

Nous commençons par la définition d'un problème mal posé.

**DÉFINITION.** – Soit  $F$  et  $G$  deux espaces métriques et  $A : F \rightarrow G$  telle que :

- 1)  $A$  est injective
- 2)  $A$  est continue
- 3)  $A^{-1}$  n'est pas continue.

On dit alors que le problème inverse, à savoir : connaissant  $g \in G$ , trouver  $f \in F$  tel que  $f = A^{-1}g$ , est mal posé.

Une petite perturbation de  $g$  peut conduire à des valeurs très différentes de  $f$  à cause de la non-continuité de  $A^{-1}$ . Ceci est un problème réel, car dans la pratique on ne peut observer qu'une approximation de  $g$ , et même si on connaissait  $g$  avec exactitude, l'inversion numérique par ordinateur nous oblige à approximer  $g$  et  $A$  par la précision de la machine, ce qui suffit dans certains cas à provoquer de grandes variations sur l'estimateur de  $f$ .

Considérons maintenant quelques exemples de problèmes mal posés.

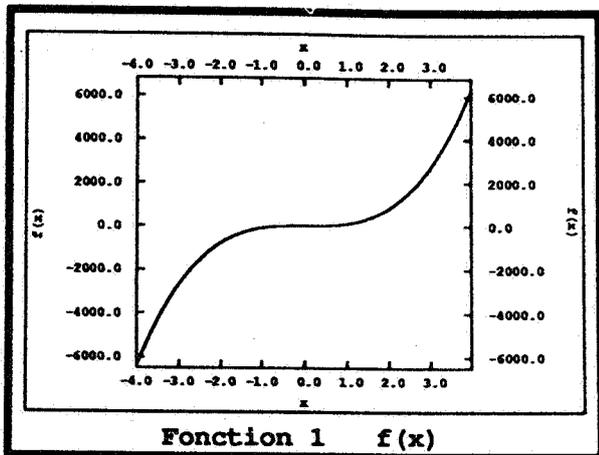


Figure 1.

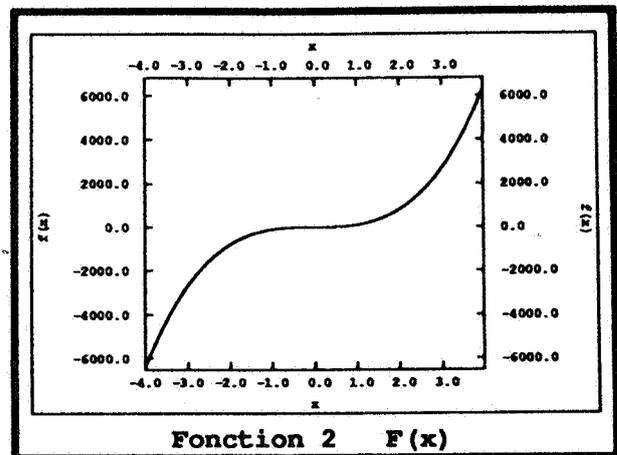


Figure 2.

1. – Si  $A : C^1[a, b] \rightarrow C[a, b]$  est défini par  $Af = f'$ , alors ce problème est mal posé parce que

$$\text{si } f(x) = g(x) + a \cos \omega x \Rightarrow f'(x) = g'(x) - a\omega \sin \omega x$$

et pour  $a$  petit  $\|f - g\| = \sup_x |f(x) - g(x)|$  est petit, mais pour  $\omega$  suffisamment grand,

$\|f' - g'\|$  peut être aussi grand qu'on veut. Par exemple, aux figures 1 et 2 on voit deux courbes qui sont presque identiques. Les dérivées d'ordre trois sont présentées aux figures 3 et 4 sur la même échelle. La différence importante entre les deux courbes, malgré un différence très petit des courbes de départ est caractéristique d'un problème mal posé.

Notons que ce problème peut être stabilisé par un choix de norme de type Sobolev sur l'espace de départ.

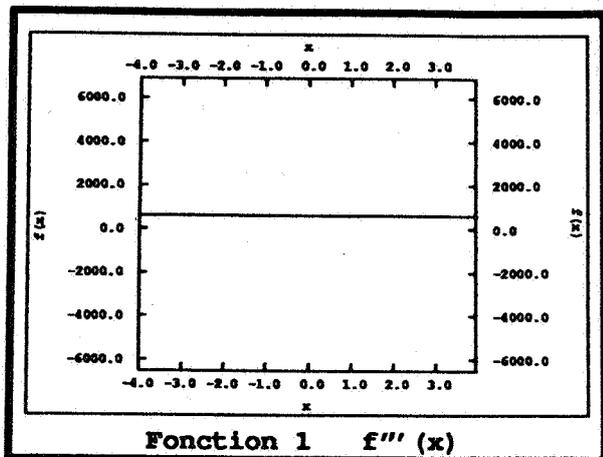


Figure 3.

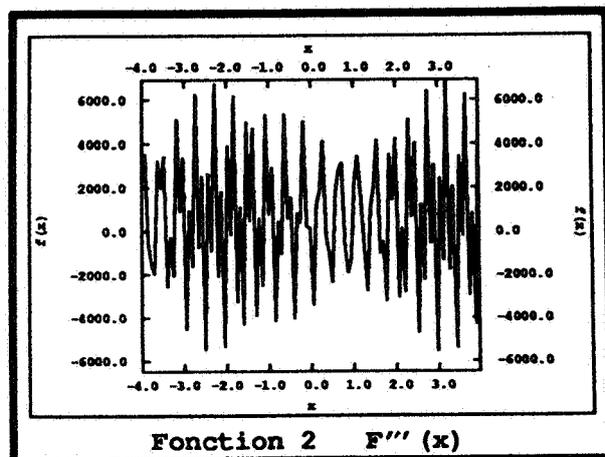


Figure 4.

2. — Soit

$$Af = \int K(x,y) f(y) dy$$

avec  $K \in L^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$  et  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ . Il est bien connu que  $A$  est complètement continue ([2]) et que ses valeurs propres n'ont de point limite qu'éventuellement à 0. Si 0 est un point limite mais n'est pas lui-même une valeur propre — ce qui sera le cas s'il n'existe pas de  $f \neq 0$  tel que  $Af = 0$ , alors  $A$  a un inverse. Mais puisque 0 est dans le spectre, ce n'est pas un point régulier et par conséquent  $A^{-1}$  n'est pas borné.

3. — Comme cas particulier de l'exemple précédent, on considère la convolution dans  $L^2$

$$g = Af = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y) f(y) dy.$$

Prenons la transformée de Fourier  $\tilde{g} = \mathcal{F}(g)$ , on obtient  $\tilde{g} = \tilde{K}\tilde{f}$ , d'où

$$f = \mathcal{F}^{-1}(\tilde{f}) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\tilde{g}}{\tilde{K}}\right)$$

si l'inverse existe.

Supposons maintenant que l'on observe une perturbation de  $g$ , soit  $g' = g + \epsilon$ . Alors notre estimateur de  $f$ ,  $f'$ , sera

$$f' = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\tilde{g}'}{\tilde{K}}\right) = f + \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\tilde{\epsilon}}{\tilde{K}}\right)$$

mais si  $\epsilon$  est un bruit blanc et si  $\tilde{K}(\omega) \rightarrow 0$  quand  $\omega \rightarrow \infty$ , l'estimateur n'existera pas. Dans un calcul numérique nous appliquons un seuillage du spectre et une "solution" existe, mais elle est instable par rapports aux petits changements de point de seuillage.

**NOTA.** — Le même problème persiste pour d'autres noyaux qui ont un théorème de multiplication pour une transformation, par exemple  $\int_0^\infty \frac{1}{y} f(y) K\left(\frac{x}{y}\right) dy$  et la transformée de Mellin.

4. — Un exemple de problème mal posé de convolution est l'opération géostatistique de la descente, où l'on veut connaître la fonction de covariance en  $n$  dimensions à partir d'une observation de la fonction de covariance sur un transect de  $n-1$  dimensions. Un problème étroitement lié à la descente est celui de la reconstitution de la granulométrie d'une population de sphères dans l'espace de  $n$  dimensions à partir des granulométries des cercles ou des cordes induites sur les espaces de dimension  $n-1$  ou  $n-2$ .

### 3. SOLUTIONS DANS UN ENSEMBLE COMPACT

Le lemme topologique suivant donne une première approche des problèmes mal posés. Il se démontre facilement avec un raisonnement par l'absurde, voir [3] pour plus de détails.

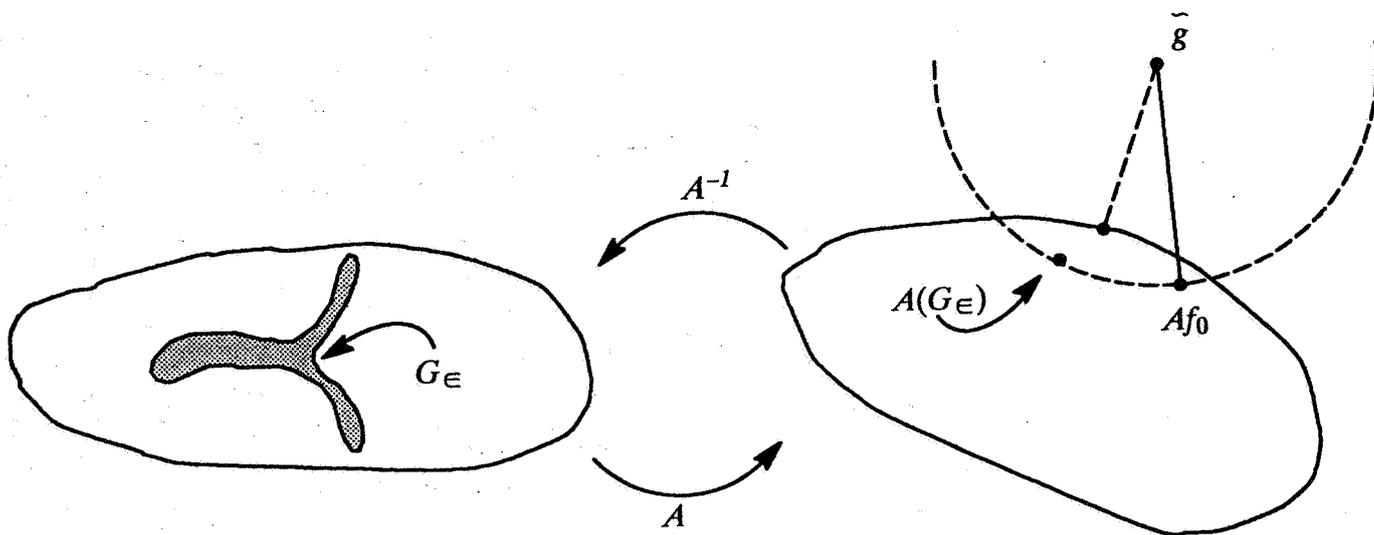
**LEMME** — Soient  $E$  et  $F$  des espaces métriques et  $A : E \rightarrow F$  continue et telle que  $A^{-1}$  existe. Soit  $K \subset E$  compact, alors  $A(K)$  est complet dans  $F$  et  $A^{-1}|_{A(K)}$  est continue.

Ce lemme est utile pour certaines applications : si l'on peut associer un élément de  $A(K)$  à des données expérimentales (par exemple par une projection), alors on sait que  $A^{-1}|_{A(K)}$  est continue et par conséquent nous avons un application continue entre les données et  $K$ , et le problème n'est plus mal posé. Malheureusement cette continuité est souvent de nature théorique, et les calculs numériques restent très mal conditionnés. Néanmoins si le compact  $K$  est "petit" on peut trouver des solutions acceptables. Par exemple si l'on sait que la solution réelle du problème de poissonisation doit être une loi gamma, alors notre solution dépend seulement de deux paramètres qui sont facilement estimés, de manière stable, à partir de l'histogramme observé (par exemple par la méthode des moments). Une autre application de ce lemme est l'estimation d'une fonction de covariance stationnaire pour le problème de déconvolution où le noyau de convolution est connu. En effet, l'ensemble des fonctions monotonement décroissantes et uniformément bornées est un compact dans l'espace  $L^2 [0, m]$  pour  $m$  fini, [2]. En

plus pour l'ajustement d'une fonction de covariance ou d'un variogramme on n'utilise qu'une famille assez petite de modèles (sphérique, exponentielle etc.). Il semble donc raisonnable grâce à ce lemme, qu'on puisse choisir un variogramme sous-jacent, calculer le variogramme théorique convolué et le comparer aux données expérimentales. Si l'ajustement est bon, on peut admettre que nous avons un modèle raisonnable pour le variogramme sous-jacent, au moins pour le palier et la portée. Une telle procédure a été appliquée dans [4] .

#### 4. LA RÉGULARISATION

Soient  $F$  et  $G$  des espaces métriques et  $A : F \rightarrow G$  un opérateur injectif et continu tel que  $A^{-1}$  n'est pas continu.  $A$  est donc un opérateur mal posé. Soit  $\Omega$  une fonctionnelle positive et continue sur  $F$  telle que  $\forall d \in \mathbb{R}$ , l'ensemble  $C_d = \{g \in F ; \Omega(g) \leq d\}$  est compact. Si  $f_0 \in F$  est la "fonction vraie" à estimer et si  $g = A f_0$  est la "fonction vraie déformée", notre but sera d'estimer  $f_0$  à partir d'une perturbation  $\tilde{g}$  de  $g$ . Supposons que  $d(g, \tilde{g}) \leq \epsilon$  pour une valeur de  $\epsilon$ , et appelons  $G_\epsilon = \{f \in F ; d(Af, \tilde{g}) \leq \epsilon\}$ , on peut démontrer que puisque  $C_d$  est compact pour chaque  $d$ , il existe au moins un point  $\tilde{f}$  qui minimise  $\Omega(f)$  dans  $G_\epsilon$ . Une  $\tilde{f}$  avec cette propriété s'appelle une solution régularisée et l'on peut démontrer que quand  $\epsilon \rightarrow 0$ , c'est-à-dire quand  $d(A\tilde{f}, \tilde{g}) \rightarrow 0$ , alors  $d(f_0, \tilde{f}) \rightarrow 0$  pour toute solution régularisée de  $\tilde{f}$ , [2]. On trouve alors une solution régularisée par la minimisation d'une fonctionnelle continue  $\Omega$  dans l'espace  $G_\epsilon$ ,  $G_\epsilon$  étant définie telle que  $Af$  est proche de  $\tilde{g}$  pour chaque  $f$  dans  $G_\epsilon$ .



Il se trouve que dans certaines conditions la minimisation se réduit à une minimisation sous contraintes linéaires : on dit que  $\Omega$  est presque strictement convexe si pour tout point  $f$  tel que  $\Omega(f) > \inf_{g \in F} \Omega(g)$ , alors dans chaque voisinage ouvert  $V$  contenant  $f$ , il existe  $g$  tel que  $\Omega(g) < \Omega(f)$ . Par exemple une forme quadratique positive  $\Omega$  dans un espace de Hilbert tel que  $\Omega \neq 0$  est presque strictement convexe. Le théorème suivant est démontré dans [2].

**THÉORÈME 5.1.** — Si  $\Omega$  est une fonctionnelle positive continue presque strictement convexe sur  $F$  alors un point  $f \in G_\epsilon$  qui minimise  $\Omega(f)$  sera tel que  $d(Af, \tilde{g}) = \epsilon$  et le problème de régularisation se réduit à une minimisation sous contraintes linéaires.

La méthode de Lagrange pour la minimisation consiste donc à minimiser

$$M^a = d^2(Af, \tilde{g}) + a \Omega(f)$$

sujet à la condition  $d(Af, \tilde{g}) = \epsilon$ . Si la méthode de Lagrange est réalisable et qu'on trouve un  $a = a(\epsilon)$  tel que la condition soit réalisée, alors la régularisation se réduit à la minimisation de  $M^a$ , sans aucune contrainte, avec ce choix de  $a$ . Notons que, bien que nous n'ayons considéré que le problème sans contraintes, il n'y a aucune difficulté théorique à en ajouter, sauf bien entendu au niveau du calcul.

A partir de maintenant, nous nous limitons aux problèmes mal posés linéaires dans un espace de Hilbert de fonctions sur  $\mathbb{R}^n$  et nous donnons les conditions sur  $\Omega$  et  $A$  pour que la méthode de Lagrange ait une solution unique, c'est-à-dire pour qu'il existe une solution régularisée unique au problème. Ici nous nous limitons à une brève indication de la régularisation dans un espace de Hilbert. Pour plus de détails voir [3]. Maintenant on prend pour  $\Omega$  une fonctionnelle quadratique positive et continue sur l'espace initial  $F$ . La mesure de la distance  $d(Af, \tilde{g})$  sur l'espace image  $G$  sera donnée par le produit scalaire sur  $G$ . Ces espaces de Hilbert ne peuvent pas être des espaces de fonctions quelconques. En particulier si  $H_x$  est la forme linéaire dans  $F'$  telle que  $\langle H_x, f \rangle = f(x) \forall x \in \mathbb{R}^n$ , alors il faut que  $H_x$  soit continue, et de plus on demande que  $F'$  soit engendré par  $\{H_x, \forall x \in \mathbb{R}^n\}$ . Des espaces avec cette propriété s'appellent des espaces de Hilbert autoreproduisants. On demande que  $G$  soit aussi un espace de Hilbert autoreproduisant et que  $G'$  soit engendré par  $\{L_x\}$ . Nous utilisons la même notation,  $L_x$ , pour le vecteur unique de  $G$  (théorème de Rietz) tel que  $\langle L_x, f \rangle = (L_x, f) \forall f$ , donc  $G$  est engendré par  $\{L_x\}$ . Soit  $S$  le sous-espace de  $G$  engendré par  $\{L_{x_a}\}$ , où les  $\{x_a\}$  sont les positions des données expérimentales.

Alors la mesure de la distance  $d(Af, \tilde{g})$  s'écrit en termes de la norme de  $G$   $((\tilde{g} - Af), \pi_S(\tilde{g} - Af))$ . Finalement supposons que le noyau de  $\Omega$  soit un espace de dimension fini  $N$ , et que  $\Omega$  soit coercive sur  $N^\perp$  (c'est à dire  $\Omega(f) > c \|f\| \quad \forall f \in N^\perp$ ), alors on peut remplacer la norme sur  $F$  par toute autre norme équivalente telle que  $\Omega(f) = \|\pi_{N^\perp} f\|$ , sans changer la solution du problème de régularisation.

Maintenant le problème de régularisation prend la forme

$$M(f) = \|\pi_{N^\perp} f\| + ((\tilde{g} - Af), \pi_S(\tilde{g} - Af))$$

Nous n'utiliserons pas d'indices pour distinguer les normes utilisées (le premier terme se rapporte à  $F$  et le second à  $G$ ) sauf s'il y a risque de confusion. Il est à noter que le problème de régularisation sans contraintes n'est rien d'autre que le problème de splines d'ajustement, et par conséquent le théorème d'équivalence entre splines d'ajustement et cokrigeage filtrant, [5],[6], doit s'appliquer. Avant de considérer cette équivalence, nous donnons un théorème d'existence de la solution du problème de régularisation sous contraintes.

## 5. LA SOLUTION SOUS CONTRAINTES CONVEXES

Dans un certain nombre d'applications, dont la poissonisation, on veut résoudre le problème dans un convexe donné,  $K$ . Autrement dit nous cherchons  $f \in K$  tel que  $f = \min_{g \in K} M(g)$ . Pour démontrer l'existence d'une solution unique nous avons besoin d'un théorème du à Stampachia [7].

**THÉORÈME (STAMPACHIA).** — Soit  $\Omega(x,y)$  une forme bilinéaire symétrique continue et coercive dans un espace de Hilbert  $F$ . Soit  $K$  un ensemble convexe fermé non vide. Pour chaque  $\varphi \in F'$ , il existe un  $f$  unique dans  $F$  tel que

$$\Omega(f, g-f) \geq \langle \varphi, g-f \rangle \quad \forall g \in K$$

De plus  $f$  est caractérisé par la propriété

$$\frac{1}{2} \Omega(f,f) - \langle \varphi, f \rangle = \text{Min}_{g \in K} \left\{ \frac{1}{2} \Omega(g,g) - \langle \varphi, g \rangle \right\}$$

On peut maintenant énoncer le théorème d'existence et d'unicité de la solution du problème de régularisation dans un convexe. Si l'on veut on peut l'interpréter comme un théorème d'existence et d'unicité des splines d'ajustement dans un convexe, et il est

intéressant de constater que les conditions nécessaires pour la démonstration sont plus faibles, et la démonstration est beaucoup plus facile, que le problème normalement étudié dans la littérature, à savoir l'existence d'un spline d'interpolation dans un convexe [8].

**THÉORÈME** – Soit  $K$  un ensemble convexe, fermé, non vide. Alors le problème de régularisation

$$\min_{f \in K} M(f) = ((g - Af), \pi_S(g - Af)) + \|\pi_{N^\perp} f\|$$

a une solution unique  $f \in K$  quand  $N \cap \ker \pi_S A = \{0\}$ .

**DÉMONSTRATION.** – Après quelques développements, on peut écrire  $M(f)$  sous la forme

$$M(f) = (g, g) + 2 \langle \varphi, f \rangle + B(f, f)$$

où  $(g, g)$  est une constante,

$\varphi$  est le représentant de  $A^*g$  dans  $F$

et  $B(f, f) = (\pi_{N^\perp} f, \pi_{N^\perp} f)_F + (\pi_S A f, \pi_S A f)_G$  est une forme bilinéaire continue et  $B(f, f)$  est coercive parce que  $N \cap \ker \pi_S A = \{0\}$ .

On peut donc appliquer le théorème de Stampachia pour conclure qu'une solution unique  $f \in K$  existe. De plus cette solution est caractérisée par

$$f \in K$$

$$(\pi_{N^\perp} f + A^* \pi_S A f - A^* g, h - f) \geq 0 \quad \forall h \in K \quad \blacksquare$$

## 6. RÉGULARISATION ET KRIGEAGE

Pour le problème sous contraintes il n'existe pas d'équivalence directe avec le krigeage. Mais on peut toujours interpréter les normes utilisées pour résoudre le problème de régularisation sur les deux espaces  $F$  et  $G$  en termes d'une fonction de covariance généralisée et d'une fonction de covariance du bruit respectivement. Cette interprétation est dérivée du théorème de G. Matheron sur l'équivalence des splines d'ajustement abstraits et du krigeage linéaire filtrant. Une démonstration explicite pour le problème de régularisation est donnée dans [3]. Ici nous ne donnons que l'énoncé de ce théorème.

**THÉORÈME** – Quand  $N$  est de dimension finie et  $N \cap \ker \pi_S A = 0$  alors les deux problèmes suivants ont des solutions uniques et identiques

$$1) \underset{f}{\text{Min}} M = ((g - Af), \pi_S(g - Af)) + \|\pi_{N^\perp} f\|$$

2) Trouver  $L_x^* \in S$  et  $H_x^* = A^* L_x^*$  tels que  $M' = \|H_x - H_x^*\| + \|L_x^*\|$  est un minimum et tel que  $(H_x - H_x^*, Y) = 0 \quad \forall Y \in N$ .

Le premier problème est effectivement le problème de régularisation. Le deuxième problème est simplement le problème de krigeage écrit dans une terminologie adaptée à la démonstration de l'équivalence [3]. Formellement on peut écrire,

$$Z(x) = AY(x) + \epsilon(x)$$

et l'on cherche un estimateur de la forme  $Y(x)^* = \sum \lambda^\alpha Z(x_\alpha)$ , tel que  $\text{Var}[Y(x)^* - Y(x)]$  est un minimum. On suppose que  $Y(x)$  est une fonction aléatoire stationnaire ou une FAI-k, avec covariance (éventuellement covariance généralisée)  $K(x-y)$ , et que  $\text{Cov}(\epsilon(x), \epsilon(y)) = \Sigma(x, y)$  est une fonction strictement définie positive.

Dans le cas de dimension finie, le problème de régularisation s'écrit

$$\underset{f}{\text{Min}} M(f) = (g - Af)^t B (g - Af) + \hat{f}^t \Omega \hat{f}$$

où  $B$  est la matrice de norme pour les erreurs. Une conséquence du théorème d'équivalence est que si l'on prend  $B = \Sigma^{-1}$  et  $\Omega$  tel que  $\Omega K \Omega = \Omega$  (un inverse généralisé de  $K$ ), alors les deux problèmes ont les mêmes solutions. Les pondérateurs  $\{\lambda^\alpha\}$  sont donnés par les équations de krigeage,

$$\lambda[A K A^t + B] + C^t A \hat{f} = K A^t$$

$$\lambda^t A \hat{f} = \hat{f}$$

L'intérêt du théorème d'équivalence est qu'il nous donne le moyen, au moins heuristique, de choisir les normes utilisées pour la régularisation. Elles doivent être les inverses des matrices de covariances du signal et du bruit. En fait nous avons déjà remarqué que dans le cas d'une déconvolution, où la fonction aléatoire sous-jacente est stationnaire, on peut estimer la fonction de covariance, et donc la norme  $\Omega$ , à partir des données expérimentales. De la même manière, si la fonction aléatoire sous-jacente est une FAI-k, il est possible de construire une procédure d'inférence pour la covariance généralisée, et donc pour  $\Omega$ , basée sur l'approche usuelle utilisé en géostatistique non-stationnaire [3].

## 7. APPLICATION AU PROBLÈME DE POISSONISATION

Soit  $F(x)$  une loi de probabilité associée à la mesure  $\mu(x)$  qui, dans l'application à la métallurgie, représente la concentration vraie d'un échantillon. Appelons  $G(n) = P(\mu)$  (on utilise aussi la notation  $G = P(F)$ ) la poissonisation de  $F$ . Il s'agit d'une loi de probabilité discrète donnée par la loi de probabilité totale

$$G(n) = \int e^{-x} \frac{x^n}{n!} d\mu(x)$$

$G(n)$  est la loi qu'on observerait si l'on pouvait prendre une infinité d'échantillons selon la loi  $F(x)$  sujette à un bruit poissonien.

Malheureusement on ne dispose que d'un nombre fini d'échantillons. Ce qui est disponible en pratique est une approximation  $g(n)$  de  $G(n)$ . En général  $g(n)$  n'est la poissonisation d'aucune loi  $F(x)$  et il n'existe pas de méthode simple qui nous permette de retrouver  $F(x)$  à partir de  $g(n)$ . Toutefois on a le résultat suivant.

**LEMME.** — L'application de la poissonisation  $P : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  satisfait à

- 1)  $P$  est linéaire
- 2)  $P$  est injective.

**DÉMONSTRATION.** — La linéarité est évidente. Il reste à démontrer l'injectivité. Soit  $\mu \in \mathcal{M}$  et  $p \in P(\mu)$ , la fonction génératrice de  $p$ ,  $G_p(s) = E[s^p]$  est (avec un léger abus de notation) :

$$G_p(s) = E[s^p] = E[E[s^p/\mu]] = E[e^{(s-1)\mu}] = L_\mu(1-s) \quad 0 \leq s \leq 1$$

où  $L_\mu$  est la transformée de Laplace de  $\mu$ . Si  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont telles que  $P(\mu_1) = p = P(\mu_2)$ , alors

$$L_{\mu_1}(s) = L_{\mu_2}(s) \quad 0 \leq s \leq 1$$

La transformée de Laplace est une fonction holomorphe et par conséquent les arguments classiques de l'analyse complexe nous permettent de conclure que les transformées sont identiques pour  $s \geq 0$  et par suite le théorème de l'inversion pour les transformées de Laplace donne  $\mu_1 = \mu_2$  pp (presque partout) et l'injectivité est démontrée. ■

Soit  $\mathcal{M}$  l'espace des mesures de probabilités positives. Donc  $\mu \in \mathcal{M}$  si et seulement si  $\text{Supp } \mu \subset \mathbb{R}^+$  et  $\int \mu = 1$ . Si  $K$  est un compact dans  $\mathbb{R}^+$ , nous appelons  $\mathcal{M}_K$  l'espace des mesures avec support dans  $K$ .

Il est clair que  $\mathcal{P}(\mathcal{M}) \subset \ell^1$  puisque  $\sum G(n) = 1$ . On peut démontrer que  $\mathcal{P} : \mathcal{M} \mapsto \mathcal{P}(\mathcal{M}) \subset \ell^1$  est un isomorphisme et donc  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}^{-1}$  sont des applications

continues [3]. Donc la poissonisation considérée dans  $\ell^1$  est un problème bien posé. Malheureusement, il n'est pas très facile de travailler dans  $\ell^1$ , et pour avoir un théorème de projection, qui nous fournit avec un estimateur unique, nous sommes obligés de considérer l'espace image  $\mathcal{P}(\mathcal{M})$  comme un sous-ensemble de  $\ell^2$ . Mais l'application inverse  $\mathcal{P}^{-1} : \mathcal{P}(\mathcal{M}) \mapsto \mathcal{M}$  n'est pas continue. En effet, soit  $\mu_n = \delta_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  où  $\delta_n$  est la mesure de probabilité qui attribue le poids 1 à  $n$ . Alors  $\mu_n \in \mathcal{M} \quad \forall n$  mais  $\mu_n$  ne converge pas vers une loi de probabilité.

Posons  $P(\mu_n) = p_n$ . Alors

$$p_n(m) = e^{-n} \frac{n^m}{m!}$$

et on trouve que

$$\|p_n\|_2^2 = e^{-2n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{n^{2m}}{(m!)^2} = e^{-2n} J_0(2in)$$

où  $J_0(2in)$  est la fonction de Bessel de première espèce. Un développement asymptotique de cette fonction montre que  $\|p_n\|_2 \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ . Puisque  $p_n(m) \rightarrow 0$  pour chaque  $m$ , il suit que  $p_n \rightarrow 0$  dans  $\ell^2$ . Par conséquent on a trouvé une séquence convergente  $\{p_n\}$  dans  $\ell^2$ , telle que  $\mathcal{P}^{-1}(p_n)$  ne converge pas dans  $\mathcal{M}$ , et l'application inverse n'est pas continue. Le sous-ensemble  $\mathcal{M}_K \subset \mathcal{M}$  est compact pour chaque compact  $K \subset \mathbb{R}$  [3], et donc à cause du lemme (§3) la continuité peut être réimposée si l'on travaille dans  $\mathcal{M}_K$ . Ceci reste vrai pour les espaces  $\ell^2(\omega)$  pour une certaine classe de pondérateurs  $\omega$  dont ceux choisis tels que  $\omega(n) = p(n)$  où  $p(n)$  est la poissonisée d'une loi de probabilité. Mais comme nous allons voir, cette continuité n'est pas suffisamment forte pour que l'estimateur soit stable. Il semble donc nécessaire d'utiliser la régularisation pour obtenir un estimateur stable pour le problème de poissonisation.

## 8. CALCUL D'UNE SOLUTION POUR LE PROBLÈME DE POISSONISATION

Cherchons d'abord un estimateur discret de moindres carrés classique de la loi sous-jacente  $F(x)$  de la forme

$$\hat{F}(dx) = \sum_{i=1}^n \hat{p}_i \delta_{x_i}(dx)$$

d'où

$$\hat{G}(n) = \sum_i e^{-x_i} \frac{x_i^n}{n!} \hat{p}_i$$

et on essaye maintenant de trouver la loi  $\hat{G}(n)$  telle qu'elle soit la plus proche de  $g(n)$  au sens de  $\ell^2(\omega)$ . C'est-à-dire qu'on choisit  $\hat{G}(n)$  telle que

$$d = \sum_0^{\infty} (g(n) - \hat{G}(n))^2 \omega(n)$$

est un minimum. Les  $\omega(n)$  sont des pondérateurs. Un bon choix est  $\omega(n) = 1/g(n)$  si  $g(n)$  est assez grand (un choix qui semble assez bon est  $\sup_n g(n) > 300$ ). La

minimisation doit respecter les contraintes  $\hat{p}_i \geq 0$  et  $\sum \hat{p}_i = 1$ . Autrement dit, la minimisation a lieu dans un ensemble convexe.

Comme prévu, l'estimateur de moindres carrés n'est pas très bon. Pour la loi  $F(x)$  donnée à la figure 5, et l'observation bruitée à la figure 6, on obtient l'estimateur par moindres carrés de la figure 7.

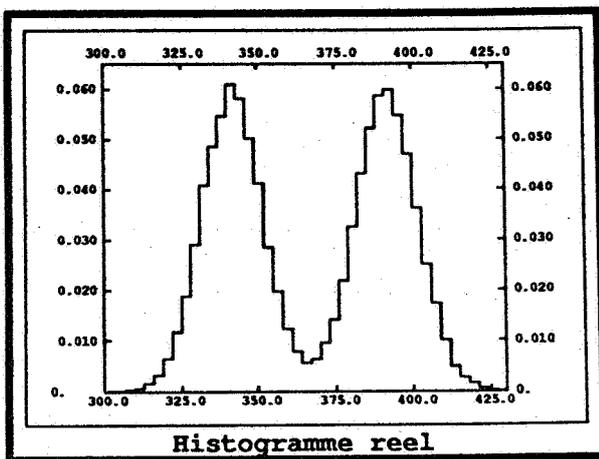


Figure 5.

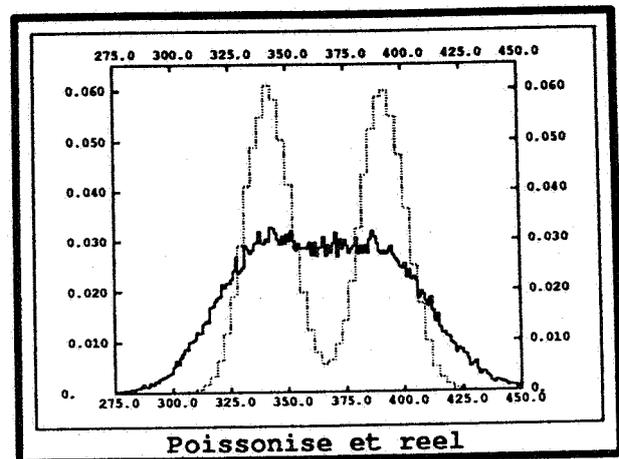


Figure 6.

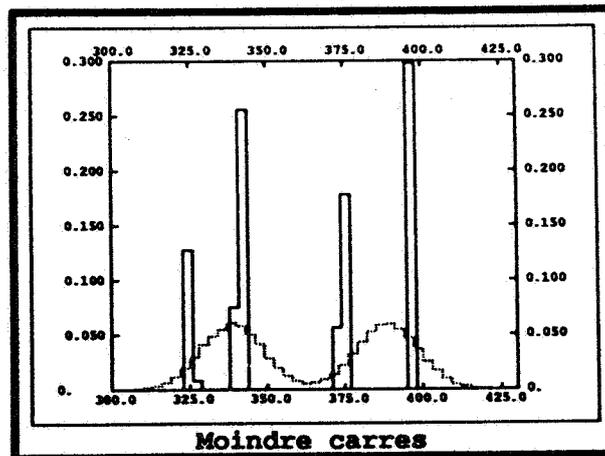


Figure 7.

Maintenant choisissons une norme  $\Omega$  sur l'espace des lois discrètes initiales. Le problème de régularisation s'écrit

$$M = \sum_0^{\infty} (g(n) - \hat{G}(n))^2 \omega(n) + \sum_{ij} \hat{p}_i \Omega_{ij} \hat{p}_j$$

sujet aux conditions  $\hat{p}_i \geq 0$  et  $\sum \hat{p}_i = 1$ .

Avec la norme choisi comme l'inverse d'une matrice de covariance d'un modèle cubique, on obtient l'estimateur montré sur la figure 8.

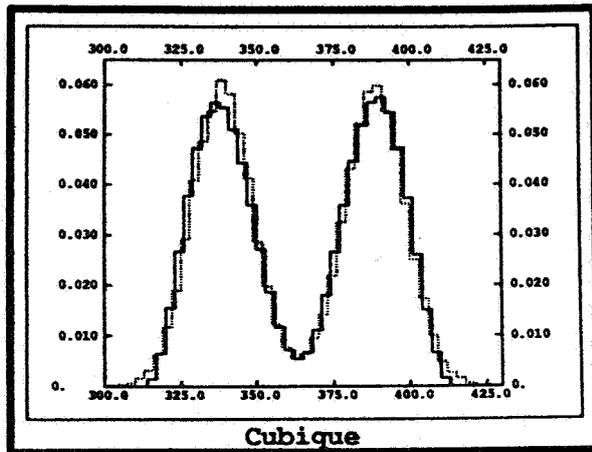


Figure 8.

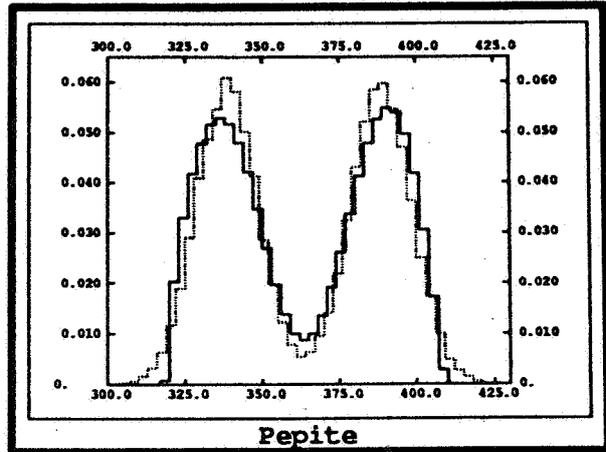


Figure 9.

Finalement, pour mettre en évidence l'influence du choix de la norme de régularisation, on a fait un deuxième essai avec un effet de pépite comme norme. Evidemment ceci est moins bien adapté à l'histogramme sous-jacent qui a une allure assez lisse. Le résultat de la régularisation avec ce choix est présenté à la figure 9. L'estimation est moins bonne que elle obtenue avec le modèle cubique.

## RÉFÉRENCES

- [1] Hadamard J. (1932), *Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques*, Hermann, Paris.
- [2] Tikhonov A. et Arsénine V. (1976), *Méthodes de résolution de problèmes mal posés*, Ed. Mir, Moscou.
- [3] Daly C. (1991), *Applications de la géostatistique à quelques problèmes de filtrage*, Thèse de Doct. en Géostatistique, ENSMP.
- [4] Jeulin D. and Renard D. (1991), Practical limitations of deconvolution kriging, à paraître.
- [5] Kimmeldorf G.S. et Wahba G. (1971), Some results on Tchebycheffian spline functions, *Math. Anal. Appl.* 33, 82-95.
- [6] Matheron G. (1981), Splines and kriging, their formal equivalence, in *Down to Earth Statistics Solutions Looking for Geological Problems*, Syracuse University Geology Contributions.
- [7] Brézis H. (1983), *Analyse fonctionnelle*, Masson, Paris.
- [8] Laurent P. (1972), *Approximation et optimisation*, Hermann, Paris.

sh