

**ECHANTILLONNAGE  
ET  
GÉOSTATISTIQUE**

---

**THÈSE**

présentée à

**l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris**  
par

**Fabrice DEVERLY**

**Ingénieur Géologue**

**pour obtenir le titre de**

**docteur - ingénieur**

**en Sciences et Techniques Minières - Option Géostatistique**

---

soutenue le 3 Décembre 1984

devant le jury composé de :

<b>M. G. MATHERON</b>	<b>Président</b>
<b>M. P. GY</b>	<b>Rapporteur</b>
<b>M. C. LANTUEJOUL</b>	<b>Examineur</b>
<b>M. E. LEFEUVRE</b>	<b>Examineur</b>
<b>M. J.-C. SAMAMA</b>	<b>Examineur</b>



A Monique,  
Nathalie et Romain

## REMERCIEMENTS

L'échantillonnage n'est pas une activité traditionnelle du Centre de Géostatistique, car c'est une discipline qui se situe à mi-chemin des préoccupations des Géologues et des Géostatisticiens. C'est pourquoi je souhaite remercier ici toutes les personnes qui m'ont aidé et conseillé dans ce travail.

Ma gratitude ira tout particulièrement à Monsieur Georges Matheron, Directeur du Centre de Géostatistique, qui a accepté de présider le Jury de cette thèse, et que je tiens à remercier sincèrement pour m'avoir accueilli dans son Centre et pour m'avoir efficacement conseillé tout au long de mon travail. Je tiens ici à lui rendre hommage pour la gentillesse et la compréhension dont il a fait preuve à mon égard.

Que Monsieur Pierre Gy trouve ici la marque de ma profonde reconnaissance pour s'être intéressé à ce travail, contribution bien modeste au monde de l'échantillonnage, et que je remercie d'avoir accepté d'être le Rapporteur de ma thèse.

Je remercie Monsieur J.C. Samama d'avoir pris sur son temps pour participer à mon Jury, mais qui pour moi représente la famille des Géologues dont je fais partie.

Je remercie chaleureusement Eric Lefevre, responsable du Département Informatique Minière du B.R.G.M., pour son aide et ses conseils précieux et surtout pour son profond sens humain.

Que Christian Lantuéjoul, que j'ai assailli de questions, trouve ici la marque de ma sincère reconnaissance pour sa disponibilité et sa gentillesse à mon égard. Je tiens également à rendre hommage à sa patience, à sa compétence et à sa rigueur intellectuelle.

Enfin, que tous mes collègues et amis, tant au Centre de Géostatistique qu'au B.R.G.M., trouvent ici l'expression de ma sympathie pour leur soutien et leurs conseils. Je ne peux pas les remercier tous individuellement;

mais que Jean-Paul Chilès et Jacques Rivoirard les représentent ici pour l'aide qu'ils m'ont apportée dans la rédaction de mon manuscrit.

Je ne saurais oublier Françoise Poirier tant pour sa participation efficace à la frappe que pour sa gentillesse, et Jacques Laurent pour sa contribution iconographique.

Enfin, toutes les personnes qui ont assisté à la rédaction finale de cette thèse savent quel calvaire a enduré Madame Kreyberg, page après page. Je ne peux que la remercier et lui exprimer ma plus profonde sympathie.

## TABLE DES MATIERES

PREAMBULE	0
INTRODUCTION ET CONCLUSIONS	1
POSITION DU PROBLEME	6
1 - ECHANTILLONNAGE GEOLOGIQUE ET ECHANTILLONNAGE MINIER	6
2 - ECHANTILLONNAGE MINIER ET ESTIMATION	7
<u>PREMIERE PARTIE : QUELQUES RAPPELS GEOSTATISTIQUES</u>	9
I - RAPPELS DE GEOSTATISTIQUE	10
I-1 NOTION DE VARIABLE REGIONALISEE	10
I-2 INFERENCE STATISTIQUE, STATIONNARITE ET HYPOTHESE INTRINSEQUE	11
I-3 LE VARIOGRAMME	12
I-3.1 Propriétés du Variogramme	13
I-3.2 L'effet de Pépite	14
I-3.3 Le Palier du Variogramme	14
I-3.4 Structures Gigognes et Anisotropies	15
I-3.5 Variogramme Moyen - Variogramme Régularisé	16
I-4 CALCUL DES VARIANCES D'ESTIMATION ET DE DISPERSION	17
I-4.1 Variance d'Estimation de V par v : $\sigma^2(v,V)$	18
I-4.2 Variance de Dispersion de v dans V : $D^2(v V)$	19
I-5 LE KRIGEAGE	20
I-6 CONCLUSIONS	21
II - RAPPELS SUR L'EFFET DE PEPITE	23
II-1 GENESE D'UN EFFET DE PEPITE	23
II-1.1 Observations Expérimentales	23
II-1.2 Conséquences Expérimentales	23
II-1.3 Définition Générale	24

II-2	L'EFFET DE PEPITE DE MESURE	24
II-2.1	L'Effet de Pépité dû aux Erreurs d'Echantillonnage et d'Analyse	25
II-2.2	L'Effet de Pépité dû aux Erreurs de Localisation	27
II-3	EFFET DE PEPITE DU A L'EXISTENCE DE MICROSTRUCTURES	29
II-3.1	Causes de cet Effet de Pépité	29
II-3.2	Modélisation	29
II-3.3	Conséquences de l'Effet de Pépité	30
II-3.4	Régularisation d'un Effet de Pépité de Microstructure	33
II-4	AUTRES INFLUENCES DE L'EFFET DE PEPITE	35
a/	Krigeage en Présence d'un Effet de Pépité Pur	35
b/	Krigeage en Présence d'un Effet de Pépité	36
c/	Krigeage en Présence d'Erreurs de Mesure	37
II-5	REPRESENTATION DE L'EFFET DE PEPITE PAR UNE MESURE DE DIRAC	38
	BIBLIOGRAPHIE DE LA 1ère PARTIE	38 bis
<u>DEUXIEME PARTIE : CALCUL EXPLICITE DE L'EFFET DE PEPITE</u>		
<u>DANS LE CAS D'UNE MICROSTRUCTURE</u>		
I	- INTRODUCTION ET EXEMPLE	40
I-1	LES MICROSTRUCTURES	40
I-2	LES PROCESSUS PONCTUELS	40
I-3	LE PROCESSUS DE POISSON ET L'EFFET DE PEPITE PUR	43
II	- LE SCHEMA DE SALVES DE POINTS (CAS STATIONNAIRE)	47
II-1	DEFINITIONS, HYPOTHESES ET NOTATIONS	47
II-2	TRANSFORMEE DE LAPLACE DE LA QUANTITE DE METAL Q(B)	49
II-3	MOYENNE ET VARIANCE DE Q(B)	51
II-4	COVARIANCE Cov(Q(B) Q(B'))	54
II-5	EXPRESSION DE LA VARIANCE ET DE LA COVARIANCE EN FONCTION DE LA COVARIANCE PONCTUELLE	55

II-6	OBSERVATION D'UN SCHEMA DU TIREUR	56
II-6.1	Covariance Observable	56
II-6.2	Effet de Pépite Observable	57
II-6.3	Comportement de $g * K(h)$	58
II-7	PROBABILITES UTILES POUR L'AJUSTEMENT D'UN MODELE	60
II-7.1	Probabilité de n'avoir aucun point dans un disque $P(N(B) = 0)$	61
II-7.2	Probabilité pour que le plus proche voisin d'un point donné soit à une distance supérieure à $r : Q(r o)$	62
III	APPLICATIONS SUR DES SIMULATIONS DANS LE PLAN (CAS STATIONNAIRE)	64
III-1	SIMULATIONS DE SCHEMAS DE SALVES	64
III-2	EXPRESSIONS DES MOMENTS DE $Q(B)$ DANS LE CADRE DES SIMULATIONS	67
III-3	CALCUL DE LA PROBABILITE $P(N(B) = 0)$	68
III-4	QUELQUES EXEMPLES	68
IV	AJUSTEMENT DE LA VARIANCE EXPERIMENTALE DE $Q(B)$ DANS LE CADRE DES SIMULATIONS	75
IV-1	DEVELOPPEMENT ET APPROXIMATION DU CALCUL ET DE LA VARIANCE DE $Q(B)$	75
IV-2	FORMULES D'APPROXIMATION	76
IV-3	CONCLUSIONS	79
V	PERCEPTION D'UNE MICROSTRUCTURE TRIDIMENSIONNELLE	80
VI	PROCESSUS DE POINTS A DENSITE REGIONALISEE	84
VI-1	PROCESSUS DE POISSON	84
VI-2	PROCESSUS DE SALVES DE POINTS	86
VI-2.1	Transformée de Laplace de $Q(B)$ et ses dérivées avec $\theta(x)$ fonction de $x$	86
VI-2.2	Moments de $Q(B)$ avec une densité régionalisée.	87
VI-3.2	Covariance de $Q(B)$ avec une densité régionalisée.	89

VII - LES REALITES DE L'ECHANTILLONNAGE	92
BIBLIOGRAPHIE DE LA 2ème PARTIE	93
<u>TROISIEME PARTIE : LES ERREURS D'ECHANTILLONNAGE</u>	94
I - LES ERREURS D'ECHANTILLONNAGE	95
I-1 NATURE DES ERREURS D'ECHANTILLONNAGE	95
I-2 LES DIFFERENTES ERREURS D'ECHANTILLONNAGE	96
Tableau 1	97
I-2.1 Les Erreurs de Prélèvement	98
I-2.2 Les Erreurs de Préparation	98
I-2.3 Les Erreurs d'Echantillonnage au sens strict	99
II - VARIANCE DE L'ERREUR D'ECHANTILLONNAGE	101
II-1 VARIANCE DE L'ERREUR D'ECHANTILLONNAGE D'APRES ENGELS, INGAMELLS et SWITZER	101
II-1.1 Hypothèse	101
II-1.2 Notations	102
II-1.3 Expression de la Variance Relative	102
II-1.4 Utilisation de la Formule	102
II-2 VARIANCE DE L'ERREUR FONDAMENTALE DE P. GY	104
II-2.1 Expression Simplifiée	105
II-2.2 Expression Développée	106
II-2.3 Définition des Paramètres	106
II-2.4 Cas des Minerais de Métaux Précieux ou Minerais à Faible Teneur	108
II-2.5 Utilisation de la Formule	109
III - CALCUL THEORIQUE DE LA VARIANCE DE L'ERREUR D'ECHANTILLONNAGE	111
III-1 VARIANCE DE L'ERREUR D'ECHANTILLONNAGE	112
III-1.1 Echantillonnage à Effectif Constant	112
III-1.2 Echantillonnage à Poids Constant	113

III-2	DEVELOPPEMENT DE LA FORMULE DE GY A PARTIR DES RESULTATS DE G. MATHERON	114
IV	- DETERMINATION D'UNE NOUVELLE FORMULE	116
IV-1	HYPOTHESES ET NOTATIONS	116
IV-2	DEVELOPPEMENT DE LA VARIANCE RELATIVE	117
IV-2.1	Proportions et Fréquences Comptées en Masse	118
IV-2.2	Volumes Moyens Comptés en Masse	118
IV-2.3	Calcul de la Variance	119
IV-2.4	Etudes de Quelques Cas Particuliers	120
IV-3	APPLICATIONS	121
	BIBLIOGRAPHIE DE LA 3ème PARTIE	127
	ANNEXES	129

## P R E A M B U L E

ou

### "LE DESSERT DE ROMAIN"

Un ouvrage consacré à l'échantillonnage se devait de comporter au moins une définition du terme. Il n'y a là aucune difficulté particulière et j'aurais pu, soit me reporter à un dictionnaire, soit compulsé la bibliographie. Mais à ces définitions académiques je préfère, de loin, la petite parabole que voici. Il y a quelques jours, servant à mon petit garçon, Romain, un yaourt; j'y ajoutai, en bon père de famille, quelques cuillerées de sucre pour en améliorer la saveur. Romain, muni de sa petite cuillère, mélangea consciencieusement son dessert (geste inné ou acquis?) avant d'affirmer d'un ton péremptoire qu'il n'était pas assez sucré. Cédant à sa volonté, mais craignant l'overdose, je rajoutai quelques grammes de glucose. Le même scénario se reproduisit : Romain mélangea, puis goûta ; enfin, après mûre réflexion, consumma son dessert. Il venait de découvrir les grands principes de notre métier :

- l'échantillonnage avec homogénéisation préalable
- l'analyse de la teneur de l'échantillon (ici, la teneur en sucre de la cuillerée)
- l'estimation de la teneur moyenne (ici, la teneur en sucre de l'assiettée)
- et enfin, l'exploitation au dessus de la teneur de coupure.

L'échantillonnage est la base de toutes nos activités, aussi variées soient-elles : l'acier est échantillonné à la sortie du haut fourneau, les signaux électriques sont échantillonnés ; la population l'est également, lors des sondages d'opinion. Chaque phase de conception nécessite une étape d'échantillonnage ; le blé est échantillonné après la moisson, la farine à la sortie du moulin. Aussi n'est-il pas surprenant que dans les activités minières son rôle soit aussi important. Rien de surprenant non plus, que les disciplines qui interviennent dans l'analyse de l'échantillonnage soient aussi nombreuses. Une étude exhaustive impliquerait des connaissances allant des techniques de sondage aux calculs de probabilités, en passant par la minéralogie. De la théorie à la pratique, le sujet est vaste, trop vaste pour nous aujourd'hui : aussi allons-nous seulement nous pencher sur les relations qui existent entre l'échantillonnage minier et l'estimation géostatistique.

## INTRODUCTION ET CONCLUSIONS

Estimation et Echantillonnage sont indissociables. L'estimation de la valeur moyenne d'une variable sur tout ou partie d'un gisement n'est possible qu'en ayant mesuré cette variable sur un certain nombre d'échantillons. Ainsi la qualité de l'échantillonnage influencera-t-elle celle de l'estimation elle-même. Il n'est nul besoin de développer des techniques d'estimation perfectionnées si les données de base ne sont pas fiables. En fait, la qualité d'une estimation, plus précisément de l'estimation géostatistique d'une variable régionalisée, dépendra essentiellement de trois éléments :

- la méthode d'estimation elle-même : elle est jugée par la moyenne et la variance de l'erreur d'estimation. Le non-biais (moyenne des erreurs nulle) est indispensable. La minimisation de la variance est souhaitable.
- le schéma d'échantillonnage ; il déterminera la nombre et l'implantation des échantillons.
- la variabilité du phénomène ; celle-ci est étudiée par l'intermédiaire du variogramme qui en reflète toutes les caractéristiques : une croissance rapide du variogramme correspond à une forte variabilité ; la portée, distance à laquelle le variogramme atteint un palier, concrétise la notion de zone d'influence d'un échantillon. Le comportement du variogramme à l'origine est riche d'enseignement, et joue un rôle déterminant dans la suite des calculs géostatistiques. L'apparente discontinuité à l'origine est appelée "effet de pépite". Cette composante pépitique qui se comporte comme un terme purement aléatoire s'ajoute aux structures continues. Elle engendre alors une imprécision qui se répercute à tous les niveaux des calculs.

Les techniques géostatistiques qui ont été introduites et développées par G. Matheron permettent de maîtriser les méthodes d'estimation et de contrôler les schémas d'échantillonnage. Par contre, l'analyse détaillée de la composante pépitique relève beaucoup plus de l'étude de l'échantillonnage ; c'est à ce niveau que se situe le travail qui est présenté ici. Cette approche géostatistique de l'échantillonnage montre comment le prélèvement d'un échantillon peut générer un effet de pépite. Après quelques rappels géostatistiques, destinés aux lecteurs peu familiarisés avec ces concepts, les causes et les conséquences de l'effet de pépite sont rappelées. Les deux causes essentielles : l'effet de pépite dû aux microstructures, et l'effet de pépite dû à l'existence

d'erreurs de mesure, seront ensuite analysées en détail.

1/ Les microstructures sont des phénomènes régionalisés dont les domaines de variabilité sont très petits, si petits même qu'ils ne peuvent pas être appréhendés aux échelles d'observation classiques. A la limite, pour certaines minéralisations - l'or par exemple - le domaine de variabilité est de l'ordre de grandeur du volume de l'échantillon lui-même. Aussi, la taille des prélèvements aura une importance déterminante sur l'amplitude de la composante pépitique associée. Ces microstructures correspondent à des minéralisations qui se présentent sous forme de particules de métal très disséminées dans une gangue stérile. Pour modéliser de telles distributions, les processus de points sont particulièrement adaptés, et tout spécialement, le processus de nuages de points (ou schéma du tireur, d'après G. Matheron) semble le plus conforme aux observations expérimentales.

En modélisant la microstructure par un schéma du tireur, la covariance des teneurs de cette microstructure se calcule alors explicitement :

$$C(h) = A. \frac{K(h)}{v^2} + \frac{B}{v^2} g * K(h)$$

REMARQUE : Cette expression est naturellement identique à l'expression du covariogramme régularisé sur un support  $v$ ,  $g_\alpha$ , développé par G. Matheron, avec  $g_\alpha = \frac{C}{v^2} K(h) + g_1 * \frac{K(h)}{v^2}$  ;  $g_\alpha$  est la somme d'un terme régulier  $g_1 * \frac{K(h)}{v^2}$  et du terme  $\frac{C}{v^2} K(h)$  : "la perturbation apportée par l'effet de pépite" .

A et B sont des constantes qui dépendent des caractéristiques du processus (nombre de germes, nombre moyen de points par nuage, étalement du nuage, moments de la quantité de métal d'une particule...). Ces deux constantes ont des expressions théoriques bien définies, mais dont les termes qui les composent resteront souvent indissociables en pratique.

$g(h)$  dépend de la loi de distribution des points dans un nuage et représente physiquement l'étalement d'un nuage de particules.

$K(h)$  est le covariogramme géométrique des échantillons de volume  $v$ . Cependant, au stade des observations expérimentales classiques, les échantillons prélevés sont disjoints, si bien que dans ce cas  $K(h) = 0$  : la covariance expérimentale observable ne se compose alors que du second terme de l'expression ci-dessus. Enfin, pour les grandes distances ( $h$  grand par rapport aux dimensions de  $v$ ), la

covariance s'exprime, en première approximation, par :

$$C(h) \approx B g(h)$$

La covariance est alors directement liée à la structure des nuages.

L'effet de pépité observable sur le variogramme, calculé avec les échantillons de volume  $v$ , s'exprime alors :

$$C_o = \frac{A}{v} + B g * \frac{K(o)}{v^2}$$

Toutefois l'amplitude de cet effet de pépité dépendra de la taille relative du nuage et de l'échantillon. Ainsi, si les nuages de particules sont grands par rapport à la taille des échantillons,  $C_o$  s'exprime en première approximation par :

$$C_o \approx \frac{A}{v} + B g(o)$$

La taille et la forme des nuages auront donc un impact direct sur l'amplitude de l'effet de pépité. Par contre, si les nuages sont petits par rapport à la taille des échantillons,  $C_o$  s'exprime alors en première approximation par :

$$C_o \approx \frac{A + B}{v}$$

L'effet de pépité est alors indépendant de la structure des nuages.

Un cas particulier sera ensuite examiné ; dans cet exemple, les points des nuages sont répartis autour du germe selon une loi gaussienne. L'effet de pépité est calculé explicitement dans tous les cas de figures, puis des approximations polynomiales seront développées.

2/ L'effet de pépité dû aux erreurs d'échantillonnage : du prélèvement en place à l'analyse chimique, les erreurs sont multiples et variées. Elles se répercutent sur la qualité des estimations par leur variance qui génère un effet de pépité dit d'erreur de mesure. En réalité, seule la variance de l'erreur d'échantillonnage, appelée fondamentale par P. Gy, peut être développée précisément. Nous rejoignons à ce stade les théories d'échantillonnage des matières morcelées : en effet, quel que soit l'échantillon primaire, carotte de sondage, rainure, cutting de sondage destructif, l'analyse chimique

ne s'effectue généralement que sur une fraction de l'échantillon initial : ce qui implique des broyages, des homogénéisations, puis des divisions ou quartages. Les erreurs d'échantillonnage sont donc de même nature que celles qui apparaissent lors d'échantillonnage de matériaux, par nature, morcelés.

Rappelons que l'homogénéisation est une opération fondamentale : c'est elle qui assure l'équiprobabilité de prélèvement des particules, ce que P. Gy résume par cet aphorisme : "L'échantillonnage doit être correct (probabiliste) ou ne pas être".

Bien que des erreurs s'insinuent à tous les niveaux, rares sont celles qui peuvent être quantifiées, c'est-à-dire dont les moments (moyenne et variance) peuvent être calculés, le plus souvent expérimentalement. De plus, le prélèvement d'un échantillon dans un lot de matière morcelée entraîne une erreur d'échantillonnage irréductible; même si l'échantillonnage est réalisé dans les règles de l'art : cette erreur est liée à la nature morcelée. Cependant, de toutes les erreurs d'échantillonnage, c'est la seule dont les moments peuvent être calculés théoriquement, moyennant quelques hypothèses de base. Différentes expressions permettent le calcul de la variance de cette erreur. Nous en retiendrons deux :

- la première, proposée par Engels, Ingamells et Switzer, permet le calcul de la variance relative  $R^2$  de l'erreur commise en prélevant un échantillon de masse  $w$  dans un minerai de teneur  $K$ , dont les éléments riches, de teneur  $H$ , constituent une fraction mineure, par rapport à la fraction pauvre (de teneur  $L$ ) :

$$R^2 = \frac{K_S}{w}$$

avec 
$$K_S = \frac{(K-L)(H-L) u^3}{K^2} \rho$$

$K_S$  est une constante d'échantillonnage qui dépend des caractéristiques intrinsèques du minerai (granulométrie  $u$ , teneurs des différentes phases, masse volumique  $\rho$ ).

- la seconde formulation, qui fait désormais autorité, a été proposée par P. Gy. La variance relative de l'erreur d'échantillonnage  $\sigma_{EF}^2$  dépend de la granulométrie des particules  $d^3$ , et d'une constante d'échantillonnage  $C$  : elle est inversement proportionnelle à la masse échantillonnée  $M$ .

$$\sigma_{EF}^2 = \frac{Cd^3}{M}$$

La constante C dépend également des caractéristiques intrinsèques du minerai (degré de libération des particules  $l$ , étalement granulométrique  $g$ , constitution minéralogique  $c$ , forme des particules  $f$ )

$$C = c \ l \ g \ f$$

Cette expression présente l'avantage certain de s'appliquer à tous les types de minerais, contrairement à la première expression.

Enfin, dans la troisième partie, une autre méthode de calcul de cette variance relative sera proposée : celle-ci repose sur l'hypothèse que le minerai de teneur  $t$  est globalement constitué de deux phases ayant chacune leur teneur propre  $t_i$ , leur granulométrie  $u_i$ , et leur masse volumique  $\rho_i$ ; si  $M$  est la masse échantillonnée, alors :

$$\sigma^2 = \frac{1}{M} \frac{\rho_1 \bar{V}_1 (t_1 - t) + \rho_0 \bar{V}_0 (t - t_0)}{t^2} \frac{(t_1 - t)(t - t_0)}{(t_1 - t_0)}$$

Une étude comparative de ces 3 formulations sera réalisée sur des bilans d'étude granulodensimétrique.

L'objectif de cette thèse est donc de proposer une méthodologie s'appliquant essentiellement à l'échantillonnage minier qui, en alliant la géostatistique et la théorie de l'échantillonnage, se propose de faire le trait d'union entre des disciplines fort différentes et pourtant complémentaires ; par delà les équations, c'est le dialogue entre le géologue et le géostatisticien qui s'établit alors.

## POSITION DU PROBLEME

### 1 - ECHANTILLONNAGE GEOLOGIQUE ET ECHANTILLONNAGE MINIER

Les termes d'échantillon et d'échantillonnage s'appliquent en réalité à tout un ensemble d'opérations et de concepts de nature différente, aussi doivent-ils être accompagnés de qualificatifs les définissant exactement. Afin d'éviter une énumération fastidieuse de définitions, un petit glossaire est présenté en Annexe I. Toutefois, pour situer le cadre de la présente étude, nous pouvons distinguer deux types d'échantillonnage ayant chacun un rôle spécifique :

- L'échantillonnage géologique : il est pratiqué à un stade très amont d'une exploration. Son rôle est de définir la zone minéralisée et, au plus, de renseigner sur l'ordre de grandeur de la teneur moyenne de l'indice. Son implantation est essentiellement préférentielle.

- L'échantillonnage minier : il est pratiqué aux différents stades d'une prospection (étude de réserves, faisabilité...) ou d'exploitation. La minéralisation ayant été définie au préalable, cet échantillonnage est réalisé de manière systématique. Il sert avant tout à effectuer des estimations.

Pourquoi différencier ces deux types d'échantillonnage ? Avant tout pour insister sur le fait que chacun a un objectif spécifique et qu'il ne doit pas en être détourné. Par exemple : quand des sondages carottés sont échantillonnés en passes de longueurs différentes selon les faciès traversés, il faut souvent éviter d'utiliser ces résultats à des fins d'estimation. De même des questions du type : "L'échantillon est-il représentatif ? " - "Quel volume faut-il prélever ? " - "Quelle maille faut-il adopter ?" - demeurent généralement sans réponse dans le cadre d'un échantillonnage géologique.

Enfin il convient également d'insister sur le fait que tout problème d'échantillonnage ne peut être résolu sans une connaissance suffisante de la minéralisation. A défaut, on utilisera des règles pratiques basées sur le bon sens ou l'expérience de minéralisations équivalentes : cette première approche doit alors permettre de définir les caractéristiques intrinsèques de la minéralisation à partir desquelles sera élaboré un véritable schéma d'échantillonnage.

## 2 - ECHANTILLONNAGE MINIER ET ESTIMATION

L'estimation est une procédure à deux niveaux :

- Le premier niveau est la collecte des échantillons, leur préparation et leur analyse. L'échantillon primaire doit au préalable être défini en type (sondage carotté ou sondage percutant par exemple), en géométrie (diamètre de carottage, longueur des passes analysées...), et doit être correctement implanté. Des erreurs apparaissent alors irrémédiablement à chaque opération (prélèvement, préparation, analyse). Leur résultante engendre donc, individuellement, une incertitude sur la valeur vraie de l'échantillon prélevé et, globalement, une variabilité artificielle, qui s'ajoute à la variabilité naturelle géologique. Un problème d'échantillonnage est donc soluble quand la variabilité artificielle est quantifiable : en fait seuls les moments (moyenne et variance) des erreurs d'échantillonnage peuvent être calculés.

Ce sont ces moments qui d'ailleurs déterminent les qualités de l'échantillonnage. En fait (cf chapitre : Les erreurs d'échantillonnage), toutes les erreurs ne peuvent être mesurées ; celles qui ne pourront l'être doivent alors être annulées, à défaut minimisées aux stades de la conception et de la réalisation pratique de l'échantillonnage. En réalité seuls deux types d'erreur sont accessibles :

- l'erreur d'analyse : elle est généralement fournie par le laboratoire.
- l'erreur d'échantillonnage (sens strict) : elle est irréductible, car elle provient du morcellement du minerai qui apparaît dès le prélèvement de l'échantillon. Cette erreur, qui dépend de la nature du minerai, de la granulométrie des constituants et de la masse échantillonnée, peut être étudiée par l'intermédiaire de son espérance et surtout de sa variance. Elle fera l'objet d'un chapitre assez important du travail présenté ici. Elle ne diffère en aucun point de l'erreur fondamentale de P. Gy, ou des erreurs d'échantillonnage décrites par d'autres auteurs dans le seul cadre de l'échantillonnage de la matière morcelée.

- Le deuxième niveau de la procédure d'estimation est la technique d'estimation elle-même : c'est le domaine privilégié de la géostatistique. La qualité de l'estimation, quelle qu'elle soit, est exprimée par la variance d'estimation. Celle-ci dépend de la variabilité du phénomène étudié par l'inter-

médiaire du variogramme, mais elle dépend aussi directement de l'échantillonnage ; en effet, la géométrie des échantillons (taille, volume, forme...) et le schéma d'échantillonnage (nombre d'échantillons, position par rapport au bloc à estimer) entrent directement en ligne de compte dans les calculs d'estimation et de variance d'estimation. Cet aspect ne sera pas développé ici, car il est acquis par l'utilisation de la géostatistique. Par contre, la structure intrinsèque des échantillons primaires a une nouvelle fois un rôle non négligeable : dans le cas de minéralisations très irrégulières et très disséminées, des microstructures peuvent exister mais ne pas être accessibles à l'échelle des observations pratiques. Ainsi, suivant la taille des échantillons primaires, ces microstructures seront ou non englobées dans le prélèvement : suivant le cas, le variogramme, qui mesure la variabilité de la minéralisation sur un support qui est celui des échantillons, présentera ou non un effet de pépite à l'origine. Or, le variogramme est utilisé à tout moment dans une étude géostatistique, son comportement pour les petites distances a une grande importance ; si le variogramme présente un effet de pépite, celui-ci va alors affecter tous les calculs ultérieurs : une composante pépitique s'ajoute alors aux variances calculées avec les structures macroscopiques continues. L'étude de l'influence du support des échantillons sur l'importance de l'effet de pépite s'avère donc indispensable.

PREMIERE PARTIE

---

QUELQUES RAPPELS

DE GEOSTATISTIQUE

## I - RAPPELS DE GEOSTATISTIQUE

L'échantillonnage constitue le trait d'union entre le géologue et le géostatisticien. Le géologue fournit l'information, c'est lui qui échantillonne le gisement ; le géostatisticien utilise l'information, il estime le gisement. L'échantillonnage minier est réalisé à des fins géostatistiques ; c'est donc en termes géostatistiques que l'échantillonnage doit être analysé. Les notions qui vont intervenir par la suite ne sont pas toujours familières aux géologues et aux échantillonneurs. Ce chapitre se propose d'introduire les concepts essentiels de la géostatistique, utilisés tout au long de cette étude.

### I-1. NOTION DE VARIABLE REGIONALISEE

Les variables géologiques et minières (puissance, teneur, densité...) présentent des variabilités spatiales, ce sont des variables régionalisées (V.R.). Par exemple, si l'on observe les teneurs le long d'un sondage ou d'une galerie, celles-ci fluctuent. Généralement, les fluctuations des V.R. présentent un double aspect :

- elles sont localement très chaotiques : les variations d'un point à un autre semblent totalement aléatoires.

- pourtant, ces variations semblent structurées en moyenne ; ainsi, le long des sondages, une allure, caractéristique du phénomène régionalisé, semble se dégager.

La réalité physique se situe entre ces deux pôles contradictoires. C'est le concept de fonctions aléatoires (F.A.) qui en permet la modélisation. La variable régionalisée implantée au point  $x$ ,  $z(x)$ , est interprétée comme une réalisation particulière de la fonction aléatoire  $Z(x)$ .  $Z(x)$  est aléatoire en ce sens que  $Z(x)$  est une variable aléatoire, mais c'est une fonction dans la mesure où  $Z(x)$  et  $Z(x+h)$ , deux valeurs de  $Z(x)$  aux points  $x$  et  $x+h$ , ne sont pas indépendantes : la corrélation correspondante caractérise la structure du phénomène étudié.

I-2. INFERENCE STATISTIQUE, STATIONNARITE ET HYPOTHESE INTRINSEQUE.

L'interprétation probabiliste de  $z(x)$  comme une réalisation particulière de la F.A.  $Z(x)$  n'est utilisable que si l'on connaît la loi de probabilité et les caractéristiques (moyenne et variance) de la fonction aléatoire  $Z(x)$ . Or, comment inférer la loi de probabilité de  $Z(x)$ , n'en connaissant qu'une réalisation  $z(x)$  ? Plusieurs réalisations de  $z(x)$  seraient alors requises :  $z_1(x)$ ,  $z_2(x)$ .... De même, comment inférer la loi de la fonction aléatoire  $Z(x)$  ne connaissant qu'un nombre limité de réalisations uniques  $z(x_1)$ ,  $z(x_2)$ .... $z(x_n)$  ? D'autres hypothèses sont alors nécessaires.

i) Hypothèse stationnaire : La F.A. est stationnaire si, pour tout  $k$ , quel que soit le vecteur  $h$ , les deux variables aléatoires à  $k$  composantes ( $Z(x_1), Z(x_2) \dots Z(x_k)$ ) et  $Z(x_1+h) \dots Z(x_k+h)$ ) sont identiques en loi : c'est-à-dire que la variable régionalisée  $Z(x)$  est homogène dans l'espace. Notamment, pour tout  $x$ , les  $z(x)$  sont interprétées comme des réalisations de la même loi  $Z(x)$ , et l'inférence de la loi de probabilité de  $Z(x)$  est possible à partir des réalisations expérimentales des  $z(x)$ . Cette hypothèse permet de remplacer la moyenne de plusieurs réalisations par une moyenne spatiale. Mais c'est une hypothèse forte dans la mesure où elle s'applique à toutes les variables à  $k$  composantes. La géostatistique linéaire ne s'intéressant qu'aux seuls moments de la F.A., cette hypothèse peut être affaiblie.

ii) Hypothèse de stationnarité d'ordre 2.

La fonction aléatoire  $Z(x)$  est stationnaire d'ordre 2 si :

- $E(Z(x)) = m$  ; l'espérance de  $Z(x)$  ne dépend pas du point d'après  $x$ .
- Pour tout couple  $Z(x_1)$  et  $Z(x_2)$ , la covariance existe et ne dépend que de la distance  $h = x_1 - x_2$  ;

$$C(h) = E(Z(x) Z(x+h)) - m^2$$

Ces deux propriétés impliquent l'existence de la variance et du variogramme :

$$\text{Var}(Z(x)) = \text{Var}(Z(x+h)) = C(0)$$

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} \text{Var}(Z(x) - Z(x+h))$$

Cependant il existe des phénomènes pour lesquels la variance n'existe pas ( $C(o)$  est infinie) mais dont les accroissements  $[Z(x) - Z(x+h)]$  ont une variance finie. L'hypothèse de stationnarité d'ordre 2 peut alors être encore réduite et restreinte aux seuls accroissements : c'est l'hypothèse intrinsèque qui s'avère suffisante dans la plupart des applications géostatistiques.

iii) L'hypothèse intrinsèque.

La fonction aléatoire  $Z(x)$  est intrinsèque si les accroissements  $(Z(x) - Z(x+h))$  sont stationnaires d'ordre deux :

- l'espérance des accroissements existe et ne dépend pas de  $x$  :

$$E(Z(x) - Z(x+h)) = 0$$

- la variance des accroissements existe et ne dépend que du vecteur  $h$ .

La variance des accroissements permet alors de définir la fonction intrinsèque appelée variogramme :

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} \text{Var}(Z(x) - Z(x+h))$$

Si la fonction aléatoire est stationnaire d'ordre deux, alors :

$$\gamma(h) = C(o) - C(h)$$

Sous l'hypothèse intrinsèque, l'inférence statistique du variogramme est possible à partir des données expérimentales  $z(x_i)$ . Le variogramme est l'outil fondamental de la géostatistique : il caractérise les corrélations spatiales qui existent au sein de la structure régionalisée.

I-3. LE VARIOGRAMME.

i) Par définition,  $\gamma(h) = \frac{1}{2} E [(Z(x) - Z(x+h))^2] = \frac{1}{2} \text{Var}(Z(x) - Z(x+h))$ .

ii) Le variogramme est estimé par le variogramme expérimental  $\gamma^*(h)$ , qui est calculé à partir des données expérimentales :

$$\gamma^*(h) = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N [Z(x_i) - Z(x_i+h)]^2$$

où N est le nombre de couples de données distantes de h.

iii) Quand la covariance  $C(h) = E(Z(x) Z(x+h)) - m^2$ , existe alors

$$\gamma(h) = C(0) - C(h) \quad .$$

I-3.1 Propriétés du Variogramme.

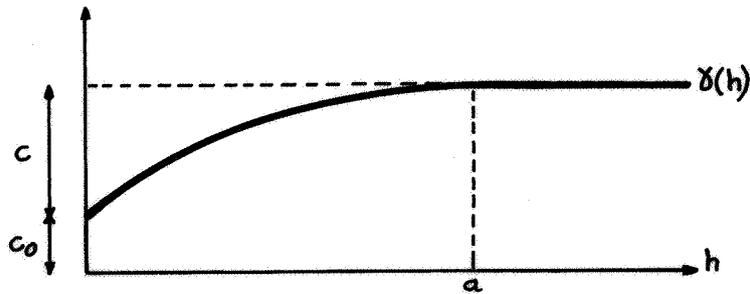


Figure 1 - Allure générale d'un variogramme

Le variogramme expérimental est ajusté par un modèle théorique. Mais n'importe quelle fonction ne peut pas servir à l'ajustement, seuls quelques modèles de variogramme sont autorisés ; en effet,  $-\gamma(h)$  doit appartenir à la classe des fonctions de type positif conditionnel. Parmi les propriétés du variogramme, trois d'entre elles sont fondamentales :

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} \text{Var}(Z(x+h) - Z(x)) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \gamma(h) = \gamma(-h) \\ \gamma(0) = 0 \\ \gamma(h) \geq 0 \end{array} \right.$$

En général le variogramme est croissant quand h augmente : en effet, plus les échantillons sont éloignés, moins ils sont corrélés et donc, plus grand est l'écart moyen  $(Z(x) - Z(x+h))^2$ . La croissance plus ou moins rapide du variogramme à l'origine (pour h petit) correspond à une plus ou moins grande régularité de la minéralisation ; le comportement aux grandes distances est à lier à l'amplitude des fluctuations possibles.

Dans la plupart des cas, le variogramme atteint un palier ; les structures qui engendrent des variogrammes à palier sont parfois appelées phénomènes de transition. La distance à partir de laquelle le palier est atteint est appelée "portée du variogramme", et elle est notée a. La portée

correspond à la notion physique de zone d'influence des échantillons : pour les distances  $h < a$  les échantillons sont corrélés ; pour  $h \geq a$  les échantillons ne le sont plus.

Cette corrélation peut s'exprimer également en terme de variance d'estimation ; la définition de  $2\gamma(h)$  peut s'interpréter comme la variance d'estimation de  $Z(x)$  par  $Z(x+h)$  : plus les échantillons sont proches, meilleure est l'estimation ; quand  $h$  augmente, l'estimation se dégrade, la variance  $\gamma(h)$  augmente ; quand  $h > a$ , les échantillons ne sont plus corrélés, et cette variance d'estimation est maximale.

### I-3.2 L'Effet de Pépité.

Lorsqu'aux petites distances pour  $h$  décroissant vers 0,  $\gamma(h)$  tend vers une valeur  $C_0$  non nulle, il y a une discontinuité apparente à l'origine, appelée "effet de pépité". Cette discontinuité peut avoir deux causes :

- existence de microstructures, inaccessibles à l'échelle des observations
- existence d'erreurs de mesures (erreurs d'analyse et d'échantillonnage).

Le cas extrême est l'effet de pépité pur : pour tout  $h$ ,  $\gamma(h) = C_0$  avec par définition  $\gamma(0) = 0$ . Il caractérise alors une absence totale de corrélation entre échantillons.

L'effet de pépité sera examiné en détail dans le chapitre suivant.

### I-3.3 Le Palier du Variogramme.

Pour les variogrammes qui atteignent un palier pour  $h > a$ , on démontre que ce palier  $\gamma(\infty)$  est la variance a priori de la fonction aléatoire  $Z(x)$  :

$$\gamma(\infty) = \text{Var}(Z(x)) = C(0)$$

En conséquence, la covariance  $C(h) = C(0) - \gamma(h)$  existe.

La variance expérimentale des données  $\sigma^2$  peut s'exprimer comme la demi-moyenne des carrés de tous les couples qui peuvent être formés à partir de ces données :

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[ Z(x_i) - \frac{1}{n} \sum_j Z(x_j) \right]^2 = \frac{1}{2n^2} \sum_i \sum_j (Z(x_i) - Z(x_j))^2$$

qui est également la demi-moyenne de tous les couples utilisés pour le calcul du variogramme (Biblio [ 8 ]). La variance expérimentale des données est donc la moyenne de toutes les valeurs prises par le variogramme expérimental : en conséquence, si la portée du variogramme est petite par rapport au domaine, de nombreux écarts  $(Z(x_i) - Z(x_j))^2$  auront une valeur proche du palier du variogramme : la variance expérimentale est alors pratiquement égale au palier. Dans le cas contraire, de nombreux écarts sont inférieurs au palier du variogramme expérimental, la variance expérimentale est alors inférieure au palier.

### I-3.4 Structures Gigognes et Anisotropies.

#### I-3.4.1 Les structures gigognes.

Les phénomènes naturels présentent souvent plusieurs échelles de variabilité qui interviennent en même temps ; par exemple, à une variabilité pétrographique (due à la présence de minéraux différents) peut s'ajouter une variabilité géologique (due à l'existence de zones préférentiellement minéralisées, venues hydrothermales par exemple). Dans ce cas, le variogramme apparait comme une succession de structures emboîtées, et peut se modéliser par la somme des variogrammes correspondant à chaque structure.

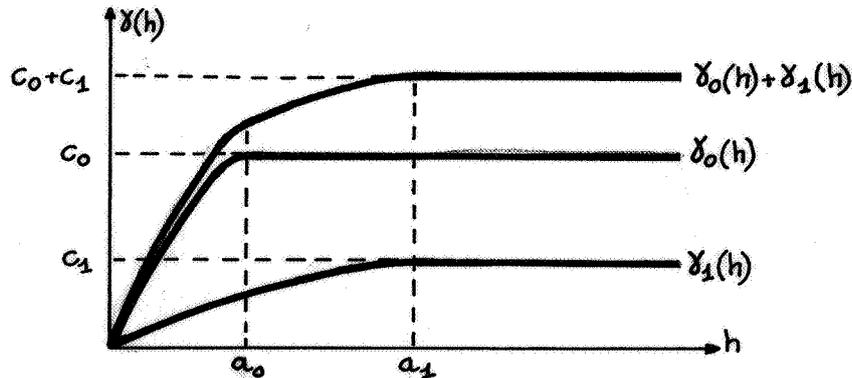


Figure 2 : Structures gigognes

I-3.4.2 Les anisotropies.

Certaines minéralisations présentent des variabilités différentes selon les directions : elles sont anisotropes. Les variogrammes calculés le long de ces directions seront donc distincts. Il existe deux types d'anisotropies :

- l'anisotropie géométrique : les variogrammes ont le même palier dans toutes les directions, mais des portées différentes d'une direction à l'autre. Une simple transformation linéaire des coordonnées permet alors de se ramener à un cas isotrope.

- l'anisotropie zonale : les variogrammes présentent des paliers et des portées différentes selon les directions le long desquelles ils sont calculés. L'anisotropie zonale peut être modélisée, par exemple, en utilisant des structures gigognes caractérisées par leurs propres variabilités et anisotropies.

Le traitement des anisotropies doit conduire en fin de compte à la définition d'un variogramme isotrope.

I-3-5 Variogramme Moyen - Variogramme Régularisé.

La valeur moyenne du variogramme  $\gamma(x_1-x_2)$ , quand le point  $x_1$  parcourt le volume  $V_1$  et le point  $x_2$  le volume  $V_2$ , est appelée variogramme moyen  $\bar{\gamma}(V_1, V_2)$  :

$$\bar{\gamma}(V_1, V_2) = \frac{1}{V_1 V_2} \int_{V_1} \int_{V_2} \gamma(x_1-x_2) dx_1 dx_2 \quad (3.5)$$

REMARQUE : Quand la covariance existe, on définit également la covariance moyenne  $\bar{C}(V_1, V_2)$  et pour l'obtenir il suffit de remplacer  $\gamma$  par  $C$ , dans l'expression 3.5.

Le variogramme ponctuel  $\gamma(h)$  n'est jamais connu en pratique : seul le variogramme  $\gamma_v(h)$  des teneurs de support  $v$  (le volume des échantillons) peut être obtenu. Par abus de langage  $\gamma_v(h)$  est souvent appelé variogramme ponctuel car les volumes des échantillons sont toujours très petits par rapport aux volumes à estimer. La variabilité d'un phénomène régionalisé apparaît différente en fonction du support sur laquelle elle est étudiée : quand les volumes d'échantillons augmentent, on observe un effet de régularisation. Le vario-

gramme régularisé  $\gamma_V(h)$  qui correspond donc à l'observation de la variabilité sur des supports  $V$ , se déduit facilement du variogramme ponctuel :

$$\gamma_V(h) = \bar{\gamma}(V, V_h) - \bar{\gamma}(V, V)$$

$V_h$  est le volume déduit de  $V$  par la translation du vecteur  $h$ .

Quand la covariance  $C(h)$  existe, la covariance régularisée se calcule également : il vient alors

$$C_V(h) = \bar{C}(V, V) - \bar{C}(V, V_h)$$

Pour les grandes distances  $h$ , l'expression de  $\bar{\gamma}_V(h)$  se simplifie. En effet,

$$\bar{\gamma}(V, V_h) = \frac{1}{V V_h} \int_V \int_{V_h} \gamma(x-y) dx dy = \frac{1}{V^2} \int_V \int_V \gamma(x-z+h) dx dy$$

et si les dimensions de  $V$  sont négligeables par rapport à  $h$ , alors

$$\bar{\gamma}(V, V_h) \simeq \frac{1}{V^2} \int_V \int_V \gamma(h) dx dy = \gamma(h)$$

$\gamma_V(h)$  s'exprime alors simplement :

$$\gamma_V(h) \simeq \gamma(h) - \bar{\gamma}(V, V)$$

Cette expression illustre bien le fait que le palier du variogramme régularisé est inférieur au palier du variogramme ponctuel : cet écart qui vaut  $\bar{\gamma}(V, V)$  ne fait après tout que traduire l'homogénéisation des données par régularisation : les données expérimentales présentent d'ailleurs une variance de dispersion d'autant plus faible que les supports d'échantillonnage sont gros.

#### 1-4. CALCUL DES VARIANCES D'ESTIMATION ET DE DISPERSION.

Le variogramme synthétise la variabilité du phénomène régionalisé ; c'est-à-dire que la variabilité n'est connue qu'au travers du variogramme. C'est pourquoi tous les calculs géostatistiques le font intervenir directement. Les variances d'estimation et de dispersion s'expriment effectivement en fonction du variogramme.

I-4.1 Variance d'Estimation de V par v :  $\sigma^2(v,V)$

Soient  $Z(v)$  la valeur moyenne de Z sur le support v (formé de une ou plusieurs unités élémentaires)

et  $Z(V)$  la valeur moyenne de Z sur le support V.

La variance d'estimation  $\sigma^2(v,V)$  est la variance de l'erreur commise en estimant  $Z(V)$  par  $Z(v)$  :

$$\sigma^2(v,V) = E [ (Z(V) - Z(v))^2 ] = \sigma_E^2$$

et elle s'exprime simplement en fonction du variogramme :

$$\sigma_E^2 = 2 \bar{\gamma}(V,v) - \bar{\gamma}(V,V) - \bar{\gamma}(v,v) \quad (4.1)$$

avec les notations du paragraphe 3.5.

REMARQUE : Ce résultat peut s'exprimer également en fonction de la covariance, quand celle-ci existe :

$$\sigma_E^2 = \bar{C}(v,v) + \bar{C}(V,V) - 2 \bar{C}(v,V)$$

La variance d'estimation dépend donc :

- de la variabilité de la minéralisation par l'intermédiaire du variogramme.
- de la géométrie des échantillons (leur volume, leur forme, éventuellement la position relative des unités élémentaires constituant v) avec le terme  $\bar{\gamma}(v,v)$
- de la géométrie du volume à estimer avec le terme  $\bar{\gamma}(V,V)$
- de la géométrie relative de l'échantillon (v) par rapport au volume V avec le terme  $\bar{\gamma}(V,v)$  ; ce terme dépend du nombre et de la position par rapport au volume V, des unités constituant le volume v.

Ainsi, indépendamment des valeurs prises par les échantillons, et même sans connaître ces valeurs, la variance peut être déterminée à partir du variogramme et du schéma d'échantillonnage. Inversement, connaissant  $\gamma(h)$ , un schéma d'échantillonnage peut être conçu et optimisé, a priori, c'est-à-dire avant

même la campagne d'échantillonnage.

La variance d'estimation est parfois appelée variance d'extension de  $v$  à  $V$ . En toute rigueur, la variance d'extension est l'estimation d'un volume  $V$  par l'échantillon de volume  $v$  contenu dans  $V$  (c'est l'extension de l'échantillon au volume  $V$ ) et la variance d'estimation est l'estimation d'un volume  $V$  par les échantillons constitutifs du volume  $v$ .

#### I-4.2 Variance de Dispersion de $v$ dans $V$ : $D^2(v|V)$ .

Avant d'introduire la variance de dispersion dans le cas des Fonctions Aléatoires stationnaires, rappelons la définition de la variance de dispersion dans le cas discret.

La dispersion de  $n$  valeurs discrètes  $z_i$  autour de leur moyenne  $\bar{z}$  n'est autre que leur variance  $s^2 = \frac{1}{n} \sum (z_i - \bar{z})^2$ . Dans le cas où les  $z_i$  sont des réalisations de variables aléatoires  $Z_i$ ,  $s^2$  est alors une réalisation particulière de  $S^2 = \frac{1}{n} \sum (Z_i - \bar{Z})^2$ . La variance de dispersion notée  $D^2$ , est l'espérance mathématique de  $S^2$  :  $E(S^2)$ .

Dans le cas continu et stationnaire, le raisonnement est identique.  $s^2(0|v)$  est la variance de dispersion des valeurs  $y(x)$  d'échantillons ponctuels autour de leur moyenne  $z(V) = \frac{1}{V} \int_V y(x) dx$ .  $V$  est l'ensemble constitué par la réunion des échantillons ponctuels. En fait,  $y(x)$  est une réalisation de la fonction aléatoire stationnaire  $Y(x)$  de moyenne  $Z(V)$ . La variance de dispersion est alors définie comme l'espérance mathématique de la variance  $S^2(0|V)$  :

$$D^2(0|V) = E(S^2(0|V)) = \frac{1}{V} \int_V E([Y(x) - Z(V)]^2) dx$$

La variance de dispersion  $D^2(0|V)$  s'exprime alors comme la valeur moyenne de variance d'extension  $\sigma^2(0,V)$  définie au paragraphe précédent. Ce raisonnement se généralise au cas où  $v$  et  $V$  sont des volumes quelconques, avec  $v \ll V$ , et alors :

$$D^2(v|V) = \frac{1}{V} \int_V \sigma^2(v(x),V) dx$$

La variance de dispersion s'exprime comme la moyenne de la variance d'extension  $\sigma^2(v,V)$ . Le calcul se généralise même à des volumes  $v$  et  $V$  tout-à-fait quelconques, mais ici, la variance de dispersion perd sa signification intuitive de dispersion des échantillons  $v$  dans le domaine  $V$ .

En introduisant l'expression (4.1) de la variance d'extension, on obtient facilement que

$$D^2(v|V) = \bar{\gamma}(V,V) - \bar{\gamma}(v,v)$$

Comme pour la variance d'estimation, l'expression 4.2 de la variance de dispersion ne dépend que de  $\gamma(h)$ ,  $v$  et  $V$ . Son calcul ne fait donc pas appel aux valeurs effectivement prises par les échantillons.

REMARQUE : Quand la covariance existe, la variance de dispersion s'exprime également en fonction des covariances moyennes :

$$D^2(v|V) = \bar{C}(v,v) - \bar{C}(V,V)$$

RELATION D'ADDITIVITE DE KRIGE :  $D^2(v|W) = D^2(v|V) + D^2(V|W)$  si  $v \subset V \subset W$ .

Si  $D^2(o|V)$  représente la variance de dispersion d'un point dans un bloc  $V$

$$D^2(O|V) = D^2(O|v) + D^2(v|V)$$

$$D^2(O|V) = \bar{\gamma}(V,V) \text{ et } D^2(o|v) = \bar{\gamma}(v,v)$$

Ces formules sont directement utilisées pour modéliser les changements de support ; la relation d'additivité illustre d'ailleurs bien le fait que la variance de dispersion est d'autant plus faible que le support des échantillons est gros. En effet :  $v \subset V \Rightarrow$  le support  $v$  est plus petit que celui de  $V$ .

$$D^2(V|W) = D^2(v|W) - D^2(v|V)$$

La diminution de la variance (de dispersion dans le domaine  $W$ ) en passant d'échantillons  $v$  à des échantillons plus gros  $V$  est donc de  $D^2(v|V)$ .

### I-5. LE KRIGEAGE.

Le krigeage est le meilleur estimateur linéaire sans biais qui permet l'estimation de  $Z(V)$ , la valeur moyenne de  $Z$  sur le volume  $V$ , par  $Z_V^K$ , à partir d'une combinaison linéaire des informations  $Z_\alpha$  (les données d'échantillonnage) :

$$Z_V^K = \sum_{\alpha} \lambda^{\alpha} Z_{\alpha}$$

Les coefficients  $\lambda^\alpha$  sont choisis de façon à minimiser la variance d'estimation de  $Z_V$  par  $Z_V^K$ . Ces pondérateurs sont calculés à partir du système à  $n+1$  équations ( $n$  est le nombre de données  $Z_\alpha$ ) suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{\beta=1}^n \lambda^\beta \bar{\gamma}_{\alpha\beta} + \mu = \bar{\gamma}_\alpha V \quad \alpha = 1 \text{ à } n \quad \text{avec} \quad \bar{\gamma}_{\alpha\beta} = \bar{\gamma}(v_\alpha, v_\beta) \\ \sum_{\alpha} \lambda^\alpha = 1 \quad \text{condition de non-biais.} \end{array} \right.$$

La variance de krigeage est alors donnée par :

$$\sigma_K^2 = \sum_{\alpha} \lambda^\alpha \bar{\gamma}_{\alpha V} + \mu - \bar{\gamma}(V, V)$$

La résolution du système de krigeage fait donc appel au variogramme, à la géométrie des blocs à estimer  $V$ , des échantillons  $v_\alpha$  (supports des  $Z_\alpha$ ), au nombre des  $v_\alpha$  et à leur position par rapport à  $V$ . Une maille d'échantillonnage peut donc être définie a priori.

## I-6. CONCLUSIONS.

Ces rappels des principes fondamentaux de la géostatistique montrent parfaitement que l'échantillonnage peut être envisagé comme une application particulière de la géostatistique. Les schémas d'échantillonnage, les volumes des échantillons, la représentativité de l'échantillonnage peuvent être déterminés moyennant une connaissance suffisante de la variabilité de la minéralisation ; c'est-à-dire que tout problème d'échantillonnage minier est soluble dès que l'on connaît le variogramme. Ce principe est très général puisqu'il s'applique aussi bien à des gisements miniers classiques qu'aux gisements à 1 dimension que sont les minerais en écoulement continu : en effet, lors de l'écoulement de tels minerais, des variabilités temporelles et non plus spatiales apparaissent, des variogrammes peuvent être calculés : les techniques d'estimation géostatistiques sont alors utilisables.

En fait les choses ne sont pas aussi simples en pratique. L'essentiel de la variabilité est exprimé par le comportement du variogramme aux petites distances et notamment à l'origine ; or, bien souvent, les variogrammes présentent des discontinuités à l'origine ; celles-ci, nommées "effet de pépite", se comportent dans la suite des calculs comme un terme aléatoire qui "brouille" la variabilité naturelle. Or cet effet de pépite dépend totalement de l'échan-

tillonnage ; le chapitre qui va suivre est destiné à faire le point sur ce concept d'effet de pépité et à travers ces rappels apparaîtront les deux thèmes qui seront traités ensuite, à savoir :

- la perception d'une microstructure, qui dépend beaucoup de la manière dont celle-ci est échantillonnée. La taille et la forme de l'échantillon, relativement à l'échelle de variabilité de la microrégionalisation, modifient considérablement les caractéristiques structurales.

- les erreurs de mesures, et parmi elles les erreurs d'échantillonnage, qui génèrent un effet de pépité, dit de mesure. Or, quel que soit l'échantillon initial, son traitement implique obligatoirement le passage à l'état morcelé. La variance des erreurs d'échantillonnage doit alors être calculée, car c'est cette variance qui contribue à l'effet de pépité.

Remémorisons-nous maintenant ce qu'est un effet de pépité.

## II - RAPPELS SUR L'EFFET DE PEPITE

Les erreurs d'échantillonnage créent, du fait de l'imprécision liée à chaque donnée, une variabilité artificielle ; quand il existe des microstructures, les échantillons peuvent ou non les englober selon leur taille, engendrant un effet de pépite plus ou moins important. L'effet de pépite est une notion qui va apparaître à diverses reprises dans les problèmes d'échantillonnage, et qui va être analysée en détail dans la suite de l'exposé : aussi quelques rappels, voire même quelques précisions quant aux calculs le concernant, ne sont-ils pas superflus.

### II-1. GENESE D'UN EFFET DE PEPITE.

#### II-1.1 Observations Expérimentales.

Dans des minéralisations assez régulières (Cu, Pb, Zn par exemple) des échantillons très proches présentent des teneurs du même ordre de grandeur, c'est-à-dire fortement corrélées. Par contre, dans des minéralisations très irrégulières (Au, WO<sub>3</sub>, U...) des échantillons très proches peuvent présenter des valeurs tout à fait différentes (de 30 à 300 g/t dans certains gisements d'or, pour des échantillons distants de 1.00 m.). Ces différences sont dues à la présence ou non de particules minéralisées dans chacun des échantillons. L'échantillonnage à maille serrée (0,50 m.) de filons de quartz à wolframite montre bien ce phénomène : certains échantillons apparaissent comme du quartz pur, d'autre comme de la wolframite pure, et cela sans aucune continuité apparente.

#### II-1.2 Conséquences Expérimentales.

Les variogrammes expérimentaux calculés à partir de données aussi irrégulières présentent une discontinuité à l'origine.

De façon plus générale, tout variogramme expérimental calculé pour des distances entre échantillons supérieures à l'échelle de variabilité des structures géologiques présentera cette discontinuité à l'origine. Le moyen le plus immédiat pour diminuer cette discontinuité est donc d'échantillonner avec des distances entre échantillons beaucoup plus petites, puis de calculer le variogramme expérimental correspondant.

Souvent, dans le cas de minéralisations très pépites, il s'avère impossible, à l'échelle de travail habituelle, de réduire suffisamment la maille d'échantillonnage pour annuler totalement cet effet de pépite : les structures qui le créent sont de portées beaucoup trop petites. Cette maille peut cependant être réduite lorsqu'on étudie la variabilité le long de sondages : il suffit pour cela d'analyser des tronçons de carotte beaucoup plus petits.

### II-1.3 Définition Générale.

Bien que par définition  $\gamma(0) = 0$  (cf rappels géostatistiques), en pratique de nombreux variogrammes expérimentaux présentent une discontinuité à l'origine, c'est-à-dire que :

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \gamma(h) = C_0$$

$C_0$  est appelée constante de pépite et plus souvent, par abus de langage, effet de pépite.

L'existence de structures présentant des échelles de variabilité inférieures à l'échelle d'observation, est l'une des causes essentielles de cette discontinuité, mais ce n'est pas la seule ; les erreurs de mesures se répercutent également sur le variogramme sous forme d'un effet de pépite additionnel qui s'ajoute au précédent. La prise en compte théorique de ces deux comportements est différente, aussi doivent-ils être étudiés séparément.

### II-2. L'EFFET DE PEPITE DE MESURE.

La donnée  $z_v(x)$  représente la valeur de la variable (aléatoire) échantillonnée au point  $x$  sur un échantillon de support  $v$ . Les erreurs de mesure qui affectent la valeur  $z(x)$  sont de deux types :

- les erreurs d'implantation : le point  $x$  peut ne pas être reconnu avec précision.
- les erreurs d'échantillonnage : elles sont multiples et variées ; elles comprennent :
  - . les erreurs de découpe de l'échantillon primaire. Le support des échantillons n'est que rarement égal à  $v$  ; quelques causes sont évidentes : mauvaise récupération de carottes ou de cuttings,

découpe irrégulière des rainures par exemple. Ces erreurs sont difficilement mises en évidence et sont généralement négligées. Elles doivent cependant être présentes à l'esprit.

- . les erreurs d'échantillonnage proprement dites (cf chapitre : Les erreurs d'échantillonnage), qui apparaissent à chaque étape du processus d'échantillonnage.
- . les erreurs d'analyse.

Ces deux types d'erreurs contribuent à l'effet de pépité. Les deux cas doivent donc être examinés.

## II-2.1 L'Effet de Pépité Dû aux Erreurs d'Echantillonnage et d'Analyse.

### II-2.1.1 Impact des erreurs de mesure.

La valeur vraie  $Z(x)$  de la teneur d'un échantillon implanté au point  $x$  n'est jamais connue, seule la valeur  $Z'(x)$  obtenue après échantillonnage et analyse peut être fournie. La différence  $\varepsilon(x) = Z(x) - Z'(x)$  représente l'erreur résultante de toutes les erreurs d'échantillonnage et d'analyse. Le variogramme  $\gamma'(h)$  calculé avec les données  $Z'(x)$  diffère donc du variogramme  $\gamma(h)$  qui aurait dû être obtenu avec les vraies valeurs  $Z(x)$ .

$$\begin{aligned}\varepsilon(x) &= Z(x) - Z'(x) \\ \gamma'(h) &= \frac{1}{2} E[(Z'(x+h) - Z'(x))^2] \\ &= \frac{1}{2} E[(Z(x+h) - Z(x))^2] + \frac{1}{2} E[(\varepsilon(x+h) - \varepsilon(x))^2] \\ &\quad + \frac{1}{2} E[(Z(x+h) - Z(x))(\varepsilon(x+h) - \varepsilon(x))] \\ &= \gamma(h) + \frac{1}{2} E[(\varepsilon(x+h) - \varepsilon(x))^2] + \frac{1}{2} E[(Z(x+h) - Z(x))(\varepsilon(x+h) - \varepsilon(x))]\end{aligned}$$

Le variogramme calculé est donc majoré d'un terme de covariance et du variogramme des erreurs. Cette majoration se simplifie si les erreurs présentent les propriétés suivantes :

- 1/ les erreurs  $\varepsilon(x)$  aux différents points  $x$  sont mutuellement indépendantes et de même loi. Dans ce cas :

$$E([\varepsilon(x+h) - \varepsilon(x)]^2) = 2 \sigma_\varepsilon^2$$

où  $\sigma^2$  est la variance des erreurs,  $\text{Var}(\varepsilon)$ .

2/ les erreurs sont indépendantes des valeurs prises. Ceci implique que

$$E([Z(x+h) - Z(x)] [\varepsilon(x+h) - \varepsilon(x)]) = 0$$

Moyennant ces deux hypothèses, on obtient donc :

$$\gamma'(h) = \gamma(h) + \sigma_{\varepsilon}^2$$

Le variogramme calculé avec les données expérimentales est égal au variogramme vrai majoré par une constante,  $\sigma_{\varepsilon}^2$ , qui n'est autre que la variance des erreurs d'échantillonnage. Cette constante apparaît donc comme un effet de pépite "artificiel" qui s'ajoute aux structures naturelles.

Les erreurs d'échantillonnage et d'analyse ne présentent pas toujours ces deux propriétés, quelques exemples l'illustreront.

- En uranium, les nuages de corrélation radiométrie-teneur se dispersent pour les grandes valeurs ; en effet, la radiométrie ne fournit qu'une mesure approchée de la teneur avec une erreur dont l'écart-type est grossièrement proportionnel à la teneur : l'indépendance  $(\varepsilon(x), Z(x))$  n'est donc plus vérifiée. De même, pour les analyses chimiques, il arrive que les erreurs soient corrélées à la teneur.

- Les erreurs d'échantillonnage peuvent parfois être spatialement corrélées. Un cas tout à fait typique est le rainurage ; une rainure sera beaucoup plus régulière dans du minerai fracturé que dans du minerai massif : les erreurs d'échantillonnage sont alors corrélées à la fracturation et peuvent ainsi être régionalisées.

#### II-2.1.2 Prise en compte des erreurs d'échantillonnage et d'analyse.

a - Si les erreurs de mesure n'ont pas les deux propriétés ci-dessus, la prise en compte des erreurs de mesure demande une étude particulière ; les corrélations spatiales entre  $\varepsilon(x)$  et  $\varepsilon(x+h)$  et/ou les corrélations  $(\varepsilon(x), Z(x))$  doivent être analysées en détail.

b - Dans le cas où  $\gamma'(h) = \gamma(h) + \sigma_{\varepsilon}^2$  : si la variance des erreurs est connue, le variogramme vrai de la variable régio-

nalisée  $Z(x)$  peut donc être retrouvé facilement : c'est le "filtrage de l'erreur de mesure". Dans le cas contraire, la variance des erreurs d'échantillonnage et d'analyse sera englobée dans l'effet de pépite de microstructure : c'est en fait la pratique la plus courante, car cette variance n'est que très rarement connue.

La variance des erreurs d'échantillonnage peut être calculée de deux manières - soit expérimentalement (en ré-échantillonnant) - soit théoriquement ; ce sera le sujet de la troisième partie de la thèse. Généralement, les erreurs d'analyse sont négligeables.

## II-2.2 L'Effet de Pépite dû aux Erreurs de Localisation.

Une incertitude de localisation d'un échantillon entraîne - les erreurs d'échantillonnage et d'analyse étant nulles par ailleurs - que la valeur expérimentale  $Z'(x)$  supposée mesurée au point  $x$  est en réalité la valeur de  $Z$  au point  $x+u$  :  $Z'(x) = Z(x+u)$ . L'erreur de localisation  $u$  est assimilée à un vecteur aléatoire.

La connaissance des lois de distribution des vecteurs  $u, P(du)$  et des lois conjointes  $P(du, du')$  de deux vecteurs est indispensable pour déterminer l'influence de ces erreurs sur le variogramme.

Que devient le variogramme sous l'effet d'erreur de localisation?

Le variogramme des valeurs échantillonnées est par définition :

$$\gamma'(h) = \frac{1}{2} E([Z'(x+h) - Z'(x)]^2)$$

Si  $u$  et  $v$  sont les erreurs de localisation attachées aux points  $x$  et  $x+h$ , ce variogramme s'écrit alors :

$$\gamma'(h) = \frac{1}{2} E([Z(x+h+u) - Z(x+v)]^2)$$

Avec  $P(du, dv)$ , la loi du couple  $(u, v)$ , on obtient par randomisation :

$$\gamma'(h) = \frac{1}{2} \iint E([Z(x+h+u) - Z(x+v)]^2 | u, v) P(du, dv)$$

Un cas particulièrement intéressant est celui où les erreurs

de localisation sont indépendantes des valeurs. Dans ce cas le conditionnement tombe et il reste :

$$\gamma'(h) = \iint \gamma(h+u-v) P(du, dv)$$

L'effet de pépite  $C'_0$  associé à  $\gamma'(h)$  est par conséquent :

$$C'_0 = \lim_{h \rightarrow 0} \gamma'(h) = \iint \lim_{h \rightarrow 0} \gamma(h+u-v) P(du, dv)$$

qui, lorsque  $\gamma(h)$  est un variogramme sans effet de pépite, vaut :

$$C'_0 = \iint \gamma(u-v) P(du, dv)$$

De plus, s'il y a indépendance des erreurs de localisation,  $P(du, dv) = P(du) P(dv)$  et alors :

$$C'_0 = \iint \gamma(u-v) P(du) P(dv)$$

Ainsi, même si le variogramme  $\gamma(h)$  ne présente pas d'effet de pépite, les erreurs de localisation en créent un, qui vaut  $C'_0$ , et qui ne s'annule que pour  $u = v$ .

Un exemple de calcul d'effet de pépite lié aux erreurs de localisation est donné par J.P. Chilès dans [1]. Il s'agit de mesures bathymétriques effectuées par des sondes se déplaçant le long de profils. L'erreur de localisation d'une sonde suit une loi gaussienne de moyenne nulle ; l'erreur  $(u_\alpha, v_\alpha)$  pour une sonde donnée suit également une loi gaussienne. Les erreurs de localisation entre deux sondes  $\alpha$  et  $\beta$  de lignes différentes sont indépendantes, et entre ces deux sondes la différence des erreurs  $(u_\alpha - u_\beta, v_\alpha - v_\beta)$  est gaussienne. Par contre, les différences des erreurs de localisation entre deux sondes d'une même ligne suivent une loi gaussienne de moyenne nulle et d'écart-type proportionnel à la distance entre les deux sondes.

II-3. EFFET DE PÉPITE DU A L'EXISTENCE DE MICROSTRUCTURES

II-3.1 Causes de cet Effet de Pépité.

Le paragraphe 1.1 rappelle comment se manifeste cet effet de pépité : généralement à l'échelle des observations classiques (plurimétrique à décimétrique), les structures de petite portée (centimétrique à métrique) se répercutent sur le variogramme par une discontinuité à l'origine, d'amplitude  $C_0$ , appelée constante de pépité.

II-3.2 Modélisation.

La constante  $C_0$  est interprétée comme le palier du variogramme  $\gamma_0(h)$  d'une microstructure de portée  $a_0$  très petite.

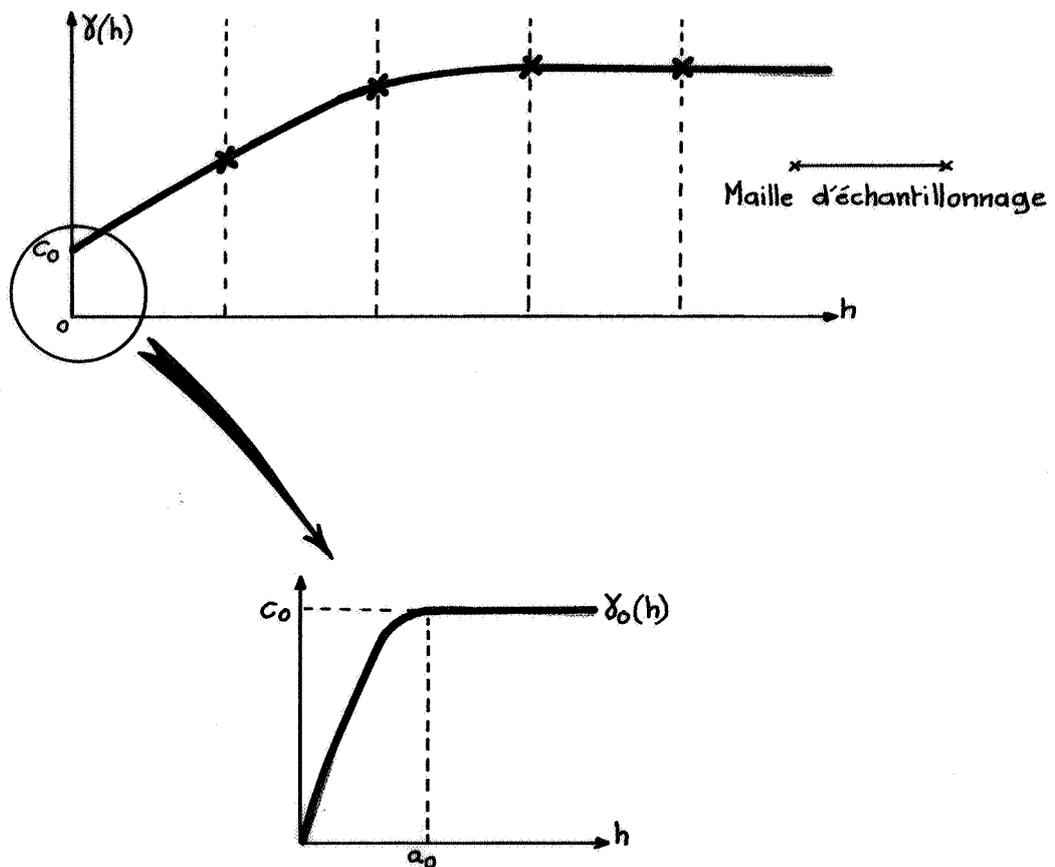


Figure 3 : Interprétation de l'effet de pépité en terme de microstructure

Le variogramme  $\gamma(h)$  est donc la somme de deux structures gigognes de variogramme  $\gamma_0(h)$  et  $\gamma_1(h)$  telles que :

$$\begin{cases} \gamma(h) = \gamma_0(h) + \gamma_1(h) \\ \gamma(0) = 0 \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} \gamma_0(h) = C_0 - C(h) & \text{si } h \leq a_0 \\ \gamma_0(h) = C_0 & \text{si } h > a_0 \end{cases}$$

La portée  $a_0$  étant très petite,  $h$  est supérieure à  $a_0$  très rapidement, et alors le palier  $C_0$  du variogramme  $\gamma_0(h)$  est atteint, si bien qu'à l'échelle d'observation, seule la constante  $C_0$  rappelle l'existence de  $\gamma_0(h)$ .

L'effet de pépité pur peut être modélisé par :

$$\begin{cases} \gamma(0) = 0 & \text{pour } h = 0 \\ \gamma(h) = C_0 & \text{pour } h > 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire que pour tout  $h \neq 0$ ,  $C(h) = 0$ . L'effet de pépité pur indique qu'il n'y a aucune corrélation spatiale entre les données ; les résultats des statistiques classiques des variables indépendantes sont alors applicables.

La modélisation de l'effet de pépité par un variogramme de microstructure  $\gamma_0(h)$  de portée très petite, rend  $Z(x)$  continue en moyenne quadratique.

### II-3.3 Conséquences de l'Effet de Pépité.

Bien que les supports de prélèvement ne soient jamais ponctuels, (les variogrammes expérimentaux sont déjà des variogrammes régularisés) les conséquences macroscopiques de l'effet de pépité peuvent être examinées en ne considérant que le variogramme ponctuel  $\gamma_0(h)$  de la microstructure : les variances d'estimation, de dispersion et la régularisation dépendent linéairement des covariances et des variogrammes : ces calculs ne font d'ailleurs intervenir que les covariances (ou variogrammes) moyens sur les supports  $v$  (d'échantillon) et  $V$  (des domaines d'étude).

II-3.3.1 Calcul des covariances moyennes  $\overline{C}_0(v,V)$  et  $\overline{C}_0(V,V)$

Les calculs des variances d'estimation, des variances de dispersion et les calculs de régularisation du variogramme ponctuel utilisent les variogrammes moyens ou les covariances moyennes du type  $\overline{C}(V_1, V_2)$ . Dans ce chapitre, nous allons montrer comment ces covariances moyennes s'expriment dans le cas d'une microstructure de covariance ponctuelle  $C_0(h)$ . Cette covariance ponctuelle a une portée  $a_0$  très petite.

Soient  $V$  et  $V'$  deux domaines quelconques.

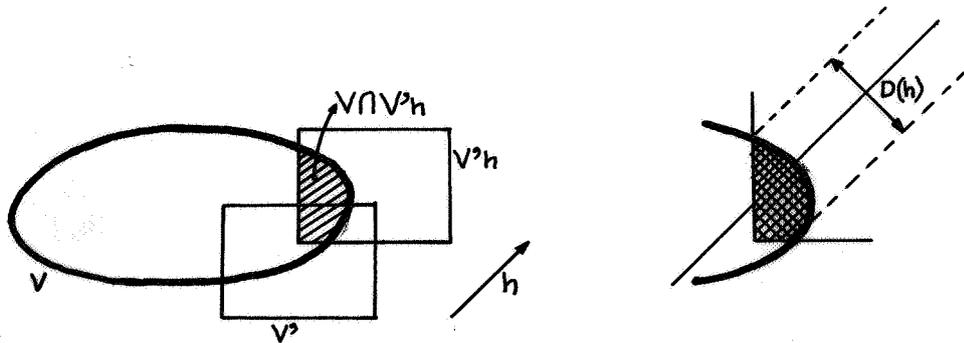
Appliquons l'algorithme de Cauchy au calcul de la covariance moyenne :

$$\overline{C}_0(V, V') = \frac{1}{VV'} \int_V \int_{V'} C_0(x-y) dx dy = \frac{1}{VV'} \int C_0(h) K(h) dh$$

où  $K(h) = |V \cap V'_h|$  désigne le covariogramme géométrique de  $V$  et de  $V'$ . Si  $h$  est petit,  $K(h)$  admet le développement limité :

$$K(h) = K(o) - |h| D(h) + o(h)$$

où  $K(o) = |V \cap V'|$  et  $D(h)$  représente la variation diamétrale de  $V \cap V'$  dans la direction du vecteur  $h$ .



La covariance admettant une portée très petite, seules les petites valeurs de  $h$  entreront en ligne de compte. Donc, à l'aide de ce développement de  $K(h)$ , on voit apparaître une partie principale

$$\frac{|V \cap V'|}{VV'} \int C_o(h) dh$$

ainsi qu'une partie secondaire

$$- \frac{1}{VV'} \int C(h) |h| D(h) dh .$$

Or, en majorant  $C_o(h)$  par  $C_o(o)$  pour  $h \leq a_o$ , ainsi que  $D(h)$  par la plus grande variation diamétrale  $D$  de  $V \cap V'$ , et en passant aux coordonnées polaires, la partie secondaire se trouve majorée par

$$\frac{C_o(o) D d \omega d}{V.V'} \frac{a_o^{d+1}}{d+1}$$

où  $\omega d$  est le volume de la boule unité dans  $R^d$ ,  $d$  est la dimension de l'espace, et  $a_o$  est la portée de la covariance  $C_o(h)$ . Donc quand  $a_o$  est très petite, cette quantité devient négligeable et il ne reste donc que la partie principale

$$\begin{aligned} \overline{C}_o(V, V') &\approx \frac{|V \cap V'|}{VV'} \int C_o(h) dh \\ &\approx \frac{|V \cap V'|}{V'} \frac{A}{V} \text{ avec } A = \int C_o(h) dh \end{aligned}$$

On obtient immédiatement le variogramme moyen  $\overline{\gamma}(V, V')$  de la microstructure en utilisant la relation  $\gamma_o(h) = C_o(o) - C_o(h)$ . Ainsi, dans les quatre cas de figures possibles, covariance et variogramme moyens de la microstructure s'expriment alors :

$V' \subset V$	$\overline{C}_o(V, V') \approx \frac{A}{V}$	ou $\overline{\gamma}_o(V, V') = C_o(o) - \frac{A}{V}$
$V' = V$	$\overline{C}_o(V, V) \approx \frac{A}{V}$	ou $\overline{\gamma}_o(V, V) = C_o(o) - \frac{A}{V}$
$V \cap V' \neq \emptyset$	$\overline{C}_o(V, V') \approx \frac{ V \cap V' }{VV'} A$	ou $\overline{\gamma}_o(V, V') = C_o(o) - \frac{ V \cap V' }{VV'} A$
$V \cap V' = \emptyset$	$\overline{C}_o(V, V') = 0$	ou $\overline{\gamma}_o(V, V') = C_o(o)$

II-3.3.2 Calculs des variances d'estimation et de dispersion.

Muni des covariances moyennes  $\overline{C}_o(V, V')$ , les calculs des variances, pour la composante pépite, sont immédiats.

a - Variance de dispersion :  $D^2(v|V) = \overline{C}_0(v,v) - \overline{C}_0(V,V)$

$$D^2(v|V) = A \left( \frac{1}{v} - \frac{1}{V} \right)$$

b - Variance d'estimation :  $\sigma^2(v,V) = \overline{C}_0(V,V) + \overline{C}_0(v,v) - 2 \overline{C}_0(v,V)$

$$\sigma^2(v,V) = A \left( \frac{1}{v} + \frac{1}{V} - 2 \frac{|v \cap V|}{vV} \right)$$

avec  $A = \int C_0(h) dh$ .

### II-3.4 Régularisation d'un Effet de Pépité de Microstructure.

En pratique, les données ne sont jamais ponctuelles : les données correspondent à des échantillons de volume  $v$  ( $v$  est un tronçon de carotte, une rainure...) ; les microstructures sont donc régularisées.

La constante de pépité  $C_{ov}$  observée sur le variogramme régularisé diffère donc de la constante  $C_0$  observable sur le variogramme ponctuel. Cependant,  $C_{ov}$  peut se calculer à partir de  $C_0$  dans le cas où  $v$  est grand par rapport à  $a_0$ , la portée de la microstructure :

Soient

- $\gamma_0(h)$  le variogramme ponctuel de la microstructure
- $\gamma_{ov}(h)$  le variogramme de la microstructure calculé avec des échantillons de volume  $v$
- $\gamma_{ov}(h) = \overline{\gamma}_0(v, v_h) - \overline{\gamma}_0(v, v)$   $v_h = v$  translaté du vecteur  $h$

D'après 3-3.2,  $\overline{\gamma}_0(v, v_h)$  et  $\overline{\gamma}_0(v, v)$  se calculent facilement moyennant l'hypothèse que  $v$  et  $h$  sont grands vis-à-vis de  $a_0$  ; ainsi on obtient :

$$\gamma_{ov}(h) = \frac{A}{v} - A \frac{\text{Mes } v \cap v_h}{v^2}$$

Les variogrammes sont toujours calculés pour des distances  $h$  telles que  $v \cap v_h = \emptyset$ , c'est-à-dire que les échantillons ne se chevauchent pas ; ainsi en pratique :

$$\gamma_{ov}(h) \approx \frac{A}{v} \quad \text{avec} \quad A = \int C_0(h) dh$$

L'effet de pépité est donc inversement proportionnel à la taille des échantillons. En conséquence, la constante de pépité  $C_{ov}$  qui affecte le variogramme régularisé sur un support  $V$  peut être calculée à partir de  $C_{ov}$ , la constante de pépité observable sur le variogramme  $\gamma_v(h)$ , calculé à partir d'échantillons

de support  $v$ .

$$\left. \begin{aligned} C_{ov} &= \frac{A}{v} \\ C_{oV} &= \frac{A}{V} \end{aligned} \right\} C_{oV} = \frac{v C_{ov}}{V}$$

Cette propriété fournit une méthode pour diminuer l'effet de pépite de micro-structure : le volume des échantillons doit être augmenté.

Si l'effet de pépite dû aux microstructures se régularise, l'effet de pépite dû aux erreurs de mesure n'a pas toujours un comportement comparable.

Si la régularisation sur le support  $V$  est effectuée en moyennant  $n$  échantillons de support  $v$ , c'est-à-dire que  $V = nv$  et sous l'hypothèse que les erreurs d'échantillonnage des échantillons  $v$ , de variance  $\text{Var}(\epsilon_v)$  sont indépendantes entre elles et indépendantes des valeurs prises par les échantillons, la constante de pépite du variogramme régularisé  $\gamma_{oV}(h)$  vaut alors :

$$\begin{aligned} C_o &= C_{oV} + \frac{\text{Var}(\epsilon_v)}{n} = \frac{v C_{ov}}{V} + \frac{\text{Var}(\epsilon_v)}{n} \\ C_o &= \frac{C_{ov}}{n} + \frac{\text{Var}(\epsilon_v)}{n} \end{aligned}$$

où  $C_{ov}$  est l'effet de pépite observable sur le variogramme  $\gamma_{ov}(h)$ .

Si le variogramme  $\gamma_{oV}(h)$  est calculé directement avec des échantillons de volume  $V$  et si les erreurs d'échantillonnage des échantillons  $V$  admettent une variance  $\text{Var}(\epsilon_V)$ , la constante de pépite de  $\gamma_{oV}(h)$  vaut alors :

$$\begin{aligned} C_o &= C_{oV} + \text{Var}(\epsilon_V) \\ &= \frac{v C_{ov}}{V} + \text{Var}(\epsilon_V) \end{aligned}$$

La constante de pépite associée à  $\gamma_{oV}(h)$  peut donc être obtenue de deux manières différentes, l'une par régularisation sur un volume  $V = nv$ , l'autre par calcul direct avec des échantillons de volume  $V$ . On constate parfois en pratique que les 2 résultats ne sont pas équivalents : cela signifie que l'un des termes  $\text{Var}(\epsilon_v)/n$  ou  $\text{Var}(\epsilon_V)$  ou même les deux, ne sont pas négligeables. Une étude détaillée de l'échantillonnage est alors conseillée.

REMARQUE : Tous les développements précédents reposent sur les hypothèses importantes que les distances "h" et les volumes v sont très grands par rapport à  $a_0$  la portée du variogramme  $\gamma_0(h)$  des microstructures. Ainsi, pour des minéralisations irrégulières, (très "pépitiques") comme des minéralisations aurifères (à Au libre) par exemple, bien que les distances h des observations et des calculs pratiques soient grands, les volumes des échantillons ne sont pas toujours de grande taille par rapport aux domaines de variabilités des microstructures. Ce sont de tels cas qui seront examinés dans la partie de la thèse consacrée au calcul explicite de l'effet de pépite dans le cas d'une microstructure étudiée à l'aide de processus de points.

#### II-4. AUTRES INFLUENCES DE L'EFFET DE PEPITE.

L'effet de pépite qui affecte donc le variogramme se répercute sur tous les opérateurs géostatistiques ; ses influences sur les variances de dispersion et d'estimation et sur la régularisation viennent d'être rappelées ; pour être complet, son influence sur le krigeage peut aussi être mentionnée.

$Z^K$  est l'estimation de  $Z(V) = \frac{1}{V} \int Z(x) dx$ , par une combinaison linéaire des données disponibles  $Z_\alpha$  :  $Z^K = \sum_{\alpha} \lambda^{\alpha} Z_{\alpha}$ . Les pondérateurs  $\lambda^{\alpha}$  sont obtenus par la résolution du système de krigeage (à moyenne inconnue)

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{\beta} \lambda^{\beta} \bar{\gamma}_{\alpha\beta} + \mu = \bar{\gamma}_{\alpha V} \quad \alpha = 1 \text{ à } n \\ \sum_{\beta} \lambda^{\beta} = 1 \end{array} \right. \quad \text{où } \bar{\gamma}_{\alpha\beta} = \bar{\gamma}(v_{\alpha}, v_{\beta})$$

La variance de krigeage s'écrivant alors :  $\sigma_K^2 = \sum_{\alpha} \lambda^{\alpha} \bar{\gamma}_{\alpha V} + \mu - \bar{\gamma}(V, V)$

##### a/ Krigeage en présence d'un effet de pépite pur.

L'effet de pépite pur peut donc être interprété comme une microstructure de variogramme  $\gamma_0(h)$  de portée très petite :  $\gamma_0(h) = C_0(0) - C_0(h)$ . Les variogrammes moyens qui interviennent dans le système de krigeage ont été calculés au paragraphe 3-3.1 :

Les échantillons sont de support v,  $v \ll V$

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_o(v_\alpha, v_\alpha) &= C_o - \frac{A}{V} = C_o - C_{ov} && C_{ov} \text{ la constante de pépite du vario-} \\ &&& \text{gramme régularisé } \gamma_{ov}(h) \\ \bar{\gamma}_o(v_\alpha, v_\beta) &= C_o && \text{car } v_\alpha \cap v_\beta = \emptyset \\ \bar{\gamma}_o(v_\alpha, V) &= C_o && \text{si } v_\alpha \cap V = \emptyset \\ \bar{\gamma}_o(v_\alpha, V) &= C_o - A \frac{|V \cap v_\alpha|}{V v_\alpha} \simeq C_o - \frac{A}{V} = C_o - \frac{v C_{ov}}{V} \simeq C_o && \text{si } v_\alpha \subset V. \\ \bar{\gamma}_o(V, V) &= C_o \end{aligned}$$

Le système s'écrit alors :

$$\lambda^\alpha (C_o - C_{ov}) + \sum_{\beta \neq \alpha} \lambda^\beta C_o + \mu = C_o \quad \alpha = 1 \text{ à } n$$

et comme  $\sum \lambda_\alpha = 1$ , le système se simplifie :

$$\left. \begin{aligned} \lambda^\alpha C_{ov} &= \mu \\ \sum_{\alpha=1}^n \lambda^\alpha &= 1 \end{aligned} \right\} \mu = \frac{C_{ov}}{n} \text{ et } \lambda^\alpha = \frac{1}{n}$$

n est le nombre d'informations disponibles.

Dans le cas d'un effet de pépite pur, toutes les informations ont le même poids : le krigeage est donc une moyenne arithmétique des données disponibles. On dit que l'effet de pépite "lève les écrans", car les informations éloignées du bloc à estimer ont autant de poids que les informations rapprochées.

La variance de krigeage prend alors la valeur  $\sigma_K^2 = \frac{C_{ov}}{n}$ , qui représente donc la variance des échantillons v, divisée par n : c'est le résultat classique de la variance d'estimation de la moyenne arithmétique de données indépendantes. L'effet de pépite pur correspond bien (cf 3.2) à l'indépendance de toutes les données.

b/ Krigeage en présence d'un effet de pépite.

Le variogramme  $\gamma(h)$  peut alors être modélisé par la somme d'une micro-structure de variogramme  $\gamma_o(h)$  de portée petite, représentant l'effet de pépite, et d'une structure de variogramme  $\gamma_1(h)$  de portée beaucoup plus grande :

$$\gamma(h) = \gamma_o(h) + \gamma_1(h)$$

En introduisant les variogrammes moyens utilisés dans le cas de l'effet de pépite pur, on obtient le système de krigeage suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda^\alpha (\bar{\gamma}_1(v_\alpha, v_\alpha) - C_{ov}) + \sum_{\beta \neq \alpha} \lambda^\beta \bar{\gamma}_1(v_\alpha, v_\beta) + \mu = \bar{\gamma}_1(v_\alpha, V) \quad \alpha = 1 \text{ à } n \\ \sum_{\alpha} \lambda^\alpha = 1 \end{array} \right.$$

c'est-à-dire que l'on retranche  $C_{ov}$  à tous les termes de la diagonale du système formulé uniquement avec  $\gamma_1(h)$ , i.e. sans effet de pépite.

Les conséquences de l'effet de pépite sur le krigeage sont doubles :

- il lisse les estimations
- il lève les écrans, c'est-à-dire que les informations éloignées ont un poids plus important en présence d'un effet de pépite que sans effet de pépite, à configuration égale. Le cas extrême est naturellement l'effet de pépite pur, pour lequel toutes les informations ont le même poids.

c/ Krigeage en présence d'erreurs de mesure.

Le variogramme peut alors s'exprimer par la somme d'un variogramme continu  $\gamma_1(h)$ , qui représente effectivement la structure, et de la variance des erreurs de mesure  $\sigma_\epsilon^2$  (cf paragraphe 2.1) :

$$\gamma(h) = \gamma_1(h) + \sigma_\epsilon^2$$

Rappelons que cette formulation n'est possible que moyennant quelques hypothèses sur les erreurs de mesure, notamment l'absence de biais; les erreurs ne sont pas systématiques si elles sont indépendantes entre elles et indépendantes des valeurs expérimentales.

Dans ces conditions, le système de krigeage s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda^\alpha (\bar{\gamma}_1(v_\alpha, v_\alpha) - \sigma_\epsilon^2) + \sum_{\beta \neq \alpha} \lambda^\beta \bar{\gamma}_1(v_\alpha, v_\beta) + \mu = \bar{\gamma}_1(v_\alpha, V) \\ \sum \lambda^\alpha = 1 \end{array} \right.$$

c'est-à-dire que le terme  $\sigma_\epsilon^2$  (variance des erreurs de mesure) est retranché du terme de la diagonale du 1er membre du système écrit avec  $\gamma_1(h)$ . L'influence des erreurs de mesure sur le système de krigeage est la même que celle de l'effet de pépite.

II-5. REPRESENTATION DE L'EFFET DE PÉPITE PAR UNE MESURE DE DIRAC.

L'effet de pépite engendré par une microstructure admet donc un variogramme  $\gamma_0(h)$ , respectivement une covariance  $C_0(h)$ , qui atteint son palier très rapidement, pratiquement dès que la distance  $h$  devient non nulle : c'est-à-dire que la portée  $a_0$  est très petite.

$$\gamma_0(h) = C_0(0) - C_0(h) \quad \text{pour } h \leq a_0$$

$$C_0(h) = 0 \quad \text{pour } h > a_0 \quad \text{pratiquement pour } h \neq 0$$

$$\text{et alors } \gamma_0(h) = C_0(0) = C_0$$

Pratiquement, les distances d'observation sont toujours grandes vis-à-vis de  $a_0$ , si bien que la microstructure ne se manifeste que par son variogramme  $\gamma_0(h) = C_0$ . Le comportement d'une telle structure peut être modélisé de façon plus symbolique : la fonction de covariance  $C_0(h)$  est assimilée à une mesure  $A \delta$  qui ne charge que l'origine ; sa masse en  $x = 0$  vaut alors  $A = \int C_0(h) \, dh$  ;  $\delta$  est la mesure de Dirac à l'origine. Nous introduisons ici la représentation des covariances en terme de mesure de Dirac, car elle nous sera utile ultérieurement. En fait, cette notation est transparente pour l'utilisateur, car les échantillons élémentaires ont toujours un volume (ou support)  $v$  ; ainsi les covariances observées sont des covariances régularisées, et la notation en terme de Dirac disparaît.

Soit  $C(h)$  la covariance ponctuelle d'une variable régionalisée, comprenant un terme pépitique  $C_0(h)$  et un terme continu  $C_1(h)$  :

$$C = C_0 + C_1$$

En introduisant la notation en terme de Dirac :

$$C = A \delta + C_1$$

Par régularisation sur un support  $V$ , on obtient

$$C(h) = A \frac{K(h)}{V^2} + \frac{1}{V^2} C * K(h)$$

où  $K(h)$  est le covariogramme géométrique du support  $V$ .

Notons précieusement ce résultat, c'est celui-là même qui sera retrouvé dans les chapitres concernant le calcul explicite de l'effet de pépite à partir d'un processus de points.

BIBLIOGRAPHIE DE LA 1ère PARTIE

- [ 1 ] CHILES, J.P.- Géostatistique des Phénomènes non Stationnaires (dans le plan). Thèse de Docteur-Ingénieur, 1977, E.N.S.M.P.
- [ 2 ] DELFINER, P.- Basic Introduction to Geostatistics.- Cours C-78, Centre de Géostatistique, Fontainebleau, Septembre 1979.
- [ 3 ] GUIBAL, D.- Problèmes d'Evaluation des Gisements. Note Interne, Centre de Géostatistique, Fontainebleau, Mai 1979.
- [ 4 ] JOURNEL, A.- "Géostatistique Minière".- Centre de Géostatistique, Fontainebleau, 1977.
- [ 5 ] MATHERON, G.- "Traité de Géostatistique Appliquée", Tomes 1 et 2, Mémoires du B.R.G.M. n° 14 (1962), et n° 24 (1963).
- [ 6 ] MATHERON, G.- "La Théorie des Variables Régionalisées et ses Applications". Fascicule n° 5, Cahiers du Centre de Morphologie Mathématique, Fontainebleau, 1970.
- [ 7 ] MATHERON, G.- "Les Variables Régionalisées et leur Estimation".- Masson, Paris, 1965.
- [ 8 ] RIVOIRARD, J.- Remarques pratiques à propos des variances et des variogrammes.- Cours C-99, Centre de Géostatistique, Fontainebleau.
- [ 9 ] RIVOIRARD, J.- Le Comportement des Poids de Krigeage. Thèse de Docteur-Ingénieur, Novembre 1984, E.N.S.M.P.
- [ 10 ] SCHWARTZ, L.- "Méthodes Mathématiques pour les Sciences Physiques".- Hermann, Paris, 1965.

DEUXIEME PARTIE

CALCUL EXPLICITE DE L'EFFET DE PEPITE

DANS LE CAS D'UNE MICROSTRUCTURE

## I - INTRODUCTION ET EXEMPLE

### I-1. LES MICROSTRUCTURES.

Le chapitre III de la première partie nous rappelle les différentes causes de l'effet de pépité et parmi celles-ci l'effet de pépité dû à l'existence de microstructures. Mais que sont ces microstructures ? Elles apparaissent le plus souvent dans des minerais très erratiques pour lesquels des échantillons très voisins peuvent présenter des teneurs très différentes, un peu du type tout ou rien : ceci arrive fréquemment dans des minéralisations qui se manifestent sous forme de cristaux, de grains, de particules ou de pépites de métal dans une gangue stérile ; si bien que la présence ou non d'une particule dans l'échantillon modifie fortement la teneur. Intuitivement, on sent très bien que la taille de l'échantillon doit être corrélée à la fréquence et à la répartition spatiale des particules afin d'atténuer cet effet de tout ou rien, qui se manifeste sur le variogramme sous forme d'un effet de pépité (avec les conséquences rappelées précédemment). C'est d'ailleurs ainsi qu'opèrent géologues et mineurs qui prélèvent systématiquement de gros échantillons (de plusieurs dm<sup>3</sup> ou m<sup>3</sup>) dans des minéralisations de ce type (Au ou wolframite par exemple).

Mise à part cette intuition naturaliste, aucune formulation ne permet encore d'adapter les volumes des prélèvements à la répartition spatiale des particules. C'est l'objectif que se fixe cette étude : étudier l'importance de l'effet de pépité en fonction du volume des prélèvements et de la répartition spatiale des particules. Aussi des hypothèses doivent-elles être faites quant à la distribution des particules. Les processus de points vont en permettre la modélisation.

### I-2. LES PROCESSUS PONCTUELS.

Un processus ponctuel dans le plan ou dans l'espace est un phénomène aléatoire dont chaque réalisation est un ensemble de points dispersés dans l'espace et ne présentant aucune accumulation infinie dans tout domaine borné.

Bien que les pépites ou plus généralement les particules de métal aient une taille non négligeable et rarement constante, si chaque grain est représenté

dans le plan par son centre de gravité, la répartition des grains dans une lame mince ou une section polie correspond bien à un processus de points : un processus ponctuel peut alors être utilisé pour modéliser la répartition spatiale des particules.

Pour caractériser un processus de points, on a souvent recours à sa mesure de comptage  $N$ . Ainsi, si  $B$  est un domaine quelconque,  $N(B)$  est une variable aléatoire représentant le nombre de points du processus tombés dans  $B$ . La mesure de comptage est additive :

$$N(A \cup B) + N(A \cap B) = N(A) + N(B)$$

et croissante :

$$A \subset B \quad N(A) \leq N(B)$$

Dans cette partie, nous nous intéresserons essentiellement à des processus stationnaires, c'est-à-dire des processus spatialement homogènes. Dans un tel cas; il est assez intuitif, et un théorème l'établit, que le nombre moyen de points tombés dans un domaine  $B$  soit proportionnel à la mesure de ce domaine (la surface dans  $\mathbb{R}^2$ , le volume dans  $\mathbb{R}^3$ ) ; ce qui s'écrit :

$$E(N(B)) = \lambda \text{ Mes}(B)$$

Le nombre  $\lambda$  est le nombre moyen de points tombés dans un domaine unité. On l'appelle densité du processus.

Les trois principaux processus de points illustrés par les Figures 4, 5 et 6 sont :

- le processus de Poisson (Fig. 4) : il est caractérisé par l'indépendance de  $N(B)$  et  $N(B')$  lorsque les deux ensembles  $B$  et  $B'$  sont disjoints. Ce cas correspond en fait à une absence de structure, c'est-à-dire à un effet de pépite pur : en effet, pour tout échantillon  $B$  et  $B'$  (en pratique toujours disjoints),  $N(B)$ , le nombre de points tombés dans  $B$ , est indépendant de  $N(B')$ , le nombre de points tombés dans  $B'$  ; c'est bien la définition de l'effet de pépite pur donnée dans I-3.2 de la première partie.

- le schéma du tireur (G. Matheron, 1969) (Fig. 5) .

A partir de chaque point d'un processus de Poisson, appelé germe,

Figure 4.  
PROCESSUS DE POISSON  
de densité  $\lambda = 1.00$

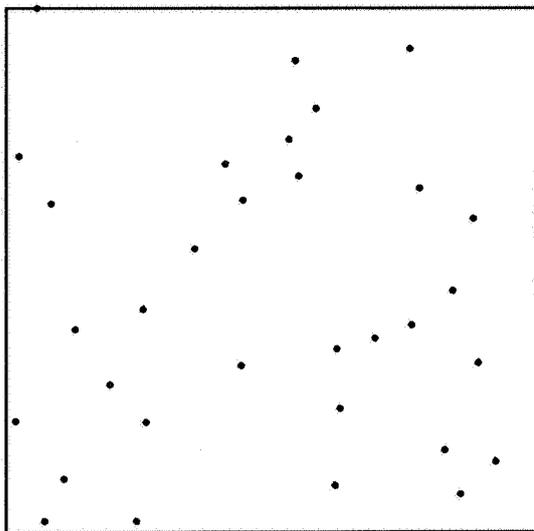
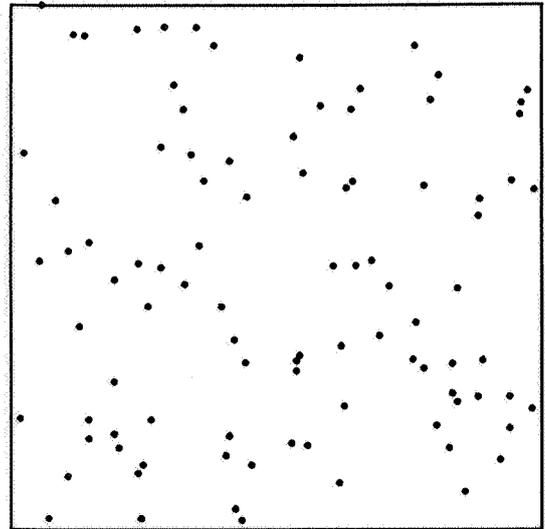
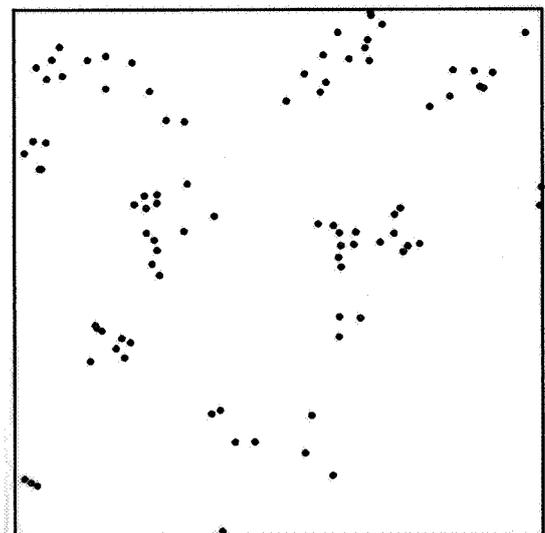


Figure 5.  
MODELE DE REPULSION  
développé à partir du processus de  
Poisson précédent avec  $R = 0.7$

Figure 6.  
SCHEMA DU TIREUR  
Densité de germes: 0.20  
Nombre moyen de points par nuage: 5



Echelle des figures 4, 5 et 6.

Dimension des domaines 10 x 10.

est implanté un nuage (ou salve) de points ; le nombre  $M$  de points de chaque nuage est aléatoire, et chaque point est implanté par rapport au germe indépendamment des autres et selon une certaine loi de probabilité. C'est le schéma qui sera utilisé pour modéliser l'effet de pépite, car il correspond bien aux observations faites sur la répartition des particules d'Au, de  $WO_3$ , voire de Mo.

- le modèle de répulsion (Fig. 6)

Ce modèle a été introduit par Matern (1960) [8]. Il s'agit de processus de points pour lesquels chaque point du processus n'admet aucun voisin dans un cercle de rayon  $R$ ,  $R > 0$ . De nombreuses variantes existent, par exemple : à partir d'un processus de points poissonniens, un modèle de répulsion peut être obtenu en ôtant tous les couples de points distants de moins de  $R$  l'un de l'autre. Dans  $\mathbb{R}^2$ , la probabilité d'obtenir un point dans  $dx$  est alors :

$$P(N(dx) = 1) = \theta \exp(-\theta \pi R^2) dx$$

I-3. LE PROCESSUS DE POISSON ET L'EFFET DE PEPITE PUR (G. Matheron [9])

Avant de développer le schéma du tireur, l'exemple classique du processus de Poisson montrera comment relier un processus de points à l'effet de pépite de microstructure.  $N(V)$  est le nombre de particules tombant dans un domaine  $V$ .

I-3.1  $N(V)$  est une Variable de Poisson de Paramètre  $\lambda|V|$

Les points (pépites) sont répartis selon un processus de Poisson ; dans ces conditions :

$$\begin{cases} P(N(dx) = 1) = \lambda dx \\ P(N(dx) = 0) = 1 - \lambda dx \end{cases}$$

Soit  $G(s)$  la fonction génératrice de  $N(V)$  :  $G(s) = E(s^{N(V)})$

Or 
$$N(V) = \sum_{dx \in V} N(dx)$$

les dx sont disjoints, donc la fonction génératrice pourra s'écrire :

$$G(s) = E(s^{\sum_{dx \in V} N(dx)}) = \prod_{dx \in V} E(s^{N(dx)})$$

$$G(s) = \prod_{dx \in V} (1 - \lambda dx s^0 + \lambda dx s^1)$$

$$G(s) = \prod_{dx \in V} 1 - \lambda(1-s) dx \simeq \prod_{dx \in V} e^{-\lambda(1-s) dx} \simeq e^{-\lambda(1-s) \int_V dx}$$

$$G(s) = e^{\lambda(s-1) |V|} \quad |V| = \text{volume du domaine } V$$

$$G'(1) = E(N(V)) = \lambda |V|$$

$$G''(1) = E[N(V) \cdot (N(V)-1)] \Rightarrow \text{Var}(N(V)) = \lambda |V|$$

Loi de N(V) :

$$G(s) = e^{\lambda s |V|} e^{-\lambda |V|} = \sum_{n=0}^{\infty} s^n \frac{(\lambda |V|)^n}{n!} e^{-\lambda |V|}$$

$$G(s) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n s^n$$

par identification :  $P(N(V) = n) = \frac{(\lambda |V|)^n e^{-\lambda |V|}}{n!}$

Donc N(V) suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda |V|$

### I-3.2 CALCUL DU VARIOGRAMME DE $Z(x) = N(V_x)$

Les pépites sont réparties dans l'espace  $\mathbb{R}^2$  selon un processus de Poisson de densité  $\lambda$ , c'est-à-dire que :

i)  $E(N(V)) = \lambda |V|$  le nombre de pépites contenues dans l'échantillon V est proportionnel à la mesure de V ; N(V) est une variable de Poisson de moyenne  $\lambda |V|$ .

ii) N(V) et N(V') sont indépendants dès que  $V \cap V' = \emptyset$

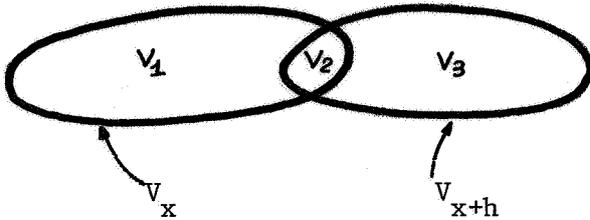
Calculons le variogramme de la fonction aléatoire  $Z(x) = N(V_x)$  où  $V_x$  représente l'échantillon V centré en x :

$$C(h) = \text{Cov}(Z(x+h), Z(x)) = E(Z(x+h) Z(x)) - E(Z(x+h))E(Z(x))$$

$$= E(N(V_x) N(V_{x+h})) - E[N(V_x)] E[N(V_{x+h})]$$

Décomposons  $V$  et  $V_{x+h}$  en  $V_1$ ,  $V_2$  et  $V_3$  tels que :

$$\begin{cases} V_1 = V_x / V_{x+h} \\ V_3 = V_{x+h} / V_x \\ V_2 = V_x \cap V_{x+h} \end{cases}$$



$$N(V_x) = N(V_1) + N(V_2)$$

$$N(V_{x+h}) = N(V_2) + N(V_3)$$

alors :

$$V_1 \cap V_2 = \emptyset \quad E[N(V_1) N(V_2)] = E[N(V_1)] \cdot E[N(V_2)]$$

$$V_1 \cap V_3 = \emptyset \quad E[N(V_1) N(V_3)] = E[N(V_1)] \cdot E[N(V_3)]$$

$$V_2 \cap V_3 = \emptyset \quad E[N(V_2) N(V_3)] = E[N(V_2)] \cdot E[N(V_3)]$$

$C(h)$  devient alors :

$$C(h) = E[N(V_2)^2] - E[N(V_2)]^2 = \text{Var}[N(V_2)]$$

$$C(h) = \lambda |V_2| = \lambda \text{Mes}(V_x \cap V_{x+h}) = \lambda K(h)$$

$K(h)$  est le covariogramme géométrique de  $V$  (cf. Annexe II)

$$K(0) = \text{Mes}(V) = |V|$$

par définition

$$\gamma(h) = C(0) - C(h)$$

$$\underline{\gamma(h) = \lambda[K(0) - K(h)]}$$

Les échantillons prélevés en pratique sont toujours disjoints (ils ne se chevauchent pas) et dans ce cas le covariogramme géométrique  $K(h) = 0$ ; par exemple si  $V$  est un cercle de rayon  $R$ ,  $K(h) = 0$  pour  $h \geq h_0$  avec  $h_0 = 2R$ . Le variogramme expérimental calculé avec ces échantillons sera donc constant et égal à  $\lambda K(0) = \lambda V$  : c'est un effet de pépité pur.

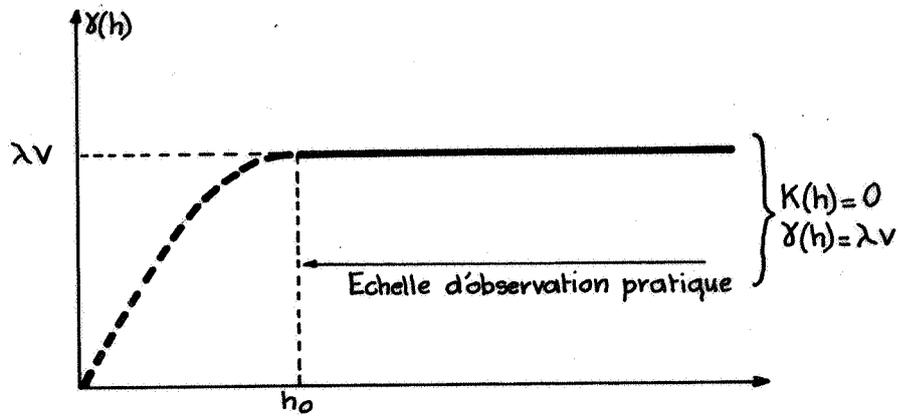


Figure 7

De ces résultats on déduit facilement la covariance de la teneur  $t(V)$  :

$$t(V) = \frac{N(V)}{\text{Mes}(V)}$$

$$\text{Cov}(t(V), t(V_h)) = C(h)$$

$$= \frac{\lambda K(h)}{K^2(o)}$$

et alors

$$\gamma(h) = \frac{\lambda(K(o) - K(h))}{K^2(o)}$$

qui en pratique est toujours égal à  $C_o = \frac{\lambda}{K(o)}$  ou  $\frac{\lambda}{|V|}$  car les échantillons sont toujours disjoints.

## II - LE SCHEMA DE SALVES DE POINTS (CAS STATIONNAIRE)

C'est le processus de points qui semble le plus apte à modéliser la répartition de particules ou de pépites dans une minéralisation : ces particules sont dispersées dans une gangue généralement stérile. La notion de "nuages" de pépites correspond bien aux observations pratiques et les géologues confirment d'ailleurs ce phénomène.

Ce chapitre présente, dans le cas stationnaire (les paramètres définissant le modèle ne sont pas régionalisés) l'étude théorique d'un schéma du tireur : la moyenne et la variance de la quantité de métal  $y$  sont calculées ; les calculs seront partiellement développés en ce qui concerne les fonctions de probabilité utilisées pour permettre l'inférence du modèle à partir de réalisations expérimentales. Toutefois, ce problème d'inférence statistique est actuellement loin d'être résolu ; les paramètres des modèles sont généralement approximés grâce à des simulations successives.

Le chapitre suivant sera consacré à une application sur des simulations, la comparaison entre les résultats théoriques et les résultats expérimentaux  $y$  sera présentée. Une modélisation simple de la variance de la quantité de métal dans les échantillons sera proposée dans un cas particulier.

### II-1. DEFINITIONS, HYPOTHESES ET NOTATIONS.

#### II-1.1 Définition et Hypothèses.

Le processus de salves (ou de nuages) de points ou schéma du tireur, est caractérisé par les propriétés suivantes :

- i) les germes des nuages sont implantés selon un processus de Poisson de densité  $\theta_G$ .
- ii) le nombre de points dans un nuage centré en  $x$ ,  $M(x)$ , suit une loi de probabilité de fonction génératrice

$$H(s) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m s^m = E(s^{M(x)})$$

Les nombres de points de deux nuages différents sont indépendants.

- iii) chaque point d'un nuage est implanté par rapport au germe indépendamment des autres points et selon une loi de probabilité isotrope  $F(dx)$ .
- iv) chaque point d'un nuage est affecté d'une certaine quantité de métal  $q$ , caractérisée par sa transformée de Laplace  $\varphi(\lambda) = E(e^{-\lambda q})$ . Les quantités de métal d'une particule à une autre sont indépendantes.

II-1.2 Notations.

$x$  représente un point, dans  $R^2$  ou dans  $R^3$ , de coordonnées  $x_u, x_v, x_w$ . L'intégrale  $\int f(x) dx$  est une intégrale étendue à tout l'espace et s'exprime

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dw \int_{-\infty}^{+\infty} dv \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_u, x_v, x_w) du \quad \text{dans } R^3$$

- $B$  est un domaine de l'espace représentant un échantillon
- $K(h)$  est le covariogramme géométrique de  $B$  (cf Annexe II). le volume (ou surface) de  $B$  vaut alors  $K(0)$ .
- $\mu(B)$  est le nombre de germes contenus dans  $B$ .
- $N(B)$  est le nombre de particules (ou de points de processus) contenus dans  $B$ .
- $Q(B)$  est la quantité de métal contenue dans  $B$ .
- $T(B) = Q(B)/\text{Mes}(B)$  est la teneur de l'échantillon  $B$ .
- $\mu(B), N(B), Q(B)$  et  $T(B)$  sont des variables aléatoires.
- $H(s)$  est la fonction génératrice de la variable aléatoire  $M$ , le nombre de points dans un nuage, de moyenne  $H'(1) = \bar{M}$ .
- $F(x)$  est la fonction de distribution des distances des particules d'un nuage au centre du nuage (ou germe).  $F(x)$  admet une densité  $f(x)$  :

$$F(B) = \int_B F(dx)$$

$g(h)$  est le covariogramme de  $f(x)$   $g = f * \check{f}$

$$g(h) = \int f(x) f(x+h) dh$$

II-2. TRANSFORMEE DE LAPLACE DE LA QUANTITE DE METAL Q(B).

Ce calcul interviendra plusieurs fois par la suite, aussi n'est-il pas inutile de présenter au moins une fois son développement détaillé.

Les germes des nuages sont Poissoniens, donc :

$$P[\mu(dx) = 1] = \theta_G dx$$

$$P[\mu(dx) = 0] = 1 - \theta_G dx$$

$$P[\mu(dx) > 1] = o(dx)$$

Un germe donné engendre une salve de M points ( $P(M=m) = p_m$ ,  $H(s) = \sum p_m s^m$ ) répartis indépendamment les uns des autres autour du germe selon la loi F(dx).

Soit  $Q_x(B)$  la quantité de métal tombée dans le domaine B, venant d'une salve implantée en x. Bien entendu, s'il n'y a pas de germe Poissonien implanté en x,  $Q_x(B) = 0$ . La transformée de Laplace de  $Q(B)$  s'écrit alors :

$$\phi(\lambda) = E[e^{-\lambda Q(B)}] = E\left[ e^{-\lambda \sum_{dx \in R^d} Q_x(B)} \right] \quad (1)$$

et, d'après l'indépendance de Poisson

$$\phi(\lambda) = \prod_{dx \in R^d} E\left[ e^{-\lambda Q_x(B)} \right]$$

Il faut maintenant évaluer  $\phi_x(\lambda) = E\left[ e^{-\lambda Q_x(B)} \right]$ . Pour cela, on conditionnalise par rapport au nombre de germes tombés dans dx. Ainsi :

$$\begin{aligned} \phi_x(\lambda) &= (1 - \theta_G dx) E\left[ e^{-\lambda Q_x(B)} \mid \mu(dx) = 0 \right] \\ &+ \theta_G dx E\left[ e^{-\lambda Q_x(B)} \mid \mu(dx) = 1 \right] + o(dx) \end{aligned} \quad (2)$$

Or nous savons que  $Q_x(B) = 0$  si  $\mu(dx) = 0$  donc  $E\left[ e^{-\lambda Q_x(B)} \mid \mu(dx) = 0 \right] = 1$ .

Que vaut par ailleurs le second terme  $E\left[ e^{-\lambda Q_x(B)} \mid \mu(dx) = 1 \right]$ ? Afin de le calculer nous effectuons une seconde conditionnalisation qui porte, cette fois, sur le nombre M(x) de points de la salve implantée à partir du germe x :

$$E\left[ e^{-\lambda Q_x(B)} \mid \mu(dx)=1 \right] = \sum_{n=0}^{+\infty} P[M(x)=m] E\left[ e^{-\lambda Q_x(B)} \mid \mu(dx) = 1 \text{ et } M(x) = m \right] \quad (3)$$

Supposons maintenant que  $M(x) = m$ . Les  $m$  points de la salve sont alors  $y_1, y_2, \dots, y_m$  et leurs quantités de métal correspondantes sont  $q_1, q_2, \dots, q_m$ . Compte tenu de la position du germe en  $x$ , le point  $y_i$  implanté par rapport au germe aura une incidence en  $B$  si et seulement si  $x + y_i \in B$ , soit, si  $y_i \in B_{-x}$  domaine déduit de  $B$  par translation du vecteur  $-x$ . Or, le point  $y_i$  appartient à  $B_{-x}$  avec la probabilité  $F(B_{-x})$ . Exprimée en terme de transformée de Laplace, la contribution à  $Q_x(B)$  relative à ce point est donc :

$$[1 - F(B_{-x})] e^0 + F(B_{-x}) \varphi(\lambda)$$

avec  $\varphi(\lambda) = E[e^{-\lambda q_i}]$  la transformée de Laplace de la quantité de métal d'un point d'une salve.

Et en conséquence de l'indépendance conditionnelle des  $m$  points de la salve, on obtient alors :

$$E[e^{-\lambda Q_x(B)} | \mu(dx) = 1, M(x) = m] = [1 - F(B_{-x})(1 - \varphi(\lambda))]^m$$

ce qui donne, en reportant cette expression dans (3) :

$$\begin{aligned} E[e^{-\lambda Q_x(B)} | \mu(dx) = 1] &= \sum_{n=0}^{+\infty} P[M(x) = n] [1 - (1 - \varphi(\lambda)) F(B_{-x})]^n \\ &= H[1 - (1 - \varphi(\lambda)) F(B_{-x})] \end{aligned}$$

En réintégrant cette valeur dans (2), nous obtenons  $\phi_x(\lambda)$  :

$$\begin{aligned} \phi_x(\lambda) &= (1 - \theta_G dx) + \theta_G dx \cdot H[1 - (1 - \varphi(\lambda)) F(B_{-x})] + O(dx) \\ &\approx \exp \theta_G dx (H[1 - (1 - \varphi(\lambda)) F(B_{-x})] - 1) \end{aligned}$$

Puis en effectuant le produit des  $\phi_x(\lambda)$  pour tout  $dx$  de  $R^d$ , d'après (1), on trouve la transformée de Laplace de  $Q(B)$  :

$$\phi(\lambda) = e^{-\theta_G \int [1 - H[1 - (1 - \varphi(\lambda)) F(B_{-x})]] dx}$$

II.2.d

II-3. MOYENNE ET VARIANCE DE Q(B)

II-3.1 Développement des Calculs.

La moyenne et la variance de Q(B) s'obtiennent immédiatement en dérivant  $\text{Ln } \phi(\lambda)$  :

$$\begin{aligned} \psi(\lambda) &= \text{Ln } \phi(\lambda) = \theta_G \int [H(1 - F_x(1-\varphi(\lambda))) - 1] dx \quad \text{en posant } F(B_{-\frac{\lambda}{x}}) = F_x \\ \psi'(\lambda) &= \frac{\phi'(\lambda)}{\phi(\lambda)} \\ \phi'(\lambda) &= \psi'(\lambda) \phi(\lambda) \quad \phi'(0) = \psi'(0) = -E(Q(B)) \\ \phi''(\lambda) &= \psi''(\lambda) \phi(\lambda) + \psi'(\lambda) \phi'(\lambda) \\ \phi''(0) &= \psi''(0) + [\psi'(0)]^2 = E(Q(B)^2) \\ \psi''(0) &= \text{Var}(Q(B)) \end{aligned}$$

Nous calculerons  $\psi'(0)$  et  $\psi''(0)$  par un développement limité de  $\psi(\lambda)$  à l'origine :

$$\psi(\lambda) = \psi(0) + \lambda \psi'(0) + \frac{\lambda^2}{2} \psi''(0) + o(\lambda^2) \quad (1)$$

Par ailleurs nous aurons également besoin du développement limité de  $\varphi(\lambda)$  à l'origine :

$$\varphi(\lambda) = \varphi(0) + \lambda \varphi'(0) + \frac{\lambda^2}{2} \varphi''(0) + o(\lambda^2)$$

or nous savons que  $\varphi(0) = 1$

$$\varphi'(0) = -E(q) = -\bar{q}$$

$$\varphi''(0) = E(q^2) = q_2 = \bar{q}^2 + \sigma_q^2$$

ainsi donc 
$$\varphi(\lambda) = 1 - \bar{q} \lambda + q_2 \frac{\lambda^2}{2} + o(\lambda^2)$$

et du développement de  $H(1-s)$  au voisinage de  $s = 0$ , qui donne :

$$H(1-s) = 1 - s H'(1) + \frac{s^2}{2} H''(1) + o(s^2)$$

ainsi obtient-on le développement limité de

$$\begin{aligned}
 H(1 - F_x + F_x \varphi(\lambda)) &= H \left[ 1 - F_x (\bar{q}\lambda - q_2 \frac{\lambda^2}{2} + \dots) \right] \\
 &= 1 - F_x (\bar{q}\lambda - q_2 \frac{\lambda^2}{2}) H'(1) + \bar{q}^2 \frac{\lambda^2}{2} F_x^2 H''(1) + o(\lambda^2)
 \end{aligned}$$

et ensuite celui de  $\psi(\lambda)$  :

$$\psi(\lambda) = \theta_G \int \left\{ -F_x H'(1) \bar{q}\lambda + \left( F_x q_2 H'(1) + \bar{q}^2 F_x^2 H''(1) \frac{\lambda^2}{2} + o(\lambda^2) \right) \right\} dx$$

En identifiant terme à terme ce développement avec (1), on obtient facilement la moyenne et la variance de  $Q(B)$  :

$$E(Q(B)) = \bar{q} H'(1) \theta_G \int F(B_{-x}) dx \quad \text{II.3.1 A}$$

$$\text{Var}(Q(B)) = \theta_G H'(1) (\bar{q}^2 + \sigma_q^2) \int F(B_{-x}) dx + \bar{q}^2 H''(1) \theta_G \int F^2(B_{-x}) dx \quad \text{II.3.1 B}$$

Pour mémoire  $\bar{q} = -\varphi'(o)$  et  $(\bar{q}^2 + \sigma_q^2) = \varphi''(o)$

$$H'(1) = \bar{m} = E(M) \text{ et } H''(1) = E(M(M-1))$$

$M$  est le nombre de points dans un nuage.

### II-3.2 Moyenne et Variance de $Q(B)$

Les intégrales  $\int F(B_{-x}) dx$  et  $\int F^2(B_{-x}) dx$  qui interviennent dans les expressions II.3.1 A et B se simplifient ; le calcul est donné en Annexe III. On obtient alors :

$$\begin{aligned}
 E(Q(B)) &= -\theta_G H'(1) \varphi'(o) \text{Mes}(B) \\
 &= \theta_G \bar{q} \bar{m} \text{Mes}(B) \quad \text{II.3.2 A}
 \end{aligned}$$


---


$$\begin{aligned}
 \text{Var}(Q(B)) &= \theta_G H'(1) \varphi''(o) \text{Mes}(B) + \theta_G \varphi'(o)^2 H''(1) \int g(h) K(h) dh \\
 &= \theta_G \bar{m} (\bar{q}^2 + \sigma_q^2) \text{Mes}(B) + \theta_G \bar{q}^2 E(M(M-1)) g * K(o) \quad \text{II.3.2 B}
 \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned}
 C_1 &= -H'(1) \varphi'(o) \\
 C_2 &= H'(1) \varphi''(o) \\
 C_3 &= H''(1) \varphi'(o)^2
 \end{aligned}$$

alors

$$E(Q(B)) = \theta_G C_1 \text{ Mes}(B)$$

$$\text{Var}(Q(B)) = \theta_G C_2 \text{ Mes}(B) + \theta_G C_3 g * K(o)$$

II-3.3 Cas Particuliers.

II-3.3.1 La quantité de métal d'une particule élémentaire est constante.

$$\bar{q} = -\varphi'(o) = 1 \quad \text{et} \quad \varphi''(o) = \bar{q}^2 + \sigma_q^2 = 1 ; \quad \varphi(\lambda) = e^{-\lambda}$$

C'est le schéma du tireur classique:  $Q(B) = N(B)$

$$\begin{cases} E(Q(B)) = E(N(B)) = \theta_G H'(1) \text{ Mes}(B) \\ \text{Var}(N(B)) = \theta_G H'(1) \text{ Mes}(B) + \theta_G H''(1) \int g(h) K(h) dh \end{cases}$$

II-3.3.2 Chaque nuage ne comporte qu'un point et tous les points ont le même poids.

On retrouve le processus de Poisson qui a engendré les salves

$$\begin{cases} H'(1) = 1 \\ H''(1) = 0 \\ H(s) = s \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \bar{q} = 1 \\ \sigma_q^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} E(N(B)) = \theta_G \text{ Mes}(B) \\ \text{Var}(N(B)) = \theta_G \text{ Mes}(B) \end{cases}$$

La fonction génératrice  $G(s)$  de  $N(B)$  s'obtient immédiatement :

$$\Phi(\lambda) = \exp - \theta_G \int F(B_{-x}) (1 - \varphi(\lambda)) dx = \exp - [\theta_G (1 - \varphi(\lambda)) \text{ Mes}(B)]$$

et en posant  $s = e^{-\lambda} = \varphi(\lambda)$

$$\phi(\lambda) = G(s) = e^{-\theta_G (1-s) \text{ Mes}(B)}$$

II-4. COVARIANCE Cov(Q(B), Q(B'))

II-4.1 B et B' sont Deux Domaines Quelconques.

Le calcul de la covariance entre Q(B) et Q(B') - les quantités de métal tombées respectivement dans les échantillons B et B' - utilise la transformée de Laplace du couple (Q(B) Q(B')) ;

$$\phi(\lambda, \mu) = E \left\{ e^{-\lambda Q(B)} \cdot e^{-\mu Q(B')} \right\}$$

en effet :

$$\frac{\partial \phi^2}{\partial \lambda \partial \mu} (0,0) = E \left\{ Q(B) \cdot Q(B') \right\}$$

Le calcul de cette transformée de Laplace est très comparable au calcul de  $\varphi(\lambda)$  du paragraphe précédent. Aussi ne sera-t-il pas repris en détail et le lecteur pourra le trouver en Annexe IV. On obtient :

$$\phi(\lambda, \mu) = e^{-\theta_G \int [1 - H(\phi_o(\lambda, \mu))] dx} \quad \text{II.4.1}$$

avec  $\phi_o(\lambda, \mu) = 1 + F(B_{-x})(\varphi(\lambda)-1) + F(B'_{-x})(\varphi(\mu)-1)$

Tout comme pour le calcul de la variance de Q(B), la covariance s'obtient facilement en dérivant ,  $\text{Ln } \phi(\lambda, \mu) = \psi(\lambda, \mu)$ . On obtient alors après calcul (développé en Annexe V) :

$$\text{Cov}(Q(B), Q(B')) = \theta_G H'(1) \varphi''(0) \text{Mes}(B \cap B'_{-x}) + \theta_G H''(1) \varphi'(0)^2 \int F(B_{-x}) F(B'_{-x}) dx$$

II-4.2 B et B' sont Identiques et B' = B<sub>h</sub>

L'échantillon B<sub>h</sub> est identique à B mais il est implanté à une distance h de B. La covariance C<sub>Q</sub>(h) = Cov(Q(B), Q(B<sub>h</sub>)) se déduit directement du calcul précédent (voir Annexe V).

$$\begin{aligned} C_Q(h) &= \theta_G H'(1) \varphi''(0) K(h) + \theta_G H''(1) \varphi'(0)^2 g * K(h) \\ &= \theta_G \bar{m} (\bar{q}^2 + \sigma_q^2) K(h) + \theta_G E(M(M-1)) \bar{q}^2 g * K(h) \end{aligned} \quad \text{II.4.2}$$

$$C_Q(h) = \theta_G C_2 K(h) + \theta_G C_3 g * K(h)$$

REMARQUES

i) Pour  $h = 0$  :

$$\text{Var}(Q(B)) = \theta_G H'(1) \varphi''(0) \text{Mes}(B) + \theta_G H''(1) \varphi'(0)^2 g * K(0)$$

ii) Si chaque nuage ne comporte qu'un point, et tous les points du processus ont un poids égal à 1, on retrouve la covariance d'un processus de Poisson calculée au paragraphe I.3 :  $C(h) = \theta_G K(h)$ .

iii) La fonction aléatoire  $Z(x) = Q(B(x))$ , quantité de métal dans l'échantillon  $B$  implanté en  $x$ , est donc stationnaire :

- pour tout  $x$   $E(Q(B(x))) = \text{constante}$
- la covariance de  $(Z(x), Z(x+h))$  ne dépend que du vecteur  $h$ .

II-5. EXPRESSION DE LA VARIANCE ET DE LA COVARIANCE EN FONCTION DE LA COVARIANCE PONCTUELLE.

La variance de  $Q(B)$  et la covariance  $C_Q(h)$  peuvent être exprimées en fonction de la covariance ponctuelle  $\mathcal{C}_Q(x-y)$  en introduisant la mesure de Dirac  $\delta$  mentionnée dans les rappels géostatistiques (1ère partie, paragraphe II-5).

Posons

$$\begin{cases} C_1 = - H'(1) \varphi'(0) \\ C_2 = H'(1) \varphi''(0) \\ C_3 = H''(1) \varphi'(0)^2 \end{cases}$$

alors

$$\begin{cases} \text{Var}(Q(B)) = \theta_G C_2 K(0) + C_3 g * K(0) \\ C_Q(h) = \theta_G C_2 K(h) + C_3 g * K(h) \end{cases}$$

En introduisant la mesure de Dirac notée symboliquement  $\delta(x-y)$  qui correspond à une masse unité implantée en  $y$ ,  $K(h)$  s'exprime alors :

$$K(h) = \int_B \int_{B_h} \delta(x-y) dx dy$$

Ce résultat peut également se retrouver sachant que la convolution par  $\delta$  est l'opérateur unité, soit :  $K = \delta * K$ .

La covariance (respectivement la variance) s'écrit alors :

$$C_Q(h) = \theta_G [C_2 \delta * K(h) + C_3 g * K(h)]$$

et en appliquant l'algorithme de Cauchy :

$$g * K(h) = \int g(h+u) K(u) du = \int_B \int_{B_h} g(x-y) dx dy$$

La variance et la covariance s'expriment alors

$$C_Q(h) = \theta_G \int_B \int_{B_h} C_2 \delta(x-y) + C_3 g(x-y) dx dy$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} C_Q(h) = \int_B \int_{B_h} \mathcal{C}_Q(x-y) dx dy \\ \text{Var}(Q(B)) = C_Q(o) = \int_B \int_B \mathcal{C}_Q(x-y) dx dy \end{cases} \quad \text{II.5}$$

$\mathcal{C}_Q(x-y)$  est la covariance ponctuelle de  $Q(B)$

$$\underline{\mathcal{C}_Q(x-y) = \theta_G C_2 \delta(x-y) + \theta_G C_3 g(x-y)}$$

## II-6. OBSERVATION D'UN SCHEMA DU TIREUR.

### II-6.1 Covariance Observable.

En pratique minière, la plupart des méthodes d'analyse des teneurs sont destructives : elles impliquent avant toute analyse un prélèvement de l'échantillon et le plus souvent un broyage de celui-ci. En conséquence, l'observation de la microstructure ne se fera qu'à partir d'échantillons disjoints : seule une partie de la microstructure sera observable. (Figure 8).

Soit  $h_0$  la distance à partir de laquelle  $K(h) = |B \cap B_h| = 0$ . Cette distance est égale à  $2R$  quand, dans  $\mathbb{R}^2$ , les échantillons sont des cercles de rayon  $R$ . La covariance de  $Q(B)$  est alors, pour  $h \geq h_0$  :

$$\begin{aligned} C'_Q(h) &= \theta_G C_3 g * K(h) & \text{II.6.A} \\ \text{avec } C_3 &= H''(1) \varphi'(o)^2 \end{aligned}$$

La covariance observable  $C_T(h)$  de la teneur ( $T(B) = \frac{Q(B)}{|B|}$ ) est alors, pour  $h \geq h_0$  :

$$C_T'(h) = \theta_G C_3 \frac{g * K(h)}{K(o)^2} \quad \text{II.6.B}$$

II-6.2 Effet de Pépité Observable.

Le variogramme de la microstructure est  $\gamma_T(h) = C_T(o) - C_T(h)$ .

Appelons  $a_0$  la distance pour laquelle  $C_T(h) = 0$  :  $a_0$  est la portée de la covariance.

- i) Pour  $h_0 \leq h < a_0$ , le terme de covariance  $C_T'(h)$  n'est pas nul et ainsi l'effet de pépité observable macroscopiquement est alors (cf Figure 8) :

$$C_o = C_T(o) - \theta_G C_3 \frac{g * K(h_0)}{K(o)^2}$$

Rappelons que  $C_T(o) = \text{Var}(T(B))$ .

- ii) Pour  $h \geq a_0$ , le terme de covariance  $C_T'(h)$  est alors nul. La microstructure apparaît macroscopiquement comme un effet de pépité pur.  $C_o'$  qui vaut alors :

$$C_o' = C_T(o) = \theta_G \frac{C_2}{K(o)} + \theta_G C_3 \frac{g * K(o)}{K(o)^2} \quad \text{II.6.C}$$

où  $K(o) = |B|$  est la mesure de l'échantillon.

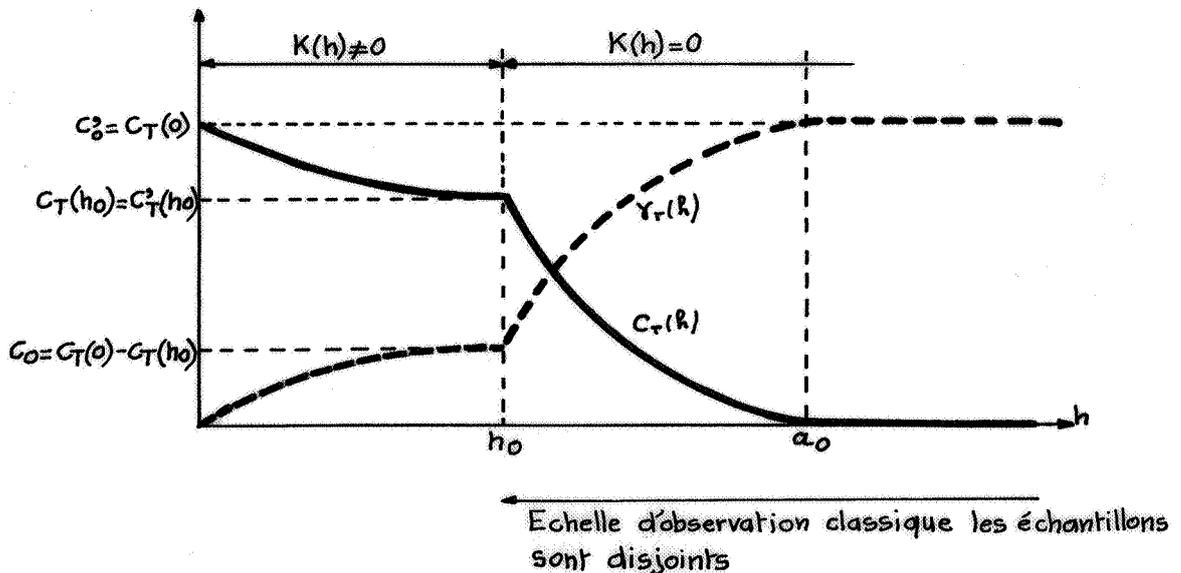


Figure 8

La valeur de l'effet de pépite  $C'_0$  et le comportement du terme de covariance  $C'_T(h)$  dépendent beaucoup du produit de convolution  $g * K(h)$ . Etudions-le plus précisément.

II-6.3 Comportement de  $g * K(h)$ .

i) Pour h très grand :

$$C'_T(h) = \frac{\theta_G C_3}{K(o)^2} g * K(h) = \frac{\theta_G C_3}{K(o)^2} \int g(u+h) K(u) du$$

Puisque  $K(u)$  est nul pour les distances supérieures à la plus grande variation diamétrale d'un échantillon B, l'intégration est restreinte au domaine B, et alors, pour h grand

$$\begin{aligned} g(u+h) &\simeq g(h) \\ \text{on a alors } C'_T(h) &\simeq \frac{\theta_G C_3}{K(o)^2} g(h) \int K(u) du \end{aligned}$$

$$\underline{C'_T(h) \simeq \theta_G C_3 g(h) .} \qquad \text{II.6.3A}$$

Pour les grandes distances de h, le comportement du variogramme dépendra donc essentiellement de  $g(h)$ ; c'est-à-dire physiquement de la taille des nuages de points. Plus les nuages seront étalés, plus la portée de la covariance sera grande.

ii) Pour h qui tend vers 0 :

Deux cas sont alors à considérer

$\sigma^2 \gg R$  : les échantillons sont petits par rapport à la taille des nuages : l'intégrale est calculée sur un petit domaine, et sur ce domaine on peut admettre que  $g(u)$  est pratiquement constant. Donc :

$$\begin{aligned} \sigma^2 \gg R \\ h \rightarrow 0 \quad g * K(o) &\simeq g(o) \int K(u) du \end{aligned}$$

L'effet de pépite  $C'_0$  est alors, en première approximation, égal à

$$\boxed{C'_0 \simeq \frac{\theta_G C_2}{K(o)} + \theta_G C_3 g(o)} \qquad \text{II.6.3B}$$

L'effet de pépite dépend donc directement de la taille des nuages par l'intermédiaire de  $g(o)$ .

$\sigma^2 \ll R$  : les échantillons sont grands par rapport à la taille des nuages. On peut donc cette fois admettre en 1ère approximation que  $K(u)$  est constant sur le domaine d'intégration, car dans ce cas  $g(u)$  a une portée très petite.

$$\text{Donc } g * K(o) \simeq K(o) \int g(u) du = K(O)$$

L'effet de pépite  $C'_o$  est en 1ère approximation égal à

$$C'_o \simeq \frac{\theta_G C_2}{K(o)} + \frac{\theta_G C_3}{K(o)}$$

Remarquons que dans ce cas une meilleure approximation peut être obtenue en effectuant le développement limité de  $K(h)$  à l'origine (voir Annexe II), et alors :

$$C'_o \simeq \frac{\theta_G C_2}{K(o)} + \frac{\theta_G C_3}{K(o)} \left[ 1 - \frac{2 \cdot P}{K(o)} \int_0^{+\infty} u^2 g(u) du \right] \quad \text{II.6.3C}$$

où  $P$  est le périmètre d'un échantillon  $B$  et  $g = f * \check{f}$ .  
 $f$  est la fonction de densité de la loi de répartition des points dans un nuage. Un exemple de calcul sera donné au paragraphe IV-3.

REMARQUE : En repassant aux coordonnées polaires

$$\int_0^{+\infty} u^2 g(u) du = \frac{1}{2\pi} \int_{R^2} |v| g(v) dv$$

Or  $g(v) = f * \check{f}(v)$  n'est autre que la densité de  $X - Y$  où  $X$  et  $Y$  suivent indépendamment la loi  $f$ . Si bien que

$$\int_0^{+\infty} u^2 g(u) du = \frac{1}{2\pi} E(|X - Y|)$$

$E(|X - Y|)$  représente physiquement la distance moyenne entre deux points d'un même nuage : or cette distance est très petite comparée aux dimensions des échantillons. Ainsi

$$\frac{P}{K(0)} E(|X - Y|) \ll 1$$

et pourra donc être négligée en toute première approximation, comme nous l'avons fait précédemment.

## II-7. PROBABILITES UTILES POUR L'AJUSTEMENT D'UN MODELE.

L'ajustement d'un modèle sur des données expérimentales nécessite en toute rigueur la détermination de 3 lois de probabilités, ou, en pratique, si des hypothèses peuvent être faites quant à la nature de ces lois, la détermination des paramètres respectifs les définissant ; c'est-à-dire :

- la loi du nombre de particules dans un nuage, mais qui n'intervient dans les expressions de la variance et de la covariance que par l'intermédiaire des moments  $E(M)$  et  $E(M(M-1))$ .

-  $F(dx)$  la loi de distribution des particules d'un nuage autour du centre de ce nuage.  $F(dx)$  sera essentiellement caractérisée par la "taille" du nuage c'est-à-dire par la variance de dispersion des points.

-  $q$  la loi de la quantité de métal d'une particule. En fait la loi elle-même n'intervient pas directement ; il suffit de connaître les moments de  $q$  (moyenne et variance) pour caractériser le modèle.

En pratique, tous ces paramètres ne sont que très rarement obtenus individuellement ; la plupart du temps, ils sont indissociables et ce sont les constantes  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$ , définies au paragraphe précédent, qu'il faudra déterminer. Il existe différentes méthodologies pour ajuster un processus de points. Nous n'en citerons que deux :

- la méthode du plus proche voisin [1,2,3] Elle consiste à calculer expérimentalement des probabilités conditionnelles sur différents supports d'échantillons, puis à ajuster les courbes expérimentales par des courbes théoriques.

- la méthode de Krickeberg et Ripley [11,12] , qui introduisent "the reduced second moment measure  $\lambda^2 K(t)$ ". La méthode consiste à tracer la courbe

expérimentale de cette fonction  $K(t)$  pour différents supports, puis à l'encadrer par des simulations successives.

La méthode du plus proche voisin.

C'est la seule méthode que nous présenterons ici, car les probabilités utiles pour l'ajustement se déduisent facilement des équations caractérisant le schéma du tireur. Nous développons les expressions de la probabilité de n'avoir aucun point dans un échantillon (un disque de rayon  $r$ ) et de la probabilité que le plus proche voisin soit à une distance supérieure à  $r$ . La fonction génératrice  $G(s)$  du nombre de points  $N(B)$  contenus dans un échantillon  $B$ , et la fonction génératrice  $G(s,t)$  du couple  $N(B)$  et  $N(B')$  se déduisent des transformées de Laplace  $\phi(\lambda)$  et  $\phi(\lambda,\mu)$ .

Le domaine  $B$  est un cercle de centre  $x$  et de rayon  $r$  :  $B(x,r)$ .

II-7.1 Probabilité de n'Avoir Aucun Point dans un Disque de Rayon  $r$  :  $P(N(B) = 0)$ .

La fonction génératrice  $G(s)$  de  $N(B)$  s'obtient directement à partir de  $\phi(\lambda)$  en considérant que tous les points ont un poids  $q$  égal à 1. Dans ces conditions  $\phi(\lambda) = e^{-\lambda}$

$$\phi(\lambda) = E \left\{ e^{-\lambda Q(B)} \right\}$$

$$\phi(\lambda) = \exp - \theta_G \int [1 - H[1 - F(B_{-x})(1 - \phi(\lambda))]] dx$$

Posons  $e^{-\lambda} = s$ .

$$G(s) = E \left\{ s^{N(B)} \right\} = \exp - \theta_G \int (1 - H[1 - F(B_{-x})(1-s)]) dx$$

On en déduit facilement la probabilité  $P(N(B) = 0)$ . En effet,

$$G(s) = \sum_{n=0}^{\infty} P(N(B) = n) s^n$$

$$P(N(B) = 0) = G(0) .$$

Cette probabilité vaut alors :

$P(N(B) = 0) = \exp - \theta_G \int (1 - H[1 - F(B_{-x})]) dx$
--

II.7.1

De même, le calcul de  $P(N(B) = 1)$  est immédiat.

$$G'(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n P(N(B) = n) s^{n-1}$$

$$G'(0) = P(N(B) = 1) \tag{1}$$

$$P(N(B) = 1) = G(0) \cdot \theta_G \int H' [ 1 - F(B_{-x}) ] F(B_{-x}) dx \tag{2}$$

II-7.2 Probabilité pour que le Plus Proche Voisin d'un Point Donné Soit à une Distance Supérieure à r :  $Q(r|0)$  d'après les notations de [1] .

La fonction génératrice  $G(s,t)$  s'obtient directement à partir de  $\phi(\lambda,\mu)$  en considérant que tous les points ont le même poids  $q = 1$  ; dans ce cas  $\phi(\lambda)$ , la transformée de Laplace de la quantité de métal  $q$ , vaut  $e^{-\lambda}$ . Ainsi, en posant dans l'expression II.4.1  $e^{-\lambda} = s$  et  $e^{-\mu} = t$ , on obtient immédiatement la fonction génératrice  $G(s,t)$  :

$$G(s,t) = e^{-\theta_G \int [1 - H(G_0(s,t))] dx}$$

avec  $G_0(s,t) = 1 + F(B_{-x})(s-1) + F(B'_{-x})(t-1)$

II.7.2A

Cette fonction génératrice va alors permettre le calcul de  $Q(r|0)$ . En effet, rappelons la définition de  $G(s,t)$  :

$$G(s,t) = \sum_{n,m} P[N(B) = n, N(B') = m] s^n t^m$$

En dérivant  $G(s,t)$  par rapport à  $t$ ,

$$\frac{\partial G(s,t)}{\partial t} = \sum_{n,m} P[N(B) = n, N(B') = m] s^n m t^{m-1}$$

on obtient facilement que

$$\frac{\partial G(0,0)}{\partial t} = P[N(B) = 0, N(B') = 1]$$

soit en utilisant l'expression II.7.2A

$$P[N(B) = 0, N(B') = 1] = G(0,0) \int H' [ 1 - F(B_{-x}) - F(B'_{-x}) ] F(B'_{-x}) dx \tag{1}$$

Maintenant, en utilisant les propriétés des probabilités conditionnelles, on obtient que :

$$P [N(B) = 0 \mid N(B') = 1] = \frac{P [N(B)=0, N(B')=1]}{P [N(B')=1]} \quad (2)$$

Cette probabilité se calcule immédiatement à partir des résultats (2) de II.7.1 et (1) de II.7.2.

Maintenant, considérons deux domaines B et B' centrés en O, avec B' ⊂ B. Quand B' se réduit à un petit élément de volume dx, contenant le point de référence, et B au cercle de rayon r centré sur ce point, la probabilité P(N(B)=0 | N(B')=1) est égale à Q(r|o). Ainsi, Q(r|o) s'obtient en prenant la limite suivante :

$$Q(r|o) = \lim_{B' \rightarrow o} P [N(B)=0 \mid N(B')=1]$$

$$\begin{aligned} \text{avec } B &= B(o, r) & B' &\subset B \\ B' &= B(o, \varepsilon) \end{aligned}$$

Le calcul de cette limite sera un peu plus détaillé en Annexe VI. On obtient alors :

$$Q(r|o) = P(N(B(o, r))=0) \frac{\int H' [1 - F(B(x, r))] f(x) dx}{H'(1)} \quad \text{II.7.2}$$

II-7.3 Les deux probabilités P(N(B)=0) et Q(r|o) sont facilement obtenues expérimentalement pour toute valeur de r ; leurs expressions théoriques sont relativement simples ; la modélisation des courbes expérimentales ne posera donc pas de problèmes en principe.

### III - APPLICATIONS SUR DES SIMULATIONS DANS LE PLAN

#### (CAS STATIONNAIRE)

Nous allons maintenant étudier les comportements de  $E(Q(B))$  et  $\text{Var}(Q(B))$  dans le cas particulier où la fonction de répartition de l'implantation des points dans un nuage est gaussienne. A partir de ce modèle, nous allons développer des formules asymptotiques simples permettant de calculer la variance de  $Q(B)$  avec une simple calculatrice de poche (Chapitre IV).

Naturellement, d'autres modèles peuvent être envisagés. On peut également concevoir que les particules sont réparties uniformément autour de grains : les modèles retenus doivent être adaptés aux observations expérimentales. Dans ce chapitre, nous choisissons a priori notre modèle.

#### III-1. SIMULATIONS DE SCHEMAS DE SALVES.

##### III-1.1 Les Paramètres des Simulations.

###### III-1.1a Implantation des germes.

Les germes auront une implantation poissonnienne de paramètre  $\theta_G$ , qui représente le nombre de germes par unité de surface.

###### III-1.1b Nombre de particules par nuage.

Le nombre de particules dans un nuage suivra une loi de Poisson de paramètre  $\theta_N$ .

###### III-1.1c Quantité de métal d'une particule.

Afin de ne pas compliquer outre mesure les simulations, la quantité de métal  $q$  de chaque particule sera prise constante et égale à 1 : c'est-à-dire que  $Q(B) = N(B)$ , nombre de particules tombées dans un échantillon  $B$ . En fait, cela ne modifie en rien les calculs car la quantité de métal élémentaire n'intervient que par ses moments, moyenne  $\bar{q}$  et variance  $\sigma_q^2$ , qui pourront être "injectés" ensuite si l'on désire retrouver les valeurs de la variance et de la

covariance lorsque les quantités de métal  $q$  suivent une loi de moyenne  $\bar{q}$  et de variance  $\sigma_q^2$ .

### III-1.1d Fonction de répartition des grains dans un nuage.

La fonction de répartition des distances des points du nuage par rapport au centre du germe,  $F(x)$ , admet une densité  $f(x)$ ; différentes fonctions de densité peuvent être utilisées, des fonctions exponentielles aux fonctions uniformes: la fonction de densité gaussienne isotrope dans  $\mathbb{R}^n$  a été retenue pour les simulations des microstructures. Cette hypothèse sera à valider par la suite sur données expérimentales; dans le cas contraire, d'autres fonctions de répartition seront à rechercher.

Si  $x$  est le vecteur  $\vec{OM}$   $\left\{ \begin{array}{l} O \text{ est le centre du nuage (germe)} \\ M \text{ est un point du nuage (particule)} \end{array} \right.$

$|x|$  est le module du vecteur  $\vec{OM}$ . Dans  $\mathbb{R}^n$ :

$$f_n(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n} e^{-\frac{|x|^2}{2\sigma^2}}$$

donc dans  $\mathbb{R}^2$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{|x|^2}{2\sigma^2}}$$

La variance  $\sigma^2$  caractérise "l'étalement du nuage".

### III-1.2 Réalisation Pratique d'Une Simulation.

Toutes les simulations réalisées ici impliquent l'utilisation d'une loi uniforme qui sera simulée par la méthode traditionnelle de congruence.

#### III-1.2.1 Simulation des germes poissonniens.

Pour générer les germes poissonniens dans un domaine  $L \times H$ , il faut:

i) générer une valeur poissonnienne de paramètre  $\theta_{G,L.H.}$

Soit  $n$  cette valeur générée. (La génération d'une valeur poissonnienne est reprise en III-1.2.2).

ii) générer  $n$  points uniformes et indépendants dans  $(L \times H)$ .

Pour générer une valeur uniforme, nous utilisons la méthode de congruence. A partir d'une valeur entière d'initialisation  $i_0$ , on peut générer une suite d'entiers par récurrence

$$i_n = \text{mod} (1000 \times i_{n-1}, 2001179) \quad n = 1, 2, \dots$$

La suite  $x_n = \frac{i_n}{2001179}$  vérifie alors en bonne approximation les propriétés d'uniformité et d'indépendance requises. [10].

III-1.2.2 Génération du nombre de points poissonniens dans un nuage.

Rappelons la méthode couramment utilisée : on met bout à bout une succession de segments de longueur exponentielle de moyenne 1, segments indépendants l'un de l'autre (processus de Poisson sur  $\mathbb{R}^+$ ) ; le nombre des extrémités qui tombent dans un segment de longueur  $\theta_N$  suit précisément une loi de Poisson de paramètre  $\theta_N$ .

III-1.2.3 Positionnement des points dans le nuage.

On veut donc générer un point  $x$  implanté par rapport à 0 (le germe du nuage) selon la loi gaussienne admettant pour densité :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{|x|^2}{2\sigma^2}}$$

On établit facilement que :

- i) le module de  $x$ ,  $|x|$ , suit une loi  $g(r) = \frac{r e^{-r^2/2\sigma^2}}{\sigma^2}$   
 Pour obtenir  $|x|$ , on génère une valeur uniforme  $u$ , sur  $[0,1]$  et alors la valeur  $|x| = G^{-1}(u)$  suit la loi  $g(r)$

$$|x| = [-2\sigma^2 \text{Ln}(1 - G(u))]^{1/2}$$

avec  $G(u) = \int_0^u g(r) dr = (1 - e^{-u^2/2\sigma^2})$

- ii) l'orientation de  $x$ ,  $x/|x|$ , est uniforme sur  $[0, 2\pi[$
- iii)  $|x|$  et  $\frac{x}{|x|}$  sont indépendants.

III-2. EXPRESSIONS DES MOMENTS DE Q(B) DANS LE CADRE DES SIMULATIONS.

III-2.1 Calcul de l'Espérance et de la Variance de Q(B).

Les expressions des moments de  $Q(B) = N(B)$  sont données dans le paragraphe II-3.2 et dans le cas des simulations  $H'(1) = \theta_N$  et  $H''(1) = \theta_N^2$ , on obtient alors :

$$E(Q(B)) = E(N(B)) = \theta_G \theta_N \text{Mes}(B) = \theta_G \theta_N K(o) \quad \text{III.2.a}$$

$$\text{Var}(Q(B)) = \theta_G \theta_N K(o) + \theta_G \theta_N^2 \int g(h) K(h) dh \quad \text{III.2.b}$$

REMARQUE :

$$\text{Var}(Q(B)) = \theta_G \theta_N \int_B \int_B (\delta(x-y) + \theta_N g(x-y)) dx dy \text{ d'après (II.5)}$$

avec  $\left\{ \begin{array}{l} g(h) = \text{covariogramme de } f(x). \text{ Dans } R^2 : g(h) = \frac{1}{4\pi\sigma^2} e^{-|h|^2/4\sigma^2} \\ K(h) = \text{covariogramme géométrique de } B. \text{ Dans } R^2 \text{ pour un cercle de rayon } R : \end{array} \right.$

$$K(h) = 2 R^2 \text{Arc cos } \frac{|h|}{2R} - |h| \sqrt{R^2 - \frac{|h|^2}{4}}$$

L'intégrale  $\int g(h) K(h) dh$  n'a pas d'expression simple, tous les calculs sont effectués par une intégration numérique utilisant la méthode de Gauss.

Toutefois, afin d'obtenir des expressions utilisables facilement, des approximations seront développées au Chapitre IV : celles-ci permettront alors de calculer, dans le cas du modèle simulé, la variance de  $Q(B)$  avec une simple calculatrice de poche.

III-2.2 Calcul de la Covariance

La covariance se calcule aussi facilement dans le cas des simulations retenues à partir de l'expression II.4.2 . On obtient :

$$\begin{aligned} C(h) = \text{Cov}(Q(B), Q(B_h)) &= \theta_G \theta_N K(h) + \theta_G \theta_N^2 g * K(h) \\ &= \theta_G \theta_N K(h) + \theta_G \theta_N^2 \int g(u+h) K(u) du \\ &= \int_B \int_{B_h} [\theta_G \theta_N \delta(x-y) + \theta_G \theta_N^2 g(x-y)] dx dy \end{aligned} \quad \text{d'après II.5.}$$

III-3. CALCUL DE LA PROBABILITE P(N(B) = 0)

La probabilité de n'obtenir aucun point dans un échantillon B, P(N(B) = 0), se calcule facilement à partir de l'expression II.7.1, et pour le modèle retenu ici on trouve :

$$P(N(B) = 0) = e^{-\theta_G} \int (\exp [ -\theta_N F(B-x) ] - 1) dx$$

En effet, ici  $H(s) = e^{-\theta_N(s-1)}$ .

Le calcul de  $F(B-x)$ , qui représente l'intégration de  $F(dx)$  sur le domaine  $B-x$ , peut présenter quelques difficultés. Ceci est détaillé en Annexe VII.

III-4. QUELQUES EXEMPLES.

III-4.1 Visualisation de Simulations.

Les figures 9 à 11 illustrent les simulations d'un schéma du tireur pour différentes valeurs des paramètres du modèle :

Figure 9 : densité de germe  $\theta_G = 0.03$ , nombre moyen de points dans un nuage  $\theta_N = 5$  et variance de dispersion "des points d'un nuage autour du germe"  $\sigma^2 = 0.25$  ; ce sont les paramètres utilisés au paragraphe IV ;  $\theta_G = 0.03$  correspond donc à un nombre moyen de 12 germes dans un domaine  $20 \times 20$ .

Figure 10 :  $\theta_G = 0.03$  ,  $\theta_N = 5$ . et  $\sigma^2 = 1$ . Les points des nuages sont plus dispersés autour de leurs germes.

Figure 11 :  $\theta_G = 0.03$ ,  $\theta_N = 10$ . et  $\sigma^2 = 0.25$  ; même modèle que pour la Figure 9, mais le nombre moyen de points dans un nuage est ici de 10.

III-4.2 Variance des Teneurs. (Figures 12 a à d).

Variances et covariances de la quantité de métal et de la teneur sont proportionnelles à  $\theta_G$ , aussi toutes les courbes sont tracées avec  $\theta_G = 1$ . Les variances et les covariances sont d'autre part des polynômes du second degré en  $\theta_N$  ; 4 valeurs de  $\theta_N$  (1, 5, 10 et 20) et 6 valeurs de la variance de dispersion des points autour des germes ( $\sigma^2 = 0.1, 0.25, 0.5, 1, 5$ . et 10) ont été retenues pour illustrer l'évolution de la variance des teneurs

en fonction de la taille des échantillons. En fait les courbes sont tracées en fonction de  $R^2/\sigma^2$  (de 0 à 100) qui représente le rapport entre la taille de l'échantillon et la taille du nuage de points.

### III-4.3 Covariances des Teneurs.

La Figure 13 représente les covariances des teneurs pour  $\theta_G = 1.00, \theta_N = 5.$  et  $\sigma^2 = 1.00$ , et pour 3 valeurs des rayons des échantillons :  $R = 0.10, 0.15$  et  $0.25$ , ce qui représente des rapports  $R^2/\sigma^2$  de  $0.01, 0.0225$  et  $0.0625$ .

La Figure 14 représente les covariances des teneurs pour les grandes valeurs de  $R^2/\sigma^2$ , soient  $100, 225$  et  $625$ .

On retrouve naturellement les valeurs des covariances à l'origine sur les courbes de la Figure 12b.

Dans les deux cas (Figures 13 et 14), on observe une rupture de pente pour  $h = 2R$  qui correspond à l'annulation du terme  $C_2 \frac{K(h)}{K(0)^2}$ , car pour  $h > 2R$  les échantillons sont disjoints et  $K(h) = 0$ ; on observe également que pour  $h > 2R$  les covariances ne sont pas nulles et sont lentement décroissantes, c'est le terme  $C_3 \frac{g * K(h)}{K(0)^2}$  qui intervient seul : ce qui est illustré par la Figure 15 qui est un grossissement de la Figure 13.

Figure 9.

SCHEMA DU TIREUR

Densité de germes  $\theta_G = 0.03$

Nombre moyen de points par nuage

$$\theta_N = 5.00$$

Variance des distances dans un nuage

$$\sigma^2 = 0.25$$

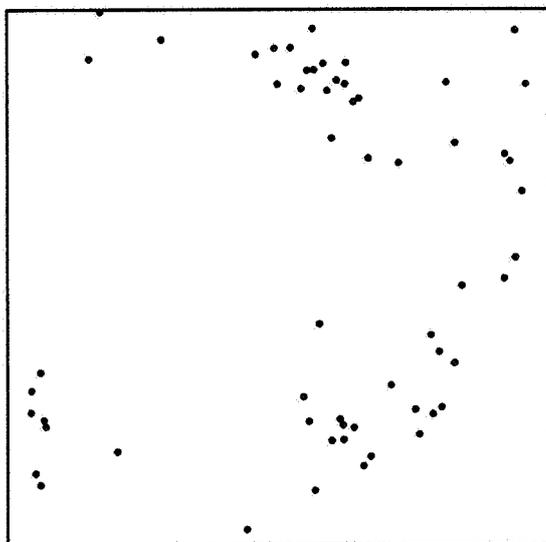
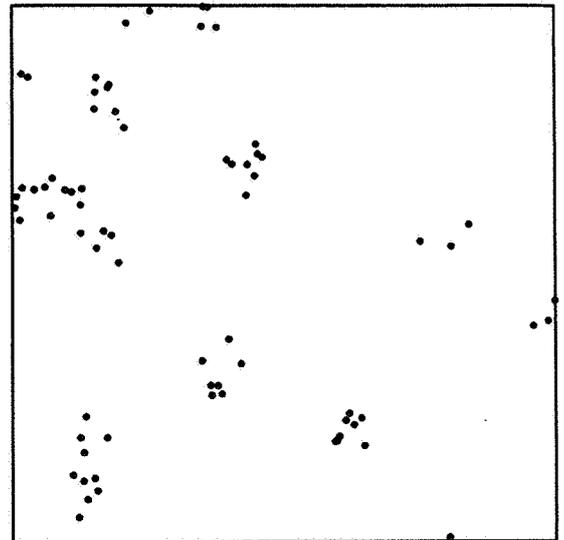


Figure 10.

SCHEMA DU TIREUR

$$\theta_G = 0.03$$

$$\theta_N = 5.00$$

$$\sigma^2 = 1.00$$

Figure 11.

SCHEMA DU TIREUR

$$\theta_G = 0.03$$

$$\theta_N = 10.00$$

$$\sigma^2 = 0.25$$



Echelle des figures 9, 10 et 11

Dimension des domaines 20 x 20.

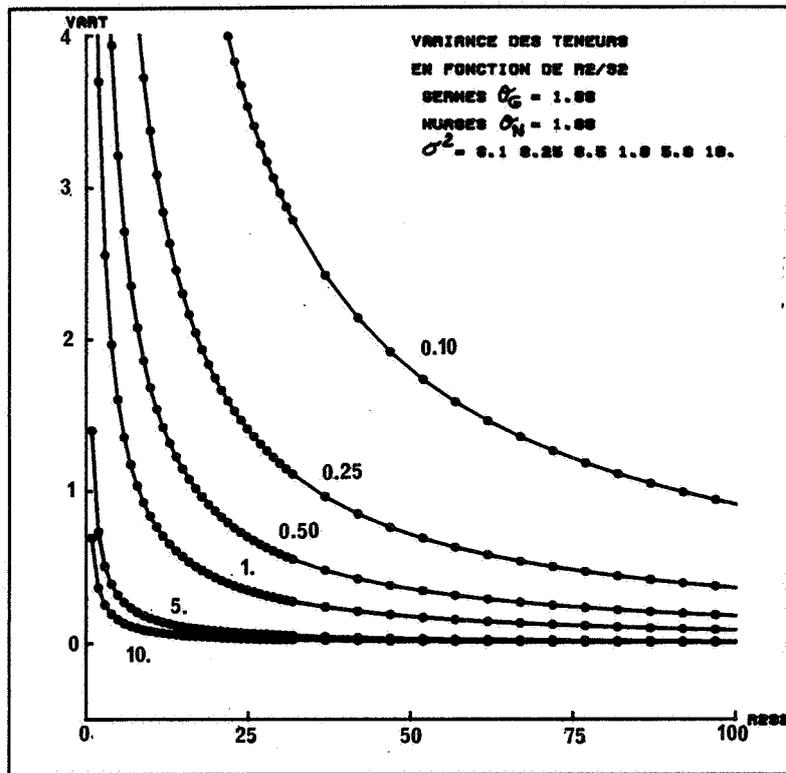


Figure 12 b.

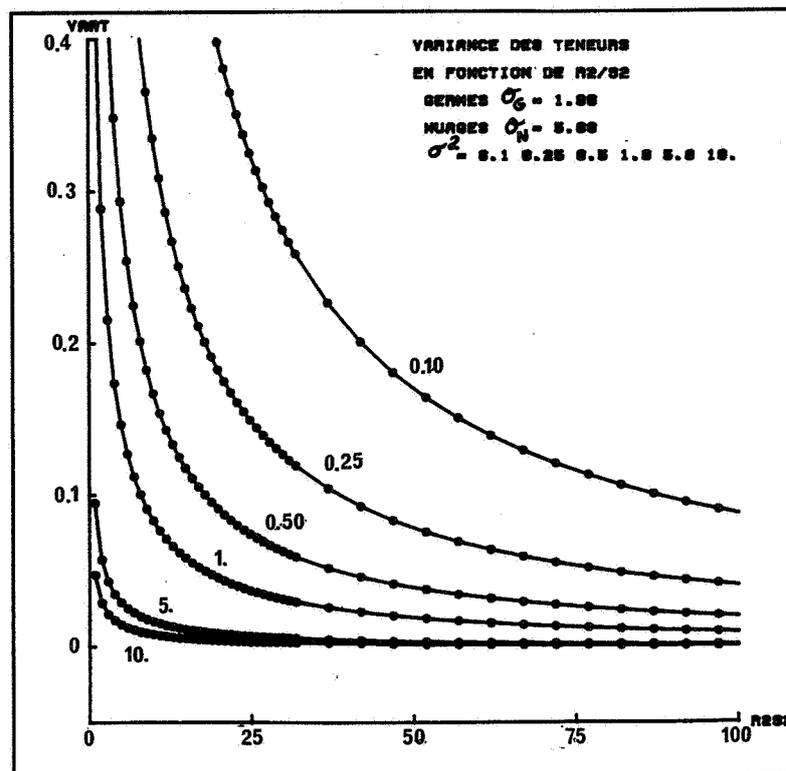


Figure 12 a.

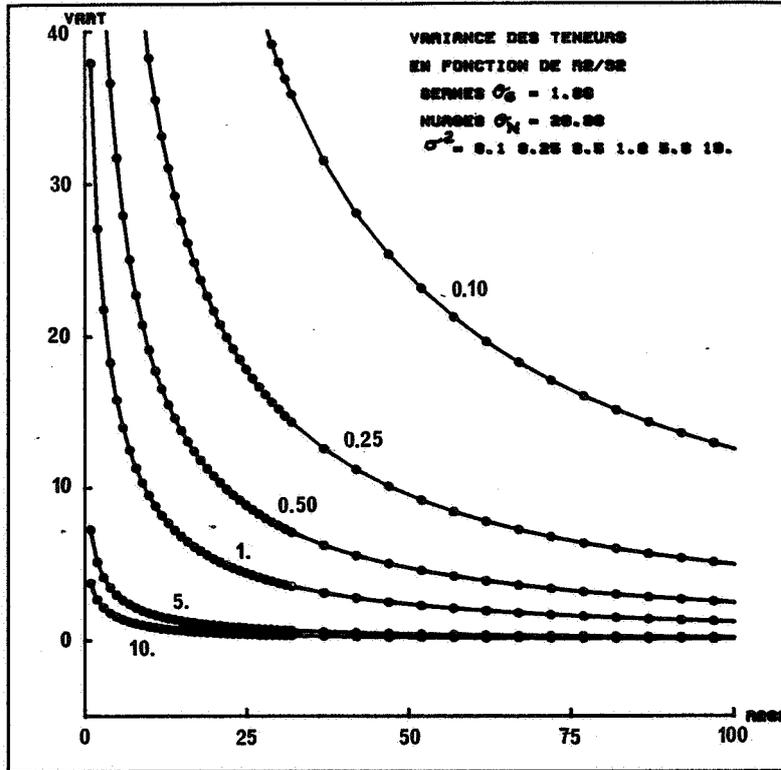


Figure 12 d.

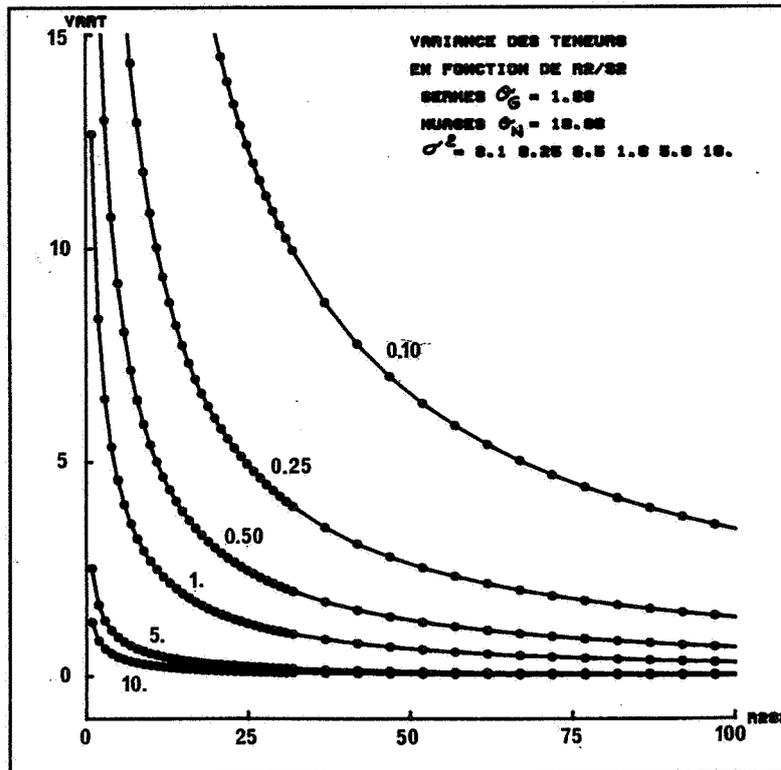


Figure 12 c.

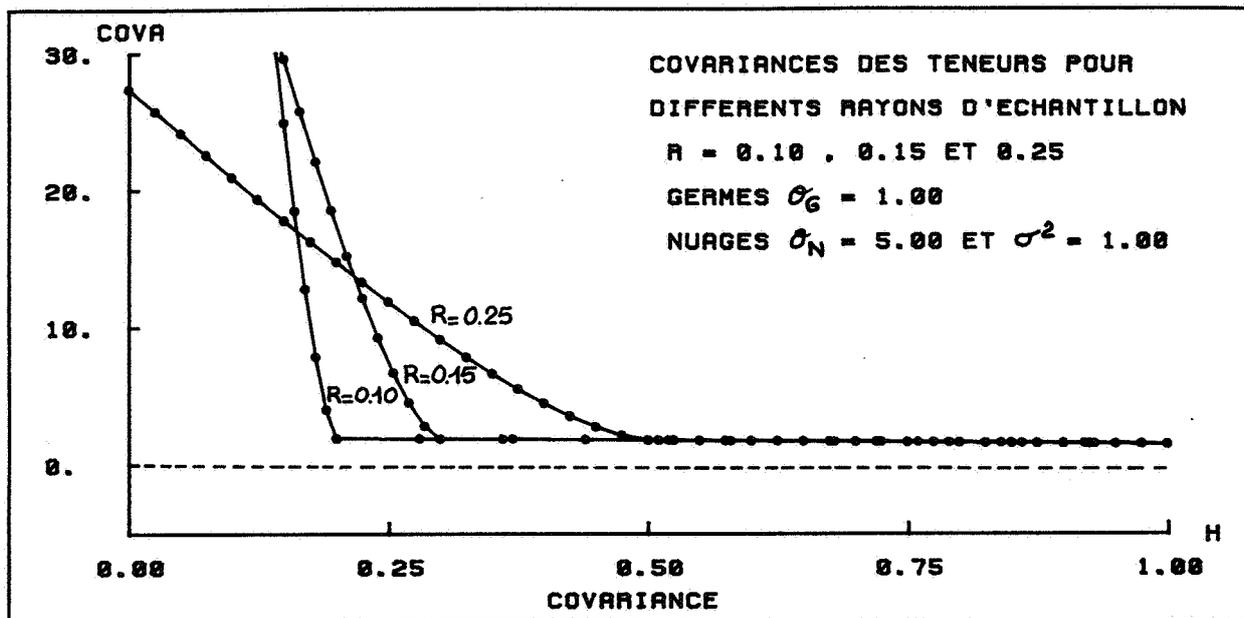


Figure 13.

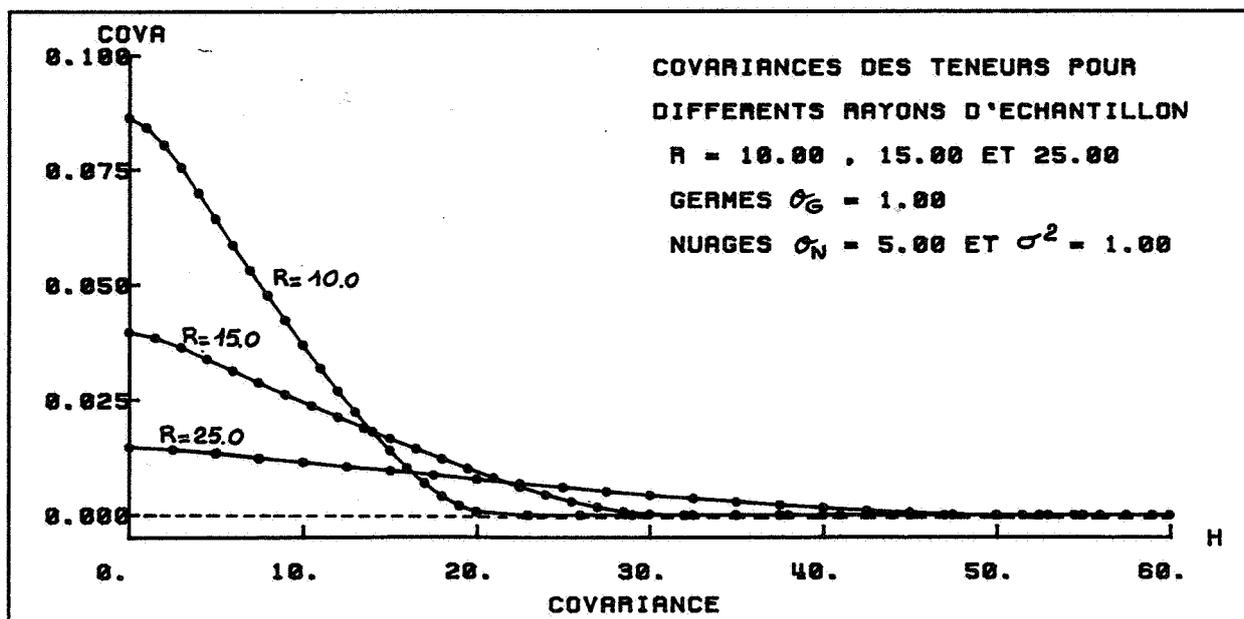


Figure 14.

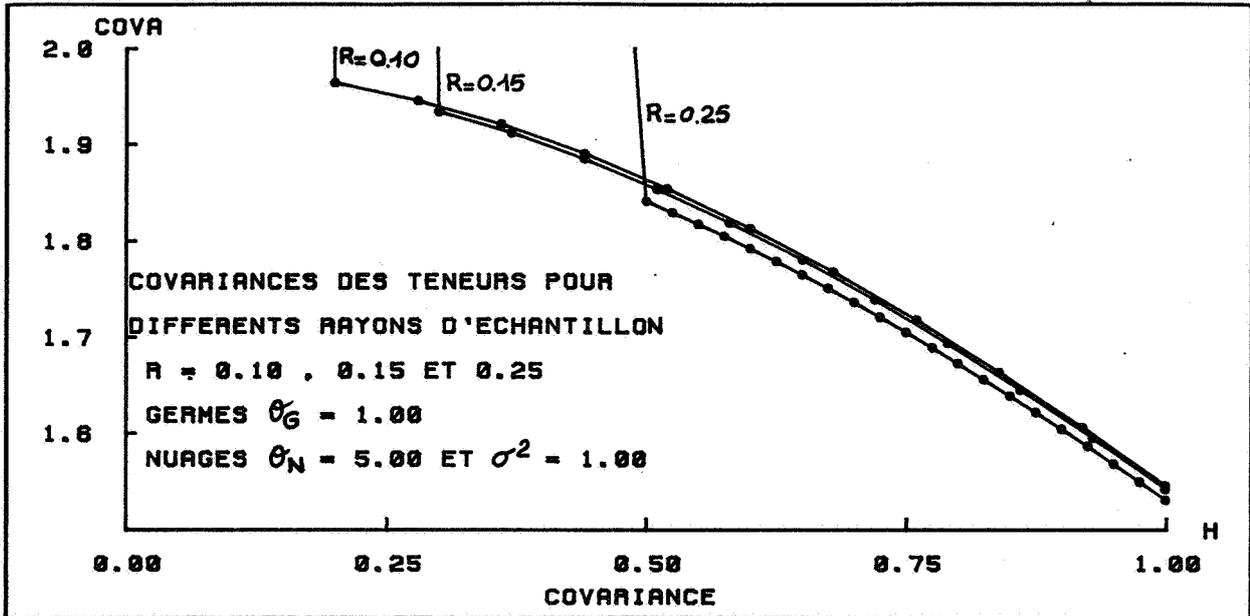


Figure 15.

## IV - AJUSTEMENT DE LA VARIANCE EXPERIMENTALE DE Q(B)

### DANS LE CADRE DES SIMULATIONS

La variance de Q(B) donne directement pour les grandes valeurs de R, (c'est-à-dire à l'échelle des observations classiques) l'amplitude de l'effet de pépite qui affecte le variogramme. Le paragraphe I-3 rappelle le cas de l'effet de pépite pur.

Lorsqu'un modèle théorique est connu, la variance de Q(B) se calcule facilement en utilisant l'expression III.2.b. Cependant, c'est la manipulation inverse qui, en pratique, est vraiment intéressante : connaissant la courbe expérimentale de variation de la variance de Q(B) en fonction du volume, on doit pouvoir ajuster cette courbe par un modèle théorique simple. Les expressions théoriques III.2.b sont trop lourdes pour être utilisées couramment, c'est pourquoi des expressions approximées doivent être déterminées.

#### IV-1. DEVELOPPEMENT ET APPROXIMATION DU CALCUL DE LA VARIANCE DE Q(B).

L'expression de la variance de Q(B) est, d'après III.2.b :

$$\text{Var}(Q(B)) = \theta_G \theta_N \text{Mes}(B) + \theta_G \theta_N^2 \int g(h) K(h) dh$$

La difficulté consiste à intégrer  $g(h) K(h)$  sur tout l'espace : c'est donc cette intégration qu'il faut simplifier. Le développement des calculs est très fastidieux, il est donc reporté en Annexe VIII.

Une première étape permet d'obtenir cette intégrale sous forme d'un développement en série :

$$\int g(h) K(h) dh = (-1) R^2 \pi \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^N \frac{(2N-1)!}{2^N (N+1)!} \left( \frac{R^2}{\sigma^2} \right)^N \frac{1}{N!} \quad \text{IV.1.1a}$$

En développant les factoriels, on obtient alors une expression de cette intégrale sous forme d'une fonction hypergéométrique confluyente, qui s'écrit :

$$\int g(h) K(h) dh = R^2 \pi \left[ 1 - M\left(\frac{1}{2}, 2, -\frac{R^2}{\sigma^2}\right) \right] \quad \text{IV.1.1.b}$$

$$= R^2 \pi \left[ 1 - M\left(\frac{3}{2}, 2, \frac{R^2}{\sigma^2}\right) e^{-R^2/\sigma^2} \right]$$

L'intégrale  $\int g(h) K(h) dh$  s'exprime donc comme une fonction de  $R^2/\sigma^2$ , où  $R$  est le rayon de l'échantillon  $B$ , et  $\sigma^2$  la "variance d'étalement" du nuage de points :  $R^2/\sigma^2$  représente donc physiquement le rapport de taille de l'échantillon et des nuages. Un bref rappel des définitions et des propriétés des fonctions hypergéométriques confluentes est fourni en Annexe IX.

L'utilisation de ces fonctions n'est pas aisée, surtout dans le but recherché ici ; cependant, celles-ci possèdent des approximations polynomiales pour les grandes valeurs et les petites valeurs de la variable  $R^2/\sigma^2$ . Ces approximations sont alors d'une utilisation simple.

A partir du développement IV.1.1b la variance de  $Q(B)$  s'obtient immédiatement :

$$\text{Var}(Q(B)) = \frac{\theta_G \theta_N}{\text{Mes}(B)} + \frac{\theta_G \theta_N^2}{\pi R^2} \left[ 1 - M\left(\frac{3}{2}, 2, \frac{R^2}{\sigma^2}\right) e^{-R^2/\sigma^2} \right] \quad \text{IV.1.2}$$

De même la variance de  $T(B)$  s'écrit alors :

$$\text{Var}(T(B)) = \frac{\theta_G \theta_N}{\text{Mes}(B)} + \frac{\theta_G \theta_N^2}{\text{Mes}(B)} \left[ 1 - M\left(\frac{3}{2}, 2, \frac{R^2}{\sigma^2}\right) e^{-R^2/\sigma^2} \right]$$

## IV-2. FORMULES D'APPROXIMATION

### IV-2.1 Pour les Grandes Valeurs de $R^2/\sigma^2$

$$\text{Quand } |z| \rightarrow \infty \quad M(a,b,z) \approx \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} e^z z^{a-b} [1 - o(|z|^{-1})]$$

Donc

$$M\left(\frac{3}{2}, 2, \frac{R^2}{\sigma^2}\right) \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sigma}{R} e^{R^2/\sigma^2} \left[ 1 + o\left(\frac{\sigma^2}{R^2}\right) \right]$$

Dans le cas des modèles retenus, la variance s'écrit alors :

$$\text{Var}(Q(B)) = \frac{\theta_G \theta_N}{\text{Mes}(B)} + \frac{\theta_G \theta_N^2}{\pi R^2} \left[ 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sigma}{R} \left( 1 + o\left(\frac{\sigma^2}{R^2}\right) \right) \right]$$

En terme de teneur :

$$\text{Var}(t(B)) = \frac{\theta_G \theta_N}{\text{Mes}(B)} + \frac{\theta_G \theta_N^2}{\text{Mes}(B)} \left[ 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sigma}{R} \left( 1 + o\left(\frac{\sigma^2}{R^2}\right) \right) \right] \quad \text{IV.2.1}$$

L'effet de pépite observable au-delà de la portée de la microstructure n'est donc pas directement proportionnel à  $\frac{1}{V(B)}$ , d'autres termes apparaissent du fait de la présence des nuages.

REMARQUE : Cette variance aurait pu être calculée en première approximation à partir de l'expression II.6.3c qui s'écrit ici :

$$C'_o = \frac{\theta_G \theta_N}{K(o)} + \frac{\theta_G \theta_N^2}{K(o)} \left[ 1 - \frac{2P}{K(o)} \int_0^{+\infty} u^2 g(u) du \right]$$

en effet dans ce cas, l'intégrale se calcule facilement puisque  $g(u)$  est une fonction de Gauss ; on obtient alors :

$$\frac{2P}{K(o)} \int_0^{+\infty} u^2 g(u) du = \frac{2(2\pi R)}{\pi R^2} \cdot \frac{\sigma}{2\sqrt{\pi}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sigma}{R}$$

ce qui est bien le résultat obtenu.

Le calcul de la variance de la teneur peut donc s'effectuer "à la main" A titre d'exemple, le tableau ci-dessous permet de comparer les valeurs obtenues par l'intégration numérique de la formule III.2.b, avec l'ordinateur (VAX) et le calcul "à la main" de la formule IV.2.1 :

Pour  $\theta_G = 0.03$   $\theta_N = 5$ .  $\sigma^2 = 0.25$

R	$R^2 / \sigma^2$	Variance Formule III.2.b Avec le VAX	Variance Formule IV.2.1 "à la main"
10	400	0,0027	0,0027
9	324	0,0034	0,0034
8	256	0,0042	0,0042
7	196	0,0055	0,0055
6	144	0,0073	0,0073
5	100	0,0104	0,0104
4	64	0,0158	0,0158
3	36	0,0269	0,0268
2	16	0,0551	0,0547
1	9	0,1614	0,1518

Ce tableau montre donc que l'approximation pour le calcul de la variance est plus que satisfaisante. Le problème pratique ne sera donc pas de calculer la variance théorique mais beaucoup plus de déterminer les différents paramètres du modèle.

IV-2.2 Pour les Petites Valeurs de  $R^2/\sigma^2$ .

Pour les petites valeurs, on utilisera directement le développement IV.1.1a jusqu'au deuxième ordre en N, soit :

$$\int g(h) K(h) dh = R^2 \pi \left[ \frac{1}{4} \frac{R^2}{\sigma^2} - \frac{1}{16} \frac{R^4}{\sigma^4} \right]$$

Les variances s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} \text{Var}(Q(B)) &\approx \theta_G \theta_N \text{Mes}(B) + \theta_G \theta_N^2 R^2 \pi \left[ \frac{1}{4} \frac{R^2}{\sigma^2} - \frac{1}{16} \frac{R^4}{\sigma^4} \right] \\ \text{Var}(t(B)) &\approx \frac{\theta_G \theta_N}{\text{Mes}(B)} + \frac{\theta_G \theta_N^2}{\text{Mes}(B)} \left[ \frac{1}{4} \frac{R^2}{\sigma^2} - \frac{1}{16} \frac{R^4}{\sigma^4} \right] \end{aligned} \quad \text{IV.2.2}$$

REMARQUE : Calculons cette variance en première approximation à partir de l'expression II.6.3.b qui s'écrit ici :

$$C'_0 = \frac{\theta_G \theta_N}{K(0)} + \theta_G \theta_N^2 g(0)$$

et comme 
$$g(h) = \frac{1}{4 \pi \sigma^2} e^{-|h|^2 / 4 \sigma^2}$$

on obtient bien le premier terme du développement limité IV.2.2. En effet :

$$g(0) = \frac{1}{4 \pi \sigma^2} = \frac{1}{\pi R^2} \cdot \frac{R^2}{4 \sigma^2}$$

Le tableau ci-dessous permet comme précédemment de comparer les valeurs "vraies" obtenues par intégration numérique et les valeurs approximées, calculées "à la main".

Pour  $\theta_G = 0.03$      $\theta_N = 5.$      $\sigma^2 = 0.25$

R	$R^2 / \sigma^2$	Variance Vraie	Variance Approximée
0,5	1.	0,38058	0,37003
0,4	0,64	0,50352	0,49895
0,3	0,36	0,74928	0,74776
0,2	0,16	1,42315	1,42285
0,1	0,04	5,0110	5,0110
0,05	0,01	19,3367	19,3367
0,04	0,0064	30,0799	30,0799
0,03	0,0036	53,2902	53,29010
0,02	0,0016	119,6048	119,6048
0,01	0,0004	477,7036	477,7036

} Voir plutôt la méthode du paragraphe IV-2.3

Limite de la variance pour  $R^2/\sigma^2 \rightarrow 0$      $b > 0$

$$\lim_{z \rightarrow 0} M(a,b,z) = 1$$

donc

$$\lim_{V(B) \rightarrow 0} \text{var}(t(B)) = \infty$$

### IV-2.3 Valeurs Intermédiaires de $R^2/\sigma^2$ .

Pour les valeurs intermédiaires de  $R^2/\sigma^2$ , il n'y a pas d'expressions simples des fonctions hypergéométriques confluentes. Toutefois, les valeurs de  $M(\frac{3}{2}, 2, \frac{R^2}{\sigma^2})$  peuvent être obtenues sans problème (la variance est alors calculée par l'expression IV.1.2) de plusieurs manières.

- On dispose des abaques de  $M(-0.5, 1, x)$  et de  $M(0.5, 1, x)$  ; les relations de récurrence permettent alors de calculer  $M(\frac{3}{2}, 2, x)$  (cf Annexe IX).
- On calcule directement les valeurs de  $M(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, x)$  en utilisant sa représentation intégrale (cf Annexe IX). Cette démarche donne de très bons résultats.
- On dispose des abaques de  $M(\frac{3}{2}, 2, x)$ . Le calcul est immédiat.

Ces abaques se trouvent dans : "Report of the British Association for the Advancement of Science" de 1926. Une copie en est donnée en Annexe, pour  $R^2/\sigma^2$  variant de 0 à 8.00, soit pour 49 valeurs : la courbe de  $\text{Var}(t(B))$  en fonction du volume de l'échantillon peut d'ailleurs être construite entièrement avec cet abaque.

### IV-3. CONCLUSIONS

Ces résultats illustrent le fait que les formules d'approximation, utilisables avec une simple calculatrice de poche, permettent de retrouver la courbe de variation de la variance de la teneur en fonction du volume. Des ajustements des courbes expérimentales sont alors possibles sans utiliser l'outil informatique. Ainsi, sous réserve que les paramètres de la microstructure peuvent être déterminés rapidement, l'impact de l'effet de pépité de microstructure en fonction du volume des échantillons peut être mesuré a priori, avant même toute campagne d'échantillonnage.

## V - PERCEPTION D'UNE MICROSTRUCTURE TRIDIMENSIONNELLE

Les simulations et les exemples précédents ont été développés dans le plan afin de permettre la visualisation des schémas de salves. Ces études bidimensionnelles correspondent en pratique à l'analyse de la surface de sections polies de minerai. En fait, les expressions de la moyenne, de la variance et de la covariance de la quantité de métal contenue dans un échantillon, sont obtenues indépendamment de la dimension de l'espace. Les phénomènes naturels, tridimensionnels, peuvent donc être traités aussi facilement que dans le plan. Pour illustrer cet aspect, plaçons-nous dans le cas relativement simple où les échantillons sont des cylindres verticaux de section circulaire. Ce type d'échantillon permet l'étude de la microstructure dans deux cas précis :

- 1 - Les échantillons ont une épaisseur  $\epsilon$  très petite : ce sont des lames minces de roches.
- 2 - Les échantillons ont une épaisseur non négligeable : ce sont des tronçons de carotte par exemple.

### Rappel des Notations :

- Raisonnons avec le nombre de points  $N(B)$  contenus dans un échantillon  $B$ . Les résultats, en ce qui concerne la quantité de métal, s'en déduisent directement.

- Les germes des nuages sont poissonniens de paramètre  $\theta_G$ .
- Le nombre de points dans une salve (ou nuage) suit une loi de Poisson de paramètre  $\theta_N$ .
- $F(x)$  est la fonction de répartition des positions des particules d'une salve par rapport au germe de la salve ; la fonction de densité  $F(dx) = f(x)$  admet un covariogramme  $g(h)$ .
- $K(h)$  est le covariogramme géométrique de  $B$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} E(N(B)) = \theta_N \theta_G \text{Vol}(B) = \theta_N \theta_G K(o) \\ \text{Var}(N(B)) = \theta_N \theta_G \text{Vol}(B) + \theta_G \theta_N^2 \int g(u) K(u) du \\ \text{Cov}(h) = \text{Cov}(N(B), N(B_h)) = \theta_N \theta_G K(h) + \theta_G \theta_N^2 \int g(u+h) K(u) du \end{array} \right.$$

Caractéristiques du modèle :

- $f_3(x)$  est la fonction de densité de la loi de distribution des particules autour de leur germe et  $g_3(h)$  son covariogramme :

$$f_3(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi} \sigma)^3} e^{-|x|^2 / 2\sigma^2}$$

$$g_3(h) = \frac{1}{(2 \sqrt{\pi} \sigma)^3} e^{-|h|^2 / 4\sigma^2}$$

or,  $|h|^2 = x^2 + y^2 + z^2$

$$\begin{aligned} g_3(h) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi} \sigma} e^{-z^2 / 4\sigma^2} \cdot \frac{1}{(2\sqrt{\pi} \sigma)^2} e^{-(x^2+y^2) / 4\sigma^2} \\ &= g_1(z) \cdot g_2(x,y) \end{aligned}$$

Si B est un cylindre de section circulaire et de hauteur  $\epsilon$  selon Oz, son covariogramme géométrique  $K_3(h)$  s'exprime facilement à partir du covariogramme géométrique  $K_2(x,y)$  du disque (C) de rayon R :

$$K_3(h) = K_2(x,y) \cdot (\epsilon - |z|) \quad \text{et} \quad \left. \begin{array}{l} \text{pour } x^2 + y^2 \leq R \\ \text{pour } z \in [-\epsilon, +\epsilon] \end{array} \right\} K_3(h) = 0 \text{ ailleurs}$$

$$\text{Vol}(B) = K_3(o) = K_2(o,o) \epsilon = \text{Aire}(C) \cdot \epsilon = |C| \cdot \epsilon$$

Moyenne et Variance de N(B) :

- La moyenne s'obtient immédiatement :

$$E(N(B)) = \theta_C \theta_N |C| \epsilon$$

- Pour obtenir la variance, il faut développer l'intégrale

$$\begin{aligned} I &= \int_{\mathbb{R}^3} g_3(u) K(u) du \\ I &= \int_{\mathbb{R}} g_1(z) (\epsilon - |z|) dz \iint g_2(x,y) K_2(x,y) dx dy \end{aligned}$$

calculs développés dans les chapitres précédents.

Calculons

$$\begin{aligned} I_1 &= \int g_1(z) (\epsilon - |z|) dz \\ &= 2 \int_0^\epsilon \frac{1}{2\sqrt{\pi} \sigma} e^{-z^2 / 4\sigma^2} (\epsilon - z) dz \end{aligned}$$

- En effectuant un développement en série de l'exponentielle de  $-z^2/4\sigma^2$

$$I_1 = \frac{-2\sigma}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{1}{(2n+1)} \left( \frac{\varepsilon^2}{4\sigma^2} \right)^{n+1}$$

On obtient donc immédiatement la variance de  $N(B)$  lorsque  $B$  est un cylindre, en utilisant les calculs développés dans les chapitres précédents. Naturellement, les paramètres du modèle,  $\theta_G, \theta_N, \sigma^2$ , sont les paramètres relatifs à la structure tridimensionnelle et ils n'ont pas la signification qu'ils avaient dans  $\mathbb{R}^2$  :

$$\text{Var}(N(B)) = \theta_G \theta_N |C| \cdot \varepsilon + I_1 \cdot \theta_G \theta_N^2 \int_{\mathbb{R}^2} g_2(u) K_2(u) du .$$

### Cas Particuliers.

1/  $\varepsilon \ll 2\sigma$  : C'est le cas par exemple lorsque l'échantillon est une lame mince. On peut alors approximer  $I_1$  par le premier terme du développement :

$$I_1 \approx \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{\pi} 2\sigma}$$

$$\text{Var}(N(B)) \approx \theta_G \theta_N K_2(0) \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{\pi} 2\sigma} \theta_G \theta_N^2 \int_{\mathbb{R}^2} g_2(u) K_2(u) du$$

2/  $\varepsilon = 2\sigma$  :  $I_1$  converge et on peut calculer sa limite.

$$I_1 = \frac{-\sigma}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{n-1/2}$$

$$\text{or } \frac{1}{n-1/2} = \frac{\Gamma(n-1/2)}{\Gamma(n+1/2)} = \frac{\Gamma(n-1/2)}{\Gamma(-1/2)} \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(n+1/2)} \frac{\Gamma(-1/2)}{\Gamma(1/2)}$$

et en utilisant la formule de réflexion de la fonction gamma :  $\frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(-1/2)} = -\frac{1}{2}$

$$I_1 = \frac{\sigma}{2\sqrt{\pi}} [M(-1/2, 1/2, -1) - 1] .$$

où  $M(-1/2, 1/2, -1)$  est la fonction hypergéométrique confluyente

$$M(-1/2, 1/2, -1) = e^{-1} M(1, 1/2, 1)$$

$$I_1 = 0,243 \sigma = 0.1215 \varepsilon$$

3/  $\underline{\varepsilon} \gg \underline{2\sigma}$  : C'est le cas d'un tronçon de carotte par exemple. L'expression de  $I_1$  peut être obtenue soit directement par intégration numérique, soit en utilisant comme au chapitre IV les expressions asymptotiques des fonctions hypergéométriques. En effet :

$$I_1 = - \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( - \frac{\varepsilon^2}{4 \sigma^2} \right)^n \frac{1}{2n+1} = \frac{\sigma}{2 \sqrt{\pi}} \left[ M \left( - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, - \frac{\varepsilon^2}{4 \sigma^2} \right) - 1 \right]$$

VI - PROCESSUS DE POINTS A DENSITE REGIONALISEE

Dans les chapitres précédents, les processus de points possédaient des densités constantes sur tout le domaine d'étude ; or ces densités peuvent très bien dépendre du point d'implantation  $x$ ,  $\theta(x)$ , et même posséder les caractéristiques de variables régionalisées  $\theta(x)$ . Avant de développer les calculs des moments dans le cas du schéma de salves de points, examinons le cas simple et classique du processus de Poisson.

VI-1. PROCESSUS DE POISSON.

VI-1.1 La Densité est une Fonction de  $x$ .

En suivant le même raisonnement que pour le processus de Poisson à densité constante (cf paragraphe I-3), la fonction génératrice du nombre de points dans  $B$ ,  $N(B)$ , se calcule de la manière suivante :

$$G(s) = E(s^{N(B)}) = \prod_{dx \in B} 1 - \lambda(x) dx + \lambda(x) s dx$$

$$G(s) = \exp - (1-s) \int_V \theta(x) dx$$

Si l'on note  $\theta(B)$  la valeur moyenne de  $\theta(x)$  sur  $B$ , c'est-à-dire

$$\theta(B) = \frac{1}{|B|} \int_B \theta(x) dx \quad \text{avec } |B| = \text{Mes}(B)$$

$$\text{alors } \left\{ \begin{array}{l} G(s) = e^{\theta(B)|B| (s-1)} \\ E(N(B)) = G'(1) = \theta(B) |B| = \int_B \theta(x) dx \\ \text{Var}(N(B)) = \theta(B) |B| \end{array} \right.$$

VI-1.2 La Densité est une Variable Régionalisée.

Le calcul précédent donne donc la fonction génératrice  $G_0(s)$  à  $\theta$  constant ; pour obtenir la fonction génératrice à densité régionalisée, il faut randomiser  $\theta(x)$ .

. Soit  $P(d\theta)$  la fonction de probabilité de  $\theta(x)$ . La densité régionalisée  $\theta(x)$  est caractérisée par ses deux moments :

$$E[\theta(x)] = \bar{\theta}(x)$$

$$\text{Var}[\theta(x)] = \sigma_{\theta}^2(x)$$

Calculons  $E[\theta(B)]$  :

$$E[\theta(B)] = \int \theta(B) P(d\theta) = \frac{1}{|B|} \int \int_B \theta(x) P(d\theta) = \frac{1}{|B|} \int \bar{\theta}(x) dx = \bar{\theta}(B)$$

$E[\theta(B)] = \bar{\theta}(B)$  . C'est la moyenne de  $\bar{\theta}(x)$  sur  $B$ .

Calculons maintenant la fonction génératrice de  $N(B)$

$$G(s) = \int G_o(s) P(d\theta)$$

$$G(s) = \int \exp \left[ (s-1) \int_B \theta(x) dx \right] P(d\theta)$$

Dérivons cette fonction génératrice afin d'obtenir les moments de  $N(B)$  :

$$i) \frac{\partial G(s)}{\partial s} = \int \int_B \theta(x) \left[ \exp(s-1) \int_B \theta(u) du \right] dx P(d\theta)$$

or l'espérance de  $N(B)$  est  $E(N(B)) = G'(1)$ , c'est-à-dire que

$$E(N(B)) = \int \int_B \theta(x) dx P(d\theta) = E \left[ \bar{\theta}(B) \right] |B|$$

soit

$$E(N(B)) = \bar{\theta}(B) |B|$$

ii) nous savons que :  $\text{Var}(N(B)) = G''(1) + G'(1) - G'(1)^2$

Calculons  $G''(1)$  :

$$G''(1) = \int \left[ \int_B \theta(x) dx \right]^2 P(d\theta) = E \left[ \left[ \int_B \theta(x) dx \right]^2 \right]$$

$$G''(1) = |B|^2 E \left[ \theta(B)^2 \right]$$

La variance de  $N(B)$  s'écrit alors :

$$\text{Var}(N(B)) = E \left[ \left( \int_B \theta(x) dx \right)^2 \right] + E \left[ \int_B \theta(x) dx \right] - E \left[ \int_B \theta(x) dx \right]^2$$

soit

$$\text{Var}(N(B)) = |B|^2 \text{Var}(\theta(B)) + |B| E(\theta(B))$$

## VI-2. PROCESSUS DE SALVES DE POINTS (SCHEMA DU TIREUR).

Le schéma du tireur est caractérisé par 4 paramètres :

- $\theta_G$  la densité de germes.
- $\theta_N$  le nombre de points par nuage
- $q$  la quantité de métal élémentaire d'une particule d'un nuage
- $\sigma^2$  l'étalement du nuage.

Tous ces paramètres peuvent être régionalisés. Examinons dans un premier temps la densité  $\theta_G$  régionalisée. La démarche sera la même pour les autres paramètres : il faut les rendre aléatoires dans l'expression de la fonction caractéristique de  $Q(B)$  et passer à l'espérance mathématique.

### VI-2.1 Transformée de Laplace de $Q(B)$ et ses dérivées, avec $\theta(x)$ fonction de $x$ .

En suivant le même raisonnement qu'au paragraphe II-2, la transformée de Laplace de  $Q(B)$  s'écrit alors :

$$\phi(\lambda) = \exp - \int \left\{ 1 - H \left[ 1 - F(B_{-x}) (1 - \phi(\lambda)) \right] \right\} \theta_G(x) dx$$

et avec  $\psi(\lambda) = \text{Log } \phi(\lambda)$ , les moments de  $Q(B)$  s'expriment alors :

$$\begin{cases} \psi'(0) = - E(Q(B)) \\ \psi''(0) = \text{Var } Q(B) \end{cases}$$

et on obtient donc :

$$\begin{aligned} E(Q(B)) &= C_1 \int \theta_G(x) F(B_{-x}) dx \\ \text{Var}(Q(B)) &= C_2 \int \theta_G(x) F(B_{-x}) dx + C_3 \int \theta_G(x) F^2(B_{-x}) dx . \end{aligned}$$

$$\text{avec } \begin{cases} C_1 = -H'(1) \varphi'(0) \\ C_2 = H'(1) \varphi''(0) \\ C_3 = H''(1) \varphi'(0)^2 \end{cases}$$

Le second moment  $E(Q^2(B))$  s'écrit alors :

$$E(Q^2(B)) = C_2 \int \theta_G(x) F(B_{-x}) dx + C_3 \int \theta_G(x) F^2(B_{-x}) dx + \left[ C_1 \int \theta_G(x) F(B_{-x}) dx \right]^2$$

### VI-2.2 Moments de $Q(B)$ avec une densité régionalisée.

Pour obtenir les moments de  $Q(B)$  avec  $\theta_G$  régionalisée, il suffit de randomiser  $\theta_G(x)$  dans les expressions précédentes :

Soit  $G(d\theta)$  la fonction de probabilité de  $\theta_G(x)$  :

$$\begin{aligned} E(Q(B)) &= E \left\{ E(Q(B)) \mid \theta_G = \text{constante} \right\} \\ &= \int_{\theta} C_1 \int \theta_G(x) F(B_{-x}) dx G(d\theta) \end{aligned}$$

En posant  $\bar{\theta}_G(x) = E[\theta_G(x)]$ , on obtient

$$E(Q(B)) = C_1 \int \bar{\theta}_G(x) F(B_{-x}) dx$$

VI.2.2.a

de même pour  $E(Q(B)^2)$  :

$$\begin{aligned} E(Q(B)^2) &= C_2 \int \bar{\theta}_G(x) F(B_{-x}) dx + C_3 \int \bar{\theta}_G(x) F^2(B_{-x}) dx \\ &\quad + C_1^2 \int G(d\theta) \int \theta_G(x) F(B_{-x}) dx \int \theta_G(y) F(B_{-y}) dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{or } &\int G(d\theta) \int F(B_{-x}) \theta(x) dx \int F(B_{-y}) \theta(y) dy \\ &= \iint F(B_{-x}) F(B_{-y}) E[\theta_G(x) \theta_G(y)] dx dy . \end{aligned}$$

En utilisant ces résultats, la variance de  $Q(B)$  s'exprime alors :

$$\text{Var } Q(B) = C_2 \int \bar{\theta}_G(x) F(B_{-x}) dx + C_3 \int \bar{\theta}_G(x) F^2(B_{-x}) dx + C_1^2 \iint F(B_{-x}) F(B_{-y}) \text{Cov} [\theta_G(x), \theta_G(y)] dx dy$$

VI.2.2.b

Ce résultat nous enseigne que dans le cas d'une densité de germes régionalisée, l'effet de pépite comprend un terme supplémentaire qui dépend de la covariance entre  $\theta_G(x)$  et  $\theta_G(y)$ , les densités aux points  $x$  et  $y$ .

Si la variable régionalisée  $\theta(x)$  est stationnaire d'ordre deux, alors les expressions VI.2.2.a et b se simplifient en effet :

$$E[\theta(x)] = \bar{\theta}_G$$

$$\text{Cov} [\theta_G(x), \theta_G(y)] = \text{Cov}_\theta(x-y)$$

La variance devient alors :

$$\text{Var}(Q(B)) = \bar{\theta}_G [C_2 K(o) + C_3 g * K(o)] + C_1^2 \iint F(B_{-x}) F(B_{-y}) \text{Cov}_\theta(x-y) dx dy$$

qui se simplifie en (cf développement Annexe X) :

$$\text{Var}(Q(B)) = \bar{\theta}_G [C_2 K(o) + C_3 g * K(o)] + C_1^2 \int_B \int_B \text{Cov}_\theta * g(x-y) dx dy$$

VI.2.2.c

soit également :

$$\text{Var}(Q(B)) = \int_B \int_B \left\{ \bar{\theta}_G [C_2 \delta(x-y) + C_3 g(x-y)] + C_1^2 \text{Cov}_\theta * g(x-y) \right\} dx dy$$

Cependant il est légitime d'admettre que les variations de  $\theta(x)$  sont de grande amplitude par rapport à la taille des nuages ; ainsi, l'intégrale de l'expression VI.2.2.c se simplifie :

$$\begin{aligned} \int_B \int_B \text{Cov}_\theta * g(x-y) dx dy &= \int K(t) dt \int g(t-u) \text{Cov}_\theta(u) du \\ &\simeq \int K(t) \sigma_\theta^2 \int g(t-u) du dt \end{aligned}$$

Finalement on obtient que :

$$\int_B \int_B \text{Cov}_\theta * g(x-y) dx dy \approx \sigma_\theta^2 K(o)^2$$

La variance de Q(B) qui représente l'effet de pépite observable aux grandes distances (macroscopiquement) s'exprime alors en première approximation :

$$\text{Var}(Q(B)) = \bar{\theta}_G [C_2 K(o) + C_3 g * K(o)] + C_1^2 \sigma_\theta^2 K(o)^2$$

K(o) est la mesure du domaine B.

Soit, exprimé en terme de teneur :

$$C_o = \bar{\theta}_G \left[ \frac{C_2}{K(o)} + C_3 \frac{g * K(o)}{K(o)^2} \right] + C_1^2 \sigma_\theta^2$$

Il apparaît alors un terme supplémentaire, qui ne se régularise pas.

### VI-2.3 Covariance de Q(B) avec une Densité Régionalisée.

La démarche est absolument la même que pour le calcul de la variance. La transformée de Laplace du couple (Q(B), Q(B')) s'écrit alors :

$$\phi(\lambda, \mu) = \exp - \int \theta_G(x) (1 - H[\phi_o(\lambda, \mu)]) dx$$

La covariance s'écrivant donc :

$$\text{Cov}(Q(B), Q(B_h)) = \frac{\partial^2 \phi^2(o, o)}{\partial \lambda \partial \mu} - E(Q(B)) E(Q(B_h))$$

et comme précédemment par randomisation on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi(o, o)}{\partial \lambda \partial \mu} = & \int \left\{ (C_2 \int \theta_\theta(x) F(B_{-x} \cap B_{h-x}) dx \right. \\ & + C_3 \int \theta_G(x) F(B_{-x}) F(B_{h-x}) dx \\ & \left. + C_1^2 \int \theta_G(x) F(B_{-x}) dx \int \theta_G(y) F(B_{h-y}) dy \right\} G(d\theta) \end{aligned}$$

La covariance s'exprime alors :

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Q(B), Q(B_h)) &= C_2 \int \bar{\theta}_G(x) F(B_{-x} \cap B_{h-x}) + C_3 \int \bar{\theta}_G(x) F(B_{-x}) F(B_{h-x}) dx \\ &+ C_1^2 \iint F(B_{-x}) F(B_{h-y}) \text{Cov}_\theta[\theta_G(x), \theta_G(y)] dx dy \end{aligned}$$

et si  $\theta(x)$  est stationnaire :

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Q(B), Q(B_h)) &= \bar{\theta}_G [ C_2 K(h) + C_3 g * K(h) ] \\ &+ C_1^2 \iint F(B_{-x}) F(B_{h-x}) \text{Cov}_\theta(x-y) dx dy \end{aligned}$$

ce qui donne, après avoir développé l'intégrale double (cf Annexe X) :

$$\text{Cov}(Q(B), Q(B_h)) = \int_B \int_{B_h} \left\{ \bar{\theta}_G [ C_2 \delta(x-y) + C_3 g(x-y) ] + C_1^2 [ \text{Cov}_\theta * g(x-y) ] \right\} dx dy$$

Introduisons la fonction de covariance ponctuelle  $\mathcal{C}(x-y)$  telle que

$$\mathcal{C}(x-y) = \bar{\theta}_G [ C_2 \delta(x-y) + C_3 g(x-y) ] + C_1^2 [ \text{Cov}_\theta * g(x-y) ]$$

et alors

$$\begin{cases} \text{Var}(Q(B)) = \int_B \int_B \mathcal{C}(x-y) dx dy \\ \text{Cov}_Q(h) = \int_B \int_{B_h} \mathcal{C}(x-y) dx dy \end{cases}$$

## VII - LES REALITES DE L'ECHANTILLONNAGE

Le modèle que nous venons de développer apparaît comme un cas idéal comparé à la réalité. Certes, il nous enseigne quel rôle joue le volume d'un échantillon en fonction de la taille du domaine de variabilité des microstructures. La réalité est bien plus complexe. De nombreux phénomènes s'ajoutent à ceux que nous essayons et que nous pouvons effectivement étudier. Sans vouloir être exhaustif, nous pouvons considérer en première approximation qu'il y a trois niveaux où des difficultés apparaissent :

- à l'intérieur de la minéralisation ;
- au prélèvement de l'échantillon ;
- au traitement de l'échantillon .

i) Que se passe-t-il au sein d'une minéralisation ? Les modèles précédents ne prennent pas en considération le fait qu'un minerai est avant tout un assemblage de minéraux, c'est-à-dire de particules de nature différente. Aussi au modèle simple initial, faudrait-il superposer un modèle granulométrique. Les choses se compliquent alors sérieusement. En effet, de nouvelles corrélations, voire régionalisations, apparaissent : la taille d'une particule est-elle corrélée à la teneur ? La teneur dans un grain suit certainement une loi qui diffère selon la nature de ce grain ; y a-t-il des corrélations entre grains ? Une masse de minerai est une mosaïque de grains. C'est donc ainsi qu'il faudrait envisager une étude plus complète de l'échantillonnage. Certes, les développements mathématiques ne sont certainement pas immédiats, si toutefois ils peuvent être menés ; cependant, des simulations adéquates de modèles reproduisant la réalité et reposant sur des observations expérimentales précises pourraient permettre l'étude de telles structures.

ii) Le prélèvement d'un échantillon d'un volume donné a-t-il un sens ? Lors du prélèvement d'un échantillon, la découpe ne se fait jamais selon le schéma théorique retenu, mais plutôt selon des plans de cassure préférentiels : il y aura donc une erreur de découpe. Si la minerai est une mosaïque de grains, il y a de fortes chances que ces plans de cassure ne soient pas indépendants de la texture. Ainsi, à la variance des teneurs que l'on obtient avec des volumes d'échantillons fixes [II.3.2] s'ajoute une variance provenant de cette erreur de découpe. Donc, en plus du modèle granulométrique, il serait également nécessaire d'introduire un modèle de découpe basé sur la texture du minerai.

iii) Enfin, une fois prélevée, la masse de minerai se trouve morcelée : elle doit alors être considérée comme telle. Des erreurs d'échantillonnage, indissociables de la nature morcelée vont apparaître. La variance de ces erreurs dépend en fait des caractéristiques intrinsèques de la matière, la granulométrie, la composition granulométrique, la libération des espèces minérales pour n'en citer que quelques-unes. L'étude de ces erreurs d'échantillonnage fait l'objet de la troisième partie de la thèse.

Ainsi, le modèle étudié grâce au schéma du tireur se trouve être un cas idéal et simplifié, mais qui s'avère accessible aux calculs. Toutefois, afin de reproduire plus fidèlement la réalité, d'autres contraintes seraient à considérer. Mais les calculs explicites seront-ils alors possibles ? Il est difficile de le prévoir a priori ; des simulations restent toujours possibles. De telles études représenteraient la suite logique du travail entrepris ici. N'omettons pas non plus le problème stéréologique qui se pose déjà dans le cas simple traité ici, et qu'il faudra résoudre pour les grains constitutifs de la mosaïque minéralisée.

BIBLIOGRAPHIE DE LA 2ème PARTIE

- [1] BAUDIN, M.- Nearest neighbour distance statistics and model fitting in 2-dimensional Poisson cluster processes.-Novembre 1979, Note Interne N-626, CGMM, Fontainebleau.
- [2] BAUDIN, M.- Likelihood and nearest neighbour distance properties of multi-dimensional Poisson cluster processes.J. of Applied Prob., 18, pp. 889-900 (1981).
- [3] BAUDIN, M.- Note on the determination of cluster centers from a realization of a multi-dimensional Poisson cluster processes. J. of Applied Prob., 20, pp. 136-143 (1983).
- [4] DAVIS, John C.- "Statistics and Data Analysis in Geology". John Wiley and Sons, New York, 1973.
- [5] DIGABEL, H., LANTUEJOUL, C., SERRA, J.- Les mesures aléatoires. Note interne N-380, CGMM, Juillet 1974.
- [6] LANTUEJOUL, C.- Le modèle probabiliste en morphologie mathématique. Note interne N-410, CGMM, Avril 1975.
- [7] LEWIS, P.A. (Editor) "Stochastic Point Processes".- John Wiley and Sons (Interscience), New York, 1972.
- [8] MATERN, B.-"Spatial Variations". Meddelanden från Statens Skogsforsknings Institut, Band 49, nr 5, 1960.
- [9] MATHERON, G.- Schémas aléatoires de germes. Note interne N-68, CGMM, 1968.
- [10] MATHERON, G.- Remarques sur la fabrication des aléas. Note interne N-653, CGMM, 1980.
- [11] RIPLEY, B.D.- Modeling spatial patterns.-J. of the Royal Statist. Soc., n°2, 1977, pp. 172-192?
- [12] RIPLEY, B.D.- "Spatial Statistics".- John Wiley and Sons, New York, 1981.

TROISIEME PARTIE

LES ERREURS D'ECHANTILLONNAGE

## I - LES ERREURS D'ECHANTILLONNAGE

Des erreurs d'échantillonnage peuvent apparaître à tout niveau de la procédure d'échantillonnage, lors du prélèvement d'une rainure, du sciage d'une carotte, du quartage du minerai morcelé, ou finalement lors de la prise de laboratoire. Toutes ces erreurs sont en fait cumulatives ; le résultat de l'analyse chimique ne représente (aux erreurs d'analyse près) que la teneur de l'échantillon ultime, celui qui est entré réellement dans le laboratoire d'analyse ; il n'est en fait qu'une estimation de la teneur de l'échantillon primaire, entachée de la résultante de toutes ces erreurs. Ces erreurs créent donc une imprécision sur la donnée individuelle et se répercutent sur l'ensemble des données par un effet de pépité (dit de mesure, paragraphe 2, 1ère partie), qui affecte le variogramme, avec pour conséquence une imprécision supplémentaire et artificielle sur l'estimation finale.

Sous réserve que les erreurs de mesure sont indépendantes entre elles, indépendantes des grandeurs mesurées, et qu'elles ne sont pas systématiques, elles interviennent en fait par l'intermédiaire de leur variance ; c'est donc cette variance qu'il faudra mesurer et analyser, et nous allons voir que, malheureusement, parmi toutes les erreurs possibles, seule la variance de l'erreur d'échantillonnage (au sens strict) pourra être modélisée.

De nombreux termes très spécifiques seront employés dans cette partie consacrée aux erreurs d'échantillonnage, aussi un glossaire de l'échantillonnage est présenté en Annexe I.

### I-1. NATURE DES ERREURS D'ECHANTILLONNAGE.

Les erreurs peuvent être interprétées comme des variables aléatoires dont chaque réalisation demeure inconnue, mais dont les moments (moyenne et variance) peuvent être déterminés, soit par mesure directe, soit par calcul. Les caractéristiques de ces moments définissent alors les qualités de l'opération d'échantillonnage correspondante.

Les erreurs d'échantillonnage peuvent se classer en 4 catégories :

- les erreurs systématiques ou biais : elles se caractérisent par une moyenne différente de 0, appelée biais :  $E(\mathcal{E}) = B$ . Leur annulation est indispensable car elles sont fatales : elles se répercutent intégralement à tous les niveaux, sur les moyennes des données de base comme sur l'estimation du gisement (ou du lot de minerai). Elles sont répétitives, de même signe et de même ordre de grandeur. A défaut d'annulation, seule une correction pragmatique peut être envisagée, cas par cas.
- les erreurs aléatoires : elles sont de moyenne nulle, non répétitives, et indépendantes entre elles (elles se compensent donc mutuellement). Leur moyenne tend vers une loi gaussienne. Du fait de leur indépendance, si  $\sigma^2$  est la variance de l'erreur sur un échantillon, la variance de l'erreur sur la moyenne des échantillons est  $\sigma^2/n$ , qui peut devenir faible si  $n$  est grand.
- les erreurs opératoires : elles sont dues à des accidents opératoires et peuvent donc être très importantes. Leur prise en compte n'est donc pas possible, mais le contrôle strict de toutes les opérations empêchera leur apparition.
- les erreurs volontaires : c'est le "salage", avec les conséquences graves que l'on peut imaginer.

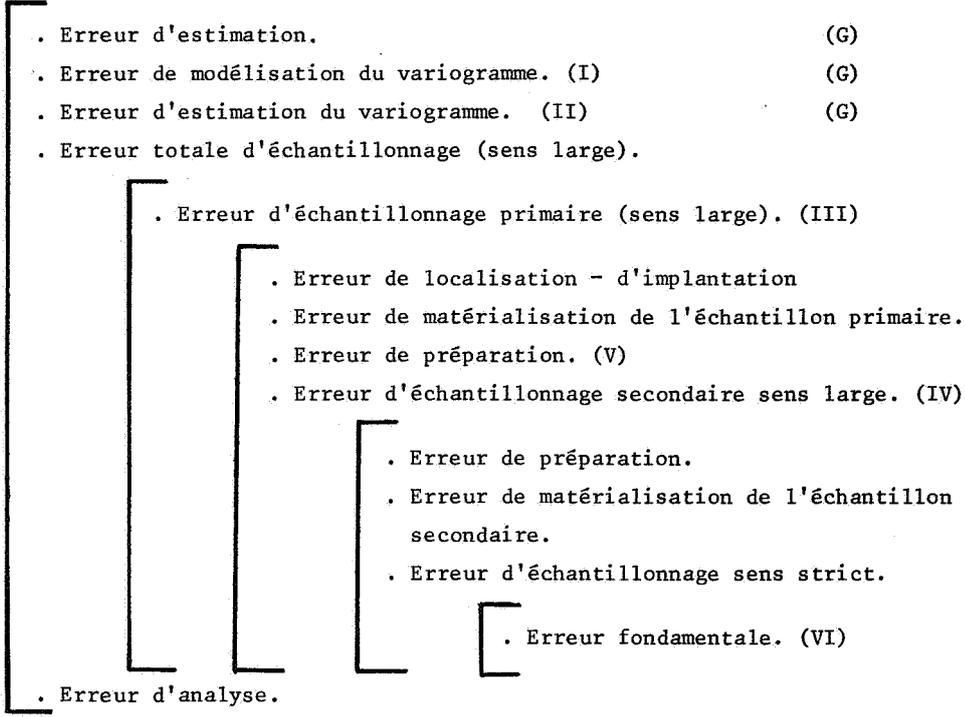
## I-2. LES DIFFERENTES ERREURS D'ECHANTILLONNAGE.

Quel que soit l'échantillon primaire, qu'il soit prélevé en place dans un gisement ou qu'il soit prélevé sur du minerai en vrac, ou en écoulement sur une bande transporteuse, le devenir des sous-échantillons sera identique : les erreurs seront donc des "erreurs d'échantillonnage de minerais morcelés" ; aussi dorénavant ne distinguerons-nous plus les deux démarches, puisque l'objectif final sera le même, caractériser les moments des erreurs de mesure dues à l'échantillonnage, et notamment calculer la variance de ces erreurs.

Le tableau I présente la décomposition de l'erreur globale d'estimation et d'échantillonnage. L'étude des erreurs d'estimation appartient au domaine de la géostatistique, et ne fait pas l'objet du présent chapitre. Examinons donc maintenant les diverses erreurs d'échantillonnage.

DECOMPOSITION DE L'ERREUR GLOBALE D'ESTIMATION ET D'ECHANTILLONNAGE

. Erreur globale d'échantillonnage et d'estimation.



(G) Domaine d'application de la géostatistique.

(I) La modélisation est le choix d'un modèle de variogramme ajusté sur le variogramme expérimental.

(II) Estimation du variogramme régional ou local  $\frac{1}{2S^2} \int_S \overline{Z(x+h)-Z(x)}^2 dx$  sur le champ S par le variogramme expérimental

$$\frac{1}{2N^2} \sum_{i=1}^N (Z(x_i+h)-Z(x_i))^2$$

(III) Echantillon primaire : - en place : rainure, sondage.

- matière en écoulement : une prise par échantillonneur automatique.

- sur un tas.

(IV) Echantillon secondaire ; de nature morcelée - c'est sur un échantillon secondaire que portera l'analyse.

(V) Erreur de préparation : pertes, contamination,...

(VI) Erreur incompressible, même dans les conditions optimales.

- Décomposition de l'erreur globale d'estimation et d'échantillonnage.

TABLEAU 1

### I-2.1 Les Erreurs de Prélèvement.

En généralisant les concepts de P. Gy [ 7 à 10 ] , on peut décomposer l'erreur de prélèvement ou de matérialisation de l'échantillon en 2 erreurs :

- l'erreur de découpe : elle apparaît lorsque la découpe de l'échantillon, dans le lot ou le gisement, diffère de la découpe théorique retenue.
- l'erreur de prise : elle apparaît quand le prélèvement réel diffère du contenu effectif de la découpe réelle.

Malheureusement, ces erreurs ne sont généralement pas quantifiables, ni en terme de moyenne, ni en terme de variance ; pourtant, elles peuvent introduire de graves erreurs systématiques. Examinons-en quelques-unes :

- un rainurage peut favoriser le prélèvement de roches plus tendres au détriment de formations plus dures : un appauvrissement (ou enrichissement) différentiel peut alors apparaître : l'erreur risque d'être systématique.
- lors de la récupération des boues de sondages percutants, ou de foration des trous de tir (échantillonnage au front), les particules lourdes ont tendance à rester bloquées au fond des trous : il y a risque d'appauvrissement systématique des échantillons.
- l'utilisation d'échantillonneurs automatiques mal conçus peut créer également des erreurs de prélèvement : par exemple, si l'échantillonneur ne peut prélever que certaines fractions granulométriques, il y a une erreur de prise évidente qui engendre des erreurs systématiques ; en effet, la teneur est souvent corrélée à la granulométrie de particules.

### I-2.2 Les Erreurs de Préparation.

Sans vouloir noircir le tableau des erreurs d'échantillonnage, celles qui apparaissent lors de la préparation des échantillons sont nombreuses : elles sont certainement faibles mais peuvent parfois jouer dans le même sens. L'examen détaillé de toutes les causes possibles relève beaucoup plus du guide pratique, toutefois il convient de garder à l'esprit que ces erreurs existent réellement :

Durant le séchage :

- une décantation trop rapide de boues implique une perte systématique de particules fines, souvent stériles, mais qui modifie tout de même la teneur globale.
- un séchage trop violent peut, dans le cas de minerais sulfurés, entraîner le grillage des pyrites, c'est-à-dire une modification chimique globale.

Durant le broyage :

- il y a souvent perte de particules fines sous forme de poussières. Dans le cas de certains minerais phosphatés calcaires, le broyage nécessaire à une bonne réduction granulométrique du calcaire entraîne un surbroyage du phosphate (apatite) : la perte de fines équivaut ici à une baisse de la teneur globale.

Durant les tamisages :

- aussi simple que puisse paraître une opération de tamisage, celle-ci doit être prohibée dans le cas des minerais à or libre : les particules d'or très ductibles ont en effet tendance à rester bloquées dans les mailles des tamis.

Durant l'homogénéisation :

- avant toute procédure d'échantillonnage (sens strict), le minerai doit être homogénéisé : c'est une des conditions assurant l'équiprobabilité de l'échantillonnage. Une hétérogénéité de distribution des particules risque de créer de graves biais.

Cependant, aucune de ces erreurs ne peut être quantifiée, sauf expérimentation bien spécifique. Ces erreurs doivent alors être annulées ou, à défaut, minimisées, ce qui demande une conception saine des procédures de préparation et un contrôle rigoureux de chacune des opérations.

I-2.3 Les Erreurs d'Echantillonnage au Sens Strict.

Toutes les autres erreurs étant nulles par ailleurs, l'échantillonnage (sens strict), qui représente une réduction de masse de l'échantillon

secondaire par rapport au lot initial ou à l'échantillon primaire, engendre une erreur. Cette erreur est irréductible : elle ne peut être annulée, d'où le nom d'erreur fondamentale donné par P. Gy. La cause essentielle de cette erreur est l'hétérogénéité de constitution de la matière morcelée; c'est donc une caractéristique intrinsèque de la matière à échantillonner.

Cette hétérogénéité de constitution de la matière est due :

- à la nature morcelée du minerai
- à la multiplicité des constituants (grains stériles, mixtes, riches)
- à la distribution granulométrique des constituants
- à la distribution densimétrique des constituants.

Or, de toutes les erreurs d'échantillonnage, cette erreur fondamentale est la seule dont les moments (moyenne et variance) peuvent être calculés a priori : ce calcul implique naturellement la connaissance des caractéristiques intrinsèques du lot ; à défaut de connaître toutes ces caractéristiques, certaines devront être estimées, des hypothèses devront parfois être faites. Le calcul de la variance de cette erreur fondamentale, qui est la seule composante calculable de la variance des erreurs de mesure d'échantillonnage qui affecte le variogramme sous forme d'un effet de pépite artificiel, fera donc l'objet de cette troisième partie.

## II - VARIANCE DE L'ERREUR D'ECHANTILLONNAGE

Bien que la littérature semble abondante sur les sujets d'échantillonnage, peu d'auteurs fournissent des résultats satisfaisants en ce qui concerne le calcul de la variance de l'erreur d'échantillonnage ; deux formulations méritent cependant notre attention :

- la formule de P. Gy, qui fait maintenant autorité dans de nombreux domaines et qui se rattache à une théorie complète de l'échantillonnage des matières morcelées.
- la formule de Engels, Ingamells et Switzer, plus restrictive, puisqu'elle s'applique à des minerais à deux phases, formés de particules de même dimension.

Dans ce chapitre, nous allons analyser ces deux formulations ; nous reviendrons au chapitre suivant sur le calcul théorique de la variance de l'erreur d'échantillonnage, développé par G. Matheron ; nous y verrons comment en déduire le résultat de P. Gy, pour enfin proposer une troisième expression du calcul de cette variance, au chapitre IV.

### REMARQUE PRELIMINAIRE :

Les variances de l'erreur d'échantillonnage (au sens strict) sont calculées pour des minerais parfaitement homogénéisés de manière à assurer l'équiprobabilité de prélèvement de toute particule.

### II-1. VARIANCE DE L'ERREUR D'ECHANTILLONNAGE D'APRES ENGELS, INGAMELLS ET SWITZER. [6], [11][12][13] .

#### II-1.1 Hypothèse.

Le minerai est composé de deux constituants distincts formés de particules de même granulométrie ; la gangue (ou constituant pauvre) est l'élément prédominant en masse et en nombre de particules.

En fait, pour développer l'expression de la variance relative, il faut faire l'hypothèse que le nombre de particules riches dans un échantillon suit une loi de Poisson : cette hypothèse limite donc le domaine d'application de cette variance d'échantillonnage.

### II-1.2 Notations.

Nous garderons les notations des auteurs dans cette présentation.

- K est la teneur moyenne de l'échantillon.
- H est la teneur moyenne du constituant riche (qui est l'élément mineur du minerai).
- L est la teneur moyenne du constituant pauvre (la gangue ; c'est l'élément majeur).
- u est la dimension des particules ;  $u^3$  est homogène à un volume.
- $\rho_H$  et  $\rho_L$  sont respectivement les masses volumiques du constituant riche et du constituant pauvre.

### II-1.3 Expression de la Variance Relative.

La variance relative de l'erreur d'échantillonnage  $R^2$  dépend d'une constante d'échantillonnage,  $K_S$ , qui est une caractéristique intrinsèque du minerai, et cette variance est inversement proportionnelle à la masse de l'échantillon  $W$ .

$$R^2 = \frac{K_S}{W} \quad [\text{II.1.3.a}]$$

avec :

$$K_S = \frac{(K-L)(H-L) u^3 \rho_H}{K^2} 10^4 \quad [\text{II.1.3.b}]$$

La constante  $10^4$  permet d'obtenir  $K_S$  en g quand  $u$  est en cm, et  $\rho$  en  $\text{g/cm}^3$  ;  $R^2 = K_S/W$  est alors exprimé en  $\%$  : ainsi  $K_S$  représente la masse d'échantillons en g qui permet d'obtenir un écart-type relatif d'échantillonnage  $R = 1\%$ .

Le calcul de la constante  $K_S$  est reproduit en Annexe XI.

### II-1.4 Utilisation de la Formule.

Si  $\bar{x}$  est la moyenne de  $M$  analyses  $x_i$  d'échantillons de masse  $W$ , les intervalles de confiance gaussiens ( $x^* = \bar{x} \pm s$  à 68% de confiance, ou  $x^* = \bar{x} \pm 2s$  à 95% de degré de confiance) ne peuvent être utilisés que si la distribution des valeurs  $a_i$  est symétrique et approximativement gaussienne. Or les calculs sont développés en exprimant les  $x_i$ , en fonction du nombre de particules

riches  $Z_i$  dans l'échantillon, et de la contribution  $c$  d'une particule riche à la teneur de l'échantillon  $x_i = L + c Z_i$  (cf Annexe XI). Les valeurs  $x_i$  auront une distribution symétrique si les  $Z_i$  ont une distribution symétrique.

Le développement des calculs repose sur l'hypothèse que les  $Z_i$  suivent une loi de Poisson de paramètre  $Z$ , le nombre moyen de particules riches dans un échantillon ; ainsi les  $Z_i$  auront une distribution pratiquement symétrique lorsque le paramètre  $Z$  sera supérieure à 6. Ainsi les intervalles de confiance gaussiens pourront être utilisés comme "fourchette d'estimation" lorsque le nombre moyen de particules riches dans un échantillon sera supérieur à 6, ce qui implique de prélever des échantillons de masse  $W$  telle que :

$$W \geq 6 \cdot \frac{K_S K^2}{(K-L)^2} 10^{-4}$$

### II-1.5 Exemple d'Utilisation. [13] .

Soit un minerai de scheelite ( $\text{Ca WO}_4$ ), à grains de scheelite libres.

$$\left\{ \begin{array}{l} H = 80\% \quad (80\% \text{ de } \text{WO}_3 \text{ dans } \text{Ca WO}_4) \\ K = 1.3\% \quad (\text{estimée}) \\ L = 0,1\% \quad (\text{gangue}) \\ u = 0,0149 \text{ cm} \quad (100 \text{ mesh}) \\ \rho_H = 6,02 \text{ g/cm}^3 \end{array} \right.$$

$$K_S = 10^4 (0,013 - 0,001) (0,8 - 0,001) \cdot (0,0149)^3 \cdot 6,02 / (0,013)^2$$

$$K_S = 11,3 \text{ g.}$$

Un échantillon de masse 11,3 g permet d'obtenir une variance relative  $R^2 = 1 \%$ . La masse minimale à échantillonner pour que le nombre moyen de particules riches dans l'échantillon soit égal à 6, est alors :

$$W_0 = 6 \cdot \frac{11,3 (1,3)^2}{(1,3 - 0,1)^2} 10^{-4} = 0,008 \text{ g.}$$

Pour un échantillon de masse supérieure à 0,008 g, l'intervalle de confiance gaussien peut être utilisé ; pour  $W = 11,3 \text{ g}$  :  $s = 0,013\%$  à 68% de confiance. Un échantillon de masse 2,5 g par exemple donnera un écart-type relatif ou erreur relative d'échantillonnage de

$$R = \sqrt{\frac{K_S}{W}} = \sqrt{\frac{11,3}{2,5}} = 2,1\%$$

Si cette erreur est inacceptable, et que l'on désire tout de même analyser des échantillons de 2,5 g, il faudra alors modifier les caractéristiques du minerai ; le calcul de la nouvelle constante d'échantillonnage  $K_S$  permettra alors de déterminer la nouvelle granulométrie de broyage ; par exemple, pour obtenir  $R = 1,5\%$  en analysant 2,5 g d'échantillon, la constante  $K_S$  doit être égale à  $R^2 W = 5,625$ , ce qui implique un broyage à la granulométrie

$$u = \left( \frac{K_S K^2}{(K-L)(H-L) \rho_H 10^4} \right)^{1/3} = 0,0118 \text{ cm}$$

Ainsi donc à chaque étape de réduction granulométrique, la constante  $K_S$  est modifiée, et doit être recalculée en conséquence. La variance de l'erreur d'échantillonnage globale est la somme des variances des erreurs d'échantillonnage de chaque étape, puisque celles-ci sont indépendantes les unes des autres.

## II-2. VARIANCE DE L'ERREUR FONDAMENTALE DE P. GY.

La variance de l'erreur fondamentale s'intègre dans une théorie complète de l'échantillonnage des matières morcelées ; aussi, la formule que nous présenterons est généralement placée dans un contexte que nous ne pouvons développer ici. Cependant, cette variance représente réellement la variance des erreurs de mesure que nous "traquons", et qui affecte le variogramme ; et c'est pourquoi cette formule sera présentée, dépouillée de la théorie sous-jacente. Nous présenterons d'abord l'expression simplifiée de la variance relative pour ensuite donner son expression développée.

Comme précédemment, le calcul de cette variance s'applique aux erreurs d'échantillonnage (au sens strict) de minerais parfaitement homogénéisés.

### II-2.1 Expression Simplifiée.

La variance relative de l'erreur fondamentale dépend d'une constante d'échantillonnage  $C$ , caractéristique intrinsèque du minerai à échantillonner ; elle est proportionnelle à la granulométrie " $d$ " et inversement proportionnelle à la masse échantillonnée " $M_E$ " :

$$\sigma_{EF}^2 = \left( \frac{1}{M_E} - \frac{1}{M_L} \right) C d^3$$

La masse du lot initial,  $M_L$ , est généralement importante ; donc :

$$\sigma_{EF}^2 = \frac{1}{M_E} C d^3 \quad [\text{II.2.1}]$$

$d$  est la dimension des plus grosses particules, c'est le  $d^{95}$ , c'est-à-dire la dimension du tamis acceptant un refus de 5%.

La constante d'échantillonnage  $C$  dépend des caractéristiques du minerai :

$$C = c \cdot \ell \cdot g \cdot f$$

- .  $c$  le paramètre de constitution minéralogique ( $g/cm^3$ ) est fonction des masses volumiques et des teneurs des constituants.
- .  $g$  le paramètre granulométrique (sans dimension) caractérise la distribution granulométrique des particules ( $g \approx 0,25$  en moyenne).
- .  $\ell$  le paramètre de libération (sans dimension) caractérise le plus ou moins grand degré de libération des espèces minérales ( $0 \leq \ell \leq 1$ ).
- .  $f$  le paramètre de forme (sans dimension) vaut 0.5 pour des sphères, 0,2 pour des paillettes :  $f d^3$  (en  $cm^3$ ) représente le volume des particules.

## II-2.2 Expression Développée.

La formule II.2.1 est obtenue à partir de l'expression suivante :

$$\sigma_{EF}^2 = \frac{1}{M_E} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \frac{v_{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta} M_{\alpha\beta}}{M_L} \left( \frac{t_{\alpha\beta} - t}{t} \right)^2 \quad [\text{II.2.2.a}]$$

dans laquelle  $\alpha$  désigne la classe granulométrique,  $\beta$  la classe densimétrique.

$M_L$  est la masse du lot

$M_E$  est la masse de l'échantillon

$v_{\alpha\beta}$  le volume des particules de la classe granulodensimétrique  $\alpha\beta$

$$v_{\alpha\beta} = v_{\alpha}$$

$\delta_{\alpha\beta}$  la masse volumique de la classe granulodensimétrique  $\alpha\beta$

$$\delta_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha}$$

$M_{\alpha\beta}$  la masse de la classe granulodensimétrique  $\alpha\beta$

$t_{\alpha\beta}$  la teneur de la classe granulodensimétrique  $\alpha\beta$   
 $t$  la teneur du lot (teneur à estimer).

La formule [II.2.2] est obtenue après une démonstration rigoureuse que l'on trouvera dans la bibliographie de P. Gy, mais nous montrerons comment la retrouver au chapitre suivant..

P. Gy propose alors deux approximations :

Approximation 1 - A l'intérieur d'une classe granulodensimétrique  $\alpha\beta$  la teneur varie beaucoup plus avec la densité  $\beta$ , qu'avec la granulométrie  $\alpha$ . Ainsi :

$$t_{\alpha\beta} \approx t_{\beta}$$

Approximation 2 - La proportion granulométrique  $M_{\alpha\beta} / M_{\beta}$  varie peu d'une classe densimétrique à une autre et peut alors être assimilée à la proportion  $M_{\alpha} / M_L$  de la classe granulométrique  $\alpha$ , dans le lot :

$$\text{donc } \frac{M_{\alpha\beta}}{M_{\beta}} = \frac{M_{\alpha}}{M_L} \Rightarrow M_{\alpha\beta} = \frac{M_{\alpha} M_{\beta}}{M_L}$$

La formule II.2.2 se simplifie et s'écrit alors :

$$\sigma_{EF}^2 = \frac{1}{M_E} \sum_{\alpha} v_{\alpha} \frac{M_{\alpha}}{M_L} \cdot \sum_{\beta} \delta_{\beta} \left( \frac{t_{\beta} - t}{t} \right)^2 \frac{M_{\beta}}{M_L} \quad \text{II.2.2.b}$$

C'est à partir de cette expression que les paramètres de la constante C peuvent être définis.

$$\text{Soient : } S_1 = \sum_{\beta} \delta_{\beta} \left( \frac{t_{\beta} - t}{t} \right)^2 \cdot \frac{M_{\beta}}{M_L}$$

$$S_2 = \sum_{\alpha} v_{\alpha} \frac{M_{\alpha}}{M_L}$$

## II-2.3 Définition des Paramètres.

### II-2.3.1 Paramètres c et l.

Si le minerai est parfaitement homogène, il n'est composé que d'une seule classe densimétrique, donc  $t_{\alpha\beta} = t$  et  $S_1 = 0$ .

Si le minerai est parfaitement libéré, il n'est composé que de minéraux purs :

- de minerai  $t_{\beta} = 1$ , alors  $(t_{\beta} - t)/t = (1-t)/t$   
 et  $M_{\beta}/M_L = t$ , et de masse volumique  $\delta_M$
- de stérile  $t_{\beta} = 0$ , alors  $(t - t_{\beta})/t = 1$   
 et  $M_{\beta}/M_L = (1-t)$ , et de masse volumique  $\delta_S$

la somme  $S_1$  prend alors la valeur  $c$  :

$$c = \frac{1-t}{t} [\delta_m(1-t) + \delta_S t]$$

La somme  $S_1$  varie donc de 0 à  $c$  quand le minerai passe de parfaitement homogène à parfaitement libéré; soit  $\lambda$  le paramètre de libération granulométrique qui vaut 0 pour du minerai homogène et 1 pour du minerai libéré ; alors :

$$S_1 = c \cdot \lambda$$

Le paramètre de libération peut être déterminé par ailleurs :

- soit  $d_{\lambda}$  la dimension de libération ; c'est la dimension à laquelle il faut broyer le minerai pour libérer les constituants minéralurgiques (minerai et stérile) : c'est la maille de libération des minéralurgistes.
- $d$  la dimension des particules.

$$\text{alors } \begin{cases} \text{si } d \leq d_{\lambda} & \lambda = 1 \\ \text{si } d > d_{\lambda} & \lambda = \sqrt{\frac{d_{\lambda}}{d}} \end{cases}$$

### II-2.3.2 Paramètre $f$ .

C'est le coefficient de cubicité, qui peut se définir de la manière suivante :

$$\text{Soient } \begin{cases} d_i \text{ la dimension de la maille du tamis qui retiendrait la} \\ \text{particule } i. \\ v_i \text{ le volume de la particule } i \end{cases}$$

alors 
$$v_i = f_i d_i^3$$

- .  $f_i$  vaut 1 pour un cube, 0,524 pour une sphère et environ 0,2 pour des plaquettes. En pratique, la valeur retenue pour  $f$  est 0,5 en assimilant les particules de minerai à des sphères,

ou 0,2 si les particules se présentent sous forme de plaquettes, ou la valeur expérimentale si elle peut être calculée.

### II-2.3.3 Paramètres g et d.

En introduisant le paramètre de forme dans l'expression  $S_2$ , on obtient :

$$S_2 = \sum_{\alpha} f_{\alpha} d_{\alpha}^3 \frac{M_{\alpha}}{M_L}$$

or, f est pratiquement constant ; donc,  $S_2 = f \cdot \sum_{\alpha} d_{\alpha}^3 \frac{M_{\alpha}}{M_L} = f \cdot g d^3$

avec :

$$g d^3 = \sum_{\alpha} d_{\alpha}^3 \frac{M_{\alpha}}{M}$$

La valeur de d retenue est la dimension des plus grosses particules ou plus précisément, la dimension du tamis à maille carrée retenant 5% de produit, c'est-à-dire le  $d^{95}$ . Le paramètre g s'écrit alors :

$$g = \sum_{\alpha} \frac{d_{\alpha}^3}{d^3} \frac{M_{\alpha}}{M}$$

Une étude expérimentale précise a permis de définir des valeurs moyennes de g [7] :

- $d^{95}/d^5 > 4$   $g = 0,25$
- $2 < d^{95}/d^5 < 4$   $g = 0,50$
- $2 < d^{95}/d^5$   $g = 0,75$
- $d^{95} = d^5$   $g = 1.00$

Toutefois, les expérimentations montrent que la valeur moyenne de g est de 0,25 ; c'est cette valeur qui peut être utilisée en pratique, à défaut d'information plus précise.

### II-2.4 Cas des Minerais de Métaux Précieux, ou Minerais à Faible Teneur.

Pour les minerais filoniens non libérés, la formule générale reste applicable ; cependant le paramètre de libération peut parfois être difficile à déterminer.

Dans le cas des minerais d'or totalement libérés, une expression plus spécifique peut être obtenue. Les paramètres sont alors les suivants :

- d est la dimension des plus grosses paillettes d'or
- f = 0,2 l'or se présente généralement sous forme de paillettes
- g = 0,2
- $\ell = 1$

Ainsi :  $c \approx \frac{\delta_{\text{or}}}{t} = \frac{19}{t} \text{ g/cm}^3$       t est la teneur en or .

La constante d'échantillonnage C vaut alors :  $C \approx \frac{0,8}{t}$  et on obtient finalement une formule simplifiée pour le calcul de la variance relative d'échantillonnage :

$$\sigma_{\text{EF}}^2 = \frac{0,8}{t} \frac{d^3}{M_E}$$

### II-2.5 Utilisation de la Formule.

Le calcul de la variance de l'erreur d'échantillonnage dépend donc de 5 paramètres : d, c; g, f et  $\ell$  ; à chaque étape d'échantillonnage (sens large), on opère généralement un broyage, une homogénéisation et un échantillonnage (sens strict) ; certains de ces paramètres (d,  $\ell$ , g) sont donc modifiés, et la constante d'échantillonnage doit alors être recalculée.

La formule de la variance relative s'utilise de plusieurs manières : on peut, soit obtenir  $\sigma^2$  connaissant d, C et  $M_E$ , ou calculer la masse à échantillonner pour obtenir une variance donnée, etc... Examinons maintenant un exemple présenté par P. Gy [7] . Un minerai à 10% blende est concassé à 20 mm. ; la dimension de libération de la blende est estimée à 0,2 mm. ; quelle est l'erreur commise sur un prélèvement de 10 kg ?

- . pour f et g on utilise les valeurs moyennes des paramètres :

$$f = 0,5 \text{ et } g = 0,25$$

- . c se calcule immédiatement :

$$c = 48.84 \text{ g/cm}^3$$

ainsi que  $\ell$  :

$$\ell = \sqrt{\frac{d\ell}{d}} = \sqrt{\frac{0,2}{20}} = 0,1$$

On obtient alors  $C = 0,61 \text{ g/cm}^3$  .

Donc pour  $M_E = 10.000 \text{ g}$  et  $d = 2 \text{ cm.}$ , la variance de l'erreur vaut alors :

$$\sigma_{EF}^2 = \frac{0,61^2}{10.000} = 4,88 \cdot 10^{-4}$$

soit :  $\sigma_{EF} = 2,21 \cdot 10^{-2} = \frac{\sigma(t)}{t} \Rightarrow \sigma(t) = 0,22\%$

L'intervalle de confiance à 95% est donc (si la teneur estimée du lot est de 10%) :

$$t = 10\% \pm 0,4\% \text{ blende} .$$

III - CALCUL THEORIQUE DE LA VARIANCE  

---

DE L'ERREUR D'ECHANTILLONNAGE

Les expressions précédentes se déduisent naturellement de développements théoriques, mais le calcul que nous allons présenter maintenant permet d'exprimer la variance de l'erreur d'échantillonnage sans faire intervenir de paramètres globaux : la variance est alors exprimée en fonction de masses et de quantités de métal des particules élémentaires. A partir de cette variance théorique, nous montrerons comment retrouver l'expression de P. Gy, et nous calculerons une nouvelle expression de la variance.

La difficulté du calcul provient de la nature morcelée du minerai. Les particules présentent des granulométries, des densités, donc des teneurs, différentes. Si  $q_i$  est la quantité de métal de la particule  $i$ , de masse  $m_i$  :

- la teneur d'un échantillon contenant  $n$  particules est alors :

$$t_E = \frac{\sum_n q_i}{\sum_n m_i}$$

et la teneur du lot initial contenant  $N$  particules est donc :

$$t_L = \frac{\sum_N q_i}{\sum_N m_i}$$

Le problème est donc de calculer l'espérance de  $t_E$ , qui est en réalité l'espérance du quotient de deux variables aléatoires. Remarquons d'ailleurs que  $E(t_E) = E(\frac{q}{m})$  diffère de la teneur globale  $t_L$  qui vaut en fait  $E(q)/E(m)$ . Ce calcul classique a en particulier été développé par G. Matheron qui, parallèlement à cette démonstration, confirme l'équivalence de l'échantillonnage à effectif constant et de l'échantillonnage à poids constant : G. Matheron montre alors que la variance relative de l'erreur d'échantillonnage est identique dans les deux cas [15].

L'hypothèse fondamentale est l'équiprobabilité de prélèvement de toute particule du lot initial : cette équiprobabilité est obtenue, en pratique, par homogénéisation du minerai. Toutes les autres erreurs d'échantillonnage sont considérées nulles par ailleurs.

III-1. VARIANCE DE L'ERREUR D'ECHANTILLONNAGE.

Nous ne reprendrons pas ici toute la démonstration que le lecteur trouvera dans la bibliographie [ 15 ] .

III-1.1 Echantillonnage à Effectif Constant.

Soient deux variables aléatoires X et Y de moyennes et de variances respectives  $(m_X, \sigma_X^2)$  et  $(m_Y, \sigma_Y^2)$ , et telles que E(XY) existe. L'espérance et la variance du quotient X/Y s'expriment alors asymptotiquement par :

$$E\left(\frac{X}{Y}\right) \approx \frac{M_X}{M_Y} \left( 1 + \frac{\sigma_Y^2}{m_Y^2} - \frac{\text{Cov}(X,Y)}{m_X m_Y} + \dots \right) \quad \text{III.1.a}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}\left(\frac{X}{Y}\right) &\approx \frac{m_X^2}{m_Y^2} \left( \frac{\sigma_X^2}{m_X^2} + \frac{\sigma_Y^2}{m_Y^2} - 2 \frac{\text{Cov}(X,Y)}{m_X m_Y} + \dots \right) \quad \text{III.1.b} \\ &\approx \frac{m_X^2}{m_Y^2} E \left\{ \left( \frac{X}{m_X} - \frac{Y}{m_Y} \right)^2 \right\} \end{aligned}$$

Particularisons maintenant à un lot de minerai formé de particules caractérisées par leur masse  $m_i$ , et leur quantité de métal  $q_i$ . Considérons alors que la quantité de métal et la masse d'une particule sont des variables aléatoires de même loi F(q,m), et telles que :

$$\begin{aligned} \text{si } i = j \quad q_i \text{ et } m_i \text{ ne sont pas indépendantes} \quad t_i &= \frac{q_i}{m_i} \\ \text{si } i \neq j \quad q_i \text{ est indépendante de } q_j \text{ et de } m_j \end{aligned}$$

La teneur d'un échantillon contenant n particules est donc :

$$t_i = \frac{\sum_n q_i}{\sum_n m_i} = \frac{\frac{1}{n} \sum_n q_i}{\frac{1}{n} \sum_n m_i} = \frac{Q}{M}$$

c'est-à-dire que  $t_E$  est le quotient de deux variables aléatoires Q et M de variances faibles ; en effet,  $Q = \frac{1}{n} \sum q_i$  et  $M = \frac{1}{n} \sum m_i$  admettent des variances en  $\frac{1}{n}$ . Ainsi, en remplaçant respectivement X et Y par Q et M dans les expressions III.1.a et III.1.b, et en introduisant les moyennes de q et de m, on obtient :

$$E(t_E) = \frac{E(q)}{E(m)} + \frac{1}{n} \frac{E(q)}{E(m)} E \left\{ \frac{m}{E(m)} \left( \frac{q}{E(q)} - \frac{m}{E(m)} \right) \right\}$$

$$\text{Var}(t_E) = \frac{1}{n} \frac{E(q)^2}{E(m)^2} E \left\{ \left( \frac{q}{E(q)} - \frac{m}{E(m)} \right)^2 \right\}$$

Deux conclusions se déduisent de ces résultats :

i) l'espérance de la teneur de l'échantillon diffère de la teneur vraie du lot qui vaut  $\frac{E(q)}{E(m)}$ . Un biais apparaît, mais ce biais est toujours très faible car il est inversement proportionnel à n, le nombre de particules dans l'échantillon.

$$B = \frac{1}{n} \frac{E(q)}{E(m)} E \left\{ \frac{m}{E(m)} \left( \frac{q}{E(q)} - \frac{m}{E(m)} \right) \right\} \quad \text{III.1.c}$$

ii) la variance relative  $\sigma_R^2$  de l'erreur d'échantillonnage ( $t_E - t_L$ ) s'écrit alors :

$$\sigma_R^2 = \frac{1}{n} E \left\{ \left( \frac{q}{E(q)} - \frac{m}{E(m)} \right)^2 \right\} \quad \text{III.1.d}$$

### III-1.2 Echantillonnage à Poids Constant.

En pratique, on n'effectue jamais d'échantillonnages à effectif constant, mais des échantillonnages à masse ou à volume constant. Le calcul de la variance de l'erreur d'échantillonnage conduit alors à des développements mathématiques plus compliqués que dans le cas précédent. Cependant, G. Matheron a montré [15] que la variance obtenue pour un échantillonnage à masse constante est identique à la variance d'un échantillonnage à effectif constant. Nous retiendrons donc uniquement la formule III.1.1 ; dans le cas de prélèvements à masse constante, la valeur n représente alors le nombre moyen de particules dans un échantillon.

L'espérance de la teneur d'un échantillon de masse m, diffère de la teneur du lot. Ce biais, qui est totalement négligeable, est positif et égal à  $\frac{E(q)}{m}$  dans le cas d'un échantillon prélevé par excès : c'est-à-dire dont la masse serait inférieure à m avec N particules et se trouve donc supérieure à m avec N+1 particules.

III-2. DEVELOPPEMENT DE LA FORMULE DE GY A PARTIR DES RESULTATS DE G. MATHERON

A partir de l'expression [III.1.d] la formule de la variance relative de l'erreur fondamentale se retrouve rapidement ; il suffit d'y introduire des classes granulodensimétriques  $\alpha, \beta$  et de "transformer" l'espérance mathématique en une somme finie ; en effet, l'échantillonnage est équiprobable, et le nombre de particules  $N$  contenues dans le lot est donc très grand : dans ces conditions, la somme finie sur  $N$  est une bonne estimation de l'espérance mathématique.

Notations :

- $q_i$  quantité de métal de la particule  $i$
- $m_i$  masse de la particule
- $t_i$  teneur de la particule
- $n$  nombre de particules dans l'échantillon
- $t$  teneur du lot
- $n_{\alpha\beta}$  le nombre de particules dans la classe granulodensimétrique  $\alpha\beta$

Ces particules ont une masse  $m_{\alpha\beta}$ , une granulométrie  $v_{\alpha\beta}$ , une densité  $\delta_{\alpha\beta}$  et une teneur  $t_{\alpha\beta}$ .

L'expression III.1.d

$$\sigma_R^2 = \frac{1}{n} E \left\{ \left( \frac{q}{E(q)} - \frac{m}{E(m)} \right)^2 \right\}$$

s'écrit alors :

$$\sigma_R^2 \approx \frac{1}{n} \frac{1}{N} \sum_i \left( \frac{q_i}{E(q)} - \frac{m_i}{E(m)} \right)^2$$

Or

$$\frac{q_i}{E(q)} - \frac{m_i}{E(m)} = \frac{(t_i - t)}{t} \cdot \frac{m_i}{E(m)} \quad \text{car} \quad t = \frac{E(q)}{E(m)}$$

Introduisant le taux de prélèvement  $\tau$  tel que :

$$\tau = \frac{n}{N}, \text{ on peut alors poser : } \tau M_L \approx M_E$$

et en posant  $E(M) = \frac{1}{N} M_L$

on obtient :

$$\sigma_R^2 = \frac{1}{M_E} \cdot \sum \left( \frac{t_i - t}{t} \right)^2 \left( \frac{m_i}{M_L} \right)^2$$

Introduisons maintenant les classes granulodensimétriques telles que :

$$\begin{cases} n_{\alpha\beta} m_{\alpha\beta} = M_{\alpha\beta} \\ m_{\alpha\beta} = v_{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta} \end{cases}$$

La variance relative s'écrit alors :

$$\sigma_R^2 = \frac{1}{M_E} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \frac{v_{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta} M_{\alpha\beta}}{M_L} \left( \frac{t_{\alpha\beta} - t}{t} \right)^2$$

qui est donc bien la formule [II.2.2.a] que nous nous proposons de retrouver.

#### IV - DETERMINATION D'UNE NOUVELLE FORMULE

Les développements précédents nous enseignent qu'il est difficile de prendre en compte tous les paramètres caractérisant la matière morcelée dans le calcul de la variance de l'erreur d'échantillonnage, sauf naturellement si l'on dispose d'un bilan granulodensimétrique (cf paragraphe IV-3), ce qui permet alors d'utiliser l'expression II.2.2.a. Aussi, pour développer une nouvelle formule, la démarche adoptée a été la suivante : à partir de l'expression "théorique" III.1.d , la variance a été exprimée en injectant un modèle relativement simple dont les paramètres sont faciles à déterminer : le minerai tout venant est formé de particules riches (minerai) et de particules pauvres (gangue), mais chacune de ces deux phases minérales possède sa propre distribution granulométrique ; celle-ci peut d'ailleurs être facilement obtenue par tamisages et pesées successifs.

De plus, pour de tels minerais, les approximations (paragraphe II-2.2) utilisées dans le calcul de la variance fondamentale ne sont plus valables : il n'y a pas conservation de la proportion granulométrique d'une classe densitométrique à une autre par rapport à la proportion granulométrique globale.

##### IV-1. HYPOTHESES ET NOTATIONS.

L'échantillonnage (sens strict) est équiprobable.

Les quantités de métal  $q_i$  et les masses  $m_i$  de particules sont des variables aléatoires indépendantes :  $q_i$  et  $q_j$  ,  $m_i$  et  $m_j$  sont indépendants  $\forall i \neq j$ .  
 $q_i = t_i m_i$  ;  $q_i$  et  $m_i$  ne sont pas indépendants :  $t_i$  est la teneur de la particule  $i$ .

Le minerai est constitué de deux phases minérales caractérisées par leur teneur  $t$ , leur masse volumique  $\rho$  , et leur loi de distribution des masses des particules  $F(dm)$  ; en pratique, les masses des particules ne sont pas connues ; c'est la granulométrie des particules qui peut être déterminée ( $m = \rho v$ ), ce sont donc les lois de distribution des granulométries qui sont disponibles. Les deux catégories de minerai sont en proportion  $p_0$  et  $p_1$  (proportions comptées en nombre de particules).

- minerai de catégorie 0 :  $t_0$  ,  $\rho_0$  ,  $F_0(dm)$  ( $m_0, \sigma_0^2$ ) ,  $p_0$
- minerai de catégorie 1 :  $t_1$  ,  $\rho_1$  ,  $F_1(dm)$  ( $m_1, \sigma_1^2$ ) ,  $p_1$

La variance relative de l'erreur d'échantillonnage est donc d'après III.1.d :

$$\sigma_R^2 = \frac{1}{n} E \left\{ \left( \frac{q}{E(q)} - \frac{m}{E(m)} \right)^2 \right\} \quad (1)$$

.  $n$  est l'effectif (nombre de particules) de l'échantillon

.  $N$  est l'effectif du lot à échantillonner

$$E(q) = \bar{q} = p_0 q_0 + p_1 q_1 = p_0 t_0 m_0 + p_1 t_1 m_1 \quad (2)$$

$$E(m) = \bar{m} = p_0 m_0 + p_1 m_1 \quad (3)$$

.  $M_T$  masse totale du lot :  $M_T = N \bar{m}$

$$V_T \text{ volume total du lot : } V_T = N \left( p_1 \frac{\rho_1}{m_1} + p_0 \frac{\rho_0}{m_0} \right)$$

.  $\rho$  masse volumique du lot :  $\rho = M_T/V_T$

.  $t$  teneur du lot :

$$t = \frac{E(q)}{E(m)} = \frac{p_1 t_1 m_1 + p_0 t_0 m_0}{p_1 m_1 + p_0 m_0} \quad (4)$$

#### IV-2. DEVELOPPEMENT DE LA VARIANCE RELATIVE.

En développant l'expression (1), on obtient :

$$\sigma_R^2 = \frac{1}{n} \frac{p_1 (t_1 - t)^2 (m_1^2 + \sigma_1^2) + p_0 (m_0^2 + \sigma_0^2) (t_0 - t)^2}{\bar{q}^2} \quad (5)$$

L'expression n'est cependant pas utilisable sous cette forme ; en effet, les proportions  $p_0$  et  $p_1$  sont des proportions en nombre ; de même les moments (moyenne et variance) des masses, c'est-à-dire les granulométries, sont exprimées en nombre. En pratique, les proportions ne sont jamais exprimées en nombre mais en masse ; en effet, il est beaucoup plus facile de peser que de compter les grains de minerai. Pour rendre utilisable l'expression de la variance relative (5), il est donc nécessaire de l'exprimer en fonction de proportions comptées en masse.

IV-2.1 Proportions et Fréquences Comptées en Masse.

Les proportions de chaque catégorie de minerai, comptées en masse  $p_o^m$  et  $p_1^m$  se calculent facilement à partir des proportions comptées en nombre  $p_o$  et  $p_1$  :

$$p_o^m = \frac{M_o}{M_T} = \frac{N_o m_o}{N \bar{m}} = p_o \frac{m_o}{\bar{m}}$$

De même, les fréquences des granulométries comptées en masse  $g^v(v)$  se calculent à partir des fréquences comptées en nombre  $f^v(v)$  :

$$g^v(v) dv = \frac{f^v(v) m_v dv}{\int m_v f^v(v) dv} = \frac{f^v(v) m_v dv}{\bar{m}} \quad (6)$$

or les fréquences en nombre des granulométries peuvent s'exprimer en fonction des fréquences en nombre des masses ; en effet :

$$f^v(v) dv = [p_1 \rho_1 f_1^m(v \rho_1) + p_o \rho_o f_o^m(v \rho_o)] dv$$

On obtient de la même manière les fréquences des granulométries comptées en masse, à l'intérieur de chaque classe de minerai,  $g_o^v$  et  $g_1^v$  :

$$g_o^v(v) dv = \frac{v \rho_o f_o^m(v \rho_o)}{m_o} dv \quad (7)$$

de même pour  $g_1^v(v)$ .

IV-2.2 Volumes Moyens Comptés en Masse des Particules du Lot  $\bar{V}$  et des Particules de Chaque Catégorie  $\bar{V}_o$  et  $\bar{V}_1$ .

Par définition  $\bar{V} = \int v g^v(v) dv$ .

En utilisant (6) on obtient  $\bar{V}$  :

$$\bar{V} = \frac{p_1 \frac{m_1^2 + \sigma_1^2}{\rho_1} + p_o \frac{m_o^2 + \sigma_o^2}{\rho_o}}{p_1 m_1 + p_o m_o}$$

De même  $\bar{V}_0 = \int v g_0^V(v) dv$  et en utilisant (7) on obtient alors :

$$\bar{V}_0 = \frac{m_0^2 + \sigma_0^2}{\rho_0 m_0}$$

$$\bar{V}_1 = \frac{m_1^2 + \sigma_1^2}{\rho_1 m_1}$$
(8)

#### IV-2.3 Calcul de la Variance.

Introduisons les volumes moyens des particules, comptés en masse (8), dans l'expression (5) :

$$\sigma_R^2 = \frac{1}{n} \frac{p_1 (t_1 - t)^2 \bar{V}_1 \rho_1 m_1 + p_0 (t_0 - t)^2 \bar{V}_0 \rho_0 m_0}{\bar{m}^2 t^2}$$
(9)

or, les proportions en nombre  $p_0$  et  $p_1$  s'expriment également en fonction des teneurs et des masses moyennes comptées en nombre  $m_0$  et  $m_1$ , et d'après (2) et (4), on tire :

$$p_1 = \frac{\bar{m} (t - t_0)}{m_1 (t_1 - t_0)}$$

$$p_0 = \frac{\bar{m} (t - t_1)}{m_0 (t_1 - t_0)}$$
(10)

En remplaçant dans (9)  $p_1$  et  $p_0$  par (10) et en remarquant que  $n \cdot \bar{m}$  représente la masse de l'échantillon,  $M_E$ , on obtient l'expression de la variance relative de l'erreur d'échantillonnage, avec les paramètres moyens calculés avec des proportions en masse.

$$\sigma_R^2 = \frac{1}{M_E} \frac{\rho_1 \bar{V}_1 (t_1 - t) + \rho_0 \bar{V}_0 (t - t_0)}{t^2} \frac{(t_1 - t)(t - t_0)}{(t_1 - t_0)}$$

IV.2.3

La variance relative (terme en  $1/t^2$ ) est donc inversement proportionnelle à la masse échantillonnée et elle dépend de la granulométrie des éléments constituant le minerai,  $\bar{V}_0$  et  $\bar{V}_1$ , ainsi que de la composition

de ce minerai (avec les termes  $\rho_o$ ,  $\rho_1$ ,  $t_o$  et  $t_1$ ).

Les volumes moyens  $\bar{V}_o$  et  $\bar{V}_1$  s'obtiennent facilement expérimentalement : il suffit de disposer d'une série de tamis. On tamise alors chaque catégorie de minerai, et on pèse à chaque fois le refus de chaque tamis ; les volumes moyens sont alors obtenus en calculant les moyennes pondérées par les masses respectives des refus.

#### IV-2.4 Etudes de Quelques Cas Particuliers.

a - Si toutes les particules ont la même granulométrie :

$$V = V_o = V_1$$

$$\sigma_R^2 = \frac{V}{M_E} \frac{\rho_1 (t_1 - t) + \rho_o (t - t_o)}{(t_1 - t_o)} \frac{(t_1 - t)(t - t_o)}{t^2}$$

Dans ce cas la masse volumique  $\rho$  du minerai tout-venant est alors :

$$\rho = \frac{\rho_1 \rho_o (t_1 - t_o)}{\rho_1 (t_1 - t) + \rho_o (t - t_o)}$$

La variance relative s'écrit alors :

$$\sigma_R^2 = \frac{V}{M_E} \frac{\rho_1 \rho_o}{\rho} \frac{(t_1 - t)(t - t_o)}{t^2}$$

b - Dans le cas d'un minerai parfaitement libéré en minéral économique ( $t_1 = 1$ ) et en gangue ( $t_o = 0$ ), formé de particules de même granulométrie :

$$\sigma_R^2 = \frac{V}{M_E} (\rho_1 (1-t) + \rho_o t) \frac{1-t}{t}$$

Cette expression est exactement la valeur de la variance de l'erreur fondamentale obtenue par la formule [II.2.1] de P. Gy dans laquelle :

- $V = f d^3$
- $g = 1$  les particules sont de taille identique
- $\ell = 1$  le minerai est totalement libéré
- $c = [\rho_1 (1-t) + \rho_o t] \frac{1-t}{t}$  c'est la définition même du paramètre  $c$ .

### IV-3. APPLICATIONS

Des tests de validation de l'expression [IV.2.3] et de comparaison avec les autres expressions ont été effectués sur des bilans d'études granulodensimétriques. La variance relative de l'erreur d'échantillonnage a été calculée dans chaque cas selon 3 méthodes (éventuellement 4) :

$$\text{METHODE 1 : } \sigma_1^2 = \frac{1}{M_E} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} v_{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta} \frac{M_{\alpha\beta}}{M_L} \left( \frac{t_{\alpha\beta} - t}{t} \right)^2$$

C'est l'expression la plus proche de l'expression théorique [III.1.d] : elle sera donc considérée comme la valeur réelle de la variance relative de l'erreur d'échantillonnage.

$$\text{METHODE 2 : } \sigma_2^2 = \frac{1}{M_E} \sum_{\alpha} v_{\alpha} \frac{M_{\alpha}}{M_L} \cdot \sum_{\beta} \delta_{\beta} \left( \frac{t_{\beta} - t}{t} \right)^2 \frac{M_{\beta}}{M_L}$$

Cette formule est donc déduite de l'expression précédente en appliquant les deux approximations (cf paragraphe II-2.2) : celles-ci seront testées lors des calculs (cf Tableaux IV-2, 4, 6).

$$\text{METHODE 3 : } \sigma_3^2 = \frac{1}{M_E} \frac{\rho_1 \bar{V}_1 (t_1 - t) + \rho_o \bar{V}_o (t - t_o)}{t^2} \frac{(t_1 - t)(t - t_o)}{(t_1 - t_o)}$$

Pour utiliser cette formule, il faut donc "fictivement" diviser le minerai en deux catégories : la teneur de coupure utilisée se situe pour le maximum des faibles teneurs et le minimum des fortes teneurs.

$$\text{METHODE 4 : } \sigma_4^2 = \frac{(K-L)(H-L) u^3 \rho_H 10^4}{M_E K^2}$$

Formule de Engels, Ingamells et Switzer (paragraphe II-1).

#### IV-3.1 Minerai de Wolframite ( $WO_4$ Mn Fe) - Tableaux IV-1 et IV-2

- Minerai tout venant       $t = 4,3\%$
- Minerai pauvre             $t_o = 0,17\%$
- $\rho_o = 2,1 \text{ g/cm}^3$
- $V_o = 0,30 \text{ cm}^3$

- Minerai riche  $t_1 = 30\%$   
 $\rho_1 = 3,37 \text{ g/cm}^3$   
 $V_1 = 0,32 \text{ cm}^3$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1^2 = 1,48 \cdot 10^{-4} \\ \sigma_2^2 = 2,35 \cdot 10^{-4} \\ \sigma_3^2 = 1,79 \cdot 10^{-4} \\ \sigma_4^2 = 2,03 \cdot 10^{-4} \end{array} \right.$$

IV-3.2 Minerai de Magnétite - Extrait de Gy [9] - Tableaux IV-3 et IV-4

- Minerai tout venant  $t = 55,14\%$

- Minerai pauvre  $t_o = 35,74\%$   
 $\rho_o = 3,47 \text{ g/cm}^3$   
 $V_o = 1,20 \text{ cm}^3$

- Minerai riche  $t_1 = 57,45\%$   
 $\rho_1 = 4,49 \text{ g/cm}^3$   
 $V_1 = 1,445 \text{ cm}^3$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1^2 = 5,37 \cdot 10^{-7} \\ \sigma_2^2 = 10,03 \cdot 10^{-7} \\ \sigma_3^2 = 6,50 \cdot 10^{-7} \\ \sigma_4^2 = 8,28 \cdot 10^{-7} \end{array} \right.$$

Pour  $\sigma_4^2$ , la formule n'est pas valable ici car le minerai riche n'est pas l'élément mineur dans le minerai, il représente 90% du total.

IV-3.3 Minerai de Wolframite - Tableaux IV-5 et IV-6

- Minerai tout venant  $t = 0,56\%$

- Minerai pauvre  $t_o = 0,07\%$   
 $\rho_o = 2,62 \text{ g/cm}^3$   
 $V_o = 0,127 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^3$

- Minerai riche

$$t_1 = 24,5\%$$

$$\rho_1 = 3,39 \text{ g/cm}^3$$

$$V_1 = 0,37 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^3$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1^2 = 4,62 \cdot 10^{-6} \\ \sigma_2^2 = 23,42 \cdot 10^{-6} \\ \sigma_3^2 = 7,09 \cdot 10^{-6} \\ \sigma_4^2 = 7,37 \cdot 10^{-6} \end{array} \right.$$

#### IV-3.4 Conclusion

Malgré l'hypothèse très forte, qui consiste à considérer deux catégories de minerai, ces trois exemples montrent que le calcul de la variance relative de l'erreur d'échantillonnage par cette nouvelle formule fournit un résultat très proche de la valeur réelle de la variance, et même beaucoup plus proche que ceux obtenus avec les approximations de P. Gy, dont les résultats vont en fait dans le sens de la sécurité ; en effet, les valeurs obtenues sont, dans les 3 cas, supérieures à la valeur vraie et aux résultats de la nouvelle formulation. En fournissant une meilleure estimation de la variance relative, cette nouvelle formulation va également dans le sens de l'économie, puisqu'à variance égale la masse à échantillonner par la méthode 3 est inférieure à celle calculée avec la seconde méthode.

Densité Granulo- métrie $\alpha$ $\beta$	$d < 2.7$		$2.7 < d < 2.8$		$2.8 < d < 2.9$		$2.9 < d < 3.3$		$d > 3.3$	
	$M_{\alpha\beta}$	$t_{\alpha\beta}$								
en $cm^2$										
0.77	8.12	0.043	0.805	1.088	0.431	1.31	0.657	6.22	0.940	32.47
0.12	8.51	0.054	1.038	0.731	0.428	1.62	0.661	4.18	1.028	42.08
0.007	4.79	0.022	0.421	0.306	0.172	0.92	0.307	1.07	0.681	46.95
$2.6 \cdot 10^{-4}$	1.92	0.022	0.131	0.116	0.094	0.17	0.263	0.32	0.354	48.03
$4 \cdot 10^{-6}$	0.883	0.022	0.098	0.099	0.081	0.11	0.175	0.68	0.212	36.22
$t_{\beta}$	0.041		0.099		0.714		1.20		40.80	

$\longleftarrow$ 
Catégorie "Minerai pauvre"
Catégorie "Minerai riche"
 $\longrightarrow$

TABLEAU IV 1. - Bilan granulodensimétrique  
 - Comparaison des  $t_{\alpha\beta}$  et des  $t_{\beta}$   
 - Définition des 2 catégories de minerai.

Densité $\beta$ $\frac{M_{\alpha}}{M}$	$d < 2.7$	$2.7 < d < 2.8$	$2.8 < d < 2.9$	$2.9 < d < 3.3$	$d > 3.3$
	0.33	$\frac{M_{\alpha\beta}}{M_{\beta}} = 0.335$	0.323	0.358	0.318
0.35	0.354	0.416	0.355	0.320	0.319
0.19	0.197	0.169	0.140	0.148	0.211
0.08	0.079	0.052	0.078	0.127	0.110
0.04	0.036	0.039	0.067	0.085	0.066

TABLEAU IV 2. - Tableau des rapports  $M_{\alpha\beta}/M_{\beta}$   
 - Comparaison des  $M_{\alpha}/M$  et des  $M_{\alpha\beta}/M_{\beta}$

Densité $\alpha$ Granulo- métrie $\beta$	2.805		3.135		3.655		4.25		4.75	
	$M_{\alpha\beta}$	$t_{\alpha\beta}$								
en $cm^2$										
2.25			980.8	0.2275	4512.	0.4245	30580.	0.5425	25220	0.5805
0.266			250.20	0.263	1177.	0.4265	6903.	0.537	6130	0.599
$0.18 \cdot 10^{-1}$			198.40	0.244	726.30	0.4195	2730.	0.534	5085.	0.621
$0.225 \cdot 10^{-2}$	85.	0.1635	197.90	0.289	521.50	0.372	1710.	0.5449	3306.	0.6550
$0.28 \cdot 10^{-3}$	113.20	0.164	418.10	0.2155	336.50	0.3415	684.30	0.55	2608.	0.6550
$0.35 \cdot 10^{-4}$	125.90	0.177	144.70	0.2365	202.30	0.3150	404.70	0.5655	2142.	0.677
$0.44 \cdot 10^{-5}$	164.20	0.1705	359.30	0.177	105.50	0.335	329.80	0.6330	1541.	0.6786
$t_{\beta}$	0.1694		0.2285		0.4128		0.5422		0.6048	

$\longleftrightarrow$   
 Catégorie "Minerai pauvre" Catégorie "Minerai riche"

TABLEAU IV 3. - Bilan granulodensimétrique  
 - Comparaison des  $t_{\alpha\beta}$  et des  $t_{\beta}$   
 - Définition des 2 catégories de minerai.

Densité $\beta$ $\frac{M_{\alpha}}{M}$	2.805	3.135	6.655	4.25	4.75
0.61297	$\frac{M_{\alpha\beta}}{M_{\beta}}$	0.3847	0.5952	0.7056	0.5479
0.613		0.385	0.595	0.706	0.548
0.145		0.098	0.155	0.160	0.133
$0.874 \cdot 10^{-1}$		0.778 10	$0.958 \cdot 10^{-1}$	$0.630 \cdot 10^{-1}$	0.110
$0.582 \cdot 10^{-1}$	0.174	0.776 10	$0.688 \cdot 10^{-1}$	$0.395 \cdot 10^{-1}$	$0.718 \cdot 10^{-1}$
$0.416 \cdot 10^{-1}$	0.232	0.164	$0.444 \cdot 10^{-1}$	$0.158 \cdot 10^{-1}$	$0.567 \cdot 10^{-1}$
$0.302 \cdot 10^{-1}$	0.258	0.568 10	$0.267 \cdot 10^{-1}$	$0.094 \cdot 10^{-1}$	$0.465 \cdot 10^{-1}$
$0.250 \cdot 10^{-1}$	0.336	0.141	$0.139 \cdot 10^{-1}$	$0.076 \cdot 10^{-1}$	$0.335 \cdot 10^{-1}$

TABLEAU IV 4. - Tableau des rapports  $M_{\alpha\beta}/M_{\beta}$   
 - Comparaison des  $M_{\alpha}/M$  et des  $M_{\alpha\beta}/M_{\beta}$

Densité $\beta$ Granulo- métrie $\alpha$	2.60		2.80		3.00		3.20		3.40	
	$M_{\alpha\beta}$	$t_{\alpha\beta}$								
en $cm^3$										
0.18 $10^{-1}$	289.	0.03	27.	0.44	3.	4.6	1.	9.5	0.001	14.6
0.225 $10^{-2}$	917.	0.07	87.	0.445	16.	2.2	3.	9.2	7.	23.05
0.2812 $10^{-3}$	1250.	0.05	83.	0.26	22.	1.1	6.	4.85	28.	28.4
0.35 $10^{-4}$	1323.	0.02	186.	0.115	12.	0.595	2.	1.39	37.	30.77
0.44 $10^{-5}$	1056.	0.025	48.	0.10	16.	0.335	1.	0.95	28.	22.70
0.55 $10^{-6}$	1213.	0.04	114.	0.115	19.	0.29	13.	1.15	31.	17.50
$t_{\beta}$	0.036		0.2045		1.037		3.265		24.98	

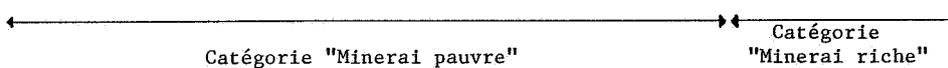


TABLEAU IV 5. - Bilan granulodensimétrique  
 - Comparaison des  $t$  et des  $t$   
 - Définition des 2 catégories de mineral.

Densité $M_{\alpha}$ $M_{\beta}$	2.60	2.80	3.00	3.20	3.40
0.047	0.048	0.495	0.034	0.039	$8 \cdot 10^{-4}$
0.151	0.152	0.160	0.182	0.115	0.053
0.203	0.207	0.152	0.250	0.231	0.214
0.228	0.219	0.341	0.136	0.077	0.282
0.168	0.175	0.088	0.182	0.039	0.214
0.203	0.201	0.209	0.216	0.500	0.237

TABLEAU IV 6. - Tableau des rapports  $M_{\alpha\beta}/M_{\beta}$   
 - Comparaison des  $M_{\alpha}/M$  et des  $M_{\alpha\beta}/M_{\beta}$

BIBLIOGRAPHIE DE LA 3ème PARTIE

- [1] L. BUBENICEK.- Etude des Minerais Morcelés Hétérogènes. IRSID -  
Décembre 1969.
- [2] F. DEVERLY.- Précisions sur l'utilisation de la formule de Gy -  
Calcul de la variance de l'erreur d'échantillonnage.  
Note interne n° 779, CGMM, Fontainebleau, 1982.
- [3] F. DEVERLY.- Variance de l'erreur d'échantillonnage - Proposition  
d'une nouvelle formule de calcul. Note Interne n° 844,  
CGMM, Fontainebleau, 1983.
- [4] F. DEVERLY.- Application de la Géostatistique aux Problèmes d'Echan-  
tillonnage.- Compte-rendu de la réunion géostatistique  
du 2-3 Juin 1983.- Sciences de la Terre, n° 18, Février  
1984, pp. 27-45.
- [5] F. DEVERLY.- Geostatistical Approach to Mining Sampling.- Proceedings,  
18th APCOM Symposium, London, 26-30 March 1984, pp. 379-  
388.
- [6] J.C. ENGELS, C.O. INGAMELLS.- Effects of Sample Inhomogeneity in K-Ar  
Dating.- Geochemica and Cosmochemica Acta, 34, pp. 1007-  
1077, 1970.
- [7] P. GY.- L'Echantillonnage des Minerais en Vrac - Tome 1 : Théorie  
Générale.- Mémoires du B.R.G.M. n° 56, 1967.
- [8] P. GY.- L'Echantillonnage des Minerais en Vrac - Tome 2 : Théorie  
Générale, Erreurs Opératoires, Compléments.- Mémoires  
du B.R.G.M. n° 67, 1971.
- [9] P. GY.- Théorie et Pratique de l'Echantillonnage des Matières  
Morcelées.- Editions Pierre Gy, Cannes, 1975.
- [10] P. GY.- Sampling of Particulate Materials.- Elsevier Scientific  
Publishing Co., 1979.
- [11] C.O. INGAMELLS.- New Approaches to Geochemical Analysis and Sampling.-  
Talanta, Vol. 21, pp. 141-155.- Pergamon Press, 1974.
- [12] C.O. INGAMELLS, P.A. SWITZER.- Proposed Sampling Constant for Use in  
Geochemical Analysis.- Talanta, Vol. 20, pp. 547-568, 1973.

- [13] C.O. INGAMELLS, P.K. SAMLAND.- New Approaches to Geostatistical Evaluation.- Proceedings, 12th APCOM Symposium, Colorado School of Mines, Golden, Colorado, 8-12 April 1974.
- [14] G. MATHERON.- Traité de Géostatistique Appliquée.- Tome 1.- Mémoires du B.R.G.M. n° 14, 1962.
- [15] G. MATHERON.- Comparaison entre l'échantillonnage à poids constant et à effectif constant.- Revue de l'Industrie Minérale, Aout 1966, pp. 610-621.

- ANNEXES -

ANNEXE I

PETIT GLOSSAIRE DE L'ECHANTILLONNAGE

*Echantillonnage au sens strict:* C'est la réduction de la masse de matériaux par prélèvement ou partage.

*Echantillonnage au sens large:* C'est la séquence d'opérations qui conduit du lot initial à la prise de laboratoire; l'échantillonnage au sens large comprend des étapes successives de préparation (broyage, homogénéisation...) et d'échantillonnage au sens strict.

*Echantillon primaire ou échantillon:* - Il est prélevé en un point du lot initial (gisement ou matériel en écoulement). - Il n'a pas à être représentatif de ce lot; par contre, l'analyse de plusieurs de ces échantillons primaires permettra l'estimation de ce lot.

*Echantillon secondaire ou sous-échantillon:* C'est une fraction "représentative" de l'échantillon primaire, c'est-à-dire qu'il doit en avoir les caractéristiques (teneur, distribution granulométrique, distribution minéralogique...). L'analyse chimique est pratiquée sur un sous-échantillon de rang n, issu d'une opération d'échantillonnage au sens large: c'est la donnée qui, une fois affectée à l'échantillon primaire, sera utilisée pour l'estimation.

*Préparation d'un échantillon:* La préparation d'un échantillon comprend toutes les opérations de manutention, séchage, concassage, broyage, tamisage, homogénéisation, etc.

*Homogénéisation:* C'est une étape fondamentale de toute opération d'échantillonnage: elle assure l'équiprobabilité de prélèvement; c'est-à-dire que chaque fragment a une égale probabilité d'être échantillonné, quelle que soit sa position spatiale dans le minerai en vrac. L'homogénéisation détruit l'hétérogénéité de distribution.

*Hétérogénéité de distribution:* Elle apparaît lorsque la position spatiale d'un grain donné dépend de ses caractéristiques physico-chimiques ou minéralogiques. Cette notion d'hétérogénéité de distribution est étroitement liée à l'échelle d'observation.

*Hétérogénéité de constitution:* C'est le cas le plus fréquent dans un lot de minerai en vrac: les grains de minerai diffèrent les uns des autres par leurs caractéristiques physico-chimiques, granulométriques et minéralogiques.

LE COVARIOGRAMME GEOMETRIQUE

V est un domaine de l'espace ( $R^2$  ou  $R^3$ ).

Soit  $k(x)$  la variable géométrique ou indicatrice du domaine V telle que:

$$\begin{cases} k(x) = 1 & \text{si } x \in V \\ k(x) = 0 & \text{si } x \notin V \end{cases}$$

Le covariogramme géométrique associé à  $k(x)$  ou covariogramme géométrique du domaine V est la fonction  $K(h)$  telle que:

$$\begin{aligned} K(h) &= k * k \\ &= \int k(x) k(x+h) dh. \end{aligned}$$

Le covariogramme est différent de zéro si  $x \in V$  et si  $x+h \in V$ , c'est-à-dire si le point x appartient à l'intersection de V et de son translaté par le vecteur h,  $V_h$ ; en conséquence:

$$K(h) = \text{Mes}(V \cap V_h) = |V \cap V_h|$$

On démontre facilement les propriétés suivantes de  $K(h)$ :

$$\begin{aligned} V &= \int k(x) dx = K(0) \\ \int K(h) dh &= V^2 \end{aligned}$$

Quelques covariogrammes géométriques courants:

Dans  $R^1$ : V est un segment de longueur  $\ell$

$$K(h) = \ell - |h| \quad K(0) = \ell$$

Dans  $R^2$ : V est un rectangle de côtés  $\ell$  et  $k$

$$K(h) = (\ell - |h|)(k - |h|) \quad K(0) = \ell.k.$$

V est un cercle de rayon R

$$K(h) = 2R^2 \operatorname{Arcos} \frac{|h|}{2R} - |h| \sqrt{R^2 - \frac{|h|^2}{4}} \quad K(0) = \pi R^2$$

Dans  $R^3$ : V est une sphère de diamètre D.

$$K(h) = \pi \frac{D^3}{6} \left[ 1 - \frac{3}{2} \frac{h}{D} + \frac{1}{2} \frac{h^3}{D^3} \right] \quad K(0) = \pi \frac{D^3}{6}$$

Développement limité de  $K(h)$  à l'origine:

$$K(h) = K(0) + |h| K'(0) + o(h)$$

On démontre que la pente de  $K(h)$  à l'origine,  $K'(0)$  est égale (au signe près) à la variation diamétrale  $D_\alpha$  (ou diamètre apparent) du domaine V dans la direction  $\alpha$  du vecteur h:

$$K(h) = K(0) - |h| D_\alpha + o(h)$$

Si P est le périmètre du domaine V, alors

$$P = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} D_\alpha \, d\alpha$$

ANNEXE III

CALCULS DE  $\int F(B_{-x}) dx$ ,  $\int F^2(B_{-x}) dx$  et  $\int F(B_{-x}) F(B_{-x}^h) dx$

$$(1) \quad \int F(B_{-x}) dx = \int \int_{R \quad B_{-x}} f(y) dy = \iint 1_{B_{-x}}(y) f(y) dy$$

$$= \int f * 1_B^v(x) dx$$

En passant par la transformée de Fourier:

$$\begin{cases} \widehat{f * g}(u) = \widehat{f}(u) \cdot \widehat{g}(u) \\ \widehat{f}(0) = \int f(x) dx \end{cases}$$

On obtient alors:

$$\int F(B_{-x}) dx = f * 1_B^v(0) = \widehat{f}(0) \cdot \widehat{1_B^v}(0)$$

or le résultat est immédiat car  $\begin{cases} \widehat{f}(0) = \int f(x) dx = 1 \\ \widehat{1_B^v}(0) = \int 1_B^v(x) dx = \text{Mes}(B) \end{cases}$

donc:

$$\int F(B_{-x}) dx = \text{Mes}(B)$$

$$(2) \quad \int F^2(B_{-x}) dx = \int dx \int_{B_{-x}} f(y) dy \int_{B_{-x}} f(z) dz$$

$$= \int dx \iint f(y) f(z) 1_{B_{-x}}(y) 1_{B_{-x}}(z) dy dz$$

Or:

$$\int f(u) f(u+x) du = f * \overset{v}{f} = g(x) \quad \text{covariogramme de } g(x)$$

$$\int 1_{B_{-x}}(u) 1_{B_{-x}}(u+x) du = K(x) \quad \text{covariogramme géométrique de } B.$$

On obtient donc:

$$\int F^2(B_{-x}) dx = \begin{cases} \int g(h) K(h) dh \\ g * K(0) \end{cases}$$

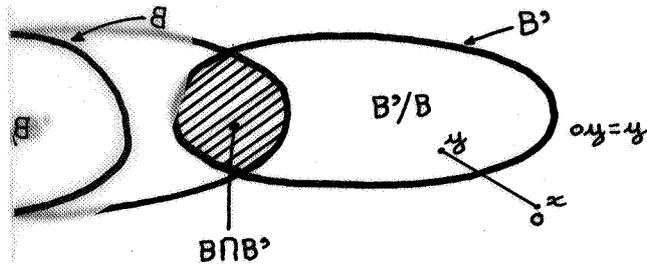
$$\begin{aligned} (3) \quad \int F(B_{-x}) F(B_{h-x}) dx &= \int dx \int f(y) 1_{B_{-x}}(y) dy \int f(z) 1_{B_{h-x}}(z) dz \\ &= \int dx \int f(u) 1_B(u+x) du \cdot \int f(u+x) 1_B(u+x-x-h) du \\ &= \int dx \int f(u) f(u+x) du \int 1_B(v) 1_B(v+x-h) dv \\ &= \int g(x) K(x-h) dx \end{aligned}$$

$$\int F(B_{-x}) F(B_{h-x}) dx = \begin{cases} \int g(u+h) K(u) du \\ g * K(h) \end{cases}$$

TRANSFORMEE DE LAPLACE DE  $(Q(B), Q(B'))$

$$\phi(\lambda, \mu) = E \left\{ e^{-\lambda Q(B)} \cdot e^{-\mu Q(B')} \right\}$$

Soient B et B' deux domaines tels que:



Soient  $Q_x(B)$  et  $Q_x(B')$  les quantités de métal tombées respectivement dans les domaines B et B', et venant d'une salve implantée en x. S'il n'y a pas de germe en x, alors  $Q_x(B) = Q_x(B') = 0$ .  $\phi(\lambda, \mu)$  s'écrit alors:

$$\phi(\lambda, \mu) = E \left\{ e^{-\lambda \sum_{dx} Q_x(B)} e^{-\mu \sum_{dx} Q_x(B')} \right\} \quad (1)$$

et d'après l'indépendance de Poisson:

$$\begin{aligned} \phi(\lambda, \mu) &= \prod_{dx} E \left\{ e^{-\lambda Q_x(B)} e^{-\mu Q_x(B')} \right\} \\ &= \prod_{dx} \phi_x(\lambda, \mu) \end{aligned}$$

Il faut donc maintenant évaluer  $\phi_x(\lambda, \mu)$ . On conditionnalise donc par rapport au nombre de germes tombés dans dx:

$$\begin{aligned} \phi_x(\lambda, \mu) &= 1 - \theta_G dx E \left\{ e^{-\lambda Q_x(B)} e^{-\mu Q_x(B')} \mid \mu(dx) = 0 \right\} \\ &\quad + \theta_G dx E \left\{ e^{-\lambda Q_x(B)} e^{-\mu Q_x(B')} \mid \mu(dx) = 1 \right\} \\ &\quad + o(dx) \end{aligned} \quad (2)$$

Quand  $\mu(dx) = 0$ ,  $E\{e^{-\lambda Q_x(B)} e^{-\mu Q_x(B')}\} = 1$ ; calculons maintenant cette espérance lorsque  $\mu(dx) = 1$ . Comme au paragraphe II.2, effectuons une seconde conditionnalisation, cette fois sur le nombre  $M(x)$  de points de la salve implantée en  $x$ .

$$E\{e^{-\lambda Q_x(B)} e^{-\mu Q_x(B')} | \mu(dx)=1\} = \sum_{m=0}^{\infty} P(M(x)=m) E\{e^{-\lambda Q_x(B)} e^{-\mu Q_x(B')} | \mu(dx)=1 \text{ et } M(x)=m\} \quad (3)$$

Si  $M(x)=m$ , la salve centrée en  $x$  possède  $m$  points  $y_1, y_2, \dots, y_m$  implantés par rapport au germe; ces  $m$  points de quantités de métal respectives  $q_1, q_2, \dots, q_m$  peuvent appartenir soit à  $B$ , soit à  $B'$ , soit à  $B \cap B'$ , ou alors ni à  $B$ , ni à  $B'$ . Un point  $y_i$  de la salve appartiendra donc à ces différents domaines avec les probabilités suivantes:

$$\begin{aligned} y_i \in B/B' & \text{ avec une probabilité } F(B/B'_{-x}) = F(B_{1-x}) \\ y_i \in B \cap B' & \text{ avec une probabilité } F(B \cap B'_{-x}) = F(B_{2-x}) \\ y_i \in B'/B & \text{ avec une probabilité } F(B'/B_{-x}) = F(B_{3-x}) \\ y_i \notin B \text{ et } y_i \notin B' & \text{ avec une probabilité } 1 - F(B_{1-x}) - F(B_{2-x}) - F(B_{3-x}) \end{aligned}$$

Cependant,  $Q_x(B)$  et  $Q_x(B')$  peuvent également s'exprimer en fonction de ces différents domaines.

$$\begin{cases} B = (B'/B) \cup (B \cap B') & Q_x(B) = Q_x(B_1) + Q_x(B_2) \\ B' = (B/B') \cup (B \cap B') & Q_x(B') = Q_x(B_3) + Q_x(B_2) \end{cases}$$

et alors:

$$e^{-\lambda Q_x(B)} e^{-\mu Q_x(B')} = e^{-\lambda Q_x(B_1) - (\lambda + \mu) Q_x(B_2) - \mu Q_x(B_3)}$$

Ainsi, la contribution d'un point de la salve à  $Q_x(B)$  et  $Q_x(B')$  exprimée en transformée de Laplace est alors:

$$\begin{aligned} \phi_o(\lambda, \mu) &= F(B_{1-x}) \varphi(\lambda) + F(B_{2-x}) \varphi(\lambda + \mu) + F(B_{3-x}) \varphi(\mu) + (1 - \sum_{i=1}^3 F(B_{i-x})) \\ &= 1 + F(B_{-x}) (\varphi(\lambda) - 1) + F(B'_{-x}) (\varphi(\mu) - 1) \end{aligned}$$

avec  $\varphi(\lambda) = E[e^{-\lambda q}]$  la transformée de Laplace de la quantité de métal d'une particule d'un nuage.

Et en raison de l'indépendance conditionnelle des  $m$  points de la salve, on obtient alors:

$$E\left\{e^{-\lambda Q_x(B)} e^{-\mu Q_x(B')} \mid \mu(dx)=1, M(x)=m\right\} = [\phi_o(\lambda, \mu)]^m$$

En reportant cette expression dans (3):

$$E\left\{e^{-\lambda Q_x(B)} e^{-\mu Q_x(B')} \mid \mu(dx)=1\right\} = H[\phi_o(\lambda, \mu)]$$

Et en reportant cette valeur dans (2), nous obtenons alors  $\phi_x(\lambda, \mu)$

$$\phi_x(\lambda, \mu) = (1 - \theta_G dx) + \theta_G dx H[\phi_o(\lambda, \mu)] + o(dx)$$

$$\simeq \exp -\theta_G dx(1 - H[\phi_o(\lambda, \mu)])$$

Puis en effectuant le produit des  $\phi_x(\lambda, \mu)$  pour tout  $dx$  de  $R$ , d'après (1), on trouve la transformée de Laplace de  $[Q(B), Q(B')]$ .

$$\phi(\lambda, \mu) = e^{-\theta_G \int (1 - H[\phi_o(\lambda, \mu)]) dx}$$

ANNEXE V

CALCUL DE LA COVARIANCE

$$\text{Cov}[Q(B), Q(B')]$$

$$\text{Cov}(Q(B), Q(B')) = E\{Q(B) \cdot Q(B')\} - E\{Q(B)\} E\{Q(B')\}$$

$$\phi(\lambda, \mu) = E\left\{e^{-\lambda Q(B)} e^{-\mu Q(B')}\right\}$$

$$\frac{\partial \phi^2}{\partial \mu \partial \lambda} (0, 0) = E\{Q(B) \cdot Q(B')\}$$

Pour développer les calculs, considérons  $\psi(\lambda, \mu) = \ln \phi(\lambda, \mu)$ . Calculons les dérivées partielles de  $\psi(\lambda, \mu)$  par rapport à  $\lambda$  et par rapport à  $\mu$ .

$$\frac{\partial \psi(\lambda, \mu)}{\partial \lambda} = \frac{\partial \phi(\lambda, \mu)}{\partial \lambda} \frac{1}{\phi(\lambda, \mu)} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \psi(\lambda, \mu)}{\partial \mu} = \frac{\partial \phi(\lambda, \mu)}{\partial \mu} \frac{1}{\phi(\lambda, \mu)}$$

Or, comme  $\phi(0, 0) = 1$ , ces dérivées partielles en  $\lambda = 0$  et  $\mu = 0$  s'écrivent alors simplement:

$$\frac{\partial \psi(0, 0)}{\partial \lambda} = \frac{\partial \phi(0, 0)}{\partial \lambda} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \psi(0, 0)}{\partial \mu} = \frac{\partial \phi(0, 0)}{\partial \mu} \quad (2)$$

Maintenant calculons la dérivée en  $\lambda$  et en  $\mu$  de  $\psi(\lambda, \mu)$  en  $\lambda = 0$  et  $\mu = 0$ ,

$$\frac{\partial^2 \phi(\lambda, \mu)}{\partial \lambda \partial \mu} = \frac{\partial^2 \psi(\lambda, \mu)}{\partial \lambda \partial \mu} \phi(\lambda, \mu) + \frac{\partial \phi(\lambda, \mu)}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial \phi(\lambda, \mu)}{\partial \mu} \frac{1}{\phi(\lambda, \mu)}$$

$$\frac{\partial^2 \phi(0, 0)}{\partial \lambda \partial \mu} = \frac{\partial^2 \psi(0, 0)}{\partial \lambda \partial \mu} + \frac{\partial \phi(0, 0)}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial \phi(0, 0)}{\partial \mu}$$

et d'après (2):

$$\frac{\partial^2 \phi(0, 0)}{\partial \lambda \partial \mu} = \frac{\partial^2 \psi(0, 0)}{\partial \lambda \partial \mu} + \frac{\partial \psi(0, 0)}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial \psi(0, 0)}{\partial \mu}$$

Les dérivées partielles  $\frac{\partial^2 \psi(\lambda, \mu)}{\partial \lambda \partial \mu}$ ,  $\frac{\partial \psi(\lambda, \mu)}{\partial \lambda}$  et  $\frac{\partial \psi(\lambda, \mu)}{\partial \mu}$  se calculent facilement à partir de l'expression de  $\phi(\lambda, \mu)$  obtenue en Annexe IV; leurs calculs font intervenir  $-\frac{\partial \phi(\lambda)}{\partial \lambda}$  qui, en  $\lambda=0$ , est la moyenne de  $q$  la quantité de métal d'une particule d'un nuage:  $E(q) = -\phi'(0)$ , et  $\frac{\partial^2 \phi(0)}{\partial \lambda \partial \mu}$  qui vaut  $E(q^2)$ .

$$\psi(\lambda, \mu) = -\theta_G \int [1 - H[\Phi_0(\lambda, \mu)]] dx$$

Or, nous obtenons en dérivant:

$$\frac{\partial \psi(0,0)}{\partial \lambda} = -\theta_G \int H'(1) E(q) [F(B_{1-x}) + F(B_{2-x})] dx = +\theta_G \bar{m} \bar{q} |B| = E(Q(B))$$

$$\frac{\partial \psi(0,0)}{\partial \mu} = -\theta_G \int H'(1) E(q) [F(B_{2-x}) + F(B_{3-x})] dx = E(Q(B'))$$

La covariance s'exprime alors:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Q(B), Q(B')) &= \frac{\partial^2 \psi(0,0)}{\partial \lambda \partial \mu} \\ &= \theta_G H'(1) \phi''(0) \int F(B_{2-x}) dx + \theta_G H''(1) \phi'(0)^2 \int F(B_{-x}) F(B'_{-x}) dx \end{aligned}$$

Or, d'après les résultats de l'Annexe IV, nous savons que:

$$\int F(B_{2-x}) dx = |B_2| = |B \cap B'|$$

La covariance vaut donc:

$$\text{Cov}[Q(B), Q(B')] = \theta_G H'(1) \phi''(0) |B \cap B'| + \theta_G H''(1) \phi'(0)^2 \int F(B_{-x}) F(B'_{-x}) dx$$

Si les deux domaines  $B$  et  $B'$  sont identiques, mais  $B' = B_h$ , c'est-à-dire qu'il est implanté à une distance  $h$  de  $B$ , alors:

$$|B \cap B'| = |B \cap B_h| = K(h) \quad \text{covariogramme géométrique de } B$$

$$\int F(B_{-x}) F(B_{h-x}) dx = \int g(u+h) K(u) du = g * K(h)$$

d'après le calcul 3 de l'Annexe III.

Dans ce cas, la covariance s'écrit:

$$\text{Cov}[Q(B), Q(B_h)] = \theta_G [H'(1) \varphi''(0) K(h) + H''(1) \varphi'(0)^2 g * K(h)]$$

Rappelons pour mémoire que:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\varphi'(0) = E(q) = \bar{q} \\ \varphi''(0) = (\bar{q}^2 + \sigma_q^2) \end{array} \right. \quad \text{quantité de métal moyenne d'une particule}$$
  
$$\left\{ \begin{array}{l} H'(1) = E(M) = \bar{m} \\ H''(1) = E(M(M-1)) \end{array} \right. \quad \text{nombre moyen de points par salves}$$

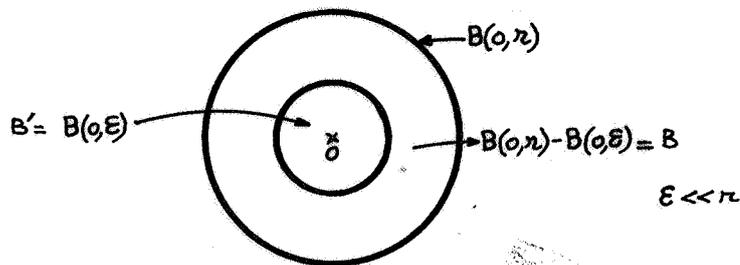
ANNEXE VI

CALCUL DE  $Q(r|0)$

A partir de l'expression (2) de II.7.2 et des résultats (1) de II.7.1 et (1) de II.7.2, nous avons:

$$P(N(B)=0|N(B')=1) = G(0,0) \frac{\int_{\mathbb{H}} [1-F(B_{-x}) - F(B'_{-x})] F(B'_{-x}) dx}{P[N(B')=1]} \quad (1)$$

Considérons maintenant deux domaines B et B' tels que:



La probabilité  $Q(r|0)$  s'exprime alors en terme de limite

$$Q(r|0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P[N(B) = 0 | N(B') = 1]$$

Calculons cette limite. Les différents éléments de calcul ne sont pas développés ici en détail; le lecteur souhaitant approfondir les développements les trouvera dans [1].

(i) puisque  $B \cup B' = B(0, r)$ , l'expression  $G(0,0)$  devient:

$$\begin{aligned} G(0,0) &= \exp - \theta_G \int (1-H[1-F(B_{-x})]) dx \\ &= P[N(B(0,r))] = 0 \quad \text{d'après [II.7.1].} \end{aligned}$$

(ii) Si  $F(x)$  admet une fonction de densité

$$\lim_{|B| \rightarrow 0} \frac{F(B_{-x})}{|B|} = f(x) \quad \text{donc} \quad \frac{F(B(0,\varepsilon)_{-x})}{B(0,\varepsilon)} \rightarrow f(x) \quad \text{quand } \varepsilon \rightarrow 0$$

(iii) Nous savons d'après II.7.1 (2) que:

$$P(N(B) = 1) = G(0) \int_{\mathbb{H}} H'[1-F(B_{-x})] F(B_{-x}) dx$$

Or on peut démontrer que:

$$P[N(dx)=1] \simeq \theta_G G'(1) + o(dx)$$

donc la limite de  $P(N(B(0,\varepsilon))=1)$  quand  $\varepsilon$  devient petit peut s'obtenir à partir de cette relation. Si  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $B(0,\varepsilon) \rightarrow dx$  et alors:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P(N(B(0,\varepsilon))) = \theta_G H'(1) \cdot \text{Mes}(B(0,\varepsilon))$$

(iv) La limite de la probabilité (I) s'obtient alors en utilisant les résultats (i), (ii) et (iii). Ainsi

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P[N(B(0,r) | N(B(0,\varepsilon))=1)] = \frac{P[N(B(0,r))=0] \cdot \int H' [1-F(\frac{B(0,r)}{x})] f(x) dx}{H'(1)}$$

c'est-à-dire  $B(0,\varepsilon) \rightarrow dx$

$$= Q(r|0)$$

CALCUL DE  $F(B_{-x})$

$$F(B_{-x}) = \int_{B_{-x}} f(x) dx$$

$f(x)$  est isotrope  $F(B_{-x}) = F(B_x)$

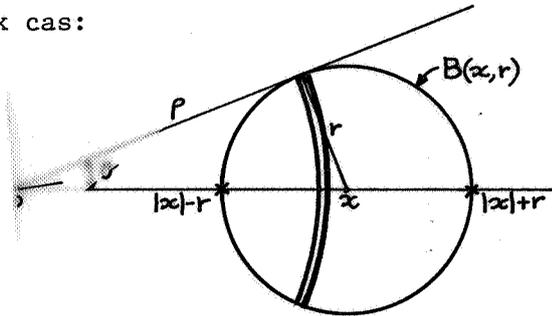
avec  $f(x) = \frac{e^{-|x|^2/2\sigma^2}}{2\pi\sigma^2}$ .

Posons  $|x| = \rho$ . Alors  $f_o(\rho) = \frac{e^{-\rho^2/2\sigma^2}}{\sigma^2} \rho$

Si  $B$  est un cercle de centre  $O$  et de rayon  $r$ , alors  $B_x$  est un cercle de centre  $x$  et de rayon  $r$ . (Référence [1]).

Considérons deux cas:

(1)  $|x| \geq r$

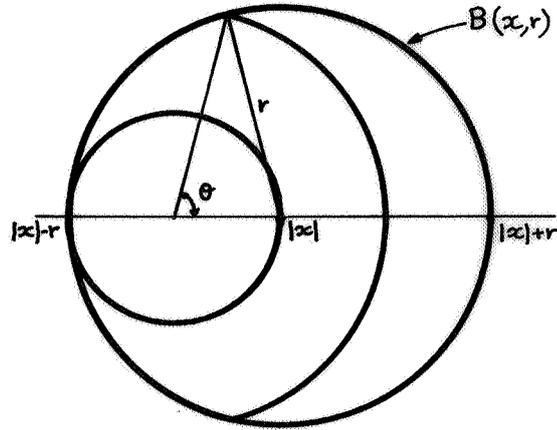


$$\theta = \text{Arcos} \frac{|x|^2 + \rho^2 - r^2}{2|x|\rho}$$

$$F[B_x(O, r)] = F[B(x, r)] = 2 \int_{|x|-r}^{|x|+r} \int_0^\theta \frac{e^{-\rho^2/2\sigma^2}}{2\pi\sigma^2} \rho d\rho d\theta$$

$$F[B(x, r)] = \frac{1}{\pi} \int_{|x|-r}^{|x|+r} \text{Arcos} \frac{|x|^2 + \rho^2 - r^2}{2|x|\rho} f_o(\rho) d\rho$$

(2)  $|x| < r$



$$F[B(x,r)] = \int_0^{r-|x|} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-\rho^2/2\sigma^2}}{2\pi\sigma^2} \rho \, d\rho \, d\theta + 2 \int_{r-|x|}^{r+|x|} \int_0^{\arccos \frac{\rho^2+|x|^2-r^2}{2|x|\rho}} \frac{e^{-\rho^2/2\sigma^2}}{2\pi\sigma^2} \rho \, d\rho \, d\theta$$

$$F[B(x,r)] = \int_0^{r-|x|} f_0(\rho) \, d\rho + \int_{r-|x|}^{r+|x|} \frac{1}{\pi} f_0(\rho) \operatorname{Arcos} \frac{\rho^2+|x|^2-r^2}{2|x|\rho} \, d\rho$$

ANNEXE VIII

CALCUL DE  $\int g(h)K(h) dh$

$$\int g(h) K(h) dh = \frac{1}{4\pi\sigma^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\rho^2/4\sigma^2} K(\rho) d\rho$$

$K(\rho)$  est le covariogramme géométrique du cercle de rayon  $R$ ,  $K(\rho) = 0$  pour  $\rho \geq 2R$ : le domaine d'intégration peut alors être restreint. Et après un changement de variable adéquat, l'intégrale s'écrit:

$$\int g(h) K(h) dh = \frac{4R^4}{\sigma^2} (I_1 - I_2)$$

avec  $I_1 = \int_0^1 e^{-R^2 u^2 / \sigma^2} u \operatorname{Arcos} u du$

$$I_2 = \int_0^1 e^{-R^2 u^2 / \sigma^2} u \sqrt{1-u^2} du$$

I - Développement de  $I_1$ .

Développons l'exponentielle en série, et intégrons terme à terme:

$$I_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{R^2}{\sigma^2}\right)^n \int_0^1 u^{2n+1} \operatorname{Arcos} u du$$

ce qui donne alors:

$$I_1 = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{(-1)^N}{N! N!} \left(\frac{R^2}{\sigma^2}\right)^{N-1} \frac{\pi}{4} \frac{(2N-1)!!}{2^N}$$

avec  $(2N-1)!! = 1.3.5.7... (2N-1)$ .

II - Développement de  $I_2$ .

Développons l'exponentielle en série et intégrons après avoir effectué le changement de variable  $u = \sin \theta$ .

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{R^2}{\sigma^2}\right)^n \int_0^1 u^{2n+2} \sqrt{1-u^2} du \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{R^2}{\sigma^2}\right)^n \underbrace{\int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{2n+2} \cos^2\theta d\theta}_I
 \end{aligned}$$

$2I$  est en fait la représentation intégrale de la fonction Bêta,  $B\left(\frac{2n+3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ .

$I_2$  s'écrit alors:

$$I_2 = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{(-1)^{N-1}}{(N-1)!} \left(\frac{R^2}{\sigma^2}\right)^{N-1} \frac{1}{2} B\left(\frac{2N+1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

or

$$\begin{aligned}
 B\left(\frac{2N+1}{2}, \frac{3}{2}\right) &= \frac{\Gamma(2N+\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(N+2)} \\
 &= \frac{(2N-1)!! \pi}{2^{N+1} (N+1)!}
 \end{aligned}$$

$I_2$  devient alors:

$$I_2 = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{(-1)^{N-1}}{(N-1)!} \frac{(2N-1)!}{2^{N+2}} \frac{\pi}{(N+1)!}$$

III - Calcul de  $\int g(h) K(h) dh$ .

$$I_1 - I_2 = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{(-1)^{N-1}}{N!(N+1)!} \left(\frac{R^2}{\sigma^2}\right)^{N-1} \frac{\pi}{2^{N+2}} (2N-1)!!$$

L'intégrale vaut donc:

$$\int g(h) K(h) dh = (-1) R^2 \pi \sum_{N=1}^{\infty} \frac{(2N-1)!!}{2^N (N+1)!} \left(\frac{R^2}{\sigma^2}\right)^N \cdot \frac{1}{N!}$$

Développons les factoriels:

$$\begin{aligned}
 \frac{(2N-1)!!}{2^N} &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2N-1}{2} \\
 &= \alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n-1) \quad \text{avec } \alpha = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

$$(N+1)! = 1.2.3 \dots (N+1)$$

$$= \gamma(\gamma+1)(\gamma+2) \dots (\gamma+n-1) \text{ avec } \gamma = 2$$

ce qui donne exactement le développement de la fonction hypergéométrique confluente  $M(\alpha, \gamma, x)$  en effet.

$$M(\alpha, \gamma, x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n-1)}{\gamma(\gamma+1) \dots (\gamma+n-1)} \frac{x^n}{n!}$$

La définition et les propriétés de cette fonction sont données en Annexe IX. Nous obtenons finalement l'expression suivante:

$$\int g(h) K(h) dh = \begin{cases} R^2 \pi \left[ 1 - M\left(\frac{1}{2}, 2, -\frac{R^2}{\sigma^2}\right) \right] \\ R^2 \pi \left[ 1 - M\left(\frac{3}{2}, 2, \frac{R^2}{\sigma^2}\right) e^{-R^2/\sigma^2} \right] \end{cases}$$

ANNEXE IX

FONCTIONS HYPERGEOMETRIQUES CONFLUENTES OU FONCTIONS DE LAGUERRE
---

La fonction de Laguerre  $M(\alpha, \beta, x)$  ou  $F(\alpha, \beta, x)$  est définie par une série entière.

$$F(\alpha, \beta, x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n-1)}{\gamma(\gamma+1) (\gamma+n-1)} \frac{x^n}{n!}$$

Transformation de Kummer :  $M(a, b, z) = e^z M(b-a, b, -z)$

Représentation intégrale:  $M(a, b, z) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a) \Gamma(b-a)} \int_0^1 e^{zt} t^{a-1} (1-t)^{b-a-1} dt$

En particulier dans le paragraphe IV.2.3

$$M\left(\frac{3}{2}, 2, z\right) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 e^{zt} \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{1-t}} dt$$

Quelques relations de récurrence:

$$F\left(\frac{3}{2}, 1, z\right) = F(-0.5, 1, z) + 2z F(0.5, 1, z)$$

$$F(0.5, 2, z) = \frac{(0.5+z) F(0.5, 1, z) - 0.5 F(1.5, 1, z)}{0.5 z}$$

$$F\left(\frac{3}{2}, 2, z\right) = \frac{F(3/2, 1, z) - 0.5 F(1/2, 2, z)}{(0.5 + z)}$$

Quelques références bibliographiques:

- [1] AIREY J.R. "The confluent hypergeometric function", Report of the British association for the advancement of science, 1926, pp. 276-294, 1927, pp. 220-244.
- [2] MATHERON G. "Les variables régionalisées et leur estimation", Masson et Cie, 1965, pp. 291-294.
- [3] Handbook of Mathematical Functions, US Department of Commerce, National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series, 55, édité par M. Abramowitz et L.A. Stegun.

QUELQUES ABAQUES

1) Référence [3].

x	F(-0.5,1.,X)	F(0.5,1.,X)
0.1	9.4936442 E-01	1.0519282
0.2	8.9741399 E-01	1.1079356
0.3	8.4407999 E-01	1.1683788
0.4	7.8928921 E-01	1.2336474
0.5	7.3286360 E-01	1.3041668
0.6	6.7501992 E-01	1.3804019
0.7	6.1536936 E-01	1.4628604
0.8	5.5391714 E-01	1.5520971
0.9	4.9056201 E-01	1.6487185
1.0	4.2519583 E-01	1.7533877
2.0	-3.6900042 E-01	3.4415239
3.0	-1.5616315	7.3801013
4.0	-3.5187312	1.6843984
5.0	-7.0143797	4.0078446 E+01
6.0	-1.3733318 E+01	9.8033340 E+01
7.0	-2.7432050 E+01	2.4433254 E+02
8.0	-5.6658271 E+01	6.1706403 E+02
9.0	-1.2119637 E+01	1.5736049 E+03
10.0	-2.6750359 E+02	4.0427554 E+03

2) Référence [1].

x	M(3/2,2,x)	x	M(3/2,2,x)	x	M(3/2,2,x)
0.00	1.00000	0.70	1.71502	2.00	4.97779
0.02	1.01513	0.75	1.78423	2.20	5.89913
0.04	1.03051	0.80	1.85647	2.80	9.89261
0.06	1.04614	0.85	1.93188	3.00	11.7796
0.08	1.06205	0.90	2.01060	3.50	18.3042
0.10	1.07822	1.00	2.17858	4.00	28.5973
0.15	1.11985	1.10	2.36173	4.50	44.8869
0.20	1.16326	1.20	2.56144	5.00	70.7383
0.25	1.20854	1.30	2.77929	5.00	70.7383
0.30	1.25576	1.40	3.01697	5.50	111.892
0.35	1.30502	1.50	3.27635	6.00	177.439
0.40	1.35640	1.60	3.55949	6.50	282.195
0.45	1.41000	1.70	3.86861	7.00	449.842
0.50	1.46593	1.80	4.20620	7.50	718.562
0.55	1.52428	1.90	4.57493	8.00	1149.91
0.60	1.58517	2.40	7.00015		
0.65	1.64871	2.60	8.31685		

ANNEXE X

$$\text{CALCUL DE } \iint F(B_{-x}) F(B_{h-y}) \text{Cov}_\theta(x-y) dx dy$$

Soit I cette intégrale, et après un changement de variable:

$$I = \iint F(B_{-x}) F(B_{h-u-x}) \text{Cov}_\theta(u) dx du$$

En utilisant le résultat (3) de l'Annexe III:

$$\int F(B_{-x}) F(B_{h-u-x}) dx = \int g(t+h-u) K(t) dt$$

I s'écrit alors:

$$\begin{aligned} I &= \iint g(h-u+t) \text{Cov}_\theta(u) K(t) du dt \\ &= \int \text{Cov}_\theta * g(h+t) K(t) dt \end{aligned}$$

ce qui donne, en appliquant l'algorithme de Cauchy:

$$I = \iint_{B_{-x} B_h} \text{Cov}_\theta * g(x-y) dx dy.$$

CALCUL DE LA VARIANCE RELATIVE D'ECHANTILLONNAGE  
D'APRES ENGELS, INGAMELLS ET SWITZER

NOTATIONS

K, H et L sont les teneurs moyennes respectives du minerai, du constituant riche et du constituant pauvre.

u est la dimension des particules.

$\rho_H$  et  $\rho_L$  sont les masses volumiques respectives du constituant riche et du constituant pauvre.

N est le nombre moyen de particules dans l'échantillon de masse w.

Z est le nombre moyen de particules dans ce même échantillon.

$p = \frac{N-Z}{N}$  la proportion de constituant pauvre,  $q = \frac{Z}{N}$  la proportion de constituant riche.

$p_w$  et  $q_w$  les proportions en masse.

$s^2$  est la variance de M résultats d'analyse d'échantillons de masse w.

$$R^2 = 10^4 \frac{s^2}{K^2} \text{ est alors la variance relative.}$$

c est la contribution d'un grain de constituant riche, au résultat d'analyse d'un échantillon de masse w.

INTERPRETATION DE c

$$\bar{K} = p_w L + q_w H = p_w L + c Z$$

or la gangue est l'élément majeur, donc  $p_w \simeq 1$  et ainsi:

$$\underline{K = L + c Z}$$

Considérons maintenant M échantillons de masse w, de teneur  $x_i$ , contenant  $Z_i$  grains.

$$x_i = L + c Z_i \Rightarrow \bar{x} = L + c Z \quad \text{avec } \bar{x} = \frac{1}{M} \sum x_i \\ \text{et } Z = \frac{1}{M} \sum Z_i$$

La variance des M résultats d'analyse vaut alors:

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{M-1} = c^2 \frac{\sum (Z_i - Z)^2}{M-1}$$

Les particules riches sont en faible proportion. Les auteurs font alors l'hypothèse, qui apparaît légitime en première approximation, que le nombre de particules riches dans un échantillon de masse  $w$  est une variable de Poisson de paramètre  $Z$ . La variance  $s^2$  s'écrit alors:

$$s^2 = c^2 Z$$

La constante  $c$  et le nombre moyen de grains riches peuvent donc être déterminés expérimentalement.

$$\left. \begin{array}{l} \bar{x} = L + cZ \\ s^2 = c^2 Z \end{array} \right\} \quad c = \frac{s^2}{\bar{x} - L} \quad \text{et} \quad Z = \frac{(\bar{x} - L)^2}{s^2}$$

#### DETERMINATION DE LA CONSTANTE D'ECHANTILLONNAGE $K_S$

La masse  $w$  de l'échantillon se calcule immédiatement

$$w = w_L + w_H = (N-Z) \rho_L u^3 + Z \rho_H u^3$$

Calculons la variance relative  $R^2 = 10^4 s^2 / K^2$ ; en utilisant les résultats  $K = L + cZ$  et  $s^2 = c^2 Z$ , on obtient alors que:

$$R^2 = \frac{s^2}{K^2} 10^4 = \frac{(K-L)^2}{Z K^2} 10^4$$

Or, puisque  $R^2 = \frac{K_S}{w}$ , la constante  $K_S$  s'obtient facilement:

$$K_S = \frac{s^2}{K^2} w = \frac{(K-L)^2}{K^2} u^3 (\rho_H - \rho_L + \frac{N}{Z} \rho_L) 10^4$$

En exprimant les proportions en nombre en fonction des proportions en masse, sachant que  $K = \frac{p}{w} L + \frac{q}{w} H$

$$\frac{N}{Z} = \frac{\rho_H (H-K) + \rho_L (K-L)}{\rho_L (K-L)}$$

on obtient la constante  $K_S$ :

$$K_S = \frac{(K-L) (H-L) u^3 \rho_H}{K^2} 10^4$$