Cahiers de Géostatistique, Fascicule 1
Compte–rendu des Journées de Géostatistique,
6–7 Juin 1991, Fontainebleau, pp. 137–156

SUR LES LOIS INDÉFINIMENT DIVISIBLES CONTINUES OU ENTIÈRES DONT LA MESURE CANONIQUE DE PAUL–LÉVY ADMET UNE DENSITÉ OU UNE SUITE DÉCROISSANTE - LEUR CARACTÉRISATION - LEUR RELATION AVEC CERTAINS PROCESSUS OU CHAINES MARKOVIENNES

Ph. FORMERY
Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris
60 boulevard St–Michel
Paris 6
France

TABLE DES MATIERES

SOMMAIRE ET INTRODUCTION

Les pages qui suivent se proposent d'introduire, de caractériser, d'illustrer par une chaîne de Markov une classe particulière de lois indéfiniment divisibles.

Lois continues, par leur transformée de Laplace $\varphi(\lambda)$, dont la mesure canonique de Paul-Lévy admet une densité décroissante. Lois entières, par leur fonction génératrice G(s), dont la mesure de Paul-Lévy relève d'une suite décroissante.

- Cette classe est introduite par la condition que les fonctions associées à $p \in [1, 0]$ $(q = 1-p)$ et à φ ou à G :

$$(p, \varphi) \rightarrow \varphi_p(\lambda) = \frac{\varphi(\lambda)}{\varphi(p\lambda)} \;;\; (p, G) \rightarrow G_p(s) = \frac{G(s)}{G(q+ps)}$$

soient des lois indéfiniment divisibles.

- La classe est caractérisée de façon simple sous ses aspects continu ou entier.

- Au sein de cette classe, la relation $\varphi(\lambda) \rightarrow G(s) = \varphi(1-s)$ transforme un élément continu en un élément entier.

- Les fonctions introduites $\varphi_p(\lambda)$ et $G_p(s)$ apparaissent aussi comme la solution générale de deux équations fonctionnelles (E_1) et (E_2).

(E_1) et (E_2) traduisent des relations rencontrées dans la pratique entre les valeurs d'un processus markovien X_t ou d'une chaîne de Markov N_t.

- On examine un problème simple de chaîne de Markov dont les régimes limites sont en correspondance bijective avec les éléments de la classe en question, dont ils donnent en outre, ainsi que de la fonction génératrice $G_p(s)$, une représentation assez concrète.

- Les lois de ***Sichel*** et de ***Bessel*** appartiennent à cette classe de lois indéfiniment divisibles.

A partir des notions de fonction complètement monotone et de loi indéfiniment divisible positive que l'on pourra trouver dans W. Feller (Tome 2 - XIII p. 439 et suiv. et Tome 1 - XII p. 290) ainsi que dans les *Exercices sur les lois stables et les processus à accroissements indépendants* de G. Matheron, janvier 1969 et, par une démarche dont le but n'apparaît pas immédiatement, on se propose d'introduire et de caractériser la classe des lois indéfiniment divisibles dont la mesure de Paul-Lévy admet une densité ou une suite décroissante.

I - NOTIONS, NOTATIONS, LOIS POSITIVES

- ***Fonction complètement monotone (notée CM)***

Une fonction $\theta(\lambda)$ définie pour $\lambda > 0$ est dite complètement monotone si elle admet des dérivées de tous les ordres, telles que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad \lambda > 0 \quad (-1)^n\, \theta^{(n)}(\lambda) \geq 0$$

La forme générale d'une fonction complètement monotone est donnée par le théorème de Bernstein :

$$\lambda > 0 \qquad \theta(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, dm(t)$$

où m est une mesure non nécessairement finie.

Si en outre $\theta(0) = 1$, $\theta(\lambda)$ est la transformée de Laplace d'une variable positive T :

$$\lambda \geq 0 \qquad \theta(\lambda) = E(e^{-\lambda T})$$

- ***Loi indéfiniment divisible positive (notée ID)***

La loi $\varphi(\lambda)$ d'une variable aléatoire positive est dite indéfiniment divisible si :

$\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ $\quad \varphi^{1/n}$ est la transformée d'une variable aléatoire.

La forme générale des lois indéfiniment divisibles positives est donnée par un théorème de Paul-Lévy et W. Feller :

$\lambda > 0 \qquad -\dfrac{\varphi'(\lambda)}{\varphi(\lambda)}$ est une fonction complètement monotone (CM)

soit en précisant :

$$-\frac{\varphi'(\lambda)}{\varphi(\lambda)} = \int_0^\infty e^{-\lambda x}\, dP(x) \qquad \text{ou}$$

$$-\operatorname{Log}\, \varphi(\lambda) = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-\lambda x}}{x}\, dP(x)$$

P étant une mesure (exempte d'atome à l'origine), dite mesure canonique ou mesure de Paul-Lévy. L'existence de $\varphi(\lambda)$ équivaut à la condition $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dP(x)}{x} < \infty$.

- ***Fonction*** $\psi(\lambda)$

$\varphi(\lambda)$ étant la transformée de Laplace d'une variable aléatoire positive — c'est-à-dire une fonction complètement monotone non supposée ***indéfiniment divisible*** jusqu'à nouvel ordre — on lui fait correspondre la fonction positive ψ, définie par

$$\lambda > 0 \qquad \boxed{-\frac{\varphi'(\lambda)}{\varphi(\lambda)} = \frac{\psi(\lambda)}{\lambda}}$$

On a nécessairement :

$$\boxed{\lim_{\lambda \to 0} \psi(\lambda) = \psi(0) = 0}$$

D. Si μ est la mesure de probabilité d'une variable aléatoire

$$\lambda \geq 0 \qquad \varphi(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} \, d\mu(x)$$

$$\lambda > 0 \qquad -\varphi'(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} \, x \, d\mu(x)$$

$$-\lambda\varphi'(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} \, \lambda x \, d\mu(x)$$

Comme $(\lambda x)e^{-\lambda x}$ est majorée par 1/e, le théorème de la convergence dominée donne :

$$\lim_{\lambda \to 0} \{ -\lambda\varphi'(\lambda) \} = \int_0^\infty \lim_{\lambda \to 0} (\lambda x e^{-\lambda x}) \, d\mu(x) = 0$$

$$\lim_{\lambda \to 0} \psi(\lambda) = \lim_{\lambda \to 0} \left(-\lambda \frac{\varphi'(\lambda)}{\varphi(\lambda)} \right) = \lim_{\lambda \to 0} \{ -\lambda\varphi'(\lambda) \} = 0 \quad \blacksquare$$

- ***Fonction*** $\varphi_p(\lambda) = \dfrac{\varphi(\lambda)}{\varphi(\lambda p)}$

$p \in [0, 1]$, à p et à φ, on fait également correspondre la fonction :

$$\varphi_p(\lambda) = \frac{\varphi(\lambda)}{\varphi(\lambda p)} \qquad \varphi_0(\lambda) = \varphi(\lambda) \qquad \varphi_1(\lambda) = 1$$

On a :

$$-\frac{\varphi'_p(\lambda)}{\varphi_p(\lambda)} = -\frac{\varphi'(\lambda)}{\varphi(\lambda)} + p\,\frac{\varphi'(\lambda p)}{\varphi(\lambda p)} = \frac{\psi(\lambda)}{\lambda} - p\,\frac{\psi(\lambda p)}{\lambda p}$$

$$\boxed{-\frac{\varphi'_p(\lambda)}{\varphi_p(\lambda)} = \frac{\psi(\lambda) - \psi(\lambda p)}{\lambda}}$$

dont on calcule la dérivée par rapport à p :

$$\frac{\partial}{\partial p}\left\{-\frac{\varphi'_p(\lambda)}{\varphi_p(\lambda)}\right\} = -\psi'(\lambda p)$$

$$\boxed{\psi'(\lambda) = \lim_{p\to 1}\left\{\frac{-1}{1-p}\,\frac{\varphi'_p(\lambda)}{\varphi_p(\lambda)}\right\}}$$

- ***Hypothèse : $\varphi_p(\lambda)$ est indéfiniment divisible lorsque p est voisin de 1***
  Forme de $\psi(\lambda)$ et de $\varphi(\lambda)$

On suppose que, pour tout p voisin de 1 : $\forall\ p \in [1-\varepsilon,\ 1]$ $\varphi_p(\lambda)$ est indéfiniment divisible, c'est-à-dire que $-\dfrac{\varphi'_p(\lambda)}{\varphi_p(\lambda)}$ est complètement monotone. Par stabilité, pour la convergence d'une fonction complètement monotone, il en est de même de $\psi'(\lambda)$ dont la forme est :

$$\psi'(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, dm(t)$$

puis, comme $\psi(0) = 0$

$$\psi(\lambda) = \int_0^\infty \frac{1-e^{-\lambda t}}{t}\, dm(t) \qquad \int_1^\infty \frac{dm(t)}{t} < \infty$$

que l'on transforme par le théorème de Fubini :

$$\psi(\lambda) = \lambda \int_0^\infty \frac{dm(t)}{t} \int_0^t e^{-\lambda x}\, dx = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda x}\, dx \int_x^\infty \frac{dm(t)}{t}$$

puis, en posant

$$h(x) = \int_x^\infty \frac{dm(t)}{t}$$

et désignant pat P la mesure de densité h

$$P = h \,.\, dx$$

$$-\frac{\varphi'(\lambda)}{\varphi(\lambda)} = \frac{\psi(\lambda)}{\lambda} = \int_0^\infty e^{-\lambda x}\, h(x)\, dx$$

$$-\operatorname{Log}\, \varphi(\lambda) = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-\lambda x}}{x}\, dP(x)$$

ce qui montre que φ est une loi indéfiniment divisible, dont la mesure canonique P a pour densité une fonction h(x), décroissante, tendant vers 0 à l'infini, non nécessairement bornée à l'origine. Inversement toute loi indéfiniment divisible dont la mesure canonique a pour densité une fonction décroissante tendant vers 0 à l'infini peut être écrite de la façon précédente. La formule :

Proposition P_1 (Caractérisation)

$-\dfrac{\varphi'(\lambda)}{\varphi(\lambda)} = \dfrac{\psi(\lambda)}{\lambda}$ avec $\psi(\lambda) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{1 - e^{-\lambda t}}{t}\, dm(t)$ caractérise les lois indéfiniment divisibles φ, dont la mesure canonique a une densité décroissante, notées (IDD).

Il en résulte que :

$$\frac{\psi(\lambda p)}{\lambda p} = \int_0^\infty e^{-\lambda p x}\, h(x)\, dx = \frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-\lambda x}\, h\left(\frac{x}{p}\right) dx$$

$$-\frac{\varphi'_p(\lambda)}{\varphi'_p(\lambda)} = \frac{\psi(\lambda) - \psi(\lambda p)}{\lambda} = \int_0^\infty e^{-\lambda x}\left[h(x) - h\left(\frac{x}{p}\right)\right] dx$$

h étant une fonction décroissante, et $p \leq 1$ $h(x) - h(\frac{x}{p})$ est une fonction positive et $\varphi_p(\lambda)$ est donc une loi indéfiniment divisible. D'où

Proposition P_2 (Résultat de synthèse concernant la fonction φ_p).

Si • $\varphi_p(\lambda) = \dfrac{\varphi(\lambda)}{\varphi(\lambda p)}$ est indéfiniment divisible lorsque p est voisin de 1, alors

• $\varphi(\lambda)$ est une loi indéfiniment divisible, dont la mesure canonique est à densité décroissante h(x). Cette propriété entraîne à son tour que :

• $\varphi_p(\lambda)$ est une loi indéfiniment divisible pour tout $p \in [0,1]$.

La proposition exprime que, si et seulement si $\varphi(\lambda)$ est (IDD) il existe une loi (ID) d'une variable X_p telle que :

$$\forall\ p \in [0,1] \qquad \boxed{X \overset{\mathcal{L}}{\equiv} pX + X_p}$$

les variables écrites au second membre étant supposées indépendantes.

II - LOIS ENTIÈRES

La loi d'une variable aléatoire positive entière N est plutôt représentée par sa fonction génératrice :

$$s \in [0,1] \qquad G(s) = E(s^N) = \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n)\ s^n \qquad G(0) = P(N=0)$$

$$\varphi(\lambda) = E(e^{-\lambda N}) = G(e^{-\lambda})$$

- ***Lois indéfiniment divisibles entières : G est (ID) si $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$ $G^{1/n}(s)$ est une fonction génératrice***

Si P est une mesure entière $P = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\ \varepsilon_n$, la formule générale de Paul-Lévy et Feller donne :

$$-\frac{\varphi'(\lambda)}{\varphi(\lambda)} = e^{-\lambda}\ \frac{G'(e^{-\lambda})}{G(e^{-\lambda})} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\ e^{-n\lambda}$$

$$s \in [0,1[\qquad \frac{G'(s)}{G(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\ s^{n-1}$$

$$s \in [0,1] \qquad \mathrm{Log}\ \frac{G(s)}{G(0)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}\ s^n \qquad a_n > 0 \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} < \infty$$

Afin d'introduire les lois indéfiniment divisibles entières dont la mesure de Paul–Lévy est engendrée par une suite décroissante a_n, nous suivons le même plan que pour les lois positives quelconques.

- ***Fonctions*** $\gamma(\lambda)$

G(s) étant la fonction génératrice d'une variable entière, ***non supposée indéfiniment divisible***, posant $a = \dfrac{G'(0)}{G(0)} > 0$, on lui fait correspondre la fonction positive $\gamma(s)$ définie par :

$s \in [0,1[$ $$\boxed{\frac{G'(s)}{G(s)} = a\frac{1-\gamma(s)}{1-s}} \qquad \boxed{\gamma(0) = 0}$$

On a nécessairement $$\boxed{\lim_{s\to 1} \gamma(s) = \gamma(1) = 1}$$

D. $s \in [0,1[$ $$G'(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n\ P(N=n)\ s^{n-1}$$

$$(1-s)\ G'(s) = \frac{1}{s}\sum_{n=1}^{\infty}(1-s)n\ s^n\ P(N=n)$$

or $\quad s^n = e^{n\ \mathrm{Log}\ s} \leq e^{-n(1-s)} \qquad n(1-s)\ s^n \leq n(1-s)\ e^{-n(1-s)} \leq \dfrac{1}{e}$

et le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{s\to 1}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} n(1-s)\ s^n\ P(N=n)\right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{s\to 1} \{n(1-s)\ s^n\ P(N=n)\} = 0$$

$$\lim_{s\to 1}\left\{(1-s)\ \frac{G'(s)}{G(s)}\right\} = a\ \lim_{s\to 1}\ [1-\gamma(s)] = 0$$

$$\lim_{s\to 1} \gamma(1) = 1 \quad \blacksquare$$

- ***Fonctions*** $G_p(s) = \dfrac{G(s)}{G(q+ps)}$

Si $p \in [0,1]$ et $q = 1-p$, à p et à la fonction génératrice G, on fait correspondre la fonction

$$G_p(s) = \frac{G(s)}{G(q+ps)} \qquad G_0(s) = G(s) \qquad G_1(s) = 1$$

$$\frac{G'_p(s)}{G_p(s)} = \frac{G'(s)}{G(s)} - p\,\frac{G'(q+ps)}{G(q+ps)} = a\left\{\frac{1-\gamma(s)}{1-s} - p\,\frac{1-\gamma(q+ps)}{1-(q+ps)}\right\}$$

$$\boxed{\frac{G'_p(s)}{G_p(s)} = a\,\frac{\gamma(q+ps)-\gamma(s)}{1-s}}$$

dont la dérivée par rapport à p . (q = 1-p) est

$$\frac{\partial}{\partial p}\left\{\frac{G'_p(s)}{G_p(s)}\right\} = -\,a\gamma'(q+ps)$$

$$\boxed{\gamma'(s) = \frac{1}{a}\lim_{p\to 1}\left\{\frac{1}{1-p}\,\frac{G'_p(s)}{G_p(s)}\right\}}$$

- ***Hypothèse :*** $\varphi_p(s)$ ***est indéfiniment divisible lorsque p est voisin de 1***

Forme de $\gamma(s)$ ***et de G(s)***

On suppose que, pour tout p voisin de 1 : $\forall\ p \in [1-\varepsilon, 1]$, $G_p(s)$ est indéfiniment divisible, c'est-à-dire que $\frac{G'_p(s)}{G_p(s)}$ est une série entière positive. Par passage à la limite lorsque p tend vers 1, il en est de même de $\gamma'(s)$. Comme, par ailleurs $\gamma(0) = 0$ et $\gamma(1) = 1$

γ (s) est la fonction génératrice $E(s^K)$ d'une variable aléatoire strictement positive

On cherche le développement de $\frac{G'(s)}{G(s)}$ et celui de $\mathrm{Log}\frac{G(s)}{G(0)}$ au moyen de cette variable.

Lemme L_3

$$\boxed{s \in [0,1[\qquad \frac{1-\gamma(s)}{1-s} = \sum_{k=0}^{\infty} P(K>k)s^k}$$

D. $$\sum_{k=0}^{\infty} P(K > k)s^k = \sum_{k=0}^{\infty} s^k \sum_{n=k+1}^{\infty} P(K = n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(K = n) \sum_{k=0}^{n-1} s^k$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P(K = n)\frac{1 - s^n}{1 - s} = \sum_{n=0}^{\infty} P(K = n)\frac{1 - s^n}{1 - s} = \frac{1 - \sum_{n=0}^{\infty} P(K = n)s^n}{1 - s} = \frac{1 - \gamma(s)}{1 - s}$$ ■

Lemme L₄. Soit K' la variable aléatoire

$$K' = \sum_{i=1}^{K} Y_i$$

où les Y_i sont des variables indépendantes entre elles et de K, de même loi que l'alternative de Bernouilli

$$Y \qquad P(Y = 1) = p \qquad P(Y = 0) = q$$

$$s \in [0, 1[\qquad \frac{\gamma(q + ps) - \gamma(s)}{1 - s} = \sum_{k=0}^{\infty} [P(K > k) - P(K' > k)]\ s^k$$

est une série entière à termes positifs. Pour p=0 on obtient le Lemme L_3.

D. On vérifie immédiatement en conditionnant que $E(s^{K'}) = \gamma(q + ps)$. Le lemme L_3 donne alors :

$$\frac{1 - \gamma(q + ps)}{1 - s} = \sum_{k=0}^{\infty} P(K' > k)\ s^k$$

$s \in [0, 1[$

$$\frac{1 - \gamma(s)}{1 - s} = \sum_{k=0}^{\infty} P(K > k)s^k \qquad \text{par différence :}$$

$$s \in [0, 1[\qquad \frac{\gamma(q + ps) - \gamma(s)}{1 - s} = \sum_{k=0}^{\infty}[P(K > k) - P(K' > k)]s^k$$

or d'après la définition de la variable K'

$$K' \leq K \qquad \forall\ k \qquad \{K' > k\} \subset \{K > k\}$$

$$\forall\ k \qquad P(K' > k) \leq P(K > k)$$

la série entière $\dfrac{\gamma(q + ps) - \gamma(s)}{1 - s}$ est une série à termes positifs. ■

Il en résulte que

$$\frac{G'(s)}{G(s)} = a\frac{1-\gamma(s)}{1-s} = a\sum_{k=0}^{\infty} P(K>k)s^k = a\sum_{n=1}^{\infty} P(K \geq n)s^{n-1}$$

$$\text{Log}\frac{G(s)}{G(0)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}s^n \quad \text{avec } a_n = a\ P(K \geq n) \qquad (a_1 = a)$$

ce qui montre que G(s) est une loi indéfiniment divisible dont la mesure canonique est définie par une suite décroissante a_n.

Inversement toute loi indéfiniment divisible définie par une suite a_n décroissante peut être écrite de la façon précédente au moyen d'une variable K > 0.

La condition $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ imposant toutefois que E(Log K) < ∞ , précisons ce point :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} = a\sum_{k=1}^{\infty} \frac{P(K \geq k)}{k}$$

or

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{P(K \geq k)}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sum_{n=k}^{\infty} P(K=n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(K=n) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

$$\text{Log } n \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq C + \text{Log } n$$

$$E(\text{Log } K) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P(K \geq k)}{k} \leq C + E(\text{Log } K)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} < \infty \Leftrightarrow E(\text{Log } K) < \infty$$

En résulte :

Proposition P_5 (Caractérisation/homologue de P_1).

La formule $\frac{G'(s)}{G(s)} = a\frac{1-\gamma(s)}{1-s}$ dans laquelle $a = \frac{G'(0)}{G(0)} > 0$ et $\gamma(s)$ la fonction génératrice d'une variable K entière strictement positive telle que E(Log K) < ∞ ***caractérise*** les lois indéfiniment divisibles entières dont la mesure canonique est définie par une suite a_n décroisante (lois notées IDD).

Ce fait, compte tenu du lemme L_4, entraîne :

$$\frac{G'_p(s)}{G_p(s)} = a\,\frac{\gamma(q+ps)-\gamma(s)}{1-s} = a\sum_{k=0}^{\infty}\,[P(K>k)-P(K'>k]s^k$$

qui est une série entière à termes positifs ce qui établit que $G_p(s)$ est une loi indéfiniment divisible.

D'où la proposition P_6, exacte réplique de la proposition P_2.

Proposition P_6 (Résultat de synthèse concernant la fonction G_p/homologue de P_2).

- Si $G_p(s) = \dfrac{G(s)}{G(q+ps)}$ est une loi (ID) lorsque p est voisin de 1, alors
- G(s) est une loi (IDD). Cette propriété entraîne à son tour que :
- $G_p(s)$ est une loi (ID) pour tout $p \in [0,1]$

Une relation entre lois positives quelconques et lois entières

R_7

a. Si $\varphi(\lambda)$ est la transformée de Laplace d'une variable positive, $G(s) = \varphi(1-s)$ est la fonction génératrice d'une variable entière.

b. Si φ est (ID), G est également (ID).

c. Si φ est (IDD), G est aussi (IDD).

D. ***a.*** $G(s) = \varphi(1-s) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} \qquad G^{(n)}(s) = (-1)^n\,\varphi^{(n)}(1-s) \geq 0$

b. $\forall\, n \in \mathbb{N}^*\quad G^{(1/n)}(s) = \varphi^{(1/n)}(1-s)$ est une fonction génératrice

c. Du fait que φ est (IDD) (caractérisation) :

$$-\frac{\varphi'(\lambda)}{\varphi(\lambda)} = \frac{\psi(\lambda)}{\lambda} \quad \text{avec} \quad \psi'(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\,dm(t) \quad \text{et} \quad \psi(0) = 0$$

$$\frac{G'(s)}{G(s)} = -\frac{\varphi'(1-s)}{\varphi(1-s)} = \frac{\psi(1-s)}{1-s} \quad \text{qui peut s'écrire}$$

$$\frac{G'(s)}{G(s)} = \psi(1)\,\frac{1-\gamma(s)}{1-s} \qquad \text{avec} \qquad \gamma(s) = 1-\frac{\psi(1-s)}{\psi(1)}$$

d'où
$$\gamma'(s) = \frac{\psi'(1-s)}{\psi(1)} = \frac{1}{\psi(1)}\int_0^{\infty} e^{t(s-1)}\,dm(t)$$

est une série entière à termes positifs. Comme $\gamma(0) = 0$ et $\gamma(1) = 1$, $\gamma(s)$ est la fonction génératrice d'une variable entière strictement positive, ce qui caractérise une loi entière (IDD). ■

III - PETITS EXEMPLES DE LOIS (IDD) QUELCONQUES OU ENTIERES - CONTRE-EXEMPLE

Donnons d'abord un contre-exemple : il est facile de mettre en évidence des lois (ID) qui ne sont pas des lois (IDD). Si, par exemple, K_θ et K'_θ sont deux variables de Poisson de paramètre θ indépendantes

$N = K_\theta + 2K'_\theta$ a pour fonction génératrice $G(s) = e^{\theta(s-1)}\, e^{\theta(s^2-1)} = e^{\theta(s+s^2-2)}$

$\forall\ n \in \mathbb{N}^*$ $\quad G^{1/n}(s) = e^{\frac{\theta}{n}(s+s^2-2)}$: G(s) est indéfiniment divisible

$$\mathrm{Log}\,\frac{G(s)}{G(0)} = \theta s + \theta s^2 \qquad a_1 = \theta \qquad a_2 = 2\theta \qquad n > 2 \qquad a_n = 0$$

n'est pas une suite décroissante, donc G(s) n'est pas IDD.

Pour mettre en évidence des lois (IDD) positives quelconques, on se fonde sur la caractérisation de la proposition P_1 (cf. I)

$$-\frac{\varphi'(\lambda)}{\varphi(\lambda)} = \frac{\psi(\lambda)}{\lambda} \qquad \text{avec } \psi(0) = 0 \text{ et } \psi'(\lambda) \text{ complètement monotone.}$$

On peut en déduire des lois (IDD) entières par la relation R_7 (cf. II).

$$G(s) = \varphi(1-s)$$

ainsi :

- ***Lois gamma et binomiale négative***

$$\psi(\lambda) = \frac{a\alpha\lambda}{1+a\lambda} \qquad \varphi(\lambda) = \frac{1}{(1+a\lambda)^\alpha} \qquad G(s) = \frac{1}{[1+a(1-s)]^\alpha}$$

correspondant à $\quad \gamma(s) = \dfrac{s}{1+a(1-s)}$

- ***Lois stable et de Sichel***

$\alpha \in\ ]0,1]$, $\psi(\lambda) = a\alpha\lambda^\alpha$ $\varphi(\lambda) = e^{-a\lambda^\alpha}$ $\boxed{G(s) = e^{-a(1-s)^\alpha}}$ est (IDD) où

$\gamma(s) = 1 - (1-s)^\alpha$ en particulier la loi de Poisson pour $\alpha = 1$.

On remarque que ces deux lois sont "stables" pour les transformations :

$$\varphi \rightarrow \varphi_p(\lambda) = \frac{\varphi(\lambda)}{\varphi(p\lambda)} \qquad \text{ici} \qquad \varphi_p(\lambda) = e^{-a(1-p^\alpha)\lambda^\alpha}$$

$$G \rightarrow G_p(s) = \frac{G(s)}{G(q+ps)} \qquad \text{ici} \qquad G_p(s) = e^{-a(1-p^\alpha)(1-s)^\alpha}$$

- ***Loi entière G(s) de l'effectif d'une descendance***

$$\psi(\lambda) = \frac{a\sqrt{\lambda}}{2(1+\sqrt{\lambda})} \qquad \varphi(\lambda) = \frac{1}{(1+\sqrt{\lambda})^a} \qquad a > 0$$

$$G(s) = \frac{1}{(1+\sqrt{1-s})^a} = \left(\frac{1-\sqrt{1-s}}{s}\right)^a$$

- ***Loi de Bessel***

On part de la fonction : $\psi(\lambda) = \dfrac{a\lambda}{\sqrt{(1+\lambda)^2-1}}$ $\qquad a > 0$

$$\psi'(\lambda) = \frac{a\lambda}{[(1+\lambda)^2-1]^{3/2}} = \frac{1}{2+\lambda} \cdot \frac{a}{\sqrt{(1+\lambda)^2-1}}$$

or

$$\frac{1}{2+\lambda} = \int_0^\infty e^{-2x}\, e^{-x}\, dx$$

$$\frac{a}{\sqrt{(1+\lambda)^2-1}} = a\int_0^\infty e^{-\lambda x}\, e^{-x}\, I_0(x)\, dx$$

sont deux fonctions complètement monotones, il en est de même de leur produit $\psi'(\lambda)$. Il en résulte que $\psi(\lambda)$, avec $\psi(0) = 0$ est la primitive d'une fonction complètement monotone et donc que $\varphi(\lambda)$ est indéfiniment divisible. Précisons sa valeur

$$-\frac{\varphi'(\lambda)}{\varphi(\lambda)} = \frac{\psi(\lambda)}{\lambda} = \frac{a}{\sqrt{(1+\lambda)^2-1}} \;;\; -\mathrm{Log}\ \varphi(\lambda) = a\ \mathrm{Arg\ Ch}(1+\lambda) = a\ \mathrm{Log}\left(1+\lambda+\sqrt{(1+\lambda)^2-1}\right)$$

$$\boxed{\varphi(\lambda) = (1+\lambda-\sqrt{(1+\lambda)^2-1})^a} \qquad \text{est (IDD)}$$

IV - OÙ $\varphi_p(\lambda)$ et $G_p(s)$ APPARAISSENT COMME SOLUTIONS D'ÉQUATIONS FONCTIONNELLES

On considère les équations fonctionnelles

E1) $\varphi_{pp'}(\lambda) = \varphi_p(\lambda)\ \varphi_{p'}(p\lambda)$

E2) $G_{pp'}(s) = G_p(s)\ G_{p'}(q+qs) \qquad q = 1-p$

dans lesquelles $\varphi_p(\lambda)$ est une fonction de $\lambda \geq 0$ et continue de $p \in [0,1]$

$G_p(s)$ est une fonction de $s \in [0,1]$ et continue de $p \in [0,1]$

Proposition P8.

Les solutions générales de E1) et E2) sont respectivement

$$\varphi_p(\lambda) = \frac{\varphi_0(\lambda)}{\varphi_0(p\lambda)} \qquad G_p(s) = \frac{G_0(s)}{G_0(q+ps)} \qquad \varphi_1(\lambda) = G_1(s) = 1$$

$\varphi_p(\lambda)$ et $G_p(s)$ sont des lois de probabilité (ID) si et seulement si $\varphi_0(\lambda)$ et $G_0(s)$ sont des lois de probabilité (IDD).

D. Condition nécessaire passant à la limite lorsque p' tend vers 0 dans E1) et E2)

$$\varphi_p(\lambda) = \frac{\varphi_0(\lambda)}{\varphi_0(p\lambda)} \qquad G_p(s) = \frac{G_0(s)}{G_0(q+ps)}$$

Condition suffisante

$$\varphi_p(\lambda) = \frac{\varphi_0(\lambda)}{\varphi_0(p\lambda)} \qquad \varphi_{p'}(p\lambda) = \frac{\varphi_0(p\lambda)}{\varphi_0(pp'\lambda)}$$

$$\varphi_p(\lambda)\ \varphi_{p'}(p\lambda) = \frac{\varphi_0(\lambda)}{\varphi_0(pp'\lambda)} = \varphi_{pp'}(\lambda)$$

$$G_p(s) = \frac{G_0(s)}{G_0(1+p(s-1))} \qquad G_{p'}(q+ps) = \frac{G_0(1+p(s-1))}{G_0(1+p'(1+p(s-1)-1))}$$

$$= \frac{G_0(1+p(s-1))}{G_0(1+pp'(s-1))}$$

$$G_p(s)\ G_{p'}(q+ps) = \frac{G_0(s)}{G_0(1+pp'(s-1))} = G_{pp'}(s)\,.$$

La fin de la proposition relève immédiatement des propositions P_2 et P_6. ■

- ***Signification des équations E_1) et E_2)***

Pour se retrouver en terrain familier des processus ou chaînes markoviens, il peut être commode de faire les changements de notations :

h et t ≥ 0 $\quad p = e^{-h} \quad p' = e^{-t}$

$$\varphi_p(\lambda) = \varphi(\lambda, h) \qquad G_p(s) = G(s,h)$$

On note en outre simplement les lois limites

$$\varphi_0(\lambda) = \varphi(\lambda, \infty) = \varphi(\lambda)$$

$$G_0(s) = G(s, \infty) = G(s)$$

E_1 et E_2 deviennent

$$E_1) \quad \varphi(\lambda, t+h) = \varphi(\lambda, h)\ \varphi(\lambda e^{-h}, t)$$

$$E_2) \quad G(s, t+h) = G(s, h)\ G(1 - e^{-h} + se^{-h}, t)$$

dont les solutions sont :

$$E_1) \quad \varphi(\lambda, t) = \frac{\varphi(\lambda)}{\varphi(\lambda e^{-t})} \qquad \varphi(\lambda, 0) = 1$$

$$E_2) \quad G(s, t) = \frac{G(s)}{G(1 - e^{-t} + se^{-t})} \qquad G(s, 0) = 1$$

soit en écriture de variables aléatoires, si X_t et N_t sont des variables de transformées

$$\varphi(\lambda, t) = E(e^{-\lambda X_t}) \qquad G(s, t) = E(s^{N_t})$$

E_1 et E_2 se traduisent par les équivalences en loi :

$$E_1) \quad X_{t+h} \overset{\mathcal{L}}{\equiv} e^{-h}\ X_t + X_h$$

$$E_2) \quad N_{t+h} \overset{\mathcal{L}}{\equiv} \sum_{i=1}^{N_t} Y_i(h) + N_h$$

dans lesquelles les variables écrites au second membre sont supposées indépendantes et les $Y_i(h)$ de même loi que $Y(h)$ indicatrice de Bernouilli de paramètre $e^{-h} = P(Y(h) = 1)$.

- ***Application à la solution de certains problèmes***

Soit X_t un processus à valeurs positives quelconques (resp. N_t à valeurs entières positives) à accroissements indépendants et homogènes. En particulier

$$\forall\ t, k \quad \begin{cases} X_{t+h} - X_t & \text{indépendante de } X_t \\ N_{t+h} - N_t & \text{indépendante de } N_t \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_{t+h} - X_t \overset{\mathcal{L}}{\equiv} X_h \\ N_{t+h} - N_t \overset{\mathcal{L}}{\equiv} N_h \end{cases}$$

Vérifiant en outre les relations entre variables aléatoires

$$\forall\ t, k \quad \left\| \begin{array}{lll} E'_1) & X_{t+h} = e^{-h}\, X_t + X_{t+h} - X_t & \text{et} \quad X_0 = 0 \\ E'_2) & N_{t+h} = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i(h) + N_{t+h} - N_t & \text{et} \quad N_0 = 0 \end{array} \right.$$

ils vérifient les équivalences en loi E_1 et E_2.

Les lois de X_t et N_t sont donc données en fonction de la loi limite par

$$\left| \begin{array}{l} E(e^{-\lambda X_t}) = \varphi(\lambda, t) = \dfrac{\varphi(\lambda)}{\varphi(\lambda e^{-t})} \\ E(s^{N_t}) = G(s, t) = \dfrac{G(s)}{G(1 - e^{-t} + se^{-t})} \end{array} \right.$$

Les solutions existent effectivement — et sont indéfiniment divisibles — si les lois limites $\varphi(\lambda)$ et G(s) sont des lois (IDD).

V - BIJECTION AVEC UN PROBLÈME SIMPLE ET MARKOV ET IMAGE DONNÉE PAR CE DERNIER

L'interprétation de l'équation E_2) par les variables aléatoires N_t oriente vers un problème simple de Markov.

On se réfère à un problème banal de bureau de poste :

Un bureau de poste, de grande capacité, muni d'un nombre infini de guichets. A son arrivée, un client va vers un guichet libre où l'attend un sourire. Sitôt servi, il quitte le bureau. On suppose :

• Les clients arrivent par paquets d'effectifs aléatoires K_i, à des époquent dessinant un processus de Poisson de paramètre a. Les K_i sont indépendantes et de même loi qu'une variable K. On connaît :

$$P(K = k) \quad \text{et} \quad \gamma(s) = E(s^K) = \sum_{k=1}^{\infty} P(K = k)s^k$$

• Les temps de service aux différents guichets sont des variables exponentielles de paramètre 1

• Les divers phénomènes en cause sont supposés indépendants.

• Le bureau de poste est vide à l'instant initial.

On appelle N_t le nombre de clients présents dans le bureau de poste — c'est-à-dire en cours de service — à l'instant t, dont on cherche la loi que l'on note :

$$\left\| \begin{array}{l} G(s,t) = E(s^{N_t}/N_0 = 0) \\ G(s) = \lim\limits_{t \to \infty} G(s,t) \quad \text{celle du régime limite ou stationnaire.} \end{array} \right.$$

Les propriétés de non vieillissement de la loi exponentielle des temps de service, l'absence de mémoire du processus de Poisson des arrivées et l'indépendance des divers événements permettent de voir facilement que N_t vérifie l'équation

$$E'_2) \qquad \boxed{N_{t+h} = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i(h) + N_{t+h} - N_t} \qquad \forall\ t, h$$

avec les caractéristiques d'indépendance et l'équivalence en loi $N_{t+h} - N_t \overset{\mathcal{L}}{\equiv} N_h$ requises plus haut.

Compte tenu de la condition initiale $N_0 = 0$, la solution du problème est donnée au moyen de la solution limite G(s) par

$$\boxed{G(s,t) = \frac{G(s)}{G(1 - e^{-t} + se^{-t})}}$$

- ***Recherche de la solution limite ou stationnaire G(s)***

Les conditions différentielles du problème sont :

$$\left\| \begin{array}{ll} & P(N_{t+\delta t} = n - 1/N_t = n) \simeq n\ \delta t \\ k \geq 1 & P(N_{t+\delta t} = n + k/N_t = n) \simeq aP(K = k)\ \delta t \\ & P(N_{t+\delta t} \neq n/N_t = n) \simeq (a + n)\ \delta t \end{array} \right.$$

dont on déduit le système de probabilités stationnaires p_j par le raisonnement classique :

$$(a+j)p_j = (j+1)p_{j+1} + a\sum_{k=1}^{j} p_{j-k}\ P(K=k)$$

qui se résoud par la fonction génératrice

$$G(s) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j\ s^j$$

On trouve :

$$\boxed{\frac{G'(s)}{G(s)} = a\ \frac{1-\gamma(s)}{1-s}} \qquad \gamma(s) = E(s^K)$$

En se référant aux résultats du II, on conclut :

- le régime limite G(s) n'existe que si $E(\mathrm{Log}\ K) < \infty$
- selon la caractérisation P_5, G(s) est une loi (IDD)
- selon P_6, G(s,t) est alors une loi (ID)
- il existe une correspondance bijective entre les lois entières (IDD) et les régimes stationnaires des problèmes du bureau de poste.

Exemples

- ***K est une variable de Pascal***

$$k \geq 1 \qquad P(K=k) = \alpha\beta^{k-1} \qquad \gamma(s) = \frac{\alpha s}{1-\beta s} \qquad \alpha+\beta = 1$$

$$G(s) = \left(\frac{\alpha}{1-\beta s}\right)^{a/\beta}$$ est une loi binomiale négative

$$G(s,t) = \left(\frac{\alpha+\beta\ e^{-t}(1-s)}{1-\beta s}\right)^{a/\beta}$$

- ***K est une variable de type Sichel*** $\alpha\ \varepsilon\ ]0,1]$ $\quad \gamma(s) = 1-(1-s)^{\alpha}$

$$G(s) = \exp\left\{-\frac{a}{\alpha}(1-s)^{\alpha}\right\}$$

$$G(s,t) = \exp\left\{-\frac{a}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})(1-s)^{\alpha}\right\}$$

Pour $\alpha = 1$, on a la solution banale de Poisson.

fr