

REMARQUES SUR LA PRATIQUE DES BANDES TOURNANTES A 3D

X. FREULON et C. de FOUQUET

Ecole des Mines de Paris
Centre de Géostatistique
35 rue Saint-Honoré
77305 FONTAINEBLEAU
FRANCE.

RÉSUMÉ

La méthode de simulation par bandes tournantes permet de construire des fonctions aléatoires isotropes sur R^n à partir de processus sur R . Dans le cas de R^3 , la relation entre la covariance de la fonction aléatoire, C_3 , et celle des processus, C_1 , est très simple, par contre, il n'est pas possible de répartir uniformément plus de 15 points sur la sphère. Aussi avons nous étudié plusieurs méthodes pour distribuer des points sur la sphère et proposons une pondération minimisant l'anisotropie introduite par une discrétisation non-uniforme de la sphère. Puis pour une simulation sur un champ plan, nous comparons en pratique le passage de R^1 à R^2 et celui de R^1 et R^3 . Une alternative à l'inversion de l'équation fonctionnelle reliant C_1 et C_2 est une discrétisation fine de la demi-sphère de R^3 .

ABSTRACT

In order to simulate an isotropic random function on R^n using the turning bands method, we have to simulate random processes on the line. In the three dimensional case, the equation which links the covariance of the random function, C_3 , to the covariance of the processes, C_1 , is very simple, but it is not possible to spread more than 15 directions uniformly on the sphere. In this paper, we study several series of points on the sphere. We propose an optimal weighing, which minimizes the anisotropy introduced by these non-uniform discretizations of the sphere. Then on the plane, we compare the direct simulation of a 2D random function and the simulation induced by a 3D random function, both with the same covariance: either we have to invert the equation between C_2 and C_1 or to perform a fine discretization of the sphere.

SOMMAIRE

0 - Introduction

1 - Suites de points sur la demi-sphère de R^3

1.1. Icosaèdre et suites de points denses sur la demi-sphère

1.2. Points définis par un sous-groupe dénombrable de rotations

1.3. Points aléatoires sur la demi-sphère

2 - Calcul de la covariance

2.1. Erreur quadratique moyenne

2.2. Pondération optimale

3 - Simulations

3.1. Simulation des droites

3.2. Mise en œuvre des simulations

4 - Conclusion

5 - Bibliographie

0 – Introduction

G. Matheron a montré (1972) que pour toute covariance, C , stationnaire et isotrope dans $\mathbb{R}^n$, il existe une covariance sur $\mathbb{R}^1$, C_1 , telle que :

$$C(h) = C_n(|h|) = 2 \int_{S_{n-1}^+} C_1(\langle h, s \rangle) d\varpi_{n-1}(s) \quad (1)$$

où S_{n-1}^+ est la demi-sphère unité de $\mathbb{R}^n$ ($S_{n-1}^+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, x \rangle = 1, \langle x, u \rangle \geq 0\}$, u étant un axe arbitraire) et ϖ_{n-1} est la loi uniforme sur la sphère S_{n-1} .

S'il existe une fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ telle que $C_1 = f \cdot f$, il est possible de construire une F.A. isotrope de $\mathbb{R}^n$, de covariance C , à l'aide d'une mesure aléatoire, M , orthogonale sur $S_{n-1}^+ \times \mathbb{R}$ et telle que, si A et B sont deux boréliens de $S_{n-1}^+ \times \mathbb{R}$, $\text{Cov}(M(A), M(B)) = |A \cap B|$:

$$Z_x = \sqrt{2} \int_{S_{n-1}^+ \times \mathbb{R}} f(\langle x, s \rangle - t) dM(s, t)$$

La méthode de simulation par bandes-tournantes est le calcul des intégrales sur la demi-sphère par quadrature. On approxime la mesure aléatoire M par la mesure : $M^{BT} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i=1}^n (\omega_i)^{1/2} \delta_{a_i} \otimes T^{(i)}$ où les $T^{(i)}$ sont des mesures aléatoires orthogonales mutuellement indépendantes sur $\mathbb{R}$ (si $(F_i, F_j) \in (\mathcal{B}_{\mathbb{R}})^2$ alors $E\{T^{(i)}(F_i) \cdot T^{(j)}(F_j)\} = \delta^{ij} |F_i \cap F_j|$) et $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ n points de la demi-sphère.

La FA simulée par bandes-tournantes est $Z_x^{BT} = \sum_{i=1}^n (\omega_i)^{1/2} \int f(\langle a_i, x \rangle - t) dT^{(i)}(t)$

La simulation se décompose donc en deux étapes :

- simulation de n processus indépendants de covariance C_1 : $1 \leq i \leq n$ $X_t^{(i)} = f * T^{(i)}(t)$
- calcul de la simulation sur $\mathbb{R}^n$, par "épandage" des processus simulés : $Z_x^{BT} = \sum_{i=1}^n (\omega_i)^{1/2} X_{\langle a_i, x \rangle}^{(i)}$

La covariance de la F.A. ainsi construite est :

$$C^{BT}(x-y) = \text{Cov}(Z_x^{BT}, Z_y^{BT}) = \sum_{i=1}^n \omega_i C_1(\langle a_i, x-y \rangle)$$

qui est une approximation de $2 \int_{S_{n-1}^+} C_1(\langle a, x-y \rangle) d\varpi_{n-1}(a)$.

De plus, la relation (1) entre les covariances C_1 et C_n reste valable dans le cas de covariances généralisées (Matheron 1973).

Pour mettre en œuvre cette méthode, il faut donc résoudre deux problèmes :

- l'inversion de l'équation (1), c'est-à-dire le calcul de la covariance, C_1 , à simuler sur les droites,
- le choix de la quadrature $(a_i, \omega_i)_{1 \leq i \leq n}$.

Dans cet article, nous étudions tout d'abord différentes quadratures pour la simulation d'une F.A. isotrope dans $\mathbb{R}^3$. Puis, nous regardons en pratique la simulation par la méthode des bandes tournantes d'une FA dans le plan : nous comparons la simulation par passage de $\mathbb{R}^1$ à $\mathbb{R}^2$ et la simulation par passage de $\mathbb{R}^1$ à $\mathbb{R}^3$. La FA à simuler est alors considérée comme la restriction au plan d'une FA à 3D.

1 – Suites de points sur la demi-sphère de $\mathbb{R}^3$

Nous avons étudié trois types de suites de points :

- les points obtenus par recouvrement des faces de l'icosaèdre
- les points de l'orbite du sous-groupe dénombrable engendré par trois rotations d'angle $\text{Arc cos } (-3/5)$ autour des trois axes orthogonaux (Ox, Oy, Oz)
- les points dérivant des méthodes de simulations de points aléatoires uniformément répartis sur la sphère.

Ces suites sont denses sur la sphère, on obtient donc, moyennant une pondération adéquate, une approximation de l'intégrale recherchée. De plus, le troisième type fournit des suites équi-réparties c'est à dire :

$$\forall f \in \mathcal{C}(S_2^+) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \right) = \int_{S_2^+} f(x) d\omega(x)$$

Dans ce cas, la pondération des directions est simple.

1.1. Icosaèdre et suites de points denses sur la demi-sphère

Dans $\mathbb{R}^2$, une discrétisation de la sphère est obtenue en considérant les sommets des polygones réguliers. Cependant dans $\mathbb{R}^3$, le nombre des polyèdres réguliers est limité à cinq. L'icosaèdre, comportant 20 sommets et 20 faces, qui sont des triangles équilatéraux, définit la plus fine discrétisation régulière de la sphère : les sommets de l'icosaèdre et les milieux des arêtes fournissent respectivement 10 et 15 directions régulièrement réparties (Guibal, 1972).

Afin d'aller au-delà de cette limite des 15 droites, tout en conservant les propriétés de symétrie de l'icosaèdre, plusieurs solutions ont été envisagées :

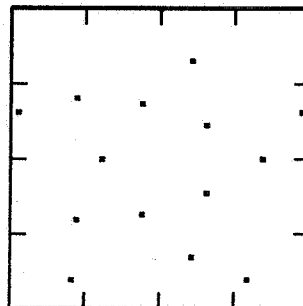
- implanter plusieurs icosaèdres selon des directions uniformément réparties sur la sphère (un icosaèdre est un solide, on tire une direction aléatoire, puis une rotation aléatoire autour de cet axe) ;
- recouvrir les 10 triangles sphériques définis par les faces de l'icosaèdre par des points répartis de manière la plus uniforme possible. Deux méthodes sont présentées ici :
 - la triangulation des faces de l'icosaèdre permet de définir des directions qui, denses sur la sphère, ne sont pas équi-réparties
 - des points aléatoires uniformément répartis sur les polygones sphériques correspondant aux faces du polyèdre sont simulés en utilisant la méthode d'acceptation et rejets. Ceci correspond donc à un échantillonnage aléatoire-stratifié de la demi-sphère.

La projection des points obtenus par ces méthodes est reportée sur la figure 1. La projection utilisée conserve les surfaces :

$$(u, v, w) \in S_2^+ \mapsto \left(\sqrt{1-w} \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \sqrt{1-w} \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right)$$

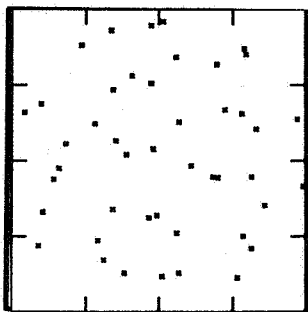
figure 1 : icosaèdre et points sur la demi-sphère de R^3

– milieu des arêtes de l'icosaèdre (I.0)

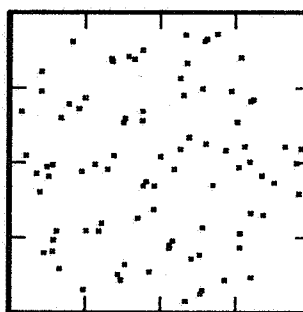


15 points

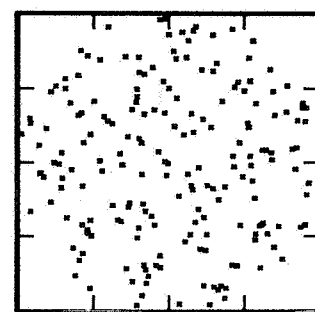
– milieu des arêtes de plusieurs icosaèdres aléatoires (I.1)



45 points

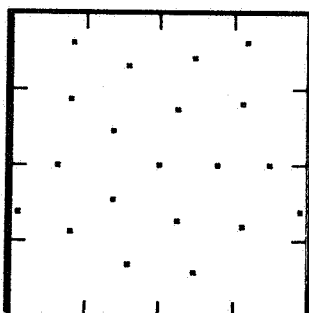


90 points

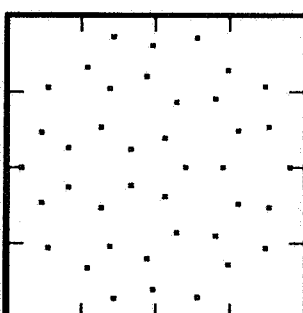


195 points

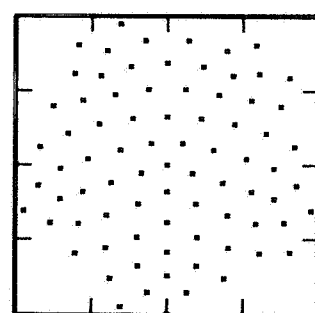
– recouvrement des faces par triangulation (I.2)



40 points

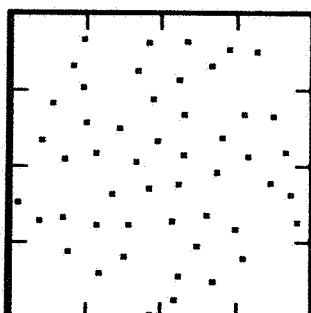


81 points

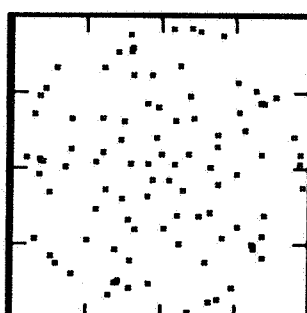


160 points

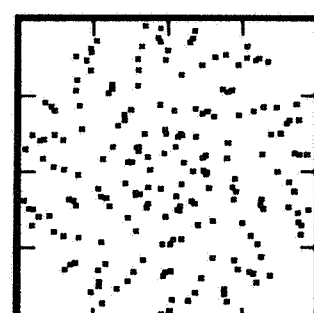
– recouvrement des faces par des points pseudo-aléatoires (I.3)



50 points



100 points



200 points

1.2. Points définis par un sous-groupe dénombrable de rotations (Lubotsky et al., 1986)

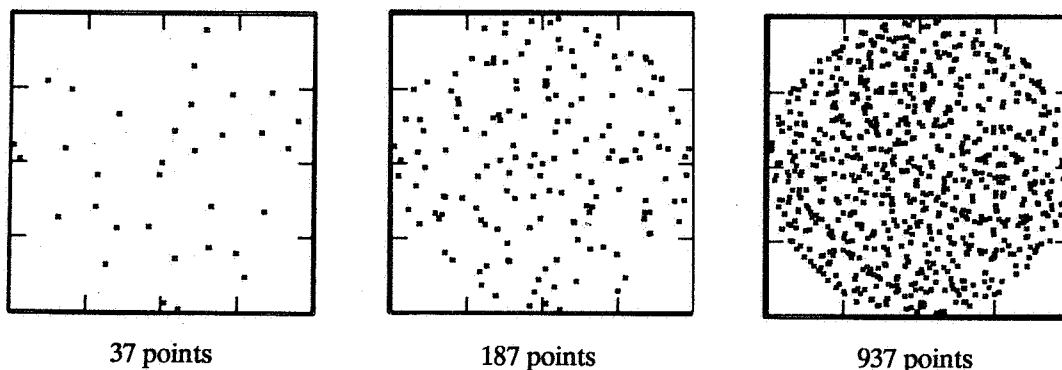
Soit Γ le sous-groupe dénombrable engendré par les trois rotations d'angle $\arccos(-3/5)$ autour des axes O_x , O_y et O_z , notées A, B et C. Pour tout point x de la sphère, on construit le sous-ensemble de la sphère, $\{ \gamma x \mid \gamma \in \Gamma \}$, des images de x par les éléments de Γ . Il est possible d'ordonner cet ensemble pour construire une suite dense sur la sphère.

On considère les éléments γ de Γ , différents de l'identité et pouvant s'écrire comme le produit (non commutatif) de s éléments de $\{ A, B, C, A^{-1}, B^{-1}, C^{-1} \}$, deux termes consécutifs ne pouvant être l'inverse l'un de l'autre. $s(\gamma)$ est la longueur du mot représentant γ (l'identité est de longueur nulle). On considère la suite :

$$(\{ \gamma x \mid s(\gamma) = n \})_{n \geq 0}$$

Cependant la croissance du nombre de directions en fonction de s , $1 + (3/2)(5^s - 1)$, est très rapide : un grand nombre de points est nécessaire avant que les directions semblent uniformément réparties sur la sphère (figure 2).

figure 2 : orbite de l'action d'un groupe discret de rotations (II)



1.3. Points aléatoires sur la demi-sphère

Il existe des fonctions, f , continues sur $]0,1[^d$ sur S_2 telles que l'image de la mesure de Lebesgue sur $]0,1[^d$ soit la mesure de Lebesgue sur S_2^+ . Ces fonctions fournissent des méthodes pour simuler des points uniformément répartis sur la sphère. Nous avons utilisé deux méthodes de simulation de points aléatoires sur la sphère et trois suites équi-réparties sur $]0,1[^d$:

Ces deux simulations de points aléatoires sur la sphère sont les suivantes :

- La direction $\underline{a}$ du vecteur aléatoire dont les coordonnées sont trois gaussiennes centrées, normées et indépendantes est uniformément répartie sur la sphère (Lantuejoul, 1982). Ces trois gaussiennes peuvent être simulées par la méthode d'inversion. On peut donc simuler $\underline{a}$ à l'aide de $u = (U_1, U_2, U_3)$ uniformément réparti sur $]0,1[^3$: $i = 1, 2$ ou 3 $X_i = G^{-1}(U_i)$ et

$$\underline{a} = f_1(u) = \left(\frac{X_1}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2}}, \frac{X_2}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2}}, \frac{X_3}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2}} \right)$$

- La relation entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées sphériques fournit une autre méthode pour simuler un point uniformément sur la demi-sphère :

$$\underline{a} = f_2(u) = (\cos(2\pi U_1) \sqrt{1 - U_2^2}, \sin(2\pi U_1) \sqrt{1 - U_2^2}, U_2)$$

où $u = (U_1, U_2)$ est uniformément réparti sur $]0,1[^2$.

Trois suites de points équi-réparties sur $]0,1[^d$ (c'est à dire que les mesures discrètes $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{x_i}$ convergent étroitement vers la mesure de Lebesgue sur $]0,1[^d$) ont été utilisées (Bouleau, 1987) :

- tirage d'une suite de points aléatoires indépendants uniformément répartis sur $]0,1[^d$;
- partage régulier de $]0,1[^d$:

$$\left(\left(\frac{i_1}{n+1}, \dots, \frac{i_d}{n+1} \right)_{1 \leq i_1, \dots, i_d \leq n} \right)_{n > 0}$$

- la suite de Van der Corput :

Soient les d premiers nombres premiers, $2, 3, \dots, n \in \mathbb{N}$ s'écrit en base $p_i (1 \leq i \leq d)$:

$$n = a_0 + a_1 p_1 + \dots + a_k p_1^k + \dots$$

On pose :

$$\varphi_{p_i}(n) = \frac{a_0}{p_i} + \dots + \frac{a_k}{p_i^{k+1}} + \dots$$

La suite de Van der Corput d -dimensionnelle est alors la suite : $(\varphi_{p_1}(n), \dots, \varphi_{p_d}(n))_{n > 0}$.

Si $(x_n)_n$ est une suite équi-répartie sur $]0,1[^d$, alors $(f(x_n))_n$ est une suite équi-répartie sur S_2^+ . En combinant les deux méthodes de simulation aux trois suites équi-réparties sur $]0,1[^d$, on dispose donc de six suites équi-réparties sur la demi-sphère (figure 3).

Le tableau 1 présente un récapitulatif des ces différentes suites.

Tableau 1 : Suites de points sur la sphère

a) Point de l'icosaèdre

milieu des arêtes :

- d'un icosaèdre I.0
- de plusieurs icosaèdres aléatoires I.1

recouvrement des faces :

- par triangulation I.2
- par des points pseudo-aléatoires I.3

b) Orbite de l'action d'un groupe discret de rotation IIc) Points pseudo-aléatoires

Suites équi-réparties sur $]0,1[^d$	Méthodes de simulation	
	des "trois gaussiennes"	des "coordonnées sphériques"
points aléatoire	III.1.1.	III.2.1.
partage régulier	III.1.2.	III.2.2.
suite de Van der Corput	III.1.3.	III.2.3.

figure 3 : points pseudo-aléatoires

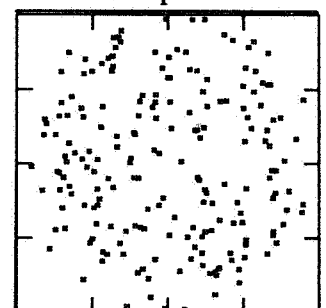
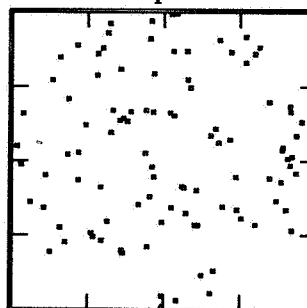
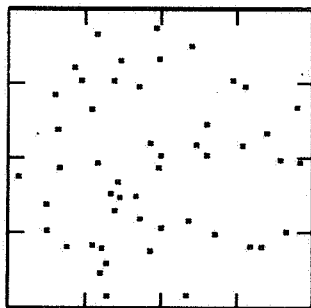
a) méthode des trois gaussiennes

50 points

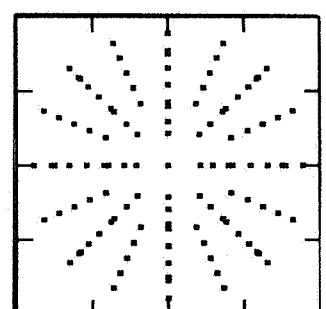
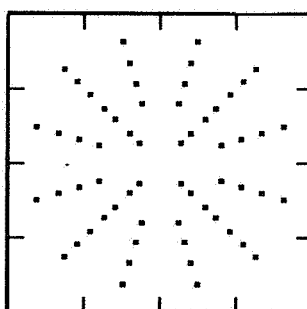
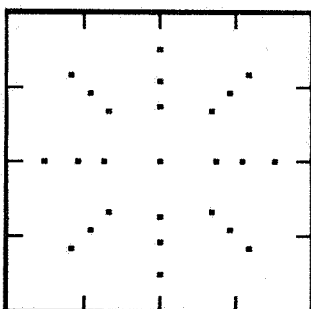
100 points

200 points

points aléatoires III.1.1



partage régulier III.1.2



suite de Van der Corput III.1.3

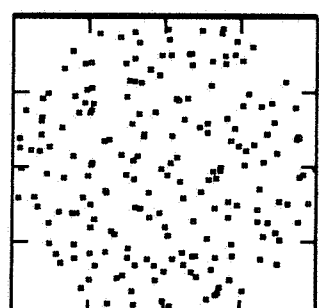
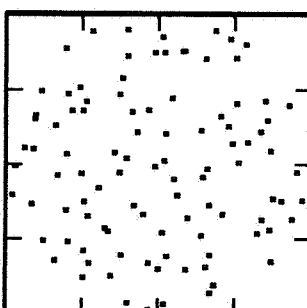
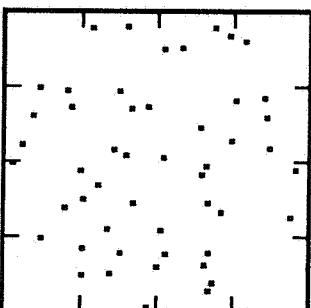
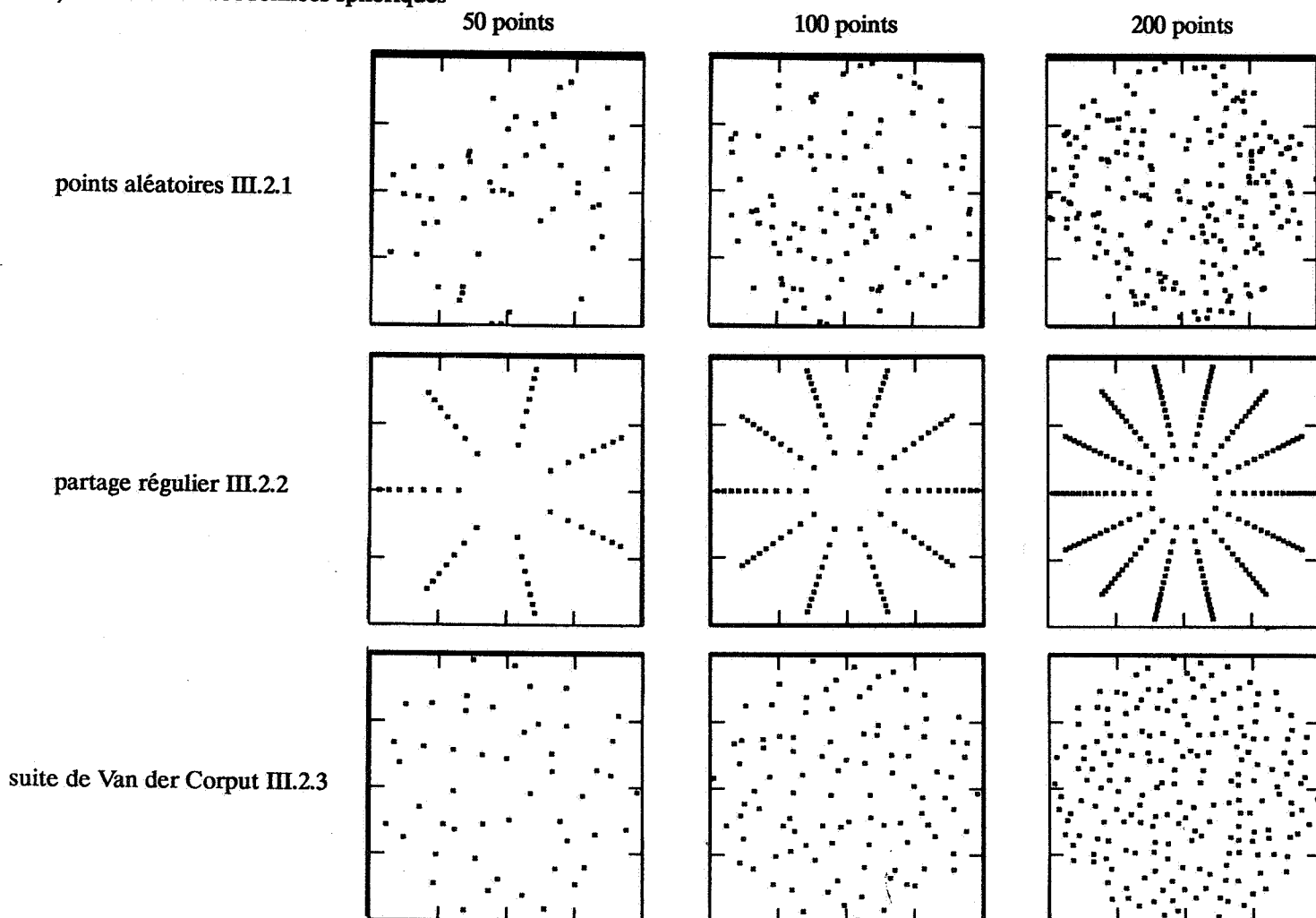


fig. 3 : points pseudo-aléatoires

b) méthode des coordonnées sphériques



2 – Calcul de la covariance

Afin de comparer l'efficacité pour le calcul de l'intégrale par quadrature de chacune des suites de points présentées au paragraphe précédent, nous avons utilisé l'erreur quadratique moyenne sur le champ à simuler entre le modèle de covariance et la modélisation de la covariance par la méthode des bandes tournantes.

2.1. Erreur quadratique moyenne

Soit $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ n directions de $\mathbf{R}^3$. Soit D le champ, compact, sur lequel la F.A. est simulée. On définit le domaine de la covariance : $E = \{x-y \mid (x,y) \in D^2\}$. Soit P la restriction, normée, de la mesure de Lebesgue à E . L'erreur quadratique moyenne de la modélisation par bandes tournantes est :

$$\|C - C^{BT}\|_{L^2(\mathbf{R}^3, P)}^2 = \int_{\mathbf{R}^3} (C(h) - C^{BT}(h))^2 dP(h)$$

Nous n'avons pu calculer l'expression exacte de l'erreur quadratique moyenne que dans le cas d'un variogramme linéaire simulé sur domaine sphérique (le diamètre du champ intervenant par une constante multiplicative qui a été prise égale à un) :

$$\|C - C^{BT}\|_{L^2(\mathbf{R}^3, P)}^2 = 1 - 2 \sum_{i=1}^n \omega_i + \sum_{i,j=1}^n \omega_i \mu_{a_i a_j} \omega_j$$

$$\forall (s, t) \in S_2 \quad \mu_{st} = (C_1(< s, . >), C_1(< t, . >))_{L^2(\mathbb{R}^3, P)} = \frac{2}{3\pi} \left(\sin a_{st} + \left(\frac{\pi}{2} - a_{st}\right) \cos a_{st} \right)$$

avec $a_{st} = \arccos(< s, t >_{\mathbb{R}^3})$.

Au lieu d'une pondération sur les distances, on aurait pu considérer les pondérations sur les points d'appui :

$$\|C - C^{BT}\|_g = \int (C(x-y) - C^{BT}(x-y))^2 g(x)g(y) dx dy = \int (C(h) - C^{BT}(h))^2 K(h) dh$$

où g est une densité et $K = g * g$. Dans le cas du variogramme linéaire simulé sur un champ sphérique, on montre que, si g est isotrope, toutes ces normes ne diffèrent que d'une constante multiplicative fonction de g .

Ceci nous permet donc de comparer l'efficacité des différentes suites dans le cas du variogramme linéaire.

2.2. Pondération optimale

Les directions ne sont pas strictement uniformément réparties dans $\mathbb{R}^3$. En particulier, si les points sont aléatoires, il apparaît des agrégats fortuits qu'il conviendrait d'éliminer. Une solution consiste à ne pas conserver une pondération uniforme des droites. Les pondérateurs optimaux sont ceux minimisant l'erreur quadratique moyenne. On impose que ces pondérateurs soient positifs, ceci est une condition suffisante pour que C^{BT} soit une covariance, et que leur somme soit égale à un.

On peut interpréter cette minimisation en termes de Krigage. Comme P est une probabilité sur $\mathbb{R}^3$, $c_a = C_1(< a, . >) \in L^2(\mathbb{R}^3, P)$ et $\{c_a, a \in S_2\}$ est donc une FA d'ordre 2 (stationnaire dans le cas d'un champ isotrope) dont la covariance non centrée est : $E\{c_a c_\beta\} = \mu_{a\beta}$.

On a de plus :

$$C(h) = \frac{1}{|S_2|} \int c_s(h) ds$$

La covariance optimale est donc le krigage ordinaire de la valeur moyenne sur le champ de la FA $\{c_a, a \in S_2\}$ avec la contrainte de positivité sur les pondérateurs.

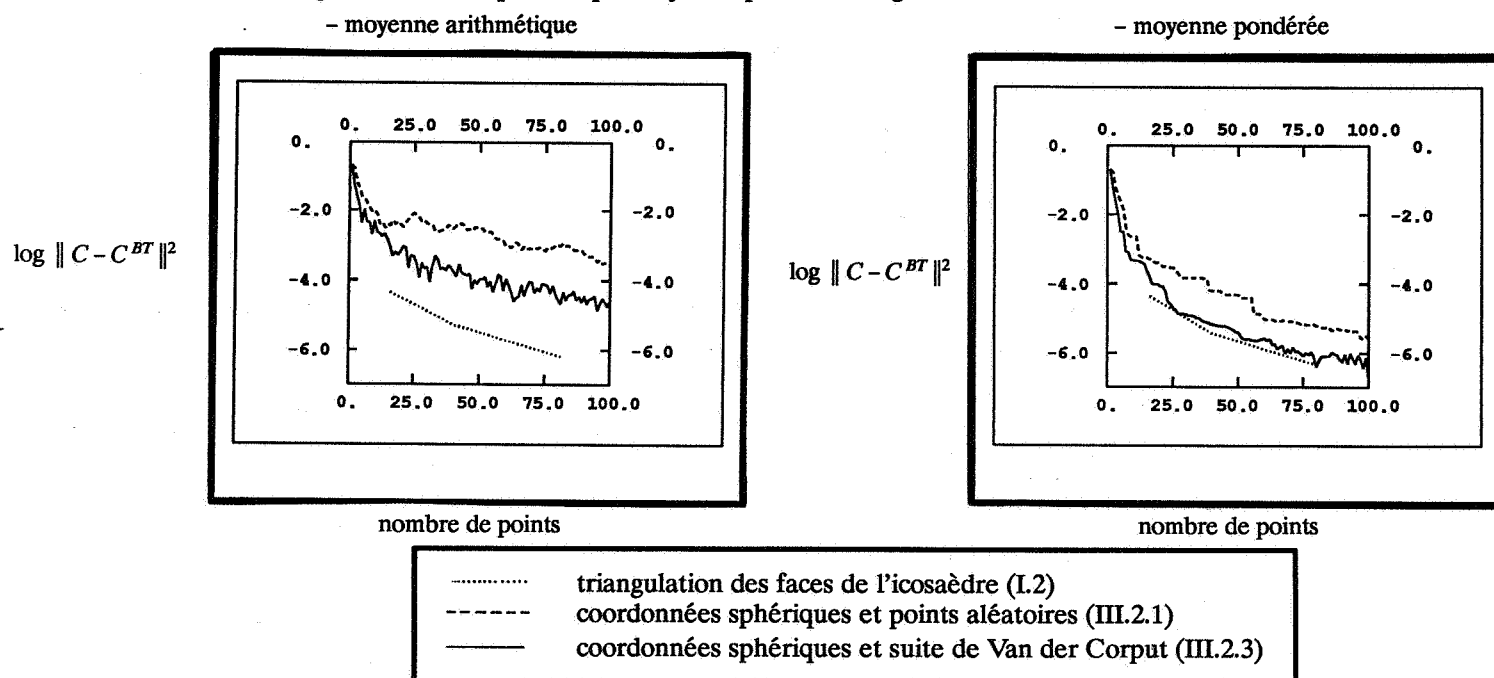
Il faut donc résoudre le problème de programmation quadratique suivant (Barnes et Johnson, 1984):

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \left(\sum_{a, \beta} \omega_a \mu_{a\beta} \omega_\beta \right) \\ \omega_a \geq 0 \quad & \\ \sum_a \omega_a = 1 \quad & \end{aligned}$$

Sur la figure 4, on a reporté l'erreur quadratique moyenne, pour une moyenne arithmétique et une moyenne pondérée, en fonction du nombre de points, pour trois des suites présentées au paragraphe précédent.

Expérimentalement, à nombre de directions fixé, l'erreur quadratique moyenne minimale est obtenue avec les suites I.2 (triangulation des faces de l'icosaèdre) et III.2.3. (coordonnées sphériques, Van der Corput). La pondération accroît très sensiblement l'efficacité des suites de points pseudo-aléatoires en gommant l'anisotropie introduite par des agrégats fortuits.

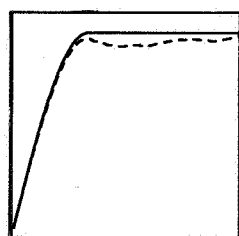
figure 4 : erreur quadratique moyenne pour le variogramme linéaire



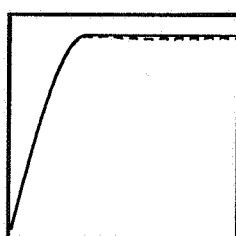
Pour ces deux suites, on a regardé dans une direction particulière [111] le variogramme sphérique modélisé (figure 5). Dès 40 directions, les résultats sont très satisfaisants et dans ce cas la précision apportée par la pondération n'est guère appréciable.

figure 5 : variogramme sphérique modélisé dans la direction [111]

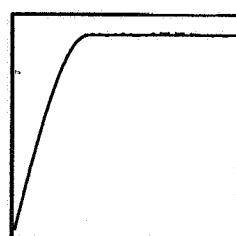
Suite I.2 : triangulation des faces de l'icosaèdre



15 points

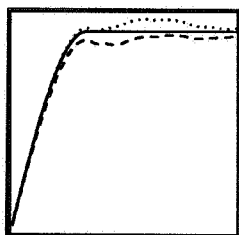


40 points

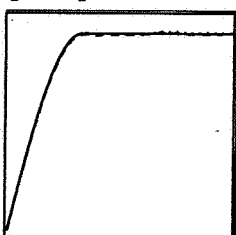


81 points

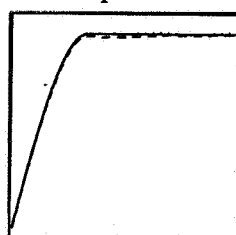
Suite III.2.3 : coordonnées sphériques et suite de Van der Corput



15 points



40 points



81 points

..... moyenne pondérée
 - - - - - moyenne arithmétique

Les suites présentées permettent une discrétisation fine de la demi-sphère de $\mathbf{R}^3$. Deux suites nous sont apparues particulièrement efficaces : I.2 (triangulation des faces de l'icosaèdre) et III.2.3. (coordonnées sphériques et suites de Van der Corput). Avec moins de 100 directions, il est possible de modéliser avec précision la covariance à simuler.

3 – Simulations

Dans cette partie, on compare deux types de simulations par bandes tournantes sur un champ plan. Dans le cas où les modèles à simuler sont autorisés dans $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{R}^3$, on peut simuler dans le plan par passage de $\mathbf{R}$ à $\mathbf{R}^2$ ou par passage de $\mathbf{R}$ à $\mathbf{R}^3$, le plan étant alors considéré comme un sous-ensemble de $\mathbf{R}^3$.

Dans le premier cas, la simulation 2D, le principal problème est la modélisation de la covariance à simuler sur les droites. La relation entre les covariances C_1 et C_2 (tableau 2) ne permet pas toujours un calcul explicite de C_1 . Cependant pour simuler les processus sur une grille régulière, il est nécessaire de connaître la valeur de la covariance, C_1 , en un nombre fini de points. Ces valeurs peuvent être calculées numériquement : connaissant la dérivée de C_2 , on calcule l'intégrale, et donc C_1 , par quadrature de Gauss (Les polynômes orthogonaux utilisés sont les polynômes de Tchebichef de 1^{ère} espèce). Par contre, il est très facile de répartir régulièrement des points sur le demi-cercle.

Dans le second cas, la simulation 3D, la relation entre C_1 et C_3 permet un calcul explicite de C_1 . Les points de la demi-sphère de $\mathbf{R}^3$ et la pondération associée, présentés dans les parties précédentes, sont utilisés pour calculer l'intégrale sur la demi-sphère.

Tableau 2 : relation entre les covariances pour la méthode des bandes tournantes dans $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{R}^3$

Relation entre les covariances		
$\mathbf{R}^2$	$C_2(\varrho) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\varrho} \frac{C_1(u)}{\sqrt{\varrho^2 - u^2}} du$	$C_1(\varrho) = C_2(0) + \varrho \int_0^{\varrho} \frac{1}{\sqrt{\varrho^2 - u^2}} \frac{d}{du}(C_2(u)) du$
$\mathbf{R}^3$	$C_3(\varrho) = \frac{1}{\varrho} \int_0^{\varrho} C_1(u) du$	$C_1(\varrho) = \frac{d}{d\varrho} (\varrho C_3(\varrho))$

Ces simulations se décomposent donc en deux parties : simulation sur les droites, puis "épandage" sur le plan.

3.1 Simulation sur les droites

Les droites sont simulées en utilisant des processus discrets, mutuellement indépendants, $(\tilde{X}_n^{(i)})_{n \in \mathbf{Z}}$, dont la covariance est $\text{Cov}(\tilde{X}_n^{(i)}, \tilde{X}_m^{(i)}) = C_1(\Delta t |n - m|)$. Ceci est équivalent à considérer les processus continus, constants sur des intervalles de longueur Δt :

$$X_x^{(i)} = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \tilde{X}_n^{(i)} 1_{[n\Delta t, (n+1)\Delta t]}(x).$$

L'épandage se fait donc sur des bandes de largeur Δt , selon la formule :

$$Z_x^{\text{BT}} = \sum_{i=1}^n (\omega_i)^{\frac{1}{2}} \tilde{X}_{\lfloor \langle a_i x \rangle / \Delta t \rfloor}^{(i)}$$

($\lfloor \cdot \rfloor$ note ici la partie entière.). La covariance entre deux points du plan est donc :

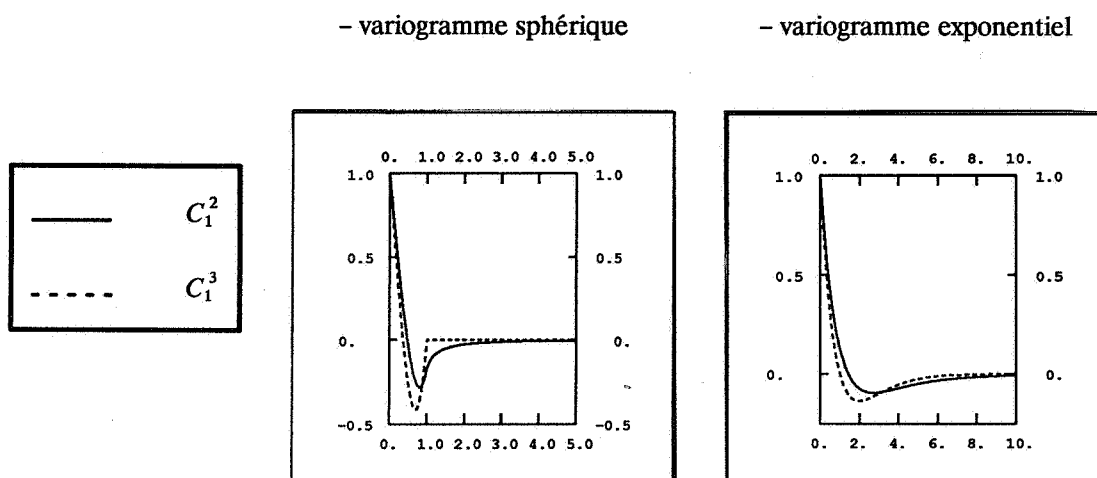
$$\text{Cov}(Z_x^{\text{BT}}, Z_y^{\text{BT}}) = \sum_{i=1}^n \omega_i C_1(\Delta t | \lfloor \langle a_i x \rangle / \Delta t \rfloor - \lfloor \langle a_i y \rangle / \Delta t \rfloor |)$$

Cette covariance n'est pas stationnaire et il est bien difficile de préciser le biais introduit par la discrétisation sur les droites. Cependant ce biais tend vers zéro lorsque Δt tend vers zéro. Nous avons donc choisi un pas

de discrétisation proportionnel à la portée du schéma à simuler sur le plan. Ceci est équivalent à la simulation sur les droites d'un schéma de portée unitaire : la modélisation des droites ne dépend pas de la portée à simuler sur le plan. Pour simuler des schéma de portée différente sur le plan, on peut donc utiliser la même modélisation des droites à un facteur d'échelle près. Dans le cas d'un schéma de transition, on choisit le nombre de points sur lequel cette transition est modélisée. Dans le cas d'une covariance tendant asymptotiquement vers zéro, la portée pratique retenue est la plus petite distance au delà de laquelle la valeur absolue de la covariance est inférieure à 10^{-2} . Dans cette étude, la portée pratique correspond à 20 points de discrétisation.

Pour simuler ces processus à temps discret, nous avons utilisé dans le cas du variogramme linéaire, des processus de Wiener-Levy et dans le cas d'une covariance stationnaire, les méthodes proposées par Boulanger (1990). Dans ce dernier cas, les covariances sur $\mathbf{R}$ ont des propriétés bien distinctes selon que l'on passe de $\mathbf{R}$ à $\mathbf{R}^2$ ou de $\mathbf{R}$ à $\mathbf{R}^3$: figure 6. Les covariances pour le passage de $\mathbf{R}$ à $\mathbf{R}^2$ tendent beaucoup moins rapidement vers zéro, elles sont beaucoup plus difficile à simuler (Par exemple, les modélisations par processus auto-régressif ou par moyenne mobile sont en général d'ordre plus élevé.).

figure 6 : covariance sur $\mathbf{R}^1$ pour la simulation par bandes tournantes sur $\mathbf{R}^2$ ou $\mathbf{R}^3$



3.2 Mise en œuvre des simulations

Nous avons étudié en pratique le nombre de droites nécessaire.

La grille simulée est carrée de taille 256-256. Deux modèles sont utilisés :

- un variogramme sphérique de portée 10,
- un variogramme linéaire de pente 1.

Les points utilisés pour calculer l'intégrale sur la demi-sphère sont à 2D les sommets des polygones réguliers et à 3D les points des suites I.2 et III.2.3. Le nombre considéré de points varie de 15 à 81.

Avec 15 directions, on observe des fluctuations fortes sur les statistiques et variogrammes expérimentaux (figure 7) et les linéaments induits par les bandes sont très visibles (figures 8 et 9).

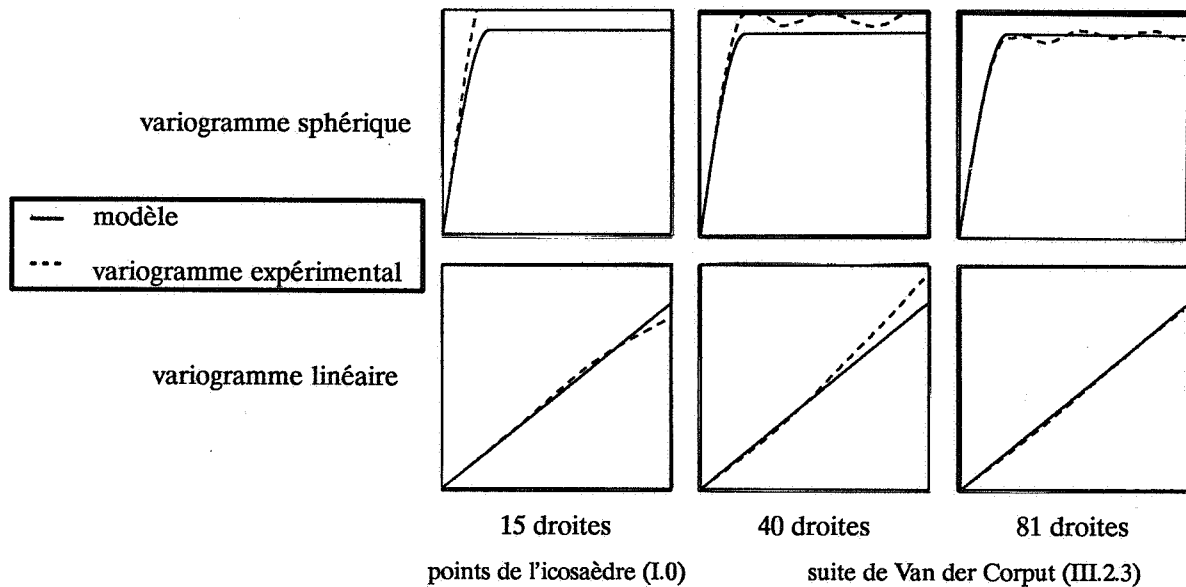
Dès 40 droites, les fluctuations statistiques, compatibles avec le modèle, sont plus importantes que le biais introduit par la discrétisation (figure 7). Ainsi, avec 40 droites, les linéaments s'estompent dans le cas d'une simulation 2D. Ils restent très visibles avec les directions déduites de l'icosaèdre et perceptibles avec les directions de la suite III.2.3. Avec 81 droites, des linéaments ne sont plus distinguables pour une simulation 2D ou une simulation 3D avec la suite III.2.3. Par contre les droites restent visibles sur la simulation 3D avec les points I.2 (figures 8 et 9).

Avec moins de 100 droites, la méthode de simulation par bandes tournantes permet une simulation satisfaisante des schéma considérés. Ceci rejoint les recommandations de Thompson et al. (1989) qui discrétisaient la sphère de $\mathbf{R}^3$ à l'aide de 100 points aléatoires. Cependant, la suite II.2.3 (coordonnées

sphériques et suite de Van der Corput) donne à 3D les meilleurs résultats : les projections des $2^{n+1}-1$ premières droites sur le plan horizontal sont réparties régulièrement avec les angles $(\pi k/2^n)_{1 \leq k \leq 2^{n+1}-1}$. Dans ce cas, l'épandage se fait comme un passage de $\mathbf{R}$ à $\mathbf{R}^2$ et la portée sur les droites projetée est inversement proportionnelle au cosinus de l'azimuth.

figure 7 : quelques variogrammes expérimentaux calculés dans la direction [100]

simulation par passage de $\mathbf{R}^1$ à $\mathbf{R}^3$



4 - Conclusion

Il existe des suites de points permettant une discrétisation fine de la demi-sphère de $\mathbf{R}^3$. Ceci permet une modélisation par "bandes tournantes" de toute covariante isotrope de $\mathbf{R}^3$. Une simulation dans le plan peut être obtenue comme coupe d'une simulation dans l'espace. Cette démarche n'était pas conseillée dans la mesure où les droites utilisées pour simuler à 3D étaient les 15 droites de l'icosaèdre (Chilès, 1977). Elle peut s'avérer particulièrement intéressante dans le cas d'une covariance à portée finie car le passage de C_3 à C_1 conserve cette portée, ce qui n'est pas le cas du passage de C_2 à C_1 .

figure 8 : simulations par la méthode des bandes tournantes

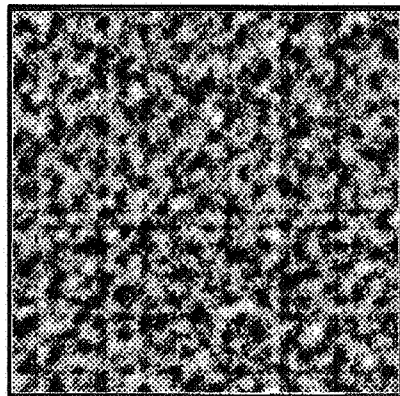
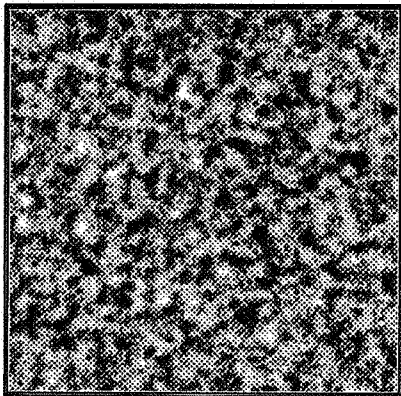
$$\gamma(h) = sph(|h|/10)$$

$$n_x = n_y = 256$$

 R^2 R^3

points de l'icosaèdre (I.0)

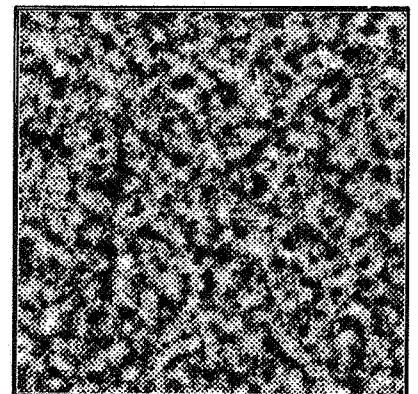
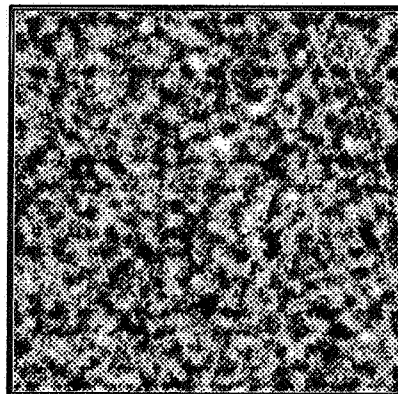
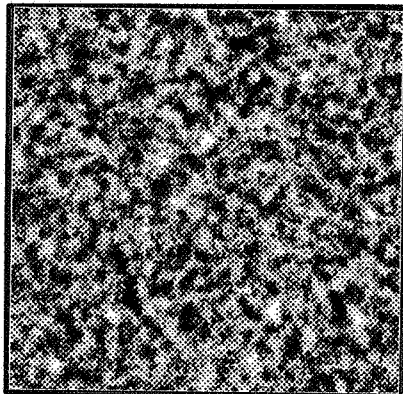
15 droites



triangulation (I.2)

Suite de Van der Corput (III.2.3)

40 droites



81 droites

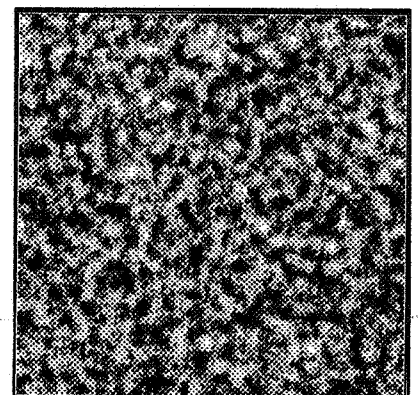
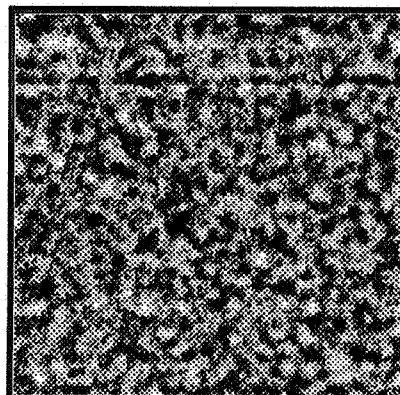
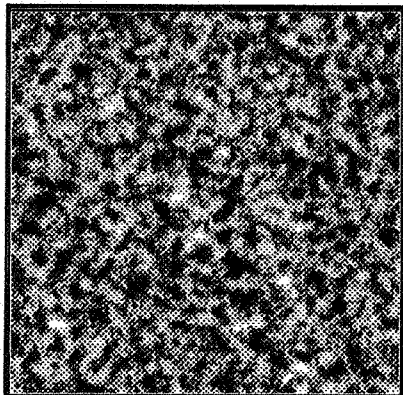


figure 9 : simulations par la méthode des bandes tournantes

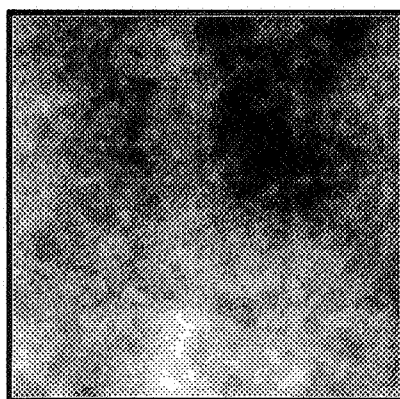
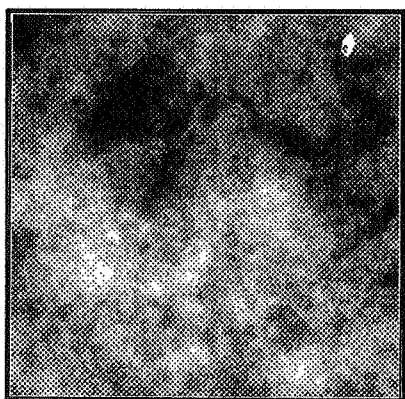
$$\gamma(h) = |h|$$

$$n_x = n_y = 256$$

 $\mathbb{R}^2$ $\mathbb{R}^3$

points de l'icosaèdre (I.0)

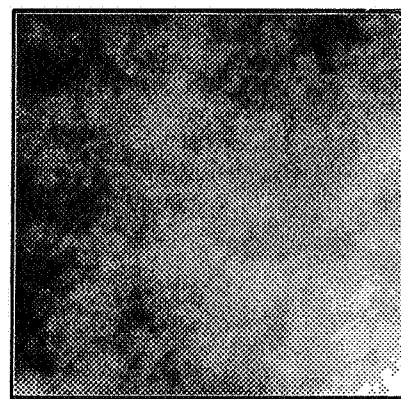
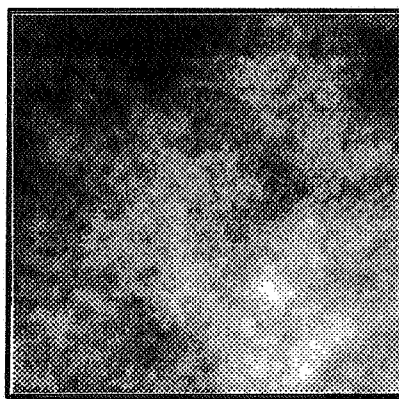
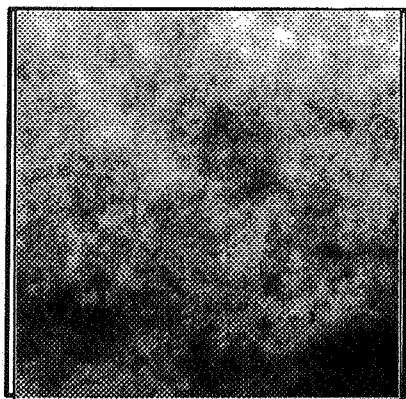
15 droites



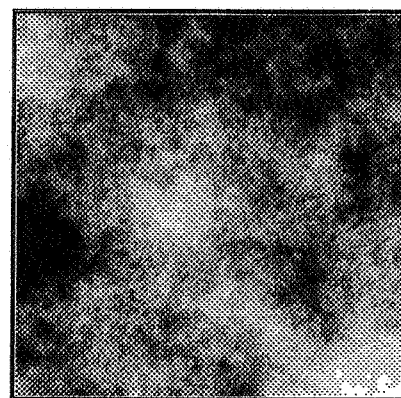
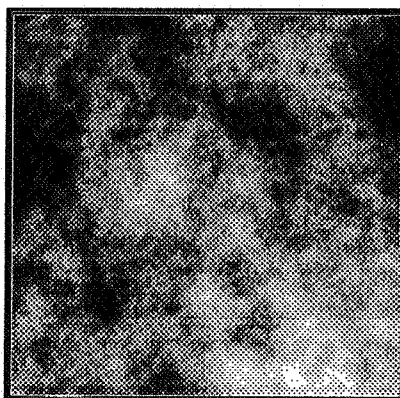
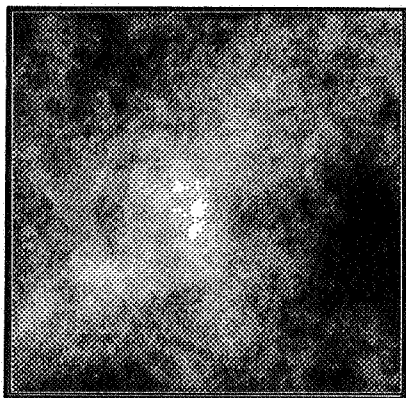
triangulation (I.2)

Suite de Van der Corput (III.2.3)

40 droites



81 droites



5 – Bibliographie

- **Barnes R. J. and Johnson T. B.** (1984), *Positive kriging*, Proceeding of NATO–ASI Geostatistics for natural ressources characterization, South Lake Tahoe, California, 1983, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland, 1984, p.231–244.
- **Boulanger, F.** (1990), *Modélisation et simulation de variables régionalisées par des fonctions aléatoires stables*, Thèse de Docteur en Géostatistique, Ecole des Mines de Paris, Centre de Géostatistique, Fontainebleau, 1990.
- **Bouleau, N.** (1986), *Probabilités de l'ingénieur, variables aléatoires et simulation*, Hermann, 1986.
- **Chilès, J. P.** (1977), *Géostatistique des phénomènes non stationnaires*, Thèse de Docteur-ingénieur, Nancy, 1986.
- **Guibal, D.** (1972), *Simulations de schémas intrinsèques*, N-291, Ecole des Mines de Paris, Centre de Géostatistique, Fontainebleau, 1972.
- **Lubotzky A. , Phillips R. , Sarnak P.** (1986), *Hecke operators and distributing points on sphere I*, CPAM, 1986, Vol. 39, p. 149–186.
- **Matheron, G.** (1972), *Quelques aspects de la montée*, N-271, Ecole des Mines de Paris, Centre de Géostatistique, Fontainebleau, 1972.
- **Matheron, G.** (1973), *The intrisic random functions and their applications*, Adv. Appl. Prob., 1973, Vol. 5, p. 435–468.
- **Tompson A. F. B. , Abadou R. and Gelhar L. W.** (1989), *Implementation of a three-dimensional Turning Bands random field generator*, Water Ressources. Res., 1989, Vol. 25, no 10, p. 2227–2243.