Échantillonnage pour une analyse granulométrique

par P. GY,

Directeur du laboratoire d'Études de Minerais
Société Minerais et Métaux

Il est courant d'échantillonner un lot de minerai pour connaître son analyse granulométrique.

La qualité d'un produit étant souvent liée à sa répartition granulométrique, on conçoit qu'il soit utile de connaître celle-ci avec précision, et également de connaître l'erreur d'échantillonnage commise au cours du prélèvement.

De la connaissance de cette erreur, il sera possible de déduire des règles concernant l'échantillonnage.

C'est sous cet angle qu'a été entreprise l'étude relatée ci-dessous.

Définitions

Définissons les grandeurs suivantes :

P poids du lot à échantillonner;

P' poids de l'échantillon prélevé;

P_λ poids de la classe λ du lot à échantillonner;

P'_λ poids de la classe λ de l'échantillon prélevé.

Entre ces grandeurs existent les relations suivantes :

$$\frac{P'}{P} = \pi_e \qquad (1)$$

définissant le poids relatif π_e de l'échantillon :

$$\frac{P_\lambda}{P} = \pi_\lambda \qquad (2)$$

définissant le poids relatif π_λ de la classe λ dans le lot à échantillonner :

$$\frac{P'_\lambda}{P'} = \pi'_\lambda \qquad (3)$$

définissant le poids relatif π'_λ de la classe λ dans l'échantillon.

D'autre part, nous savons que :

$$P = \sum_\lambda P_\lambda \qquad (4)$$

$$P = \sum_\lambda P'_\lambda \qquad (5)$$

Si l'échantillonnage pouvait être rendu parfait (à supposer que la population de fragments constituant le lot s'y prêtât), nous devrions avoir :

$$P'_\lambda = \pi_e P_\lambda \qquad (6)$$

ce qui entraînerait :

$$\pi'_\lambda = \pi_\lambda \qquad (7$$

Nous savons qu'il n'en est rien et que dans la réalité P'_λ diffère de sa valeur théorique $\pi_e P_\lambda$ d'une certaine quanble que nous supposerons pour l'instant assez petite pour que l'on puisse l'assimiler à la différentielle dP'_λ.

Dans ces conditions π'_λ diffère de π_λ d'une quantité que nous appellerons $d\pi'_\lambda$.

Expression de $d\pi'_\lambda$

Des expressions (3) et (5) on tire (en affectant de l'indice λ_0 les grandeurs relatives à une classe déterminée) :

$$\pi_{\lambda_0} = \frac{P'_{\lambda_0}}{\sum\limits_{\lambda} P'_\lambda} \qquad (8)$$

En considérant tous les P'_λ comme des variables, et en différenciant (8), il vient :

$$d\pi'_{\lambda_0} = \sum_{\lambda} \frac{\partial \pi'_{\lambda_0}}{\partial P'_\lambda} dP'_\lambda \qquad (9)$$

qui s'écrit, tous calculs faits :

$$d\pi'_{\lambda_0} = \frac{1}{P'}\Big[(1-\pi'_{\lambda_0})dP'_{\lambda_0} - \pi'_{\lambda_0}\sum_{\lambda \neq \lambda_0} dP'_\lambda\Big] \qquad (10)$$

Les erreurs représentées par dP'_λ sont en principe indépendantes quand l'échantillonnage est conduit suivant les règles.

Ces erreurs dP'_λ sont des erreurs aléatoires qui, étant donné la nature discontinue des P'_λ ne peuvent manquer de se distribuer suivant une loi de type binominal. Mais, chaque P'_λ étant en général constitué d'un nombre relativement important des fragments représentant le facteur de discontinuité, il est permis d'admettre en bonne approximation que cette loi discontinue est pratiquement confondue avec la loi normale limite.

L'erreur $d\pi'_{\lambda 0}$ est donc une somme algébrique d'erreurs aléatoires normales qui, nous le montrerons plus loin, ont une moyenne nulle.

Expression de la variance de π'_{λ_0}

Si nous appelons σ'_λ l'écart-type de la loi normale de distribution de P'_λ, on passe facilement de l'équation (10) à l'équation aux variances :

$$\sigma^2(\pi'_{\lambda_0}) = \frac{1}{P'^2}\Big[(1-\pi'_{\lambda_0})^2\sigma'^2_{\lambda^0} + \pi'^2_{\lambda_0}\sum_{\lambda \neq} \sigma'^2_\lambda\Big] \qquad (11)$$

Remarquons maintenant que :

$$dP' = \sum_{\lambda} dP'_\lambda \qquad (12)$$

ce qui entraîne :

$$\sigma'^2 = \sum_{\lambda} \sigma'^2_\lambda \qquad (1$$

L'équation (11) peut donc s'écrire :

$$\sigma^2(\pi'_{\lambda_0}) = \frac{1}{P'^2}\Big[(1-2\pi'_{\lambda_0})\sigma'^2_{\lambda_0} + \pi'^2_{\lambda_0}\sum_{\lambda} \sigma'^2_\lambda\Big] \qquad (1$$

ou encore, en incorporant (13) :

$$\sigma^2(\pi'_{\lambda_0}) = \frac{1}{P'^2}\Big[(1-2\pi'_{\lambda_0})\sigma'^2_{\lambda_0} + \pi'^2_{\lambda_0}\sigma^{2'}\Big] \qquad ($$

et en rapportant les variances aux carrés des grandeu considérées :

$$\frac{\sigma^2(\pi'_{\lambda_0})}{\pi'^2_{\lambda_0}} = (1-2\pi'_{\lambda_0})\frac{\sigma'^2_{\lambda_0}}{P'^2_{\lambda_0}} + \frac{\sigma'^2}{P'^2} \qquad (16$$

Le calcul se ramène donc à la détermination de σ

Calcul de σ'^2_λ

Le poids P'_λ est la somme des poids des fragments constituants.

Soit $p_{\lambda i}$ le poids du fragment d'indice i de la fraction (du lot ou de l'échantillon).

Soit N_λ le nombre de fragments constituant la fraction λ du lot et N'_λ le nombre de fragments constituant la fraction λ de l'échantillon.

Il vient :

$$P_\lambda = \sum_{i=1}^{N_\lambda} p_{\lambda i} \qquad (17)$$

$$P'_\lambda = \sum_{i=1}^{N'_\lambda} p_{\lambda i} \qquad (18)$$

Introduisons une fonction $\eta(i)$ liée au fragment i et qui prendra la valeur :

1 si le fragment est prélevé pour figurer dans l'échantillon;

0 si le fragment reste à la souche.

L'expression (18) peut alors s'écrire :

$$P'_\lambda = \sum_{i=1}^{N_\lambda} \eta(i) p_{\lambda i} \qquad (19)$$

C'est à partir de l'expression (19) que nous allons calculer les moments de premier et second ordre (la moyenne et la variance) de P'_λ.

Expression de la moyenne de la distribution de P'_λ

Nous avons assumé plus haut que dP'_λ avait une moyenne nulle. Nous allons maintenant le démontrer.

La moyenne de P'_λ s'écrit (le symbole $E(P'_\lambda)$ exprimant l'espérance mathématique de P'_λ) :

$$E(P'_\lambda) = E\left[\sum_{i=1}^{N_\lambda} \eta(i) p_{\lambda i}\right] \tag{20}$$

Les propriétés des espérances mathématiques nous permettent d'écrire :

$$E(P'_\lambda) = \sum_{i=1}^{N_\lambda} p_{\lambda i} E[\eta(i)] \tag{21}$$

L'expression $E[\eta(i)]$ revenant fréquemment dans les calculs ultérieurs nous allons commenter son calcul :

Soit $\eta_1(i) = 1$ et $\eta_2(i) = 0$ les deux valeurs prises par la fonction $\eta(i)$.

La valeur $\eta_1(i)$ est prise par tous les fragments prélevés au bénéfice de l'échantillon. Sa probabilité est donc π_e.

La valeur $\eta_2(i)$ est prise par tous les autres fragments. Sa probabilité est donc complémentaire et égale à $1-\pi_e$.

D'après la définition d'une espérance mathématique, on peut écrire :

$$E[\eta(i)] = \pi_e \eta_1(i) + (1-\pi_e)\eta_2(i) \tag{22}$$

$$E[\eta(i)] = \pi_e \tag{23}$$

Des expressions (21), (17) et (23), on tire :

$$E(P'_\lambda) = \pi_e P_\lambda \tag{24}$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Expression de la variance de la distribution de P'_λ

Par définition la variance σ'^2_λ s'écrit :

$$\sigma'^2_\lambda = E[P'_\lambda - \pi_e P_\lambda]^2 = E(P'_\lambda)^2 - \pi_e^2 P_\lambda^2 \tag{25}$$

Son calcul se ramène donc à celui de $E(P'_\lambda)^2$.

D'après (19) on peut écrire :

$$E[P'_\lambda]^2 = E\left[\sum_{i=1}^{N_\lambda} \eta(i) p_{\lambda i}\right]^2 \tag{26}$$

En développant le carré et utilisant les propriétés de la fonction espérance mathématique, il vient :

$$E(P'_\lambda)^2 = \{E[\eta(i)]^2\} \sum_{i=1}^{N_\lambda} p_{\lambda i}^2 + 2\{E[\eta(i)]\}\cdot\{E[\eta(j)]\} \sum_{i \neq j}^{N_\lambda} p_{\lambda i} p_{\lambda j} \tag{27}$$

Remarquons que $[\eta(i)]^2$ est égal à $\eta(i)$ et que nous connaissons déjà $E[\eta(i)]$ (identique d'ailleurs à $E[\eta(j)]$).

Il vient alors :

$$E(P'_\lambda)^2 = \pi_e \sum_{i=1}^{N_\lambda} p_{\lambda i}^2 + 2\pi_e^2 \sum_{i \neq j}^{N_\lambda} p_{\lambda i} p_{\lambda j} \tag{28}$$

Le second terme de (28) peut s'écrire :

$$2\sum_{i \neq j}^{N_\lambda} p_{\lambda i} p_{\lambda j} = \left[\sum_{i=1}^{N_\lambda} p_{\lambda i}\right]^2 - \sum_{i=1}^{N_\lambda} p_{\lambda i}^2 = P_\lambda^2 - \sum_{i=1}^{N_\lambda} p_{\lambda i}^2 \tag{29, 30}$$

L'expression de $E(P'^2_\lambda)$ devient alors :

$$E(P'_\lambda)^2 = \pi_e(1-\pi_e) \sum_{i=1}^{N_\lambda} p_{\lambda i}^2 + \pi_e^2 P_\lambda^2 \tag{31}$$

Et enfin, l'expression de σ'^2_λ :

$$\sigma'^2_\lambda = \pi_e(1-\pi_e) \sum_{i=1}^{N_\lambda} p_{\lambda i}^2 = \pi_e(1-\pi_e) C_\lambda^2 \tag{32}$$

On voit que σ'^2_λ dépend de la somme des carrés des poids des divers fragments constituant la classe λ du lot à échantillonner. Soit C_λ^2 cette somme (pour alléger les notations).

Remarquons d'après (13) que :

$$\sigma'^2 = \sum_\lambda \sigma'^2_\lambda$$

d'où il vient :

$$\sigma'^2 = \pi_e(1-\pi_e) \sum_\lambda C_\lambda^2 \tag{33}$$

Mais $\sum_\lambda C_\lambda^2$ n'est autre que la somme des carrés des poids des divers fragments étendue à l'ensemble du lot à échantillonner. Nous l'appellerons C^2 :

$$\sigma'^2 = \pi_e(1-\pi_e) C^2 \tag{34}$$

Avant de passer à l'expression $\sigma^2(\pi'^2_{\lambda_0})/\pi'^2_{\lambda_0}$ il nous faut encore écrire (en admettant que P'_λ est assimilable à $\pi_e P_\lambda$) :

$$\frac{\sigma'^2_\lambda}{P'^2_\lambda} = \left(\frac{1}{\pi_e} - 1\right)\frac{C_\lambda^2}{P_\lambda^2} \tag{35}$$

$$\frac{\sigma'^2}{P'^2} = \left(\frac{1}{\pi_e} - 1\right)\frac{C^2}{P^2} \tag{36}$$

Nous pouvons alors écrire à partir de (16) [en admettant que π'_{λ_0} est pratiquement égal à π_{λ_0}] :

$$\boxed{\frac{\sigma^2(\pi'_{\lambda_0})}{\pi'^2_{\lambda_0}} = \left(\frac{1}{\pi_e} - 1\right)\left[(1 - 2\pi_{\lambda_0})\frac{C^2_\lambda}{P^2_\lambda} + \frac{C^2}{P^2}\right]} \qquad (37)$$

L'expression (37) est l'expression fondamentale de la variance de l'erreur relative commise sur π'_{λ_0}. Elle contient les expressions de C^2_λ et C^2 qu'il y a lieu maintenant d'expliciter.

Expression de C^2_λ et C^2

Nous savons que :

$$C^2_\lambda = \sum_{i=1}^{N_\lambda} p^2_{\lambda i} \qquad (38)$$

Si la classe λ est une classe granulométrique dont les bornes sont relativement resserrées, nous allons pouvoir assimiler sans grande erreur tous les fragments de la classe λ au fragment type de celle-ci. Soit $\overline{p_\lambda}$ le poids du fragment type de la classe λ. Nous pouvons écrire :

$$C^2_\lambda = N_\lambda \overline{p}^2_\lambda \qquad (39)$$

$$P_\lambda = N_\lambda \overline{p}_\lambda \qquad (40)$$

$$C^2_\lambda = P_\lambda \overline{p}_\lambda \qquad (41)$$

Soit d_λ la dimension moyenne de la classe λ (définie par exemple comme la racine cubique de la moyenne arithmétique des cubes des dimensions extrêmes de la classe), δ la densité moyenne des grains et f un paramètre de forme moyen des grains : on peut écrire :

$$\overline{p_\lambda} = f\delta d^3_\lambda \qquad (42)$$

$$C^2_\lambda = f\delta P_\lambda d^3_\lambda \qquad (43)$$

La somme C^2 s'écrit alors :

$$C^2 = \sum_\lambda C^2_\lambda = f\delta \sum_\lambda P_\lambda d^3_\lambda \qquad (44)$$

$$C^2 = f\delta P \sum_\lambda \pi_\lambda d^3_\lambda \qquad (45)$$

Dans la théorie de l'échantillonnage des minerais en vue de la détermination d'une teneur (1), nous avons introduit le paramètre granulométrique g tel que d étant la dimension à travers laquelle 90 à 95 % du tout de minerai passent, l'on ait :

$$\sum_\lambda \pi_\lambda d^3_\lambda = g d^3 \qquad (46)$$

L'expression (45) s'écrit alors :

$$C^2 = f g \delta P d^3 \qquad (47)$$

Expression de $\sigma^2(\pi'_\lambda)/\pi'^2_\lambda$

En introduisant les expressions (43) et (47) dans l'expression (37) il vient :

$$\frac{\sigma^2(\pi'_\lambda)}{\pi'^2_\lambda} = \left(\frac{1}{\pi_e} - 1\right) f\delta \left[(1 - 2\pi_\lambda)\frac{d^3_\lambda}{P_\lambda} + g\frac{d^3}{P}\right] \qquad (48)$$

ou encore :

$$\boxed{\frac{\sigma^2(\pi'_\lambda)}{\pi'^2_\lambda} = \left(\frac{1}{P'} - \frac{1}{P}\right) f\delta \left[\left(\frac{1}{\pi_\lambda} - 2\right) d^3_\lambda + g d^3\right]} \qquad (49)$$

L'expression (49) est l'expression pratique de la variance de l'erreur relative commise sur π'_λ.

Pour pouvoir l'appliquer, il faut toutefois posséder un certain nombre de données, au moins à l'état d'estimation.

La détermination de P', P, d_λ, d ne présente, en général, aucune difficulté.

La connaissance du minerai permet la plupart du temps de définir δ avec une bonne précision. Restent à chiffrer les paramètres f et g. Une étude antérieure sur l'échantillonnage (déjà citée) a permis d'établir que, dans les cas les plus fréquents, f avait une valeur voisine de 0,5 et que g restait en général voisin de 0,25.

Quant à π_λ, on nous objectera que l'opération d'échantillonnage étant précisément destinée à déterminer sa valeur, l'expression (49) ne peut être calculée qu'a posteriori. C'est exact. Toutefois, il est rare qu'on ne possède pas une idée de sa valeur, et c'est cette valeur grossièrement déterminée qui nous servira à estimer a priori la valeur de la variance. On en tirera des conséquences que nous allons maintenant examiner.

---

(1) L'Échantillonnage des Minerais par P. GY.
1. Congrès de Paris, septembre 1953 et *Revue de l'Industrie Minérale*, avril 1954.
2. Congrès de Goslar, mai 1955 et *Revue de l'Industrie Minérale*, février 1956.

Simplification de l'expression de la variance

À titre d'exemple, appliquons l'expression (49) à diverses analyses granulométriques connues (voir ci-dessous une analyse type).

On voit immédiatement que l'expression de σ^2 est en général beaucoup plus grande pour les fractions grossières que pour les fractions fines.

Si, donc, on se fixe une précision donnée, c'est sur les fractions grossières qu'il y aura lieu de fixer son attention.

Nous remarquerons alors que, quand d_λ^3 est voisin de d le terme en gd^3 est négligeable devant le terme en d (approximation minorante).

Comme par ailleurs il est fréquent que P' soit petit devant P, on peut négliger le terme en $\frac{1}{P}$ devant le terme en $\frac{1}{P'}$ (approximation majorante).

L'expression (49) devient alors pratiquement :

$$\boxed{\frac{\sigma^2(\pi'_\lambda)}{\pi'^2_\lambda} = \frac{f\delta}{P'}\left(\frac{1}{\pi_\lambda} - 2\right) d_\lambda^3} \qquad (50)$$

Poids d'échantillon à prélever

Souvent, le problème se pose sous la forme suivante : quel poids d'échantillon doit-on prélever pour assurer une précision donnée, disons une probabilité déterminée (par exemple 95 %) de ne pas dépasser une erreur relative maximum choisie à l'avance (par exemple 2 θ)?

Ceci revient à dire que P' doit satisfaire à l'équation ci-dessous dérivée de (50) :

$$\theta^2 = \frac{f\delta}{P'}\left(\frac{1}{\pi_\lambda} - 2\right) d_\lambda^3 \qquad (51)$$

d'où l'on tire :

$$P' = \frac{f\delta}{\theta^2}\left(\frac{1}{\pi_\lambda} - 2\right) d_\lambda^3 \qquad (52)$$

Si l'on désire assurer au moins la même précision pour toutes les classes granulométriques, on calculera P' pour les classes granulométriques les plus grossières et on retiendra la valeur la plus forte.

Exemple. — Un lot de minerai de densité moyenne 3 répond sensiblement à l'analyse granulométrique ci-dessous :

Classe	Poids	d_λ^3
	%	
— 10 + 8 mm.......	5	$d_1^3 = 0.75$
— 8 + 6.3 mm.......	10	$d_2^3 = 1/2$ $d_1^3 = 0.38$
— 6.3 + 5 mm.......	15	$d_3^3 = 1/4$ $d_1^3 = 0.19$
— 5 + 4 mm.......	15	$d_4^3 = 1/8$ $d_1^3 = 0.10$
— 4 + 3.15 mm.......	15	$d_5^3 = 1/16$ $d_1^3 = 0.05$
— 3.15 + 2.5 mm.......	10	$d_6^3 = 1/32$ $d_1 = 0.025$
— 2.5 + 2 mm.......	10	$d_7^3 = 1/64$ $d_1^3 = 0.012$
— 2 mm.	20	.. ...

On veut l'échantillonner de façon à déterminer son analyse granulométrique et l'on désire que le poids relatif de chaque fraction soit déterminé avec une erreur relative qui ne saurait dépasser 2 % (avec une probabilité de 95 %). Ceci signifie :

$$2\theta = 2\ \% \qquad \theta^2 = 10^{-4}$$

Nous prendrons pour f la valeur 0,5 valable en bonne approximation pour les minerais courants.

Le tableau ci-dessous indique les valeurs de P' déterminées pour toutes les classes granulométriques.

Classe	Poids P' minimum en kg
— 10 + 8 mm.................	200
— 8 + 6.3 mm.................	46
— 6.3 + 5 mm.................	14
— 5 + 4 mm.................	7
— 4 + 3.15 mm.................	3.5
— 3.15 + 2.5 mm.................	3
— 2.5 + 2 mm.................	1.5
— 2 mm.	non calculé.

On voit que c'est la classe la plus grossière qui impose le poids P' à toutes les autres et que la condition fixée exige le prélèvement de 200 kilogrammes environ.

Remarquons en passant que, quand l'analyse est faite sur base de la série Afnor on peut écrire :

$$d_{\lambda+1}^3 = \frac{1}{2} d_\lambda^3 = \frac{1}{2\lambda} d_1^3 \qquad (53)$$

Quand on s'est fixé d_1 on peut écrire pour la fraction λ :

$$P' = \frac{f\delta d_1^3}{\theta^2} \cdot \frac{1}{2\lambda}\left(\frac{1}{\pi_\lambda} - 2\right) \qquad (54)$$

Cette dernière formule peut faciliter le calcul par récurrence des divers termes de la série.

Importance du terme en gd^3 qui a été négligé

Nous avons dit que le terme en gd^3 était en général négligeable — au moins pour les fractions grossières — devant le terme en d_λ^2.

Dans l'exemple qui vient d'être développé, g est voisin de 0,18 et d^3 est égal à 0,75.

Le produit gd^3 vaut donc 0,135. Le terme correctif $fcgd^3/b^2$ qui serait à ajouter aux poids indiqués dans le tableau ci-dessus ne serait que de 2 kilogrammes. On voit qu'on peut le négliger devant les poids trouvés pour les termes élevés de la série.

Remarque. — L'expression (50) qui donne une valeur approchée de la variance de π'_λ contient le facteur $\left(\frac{1}{\pi_\lambda} - 2\right)$ qui devient négatif pour :

$$\pi_\lambda > 0{,}50 \ (50\ \%)$$

Si l'on acceptait la formule (50) au pied de la
on se heurterait dans ce dernier cas à une
Cela signifie simplement que le terme positif
qui a été négligé en première approximation
alors prépondérant.

D'ailleurs, l'examen de l'équation (11)
dérivé tout le calcul montre que σ^2 est bien une
de carrés, liée par conséquent à être positive.

Cette remarque nous permet de voir que le
gd^3, négligeable quand les fractions grossières
poids relativement faible (disons moins de 20
par contre être conservé quand les fractions
grossières contiennent une proportion très im
du lot (par exemple plus de 20 % dans une
fraction). Ce dernier cas est fréquent quand on
à un produit classé supérieurement (produit
en circuit fermé par exemple).

BIBLIOGRAPHIE

Manuel des machines de mine

Le présent ouvrage constitue la revision et le développement d'un livre dont nous avons signalé la quatrième édition dans le numéro II des *Annales des Mines* de 1951 (p. 44).

Après une première partie qui rappelle les notions de thermodynamique utiles à la compréhension du reste de l'exposé, l'auteur développe les méthodes de calcul des canalisations pour fluides, les propriétés des combustibles et les phénomènes de la combustion; on trouvera des descriptions de chaudières, machines à vapeur et leurs accessoires avec toutes indications pour l'établissement de projets éventuels. Une place est faite également aux moteurs à combustion interne.

M. Hoffmann passe ensuite en revue l'équipement
les treuils, les pompes à piston et centrifuges, les com
et les réseaux d'air comprimé, les machines d'abatage,
gement au chantier et de remblayage, les ventilateurs
appareils réfrigérants pour la climatisation de l'atmosphère
terraine.

Les dernières pages constituent un aperçu rapide
cipales opérations de mesures qu'on a l'occasion d'effectuer
les mires et des appareils utilisés à cet effet.

La plupart des chapitres sont suivis d'applications
qui précisent l'exposé et peuvent servir de guide aux

C. Hoffmann, professeur à l'école des mines de Bochum : **Lehrbuch der Bergwerksmaschinen (Kraft-und Ar maschinen).** Springer-Verlag, Berlin ouest, Göttingen, Heidelberg, 1956. 5e édition revue et augmentée. XII-534 19,5 × 27 cm, 645 figures. Index alphabétique d'environ 1 050 articles. Prix au magasin cartonné toilé : 36 DM.