

# MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

## ET

# GRANULOMÉTRIES EN PLACE

par A. HAAS

Ingénieur des Mines à l'École des Mines de Nancy

G. MATHERON

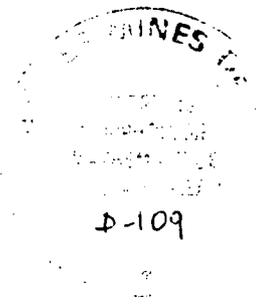
Ingénieur en chef des Mines, Docteur ès Sciences

J. SERRA

Ingénieur des Mines à l'École des Mines de Nancy

Extrait des ANNALES DES MINES de décembre 1967





# MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

## ET

# GRANULOMÉTRIES EN PLACE

par A. HAAS

Ingénieur des Mines à l'École des Mines de Nancy

G. MATHERON

Ingénieur en chef des Mines, Docteur ès Sciences

J. SERRA

Ingénieur des Mines à l'École des Mines de Nancy

Diverses notions morphoscopiques (granulométries, surfaces spécifiques, indices d'arrondi, etc.) qui jouent un grand rôle dans divers domaines (milieux poreux, pétrographie, métallurgie, cinétique chimique, etc.) peuvent être réunies dans le cadre d'une morphologie mathématique. La présente étude se propose d'exposer cette théorie de manière aussi simple que possible, et de montrer à l'occasion d'exemples expérimentaux, comment il est possible de la mettre en œuvre dans les applications, à l'aide notamment de l'analyseur de texture de J. Serra.

Dans ce premier article, on se limitera aux notions les plus simples, nécessitant seulement l'observation de points alignés sur une même droite : en premier lieu, la covariance  $C(h)$ . La dérivée  $C'(0)$  permet de déterminer la surface spécifique, tandis que l'intégrale de  $C(h)$  conduit à la notion de portée, et permet de déceler des structurations hypergranulométriques. En deuxième lieu, les granulométries des traversées des pores et des grains, (en nombre et en longueur). La dérivée de ces courbes en  $h = 0$  conduit à un indice d'angulosité, tandis que leurs intégrales (les moments) permettent de définir l'étoile, notion généralisant celle de grain moyen, mais applicable aussi bien aux pores.

Dans un deuxième et dernier article, nous introduirons des notions topologiques (nombres spécifiques), et nous traiterons complètement le cas particulier des grains sphériques.

## I — INTRODUCTION

## 1.1. Une morphologie objective et mesurable

Nous nous proposons, dans ce qui suit, d'appliquer les méthodes de la morphologie mathématique à l'étude des mesures linéaires de textures en place. Il s'agit, on le devine, de caractériser les formes, souvent complexes, que l'on peut, par exemple, observer sur une lame mince, à l'aide de critères indépendants des propriétés structurales de notre appareil perceptif. Cet appareil, en effet, ne peut fonctionner qu'en s'appropriant son objet, en réorganisant ce qui lui est donné, de manière à le rendre conforme à ses propres structures. Les représentations immédiates que nous fournit la perception sont donc souvent trompeuses. La figure 1 montre des petits cercles implantés au hasard dans le plan, selon un schéma de Poisson. L'œil humain,

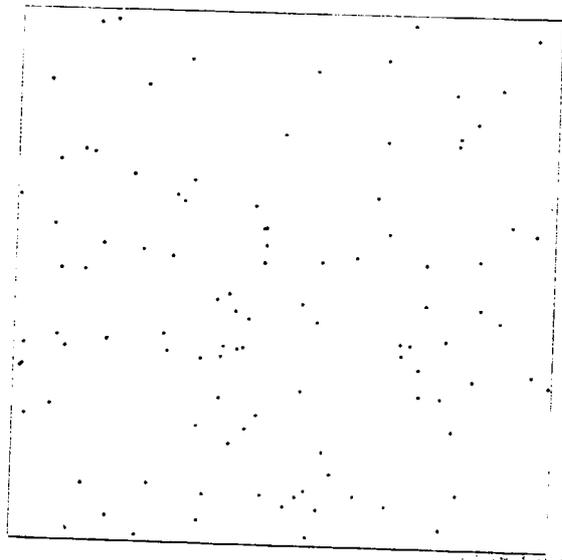


Fig. 1. — Implantation de petits cercles au hasard

lui, perçoit des groupes de points agglomérés, séparés par de grandes plages vides. Il devine des centres d'attraction et de répulsion, et tout un réseau complexe de relations mutuelles parfaitement imaginaires.

Pour caractériser de façon objective les formes et les groupements, il nous faut construire des concepts mathématiques qui sachent aller chercher ce qu'il y a d'essentiel dans les structures et qui, de plus, puissent déboucher sur une expérimentation possible. Or, il se trouve que ces deux exigences sont très liées. Si la notion de granulométrie des traversées, que nous analyserons un peu plus loin,

est la mieux connue et la plus manipulée en pratique, c'est assurément parce qu'il suffit d'une règle graduée pour la mettre en œuvre. Cependant, cette notion possède un contenu morphologique certain, mais, comme on le verra dans un instant, limité.

Dans cette étude, nous considérons comme techniquement réalisables toutes les observations qu'on peut déduire de mesures effectives sur une ou plusieurs lignes parallèles. Il peut s'agir entre autres :

a) de la mesure d'une longueur traversée (granulométrie);

b) de la probabilité que deux points distants de  $h$  se trouvent dans le même constituant  $i$ , ou que l'origine soit dans le constituant  $i$  et l'extrémité dans le constituant  $j$  (covariances);

c) de la probabilité que chacun des quatre sommets d'un rectangle se trouve dans tel ou tel constituant;

d) de la probabilité que deux côtés parallèles d'un rectangle soient l'un dans le constituant  $i$ , l'autre dans le constituant  $j$ .

## 1.2. L'analyseur de textures

L'estimation numérique de telles probabilités est effectivement réalisée à partir de lames minces, de sections polies ou de réductions photographiques sur l'« Analyseur de textures ». Cet appareil, déjà présenté par ailleurs (réf. 1), qui a permis d'illustrer ce texte d'une série d'exemples, fonctionne très simplement.

L'échantillon à mesurer est placé sur une platine de microscope qui se déplace suivant une course programmée; dans le plan image du microscope, un groupe de deux photomultiplicateurs, précédés de diaphragmes ponctuels sondent au cours du balayage deux lignes parallèles de distance réglable. L'information qu'ils prélèvent est classée par rapport à des seuils, discrétisée, puis envoyée dans une petite unité logique de vingt-cinq mémoires. A chaque instant, un groupe restreint de renseignements, parmi les plus récents, est pris en compte par la logique qui teste sur lui la présence ou l'absence d'événements du type  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ , ci-dessus dont les valeurs moyennes à travers tout le champ analysé fourniront les granulométries, les covariances, etc.

Tout se passe comme si un observateur déplaçait par bonds discontinus réguliers à travers l'image une petite lucarne munie d'un réticule en forme de rectangle ou de groupe de points, et notait à chaque fois si les côtés de son rectangle sont contenus dans les constituants adéquats ou non.

On verra dans les applications comment cet engin est manipulé en pratique, il nous suffit pour le moment de savoir qu'il oriente cette étude vers les seules interprétations morphologiques qu'on peut extraire d'observations linéaires, suivant des groupes de droites parallèles (sans pour autant établir l'inventaire exhaustif de ce type d'observations).

### 1.3. Discussion de la notion de granulométrie

Resituons-nous maintenant sur le plan conceptuel et cherchons comment caractériser une forme. Nous pouvons partir, pour amorcer cette démarche critique, de la notion usuelle de granulométrie.

Telle qu'on la comprend habituellement, la notion de granulométrie repose sur l'existence de grains individualisables sans ambiguïté. Elle se rapporte à un schéma analogue à celui que nous représentons sur la figure 2 : des grains, les oolithes, fortement individualisés, de forme convexe, apparaissent en relief au-dessus d'un fond ou d'un ciment chloriteux dépourvu d'existence propre. Le ciment n'est là que pour remplir l'espace laissé libre par les grains qu'il moule en creux. Il ne détermine pas lui-même ses formes, mais se les laisse imposer par l'autre. Il faut d'ailleurs un certain effort d'attention pour arriver à voir ces formes négatives. L'observateur, donc, va compter les grains, mesurer leurs surfaces et construire une courbe granulométrique. Il ne s'occupera pas du ciment ou des pores. Il obtiendra ainsi des renseignements relatifs à la forme moyenne des grains considérés comme des individus indépendants les uns des autres. Mais il ne connaîtra pas leurs relations mutuelles, la manière dont ils s'arrangent dans l'espace. Pour représenter cet arrangement, il faudrait connaître la répartition des intervalles d'espace séparant les grains, c'est-à-dire justement la granulométrie des pores ou du ciment. Cette dernière est sans doute au moins aussi importante que celle des grains dans un grand nombre de questions. Les propriétés hydrodynamiques d'une roche, en particulier, sont de toute évidence liées directement à la granulométrie des pores beaucoup plus qu'à celle des grains. Cependant, la granulométrie des pores elle-même peut ne pas montrer certains arrangements : un phénomène aussi élémentaire qu'une périodicité entre

grains lui échappera totalement. Dès ce niveau, et encore plus à celui des répartitions d'échelles grandes par rapport aux grains, telles que des gros amas, le potentiel morphoscopique des courbes granulométriques est trop pauvre.

Par ailleurs, le schéma de la figure 2 correspond à un cas extrême : on n'a pas toujours une opposition aussi nette entre des grains convexes affirmant fortement leur individualité et leur ciment indifférencié. Les grains peuvent se souder, présenter des concavités, contenir des enclaves, etc. Toute concavité des grains a pour corollaire une convexité des pores. Au fur et à mesure que la notion de grain individualisable s'estompe et devient plus floue, on voit apparaître, en contrepartie, et se développer au sein du ciment, des ébauches d'individualisations, d'abord informes, qui vont en s'affirmant sans cesse davantage.

Fig. 2. — Exemple de forme forte : minerai de fer oolithique de Lorraine (détail agrandi de la fig. 4)

A : oolithes de limonite fortement individualisées  
B : ciment chloriteux  
C : grains de quartz et de calcite, moins individualisés que les oolithes



#### 1.4. Présentation du texte

Si donc nous désirons éviter les pièges que nous tendent les représentations spontanément anthropomorphiques (ou mieux, zoomorphiques) fournies par l'appareil perceptif humain, nous devons, en premier lieu construire un concept de granulométrie indépendant de toute notion de grain individualisable. Cette construction a été présentée par ailleurs (réf. 2) dans sa généralité. Nous nous limiterons ici aux granulométries linéaires : granulométries des traversées des grains et des pores, que nous exprimerons sous une forme probabiliste. Nous chercherons la signification morphologique des principaux paramètres de ces granulométries, autant pour la connaître que pour savoir ce qu'elle n'exprime pas, et dont le manque nous dirigera soit vers la notion de covariance, soit vers l'*analysis situs*.

Les granulométries linéaires, déduites d'observations effectuées exclusivement le long de droites, permettent cependant de reconstituer certains paramètres caractéristiques des milieux à 2 ou 3 dimensions dont elles sont extraites : l'*étoile*, d'abord, qui généralise la notion de surface moyenne, ou de volume moyen d'un grain individuel, mais qui s'applique aussi bien aux pores; en deuxième lieu, la *surface spécifique* de contact entre les grains et les pores (ou, plus généralement, entre deux constituants d'un milieu à plusieurs composantes). Ces divers paramètres ne caractérisent les propriétés structurales du milieu qu'à l'échelle de la granulométrie. Ils expriment seulement des rapports de voisinage immédiat. Pour atteindre les structures qui pourraient se manifester à plus vaste échelle, nous disposerons de la fonction de *covariance*, et nous en déduirons un rayon d'*ergodicité*, ou *portée*, qui représentera l'ordre de grandeur des dimensions de ces structures plus vastes.

Nous consacrerons la deuxième partie de cette étude à ce que l'on pourrait appeler l'*analysis situs* des granulométries planes (ce terme ancien convient très bien aux considérations géométriques élémentaires que nous avons en vue, dans lesquelles les notions d'ouverture et de fermeture topologiques ne jouent pour ainsi dire aucun rôle). Il s'agira ici de construire une notion précise de l'individualité pour les grains, comme pour les pores. Du point de vue de la convexité, considérée comme la plus haute forme d'affirmation de soi dont soit capable un individu appartenant au règne minéral, nous caractériserons un milieu poreux par deux

nombres spécifiques de convexité,  $v_1$  et  $v_0$ , représentant les nombres d'individus convexes équivalents aux grains et aux pores contenus dans l'unité de surface. Mais il est également possible de rattacher la notion d'individualité à celle de composante connexe. On appelle alors individu un ensemble connexe (d'un seul tenant) maximal constitué de points appartenant à une seule des deux composantes du milieu. Outre les grains proprement dits, nous devons considérer les enclaves qu'ils contiennent. Ce point de vue conduit à définir un nombre spécifique de connexité  $v_c$ , égal au nombre de grains connexes contenus dans la surface unité diminué du nombre des enclaves qu'ils contiennent. La solidarité qui lie étroitement les grains et les pores dans leurs efforts antagonistes pour s'affirmer sous une forme convexe s'exprimera par la relation  $v_c = v_1 - v_0$ . Dans le cas d'un milieu à trois dimensions, le nombre de connexité observé sur les sections planes pourra de plus être rattaché à la *courbure moyenne* de la surface de séparation des grains et des pores.

A la différence des notions purement linéaires introduites dans la première partie, l'*analysis situs* n'est possible que si l'on dispose d'observations faites simultanément sur deux droites parallèles, très proches l'une de l'autre : la deuxième dimension intervient effectivement, mais seulement sous la forme d'une amorcée.

En approfondissant ensuite la notion de nombre spécifique de convexité, nous constaterons qu'elle se relie de manière simple à la courbure du périmètre des grains. Il est même possible de déterminer expérimentalement la loi de répartition de cette courbure, et, en particulier, de distinguer les portions du périmètre où cette courbure est positive ou négative, selon que le grain a un comportement convexe ou concave. Ici, cependant, on rencontrera certaines difficultés expérimentales si le contour des grains présente des points anguleux.

Dans une troisième partie, enfin, nous examinerons le cas particulier des grains sphériques. La sphère représente la perfection de la forme convexe, c'est-à-dire l'idéal le plus élevé auquel puissent aspirer des grains déjà individualisés. Il en résulte des relations remarquables qui permettent, dans ce cas, et dans ce cas seulement, de reconstituer intégralement le nombre et la granulométrie des grains sphériques originels de l'espace à 3 dimensions, à partir de la granulométrie des cercles ou des segments induits que l'on peut observer sur des plans ou sur des droites.

## II — NOTIONS DÉDUITES D'OBSERVATIONS PUREMENT LINÉAIRES

Dans cette première partie, nous allons faire l'inventaire des renseignements que l'on peut tirer des observations les plus faciles à réaliser expérimentalement, c'est-à-dire des observations purement linéaires, pour lesquelles on n'a jamais besoin de considérer simultanément que des points alignés sur une même droite (groupes de points ou segments). Nous présenterons les outils mathématiques de base, qui sont la covariance et les granulométries des traversées, et nous examinerons les informations que chacun d'eux nous apporte relativement aux diverses échelles de structure.

### 2.1. La covariance

#### 2.1.1. Considérations géométriques préliminaires

Considérons un grain  $A$ , c'est-à-dire une figure géométrique limitée par un contour fermé (fig. 3). Il est parfaitement défini si l'on se donne une fonction  $k(x)$  égale à 1 ou 0, selon que le point  $x$  appartient ou non au grain. Le volume  $V$  (dans l'espace à 3 dimensions) ou la surface  $S$  (dans l'espace à 2 dimensions) de ce grain est évidemment l'intégrale :

$$V = \int k(x) dx$$

Cette donnée numérique est intéressante, mais ne suffit évidemment pas à caractériser la structure et l'aspect morphologique de notre grain. Si l'on

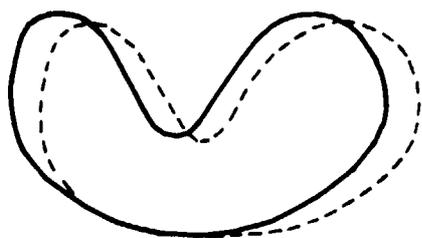


Fig. 3. — Fonction de covariance géométrique

définit la structure d'un ensemble comme le système des relations existant entre ses éléments ou ses parties, on voit qu'il n'est possible d'obtenir une information sur la structure de ce grain qu'à la condition de faire intervenir au moins deux points simultanément. Soient donc  $x$  et  $x+h$  deux points se déduisant l'un de l'autre dans une translation définie par le vecteur  $h$ . Ces deux points appar-

tiennent tous les deux au grain  $A$  si, et seulement si,  $k(x)k(x+h) = 1$ , ou encore, si le point  $x$  appartient à la fois à  $A$  et à son translaté  $A-h$  dans la translation réciproque  $-h$ . Introduisons donc la fonction :

$$K(h) = \int k(x)k(x+h) dx \quad (1)$$

Elle représente la mesure (le volume ou la surface) de l'intersection de  $A$  et de son translaté  $A-h$ , soit  $A \cap A-h$ . On peut aussi bien remplacer  $A-h$  par  $A_h$  (translaté de  $A$  dans la translation directe  $h$ ), les deux ensembles  $A \cap A-h$  et  $A \cap A_h$  se déduisant l'un de l'autre dans cette même translation. Ainsi :

$$K(h) = K(-h) = \text{Mes}(A \cap A-h) = \text{Mes}(A \cap A_h)$$

Si le grain est isolé,  $K(h)$  s'annule lorsque le module du vecteur  $h$  dépasse le plus grand diamètre du grain. Mais si nous avons plusieurs grains, et non plus un seul, il arrivera que  $x$  et  $x+h$  tombent dans des grains différents. Ainsi  $K(h)$  qui contient la mesure de l'intersection de chacun des grains avec les translatés de tous les autres, renseigne également sur les rapports existants entre les différents grains. En somme la covariance contourne la difficulté liée à la notion de grain individuel et dès que nous la probabiliserons, nous l'appliquerons indifféremment aux grains et aux pores.

Pour  $h=0$ ,  $K(0)$  représente le volume  $V$  du (ou des) grain. L'intégrale  $\int K(h) dh$  possède aussi une signification précise : si, dans le deuxième membre de (1), nous intégrons d'abord en  $h$  puis ensuite en  $x$ , nous faisons apparaître le carré du volume. Ainsi :

$$\begin{aligned} K(0) &= V \\ \int K(h) dh &= V^2 \end{aligned} \quad (2)$$

Si l'on désigne par  $r = |h|$  et  $\alpha$  le module et la direction du vecteur  $h$ ,  $K(h)$  est en réalité une fonction de la forme  $K(r, \alpha)$ . La manière dont cette fonction varie avec  $\alpha$ ,  $r$  restant fixe, donne une image des propriétés d'anisotropie des grains.

Il est également intéressant de considérer la dérivée en  $r$  :  $\frac{d}{dr} K(r, \alpha)$  et en particulier les valeurs qu'elle prend en  $r=0$  : elles dépendent de la direction  $\alpha$ , et nous les désignerons, pour abrégé, par  $K'_\alpha(0)$ . Pour en dégager la signification, considérons un vecteur de module  $\delta h$  très petit et de direction  $\alpha$ . La différence :

$$K(0) - K(\delta h) = -\delta h K'_\alpha(0)$$

représente la moitié du volume balayé par un vecteur équipollent à  $\delta h$  dont l'origine décrirait le contour du grain (ou des grains). Pour un grain convexe unique, ce volume est égal à  $\delta h S_\alpha$ ,  $S_\alpha$  désignant l'aire du contour apparent du grain en projection sur un plan perpendiculaire à la direction  $\alpha$ . Dans le cas général, on a encore une expression de la forme  $\delta h S_\alpha$ ,  $S_\alpha$  représentant cette fois la demi-somme des projections sur le plan perpendiculaire à  $\alpha$  des éléments d'aire  $dS$  de la surface limite des grains. Si l'on désigne par  $\theta$  l'angle de la normale à la surface d'un grain et de la direction  $\alpha$ , on obtient :

$$-K'_\alpha(0) = \frac{1}{2} \sum_i \int_{S_i} |\cos \theta| dS \quad (3)$$

(l'intégrale est prise sur la surface limite  $S_i$  du grain n°  $i$ , et la somme  $\sum$  est étendue à l'ensemble des grains). Ainsi,  $K'_\alpha(0)$  est lié à l'aire totale de la surface limite des grains,  $\sum S_i$ . Il est facile d'expliciter cette relation en prenant la valeur moyenne de (3) pour toutes les directions de l'espace. On obtient sans difficulté (en échangeant l'ordre des intégrations) :

$$-\frac{1}{4} \int K'_\alpha(0) d\alpha = \frac{1}{4} \sum_i S_i \quad (4)$$

On retrouve facilement le coefficient  $1/4$  en remarquant que la sphère de rayon  $R$  possède la surface  $4\pi R^2$  pour un contour apparent de  $\pi R^2$ .

Dans l'espace à deux dimensions, les surfaces  $S_i$  sont remplacées par les périmètres  $2L_i$  des grains, et les relations (3) et (4) deviennent :

$$\begin{aligned} -K'_\alpha(0) &= \frac{1}{2} \sum_i \int |\cos(\theta - \alpha)| ds \\ -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K'_\alpha(0) d\alpha &= \frac{1}{\pi} \sum_i 2L_i \end{aligned} \quad (5)$$

### 2.1.2. L'interprétation probabiliste

Les notions que nous avons introduites jusqu'ici sont de nature purement géométrique. Il n'y entre aucun élément aléatoire. Il est clair, cependant, que l'extrême complexité des milieux dont nous avons en vue la description va nous conduire, presque inévitablement, à adopter un langage probabiliste. A partir de maintenant, nous considérerons donc l'ensemble constitué par les grains comme un ensemble aléatoire. D'une manière plus précise, la fonction en tout ou rien  $k(x)$ , égale à 1 dans les grains et à 0 dans les pores, va être considérée comme une réalisation d'une fonction aléatoire

stationnaire. Le milieu auquel nous nous intéressons est donc (virtuellement) illimité et statistiquement homogène dans l'espace (stationnaire). La probabilité :

$$p = E[k(x)]$$

pour qu'un point donné  $x$  appartienne aux grains est alors une constante  $p$ , caractéristique du milieu. Si l'on convient d'appeler pores l'ensemble complémentaire des grains, la probabilité  $q = 1 - p$  pour que  $x$  appartienne aux pores est la porosité constante du milieu.

A la fonction  $K(h)$ , définie par l'intégrale (1), nous allons substituer la probabilité  $C(h)$  pour que les deux points  $x$  et  $x+h$  appartiennent simultanément aux grains  $A$  :

$$C(h) = P(x \in A, x+h \in A)$$

Cette fonction ne dépend que de  $h$ , et non du point d'appui  $x$ , à cause du caractère stationnaire. En  $h=0$ , on a évidemment :

$$C(0) = p$$

Lorsque le module  $h$  devient très grand, on constate, en général, que  $C(h)$  tend vers  $p^2$  : en effet, les points  $x$  et  $x+h$ , étant alors très éloignés l'un de l'autre, peuvent être regardés comme indépendants. La manière dont  $C(h)$  varie de  $p$  à  $p^2$  en fonction du module et de la direction du vecteur  $h$  va donc nous présenter un reflet des propriétés structurales du milieu envisagé à différentes échelles.

La covariance précédente  $C(h)$  est définie pour les grains. Si on s'intéresse maintenant à la covariance  $C_0(h)$  des pores, elle se relie très facilement à la précédente par la relation :

$$C(h) = C_0(h) + 2p - 1$$

Dans la suite, on parlera donc uniquement de la covariance  $C(h)$  des grains, sans préciser davantage.

Par contre, lorsque  $n$  constituants se trouvent en présence, la notion de covariance se généralise immédiatement aux probabilités  $C_{ls}(h)$  pour que les points  $x$  et  $x+h$  appartiennent respectivement à chacun des constituants  $l$  et  $s$ . Dans ce cas, il faut connaître toutes les  $C_{ls}(h)$ , pour les  $l$  et  $s$ , en nombre de  $\frac{n(n-1)}{2}$ , pour posséder l'équivalent morphologique de la covariance du cas où  $n=2$  (grains et pores). A partir de la donnée des  $C_{ls}(h)$ , on retrouve facilement les  $C_l(h)$  par la relation évidente :

$$C_l(h) = p_l - \sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq l)}}^{i=n} C_{li}(h)$$

(qui indique que le point  $x$  appartient au constituant  $l$ , et le point  $x + h$  à n'importe quel constituant), la réciproque étant inexacte dès que  $n > 3$ , puisqu'il y a  $\frac{n(n-1)}{2}$  termes  $C_{ls}(h)$  pour  $n$  termes  $C_l(h)$  : les  $C_{ls}(h)$  contiennent plus d'information que les  $C_l(h)$ .

On notera que la fonction  $C_{ls}(h)$ , à l'inverse de la covariance  $C_l(h)$ , n'est pas nécessairement symétrique. Si  $C_{ls}(h) \neq C_{ls}(-h)$  c'est que les constituants  $l$  et  $s$  sont placés de façon dissymétrique l'un par rapport à l'autre, dans la masse des  $n$  constituants (ex. oolithe à noyau de quartz excentrique) (réf. 3).

**2.1.3. La surface spécifique**

La dérivée  $C'_\alpha(0)$  de  $C(h)$  prise en  $h = 0$  dans la direction  $\alpha$  possède une signification intéressante, liée à la surface spécifique. Désignons, en effet, par  $\sigma$  la surface spécifique, et par  $d\sigma(\omega)$  la portion de celle-ci qui correspond aux éléments d'aire de la surface limite pour lesquels la normale (orientée, par exemple, vers l'intérieur des grains) possède une direction comprise dans un angle solide  $d\omega$ . La relation (3) se transpose immédiatement sous la forme :

$$-C'_\alpha(0) = \frac{1}{2} \int |\cos \theta| d\sigma(\omega) \quad (6)$$

et la relation (4) devient de son côté :

$$-\frac{1}{4\pi} \int C'_\alpha(0) d\alpha = \frac{1}{4} \sigma \quad (7)$$

Ainsi donc, il est possible de déterminer la surface spécifique d'un milieu poreux à partir d'observations effectuées sur lame mince, et même à partir d'observations purement linéaires. On en verra plus loin des exemples expérimentaux. Si le milieu est anisotrope, il est nécessaire de disposer de plusieurs lames minces d'orientations différentes, afin d'évaluer la valeur moyenne de  $-C'_\alpha(0)$  pour différentes directions de l'espace. Dans le cas particulier d'un milieu isotrope,  $C(h)$  ne dépend que du rayon vecteur  $r$  et non de la direction  $\alpha$ .  $C'_\alpha(0)$  est alors une constante  $C'(0)$  et (7) se réduit à :

$$\sigma = -4 C'(0) \quad (8)$$

Dans le cas où il y a anisotropie, on remarquera que  $C'_\alpha(0)$ , grandeur à signification directionnelle, contient bien davantage d'informations sur la structure du milieu que la surface spécifique  $\sigma$ , grandeur purement scalaire.

Comme la covariance  $C(h)$  a un comportement

linéaire au voisinage de l'origine, elle admettra souvent un développement de la forme :

$$C(h) = C_1(0) - \sqrt{\sum_{ij} C_{ij} h_i h_j}$$

et en  $h = 0$ , on aura  $-C'_\alpha(0) = \sqrt{\sum_{ij} C_{ij} \alpha_i \alpha_j}$  ( $\alpha_i$  désignant les cosinus directeurs de  $h$ ). Le tenseur  $C_{ij}$  que l'on met ainsi en évidence pourra être corrélé avec le tenseur des perméabilités du milieu poreux, ou plutôt avec son inverse qui est le tenseur des résistivités (Nous avons indiqué ailleurs les raisons théoriques pour lesquelles il ne peut pas y avoir de relation fonctionnelle rigoureuse entre ces deux tenseurs, réf. 2).

*Remarques :* Si le milieu est constitué de plus de deux composants, on obtiendra de la même manière la surface spécifique de contact du constituant  $l$  avec le constituant  $s$  en dérivant la probabilité  $C_{ls}(h)$  pour que les points  $x$  et  $x + h$  appartiennent, respectivement, à chacun des constituants  $l$  et  $s$ .

Enfin, si l'on étudie un milieu à deux dimensions seulement, la notion de surface spécifique  $\sigma$  cède la place à celle de périmètre spécifique  $2\lambda$ . Les relations (5) se transposent d'elles-mêmes, avec des notations évidentes :

$$\begin{aligned} -C'_\alpha(0) &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos(\theta - \alpha) d[2\lambda(\omega)] \\ -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} C'_\alpha(0) d\alpha &= \frac{2\lambda}{\pi} \end{aligned} \quad (9)$$

En particulier, dans le cas d'un milieu isotrope, covariance  $C(r)$ , surface spécifique  $\sigma$  et périmètre spécifique  $2\lambda$  des sections planes de ce milieu, sont liés par la relation instructive :

$$-C'(0) = \frac{2\lambda}{\pi} = \frac{\sigma}{4} \quad (10)$$

**2.1.4. La portée**

La dérivée de la covariance  $C(r, \alpha)$  en  $r = 0$  est liée à la surface spécifique du milieu et renseigne sur les relations de contact de ses constituants. Au contraire, l'intégrale de la covariance va nous apporter des informations sur les relations existant à plus grandes distances. On appelle portée d'une fonction aléatoire ergodique et stationnaire la distance  $a$  à partir de laquelle les corrélations sont pratiquement éteintes, et  $C(h)$  pratiquement égale à  $p^2$ . Nous utiliserons une définition plus précise : nous appellerons portée  $a(\alpha)$ , dans la direction  $\alpha$  l'intégrale :

$$a(\alpha) = \frac{2}{pq} \int_0^\infty [C(r, \alpha) - p^2] dr \quad (11)$$

La portée  $a(\alpha)$  a la dimension d'une longueur, et possède une signification directionnelle. Elle est liée aux propriétés *ergodiques* de la fonction aléatoire en tout ou rien  $k(x)$ . En effet, si nous prenons la valeur moyenne de  $k(x)$  sur un segment de

$$p^* = \frac{1}{l} \int_0^l k(x) dl$$

longueur  $l$  et de direction  $\alpha$ , nous obtenons un estimateur  $p^*$  de la probabilité  $p$  (du volume occupé par les grains rapporté au volume total) et, lorsque  $l$  devient très grand, la variance de  $p^*$  est asymptotiquement égale à :

$$D^2(p^*) = \frac{a(\alpha)}{l} p q$$

Elle tend vers 0 comme  $1/l$ , pourvu que la portée soit finie. Une portée  $a$  élevée indique que l'ergodicité n'est atteinte que lentement (le milieu n'apparaît comme statistiquement homogène que sur de grandes distances), ce qui dénote l'existence de structures à grande échelle. Nous donnerons plus bas des critères précis, fondés sur la comparaison de la portée et des dimensions granulométriques, qui nous permettront d'apprécier dans quelle mesure une structuration hypergranulométrique existe réellement.

## 2.2. Exemple d'étude pétrographique par la fonction de covariance

### 2.2.1. Situation de l'exemple

Étudions la lame mince d'où a été extraite la photographie de la figure 2. Il s'agit d'un minerai de fer lorrain, dont les constituants pétrographiques sont :

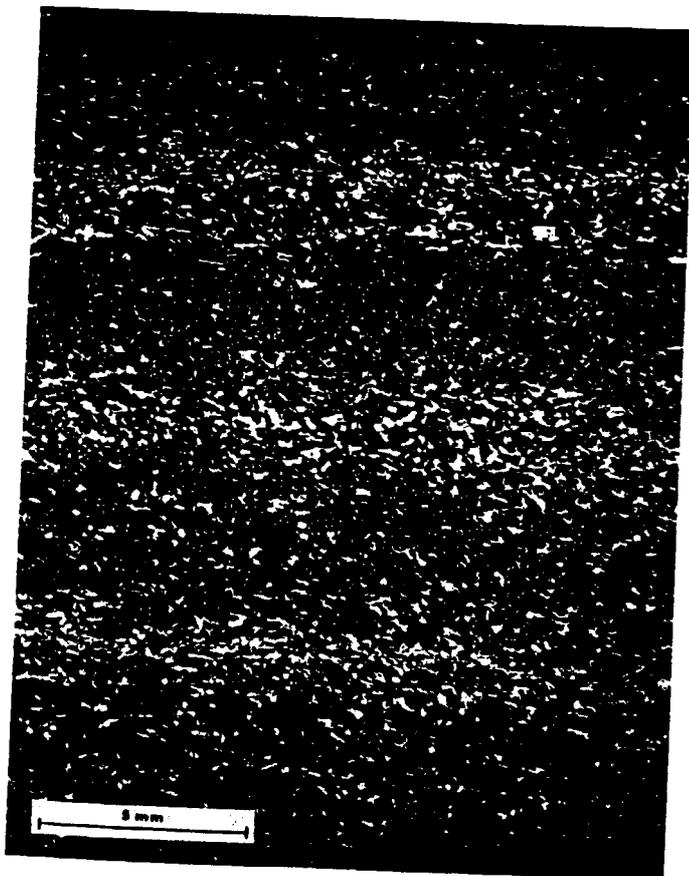
- la limonite : sous forme d'oolithes uniquement (la limonite fine a disparu la première pour donner de la chlorite). Ils apparaissent en noir,
- la chlorite : qui se présente sous forme du ciment homogène,
- la calcite : blanche, de même teinte que le quartz sur la photographie, mais de longs bancs plus ou moins décousus, plus ou moins continus,
- le quartz : en faible proportion, est un ensemble de petits grains blancs arrondis, corrodés par la sidérose,
- la sidérose : se présente ici, elle aussi, en faibles quantités, essentiellement sous forme de figures de corrosion, souvent du type pénétration en grains de riz, dans le quartz.

Les tailles de ces constituants sont données par l'échelle de la photographie; les distances inter-oolithes sont de l'ordre de 40 microns, la taille des oolithes de 100 à 200 microns, suivant la direction.

Étudions maintenant le même échantillon à plus grande échelle (fig. 4).

Du point de vue structural, à l'échelle des 10 microns, l'échantillon présente une belle anisotropie géométrique, causée par la forme elliptique des oolithes; à l'échelle des 100 microns commence à se manifester un deuxième phénomène d'anisotropie zonale, dû à la superposition des lits calcaires et minéralisés. La lame a en effet été taillée perpendiculairement au plan moyen des laminae (dans leur plan, les régionalisations sont isotropes), et en recoupe environ cinq. Nous trouvons donc sur cette lame, particulièrement grande (6 cm<sup>2</sup>), deux échelles

Fig. 4. — Exemple de superposition de structures. Même échantillon que la figure 2 mais photographié avec un grossissement 12 fois plus faible environ. On distingue nettement l'alternance du laminae de débris calcaires et d'oolithes



pétrographiques, celle des constituants proprement dits et celle des laminae, ou unités élémentaires de dépôt dans une stratification entrecroisée.

Plaçons-nous, pour le moment, à l'échelle des 10 microns; nous verrons plus loin, en fin du paragraphe 2.5, comment la portée nous annonce l'échelle supérieure, que nous aborderons alors.

Regroupons sous trois rubriques les cinq constituants pétrographiques, en rassemblant calcite, quartz et sidérose, éléments minoritaires et de même teinte. On aura besoin des fonctions de covariance du type  $C_{ls}(h)$ , ou probabilités pour que les points  $x$  et  $x+h$  appartiennent respectivement à chacun des constituants  $l$  et  $s$ . En fait, on symétrisera ces fonctions, mesurant

$$\frac{1}{2} [C_{ls}(h) + C_{ls}(-h)],$$

ce qui ne change rien aux portées ni aux surfaces de contact.

Les graphiques des figures 5, 6 et 7 représentent respectivement les termes chlorite-oolithe, oolithe-calcite et calcite-chlorite, de ces covariances, calculées pour 13 valeurs de 0 à 120 microns. Chaque valeur numérique a été estimée à partir de 20 000 couples de mesures sur l'analyseur de textures, d'où la parfaite régularité des courbes.

### 2.2.2. Surfaces de contact

Proposons nous de calculer les surfaces de contact entre les trois constituants par unité de volume. Appelons nord-sud la direction perpendiculaire aux lits (direction de petit allongement de la figure 2) et est-ouest la direction des lits dans la lame. Si l'on replace l'échantillon dans l'espace, nord-sud est la verticale du lieu, et est-ouest est effectivement la direction est-ouest du plan horizontal. Dans ce plan, les trois covariances sont isotropes. Aussi assimilerons-nous la répartition des  $C'_{ls}(0)$  à celle des points sur des ellipsoïdes de révolution aplatis. Si  $a$  et  $b$  sont les demi-axes d'un tel ellipsoïde ( $b$  axe de révolution), sa surface  $S$  a pour expression :

$$S = 2\pi a^2 \left[ 1 + \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{a^2 - b^2} \log \frac{a}{b} + \frac{a^2}{b^2} - 1 \right] \quad (11b)$$

avec

$$[C'_{ls}(0)]_{NS} = \pi a^2 \quad \text{et} \quad [C'_{ls}(0)]_{EO} = \pi ab$$

Compte tenu de (7), on divisera les  $C'_{ls}(0)$  par  $\pi$  de façon à avoir directement sur (11b) l'expression des surfaces de contact. Calculons numériquement

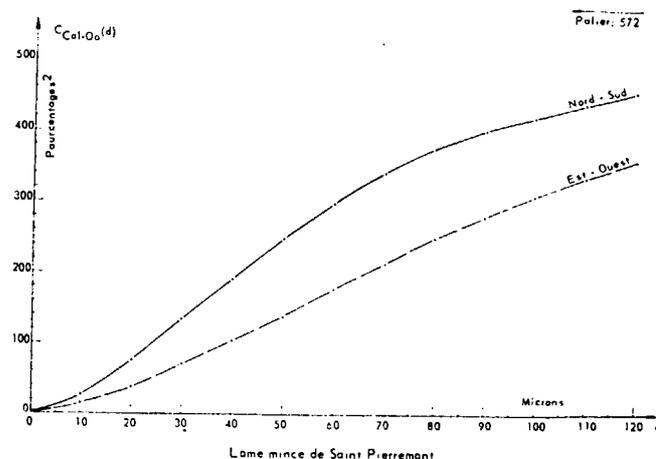


Fig. 5. — Covariance chlorite-oolithes

celles qui font intervenir les oolithes. D'après les graphiques (4) et (5), on a :

$$[C'_{chl-ool}(0)]_{N.S} = a^2 = 55 \cdot 10^{-4} \mu^{-1}$$

$$[C'_{chl-ool}(0)]_{E.O} = ab = 44 \cdot 10^{-4} \mu^{-1}$$

$$[C'_{cal-ool}(0)]_{N.S} = a'^2 = 2,6 \cdot 10^{-4} \mu^{-1}$$

$$[C'_{cal-ool}(0)]_{E.O} = a'b' = 1,6 \cdot 10^{-4} \mu^{-1}$$

les surfaces de contact par  $\text{cm}^3$  de minerai sont respectivement :

$$S_{chl-ool} = 193 \text{ cm}^2 \text{ par cm}^3$$

$$S_{cal-ool} = 8,5 \text{ cm}^2 \text{ par cm}^3$$

La surface spécifique des oolithes est essentiellement due à la covariance chlorite-oolithe, et vaut :

$$\begin{aligned} S_{ool} &= S_{chl-ool} + S_{cal-ool} \\ &= 201,5 \text{ cm}^2 \text{ par cm}^3 \text{ de minerai} \end{aligned}$$

Ainsi (7) permet de calculer des surfaces de contact, ce qui s'avère très précieux dans les problèmes d'enrichissement, d'attaque chimique, ou de bilan sédimentologique, puisqu'ici la chlorite est une transformation diagénétique de la limonite.

Mais la signification morphologique des  $C'_{ls}(0)$  est déjà intéressante par elle-même. En effet, les  $C(h)$  ont nécessairement des tangentes obliques à l'origine, puisqu'elles sont relatives à des constituants de volume non nul. Par contre, les  $C'_{ls}(0)$  peuvent être nuls, si les constituants  $l$  et  $s$  ne sont jamais en contact, mais séparés par une gaine d'autres constituants. Ici, par exemple, la tangente à l'origine  $C'_{cal-ool}(0)$  est très faible, car la chlorite se développant de façon pelliculaire autour des oolithes gêne les contacts de ce constituant avec la calcite sur une bande de près de 5 microns; et les quelques contacts permis (la tangente n'est pas

tout à fait nulle) sont pour la plupart dus aux éléments de calcite *inclus* dans les oolithes. Enfin, dans une anisotropie de type zonal, la nullité de  $C'_{ls}(0)$  uniquement vérifiée dans la direction  $\alpha$ , aurait traduit l'existence de paquets contigus de  $l$  et de  $s$  dans la direction perpendiculaire à  $\alpha$ , le tout plongé dans un ciment isolant ces paquets.

**2.2.3. Portée**

Calculons par exemple la portée de la covariance des oolithes. Les pourcentages des trois constituants sont :

$$p_{cal} = 0,097$$

$$p_{ool} = 0,640$$

$$p_{chl} = 0,263$$

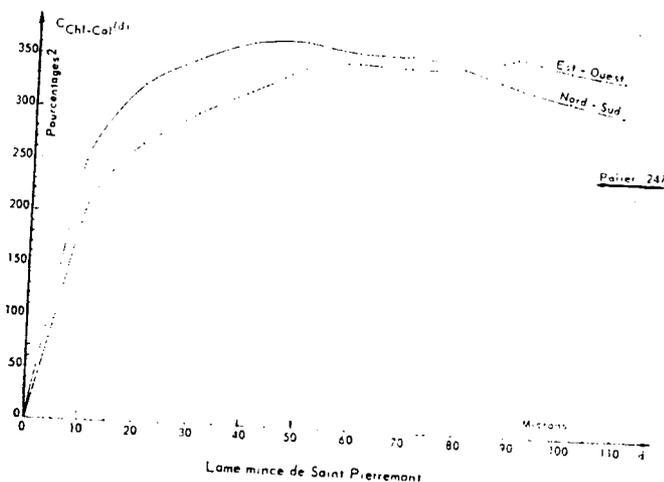


Fig. 6. — Covariance calcite-oolithes

La portée de la covariance des oolithes s'écrit :

$$a_{ool} = \frac{2}{p_{ool}(1-p_{ool})} \left[ \int_0^\infty [p_{ool} \cdot (1-p_{ool}) - C_{ool\_chl}(h) - C_{ool\_cal}(h)] dh \right]$$

Avec les mesures dont nous disposons, cette estimation n'est pas possible jusqu'à l'infini, mais seulement jusqu'à 120 microns. Nous obtenons par conséquent une valeur par défaut de la portée qui vaut :

$$a^*_{ool} = \frac{2}{0,64 \cdot 0,36} \cdot 10 \mu \cdot 0,888 = 77 \text{ microns}$$

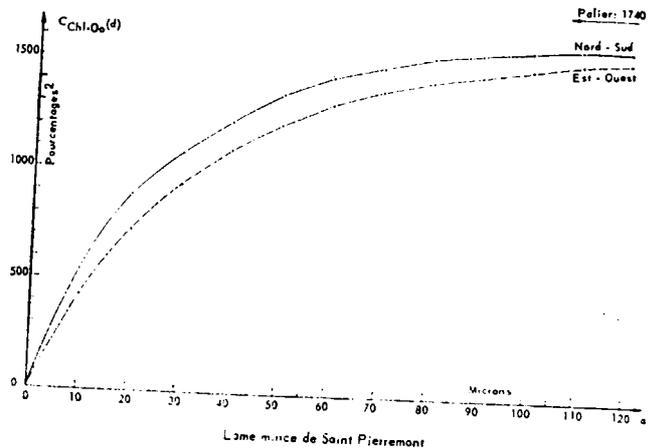


Fig. 7. — Covariance chlorite-calcite

Cette sous-estimation est néanmoins très précieuse pour le test d'existence de macrostructures qu'on verra plus loin.

On peut s'intéresser enfin aux oscillations de la fonction de covariance. L'oscillation la plus simple est la présence d'un maximum unique du  $C_{ls}(h)$ . Elle traduit l'existence de groupements sélectifs des constituants  $l$  et  $s$  en sous-ensembles. Dans chaque groupe, la distance moyenne séparant  $l$  de  $s$  est l'abscisse du maximum. Ici (graphique 7), les oolithes laissent entre elles des espaces où un petit grain de quartz ou de fines particules de calcaire sont entourées de chlorite. La structure pelliculaire de la chlorite a provoqué la ségrégation systématique qu'on voit, avec un maximum de 45 microns dans la direction nord-sud, sur le graphique 7. Si ces assemblages sont indépendants d'un paquet à l'autre, il n'y a pas d'oscillation supplémentaire. C'est bien ce qu'on trouve entre 0 et 100 microns.

**2.3. Granulométries des traversées des pores et des grains**

**2.3.1. Les moments fonctionnels P (h) et Q (h)**

Désignons par  $h$  un vecteur de module  $r$  et de direction  $\alpha$ , dont l'origine est prise en un point  $x$  de l'espace. Nous appellerons  $P(h)$  la probabilité pour que ce vecteur soit tout entier inclus à l'intérieur de la composante du milieu que nous désignons par l'expression « les grains ». C'est aussi la probabilité pour que ce vecteur ne rencontre pas l'autre composante, celle que nous désignons par l'expression « les pores ». Symétriquement, nous appellerons  $Q(h)$  la probabilité pour que ce

même vecteur soit tout entier contenu dans les pores, ou ne rencontre pas les grains.

On a évidemment :

$$\begin{cases} P(0) = C(0) = p \\ Q(0) = q = 1 - p \end{cases}$$

et aussi :

$$P'_\alpha(0) = Q'_\alpha(0) = C'_\alpha(0)$$

ainsi que les inégalités  $0 \leq P(h) \leq C(h)$ . En fait,  $h$  croissant,  $C(h)$  tend vers  $p^2 > 0$ , tandis que  $P(h)$  doit tendre assez rapidement vers 0, une fois que le module de  $h$  a dépassé les dimensions moyennes des grains. En particulier, on a :

$$P(\infty) = P'(\infty) = P''(\infty) = 0$$

### 2.3.2. Les granulométries en nombre

Plaçons-nous sur une droite fixe de direction  $\alpha$  donnée, et adoptons pour abrégé des notations à une seule dimension, en écrivant, par exemple,  $P'(0)$  au lieu de  $P'_\alpha(0)$ . Sur cette droite, nous voyons se succéder des traversées, de longueurs aléatoires, comprises alternativement dans les grains et dans les pores. Le nombre moyen des traversées des pores (ou des grains) rencontrées par unité de longueur est  $-P'(0) = -Q'(0) = -C'(0)$ , puisque  $-P'(0) dh$  représente la probabilité pour qu'une transition des grains aux pores ait lieu dans le petit intervalle  $(x, x + dh)$ . La relation (10) nous a déjà montré comment ce nombre spécifique de traversées rencontrées par unité de longueur se relie au périmètre spécifique (par unité de surface) et à la surface spécifique (par unité de volume).

Ayant effectué des observations le long d'une droite, nous pouvons également faire la statistique des traversées des grains (ou des pores), en construisant l'histogramme  $f_1(l)$  des grains (ou  $f_0(l)$  des pores). Ainsi  $f_1(l)dl$  représente la probabilité pour qu'une traversée donnée des grains ait une longueur comprise entre  $l$  et  $l + dl$ . Or la probabilité pour qu'une traversée des grains commence dans l'intervalle  $(x - dh_1, x)$  et se termine dans l'intervalle  $(x + l, x + l + dh_2)$  est  $P''(l) dh_1 dh_2$ , tandis que la probabilité pour qu'elle commence dans l'intervalle  $(x - dh_1, x)$ , sans spécifier à quel endroit elle se termine, a pour valeur  $-P'(0) dh_1$ . En effet,  $P(l)$  représente la probabilité pour que le segment  $(x, x + l)$  soit dans les grains. Or, cet événement est la somme des deux événements incompatibles suivants :

1° le segment  $(x, x + l + dh_2)$  est dans les grains, qui se produit avec la probabilité  $P(l + dh_2)$ ;

2° le segment  $(x, x + l)$  est dans les grains, mais il y a au moins une terminaison de grain

entre  $x + l$  et  $x + l + dh_2$ , qui se produit avec la probabilité  $A$ .

On a donc bien  $A = -P'(l) dh_2$ . De même, en imposant un changement à l'autre extrémité du segment  $x, x + h$ , on démontre l'interprétation de  $P''(l) dh_1 dh_2$ . Nous avons donc, d'après la définition des probabilités conditionnelles :

$$f_1(l) = -\frac{P''(l)}{P'(0)} \quad (12)$$

La granulométrie en nombre des traversées de grains possède une densité de fréquence proportionnelle à la dérivée seconde du moment fonctionnel  $P(l)$ . La fonction de répartition  $F_1$ , ou courbe granulométrique cumulée, s'en déduit par intégration :

$$1 - F_1(l) = \frac{P'(l)}{P'(0)} \quad (13)$$

Cette relation (13) peut être démontrée directement et reste valable même si  $P(l)$  n'est pas deux fois dérivable (donc, si la densité  $f_1(l)$  n'existe pas) pourvu, bien sûr, que  $P'(l)$  existe. Cette éventualité se produirait, par exemple, si l'on mesurait la granulométrie des traversées de carrés ou de cubes à côtés ou à faces parallèles, le segment  $l$  étant parallèle à la direction des côtés ou des faces.

Nous désignerons par  $E[(L_1)^n]$  le moment d'ordre  $n$  associé à la granulométrie en nombre des traversées des grains, soit :

$$E[(L_1)^n] = \int_0^\infty l^n dF_1(l)$$

Pour  $n = 1$ , nous obtenons le moment du premier ordre,  $E(L_1)$ , qui est la moyenne en nombre des traversées des grains. De (12) ou de (13), nous déduisons :

$$E(L_1) = -\frac{P(0)}{P'(0)} = -\frac{p}{P'(0)} \quad (14)$$

Cette relation prend un sens intuitif évident, si l'on se souvient que  $-P'(0)$  représente le nombre moyen des grains rencontrés par unité de longueur.

Pour  $n > 1$  (nous aurons surtout à considérer les cas  $n = 2$  et  $n = 3$ ) des intégrations par parties effectuées sur (12) ou sur (13) nous donnent :

$$\begin{aligned} E[(L_1)^n] &= -\frac{n(n-1)}{P'(0)} \int_0^\infty l^{n-2} P(l) dl \\ &= \frac{n}{P'(0)} \int_0^\infty l^{n-1} P'(l) dl \end{aligned} \quad (15)$$

Au lieu de la traversée  $L_1$  des grains, dont la granulométrie est  $F_1(l)$ , on peut s'intéresser à la traversée  $L_0$  des pores, dont la granulométrie sera

désignée par  $F_0(l)$ . Les relations (12) à (15) subsistent, à condition de remplacer partout  $P(l)$  par  $Q(l)$ , et l'indice 1 par l'indice 0. En particulier, la valeur moyenne en nombre des traversées des pores est :

$$E(L_0) = -\frac{Q(0)}{Q'(0)} = -\frac{q}{Q'(0)} \quad (16)$$

Comme  $P'(0) = Q'(0) = C'(0)$  représente le nombre moyen des grains (ou des pores) rencontrés par unité de longueur, nous déduisons de (14) et de (16) :

$$\begin{aligned} -C'(0) &= \frac{1}{E(L_0 + L_1)} \\ p &= \frac{E(L_1)}{E(L_0 + L_1)} \\ q &= \frac{E(L_0)}{E(L_0 + L_1)} \end{aligned} \quad (17)$$

Le sens intuitif des relations (17) est celui-ci : les probabilités  $p$  et  $q = 1 - p$  sont proportionnelles aux traversées moyennes (en nombre) des grains et des pores, tandis que le nombre total de grains rencontrés par unité de longueur est évidemment égal à l'inverse de la somme des longueurs moyennes traversées dans les grains et dans les pores.

### 2.3.3. Les granulométries en longueur

Au lieu de compter pour 1 chacune des traversées des grains, nous pouvons lui attribuer un poids proportionnel à sa longueur  $L_1$ ; au lieu de la densité de fréquence  $f_1(l)$ , nous obtenons alors une nouvelle densité  $g_1(l)$  qui vaut :

$$g_1(l) = \frac{l}{E(L_1)} f_1(l) \quad (18)$$

(Il apparaît un coefficient de proportionnalité  $E(L_1)$

car  $\int_0^\infty g_1(l) dl$  doit être égal à 1.)

A cette densité  $g_1(l)$  correspond une fonction de répartition, ou courbe granulométrique cumulée,  $G_1(l)$ . Compte tenu de (12) et de (14) nous obtenons sans peine :

$$1 - G_1(l) = \frac{1}{p} [P(l) - lP'(l)] \quad (19)$$

relation que l'on peut aussi obtenir directement par un raisonnement probabiliste élémentaire : en effet,  $p[1 - G_1(l)]$  représente la probabilité pour qu'un point donné  $x$  appartienne à un segment de longueur égale ou supérieure à  $l$  et contenu

dans les grains. Cet événement peut se réaliser de deux manières incompatibles, à savoir : ou bien l'intervalle  $(x, x + l)$  est dans les grains, ce qui a lieu avec la probabilité  $P(l)$ ; ou bien, l'intervalle  $(x - h, x - h + l)$  est dans les grains, tandis que  $x - h + l + dh$  tombe dans les pores (le point  $x - h + l$  est un point limite), ce qui a lieu avec la probabilité

$$-\int_0^l P'(l) dh = -lP'(l)$$

Inversement, on peut reconstituer le moment  $P(l)$  à partir de la granulométrie en longueur  $G_1(l)$ . On trouve :

$$P(l) = p \int_l^\infty \frac{y-l}{y} dG_1(y) \quad (20)$$

Ici encore, cette relation peut se retrouver par un raisonnement direct. Lorsque l'on sait qu'un point  $x$  appartient à une traversée des grains de longueur comprise entre  $y$  et  $y + dy$ , ce qui a lieu avec la probabilité  $p dG_1(y)$ , l'une des extrémités de cette traversée (par exemple l'extrémité droite) peut tomber n'importe où sur le segment  $(x, x + y)$  avec une égale probabilité. Il y a donc une probabilité  $\frac{y-l}{y}$  (avec  $l \leq y$ ) pour que cette extrémité tombe à une distance de  $x$  supérieure à  $l$ . Le théorème des probabilités composées conduit alors immédiatement à la relation (20).

Avec cette granulométrie  $G_1(l)$  exprimée en mesure (en longueur) et non en nombre, nous pouvons définir des moments que nous désignerons par le symbole :

$$\mathcal{M} [(L_1)^n] = \int_0^\infty l^n dG_1(l)$$

Compte tenu de (18) et de (15), les moments en mesure se déduisent des moments en nombre par les relations :

$$\mathcal{M} [(L_1)^n] = \frac{E [(L_1)^{n+1}]}{E(L_1)} = \frac{n(n+1)}{p} \int l^{n-1} P(l) dl \quad (21)$$

On transposera sans difficulté les définitions précédentes à la granulométrie (en longueur)  $G_0(l)$  de la traversée des pores, ainsi qu'aux moments  $\mathcal{M} [(L_0)^n]$  associés.

On ne perdra pas de vue que ces granulométries et leurs moments possèdent une signification directionnelle, puisqu'ils dépendent de la direction  $x$  de la droite sur laquelle on a effectué les observations. Nous allons maintenant examiner leur signification structurale. En dérivant  $P(l)$  ou  $Q(l)$ , nous

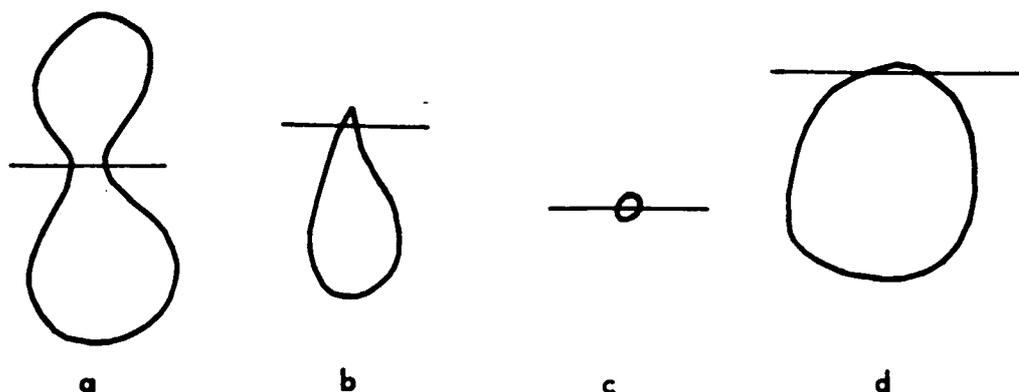


Fig. 8. — Types des configurations possédant des petites traversées

obtiendrons des renseignements sur la courbure ou l'angulosité des grains et des pores. En intégrant, au contraire, c'est-à-dire en utilisant les moments (21), nous mettrons en évidence leurs dimensions moyennes, en longueur, en surface et en volume.

#### 2.3.4. Courbure moyenne et angulosité

Examinons, en premier lieu, le comportement au voisinage de l'origine de la granulométrie (en nombre) des traversées des grains. Une traversée des grains, de longueur inférieure à une quantité petite  $l$ , peut correspondre (fig. 8) soit à un isthme étroit, soit à une terminaison anguleuse, soit à un petit grain isolé, soit enfin à une terminaison arrondie d'un grain possédant un rayon de courbure supérieur à  $l$ .

Supposons, en premier lieu, qu'il n'y ait ni petits grains, ni isthmes étroits, ni terminaisons anguleuses. Parmi le nombre total des traversées de longueur inférieure à  $l$ , qui est proportionnel à  $P'(l) - P'(0) = -P'(0)F_1(l)$ , un grain tel que celui que nous avons représenté sur la figure 8 apporte une contribution proportionnelle à  $\frac{l^2}{8R}$ ,  $R$  étant le rayon de courbure en ce point. Si donc  $\nu_1(\alpha)$  désigne le nombre moyen de ces terminaisons arrondies observées dans la direction  $\alpha$  et par unité de surface (nous examinerons plus loin le sens de ce nombre spécifique de convexité et la manière dont on peut le déterminer expérimentalement), nous aurons :

$$\nu_1 \frac{l^2}{8} E \left( \frac{1}{R} \right) = -P'(0) F_1(l)$$

$E \left( \frac{1}{R} \right)$  désignant la valeur moyenne de la courbure

$1/R$  de ces terminaisons arrondies. Par conséquent, la densité  $f_1(l)$  s'annule en  $l = 0$  et l'on a :

$$f_1(0) = 0$$

$$f_1'(0) = -\frac{\nu_1}{4P'(0)} \cdot E \left( \frac{1}{R} \right) \quad (22)$$

Ainsi, l'absence d'isthmes étroits et de terminaisons anguleuses se traduit par une densité  $f_1(0)$  nulle à l'origine et la pente  $f_1'(0)$  à l'origine de l'histogramme est alors proportionnelle à la valeur moyenne de la courbure.

Au contraire, s'il existe des isthmes étroits ou des terminaisons anguleuses, on vérifie facilement que  $F_1(l)$  a un comportement linéaire à l'origine, autrement dit que la densité  $f_1(l)$  ne s'annule pas en  $l = 0$ . Ainsi  $f_1(0)$  constitue un indice de l'angulosité des grains.

*Exemple :* lorsque les grains ont une forme convexe bien affirmée, et même si deux grains peuvent éventuellement se rencontrer, on a  $f_1(0) = 0$ , mais les pores qui constituent le négatif de ces figures convexes présentent des angulosités et  $f_0(0)$  n'est pas nul.

Il en est ainsi dans les schémas semi-markoviens, que nous avons étudiés dans l'ouvrage déjà cité (réf. 2). Rappelons rapidement leur définition. On dit qu'un ensemble  $C$  sépare deux ensembles  $E$  et  $E'$  si tout segment de droite joignant un point de  $E$  et un point de  $E'$  rencontre  $C$  en un point au moins. Un milieu poreux aléatoire est alors dit semi-markovien (vis-à-vis des pores) s'il y a indépendance conditionnelle entre tout événement intéressant  $E$  et tout événement intéressant  $E'$  lorsque l'on sait que  $C$  est contenu dans les pores. Le procédé le plus simple possible pour fabriquer un schéma semi-markovien consiste à implanter au hasard

dans l'espace (ou le plan) des figures aléatoires convexes (schéma booléen à grains primaires convexes), étant entendu que ces figures peuvent très bien se rencontrer. On démontre que, dans un schéma semi-markovien, la granulométrie, en nombre, des traversées des pores obéit toujours à une loi exponentielle de densité  $\mu e^{-\mu l}$  avec

$$\mu = 1/E(L_0) = -C'(0)/q$$

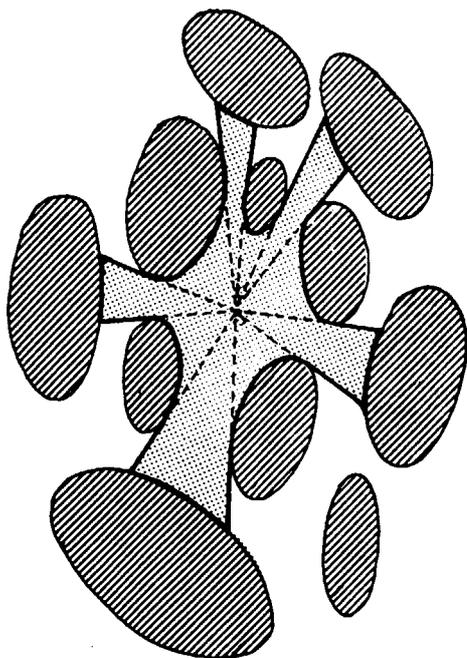
ainsi,  $f_0(0) = \mu$  est différent de 0, et les pores possèdent un indice d'angulosité égal à l'inverse de leur traversée moyenne. Au contraire, pour les grains, on a en général  $f_1(0) = 0$ , sauf bien sûr, dans le cas où les figures convexes implantées au hasard ont elles-mêmes un contour anguleux.

On notera qu'une loi exponentielle pour les traversées des pores (en nombre), souvent vérifiée approximativement en pratique, correspond à un cas idéal, où l'opposition entre les grains convexes « positifs », et leur ciment indifférencié « négatif » se présente sous sa forme extrême. Chaque fois, au contraire, que la densité  $f_0(l)$  est nulle à l'origine, on peut conclure que les pores commencent à affirmer leurs formes propres aux dépens des grains.

### 2.3.5. L'étoile des grains et l'étoile des pores

Considérons la figure 9. Nous y avons représenté des grains, d'ailleurs convexes, et un point  $x$  des pores. A ce point, nous avons associé l'ensemble des points des pores qu'il peut voir directement, c'est-à-dire l'ensemble des points  $y$  tels que le

Fig. 9. — Étoile des pores



segment  $(x, y)$  soit contenu dans les pores. La figure obtenue présente la forme d'une étoile. Nous désignerons donc par  $S^*_0$  l'étoile des pores, c'est-à-dire la valeur moyenne de l'aire que l'on peut voir directement à partir d'un point des pores. De même, on désignera par  $L^*_0$  et  $V^*_0$  les étoiles à une et trois dimensions (longueur et volume vus, en moyenne, à partir d'un point des pores), et on définira de la même manière l'étoile des grains  $L^*_1$ ,  $S^*_1$  ou  $V^*_1$ , selon le nombre des dimensions que l'on prend en considération.

Lorsque les grains sont convexes et disjoints, tout point  $x$  des grains voit directement les points du grain auquel il appartient et ceux-là seulement. Dans ce cas là, on a :

$$L^*_1 = \mathcal{M}(L_1)$$

$$S^*_1 = \mathcal{M}(S_1)$$

$$V^*_1 = \mathcal{M}(V_1)$$

A deux dimensions, l'étoile  $S^*_1$  représente la valeur moyenne de la surface d'un grain convexe pour une granulométrie en mesure (dans laquelle chaque grain compte pour un poids proportionnel à sa surface). A trois dimensions, l'étoile  $V^*_1$  représente de même le volume moyen d'un grain convexe pour une granulométrie exprimée en volume.

Ainsi, dans le cas de grains convexes et disjoints (et dans ce cas là seulement, semble-t-il), il est possible de déterminer la surface moyenne et le volume moyen des grains, correspondant à des granulométries exprimées en mesure, à partir d'observations purement linéaires. En outre, on notera qu'il n'est pas nécessaire de connaître le nombre des grains présents par unité de surface ou de volume, que des observations purement linéaires ne permettraient d'ailleurs pas de déterminer à elles seules.

L'étoile, en effet, se relie de manière simple à la granulométrie  $g(l)$  exprimée en longueur. Notons que  $g(l)$  est en réalité de la forme  $g(l, \alpha)$ , puisque la granulométrie des traversées dépend de la direction selon laquelle celles-ci sont mesurées.

En ce qui concerne  $L^*_1$ , tout d'abord, on note qu'un segment  $dl$  placé à la distance  $l$  d'un point  $x$  des grains appartient à l'étoile linéaire de  $x$  avec une probabilité (conditionnelle) égale à  $\frac{1}{p} P(l)$ . Nous avons donc, en tenant compte de (21) :

$$L^*_1 = \frac{2}{p} \int_0^\infty P(l) dl = \mathcal{M}(L_1) \quad (23)$$

Passons à l'étoile  $S^*_1$  à deux dimensions. L'élément d'aire  $rdrdx$  appartient à l'étoile d'un point  $x$

des grains avec une probabilité conditionnelle égale à  $\frac{1}{p} P(r, \alpha)$ . Par suite, il vient :

$$S^*_1 = \frac{1}{p} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\infty r P(r, \alpha) dr$$

D'après (21), l'intégrale

$$\frac{1}{p} \int_0^\infty r P(r, \alpha) dr \text{ vaut } \frac{1}{6} \mathcal{M}_\alpha [(L_1)^2]$$

et par suite :

$$S^*_1 = \frac{1}{6} \int_0^{2\pi} \mathcal{M}_\alpha [(L_1)^2] d\alpha$$

Pour obtenir une expression condensée, nous pouvons désigner par  $\mathcal{M} [(L_1)^2]$  la valeur moyenne relativement à  $\alpha$  du moment d'ordre 2 pris dans la direction  $\alpha$ . On trouve alors :

$$S^*_1 = \frac{\pi}{3} \mathcal{M} [(L_1)^2] \quad (24)$$

Enfin, pour l'étoile à trois dimensions, on fera de la même manière apparaître la valeur moyenne  $\mathcal{M} [(L_1)^3]$  du moment d'ordre 3 pris dans les différentes directions de l'espace, et on trouvera :

$$V^*_1 = \frac{\pi}{3} \mathcal{M} [(L_1)^3] \quad (25)$$

De même, l'étoile des pores se relie à la granulométrie (en longueur) des traversées des pores par les formules :

$$\left\{ \begin{array}{l} L^*_0 = \mathcal{M} (L_0) \\ S^*_0 = \frac{\pi}{3} \mathcal{M} [(L_0)^2] \\ V^*_0 = \frac{\pi}{3} \mathcal{M} [(L_0)^3] \end{array} \right. \quad (26)$$

## 2.4. Exemple : étude d'une granulométrie des pores dans un laitier

### 2.4.1. Situation de l'exemple

Dans cet exemple, extrait d'une étude I.R.S.I.D. sur les laitiers des hauts fourneaux, ce sont paradoxalement les pores qui ont des allures de grains, comme on peut le voir sur la figure 10, qui représente une partie du champ analysé. La section polie contient deux constituants :

— un laitier, finement cristallisé de couleur grise (fond);

— des trous globulaires noirs, de taille très variable.

Les utilisateurs cherchent à relier les caractéristiques granulométriques des pores à la résistance mécanique du matériau, mais nous ne nous occupons ici que de morphologie.

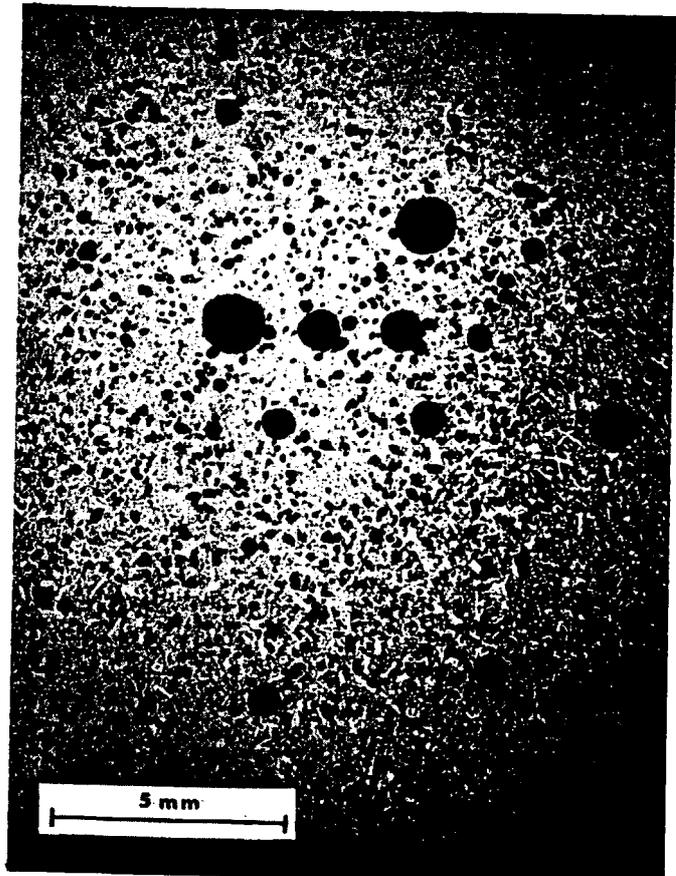
Le paramètre de mesure expérimental a été le moment  $P(l)$  calculé à partir de  $N = 75\ 000$  implantations différentes des segments  $l$ .  $P(l)$  est isotrope; on a porté directement sur la figure 11 les valeurs de  $N.P(l)$ , indiquant plus en détail le début de la courbe.

### 2.4.2. Résultats numériques

Notons tout d'abord la valeur de la teneur volumique en trous :

$$p = P(0) = \frac{9\ 029}{75\ 000} = 12,04 \%$$

Fig. 10. — Section polie de laitier de haut-fourneau, prélevé en fosse de coulée — Grossissement 6 — échantillon IRSID



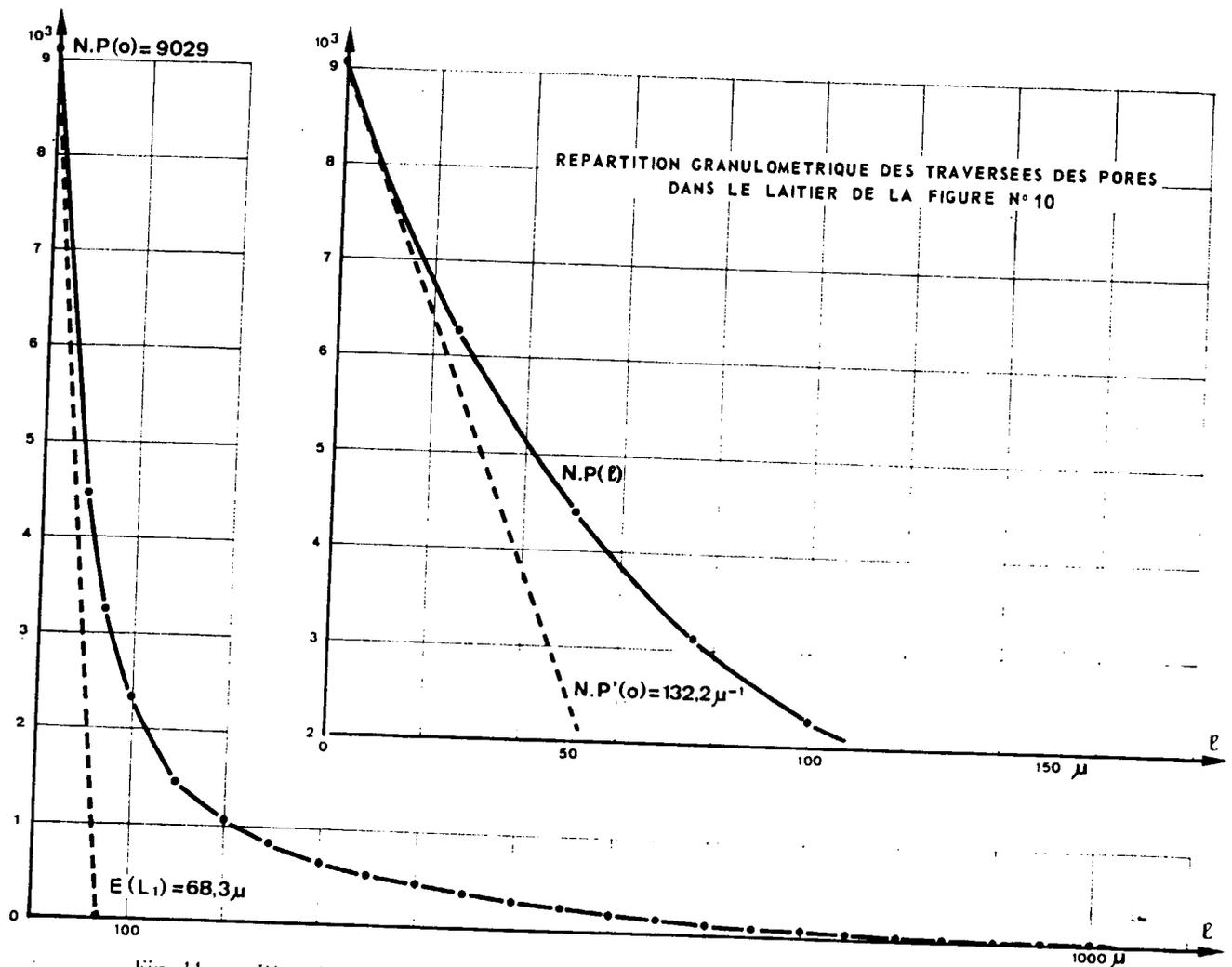


Fig. 11. — Répartition granulométrique des traversées des pores dans le laitier de la figure 10

et la valeur de la pente à l'origine :

$$P'(0) = \frac{132,2}{75\ 000} \mu^{-1} = 1,76 \text{ mm}^{-1}$$

qui représente le nombre de trous rencontrés par unité de longueur.

$P'(0)$  permet aussi d'obtenir la surface spécifique de ces trous :

$$\sigma = -4 P'(0) = 7,05 \text{ mm}^2/\text{mm}^3$$

ou le périmètre spécifique dans la section polie :

$$2 \lambda = -\pi P'(0) = 5,33 \text{ mm}/\text{mm}^2$$

$P(l)$  permet de calculer les fonctions de répartition des granulométries en nombre et en longueur, d'après (13) et (19); nous nous contenterons dans cette application, d'en déterminer les trois premiers moments à l'aide de (14), (15) et (21).

Il vient :

$$n = 1 E(L_1) = 68,3 \mu$$

moyenne (en nombre) des traversées

$$- n = 2 E[(L_1)^2] = 13,21 \cdot 10^3 \mu^2$$

On peut également obtenir le moment centré ou variance :

$$D^2(L_1) = E[(L_1)^2] - [E(L_1)]^2 = 8,55 \cdot 10^3 \mu^2$$

$$- n = 3 E[(L_1)^3] = 6,01 \cdot 10^6 \mu^3$$

$$- n = 4 E[(L_1)^4] = 4,31 \cdot 10^9 \mu^4$$

Les moments de la granulométrie en longueur se déduisent des précédents :

$$- n = 1 \mathcal{M}(L_1) = \frac{E[(L_1)^2]}{E(L_1)} = 193 \mu$$

La moyenne en longueur des traversées est donc beaucoup plus importante que la moyenne comptée en nombre. Or les pores sont sensiblement sphériques. Si ces sphères étaient toutes de même rayon  $R$ , on aurait  $\mathcal{M}(L_1) = \frac{3}{2} R$  et  $E(L_1) = \frac{4}{3} R$ ; le fait

que  $\mathcal{M}(L_1)$  soit le triple de  $E(L_1)$  est dû à la variance importante des diamètres des sphères.

$$- n = 2 \quad \mathcal{M}[(L_1)^2] = \frac{E[(L_1)^3]}{E(L_1)} = 75,9 \cdot 10^3 \mu^2$$

$$- n = 3 \quad \mathcal{M}[(L_1)^3] = \frac{E[(L_1)^4]}{E(L_1)} = 63,5 \cdot 10^6 \mu^3$$

Les différents moments que nous avons calculés ont pour intérêt essentiel de permettre la détermination des étoiles à 1, 2 et 3 dimensions :

— à 1 dimension, l'étoile des trous est la traversée moyenne, comptée en longueur :

$$L^*_1 = \mathcal{M}(L_1) = 193 \mu$$

— à 2 dimensions, l'étoile des trous représente la surface moyenne d'une granulométrie en mesure :

$$S^*_1 = \frac{\pi}{3} \mathcal{M}[(L_1)^2] = 79,5 \cdot 10^3 \mu^2 \\ = 0,0795 \text{ mm}^2$$

— à 3 dimensions, l'étoile des trous représente le volume moyen d'une granulométrie en mesure :

$$V^*_1 = \frac{\pi}{3} \mathcal{M}[(L_1)^3] = 66,5 \cdot 10^6 \mu^3 \\ = 0,0665 \text{ mm}^3$$

Les trous ayant une forme à peu près sphérique, on déduit de  $V^*_1$  le diamètre de la sphère moyenne (on notera combien il est différent de  $E(L_1)$  et  $\mathcal{M}(L_1)$ ) :

$$\varphi_3 = 3 \sqrt{\frac{6}{\pi} V^*_1} = 503 \text{ microns}$$

## 2.5. Relation entre l'étoile et la portée

En l'absence de structures à grande échelle, on se rend compte que la portée  $a$  (dans une direction donnée) doit être du même ordre de grandeur que les étoiles  $L^*_1$  et  $L_0^*$  des grains et des pores. Pour obtenir un critère plus précis, nous pouvons prendre comme référence la valeur que prend la portée dans l'hypothèse où les traversées des grains et des pores qui se succèdent le long d'une même droite sont des

variables aléatoires indépendantes. La théorie des processus de renouvellement permet de montrer que, dans cette hypothèse, la portée vaut :

$$a_r = p \frac{D^2(L_0)}{E(L_0)} + q \frac{D^2(L_1)}{E(L_1)} \quad (27)$$

(moyennes et variances se rapportant aux granulométries en nombre), ce que l'on peut écrire aussi :

$$a_r = p [\mathcal{M}(L_0) - E(L_0)] + q [\mathcal{M}(L_1) - E(L_1)]$$

Cette portée dépend, de manière très significative, de la différence entre les moyennes en longueur et en nombre.

En particulier, pour un schéma semi-markovien (relativement aux pores), la granulométrie des traversées des pores est exponentielle, de sorte que l'on a :

$$\frac{D^2(L_0)}{E(L_0)} = E(L_0) = \frac{q}{p} E(L_1)$$

et (27) prend alors la forme très simple :

$$a_r = q \mathcal{M}(L_1) = q L^*_1 \quad (28)$$

La relation (28) entre l'étoile et la portée caractérise à la fois l'absence de structures à grande échelle et une individualisation des grains poussée à l'extrême aux dépens des pores. La relation plus générale (27) indique encore l'absence de macrostructures, mais permet aux pores d'affirmer librement leurs formes propres. Si la portée  $a$  dépasse la valeur de référence  $a_r$ , l'existence de macrostructures est certaine.

Il peut également arriver que  $a$  soit inférieur à  $a_r$ , ou même que l'on ait  $a = 0$ . Cette circonstance traduit l'existence d'un effet compensateur, selon lequel un grand grain est suivi en moyenne par un grand pore, et inversement. La fonction  $C(h)$  présente alors un effet de trou très caractéristique. On a pu observer ce genre de phénomène en étudiant la migration de la calcite dans le gisement de fer lorrain (réf. 5) : chaque germe rassemble autour de lui la calcite diffuse dans son voisinage, de sorte qu'à la fin du processus les concrétions calcaires sont séparées par des intervalles grossièrement proportionnels à leurs tailles.

Très schématiquement (fig. 12) et à une seule dimension, on peut imaginer que la teneur initiale  $p$  en calcaire était constante dans le gisement. Des germes se sont ensuite mis en place au hasard, avec une densité poissonnienne  $\lambda$  et chacun d'eux a rassemblé la totalité de la calcite disponible à sa droite jusqu'au germe suivant : si  $l$  est la distance entre deux germes, on voit se succéder les

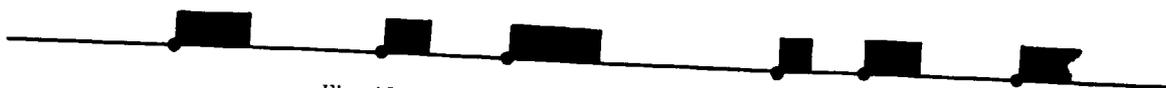


Fig. 12. — Exemple d'un processus de migration

longueurs  $pl$  de calcite et  $ql$  de minerai. Les granulométries sont exponentielles :

$$P(h) = p e^{-\lambda \frac{h}{p}}$$

$$Q(h) = q e^{-\lambda \frac{h}{q}}$$

Pour la covariance, on trouve :

$$C(h) - p^2 = \frac{pq^2}{q-p} e^{-\lambda \frac{h}{p}} + \frac{qp^2}{p-q} e^{-\lambda \frac{h}{q}}$$

et l'intégrale  $\int_0^\infty [C(h) - p^2] dh$  est nulle. On trouve donc  $a = 0$ . Ce résultat est une conséquence directe de l'hypothèse faite sur la constance de la teneur initiale  $p$  en calcite. Les migrations ultérieures n'ont dérangé cette constante qu'à des échelles de l'ordre de  $1/\lambda$ . Pour des distances plus grandes, il y a un effet compensateur très puissant.

La variance de l'intégrale  $\frac{1}{l} \int_0^l k(x) dx$  décroît ici plus vite que  $1/l$ , ce qui est une autre manière d'exprimer que la portée  $a$  est nulle.

## 2.6. Exemple de test d'une macrostructure

### 2.6.1. Mesures de l'étoile et de la portée

Reprenons la lame mince déjà étudiée en illustration de la notion de covariance (fig. 2). Le calcul de la portée, poussé jusqu'à la distance de 120 microns nous avait donné  $77 \mu$  comme estimateur de cette portée : existe-t-il ou non une hyperstructure ?

Regroupons chlorite et calcite sous le même symbole (0), et les oolithes sous le symbole (1). L'étude de la covariance nous donne déjà (directions N-S) :

$$E(L_1) = \frac{P_1}{C'_1(0)} = 111 \mu$$

$$E(L_0) = \frac{1-p_1}{C'_1(0)} = 62,5 \mu$$

Par une mesure granulométrique, on a pu déterminer aussi  $\mathcal{M}(L_1)$  et  $\mathcal{M}(L_0)$  :

$$\mathcal{M}(L_1) = 140 \mu$$

$$\mathcal{M}(L_0) = 132 \mu$$

D'après (27), s'il n'y a pas de macrostructure, la portée ne doit pas dépasser la valeur :

$$(1-p_1) [\mathcal{M}(L_1) - E(L_1)]$$

$$+ p_1 [\mathcal{M}(L_0) - E(L_0)] = 54,6 \mu$$

Avec une portée réelle qui excède  $77 \mu$ , nous nous trouvons bien loin de cette valeur : il y a donc nécessairement une macrostructure au moins dans la direction nord-sud, comme nous allons maintenant le vérifier.

Mais auparavant, soulignons en passant la différence entre les moments en mesure trouvés ici et ceux de l'exemple des laitiers.

Si les oolithes étaient des ellipsoïdes de même taille, on aurait :

$$\mathcal{M}(L_1) = \frac{9}{8} E(L_1) = 127 \mu$$

On trouve  $140 \mu$ , pour cette moyenne, les ellipsoïdes sont donc de taille légèrement variable, mais nettement moins que dans le cas des laitiers où la valeur de  $\mathcal{M}(L_1)$  était trois fois plus grande que dans l'hypothèse homogranulaire.

En ce qui concerne le ciment formé de la calcite et de la chlorite, le moment  $P(L)$ , que nous n'avons pas reporté ici, s'ajustait assez bien à une exponentielle négative. Si l'ajustement avait été parfait, on aurait d'ailleurs eu :

$$\mathcal{M}(L_0) = 2 E(L_0) = 125 \mu$$

alors qu'on trouve  $132 \mu$ , le schéma est donc pratiquement semi-markovien aux petites distances, bien qu'il y ait une macrorégionalisation.

### 2.6.2. Vérification de l'existence de la macrostructure

Reprenons l'échantillon de la figure 2 photographié cette fois avec un grossissement 12 fois plus faible ( $G = 5$ ) (fig. 4) : on voit apparaître dans la direction nord-sud une régionalisation de lits calcaires qui s'individualisent au milieu de paquets de calcite plus ou moins disséminés à travers la lame.

Poursuivons parallèlement l'investigation à l'aide des  $C_{12}(h)$  dans la direction nord-sud (fig. 13) en

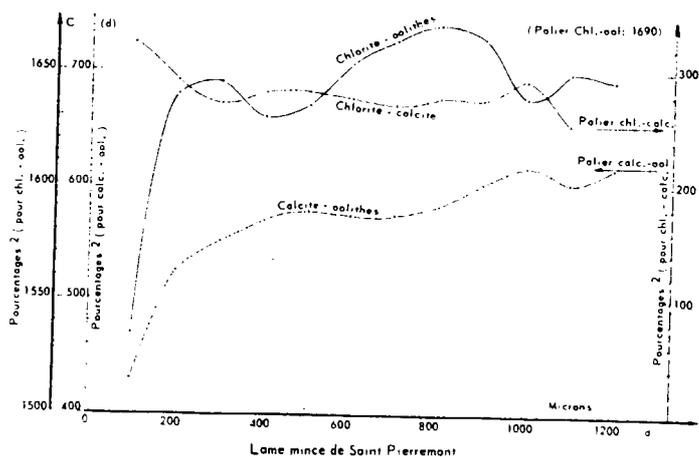


Fig. 13. — Covariances à l'échelle millimétrique

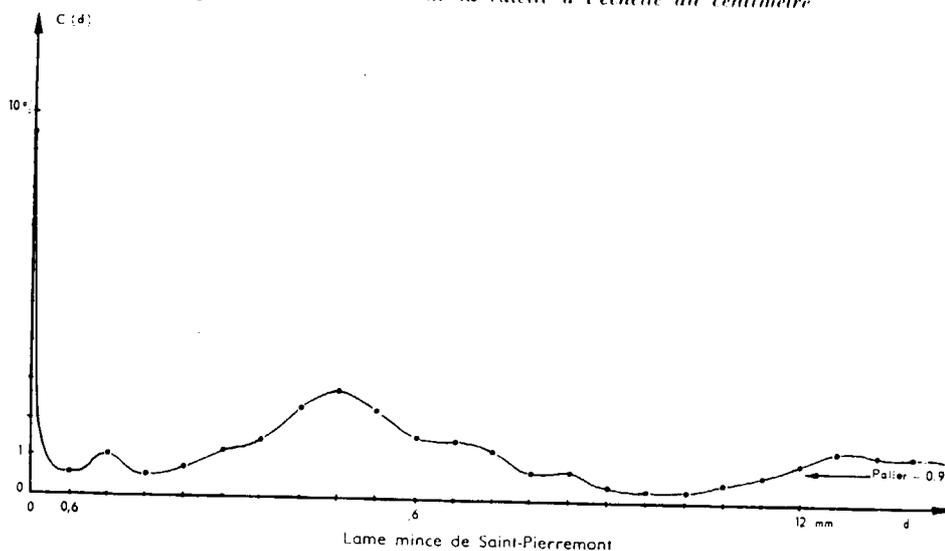
adoptant un pas de 100 microns. Des fluctuations nouvelles apparaissent sur  $C_{chl-ool}$ , qui était pourtant à petite échelle (fig. 4) une fonction monotone croissante. L'explication est encore à trouver dans des paquets sélectifs (effets de trou). Les passées calcaires centimétriques ne sont pas

compactes mais déchiquetées et formées de successions de séries de débris calciques parallèles distants de quelques centaines de microns, entre lesquelles subsistent des groupes d'oolithes et de chlorite. De là, viennent les oscillations que présente la covariance oolithe-chlorite avec une période de  $300 \mu$ .

Allons encore plus loin dans l'échelle structurale, en adoptant maintenant  $600 \mu$  comme pas de mesure. La régionalisation qui se déploie est essentiellement celle des lits calcaires parallèles à la direction est-ouest, il suffit donc de construire la covariance  $C_{cal}(h)$  de la calcite, dans la direction nord-sud, pour la décrire.

On voit, sur le graphique de la figure 14, apparaître une très nette composante périodique à  $4,8 \text{ mm}$ , distance moyenne entre les centres des lits. Les régionalisations internes aux passées calcaires apparaissent maintenant comme de très légères ondulations de fréquence dix fois plus élevée autour de la modulation principale. Ces fréquences parasites ont du reste une intensité très faible, et, bien que fort nettes lorsqu'on les regarde dans la figure 13, paraissent presque totalement absorbées par la structure centimétrique.

Fig. 14. — Covariance de la calcite à l'échelle du centimètre



(A suivre.)



# MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

ET

# GRANULOMÉTRIES EN PLACE

(2<sup>e</sup> partie)

par A. HAAS

Ingénieur des Mines à l'École des Mines de Nancy

G. MATHERON

Ingénieur en chef des Mines — Docteur ès Sciences

J. SERRA

Ingénieur des Mines à l'École des Mines de Nancy

Après un premier article consacré aux notions liées à des observations purement linéaires, nous abordons l'analysis situs des granulométries, dont la mise en œuvre nécessite des observations effectuées simultanément selon deux droites parallèles très voisines.

Des considérations géométriques simples (rotation de la normale) permettent de caractériser le degré d'individualisation des grains et des pores à l'aide d'un nombre spécifique de connexité et de deux nombres spécifiques de convexité. Une analyse plus fine conduit à la loi de répartition des rayons de courbure.

En dernier lieu, on étudie le cas des grains sphériques, dans lequel des observations purement linéaires ou planes permettent de reconstituer intégralement le nombre et la granulométrie des sphères originelles de l'espace à trois dimensions.

### 3. ANALYSIS SITUS DES GRANULOMÉTRIES PLANES

Dans cette deuxième partie, nous allons essayer de caractériser l'individualité des grains et des pores du point de vue de la connexité et de la convexité, en nous limitant au cas d'un milieu à deux dimensions (lame mince). Contrairement aux notions introduites dans la première partie, les paramètres que nous allons définir ne peuvent plus être déterminés à partir d'observations purement linéaires. Il faut disposer au moins d'une amorce de deuxième dimension, c'est-à-dire, pratiquement, pouvoir effectuer des observations simultanément sur deux droites parallèles très voisines. Il conviendra donc d'examiner et de discuter les procédés permettant de déterminer ces paramètres à l'aide de l'analyseur de textures.

#### 3.1. Le nombre spécifique de connexité

##### 3.1.1. L'accroissement élémentaire de la covariance

La notion topologique la plus simple qui traduise l'idée d'individu est celle de composante connexe. Dans un milieu composé de deux constituants — un ensemble  $A$  et son complémentaire  $A^c$  — nous pouvons appeler grains individuels les ensembles connexes (d'un seul tenant) maximaux formés de points de  $A$ . Par définition, ici, deux grains ne peuvent se rencontrer (s'ils se rencontrent, ils constituent un grain unique). Nous avons donc ici une notion parfaitement claire, mais assez pauvre : elle ne tient, en effet, aucun compte de la plus ou moins grande complexité morphologique des grains.

En vue d'explicitier cette notion, considérons d'abord un grain (fig. 15) simplement connexe, (ne contenant pas d'enclave). Nous avons déjà

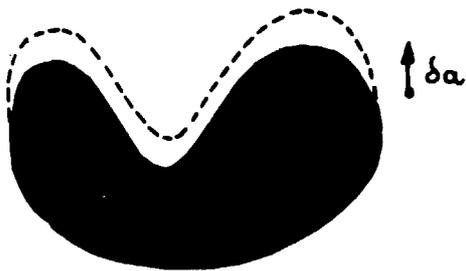


Fig. 15. — Dilatation élémentaire suivant  $\delta a$

caractérisé ce grain par une fonction  $K(h)$  définie en (1) et noté que la dérivée  $-K'(0)$  représentait la demi-projection sur une direction perpendiculaire à  $\alpha$  des éléments d'arc constituant son contour.

Nous allons faire varier cette quantité. Considérons, en effet, un petit vecteur  $\delta a$  perpendiculaire à  $\alpha$ , et le translaté  $A_{\delta a}$  notre grain  $A$ . Si nous remplaçons  $A$  par la réunion  $A \cup A_{\delta a}$  (si nous dilato<sup>n</sup>s le grain selon le vecteur  $\delta a$ ), la demi-projection des éléments d'arc du contour sur la direction de  $\delta a$  augmente d'une quantité exactement égale à  $\delta a$ . Si, au contraire, nous remplaçons  $A$  par l'intersection  $A \cap A_{\delta a}$  (si nous érodo<sup>n</sup>s le grain selon  $\delta a$ ), cette demi-projection diminue de cette même quantité  $\delta a$ , et cela quelle que soit la forme convexe ou non de notre grain. Plaçons-nous dans le cas d'une dilatation. Nous trouvons :

$$\delta [-K'_\alpha(0)] = \delta a$$

Si, au lieu d'un grain, nous avons  $n$  grains simplement connexes, la variation du  $-K'_\alpha(0)$  sera de la même manière :

$$\delta [-K'_\alpha(0)] = n \delta a$$

Mais, si les grains ne sont pas simplement connexes, c'est-à-dire s'ils contiennent des enclaves, celles-ci se comportent négativement, et l'on fait apparaître la différence  $n - i$  entre le nombre  $n$  des grains et le nombre  $i$  des enclaves qu'ils contiennent.

Dans la formulation probabiliste, si l'on désigne par  $\nu_c$  le nombre spécifique de connexité, égal au nombre de grains, dans l'hypothèse où ceux-ci ne contiennent pas d'enclave (ou plus généralement à la différence entre les nombres de grains et d'enclaves) contenus dans l'unité de surface, et si l'on désigne par  $C(h)$  la covariance, on obtient :

$$\delta [-C'_\alpha(0)] = \nu_c \cdot \delta a \quad (29)$$

Ainsi donc, pour déterminer le nombre spécifique de connexité, il suffit de connaître la variation du  $-C'_\alpha(0)$  pour une petite dilatation vectorielle des grains  $\delta a$ . On remarque, d'ailleurs, que  $\nu_c$  est indépendant de la direction  $\alpha$  considérée.

Si l'on effectue l'érosion de  $A$  par  $\delta a$ , c'est-à-dire l'intersection  $A \cap A_{\delta a}$ , on retombe sur les relations précédentes, à condition d'attribuer à  $\delta a$  un signe négatif. Expérimentalement, toutefois, cette coïncidence ne subsiste que si  $\delta a$  est très petit. Mais, dans le cas d'un appareil fonctionnant par balayage discontinu,  $\delta a$  est imposé : c'est la maille du balayage. Elle possède une valeur petite, mais non pas infiniment petite, de sorte que les deux définitions de  $\nu_c$  (par dilatation et par érosion) risquent de conduire à des résultats légèrement différents.

L'origine de cette petite difficulté apparaît sur la figure 16. Le balayage ponctuel remplace le milieu réel par un réseau à maille carrée  $\delta a$  dont chaque nœud est noté + ou 0, selon qu'il tombe dans les grains ou dans les pores. Du point de vue de l'érosion selon  $\delta a$ , la figure 16 comporte deux grains distincts. Du point de vue de la dilatation, elle n'en comporte qu'un seul. En effet, vis-à-vis de l'érosion, les seules connexions autorisées entre les grains sont des connexions selon les lignes ou les colonnes, tandis que la dilatation autorise également les liaisons selon les diagonales.

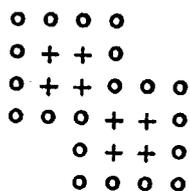


Fig. 16. — Exemple de configuration diagonale

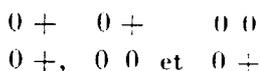
Dans ce qui suit, nous adopterons plutôt le point de vue de la dilatation, conformément à la représentation spontanée selon laquelle les grains constituent la composante forte et apparaissent en relief dans le milieu.

3.1.2. Détermination expérimentale

Pour évaluer  $C'_x(0)$  avant dilatation, on doit faire l'inventaire des configurations 0 + rencontrées dans le balayage du milieu. Désignons par  $N(0 +)$  leur nombre et par  $N$  le nombre total d'observations. On a :

$$-C'_x(0) = \frac{N(0 +)}{N \cdot \delta a}$$

Après la dilatation, on doit, pour évaluer la nouvelle valeur  $-C'_x(0) + \delta[-C'_x(0)]$ , faire l'inventaire des configurations :

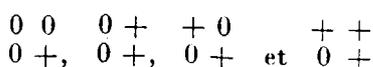


En effet, il est équivalent de dire que le point  $x$  appartient à  $A \cup A_{\delta a}$  ou que le point  $x$  ou le point  $x - \delta a$  appartient à  $A$ .

Si  $N'$  désigne le nombre de ces configurations, on aura donc :

$$v_c = \frac{N' - N(0 +)}{N(\delta a)^2}$$

Remarquons, d'ailleurs, que la configuration 0 + se décompose en quatre configurations portant sur quatre points :



La première et la deuxième de ces configurations interviennent déjà dans le décompte de  $N'$ . Les deux dernières équivalent à la configuration unique : 0 +. Nous avons donc :

$$v_c = \frac{N \begin{pmatrix} 0 + \\ 0 0 \end{pmatrix} - N \begin{pmatrix} + + \\ 0 + \end{pmatrix}}{N(\delta a)^2} \tag{31}$$

Le sens de cette relation est assez clair : on doit prendre la différence des nombres d'angles droits saillants et d'angles droits rentrants séparant un pore au sud-ouest et un grain au nord-est. Cette différence est égale à l'unité pour chaque grain simplement connexe.

Si nous avons adopté la deuxième définition (érosion des grains selon  $\delta a$  et, corrélativement, dilatation des pores), nous aurions trouvé la valeur plus forte :

$$v'_c = \frac{N \begin{pmatrix} 0 + \\ 0 0 \end{pmatrix} - N \begin{pmatrix} + + \\ 0 + \end{pmatrix}}{N(\delta a)^2}$$

La différence entre les deux est naturellement imputable au nombre  $N \begin{pmatrix} 0 + \\ - 0 \end{pmatrix} + N \begin{pmatrix} + 0 \\ 0 + \end{pmatrix}$  des configurations diagonales. De plus, l'érosion des grains équivalant à la dilatation des pores, on voit que  $v'_c$  se définit à partir des pores de la même manière que  $v_c$  à partir des grains. On peut donc dire que  $v'_c$  est le nombre de connexité des pores. Mais, en fait, abstraction faite de la latitude que nous avons quant au choix de la composante à dilater, il n'est pas possible de caractériser séparément la connexité des grains et celle des pores.

Lorsque les grains sont simplement connexes, en effet,  $v_c$  représente le nombre des composantes connexes des grains. Mais si les grains contiennent des enclaves, celles-ci se comportent négativement : pour une dilatation du grain, le contour de l'enclave est réduit et non augmenté de  $\delta a$ . Ainsi la signification générale de  $v_c$  est la suivante : le nombre spécifique de connexité représenté, dans le cas général, le nombre des grains connexes diminué du nombre des enclaves qu'ils contiennent. Ou encore, si nous faisons abstraction d'une des composantes des pores (celle qui joue le rôle du fond général au sein duquel s'individualisent les grains que l'on voit en relief), le nombre  $v_c$  représente la différence entre les nombres des composantes des grains et des pores. Il ne permet pas de connaître chacun de ces nombres séparément.

Indiquons encore, rapidement, une autre signification de  $v_c$ . Dans un milieu à trois dimensions,  $v_c(\omega)$  est une fonction de la direction  $\omega$  de la nor-

male du plan de la section à deux dimensions dans laquelle on a déterminé ce nombre de connexité. La valeur moyenne

$$v_c = \frac{1}{4\pi} \int v_c(\omega) d\omega$$

de ce nombre pour toutes les directions de l'espace est liée à l'intégrale de la courbure moyenne  $\frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$  de la surface de séparation des grains et des pores. En s'appuyant sur un théorème classique de Meusnier, on peut, en effet, démontrer que l'on a :

$$\left[ \begin{array}{l} v_c = \frac{1}{2\pi} E(a) \\ a = \frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) ds \end{array} \right]$$

l'intégrale définissant  $a$  étant étendue à la surface de séparation contenue dans le volume unité. Il est essentiel de noter que la courbure moyenne est prise ici algébriquement.

### 3.2. Exemple de dénombrement de composantes connexes

#### 3.2.1. Mode opératoire

Choisissons pour illustrer le paragraphe précédent un exemple volontairement très simple et permettant d'effectuer facilement un contrôle des résultats expérimentaux :

— L'image analysée a été créée de toutes pièces, de la manière suivante : un dessinateur a disposé à l'intérieur d'un champ carré des taches, tirées au sort parmi une douzaine de formes connexes. Les grains ainsi obtenus sont répartis uniformément : le milieu poreux résiduel est constitué de canaux de largeur à peu près constante. Le nombre de composantes connexes, ou dans le cas présent, de grains est :

$$N_G = 163$$

L'image a été ensuite photographiée et réduite en vue d'analyse; la figure 17 est une reproduction à l'échelle 1/2 environ de l'image initiale.

— Il a ensuite été effectué un balayage du champ suivant deux directions perpendiculaires (nord-sud et est-ouest). Les informations en tout ou rien (1 dans les grains; 0 dans les pores) ont été prélevées suivant une maille régulière  $a$  et enregistrées simultanément sur deux lignes parallèles distantes de  $a$ . Ce dispositif permet de tester la fréquence de configurations formées de 4 points, situés aux sommets d'un carré de côté  $a$ .

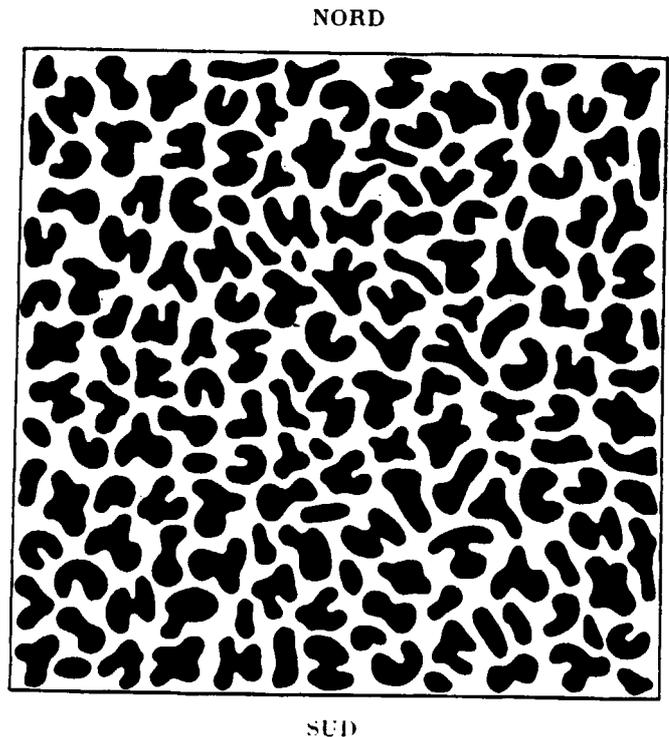


Fig. 17. — Exemple de détermination des nombres spécifiques de connexité et de convexité

Dimension du champ 150 mm × 150 mm  
Maille de balayage 1 mm × 1 mm  
Nombre de grains : 163

La maille doit donc être suffisamment petite pour que les deux mesures à partir d'une érosion ou d'une dilatation aboutissent au même résultat numérique.

On a choisi  $a = 1$  mm et le nombre total des points  $N = 22\,500$ .

Dans la suite, nous considérerons que la surface totale du champ est unitaire

$$N a^2 = 1$$

Dans ces conditions, il n'est pas nécessaire de distinguer nombres totaux et nombres spécifiques.

#### 3.2.2. Résultats

Testons la présence des quatre configurations suivantes :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

suivant les deux directions est-ouest (E.-W.) et nord-sud (N.-S.).

On obtient, dans le cas d'un balayage sans « lacunes » (où la distance  $h$  entre deux couples de lignes successifs est égale à la maille  $a$ ) :

— direction E.-W.

$$N \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 617; \quad N \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$N \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0; \quad N \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 454$$

On en déduit :

$$N_c = N \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - N \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - N \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 163$$

$$N'_c = N \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + N \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - N \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 163$$

— direction N.-S.

$$N \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 622; \quad N \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$N \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0; \quad N \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 459$$

On en déduit :

$$N_c = 163$$

$$N'_c = 163$$

Dans toutes les directions de mesures, on retrouve le nombre effectif des grains.

### 3.2.3. Fluctuations expérimentales

On peut se demander ce que deviennent ces résultats lorsqu'on effectue un échantillonnage sélectif en augmentant la distance  $h$  entre les couples de lignes.

Au lieu de résultats exacts, nous allons cette fois obtenir des valeurs plus ou moins approchées.

Ils seront significativement peu différents des nombres réels si le champ balayé est suffisamment vaste par rapport à la taille des grains.

Dans le cas présent, les conditions d'ergodicité requises ne sont pas vérifiées et les aléas observés sont importants.

Notons néanmoins les résultats suivants :

Direction	$\frac{h}{a}$	$N \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$N \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$N \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$N \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$N_c = N'_c$	$\frac{h}{a} N_c$
E.-W.	1	617	0	0	454	163	163
	2	297	0	0	220	77	154
	3	202	0	0	158	44	132
	4	138	0	0	106	32	128
	5	118	0	0	84	34	170
N.-S.	1	622	0	0	459	163	163
	2	301	0	0	227	74	148
	3	197	0	0	147	50	150
	4	146	0	0	111	35	140
	5	130	0	0	92	38	170

(Remarque : il faut multiplier les nombres  $N_c$  et  $N'_c$  par le coefficient  $\frac{h}{a}$  pour obtenir des estimations du nombre de grains  $N_G$ ).

Dans le cas d'un champ ergodique on pourrait augmenter énormément  $\frac{h}{a}$ , tout en conservant une bonne précision.

La maille avait été choisie suffisamment petite par rapport aux dimensions des grains et des pores et cependant assez grande pour limiter le nombre total de prélèvements à effectuer.

Si l'on double ou triple la maille, les résultats deviennent immédiatement très mauvais. Il apparaît en effet un nombre non négligeable de configurations diagonales et les nombres des configurations  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  diminuent fortement.

Par exemple, pour une maille carrée de côté  $2a$ , on obtient, dans le sens (E.-W.) :

$$N \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 301; \quad N \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 59$$

$$N \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 37; \quad N \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 198, \text{ donc :}$$

$$\begin{cases} N_c = 301 - 59 - 198 = 44 \\ N'_c = 301 + 37 - 198 = 140; \end{cases}$$

et dans le sens (N.-S.) :

$$N \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 302; \quad N \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 59$$

$$N \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 37; \quad N \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 195, \text{ donc :}$$

$$\begin{cases} N_c = 302 - 59 - 195 = 48 \\ N'_c = 302 + 37 - 195 = 144 \end{cases}$$

### 3.3. Nombres spécifiques de convexité des grains et des pores

Nous allons maintenant envisager la notion d'individualité du point de vue de la convexité, en partant de la représentation spontanée selon laquelle grains et pores entrent en conflit, pour s'affirmer sous forme convexe. Nous voyons, sur la figure 18 un grain lancer deux pseudopodes à l'assaut des pores. Chacun d'eux constitue une ébauche d'individualisation. Ce grain, du point de vue de la convexité, doit compter pour plus de 1, et cependant pour moins de 2, puisque ces deux ébauches n'ont pas abouti à une séparation complète, mettons qu'il soit équivalent à 1,5 grains convexes. Mais ces deux pseudopodes, du fait même

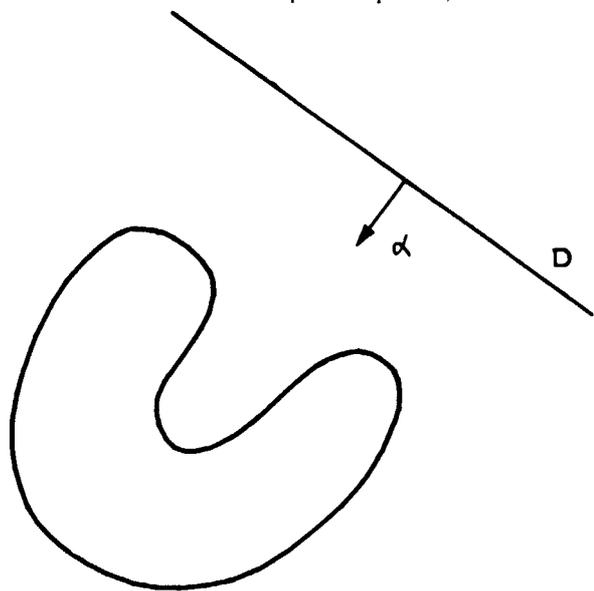


Fig. 18. — Grain à pseudopodes

qu'ils tendent vers une existence autonome, sont séparés l'un de l'autre par une langue ou une avancée convexe des pores à l'intérieur des grains. Le point de vue se renverse et nous sommes maintenant tentés de dire que les pores s'efforcent de conquérir une individualité aux dépens des grains. Il ne s'agit cependant, là aussi, que d'une ébauche inachevée, équivalent, par exemple, à la moitié d'un individu convexe. La différence entre les nombres d'individus convexes équivalents aux grains et aux pores, ici  $1,5 - 0,5 = 1$ , doit rester constante et égale à l'unité (c'est-à-dire au nombre d'individus connexes), tant que les deux pseudopodes ne se rejoignent pas, et tant que l'avancée des pores ne parvient pas à couper en deux le grain qu'elle attaque. Cette constance, qui exprime la solidarité des grains et des pores dans leurs efforts

antagonistes vers la forme convexe, va se trouver brusquement rompue si l'avancée des pores parvient à traverser le grain de part en part, et perd ainsi d'un seul coup son individualité : il y a alors deux grains disjoints, mais plus aucune tendance des pores vers la convexité. Nous sommes passés brusquement de  $+1$  à  $+2$ . Au contraire, si les deux pseudopodes émis par le grain parviennent à se rejoindre, ils perdent d'un seul coup leur début d'autonomie. Mais comme ils ont encerclé une enclave, c'est-à-dire un individu complet des pores, le nombre de connexité est passé cette fois brusquement de  $+1$  à  $0$ . Donnons de ces notions une définition géométrique plus précise.

#### 3.3.1. La rotation de la normale

Soit  $ds$  un élément d'arc du contour séparant des pores le grain de la figure 18, et  $R$  son rayon de courbure. Là où le grain a un comportement convexe, le centre de courbure tombe du côté du grain, et  $R$  est positif. Là, au contraire, où le grain a un comportement concave, le centre de courbure tombe dans les pores, et  $R$  est négatif. D'autre part,  $d\alpha = \frac{ds}{R}$  représente la rotation de la normale, et ce petit angle est positif ou négatif en même temps que  $R$ . Si donc nous posons :

$$\begin{cases} N_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{R > 0} \frac{ds}{R} \\ N_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{R < 0} \frac{ds}{|R|} \end{cases} \quad (32)$$

nous obtenons deux nombres positifs.  $N_1$  vaut 1 si le grain est parfaitement convexe et  $N_1$  est supérieur à 1 si le grain possède des concavités.  $N_0$ , de même, est lié à ces concavités des grains, qui sont des convexités pour les pores. Comme la rotation totale de la normale, comptée algébriquement, le long d'un contour simple fermé vaut toujours  $2\pi$ , on a ici :

$$N_1 - N_0 = \frac{1}{2\pi} \int \frac{ds}{R} = 1$$

Si le grain de la figure 18 contenait une enclave, le contour de cette enclave devrait être décrit dans le sens négatif. On aurait alors  $N_1 - N_0 = 0$ . Ainsi, dans le cas général, la différence  $N_1 - N_0$  va représenter le nombre des composantes connexes des grains diminué du nombre des enclaves qu'ils contiennent. Elle est donc égale au nombre de connexité.

Ces notions se transposent sans peine sous une forme probabiliste. Nous appellerons *nombre spécifique de convexité des grains*  $v_1$  l'espérance mathématique de la rotation positive de la normale (divisée par  $2\pi$ ), lorsque l'on décrit les contours séparant



**3.4. Exemple de mesures de nombres spécifiques de convexité**

Reprenons l'exemple précédent (cf. fig. 17). Pour déterminer les nombres spécifiques de convexité des pores et des grains  $N_0$  et  $N_1$  (ici encore le champ total est pris comme unité de surface), établissons l'inventaire des configurations suivantes :

$$\begin{array}{c} 011\dots\dots 10 \\ 000\dots\dots 00 \end{array} \text{ et } \begin{array}{c} .11\dots\dots 1. \\ 100\dots\dots 01 \end{array}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{k \text{ fois}} \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{k \text{ fois}}$

avec  $k = 1, 2, \dots$

Les nombres correspondants seront notés :

$$n_1(k, \alpha) \text{ et } n_0(k, \alpha + \pi)$$

où  $\alpha$  est la direction du balayage

Les balayages sont effectués dans quatre sens :

$$\alpha = 0 \text{ (ouest-est); } \alpha = \pi; \alpha = \frac{\pi}{2}; \alpha = \frac{3\pi}{2}$$

avec la même maille que précédemment.

La somme des éléments d'une colonne représente le nombre apparent de grains ou de pores  $N(\alpha)$  rencontrés dans le balayage effectué selon la direction  $\alpha$  :

$$\begin{array}{ll} N_1(0) = 211 & N_0(0) = 51 \\ N_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = 212 & N_0\left(\frac{\pi}{2}\right) = 38 \\ N_1(\pi) = 214 & N_0(\pi) = 48 \\ N_1\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 201 & N_0\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 49 \end{array}$$

Remarquons que le nombre apparent de grains rencontrés dans la direction  $\alpha = \frac{3\pi}{2}$  (du nord vers le sud) et inférieur de 10 unités environ aux nombres rencontrés dans les trois autres directions. Parallèlement, le nombre apparent de pores rencontrés dans la direction opposée  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  accuse le même déficit.

Vérifions que la différence entre le nombre apparent de grains rencontrés dans la direction  $\alpha$  et le nombre apparent de pores rencontrés dans la direction opposée  $\alpha + \pi$  est égal au nombre de composantes connexes, dans le cas présent, le nombre de grains  $N_G = 163$

$$N_1(0) - N_0(\pi) = 211 - 48 = 163$$

$$N_1\left(\frac{\pi}{2}\right) - N_0\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 212 - 49 = 163$$

$$N_1(\pi) - N_0(0) = 214 - 51 = 163$$

$$N_1\left(\frac{3\pi}{2}\right) - N_0\left(\frac{\pi}{2}\right) = 201 - 38 = 163$$

Passons maintenant à l'estimation proprement dite des nombres de convexité des grains et des pores; ils sont tels que :

$$N_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N_1(\alpha) d\alpha$$

$$N_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N_0(\alpha) d\alpha$$

$k$	$n_1(k, 0)$	$n_1\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$	$n_1(k, \pi)$	$n_1\left(k, \frac{3\pi}{2}\right)$	$n_0(k, 0)$	$n_0\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$	$n_0(k, \pi)$	$n_0\left(k, \frac{3\pi}{2}\right)$
1	36	34	37	25	17	13	18	26
2	57	58	49	49	21	17	17	10
3	60	60	61	60	6	6	8	8
4	40	36	37	37	5	1	1	2
5	19	18	17	13	0	1	1	2
6	5	4	9	7	1	0	0	1
7	1	1	2	4	1			0
8	1	1	1	4	0			
9	0	0	0	1				
10	0		1	0				
11	2		0	0				
12	0			1				
13				0				
$\sum_k n(k, \alpha)$	211	212	214	201	51	38	48	49

Nous prendrons :

$$N_1^* = \frac{N_1(0) + N_1\left(\frac{\pi}{2}\right) + N_1(\pi) + N_1\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{4}$$

et

$$N_0^* = \frac{N_0(0) + N_0\left(\frac{\pi}{2}\right) + N_0(\pi) + N_0\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{4}$$

soit numériquement :

$$N_1^* = 209,5 \quad N_0^* = 46,5$$

(En pratique, il serait souhaitable d'estimer  $N_1$  et  $N_0$  en prenant la moyenne des  $N_1(\alpha_i)$  et  $N_0(\alpha_i)$  à partir de plus de 4 directions  $\alpha_i$ ).

On peut également définir des nombres de convexité réduits :

$$\mathcal{N}_1 = \frac{N_1}{N_G} \quad \text{et} \quad \mathcal{N}_0 = \frac{N_0}{N_G}$$

$\mathcal{N}_1$  représente le nombre de convexité moyen d'un grain; il est nécessairement supérieur à 1; dans le cas présent :

$$\mathcal{N}_1^* = \frac{209,5}{163} = 1,29$$

$\mathcal{N}_0$  représente le nombre de convexité moyen accordé par un grain au milieu poreux; il est tel que :

$$\mathcal{N}_0 = \mathcal{N}_1 - 1$$

et

$$0 \leq \mathcal{N}_0$$

dans le cas présent :

$$\mathcal{N}_0^* = 0,29$$

### 3.5. Loi des rayons de courbure

#### 3.5.1. Rayons de courbure et granulométries marginales

L'inventaire des configurations du type :  $\begin{matrix} 0 & + & + & + & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$  permet de construire une granulométrie (en nombre) des traversées marginales des grains. Il est clair

qu'une telle granulométrie est en relation étroite avec la loi de répartition du rayon de courbure  $R$  du contour (limité aux portions  $R > 0$ ).

Soit, en effet,  $\Phi_1(\alpha)$  la fonction de répartition associée à cette granulométrie (elle dépend de  $\alpha$ ) et par conséquent l'expression :

$$v_1(\alpha) [1 - \Phi_1(l)] \delta a$$

représente le nombre total des traversées marginales dont la longueur dépasse  $l$  (fig. 19).

Chaque terminaison convexe des grains dont la normale positive possède la direction  $\alpha$  apporte à ce total une contribution égale à :

$$\delta a = \frac{l^2}{8R} \quad \text{si le rayon de courbure } R > \frac{l^2}{8\delta a}$$

$$0 \quad \text{si } \dots \dots \dots R < \frac{l^2}{8\delta a}$$

Par suite, si nous désignons par  $\psi_1(r)$  la probabilité pour que le rayon de courbure d'une terminaison donnée soit inférieur à une valeur  $r$ , nous obtenons la relation :

$$v_1(\alpha) [1 - \Phi_1(l)] = v_1(\alpha) \int_{\frac{l^2}{8\delta a}}^{\infty} \left[ 1 - \frac{l^2}{8R\delta a} \right] d\psi_1(R) \tag{37}$$

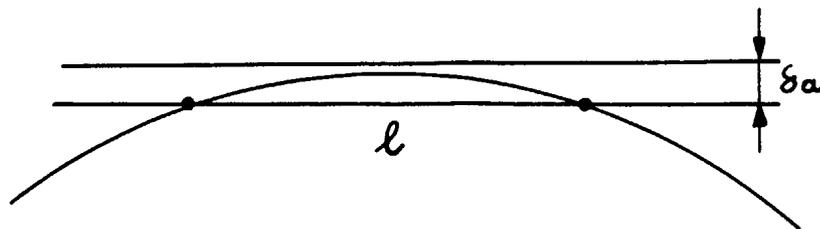
Ainsi, la loi  $\psi_1(R)$  de répartition des rayons de courbure correspondant à une direction  $\alpha$  donnée de la normale se relie de manière simple à la granulométrie  $\Phi_1(l)$  des traversées marginales. Pour expliciter cette relation, nous devons résoudre l'équation intégrale (37). Désignons par :

$$\varphi_1(l) = \frac{d}{dl} \Phi_1(l)$$

la densité de fréquence associée à  $\Phi_1$  et dérivons (37) en  $l$ . Il vient :

$$\varphi_1(l) = \frac{l}{4\delta a} \int_{\frac{l^2}{8\delta a}}^{\infty} \frac{1}{R} d\psi_1(R)$$

Fig. 19. — Traversée marginale d'un grain



Différentiant à nouveau en  $l$ , nous obtenons après un changement de variables évident, la relation cherchée, qui est :

$$1 - \psi_1 \left( \frac{l^2}{8 \delta a} \right) = - \int_l^\infty \frac{l^2}{2} \frac{d}{dl} \left[ \frac{\varphi_1(l)}{l} \right] dl$$

Une intégration par parties nous permet de mettre cette relation sous la forme plus maniable suivante :

$$1 - \psi_1 \left( \frac{l^2}{8 \delta a} \right) = \frac{l}{2} \varphi_1(l) + 1 - \Phi_1(l) \quad (38)$$

Cette relation, cependant, n'a de sens que si les grains ne présentent pas d'angulosités (elle suppose, en effet,  $R$  grand devant la maille  $\delta a$ ).

Il faut, pour qu'il en soit ainsi, que  $\frac{d\psi_1}{dR}$  s'annule en  $R = 0$ . On vérifie, à l'aide de (38), que cette condition est vérifiée si :

$$\varphi_1(0) = 0$$

La valeur en  $l = 0$  de la densité de fréquence des traversées marginales des grains a le même sens que celle des traversées elles-mêmes : elle représente un indice d'angulosité, ou de salissage (petits grains).

Les granulométries  $\psi_1$  et  $\Phi_1$  dépendent de la direction  $\alpha$ . Il convient de leur substituer leurs valeurs moyennes :

$$\nu_1 \psi_1(R) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \nu_1(\alpha) \psi_1(R, \alpha) d\alpha$$

$$\nu_1 \Phi_1(R) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \nu_1(\alpha) \Phi_1(R, \alpha) d\alpha$$

$\psi_1(R)$  représente alors véritablement la loi de répartition du rayon de courbure sur les portions positives (convexes) du contour limite. Chaque rayon de courbure est ici compté pour un poids proportionnel à la rotation positive de la normale, qui est  $d\alpha = \frac{ds}{R}$ .

### 3.5.2. Décomposition du périmètre spécifique

Du point de vue expérimental, le début des courbes  $\psi_1(R)$  et  $\Phi_1(l)$  risque d'être mal connu, à cause de la présence d'angulosités ou de rayons de courbure inférieurs à la maille. Par contre, les moments de ces granulométries seront mieux connus. En particulier, considérons le moment du premier ordre :

$$E(R_1) = \int_0^\infty [1 - \psi_1(R)] dR$$

Compte tenu de (38), nous trouvons :

$$E(R_1) = \int_0^\infty \left[ \frac{l}{2} \varphi_1(l) + 1 - \Phi_1(l) \right] \frac{l dl}{4 \delta a}$$

C'est-à-dire :

$$E(R_1) = \frac{1}{4 \delta a} \int_0^\infty l^2 \varphi_1(l) dl$$

La valeur moyenne du rayon de courbure sur les portions convexes du contour se déduit directement du moment d'ordre deux de la granulométrie des traversées marginales des grains. On exprimera de la même façon la valeur moyenne  $E(R_0)$  du rayon de courbure pour les portions concaves du contour, à l'aide de la granulométrie  $\varphi_0(l)$  des traversées marginales des pores.

Le périmètre spécifique total :

$$2\lambda = E[ds] = E[|R| d\alpha]$$

peut alors être décomposé en deux termes  $2\lambda_1$  et  $2\lambda_0$  représentant respectivement les portions convexes et concaves du contour :

$$2\lambda = 2\lambda_1 + 2\lambda_0$$

$$2\lambda_1 = E[\int_{R>0} R d\alpha]$$

$$2\lambda_0 = E[\int_{R<0} |R| d\alpha]$$

Il résulte, en effet, de ce qui précède que l'on a simplement :

$$\begin{cases} 2\lambda_1 = 2\pi \nu_1 E(R_1) \\ 2\lambda_0 = 2\pi \nu_0 E(R_0) \end{cases} \quad (40)$$

### 3.5.3. Signification morphologique de la fonction de répartition des rayons de courbure

La fonction  $\psi(R)$  des grains ou des pores contient, sous une forme synthétique et mathématisée, bien des notions usuelles de pétrographie.

Qu'on se souvienne, par exemple, des multiples chartes de facteurs de rondeur qui indiquent un état de surface plus ou moins lisse des grains. Les indices de rondeur ne sont autres que précisément  $\psi(R)$  pour les petites valeurs de  $R$ . Mais il n'est pas sensé d'arrêter la mesure de cet indice à une valeur déterminée de  $R$  et c'est en fait toute la fonction qui classe l'importance relative des aspérités plus ou moins plates des grains, puis les grains eux-mêmes.

En particulier, à deux grains homothétiques de rapport  $k$  correspondront deux courbes  $\psi(R)$  liées par une affinité de rapport  $k$  d'axe  $Oy$ .

On pourra aussi s'intéresser à la variance de  $\psi_1(R)$ . Pour les grains convexes, elle représente un indice de sphéricité et de deux grains de même

rayon de courbure moyen  $E_1(R)$  le plus proche de la sphère sera celui dont la variance de  $\psi_1(R)$  est la plus faible. On calculera facilement les moments d'ordre  $n$  à l'aide de la relation :

$$E(R_1^n) = \frac{n+1}{n[8\delta\alpha]^n} \int_0^\infty l^{2n} \varphi_1(l) dl$$

qui lie simplement  $E(R_1^n)$  au moment d'ordre  $2n$  de la granulométrie des traversées marginales des grains.

L'anisotropie enfin des courbes  $\psi_1(R, \alpha)$  et  $\psi_0(R, \alpha)$  est instructive. C'est entre autres la seconde fonction dissymétrique que nous rencontrons. Elle permettra de déceler si dans chaque direction les constituants sont en moyenne plus arrondis dans un sens que dans l'autre.

### 3.6. Exemple de détermination d'une fonction de répartition de rayon de courbure

Nous reprendrons cette fois encore l'exemple de la figure 17.

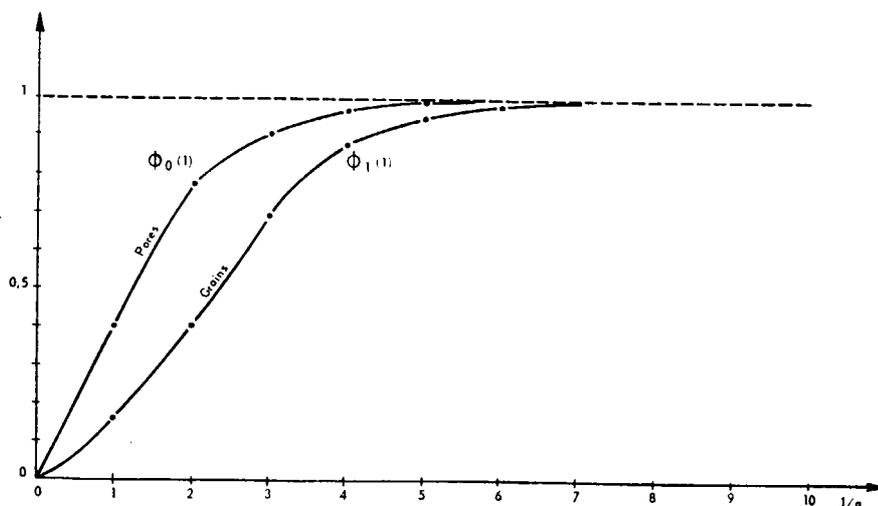
La détermination des nombres spécifiques de convexité nous a conduit à faire l'inventaire des traversées marginales des grains et des pores, nous pouvons donc construire les courbes granulométriques et calculer les fonctions de répartition  $\Phi_1(l)$  et  $\Phi_0(l)$  des traversées marginales des grains et des pores.

La relation (38) permet alors d'obtenir les fonctions de répartition  $\psi_1(R)$  et  $\psi_0(R)$  des rayons de courbure positifs et négatifs. Cette relation n'a de sens que si les grains ne présentent pas d'angulosités, ce qui est le cas ici.

$l$ (mm)	$\Phi_1(l)$ (%)	$\Phi_0(l)$ (%)	$R$ (mm)	$\Psi_1(R)$ (%)	$\Psi_0(R)$ (%)
0	0	0	0	0	0
1	15,8	39,8	0,125	7,9	19,9
2	40,0	74,8	0,5	15,8	39,8
3	68,8	89,8	1,125	25,6	67,2
4	86,7	96,3	2, -	50,9	83,4
5	94,7	98,4	3,125	74,6	93,0
6	97,7	99,5	4,5	88,7	96,3
7	98,7	100,0	6,125	95,2	98,1
8	99,5		8, -	96,0	100,0
9	99,6		10,125	99,0	
10	99,7		12,5	99,0	
11	99,9		15,125	99,2	
12	100,0		18, -	99,3	
13			21,125	100,0	

Fig. 20. — Fonctions de répartition des traversées marginales des grains et des pores mesurées sur la figure 17

Les résultats sont rassemblés sur le tableau ci-dessus et les courbes représentatives des fonctions de répartition sont tracées sur les figures 20 et 21.



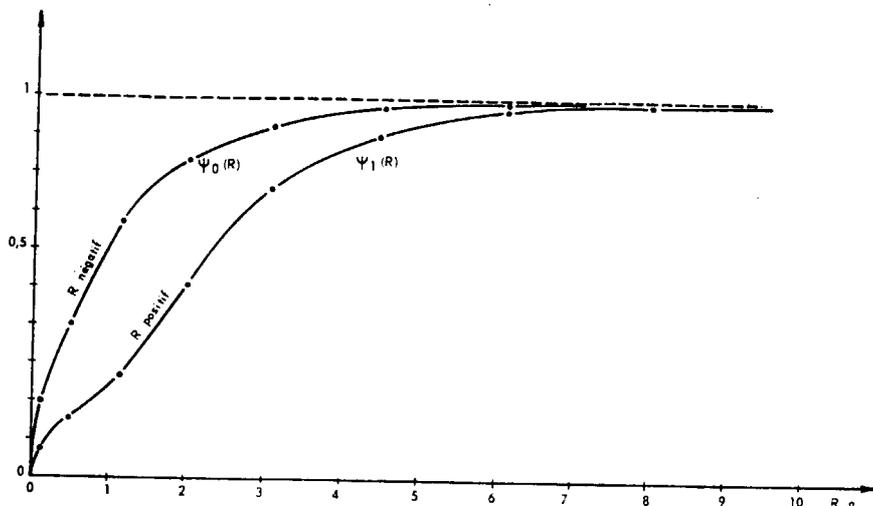


Fig. 21. — Fonctions de répartition des rayons de courbure positifs et négatifs mesurés sur la figure 17

On déduit de ces fonctions les rayons de courbure moyens :

$$E(R_1) = \frac{1}{4a} \int_0^{\infty} l^2 d\Phi'(l) = 2,8 \text{ mm}$$

$$E(R_0) = \frac{1}{4a} \int_0^{\infty} l^2 d\Phi_0(l) = 1,3 \text{ mm}$$

#### 4. CAS DES GRAINS SPHÉRIQUES

Le cas où le milieu est constitué de grains sphériques disjoints (ou circulaires, si l'espace n'a que deux dimensions) est particulièrement simple. Il est, en effet, possible de reconstituer les nombres spécifiques des grains (nombre de sphères présentes dans l'unité de volume, ou de cercles présents dans l'unité de surface) et leurs caractéristiques granulométriques originelles (dans l'espace à 2 ou 3 dimensions) à partir d'observations purement linéaires.

##### 4.1. Notations

Nous désignerons par  $\theta_3$  le nombre de grains sphériques présents par unité de volume et par  $F_3(R)$  la probabilité pour qu'un grain sphérique donné ait un rayon inférieur à  $R$ , c'est-à-dire la granulométrie en nombre de ces grains sphériques.

Sur un plan quelconque, les grains sphériques originels induisent une granulométrie plane, où les grains sont des cercles. Nous désignerons par  $\theta_2$  le nombre de ces grains circulaires présents par unité de surface, et par  $F_2(R)$  la granulométrie en nombre induite dans le plan (probabilité pour qu'un grain circulaire donné ait un rayon inférieur à  $R$ ).

Sur une droite, enfin, les grains sphériques ou circulaires précédents induisent une granulométrie linéaire, où les grains sont des segments de droite. Pour conserver des notations homogènes, nous désignerons par  $R$  la *demi-traversée* d'un grain

linéaire : la sphère de rayon  $R$  de l'espace à une seule dimension est le segment de longueur  $2R$ .  $F_1(R)$  représentera la granulométrie en nombre de ces demi-traversées (probabilité pour qu'un grain linéaire donné ait une demi-traversée inférieure à  $R$ ) et  $\theta_1$  désignera le nombre des grains linéaires présents par unité de longueur.

À ces granulométries, exprimées en nombre,  $F_n(R)$  ( $n = 1, 2$  ou  $3$ ) nous associerons les moments habituels. La notation  $m_\alpha(n)$  désignera le moment d'ordre  $\alpha$  associé à la granulométrie de l'espace à  $n$  dimensions :

$$m_\alpha(n) = \int_0^{\infty} R^\alpha dF_n(R) \quad (41)$$

Enfin, nous devons également introduire des granulométries en mesure. La mesure (volume, surface, ou longueur) du grain de rayon  $R$  dans l'espace à  $n$  dimensions est proportionnelle à  $R^n$ . Si l'on attribue à chaque grain un poids proportionnel à sa mesure, c'est-à-dire proportionnel à  $R^n$ , on obtient une granulométrie en mesure  $G_n(R)$  qui se relie à la granulométrie en nombre  $F_n(R)$  par :

$$dG_n(R) = \frac{R^n}{m_n(n)} dF_n(R) \quad (42)$$

Nous désignerons par  $M_\alpha(n)$  le moment d'ordre  $\alpha$  associé à cette granulométrie en mesure  $G_n$  :

$$M_\alpha(n) = \int_0^{\infty} R^\alpha dG_n(R)$$

De (41) et de (42) résulte immédiatement que les moments en mesure se déduisent des moments en nombre par la relation :

$$M_{\alpha}(n) = \frac{m_{\alpha+n}(n)}{m_{\alpha}(n)} \quad (43)$$

## 4.2. Détermination des nombres spécifiques

Connaissant le nombre  $\theta_1$  de grains traversés par unité de longueur, il est possible de reconstituer les nombres spécifiques  $\theta_2$  et  $\theta_3$  des grains originels circulaires ou sphériques.

En effet, raisonnons sur  $\theta_3$  par exemple. La sphère de rayon  $R$  présente un contour apparent de  $\pi R^2$ . Dans un cube de côté unité, il y a en moyenne  $\theta_3 dF_3(R)$  sphères de rayons  $R$ , et chacune d'elles est rencontrée par une droite parallèle à l'une des arêtes du cube avec une probabilité égale à  $\pi R^2$  (puisque les faces du cube ont une aire unité). Ainsi, le nombre des sphères de rayon  $R$  rencontrées par unité de longueur est  $\theta_3 \pi R^2 dF_3(R)$  et, en intégrant, on obtient le nombre total des grains rencontrés par unité de longueur :

$$\theta_1 = \theta_3 \pi \int_0^{\infty} R^2 dF_3(R)$$

Les autres cas se traitent de manière analogue. En utilisant les moments définis en (41), nous obtenons :

$$\begin{cases} \theta_1 = \theta_3 \pi m_2(3) \\ \theta_1 = \theta_2 2 m_1(2) \\ \theta_2 = \theta_3 2 m_1(3) \end{cases} \quad (44)$$

De ces équations résulte déjà une relation que nous généraliserons ultérieurement :

$$\pi m_2(3) = 2 m_1(3) \cdot 2 m_1(2)$$

La valeur moyenne du contour apparent des grains sphériques est égale au produit du diamètre moyen des grains sphériques par le diamètre moyen des grains circulaires qu'ils induisent sur un plan.

De même, la probabilité  $p$  pour qu'un point  $x$  appartienne à un grain peut s'exprimer à l'aide des trois granulométries. On obtient les relations :

$$p = \theta_1 2 m_1(1) = \theta_2 \pi m_2(2) = \theta_3 \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot m_3(3)$$

Si l'on élimine les  $\theta$  à l'aide de (44), on obtient les relations :

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} \pi m_3(3) &= \pi \cdot m_2(3) \cdot 2 m_1(1) = 2 m_1(3) \cdot \pi \cdot m_2(2) \\ \pi \cdot m_2(2) &= 2 m_1(2) \cdot 2 m_1(1) \end{aligned}$$

dont le sens intuitif est évident : le volume moyen de la sphère est égal au produit de son contour

apparent moyen par la traversée moyenne des grains induits sur une droite, etc.

Toutefois, les relations (44) ne permettent pas, à elles seules, de déterminer  $\theta_2$  et  $\theta_3$  à partir d'observations linéaires, puisque l'on ne connaît que les moments  $m_{\alpha}(1)$  de la granulométrie linéaire, et non les moments  $m_{\alpha}(2)$  et  $m_{\alpha}(3)$  qui sont les moments des granulométries originelles. Dans le paragraphe suivant, nous trouverons un procédé très général permettant de résoudre cette difficulté. Pour l'instant nous nous contenterons d'indiquer des méthodes plus particulières.

Soit, tout d'abord, à déterminer  $\theta_2$ , connaissant  $\theta_1$  et  $F_1$ . Considérons dans le plan un cercle de rayon  $R$  et une traversée observée le long d'une droite  $D$  parallèle à l'axe des  $x$ , dont la demi-longueur est (fig. 22) :

$$h(y) = \sqrt{R^2 - y^2} \quad y \leq R$$

considérons l'intégrale :

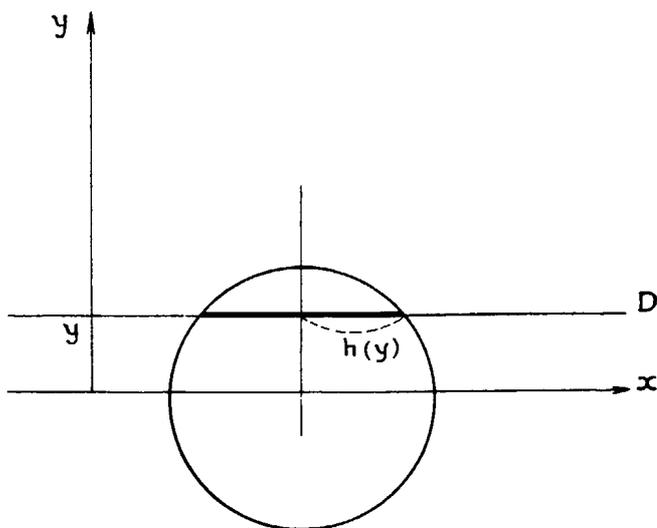
$$2 \int_0^R \frac{dy}{h(y)} = 2 \int_0^R \frac{dy}{\sqrt{R^2 - y^2}} = \pi$$

Elle possède la même valeur (sans dimension)  $\pi$ , quel que soit le rayon  $R$ . Par conséquent, si dans le carré unité existent  $\theta_2$  cercles, la somme de toutes ces intégrales pour ces  $\theta_2$  cercles vaut  $\pi \theta_2$ . Mais cette somme peut être évaluée à partir d'observations faites sur une droite. Elle représente, en effet, le produit de  $\theta_1$  (nombre de traversées) par la moyenne  $E\left(\frac{1}{R}\right)$  de l'inverse des demi-traversées  $R$ .

Ainsi, nous avons :

$$\theta_2 = \frac{1}{\pi} \theta_1 \int_0^{\infty} \frac{1}{R} dF_1(R) = \theta_1 \frac{m_{-1}(1)}{\pi} \quad (45)$$

Fig. 22



Soit maintenant à déterminer  $\theta_3$ . La méthode précédente ne peut plus s'appliquer (elle conduirait à une intégrale divergente). Nous allons nous intéresser alors au nombre des demi-traversées de longueur inférieure à une quantité  $\varepsilon$  petite. Par unité de longueur, ce nombre (connu) est :

$$\theta_1 F_1(\varepsilon) = \theta_1 \left[ \varepsilon f_1(0) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 f_1'(0) + \dots \right]$$

$f_1(h) = F_1'(h)$  désigne la densité de fréquence associée à la granulométrie linéaire. Nous allons voir que  $f_1(0)$  est nécessairement nul. Plaçons-nous dans le cube unité. Les traversées (parallèles à l'axe des  $x$ ) et de demi-longueur inférieure à  $\varepsilon$ , occupent, dans le plan des  $(y, z)$ , une surface égale à  $\theta_1 F_1(\varepsilon)$ . Or chaque sphère de rayon  $R$  apporte à cette surface une contribution égale à l'aire :

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon^2}{R} \cdot 2 \pi R = \pi \varepsilon^2$$

de la couronne circulaire comprise entre les rayons  $R$  et  $R - \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon^2}{R}$ . Cette contribution est indépendante de  $R$ . On doit donc avoir, puisqu'il y a  $\theta_3$  sphères,  $\theta_1 F_1(\varepsilon) = \theta_3 \pi \varepsilon^2$ . Donc nécessairement, l'histogramme  $f_1(R)$  s'annule en  $R = 0$  et on a, de plus :

$$\theta_3 = \frac{1}{2 \pi} \cdot \theta_1 f_1'(0) \quad (46)$$

Enfin, on montre facilement que le nombre  $\theta_3$  des sphères et le nombre  $\theta_2$  des cercles qu'elles induisent dans un plan sont liées par la relation suivante :

$$\theta_3 = \theta_2 \frac{m_{-1}(2)}{\pi} \quad (47)$$

### 4.3. Reconstitution de la granulométrie des sphères

Proposons-nous, en premier lieu, de reconstituer la granulométrie  $F_3$  des sphères connaissant le nombre  $\theta_1$  et la granulométrie  $F_1$  des demi-traversées qu'elles induisent. Dans le cube unité, les demi-traversées (parallèles à l'axe des  $x$ ) de longueur supérieure à  $h$  occupent, dans le plan des  $(y, z)$  une aire égale à  $\theta_1 [1 - F_1(h)]$ . A cette aire, chaque sphère de rayon  $R$  apporte une contribution  $\pi (R^2 - h^2)$ , si  $R$  est supérieur à  $h$  (et nulle si  $R$  est inférieur à  $h$ ). Nous avons donc l'égalité :

$$\theta_1 [1 - F_1(h)] = \theta_3 \int_h^\infty \pi (R^2 - h^2) dF_3(R)$$

Effectuant une intégration par parties, nous trouvons :

$$\theta_1 [1 - F_1(h)] = 2 \pi \theta_3 \int_h^\infty R [1 - F_3(R)] dR \quad (48)$$

Il suffit de dériver en  $h$  l'équation (48) pour obtenir une relation entre l'histogramme  $f_1(h)$  et la granulométrie  $F_3$  :

$$\theta_1 f_1(h) = 2 \pi \theta_3 h [1 - F_3(h)]$$

Pour  $h = 0$ , on doit avoir  $F_3(0) = 0$ . Donc, nécessairement,  $f_1(0) = 0$  et de plus :

$$\theta_3 = \frac{\theta_1}{2 \pi} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_1(h)}{h} = \theta_1 \frac{f_1'(0)}{2 \pi}$$

Nous retrouvons ainsi la relation (46) établie antérieurement. Compte tenu de cette relation, il vient :

$$1 - F_3(R) = \frac{1}{R} \frac{f_1(R)}{f_1'(0)} \quad (49)$$

Ainsi, la granulométrie des sphères peut être intégralement reconstituée à partir de l'histogramme des demi-traversées.

Nous pouvons, en particulier, calculer les moments associés à  $F_3$ . Comme on a :

$$m_x(3) = \int x R^{\alpha-1} [1 - F_3(R)] dR$$

on trouve immédiatement :

$$m_x(3) = x \cdot \frac{m_{\alpha-2}(1)}{f_1'(0)} \quad (50)$$

La relation (43) permet ensuite d'obtenir les moments en mesure. On remarque que le facteur  $f_1'(0)$  disparaît de leur expression. Il vient :

$$M_x(3) = \frac{m_{\alpha+3}(3)}{m_3(3)} = \frac{x+3}{3} \frac{m_{\alpha+1}(1)}{m_1(1)}$$

c'est-à-dire :

$$M_x(3) = \frac{x+3}{3} M_x(1) \quad (51)$$

Les moments de même ordre des granulométries (en mesure) originelles et induites se déduisent directement les uns des autres. C'est là, comme nous le verrons, une circonstance générale. Dans le cas de grains convexes, l'étoile se déduisait déjà directement du moment correspondant de la granulométrie des traversées (exprimée en longueur). Dans le cas où les grains sont sphériques, cette relation s'étend à tous les moments.

### 4.4. Reconstitution de la granulométrie des cercles

Pour reconstituer  $F_2$  à partir de  $\theta_1$  et de  $F_1$ , nous remarquons que, dans le carré unité, les demi-traversées parallèles à l'axe des  $x$  et de longueur

supérieure à  $h$  interceptent sur l'axe des  $y$  une longueur  $\theta_1 [1 - F_1(h)]$ . Mais chaque cercle de rayon  $R \geq h$  apporte une contribution égale à  $2 \sqrt{R^2 - h^2}$ . Nous avons donc :

$$\theta_1 [1 - F_1(h)] = 2 \theta_2 \cdot \int_h^\infty \sqrt{R^2 - h^2} d F_2(R)$$

En effectuant une intégration par parties, nous trouvons :

$$\theta_1 [1 - F_1(h)] = 2 \theta_2 \cdot \int_h^\infty [1 - F_2(R)] \frac{R d R}{\sqrt{R^2 - h^2}} \quad (52)$$

Cette équation intégrale est un tout petit peu plus compliquée que (48), du fait que  $h$  figure explicitement sous le signe somme. On sait (réf. 2) cependant la résoudre. Si l'on désigne par  $f_1(h) = F_1'(h)$  l'histogramme des demi-traversées, on démontre, en effet, que l'équation intégrale (52) a comme unique solution :

$$\theta_2 [1 - F_2(R)] = \frac{\theta_1}{\pi} \int_R^\infty \frac{1}{\sqrt{h^2 - R^2}} f_1(h) dh$$

Pour  $R = 0$ , on doit avoir  $F_2(0) = 0$ . Par conséquent, il vient :

$$\theta_2 = \frac{\theta_1}{\pi} \cdot \int_0^\infty \frac{1}{h} f_1(h) dh$$

Ceci n'est pas autre chose que la relation (45) déjà établie antérieurement et que nous redémontrons ici grâce à un procédé plus général et plus puissant. Compte tenu de cette relation, nous trouvons :

$$1 - F_2(R) = \frac{1}{m_{-1}(1)} \int_R^\infty \frac{1}{\sqrt{h^2 - R^2}} f_1(h) dh \quad (53)$$

Ici encore, donc, il est possible de reconstituer intégralement la granulométrie des cercles à partir de l'histogramme des demi-traversées. La relation obtenue est cependant moins simple que dans le cas de la sphère.

En ce qui concerne les moments, nous obtenons  $m_\alpha(2)$  en multipliant le deuxième membre de (53) par  $\alpha R^{\alpha-1}$  et en intégrant en  $R$ . Il suffit d'invertir l'ordre des intégrations pour obtenir :

$$m_\alpha(2) = \frac{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)} \frac{m_{\alpha-1}(1)}{m_{-1}(1)} \quad (54)$$

Le symbole  $\Gamma$  représente la fonction eulérienne habituelle. Pour  $\alpha = 1, 2$  et  $3$ , on trouve explicitement :

$$m_1(2) = \frac{\pi}{2 m_{-1}(1)}$$

$$m_2(2) = 2 \frac{m_1(1)}{m_{-1}(1)}$$

$$m_3(2) = 3 \frac{\pi}{4} \frac{m_2(1)}{m_{-1}(1)}$$

On n'oubliera pas que  $m_\alpha(1)$  représente le moment d'ordre  $\alpha$  des demi-traversées, et non des traversées elles-mêmes. En ce qui concerne les moments en mesure, on partira de leur définition (43) et des relations (53). Des calculs élémentaires montrent que l'expression  $m_{-1}(1)$  s'élimine et que les moments en mesure de même ordre  $M_\alpha(1)$  et  $M_\alpha(2)$  se déduisent directement l'un de l'autre par la formule :

$$M_\alpha(2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(2 + \frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{1+\alpha}{2}\right)} \cdot M_\alpha(1) \quad (55)$$

En particulier, pour  $\alpha = 1$  et  $\alpha = 2$ , on trouve :

$$M_1(2) = \frac{3\pi}{8} \cdot M_1(1)$$

$$M_2(2) = \frac{4}{3} M_2(1)$$

*Remarque :* Il est possible également de reconstituer la granulométrie  $F_3$  des sphères à partir de la granulométrie  $F_2$  des cercles induits. On obtient la même équation intégrale (52), en écrivant  $\theta_2$  et  $\theta_3$  au lieu de  $\theta_1$  et  $\theta_2$ ,  $F_2$  et  $F_3$  au lieu de  $F_1$  et  $F_2$ , etc. Ainsi,  $\theta_3$  est donné, par l'équation (47), qui est une simple transposition de (45), et les relations (53) et (54) se transposent elles aussi sans difficulté. Il n'y a que les moments en mesure qui exigent un examen spécial. On trouve :

$$M_1(3) = \frac{32}{9\pi} M_1(2)$$

$$M_2(3) = \frac{5}{4} M_2(2)$$

## RÉFÉRENCES

- [1] J. SERRA. — Buts et réalisation de l'analyseur de textures. *Revue de l'industrie minière*, septembre 1967.
- [2] G. MATHERON. — Éléments pour une théorie des milieux poreux. *Masson*, Paris, 1967.
- [3] J. SERRA. — Remarques sur une lame mince de minerai lorrain. *Bulletin du B.R.G.M.*, décembre 1966.
- [4] G. MATHERON. — Structure et composition des perméabilités. *Revue I.F.P.*, avril 1966.
- « Composition des perméabilités en milieu poreux hétérogène, méthode de Schwydler et règles de pondération ». *Revue I.F.P.*, mars 1967.
- Genèse et Signification énergétique de la loi de Darcy. *Revue I.F.P.*, novembre 1966.
- [5] J. SERRA. — Étude, par la morphologie mathématique, des concrétions carbonatées du toarcien de Lorraine. *Sedimentology* (à paraître).
-