

RECHERCHE D'UNE FONCTION D'ANAMORPHOSE POUR LA MISE EN OEUVRE DU KRIGEAGE DISJONCTIF ISOFACTORIEL GAMMA

L.Y. HU et Ch. LANTUEJOUL*

TABLE DES MATIERES

RESUME.....	146	ABSTRACT.....	146
A - INTRODUCTION.....	147	2 - Les variogrammes d'ordre.....	156
B - QUELQUES RAPPELS SUR LE MODELE GAMMA.....	148	3 - Le variogramme de rang.....	159
1 - La loi gamma.....	148	E - LE MODELE DE LAGUERRE.....	160
2 - Les polynômes de Laguerre.....	149	F - TROIS CAS D'ETUDE.....	163
3 - La loi bigamma.....	150	1 - Le gisement de Bertholène.....	164
C - ANAMORPHOSE EMPIRIQUE.....	151	2 - Le gisement de Luceda.....	166
D - QUELQUES TESTS POUR LE MODELE BIGAMMA.....	155	3 - Le site JMC4.....	167
1 - L'espérance conditionnelle des facteurs.....	155	4 - Quelques considérations sur les variogrammes de rang.....	171
		REMERCIEMENTS.....	172
		BIBLIOGRAPHIE.....	172

ILLUSTRATIONS

Figure 1. Y est une fonction aléatoire bigamma ($\alpha=0.5$, $\rho(h)=e^{- h }$). On compare les courbes tonnage- teneur associées à $Y^2(x)$, $Y_{KS}^2(x)$ et $Y_{KD}^2(x)$, les krigeages étant réalisés à partir d'un point voisin distant de 0.5.....	148
Figure 2. Les diverses formes prises par la densité gamma en fonction de son paramètre α	149
Figure 3. Tracé de lois bigamma par lignes d'isodensité. Le paramètre α prend les valeurs 0.1, 0.5, 1.0 et 10. Le coefficient de corrélation entre les variables reste le même (0.6).....	152
Figure 4. Définition de l'anamorphose empirique.....	154
Figure 5. Définition de la fonction pseudo-inverse d'une anamorphose empirique.....	155
Figure 6. Un exemple d'adéquation à un modèle bigamma.....	158
Figure 7. Formes possibles du modèle barycentrique.....	162
Figure 8. Quelques formes possibles du modèle beta.....	163
Figure 9. Gisement de Bertholène: nuage associé aux variogrammes d'ordre 1 et 2 des anamorphosées gamma ($\alpha = 5$).....	165
Figure 10. Gisement de Bertholène: nuage associé aux variogrammes d'ordre 1 et 2 des anamorphosées gaussiennes.....	165
Figure 11. Gisement de Bertholène: nuages de corrélation différée des anamorphosées gaussiennes.....	166
Figure 12. Gisement de Luceda - Nuages expérimentaux γ_Y/γ_Y^1 des anamorphosées gaussienne et gamma ($\alpha = 0.0541$).....	167
Figure 13. Gisement de Luceda - Nuages de points $\gamma_\varphi(Y)/\gamma_Y$ pour l'anamorphose gamma ($\alpha = 0.0541$).....	168
Figure 14. Gisement de Luceda - Nuages de corrélation différée des anamorphosées gaussiennes ($h = 1.5m$).....	168
Figure 15. Site JMC4 - Nuage expérimental γ_Y/γ_Y^1 pour l'anamorphose gamma ($\alpha = 5$) et sa modélisation par un modèle beta ($\mu = 0.5$).....	169
Figure 16. Site JMC4 - Nuage expérimental γ_Y/γ_Y^1 pour l'anamorphose gamma ($\alpha = 0.05$) et le modèle mosaïque.....	170
Figure 17. Site JMC4 - Nuage des points $\gamma_\varphi(Y)/\gamma_Y$ confronté à plusieurs modèles ($\alpha = 5$, modèle beta, et $\alpha = 0.05$, modèle mosaïque).....	170
Figure 18. Gisement de Bertholène - Nuage des points $\gamma_{F(Z)}/\gamma_Z$	171
Figure 19. Gisement de Luceda - Nuage des points $\gamma_{F(Z)}/\gamma_Z$	171
Figure 20. Site JMC4 - Nuage des points $\gamma_{F(Z)}/\gamma_Z$	172

* Centre de Géostatistique, ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DES MINES DE PARIS, 35 rue Saint-Honoré,
77305 - FONTAINEBLEAU (France).

Etudes Géostatistiques V - Séminaire C.F.S.G. sur la Géostatistique 15-16 Juin 1987, Fontainebleau. Sci. de la Terre, Sér. Inf.,
Nancy, 1988, 28, pp. 145 à 173.

RESUME

La mise en oeuvre d'un krigeage disjonctif ponctuel requiert la connaissance de lois bivariées. Le recours à l'anamorphose gaussienne n'est réellement opératoire que si les couples anamorphosés suivent des lois bigaussiennes ou hermitiennes (simplification isofactorielle). Dans cet article, on introduit l'anamorphose gamma. Celle-ci dépend d'un paramètre α , ce qui lui confère une grande souplesse d'utilisation. Le paramètre α peut en effet être choisi de façon à ce que les couples anamorphosés respectent au mieux des lois bigammes ou laguerriennes. Lorsque le paramètre α devient très grand, on retrouve le cas gaussien.

ABSTRACT

In order to implement point disjunctive kriging, bivariate distributions must be known. Using a gaussian anamorphosis can be operatory provided that the anamorphosed couples have bigaussian or hermitian distributions (isofactorial simplification). In this paper, the gamma anamorphosis is introduced. It depends upon a parameter α , which makes it quite flexible. The parameter α can be chosen so that the distributions of the anamorphosed couples can be close to bigamma or laguerrian distributions. In the case where α is large, one gets the gaussian case.

摘 要

使用伽马(GAMMA)同因子析取克里金时转换函数的寻求

点析取克里金法要求知道二维分布律。利用高斯(GAUSS)转换函数的方法仅当转换后的变量偶服从二维高斯分布或埃尔米特(HERMITE)分布时才能实施(同因子简化)。本文引入伽马转换函数法,该法依赖于参数 α ,从而在应用中具有很大的灵活性。事实上,我们可根据使转换后的变量偶尽可能地服从二维伽马分布或拉盖尔(LAGUERRE)分布的原则来选择参数 α 。当参数 α 取值很大时,我们又回溯到高斯的情形。

A - INTRODUCTION

Soit Z une fonction aléatoire stationnaire. Pour estimer la variable $Z(x)$ (ou plus généralement toute fonction $f[Z(x)]$ de cette variable) par krigeage disjonctif à partir de données $Z(x_1), Z(x_2), \dots, Z(x_n)$ d'échantillons, il est nécessaire de connaître les lois bivariées des couples $(Z(x_i), Z(x_j))$ et $(Z(x_i), Z(x))$ (Matheron, 1973, 1976). En pratique, la mise en oeuvre du K.D. s'effectue assez souvent dans un cadre gaussien : on commence par transformer Z en une fonction aléatoire gaussienne Y au moyen d'une anamorphose $Z = \Phi(Y)$, et si les couples $(Y(x_i), Y(x_j))$ et $(Y(x_i), Y(x))$ sont bigaussiens, le K.D. se réduit à une suite de krigeages simples grâce au développement isofactoriel des lois bigaussiennes.

Toutefois, il s'avère de temps en temps que la fonction aléatoire Y ne présente manifestement pas de caractère bigaussien. La démarche précédente n'est alors pas applicable.

C'est la raison pour laquelle il peut être nécessaire de travailler dans un cadre autre que le cadre gaussien.

Dans le présent article, nous nous intéressons au modèle gamma proposé par Matheron en 1973. La loi gamma a l'avantage de dépendre d'un paramètre α , ce qui lui confère une grande souplesse d'utilisation. De surcroît, plus α est grand, plus la loi bigamma se rapproche d'une loi bigaussienne.

La mise en oeuvre du K.D. gamma s'effectue de façon similaire à celle du K.D. gaussien. L'anamorphose gaussienne est remplacée par une anamorphose gamma $Z = \Phi_\alpha(Y_\alpha)$ et le K.D. se ramène à une suite de krigeages simples si les couples anamorphosés suivent des lois bigamma.

C'est ici que le choix du paramètre α , délicat a priori, va s'avérer très avantageux : α sera choisi de façon à ce que les couples anamorphosés suivent au mieux des lois bigamma.

Pour illustrer les possibilités du krigeage disjonctif, le lecteur pourra comparer Figure 1 les courbes tonnage-teneur associées au carré d'une fonction aléatoire bigamma de paramètre $\alpha = 0.5$ et de corrélogramme $\rho(h) = e^{-|h|}$, à son krigeage simple et à son krigeage disjonctif à partir d'un point voisin distant de 0.5.

La connaissance de lois bivariées est nécessaire dans bien des domaines de la géostatistique : non seulement le krigeage disjonctif ponctuel, mais aussi le calcul de réserves récupérables locales, certaines techniques de simulation... Dans cet article, nous nous proposons d'étudier des méthodes pour obtenir le paramètre α de l'anamorphose gamma qui permette une modélisation correcte des lois bivariées. Ces méthodes seront illustrées par plusieurs exemples tirés de la pratique minière.

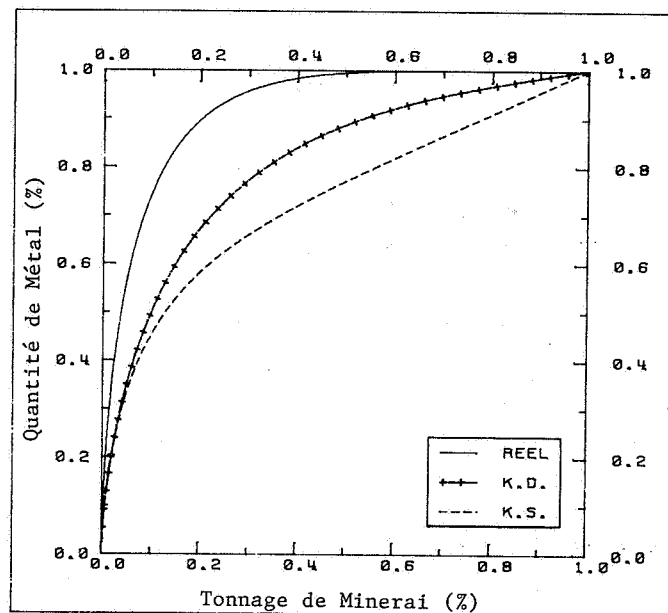


Figure 1

Y est une fonction aléatoire bigamma ($\alpha = 0.5$, $\rho(h) = e^{-|h|}$). On compare les courbes tonnage-teneur associées à $Y^2(x)$, $Y^2_{KS}(x)$ et $Y^2_{KD}(x)$, les krigeages étant réalisés à partir d'un point voisin distant de 0.5.

B – QUELQUES RAPPELS SUR LE MODELE GAMMA

1 – LA LOI GAMMA

On dira que la variable aléatoire Y suit une loi gamma si sa densité vaut :

$$g_{\alpha}(y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} e^{-y} y^{\alpha-1} \quad (y > 0)$$

où α est un paramètre positif et où la constante $\Gamma(\alpha)$ est un facteur de normation.

La forme de la densité g_{α} dépend de α (cf Figure 2). Si $\alpha < 1$, g_{α} est une fonction décroissante, non bornée à l'origine. Si $\alpha > 1$, g_{α} est une courbe en cloche qui tend vers une loi gaussienne aux grandes valeurs de α . Dans le cas intermédiaire $\alpha = 1$, g_1 est exponentielle.

La loi gamma possède des moments de tout ordre :

$$E(Y^n) = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}$$

En particulier, $m = \alpha$ et $\sigma^2 = \alpha$. Sa sélectivité vaut (Matheron, 1982) :

$$S = \frac{\Gamma(\alpha + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha)}$$

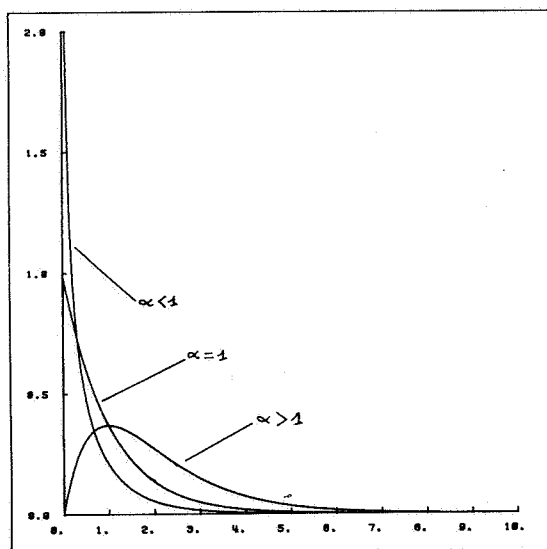


Figure 2 : Les diverses formes prises par la densité gamma en fonction de son paramètre α

2 - LES POLYNÔMES DE LAGUERRE

De même que les modèles isofactoriels gaussiens s'expriment en termes de polynômes d'Hermite, les modèles isofactoriels gamma vont se développer de manière simple sur une base de polynômes de $L^2(\mathbb{R}_+, g_\alpha)$. On définit les polynômes de Laguerre normés à l'aide de la formule de Rodrigues :

$$\ell_n^\alpha(y) = \frac{\theta_n}{g_\alpha(y)} g_{\alpha+n}^{(n)}(y)$$

avec :

$$\theta_n = \sqrt{\frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha) n!}}$$

En particulier :

$$\ell_0^\alpha(y) = 1$$

$$\ell_1^\alpha(y) = \sqrt{\alpha} \left(1 - \frac{y}{\alpha}\right)$$

$$\ell_2^\alpha(y) = \sqrt{\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}} \left(1 - \frac{2y}{\alpha} + \frac{y^2}{\alpha(\alpha+1)}\right)$$

et plus généralement $\ell_n^\alpha(y)$ est un polynôme de degré n :

$$\ell_n^\alpha(y) = \theta_n \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+i)} y^i$$

On vérifie aisément que ces polynômes sont orthogonaux pour g_α :

$$\int_0^{+\infty} \ell_n^\alpha(y) \ell_p^\alpha(y) g_\alpha(y) dy = \delta_{np}$$

Notons aussi la transformée de Laplace des polynômes de Laguerre qui s'obtient aisément à partir de la formule de Rodrigues :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda y} \ell_n^\alpha(y) dy = (-1)^n \theta_n \frac{\lambda^n}{(1+\lambda)^{n+\alpha}}$$

3 - LA LOI BIGAMMA

Soient maintenant X et Y deux variables aléatoires de même loi g_α . On dira que le couple (X, Y) suit une *loi bigamma* s'il existe un coefficient ρ positif mais strictement inférieur à 1, tel que la densité du couple a pour expression :

$$g_\alpha^\rho(x, y) = \frac{e^{-\frac{x+y}{1-\rho}}}{\Gamma(\alpha)(1-\rho)} \left(\frac{x}{\rho} \frac{y}{\rho} \right)^{\frac{\alpha-1}{2}} I_{\alpha-1} \left(2 \frac{\sqrt{xy\rho}}{1-\rho} \right)$$

où I désigne une fonction de Bessel modifiée de deuxième espèce :

$$I_\lambda(z) = \left(\frac{z}{2} \right)^\lambda \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n! \Gamma(\lambda+n+1)} \left(\frac{z}{2} \right)^{2n}$$

Sous cette forme, la loi bigamma n'est guère manipulable. Fort heureusement, elle peut également s'écrire au moyen d'un développement en polynômes de Laguerre :

$$g_\alpha^\rho(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \rho^n \ell_n^\alpha(x) \ell_n^\alpha(y) g_\alpha(x) g_\alpha(y)$$

Compte-tenu de l'orthogonalité des polynômes de Laguerre, il est aisé de montrer que la loi bigamma échange les facteurs :

$$E \{ \ell_n^\alpha(X) | Y \} = \rho^n \ell_n^\alpha(Y)$$

$$E \{ \ell_n^\alpha(Y) | X \} = \rho^n \ell_n^\alpha(X)$$

Ces équations sont du reste caractéristiques du modèle bigamma compte-tenu de ce que les ℓ_n^α constituent une famille totale de $L^2(\mathbb{R}_+, g_\alpha)$. De là, il découle facilement que :

$$\text{Cov} \{ \ell_n^\alpha(X), \ell_p^\alpha(Y) \} = \delta_{np}(1-\delta_{no}) \rho^n$$

et que le coefficient de corrélation entre X et Y sont précisément ρ .

La forme d'une loi bigamma dépend essentiellement de son paramètre α (cf Figure 3). Lorsque $\alpha < 1$, les deux variables prennent en général de faibles valeurs. Il se peut toutefois que l'une d'entre elles prenne une valeur plus élevée. On observe alors des motifs en "ailes de papillon" particulièrement nets lorsque ρ n'est pas trop proche de 1. Lorsque α augmente, ces motifs s'estompent peu à peu pour totalement disparaître à la valeur $\alpha = 1$. A partir de cette valeur, les lignes d'isodensité se referment pour dessiner des formes de plus en plus elliptiques.

La raison de ce phénomène vient de ce qu'une loi bigamma tend à se rapprocher d'une loi bigaussienne lorsque son paramètre α augmente, comme le montre le petit calcul suivant:

Partons de la transformée de Laplace d'une loi bigamma qui s'obtient à partir de celle des polynômes de Laguerre :

$$E \{ e^{-\lambda X - \mu Y} \} = [1 + \lambda + \mu + (1-\rho)\lambda\mu]^{-\alpha}$$

On en déduit immédiatement la transformée de Fourier du couple centré normé :

$$E \left\{ e^{i \left[u \frac{X-\alpha}{\sqrt{\alpha}} + v \frac{Y-\alpha}{\sqrt{\alpha}} \right]} \right\} = e^{-i\sqrt{\alpha}(u+v)} \left[1 - \frac{i u}{\sqrt{\alpha}} - \frac{i v}{\sqrt{\alpha}} - (1-\rho) \frac{uv}{\alpha} \right]^{-\alpha}$$

Passons au logarithme et faisons tendre α vers l'infini. On obtient :

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \ln E \left\{ e^{i \left[u \frac{X-\alpha}{\sqrt{\alpha}} + v \frac{Y-\alpha}{\sqrt{\alpha}} \right]} \right\} = -\frac{u^2}{2} + (1-\rho) uv - \frac{v^2}{2}$$

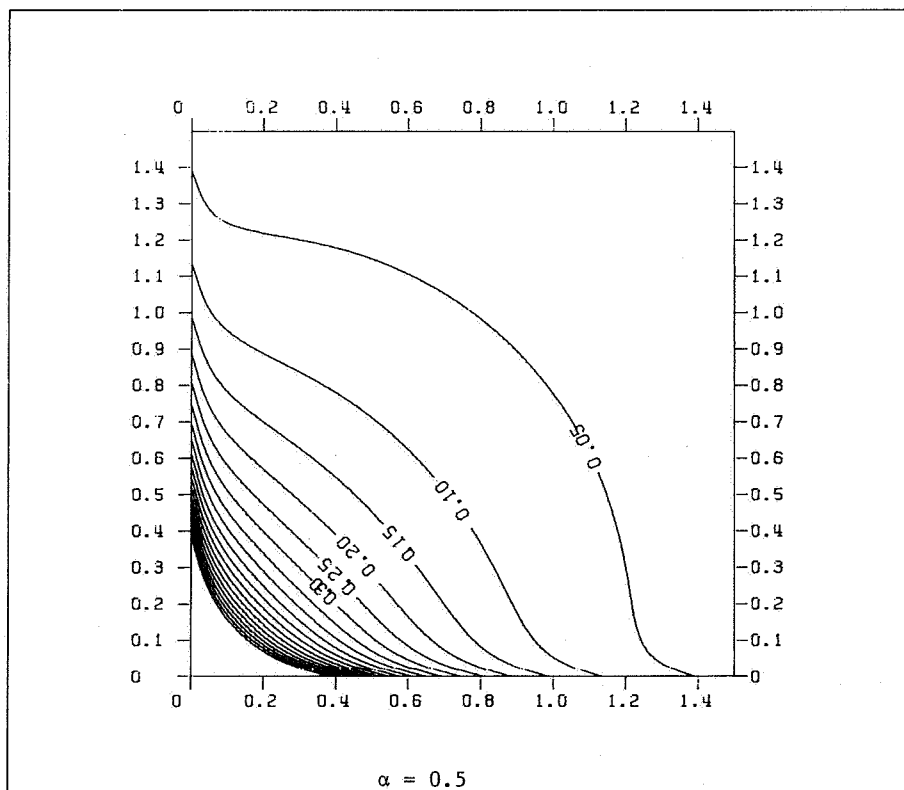
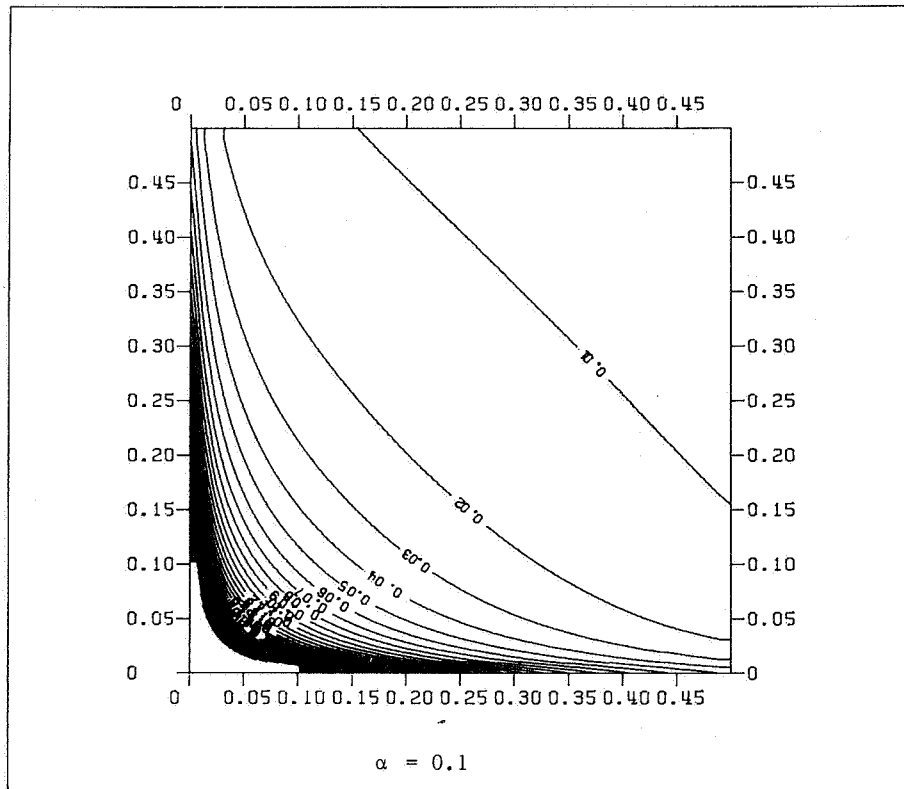
qui est précisément le logarithme de la transformée de Fourier d'une loi bigaussienne.

C - ANAMORPHOSE EMPIRIQUE

Nous désirons anamorphoser la fonction aléatoire stationnaire Z en une autre fonction aléatoire Y de la loi stationnaire g_α . Pour ce faire, nous devons connaître la loi stationnaire F de Z, ce qui, en général, n'est malheureusement pas le cas. Nous ne disposons souvent que d'un estimateur de F, à savoir la loi empirique :

$$F^*(dz) = \sum_{i=1}^n p_i \delta_{z_i}(dz)$$

où les z_i sont les valeurs prises par les échantillons de Z et les p_i sont leur fréquence d'apparition.



Figures 3 : Tracé de lois bigamma par lignes d'isodensité. Le paramètre α prend les valeurs 0.1, 0.5, 1.0 et 10. Le coefficient de corrélation entre les variables reste le même (0.6).

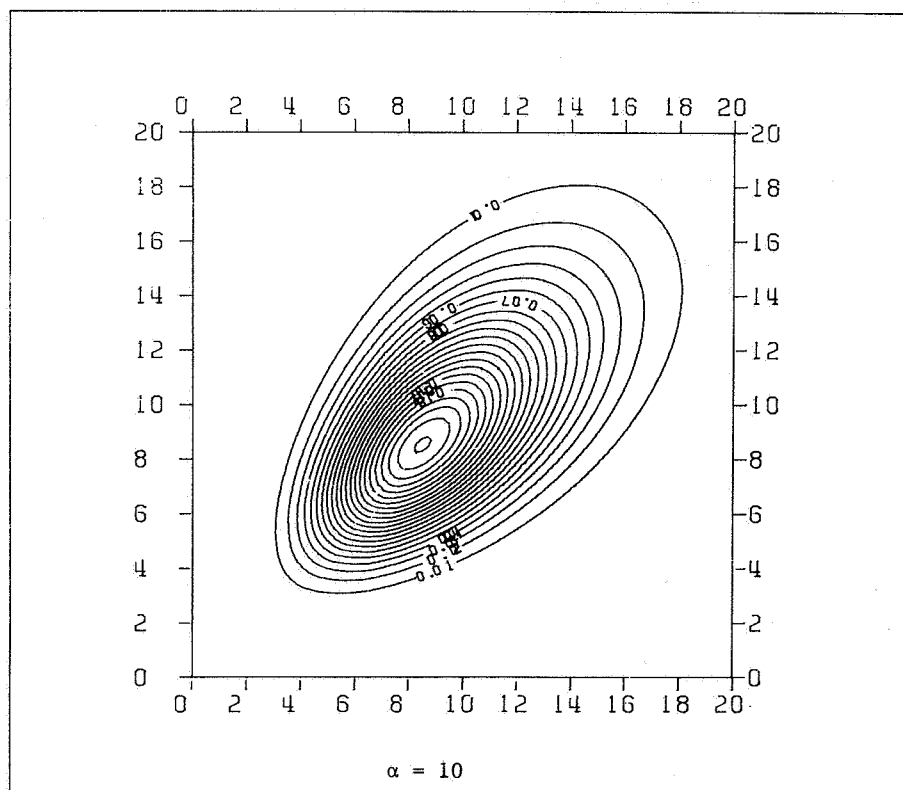
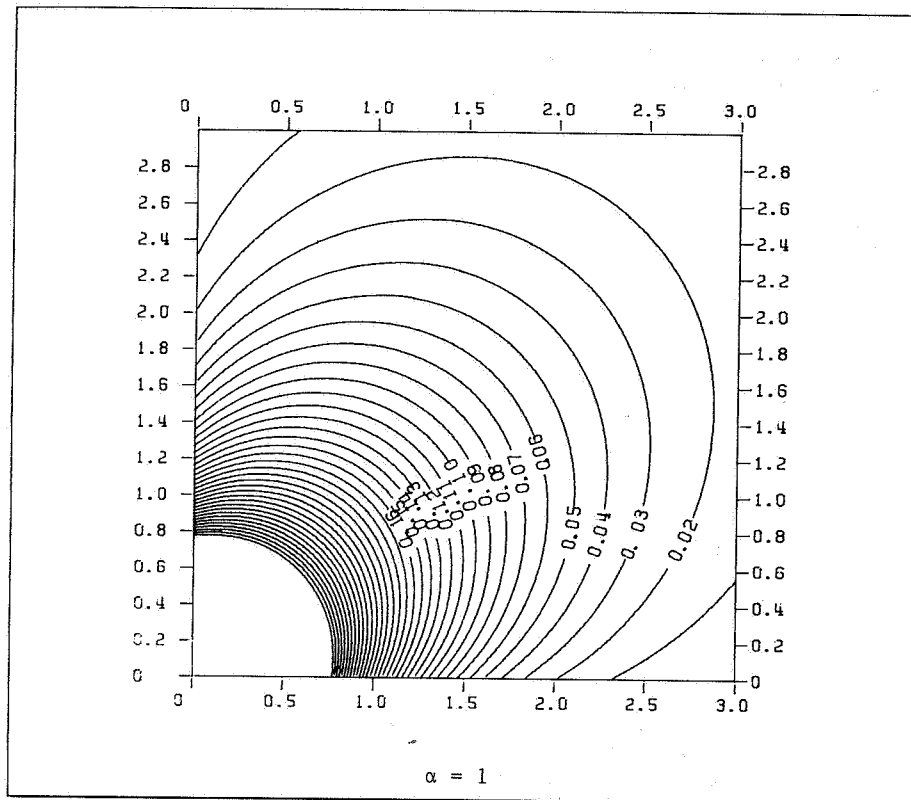


Figure 3 (suite).

Dans ces conditions, pourquoi ne pas introduire la fonction d'anamorphose entre F^* et g_α ? Compte-tenu du caractère atomique de F^* , cette fonction notée φ aura pour valeur :

$$\varphi(y) = \sum_{i=1}^n z_i \mathbb{1}_{[y_{i-1}, y_i[}(y)$$

les y_i s'exprimant simplement à l'aide de la fonction de répartition G_α associée à la loi g_α :

$$y_i = G_\alpha^{-1} \left(\sum_{j=1}^i p_j \right) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

ainsi que $y_0 = 0$. Une telle fonction φ est appelée *anamorphose empirique* (Lantuéjoul, Rivoirard, 1984).

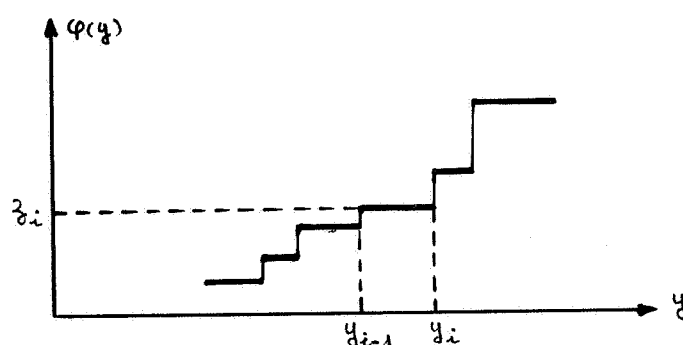


Figure 4 : Définition de l'anamorphose empirique

L'anamorphose empirique n'étant pas bijective, il n'existe pas à proprement parler d'anamorphose inverse. En contrepartie, on peut définir une fonction pseudo-inverse en associant à tout z_i la valeur moyenne de g_α sur l'intervalle $[y_{i-1}, y_i[$:

$$\psi(z_i) = \frac{1}{p_i} \int_{y_{i-1}}^{y_i} y g_\alpha(y) dy$$

ce que l'on peut écrire de façon plus synthétique :

$$\psi(z_i) = E\{Y | \varphi(Y) = z_i\}$$

en introduisant une variable aléatoire Y de loi g_α .

Cette fonction pseudo-inverse est bien sûr purement conventionnelle. Elle a du moins le mérite de préserver la moyenne de g_α :

$$\sum_{i=1}^n p_i \psi(z_i) = \sum_{i=1}^n \int_{y_{i-1}}^{y_i} y g_\alpha(y) dy = \int_0^{+\infty} y g_\alpha(y) dy$$

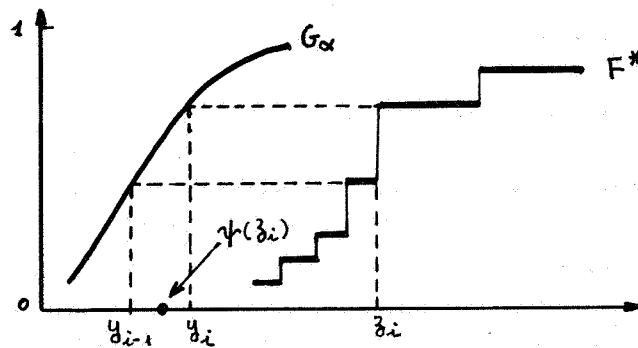


Figure 5 : Définition de la fonction pseudo-inverse d'une anamorphose empirique

Par contre, les moments d'ordre plus élevé ne sont plus respectés. En particulier, la variance des $\Psi(z_i)$ est inférieure à celle de la loi g_α . De façon plus générale, la loi des $\Psi(z_i)$ est moins dispersée que g_α . En effet, si $Y \sim g_\alpha$, alors $\varphi(Y) \sim F^*$ et

$$E\{Y|\Psi[\varphi(Y)]\} = E\{Y|\varphi(Y)\} = \Psi[\varphi(Y)]$$

qui est une relation de dispersion de Cartier (Matheron, 1984). Il faut noter toutefois que l'écart entre la loi de $\Psi(Z)$ et g_α n'est jamais bien important pour peu que l'on dispose d'un nombre raisonnablement élevé d'échantillons et que les valeurs de ceux-ci sont assez bien diversifiées.

D – QUELQUES TESTS POUR LE MODELE BIGAMMA

Considérons comme précédemment la fonction aléatoire stationnaire d'étude Z , et désignons par Y la fonction déduite de Z par anamorphose selon la loi gamma de paramètre α . Nous voulons tester le caractère bigamma de Y : existe-il une fonction de corrélation ρ telle que le couple $(Y(x), Y(x+h))$ admette la densité bivariable ?

$$g(u,v) = \sum_n \rho^n(h) \ell_n^\alpha(u) \ell_n^\alpha(v) g_\alpha(u) g_\alpha(v)$$

1 – L'ESPERANCE CONDITIONNELLE DES FACTEURS

Ayant pour objectif le krigeage disjonctif de Z , le test qui paraît le plus approprié est le contrôle des égalités :

$$E(\ell_n^\alpha[Y(x+h)]|Y(x)) = \rho^n(h) \ell_n^\alpha[Y(x)]$$

qui caractérisent le modèle bigamma. Une telle approche a été pratiquée avec succès dans le cas gaussien par Guibal et Remacre (1984). Elle présente toutefois un certain nombre d'inconvénients que nous consignons ci-dessous :

- i) le calcul des espérances conditionnelles requiert un nombre considérable de données
- ii) en toute rigueur, pour tester le modèle bigamma, il faudrait effectuer le contrôle des espérances conditionnelles à tous les ordres et à toutes les distances qui sont nécessaires pour la mise en oeuvre du krigeage disjonctif. Cette opération, particulièrement lourde, n'est ou ne peut jamais être menée complètement
- iii) un estimateur sans biais ne présente véritablement d'intérêt que s'il est entaché d'une faible variance. S'il en est ainsi pour le modèle bigaussien, il n'en va certainement pas de même pour le modèle bigamma. Par exemple, on trouve :

$$\text{Var}\{\ell_n^\alpha[Y(x+h)]|Y(x)=y\} = [1-\rho(h)] \left[\frac{2\rho(h)y}{\alpha} + 1-\rho(h) \right]$$

Il s'agit d'une fonction affine de la valeur conditionnante et décroissante en α . Lorsque α tend vers 0, cette variance peut devenir arbitrairement grande.

A vrai dire, il est possible de remédier au premier de ces inconvénients en remplaçant la condition " $Y(x) = y$ " par une condition plus souple du type " $Y(x) < y$ " par exemple. On parvient à des expressions tout aussi simples :

$$E\{\ell_n^\alpha[Y(x+h)]|Y(x)<y\} = \rho^n(h) E\{\ell_n^\alpha[Y(x)]|Y(x)<y\}$$

que l'on obtient immédiatement en remarquant que :

$$E\{\ell_n^\alpha[Y(x+h)]|1_{Y(x)<y}\} = E\{\ell_n^\alpha[Y(x+h)]|Y(x)|1_{Y(x)<y}\} = \rho^n(h) E\{\ell_n^\alpha[Y(x)]|1_{Y(x)<y}\}$$

Malheureusement, cette amélioration est insuffisante pour pallier les autres inconvénients.

2 - LES VARIOGRAMMES D'ORDRE

Si la fonction aléatoire Y suit un modèle bigamma de paramètre α et de fonction de corrélation ρ , Matheron (1982) a établi :

$$\gamma_Y(h) = \frac{1}{2} E\{[Y(x+h) - Y(x)]^2\} = \alpha[1 - \rho(h)]$$

$$\gamma_Y^1(h) = \frac{1}{2} E\{|Y(x+h) - Y(x)|\} = \frac{\Gamma(\alpha + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha)} \sqrt{1 - \rho(h)}$$

d'où il résulte que :

$$\frac{\gamma_Y^1(h)}{\gamma_Y^1(\infty)} = \sqrt{\frac{\gamma_Y(h)}{\gamma_Y(\infty)}}$$

Interprétons ce résultat : à chaque distance h sont associées les valeurs des variogrammes d'ordre 1 et 2 normés. Le graphe de la courbe paramétrée en h $(\gamma_Y^1(h)/\gamma_Y^1(\infty), \gamma_Y(h)/\gamma_Y(\infty))$ a une forme parabolique. Cette forme, particulièrement simple à reproduire, peut servir de test au modèle bigamma.

Ce test est-il caractéristique du modèle bigamma ? En d'autres termes, si le couple $(Y(x), Y(x+h))$ vérifie :

$$\frac{\frac{1}{2} E\{|Y(x+h) - Y(x)|\}}{\Gamma(\alpha + \frac{1}{2})} = \sqrt{\frac{\frac{1}{2} E\{[Y(x+h) - Y(x)]^2\}}{\alpha}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n} \Gamma(\alpha)}$$

est-il bigamma ? En fait, rien n'est moins sûr. A l'heure actuelle, nous ne connaissons pas la réponse à cette question, même dans le cas où le couple est infiniment divisible.

Notons toutefois le fait suivant : si le couple $(Y(x), Y(x+h))$ est un mélange de lois bigamma vérifiant la propriété ci-dessus, alors le couple est bigamma. Par mélange de lois bigamma, nous entendons que $(Y(x), Y(x+h))$ admet une densité de la forme :

$$g(u, v) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n \varrho_n^\alpha(u) \varrho_n^\alpha(v) g_\alpha(u) g_\alpha(v)$$

où les p_n sont les moments d'une variable aléatoire R comprise entre 0 et 1 et non presque sûrement égale à 1 :

$$p_n = E(R^n) = \int_0^1 r^n \bar{w}(dr)$$

En effet, la propriété étudiée se réécrit :

$$\int_0^1 \sqrt{1-r} \bar{w}(dr) = \sqrt{\int_0^1 (1-r) \bar{w}(dr)}$$

qui est une formule de Cauchy-Schwarz appliquée aux deux fonctions $\sqrt{1-r}$ et 1. Puisqu'il y a égalité, on a donc :

$$\sqrt{1-r} = c.1 \quad \bar{w} \text{ p.s.}$$

ce qui ne peut se faire que si $\bar{w}$ a un support ponctuel, i.e. $\bar{w} = \delta_{r_0}$ et le couple $(Y(x), Y(x+h))$ suit bien une loi bigamma.

Une application possible de ce test est la recherche du paramètre α de l'anamorphose gamma. α sera choisi de façon à ce que le graphe de la courbe paramétrée en h des variogrammes d'ordre 1 et 2 de la fonction aléatoire anamorphosée Y_α soit le plus conforme à l'arc de parabole $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$ (cf Figures 6).

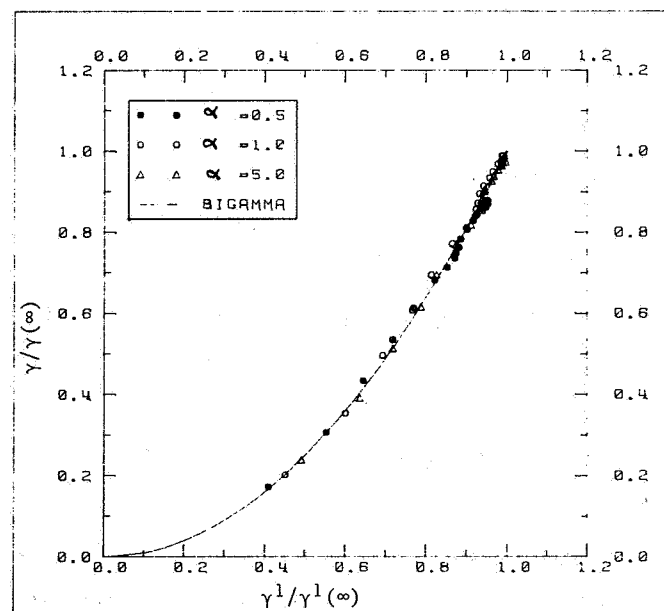
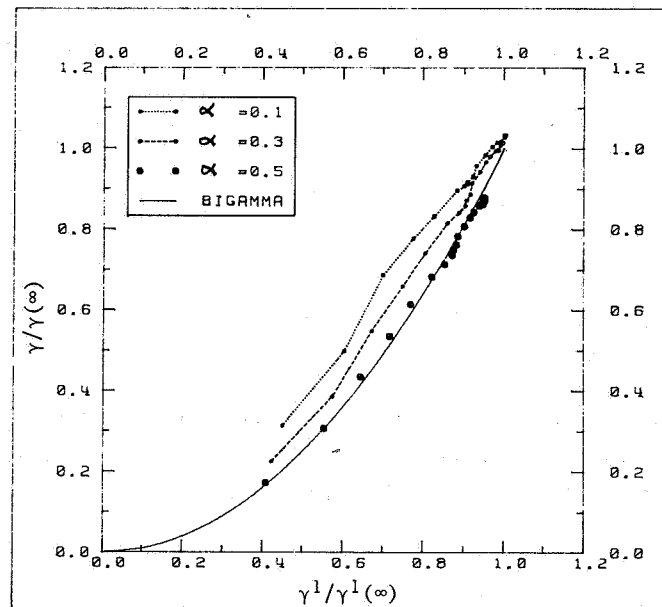


Figure 6 : Un exemple d'adéquation à un modèle bigamma

Pour apprécier le degré d'adéquation de la courbe des variogrammes à la parabole, il est commode d'introduire l'écart :

$$e(\alpha) = \sum_n \lambda_n \left| \frac{\gamma_{Y_\alpha}^1(h_n)}{\gamma_{Y_\alpha}^1(\infty)} - \sqrt{\frac{\gamma_{Y_\alpha}(h_n)}{\gamma_{Y_\alpha}(\infty)}} \right|$$

où les λ_n désignent des coefficients de pondération, fonctions décroissantes du pas d'échantillonnage h_n et fonctions croissantes du nombre de couples $N(h_n)$ ayant permis l'évaluation des variogrammes en h_n . On peut prendre par exemple :

$$\lambda_n = \lambda N(h_n) e^{-\mu |h_n|}$$

Lorsqu'une valeur possible pour α a été obtenue, on peut estimer la fonction de corrélation ρ à l'aide du variogramme de Y_α , ou bien au moyen d'une espérance conditionnelle du premier facteur. Signalons également un excellent contrôle qui est le respect du variogramme brut expérimental :

$$\gamma_Z(h) = \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi_n^2 [1 - P^n(h)]$$

où les coefficients φ_n désignent les coefficients du développement de la fonction d'anamorphose en polynômes de Laguerre.

3 - LE VARIOGRAMME DE RANG

Considérons tout d'abord le cas d'une fonction aléatoire bigaussienne Y de fonction de corrélation ρ . Notant G la fonction de répartition de la loi de Gauss, il n'est pas difficile d'établir que :

$$\gamma_{G(Y)}(h) = \frac{1}{12} - \frac{1}{2\pi} \operatorname{Arcsin} \frac{\rho(h)}{2}$$

Plus généralement, soit Z une fonction aléatoire stationnaire de loi F , admettant Y pour anamorphosée gaussienne. Alors, $F(Z) = G(Y)$ de sorte que :

$$\gamma_{F(Z)}(h) = \frac{1}{12} - \frac{1}{2\pi} \operatorname{Arcsin} \frac{\rho(h)}{2}$$

ce qui permet de "lire" la fonction d'autocorrélation de Y directement à partir du variogramme de rang de Z :

$$\rho(h) = 2 \sin \left[\frac{\pi}{6} - 2\pi \gamma_{F(Z)}(h) \right]$$

Une démarche tout à fait similaire peut être appliquée au modèle bigamma.

Considérons une fonction aléatoire bigamma Y de paramètre α et de fonction de corrélation ρ . Pour évaluer $\gamma_{G_\alpha}(Y)$, il est commode d'introduire le développement en polynômes de Laguerre de la fonction de répartition G_α :

$$G_\alpha(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \theta_n^\alpha \ell_n^\alpha(y)$$

où

$$\theta_n^\alpha = \int_0^{+\infty} G_\alpha(y) \ell_n^\alpha(y) g_\alpha(y) dy$$

Comme :

$$\gamma_{G_\alpha}(Y)(h) = \frac{1}{12} - \sum_{n=1}^{+\infty} \rho^n(h) (\theta_n^\alpha)^2$$

on voit que tout se ramène à l'évaluation des θ_n^α . Pour ce faire, il suffit d'intégrer par parties de façon à faire disparaître G_α , puis d'intégrer séparément chaque monôme du polynôme de Laguerre. Le résultat s'exprime à l'aide d'une fonction hypergéométrique :

$$\theta_n^\alpha = - \sqrt{\frac{\Gamma(\alpha+n)}{\pi \Gamma(\alpha) n!}} \frac{\Gamma(\alpha + \frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha+1)} F(1-n, 2\alpha; \alpha+1; \frac{1}{2}) \quad (n \geq 1)$$

La façon plutôt compliquée de ces coefficients ne nous a pas permis de calculer explicitement la somme de la série. Tout au plus avons-nous pu en donner une représentation intégrale :

$$\gamma_{G_\alpha}(Y)(h) = \frac{\Gamma^2(2\alpha)}{\Gamma^3(\alpha) \Gamma(\alpha+1)} \int_{\rho(h)}^1 \frac{(1-r)^{3\alpha-1}}{(2-r)^{4\alpha}} F[2\alpha, 2\alpha; \alpha+1; \frac{r}{(2-r)^2}] dr$$

qui donne lieu à plusieurs cas intéressants de simplification. Citons en particulier :

$$\gamma_{G_1}(Y)(h) = \frac{1}{3} \left[\frac{1 - \rho(h)}{4 - \rho(h)} \right]$$

En pratique, les méthodes du variogramme de rang doit être utilisée avec prudence. L'anamorphose uniforme ne tolère pas le moindre accroc à la stationnarité. Par ailleurs, lorsque celle-ci est bien établie, l'écrasement des valeurs extrêmes fait de cette méthode un outil particulièrement peu sensible.

E - LE MODELE DE LAGUERRE

Il peut arriver qu'il n'existe aucune anamorphose gamma permettant une modélisation bigamma adéquate des lois bivariées. Dans ce cas, il est nécessaire de se situer dans un cadre plus général que le modèle bigamma. Dans cette partie, nous reprenons le mélange des modèles bigammas qui n'est autre que le modèle de Laguerre dans la terminologie de Matheron (1975).

Rappelons que dans ce modèle, le couple $(Y(x), Y(x+h))$ admet la densité :

$$g(u,v) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n(h) \ell_n^\alpha(u) \ell_n^\alpha(v) g_\alpha(u) g_\alpha(v)$$

où les $p_n(h)$ sont les moments d'une variable aléatoire $R(h)$ comprise entre 0 et 1, et presque sûrement non identique à la constante 1. Dans ce modèle, le coefficient de corrélation entre $Y(x)$ et $Y(x+h)$ n'est autre que $p_1(h)$. Les formules d'échange des facteurs deviennent :

$$E\left\{\ell_n^\alpha[Y(x+h)]|Y(x)\right\} = p_n(h) \ell_n^\alpha[Y(x)].$$

Quant aux variogrammes normés de Y , on obtient :

$$\frac{\gamma_Y(h)}{\gamma_Y(\infty)} = E\{1-R(h)\} = 1 - p_1(h)$$

$$\frac{\gamma_Y^1(h)}{\gamma_Y^1(\infty)} = E\left\{\sqrt{1-R(h)}\right\}$$

Dans ce qui suit, nous allons considérer tour à tour trois exemples de modèles de Laguerre en spécifiant la loi de $R(h)$.

1er exemple : Le modèle mosaïque

$R(h)$ prend les valeurs 0 et 1 avec les probabilités respectives $1 - p_1(h)$ et $p_1(h)$. Dans ce cas :

$$\frac{\gamma_Y(h)}{\gamma_Y(\infty)} = 1 - p_1(h) = \frac{\gamma_Y^1(h)}{\gamma_Y^1(\infty)}$$

de sorte que les variogrammes d'ordres 1 et 2 de Y sont proportionnels. Parmi les modèles de Laguerre, le modèle mosaïque est celui qui minimise la destructuration (Matheron, 1982).

2ème exemple : Le modèle barycentrique

Dans cet exemple, $R(h)$ prend trois valeurs, à savoir 0, $p_1(h)$ et 1 avec les probabilités q , r et p . Pour avoir $E[R(h)] = p_1(h)$, on doit nécessairement prendre $p = p_1(h)(1 - r)$ et $q = [1 - p_1(h)](1 - r)$ de sorte que le modèle dépend d'un paramètre r qui peut varier entre 0 et 1. Pour une valeur de r fixée, on obtient les variogrammes suivants :

$$\frac{\gamma_Y(h)}{\gamma_Y(\infty)} = 1 - p_1(h)$$

$$\frac{\gamma_Y^1(h)}{\gamma_Y^1(\infty)} = (1 - r) [1 - p_1(h)] + r \sqrt{1 - p_1(h)}$$

de sorte que l'on a :

$$\frac{\gamma_Y^1(h)}{\gamma_Y^1(\infty)} = (1-r) \frac{\gamma_Y(h)}{\gamma_Y(\infty)} + r \sqrt{\frac{\gamma_Y(h)}{\gamma_Y(\infty)}}$$

En fonction de la valeur du paramètre r , le modèle barycentrique varie continûment du modèle bigamma au modèle mosaïque (cf Figure 7).

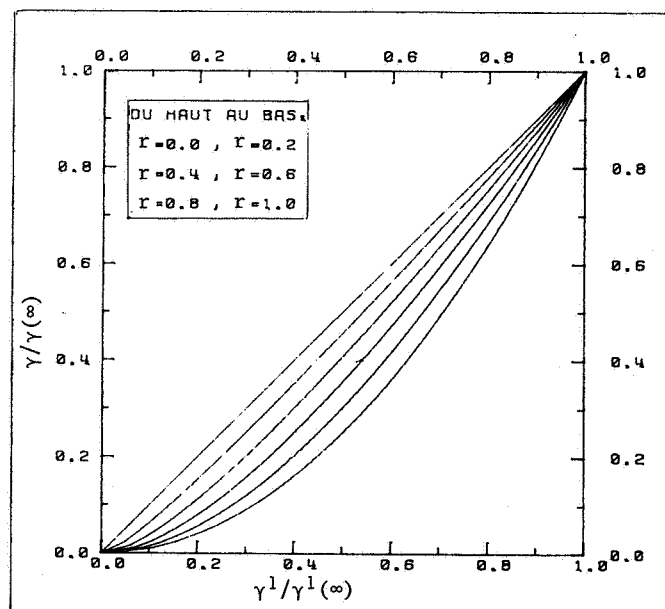


Figure 7 : Formes possibles du modèle barycentrique

3ème exemple : le modèle beta

Dans cet exemple, la variable $R(h)$ suit une loi beta de densité :

$$\bar{w}(r) = \frac{\Gamma(\mu+\nu)}{\Gamma(\mu) \Gamma(\nu)} r^{\mu-1} (1-r)^{\nu-1}$$

où μ et ν sont deux paramètres positifs.

Cette loi possède des moments de tout ordre :

$$\rho_n(h) = \frac{\Gamma(\mu+\nu)}{\Gamma(\mu+\nu+n)} \frac{\Gamma(\mu+n)}{\Gamma(\mu)}$$

avec en particulier :

$$\rho_1(h) = \frac{\mu}{\mu+\nu}$$

Pour les variogrammes, on trouve :

$$\frac{\gamma_Y(h)}{\gamma_Y(\infty)} = 1 - \rho_1(h)$$

$$\frac{\gamma_Y^1(h)}{\gamma_Y^1(\infty)} = \frac{\Gamma(\mu+\nu)}{\Gamma(\mu+\nu+\frac{1}{2})} \frac{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu)}$$

qui peut se récrire à l'aide d'un seul des deux paramètres μ ou ν . Par exemple :

$$\frac{\gamma_Y^1(h)}{\gamma_Y^1(\infty)} = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{1-\rho_1(h)}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{1-\rho_1(h)} + \frac{1}{2}\right)} \frac{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu)}$$

La relation entre les variogrammes normés d'ordres 1 et 2 n'a pas de forme simple (cf Figure 8).

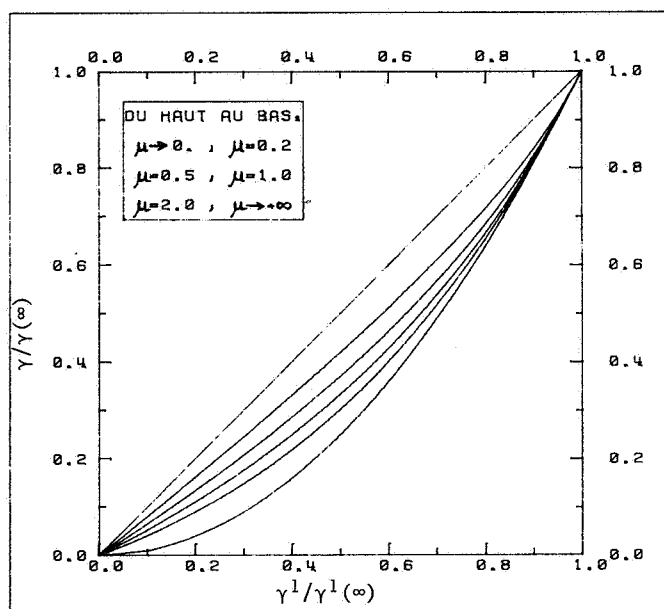


Figure 8 : Quelques formes possibles du modèle beta

F - TROIS CAS D'ETUDE

Parmi les différents tests de loi bivariable qui ont été présentés aux paragraphes précédents, seule l'espérance conditionnelle :

$$E\{\ell_n(X)|Y\} = \rho_n \ell_n(Y) \quad (n \geq 0)$$

constitue un test exhaustif. Ce qui est d'ailleurs purement illusoire : d'une part, une grande masse d'informations, inaccessible en général, est nécessaire pour estimer l'espérance conditionnelle de $\ell_n(X)$ à Y fixé. D'autre part, on est obligé en pratique de se limiter aux premières valeurs de n .

Les autres critères de type variographique ne sont en général pas suffisants pour caractériser les lois bivariées. Mais ils ne sont pas difficiles à mettre en oeuvre pourvu que l'on puisse estimer les variogrammes. Dans les trois cas d'étude qui suivent, nous verrons comment la combinaison de ces critères permet de contrôler les hypothèses et peut nous orienter vers le choix d'un modèle.

1 - LE GISEMENT DE BERTHOLENE

Il s'agit d'un banc d'une mine d'uranium. On dispose de 144 sondages verticaux de 6 m de longueur, implantés selon une maille régulière de 2 m x 3 m. Les échantillons correspondent à des passes de 1 m obtenues par régularisation le long des sondages, et pour lesquels on connaît la position du centre de gravité et la teneur moyenne exprimée en ppm.

Compte-tenu de ce que les échantillons présentent un histogramme très dissymétrique ($\sigma/m=1.9$), nous avons choisi de travailler dans le cadre de l'anamorphose gamma. Le Tableau 1 présente les statistiques des anamorphosées empiriques gamma pour différentes valeurs du paramètre α .

	α	s			σ^2		
		théorique	expé.	err. rel. (%)	théorique	expé.	err. rel. (%)
GAMMA	0.1	0.08831	0.08831	0.000	0.1	0.09905	0.950
	0.5	0.31831	0.31831	0.000	0.5	0.49885	0.230
	1.0	0.50000	0.50000	0.000	1.0	0.99869	0.131
	2.0	0.75000	0.74999	0.001	2.0	1.99840	0.080
	5.0	1.23047	1.23044	0.002	5.0	4.99724	0.055
	10	1.76197	1.76190	0.004	10	9.9412	0.059
GAUSS		0.56419	0.56416	0.005	1	0.99867	0.133

Tableau 1 : Gisement de Bertholène - Statistiques des anamorphosées

On note que pour chaque valeur de α , les valeurs expérimentales de sélectivité et de variance sont pratiquement confondues avec les valeurs théoriques. Cela justifie l'utilisation de l'anamorphose empirique gamma pour toute valeur de son paramètre α .

Ensuite, nous avons construit les nuages γ_Y/γ_Y^1 pour ces différentes valeurs de α . Il se trouve que le nuage ne devient très proche de la courbe théorique bigamma qu'aux grandes valeurs de α (cf. Figure 9).

Le cas bigamma $\alpha = 5$ est pratiquement équivalent au cas bigaussien. Comme prévu, le nuage γ_Y/γ_Y^1 des anamorphosées gaussiennes s'adapte remarquablement au cas bigaussien (cf Figure 10).

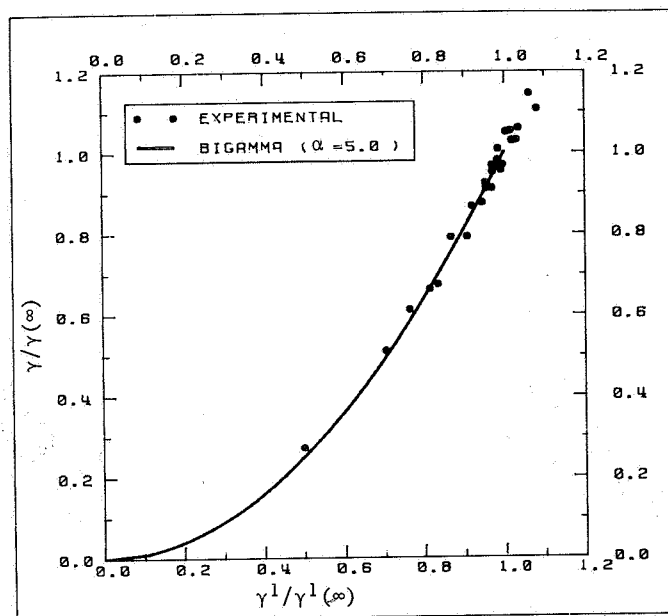


Figure 9 : Gisement de Bertholène : nuage associé aux variogrammes d'ordre 1 et 2 des anamorphosées gamma ($\alpha = 5$)

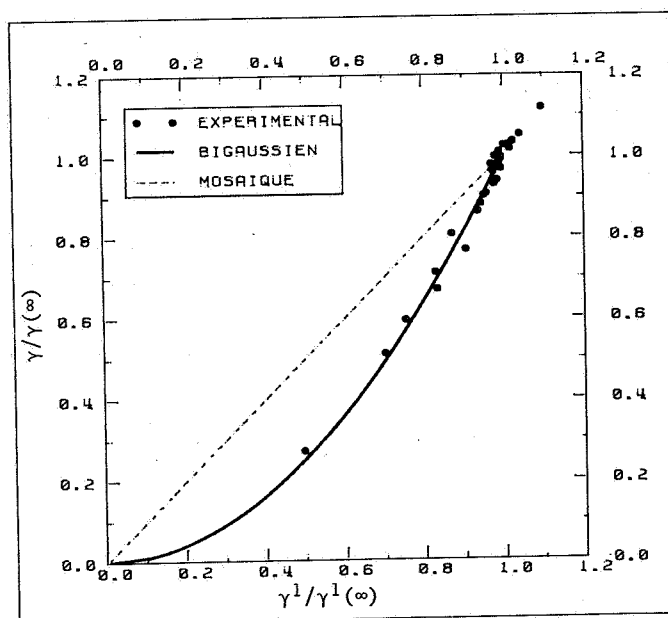


Figure 10 : Gisement de Bertholène : nuage associé aux variogrammes d'ordre 1 et 2 des anamorphosées gaussiennes

Par ailleurs, il n'est pas inintéressant de visualiser les nuages de corrélation différée des anamorphosées gaussiennes (loi bivariable empirique des $(Y(x), Y(x+h))$).

Quelques uns sont reproduits Figure 11. Ils ont été obtenus le long des sondages au pas $h = 1, 2, 3$ et $4m$. Ces nuages sont bien de forme elliptique, typique du cas bigaussien. La circularité va en s'accroissant lorsque h augmente, traduisant par là un degré de dépendance de plus en plus faible entre les deux points d'appui.

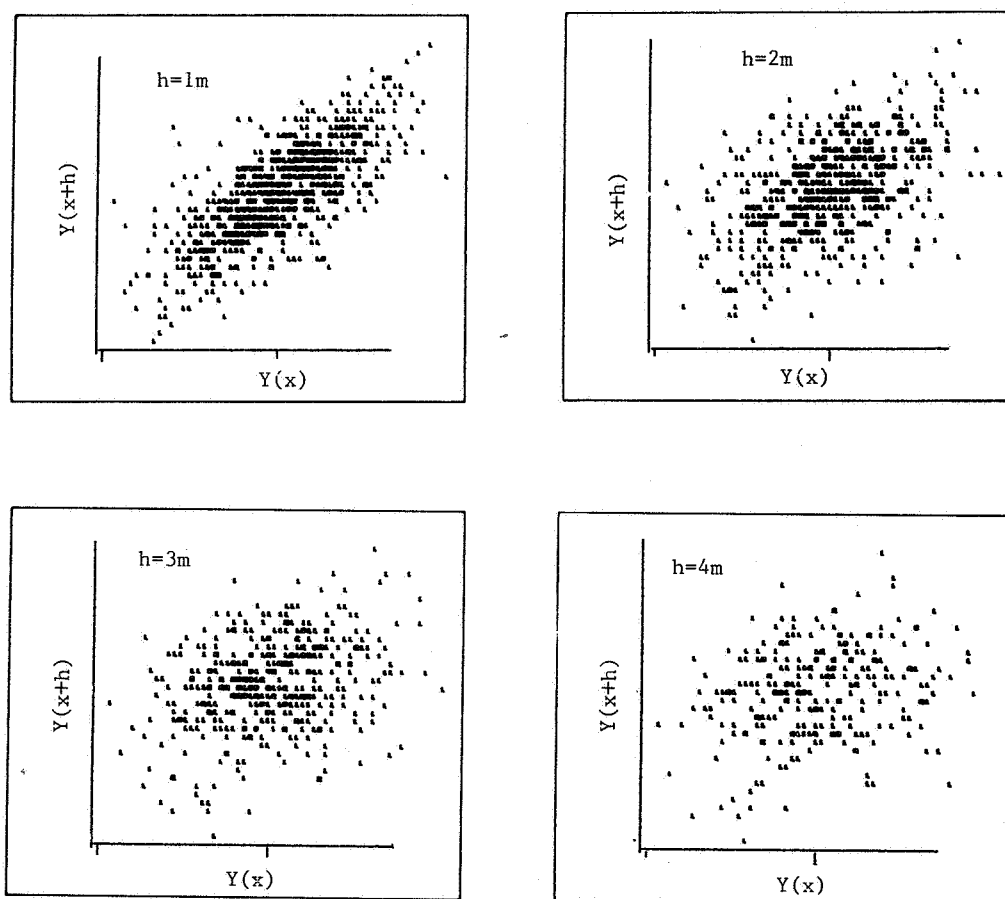


Figure 11 : Gisement de Bertholène : nuages de corrélation différée des anamorphosées gaussiennes

2 - LE GISEMENT DE LUCEDA

La situation où une anamorphose gaussienne restitue une fonction aléatoire bigaussienne n'est pas générale, comme nous allons le voir maintenant.

Les données proviennent d'un autre gisement d'uranium reconnu par une cinquantaine de sondages verticaux. Chaque sondage contient en moyenne 40 échantillons. L'objectif ici est de

modéliser la loi bivariable de la teneur des échantillons. S'agissant d'un gisement d'uranium, nous avons fait choix de l'anamorphose gamma. Le paramètre α a été choisi de façon à ce que Z et Y admettent le même indice de normalité ($s/\sigma \sqrt{\pi}$). On obtient ainsi : $\alpha = 0.0541$.

La comparaison des nuages expérimentaux γ_Y/γ_Y^1 obtenus par anamorphose gaussienne et par anamorphose gamma est fort instructive (cf. Figure 12). Le premier nuage est fort éloigné de la courbe bigaussienne. L'adéquation dans le cas bigamma est bien meilleure. Elle peut du reste être encore améliorée par ajustement à un modèle barycentrique ($r = 0.6$).

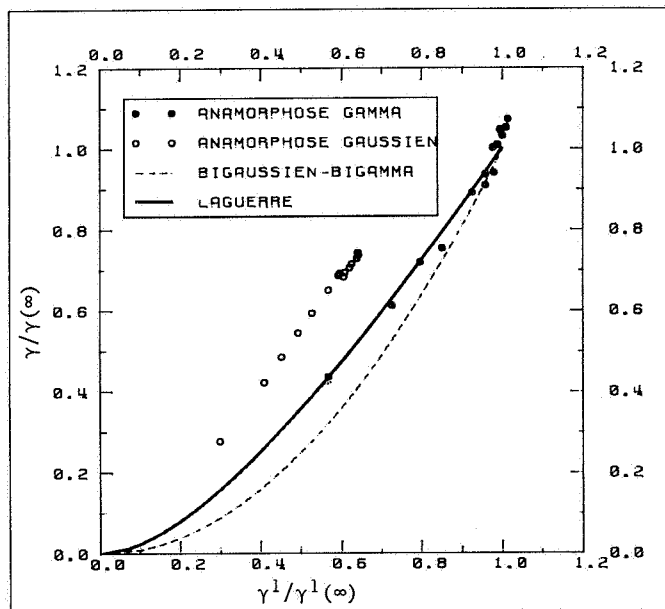


Figure 12 : Gisement de Luceda - Nuages expérimentaux γ_Y/γ_Y^1 des anamorphosées gaussienne et gamma ($\alpha = 0.0541$)

A partir de ce modèle de loi bivariable, nous avons calculé le variogramme $\gamma_\varphi(Y)$ qui est en excellent accord avec le variogramme expérimental de Z (cf. Figure 13).

Pour finir, il est intéressant de regarder le nuage de corrélation différée des anamorphosées gaussiennes (cf. Figure 14). On sait qu'un tel nuage n'est en rien bigaussien.

3 - LE SITE JMC4

Les données considérées ici sont des mesures de pentes le long d'un profil sous-marin. On dispose de 4 285 valeurs espacées tous les 10m. Une anamorphose gamma a été construite à partir de plusieurs valeurs de α . Sur le Tableau 2, où sont consignées les statistiques des anamorphosées, on observe que les valeurs expérimentales de sélectivité et de variance deviennent de plus en plus éloignées des valeurs théoriques. Cela résulte de la forte fréquence des faibles valeurs (la fréquence maximale est de 17%). Toutefois, ces écarts sont suffisamment faibles pour que les anamorphoses empiriques gamma puissent être considérées comme acceptables.

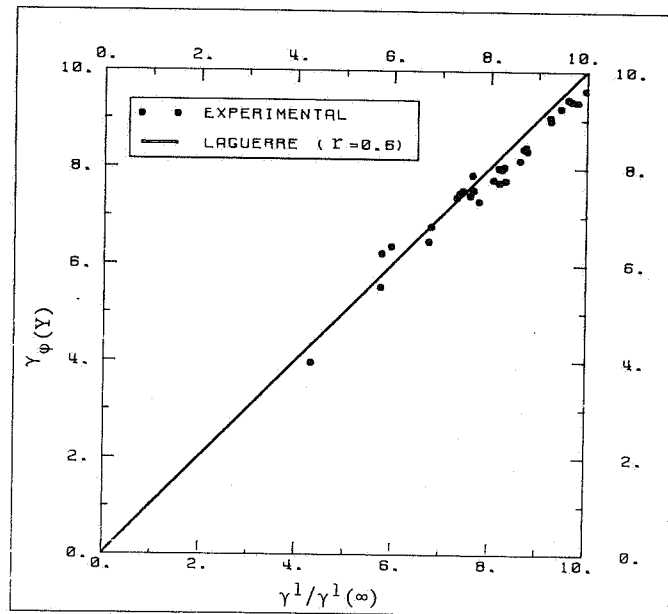


Figure 13 : Gisement de Luceda - Nuage de points $\gamma_\phi(Y)/\gamma^1/\gamma^1(\infty)$ pour l'anamorphose gamma ($\alpha = 0.0541$)

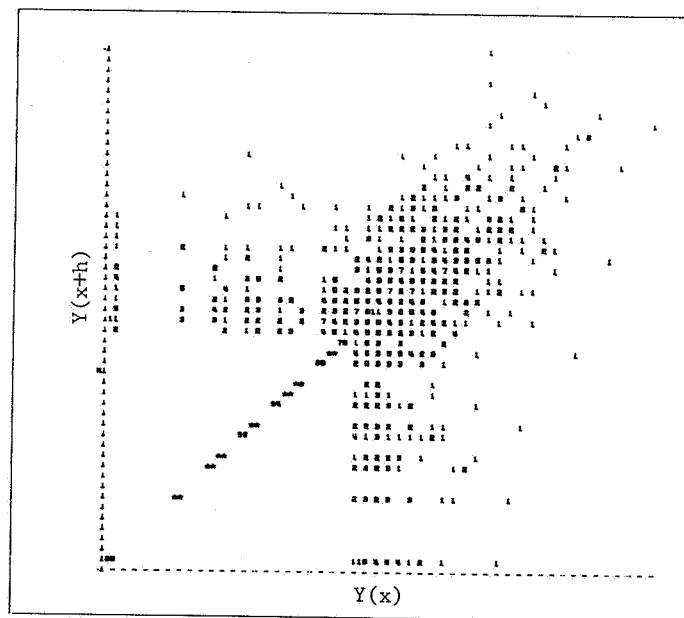


Figure 14 : Gisement de Luceda - Nuages de corrélation différée des anamorphosées gaussiennes ($h = 1.5m$)

Le problème est encore ici la modélisation des lois bivariées. Mais ici les choses ne sont guère aisées. Pour le voir, considérons tout d'abord le cas $\alpha = 5$. Le nuage γ_Y/γ^1_Y qui lui correspond peut être ajusté par un modèle beta où $\mu = 0.5$ (cf. Figure 15).

Malheureusement, ce modèle de loi bivariable entraîne une sous-estimation notable du variogramme de Z (cf. Figure 17).

	α	s			σ^2		
		expé.	théor.	err. rel. (%)	expé.	théor.	err. rel. (%)
GAMMA	0.05	0.04682	0.04683	0.021	0.04975	0.05	0.500
	0.1062	0.09309	0.09315	0.064	0.1059	0.1062	0.282
	0.208	0.16441	0.16468	0.164	0.20757	0.208	0.207
	5	1.21815	1.23047	1.001	4.95365	5	0.927
GAUSS		0.55657	0.56419	1.351	0.97490	1	2.51

Tableau 2 : Site JMC4 - Statistiques des anamorphosées gamma

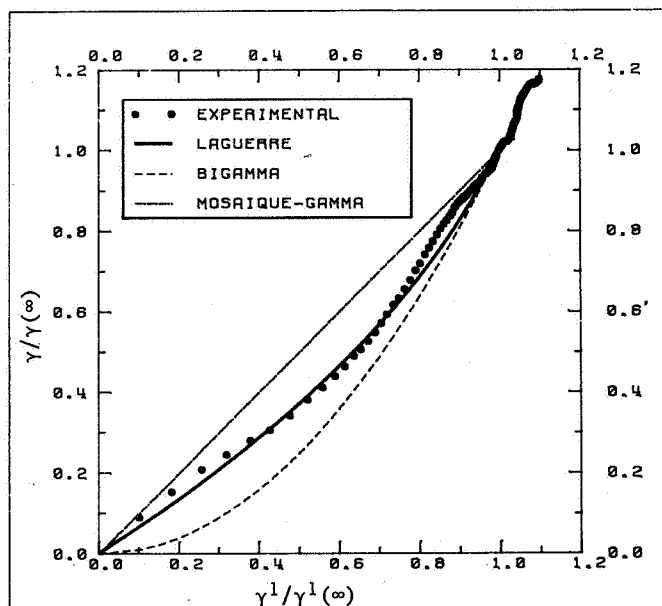


Figure 15 : Site JMC4 - Nuage expérimental γ_Y/γ_Y^1 pour l'anamorphose gamma ($\alpha = 5$) et sa modélisation par un modèle beta ($\mu = 0.5$)

Notre conviction est qu'une anamorphose gamma à partir d'une grande valeur de α ne permet pas une modélisation satisfaisante des lois bivariées. Par voie de conséquence, il ne faut pas attendre grand'chose non plus de l'anamorphose gaussienne.

En revanche, lorsque l'on choisit $\alpha = 0.05$, le nuage expérimental des anamorphosées gamma est proche de la courbe mosaïque (cf. Figure 16), et à partir de la loi bivariable ainsi obtenue, on restitue bien le variogramme expérimental de Z (cf. Figure 17).

Par ailleurs, il convient de signaler que le modèle mosaïque est un modèle sans destruction par rapport au paramètre α : les données anamorphosées gamma d'un modèle mosaïque restent mosaïques, et cela pour toutes les valeurs du paramètre α . Les données expérimentales dont nous

disposons ne se comportent pas ainsi, de sorte qu'elles ne sauraient s'ajuster à un modèle mosaïque. Pour le moment, nous ne connaissons pas encore le modèle susceptible de s'ajuster à ce jeu de données. Si nous arrêtons notre choix au modèle mosaïque après anamorphose gamma de paramètre $\alpha = 0.05$, c'est en raison de la bonne restitution du variogramme de Z, ce qui est capital dans bon nombre d'applications (simulations et changement de support).

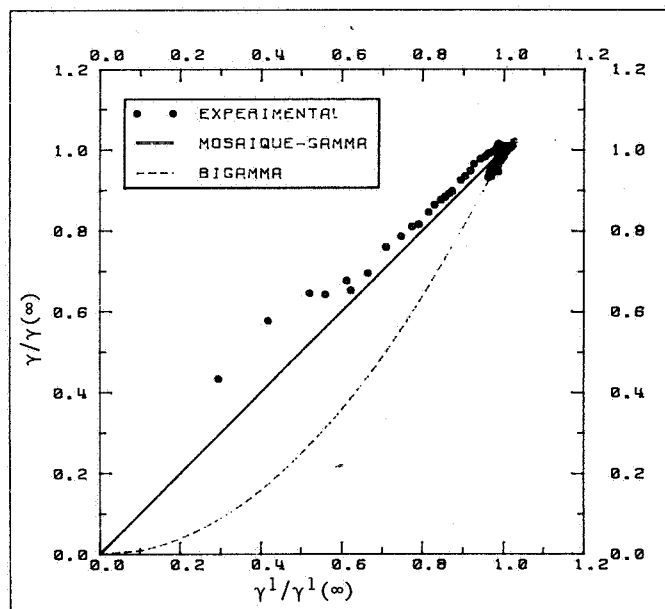


Figure 16 : Site JMC4 - Nuage expérimental γ_Y/γ^1_Y pour l'anamorphose gamma ($\alpha = 0.05$) et le modèle mosaïque

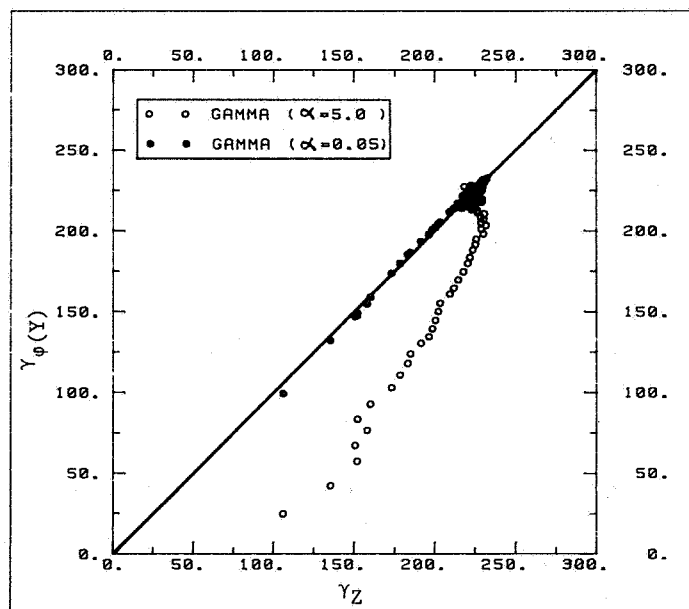


Figure 17 : Site JMC4 - Nuage des points $\gamma_{\phi}(Y)/\gamma_Y$ confronté à plusieurs modèles ($\alpha = 5$, modèle beta, et $\alpha = 0.05$, modèle mosaïque)

4 - QUELQUES CONSIDERATIONS SUR LES VARIOGRAMMES DE RANG

Dans les trois cas d'étude précédents, nous avons constaté qu'après anamorphose gaussienne, la modélisation bigaussienne connaît des succès très inégaux. Et pourtant, le test du variogramme de rang ne permet jamais d'infirmer le modèle bigaussien (cf. Figures 18, 19 et 20). Comme prévu, ce test est beaucoup trop robuste pour pouvoir être de quelque utilité en pratique.

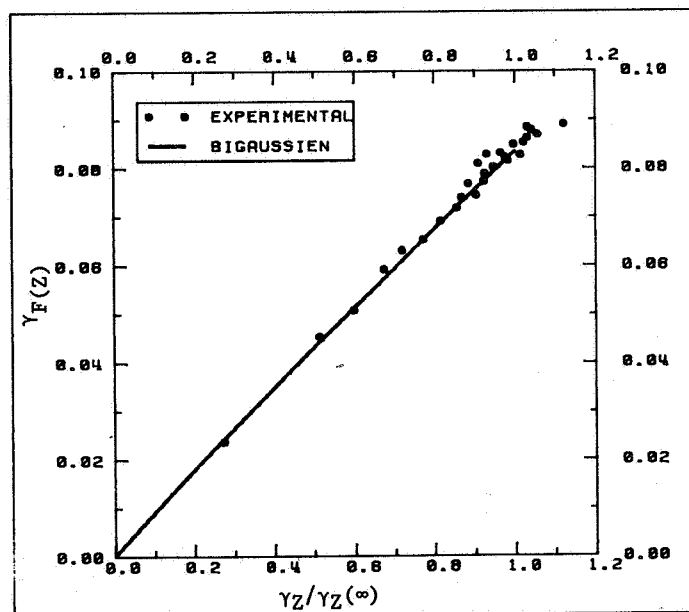


Figure 18 : Gisement de Bertholène - Nuage des points $\gamma_F(Z)/\gamma_Z$

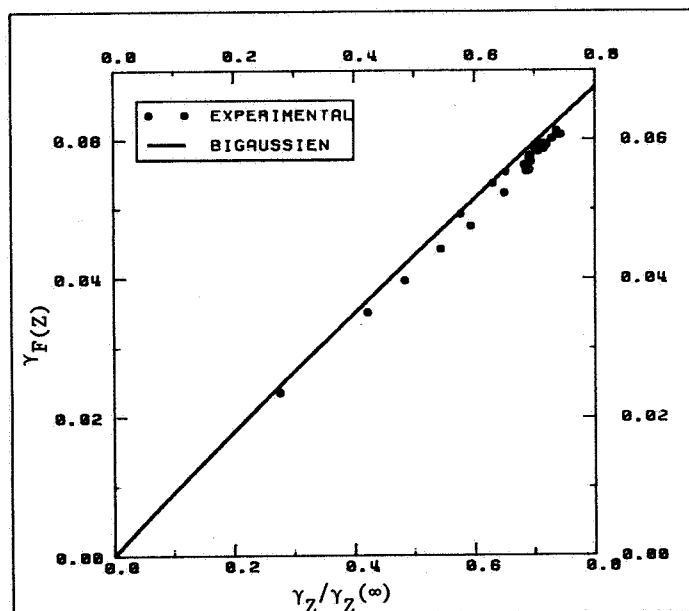


Figure 19 : Gisement de Luceda - Nuage des points $\gamma_F(Z)/\gamma_Z$

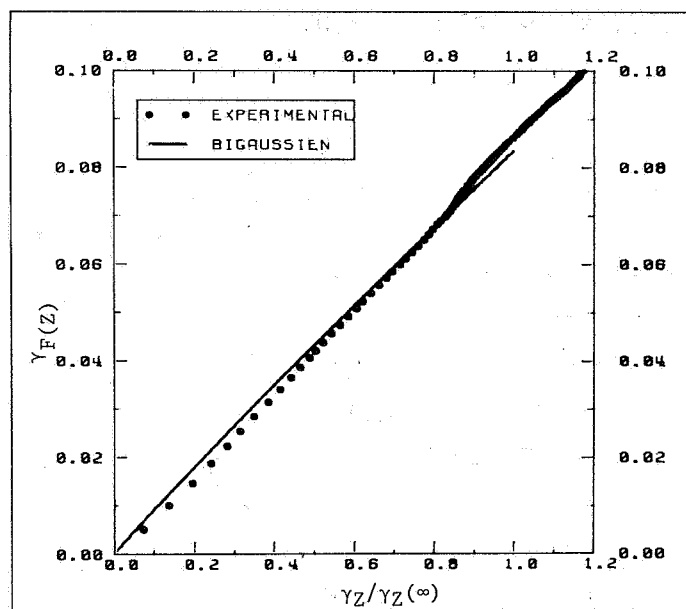


Figure 20 : Site JMC4 - Nuage des points $\gamma_F(Z)/\gamma_Z$

REMERCIEMENTS

Les auteurs tiennent à exprimer leur gratitude à M. FRAISSE de T.C.M. pour avoir mis à leur disposition les données de Bertholène, ainsi que M. MOREL qui a accepté de nous confier les données de JMC4 pour nos travaux d'investigation.

BIBLIOGRAPHIE

- GUIBAL D. et ZAUPA-REMACRE A. (1984).- Local estimation of the recoverable reserves: comparing various methods with the reality on a porphyry copper deposit. "Geostatistics for Natural Characterization", D. Reidel Pub. Co., Dordrecht, Hollande, pp. 435-448.
- LANTUEJOUL Ch. et RIVOIRARD J. (1984).- Une méthode de détermination d'anamorphose. Note interne N-916, Centre de Géostatistique, ENSMP, Fontainebleau.
- MATHERON G. (1973).- Le krigeage disjonctif. Note interne, N-360, Centre de Géostatistique, ENSMP, Fontainebleau.
- MATHERON G. (1975).- Compléments sur les modèles isofactoriels. Note interne, N-432, Centre de Géostatistique, ENSMP, Fontainebleau.
- MATHERON G. (1976).- A simple substitute for conditional expectation: the disjunctive kriging. "Advanced Geostatistics in the Mining Industry", D. Reidel Pub. Co., Dordrecht, Hollande, pp. 221-236.

- MATHERON G. (1982).- La destructuration des hautes teneurs et le krigeage des indicatrices. Note interne, N-761, Centre de Géostatistique, ENSMP, Fontainebleau.
- MATHERON G. (1984).- The selectivity of the distributions and the "second principle of geostatistics". "Geostatistics for Natural Resources Characterization", D. Reidel Pub. Co., Dordrecht, Hollande, p. 421-434..
- ZAUPA-REMACRE A. (1984).- L'estimation du récupérable local: le conditionnement uniforme. Thèse de Docteur-Ingénieur, ENSMP, Fontainebleau.