

**MISE EN ŒUVRE DU MODÈLE GAMMA
POUR
L'ESTIMATION DE DISTRIBUTIONS SPATIALES**

THÈSE

présentée à

l'École Nationale Supérieure des Mines de Paris

par

Lin-Ying HU

pour obtenir le titre de

**Docteur
en Géostatistique**

Soutenue le 28 Octobre 1988

après avis de :

**MM. Georges MATHERON
Paul SWITZER**

**Rapporteur
Rapporteur extérieur**

devant le Jury composé de :

**MM. Claude CHAMBON
Georges MATHERON
Jean-Paul CHILES
Christian LANTUEJOUL**

**Président
Rapporteur
Examineur
Examineur**

REMERCIEMENTS

En tout premier lieu, ma gratitude va au Professeur Georges MATHERON, Directeur du Centre de Géostatistique et Rapporteur de cette thèse, qui m'a donné la possibilité de travailler au Centre, dans ce domaine passionnant qu'est la géostatistique. Sans son soutien et ses encouragements, ce travail n'aurait pas abouti.

Je remercie vivement Christian LANTUEJOUL, mon Directeur de thèse, collègue et ami, qui m'a orienté et suivi de très près, dans ce travail, pendant plusieurs années, avec sa patience et sa compétence, sa gentillesse et sa rigueur intellectuelle. Les discussions avec lui, très fréquentes, au bureau, au café ou à table, ont été très influentes tant pour le présent mémoire que pour mon appréciation générale de la géostatistique.

Les problèmes rencontrés ont été aussi souvent discutés avec Christian LAJAUNIE et Jaques RIVOIRARD, Chercheurs du Centre de Géostatistique. Qu'ils trouvent ici la marque de mes sincères remerciements. Je sais que je leur dois plusieurs précieuses suggestions lors du parachèvement et de la rédaction de ce mémoire.

J'aimerais remercier Monsieur Claude CHAMBON, Professeur à l'École des Mines de Nancy, qui m'a fait l'honneur de présider ce jury.

Ma reconnaissance s'adresse tout particulièrement à Monsieur Paul SWITZER, Professeur au département statistique de l'Université de Stanford, qui a joyeusement accepté d'être le Rapporteur extérieur. Je me souviendrai de notre rencontre agréable et des discussions intéressantes que nous avons eues à Avignon et à Fontainebleau.

Mes remerciements vont également à Monsieur Jean-Paul CHILES, Ingénieur de Recherche au B.R.G.M., qui a manifesté de l'intérêt pour ce sujet. Il a accepté de juger ce travail, et je lui dois quelques remarques très utiles.

Je dois encore des remerciements à plusieurs autres personnes du Centre de Géostatistique et d'ailleurs. Leur amitié et leur aide chaleureuse m'ont permis d'avoir vécu dans une ambiance de travail aussi intéressante qu'agréable que je n'oublierai jamais.

Mes pensées vont enfin à Monsieur LUO Zhong-Zhou, Professeur à l'Université des Mines et des Technologies de Chine (Pékin), pour m'avoir conseillé, cinq ans avant, d'aller étudier la géostatistique dans un lieu lointain où, pour moi, tout était inconnu...

TABLE DES MATIERES

| | |
|---|----|
| CHAPITRE 0. INTRODUCTION | 1 |
| 0.1. Les distributions spatiales des variables régionalisées | 1 |
| 0.2. Pourquoi le modèle gamma | 2 |
| 0.3. Le fil directeur de ce travail | 3 |
| | |
| CHAPITRE 1. MODELISATION DE LOIS BIVARIABLES PONCTUELLES | 5 |
| 1.1. Quelques rappels sur le modèle gamma | 5 |
| 1.1.1. La loi gamma | 5 |
| 1.1.2. Les polynômes de Laguerre | 6 |
| 1.1.3. La loi bigamma | 8 |
| 1.1.4. La loi de Laguerre | 11 |
| 1.2. L'anamorphose empirique | 13 |
| 1.3. Choix du paramètre d'anamorphose gamma | 15 |
| 1.4. Quelques tests pour le modèle bigamma | 17 |
| 1.4.1. Les nuages de corrélation différée | 17 |
| 1.4.2. L'espérance conditionnelle des facteurs | 18 |
| 1.4.3. Les variogrammes d'ordre 1 et 2 | 19 |
| 1.4.4. Contrôle du variogramme de $Z(x)$ | 20 |
| 1.4.5. Le variogramme de rang | 20 |
| 1.4.6. Remarques | 23 |
| 1.5. Quelques exemples du modèle de Laguerre et leurs tests | 23 |

| | |
|---|-----------|
| 1.5.1. Expressions générales | 23 |
| 1.5.2. Le modèle mosaïque..... | 24 |
| 1.5.3. Le modèle barycentrique | 24 |
| 1.5.4. Le modèle beta | 25 |
| 1.6. Cas d'étude : gisement de Bertholène..... | 28 |
| 1.7. Cas d'étude : gisement de Luceda..... | 33 |
| 1.8. Cas d'étude : le site JMC4 | 35 |
| 1.9. Quelques considérations sur les variogrammes de rang..... | 38 |

CHAPITRE 2. ESTIMATION DE DISTRIBUTIONS SPATIALES

| | |
|---|-----------|
| LOCALES PONCTUELLES | 41 |
| 2.1. Position du problème..... | 41 |
| 2.2. Krigeage disjonctif isofactoriel gamma | 42 |
| 2.3. Méthodes non paramétriques | 44 |
| 2.4. Comparaison numérique sur les données simulées..... | 48 |
| 2.4.1. Utilisation du K.D. et du K.I. sur des données d'un processus de diffusion gamma | 48 |
| 2.4.2. Utilisation du C.K.I.R. pour les mêmes données que précédemment | 49 |
| 2.4.3. Utilisation du K.D. bigamma et du K.D. bigaussien sur des données de processus de diffusion gamma | 49 |
| 2.4.4. Sur des données de processus mosaïque gamma..... | 50 |
| 2.4.5. Remarques complémentaires | 50 |

CHAPITRE 3. MODELISATION D'EFFETS DE SUPPORT ET D'INFORMATION.....

| | |
|--|-----------|
| 3.1. Concepts et exemples..... | 61 |
| 3.1.1. Effet de support..... | 61 |
| 3.1.2. Effet d'information..... | 64 |
| 3.2. Modélisation..... | 67 |
| 3.2.1. Passage à la modélisation..... | 67 |
| 3.2.2. Modèle de loi de Z_v | 68 |
| 3.2.3. Modèle de loi de Z_v^* | 72 |
| 3.2.4. Modèle de loi de (Z_v, Z_v^*) | 73 |
| 3.2.5. Relations tonnage-teneur | 74 |

| | |
|---|----|
| 3.3. Cas d'étude : données simulées | 75 |
| 3.4. Cas d'étude : gisement de Bertholène | 79 |
| 3.4.1. Changement de support le long des sondages..... | 79 |
| 3.4.2. Estimation des réserves récupérables globales..... | 81 |
| 3.5. Cas d'étude : gisement de Luceda | 86 |
| 3.6. Mélange des supports et des estimateurs ultimes | 88 |
| 3.6.1. Remarque pratique..... | 88 |
| 3.6.2. Cas de sélection directe..... | 89 |
| 3.6.3. Cas de sélection indirecte..... | 93 |

CHAPITRE 4. ESTIMATION DE RESERVES RECUPERABLES

| | |
|--|-----|
| LOCALES | 95 |
| 4.1. Les expressions de réserves récupérables locales | 95 |
| 4.2. Estimation par krigeage disjonctif gamma | 98 |
| 4.2.1. Les modèles de lois bivariées..... | 98 |
| 4.2.2. Cas de sélection directe..... | 98 |
| 4.2.3. Cas de sélection indirecte..... | 100 |
| 4.3. Estimation par conditionnement uniforme gamma | 101 |
| 4.3.1. Variable conditionnante..... | 101 |
| 4.3.2. Cas de sélection directe..... | 103 |
| 4.3.3. Cas de sélection indirecte..... | 104 |
| 4.4. Cas d'étude : gisement de Luceda | 106 |

CHAPITRE 5. CONCLUSIONS ET QUELQUES THEMES DE

| | |
|--|-----|
| REFLEXION | 111 |
| 5.1. Conclusions | 111 |
| 5.2. Quelques thèmes de réflexion | 113 |

ANNEXE. QUELQUES REFLEXIONS SUR LA LOI DE GAUSS INVERSE OU VERS UNE GENERA-

| | |
|--|-----|
| LISATION DU MODELE GAMMA | 117 |
| A.1. Introduction | 117 |
| A.2. Quelques rappels sur la loi de Gauss inverse | 118 |
| A.3. Une loi bivariable symétrique | 120 |
| A.4. Un processus stationnaire à loi de Gauss inverse | 123 |

| | |
|---|----------------|
| A.5. Une loi bivariable dissymétrique | 125 |
| A.6. Cas d'étude : gisement de Bertholène..... | 128 |
| A.6.1. Approche de la distribution de teneur des échantillons | 128 |
| A.6.2. Changement de support le long des sondages | 129 |
| A.7. Fonctions orthogonales à loi de Gauss inverse | 133 |
| BIBLIOGRAPHIE..... | 137 |

深则厉, 浅则揭。

《诗经·邶风》

CHAPITRE 0

INTRODUCTION

0.1. Les distributions spatiales des variables régionalisées

Considérant un phénomène naturel se réalisant dans un domaine D , et se représentant par la variable régionalisée $z(x)$ ($x \in D$), nous nous intéressons à la distribution spatiale de $z(x)$, c'est-à-dire à la fonction de répartition des valeurs prises par $z(x)$ dans D ou une partie de D . La reconnaissance de distributions spatiales à partir des échantillons (souvent fragmentaires) présente son importance dans des domaines d'application bien variés. Si par exemple, $z(x)$ représente la teneur en un certain polluant dans une zone D , alors la distribution spatiale de $z(x)$ dans D permet de caractériser le pourcentage de surface contaminée; si $z(x)$ représente la teneur d'un gisement, sa distribution spatiale permet d'obtenir la proportion de volume minéralisé.

En particulier, dans l'industrie minière, les méthodes d'exploitation définissent un support de sélection (bloc) largement plus grand que celui des échantillons. L'expérience montre que la distribution des teneurs de blocs est toujours moins dispersée et présente moins de valeurs extrêmes que celle des échantillons. Ce phénomène connu sous le nom: "effet de support" préoccupe les géostatisticiens qui cherche à estimer les réserves récupérables. D'autre part, au moment de l'exploitation, la sélection de blocs est effectuée obligatoirement d'après les teneurs estimées mais pas les teneurs réelles (inconnues), ce qui entraîne inéluctablement une perte de ressource naturelle. En effet, les blocs dont la teneur réelle est au-dessous du seuil de coupure, mais dont la teneur estimée est au-dessus, seront considérés comme minerais, tandis que les blocs à teneur

réelle riche, mais estimée pauvre, seront considérés comme stériles. L'existence de ce phénomène appelé "effet d'information" dénonce que dans l'estimation des réserves récupérables, il n'est pas suffisant de corriger l'effet de support, mais il faut aussi savoir ce que l'on peut obtenir à partir des informations disponibles.

0.2. Pourquoi le modèle gamma

C'est pour répondre à ces besoins que la géostatistique non linéaire se développe maintenant depuis une quinzaine d'années. Parmi les différents modèles existant, le modèle gaussien est le plus utilisé en pratique, et a fourni les vérifications les plus nombreuses. Le point de départ de ce modèle est de transformer les données d'étude en valeurs à distribution monogaussienne par une fonction d'anamorphose. Toutefois, il s'avère de temps en temps que l'anamorphose gaussienne n'est pas souhaitable (cas des données très dissymétriques), ni même possible (cas des données présentant des composantes atomiques importantes). D'un autre côté, même si cela est possible (e.g. cas de données respectant une loi lognormale), il n'y a pas de raison pour que les lois bivariées soient aussi gaussiennes (ou plus généralement hermitiennes), ce qui est pourtant nécessaire pour permettre la mise en œuvre de la moins exigeante des techniques non linéaires, qui est le krigeage disjonctif. De là vient la nécessité d'introduire des modèles bâtis à partir des lois non gaussiennes (surtout des lois très dissymétriques et des lois discrètes) permettant de mieux évacuer ce genre de difficultés.

Dans cette thèse, nous nous intéressons au modèle gamma proposé par Matheron en 1973. La loi gamma a l'avantage d'avoir des formes très variées selon son paramètre α , ce qui lui confère une grande souplesse dans les applications. Avec une petite valeur de α , la loi gamma admet une forme très dissymétrique; en contre-partie, on retrouve approximativement une loi gaussienne lorsque α est suffisamment grand. On voit ainsi que le modèle gamma peut être vu comme généralisation du modèle gaussien. Ceci suggère que le modèle gamma pourrait s'adapter à certains cas, notamment les jeux de données très dissymétriques, là où le modèle gaussien ne s'avère pas souvent très efficace.

0.3. Le fil directeur de ce travail

La mise en œuvre du modèle gamma commence par une anamorphose qui transforme le jeu de données d'étude en un autre à loi gamma. Le choix du paramètre α de la loi gamma intervient donc dès le départ. On choisit une valeur de α plutôt qu'une autre, si celle-là nous permet d'obtenir une anamorphose robuste (en ce sens qu'elle est peu sensible à des perturbations affectant les faibles valeurs), et de plus une modélisation correcte de lois bivariées des données anamorphosées. La recherche d'un tel paramètre α constitue l'objet du premier chapitre.

Dans le chapitre 2, on énonce des méthodes d'estimation de distributions spatiales locales au support d'échantillon. Ces méthodes sont ensuite illustrées par des exemples tirés de simulations de deux types de processus gamma (diffusion et mosaïque). A l'aide de ces exemples, nous verrons l'importance de la modélisation de lois bivariées dans l'estimation de distributions spatiales.

Disposant d'un modèle de loi bivariable au support d'échantillon, on se propose au chapitre 3 de modéliser les distributions spatiales au support de bloc (correction d'effet de support). On examine également l'effet d'information. Ceci nous conduit en particulier à l'estimation des réserves récupérables globales. Nous discuterons aussi la possibilité d'estimation des réserves récupérables en cas de mélange des supports et des estimateurs.

Le chapitre 4 est consacré à l'estimation des réserves récupérables locales. Les deux méthodes habituellement utilisées en pratique à savoir le krigeage disjonctif et le conditionnement uniforme s'expriment ici dans le cadre du modèle gamma.

Le chapitre 5 est un simple bilan, qui tente de tirer quelques points essentiels des chapitres précédents, et aussi de montrer quelques problèmes importants tant au plan théorique que pratique.

Enfin, dans l'annexe, j'énumère quelques résultats concernant l'application de la loi de Gauss inverse (appelé aussi loi de Sichel continue par les géostatisticiens) qui est comme la loi gamma, un cas particulier de la loi de Gauss inverse généralisée. Bien que ces résultats ne constituent pas encore l'ensemble d'un modèle opératoire sauf dans

quelques cas particuliers (les difficultés de mise en œuvre de ce modèle dans le cas général sont purement mathématiques), quelques bonnes propriétés de cette loi telle que son infinie divisibilité et son interprétation physique à l'aide du mouvement brownien sont fort prometteuses. La lecture de cette annexe est indépendante des autres parties de ce mémoire, excepté l'exemple d'application à la fin où le même jeu de données est repris.

CHAPITRE 1

MODELISATION DE LOIS BIVARIABLES PONCTUELLES

1.1. Quelques rappels sur le modèle gamma

1.1.1. La loi gamma

On dira que la variable Y suit une loi gamma si sa densité vaut :

$$g_{\alpha}(y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} e^{-y} y^{\alpha-1} \quad (1-1)$$

où α est un paramètre positif et où la constante $\Gamma(\alpha)$ est la classique fonction eulérienne.

La forme de la densité g_{α} dépend de α (Figure 1-1). Si $\alpha < 1$, g_{α} est une fonction décroissante, non bornée à l'origine. Si $\alpha > 1$, g_{α} est une courbe en cloche qui tend vers une loi gaussienne aux grandes valeurs de α . Dans le cas intermédiaire $\alpha = 1$, g_1 est exponentielle.

La loi gamma possède des moments de tout ordre :

$$E(Y^n) = \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\alpha)}$$

En particulier, $m = \alpha$ et $\sigma^2 = \alpha$. Sa transformée de Laplace vaut :

$$E(e^{-\lambda Y}) = \frac{1}{(1 + \lambda)^{\alpha}}$$

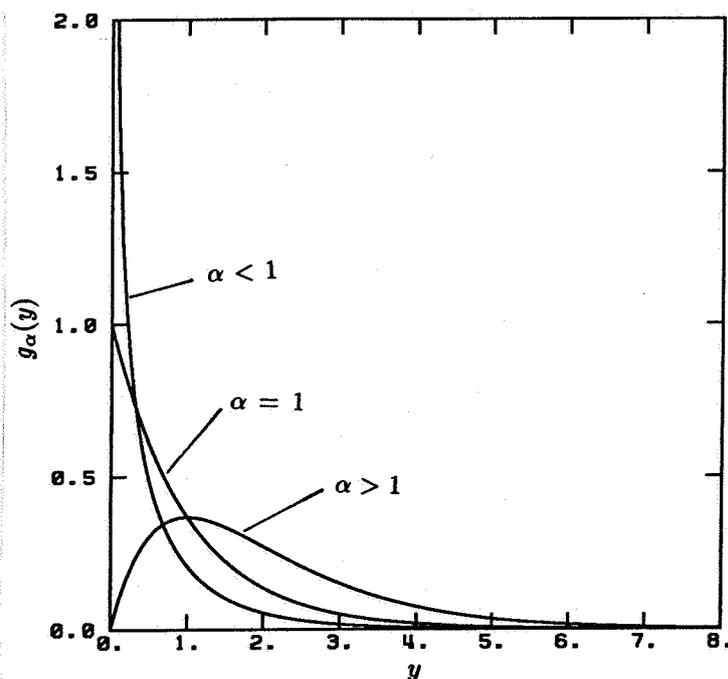


Figure 1-1.: Les diverses formes prises par la densité gamma en fonction de son paramètre α .

et sa sélectivité vaut (Matheron, 1982) :

$$S = \frac{1}{2} E|Y - Y'| = \frac{\Gamma(\alpha + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha)}$$

où Y et Y' sont indépendantes et à la même loi gamma g_α .

Rappelons d'ailleurs que la loi gamma g_α correspond au cas $b = 1$ de la loi gamma de paramètre $\alpha (> 0)$ et d'indice $b (> 0)$ qui a pour densité :

$$g_{\alpha,b}(y) = \frac{b^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-by} y^{\alpha-1} \quad (y > 0)$$

Si Y admet la loi gamma g_α , alors Y/b admet la loi $g_{\alpha,b}$. Autrement dit, b n'est qu'un facteur d'échelle. Dans ce qui suit, on s'intéresse uniquement à la loi g_α , excepté certains cas qui seront indiqués.

1.1.2. Les polynômes de Laguerre

De même que les modèles isofactoriels gaussiens s'expriment en termes de polynômes d'Hermite, les modèles isofactoriels gamma vont se développer de manière simple

sur une base de polynômes de $L^2(\mathbb{R}_+, g_\alpha)$. On définit les polynômes de Laguerre à l'aide de la formule de Rodrigues :

$$L_n^\alpha(y) = \frac{g_{\alpha+n}^{(n)}(y)}{g_\alpha(y)}$$

Désignons leur version normée par $l_n^\alpha(y)$:

$$l_n^\alpha(y) = b_n^\alpha L_n^\alpha(y)$$

avec :

$$b_n^\alpha = \sqrt{\frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)n!}}$$

En particulier :

$$l_0^\alpha(y) = 1$$

$$l_1^\alpha(y) = \sqrt{\alpha} \left(1 - \frac{y}{\alpha}\right)$$

$$l_2^\alpha(y) = \sqrt{\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}} \left[1 - \frac{2y}{\alpha} + \frac{y^2}{\alpha(\alpha+1)}\right]$$

et plus généralement $l_n^\alpha(y)$ est un polynôme de degré n :

$$l_n^\alpha(y) = b_n^\alpha \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+i)} y^i$$

Ces polynômes se calculent rapidement grâce à la relation de récurrence :

$$-(\alpha+n-1)L_n^\alpha(y) = [y-\alpha-2(n-1)]L_{n-1}^\alpha(y) + (n-1)L_{n-2}^\alpha(y)$$

On vérifie aisément que ces polynômes sont orthogonaux pour g_α :

$$\int_0^{+\infty} l_n^\alpha(y) l_p^\alpha(y) g_\alpha(y) dy = \delta_{np}$$

Notons aussi la transformée de Laplace de $l_n^\alpha(y)g_\alpha(y)$ qui s'obtient aisément à partir de la formule de Rodrigues :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda y} l_n^\alpha(y) g_\alpha(y) dy = (-1)^n b_n^\alpha \frac{\lambda^n}{(1+\lambda)^{n+\alpha}}$$

1.1.3. La loi bigamma

Soient maintenant X et Y deux variables aléatoires de même loi g_α . On dira que le couple (X, Y) suit une loi bigamma s'il existe un coefficient ρ positif mais strictement inférieur à 1, tel que la densité du couple a pour expression :

$$g_\alpha^\rho(x, y) = \frac{e^{-\frac{x+y}{1-\rho}}}{\Gamma(\alpha)(1-\rho)} \left(\frac{xy}{\rho}\right)^{\frac{\alpha-1}{2}} I_{\alpha-1}\left(2\sqrt{\frac{xy\rho}{1-\rho}}\right)$$

où I désigne une fonction de Bessel modifiée de deuxième espèce :

$$I_\lambda(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\lambda \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n! \Gamma(\lambda + n + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}$$

Sous cette forme, la loi bigamma n'est guère manipulable. Fort heureusement, elle peut également s'écrire au moyen d'un développement en polynômes de Laguerre :

$$g_\alpha^\rho(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \rho^n l_n^\alpha(x) l_n^\alpha(y) g_\alpha(x) g_\alpha(y) \quad (1-2)$$

Compte-tenu de l'orthogonalité des polynômes de Laguerre, il est aisé de montrer que la loi bigamma échange les facteurs :

$$E[l_n^\alpha(X) | Y] = \rho^n l_n^\alpha(Y)$$

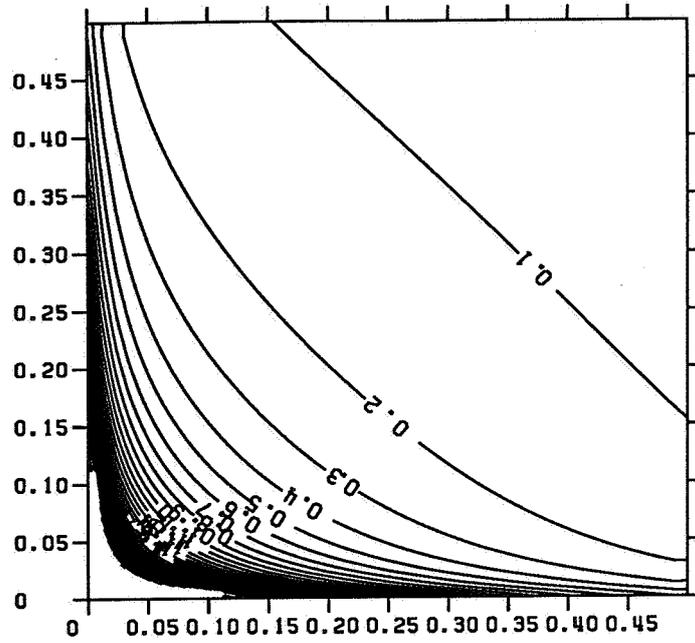
$$E[l_n^\alpha(Y) | X] = \rho^n l_n^\alpha(X)$$

Ces équations sont du reste caractéristiques du modèle bigamma compte-tenu de ce que les l_n^α constituent une famille totale de $L^2(\mathfrak{R}_+, g_\alpha)$. De là, il découle facilement que :

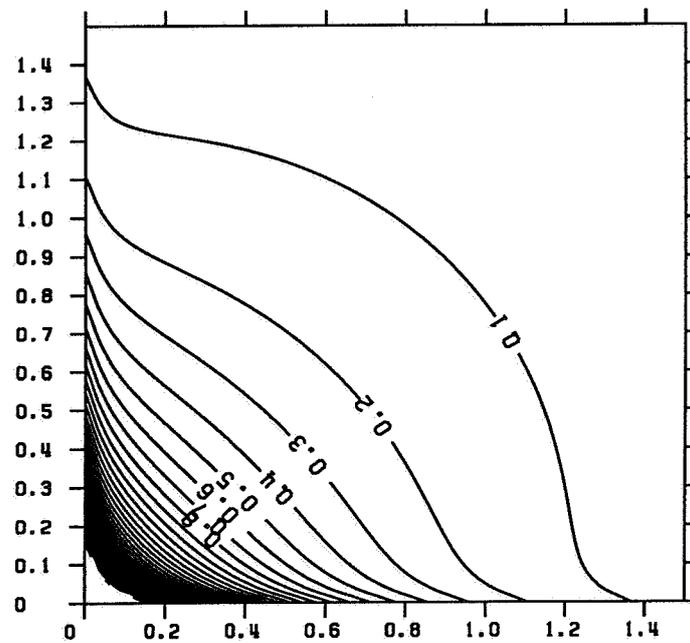
$$Cov[l_n^\alpha(X), l_p^\alpha(Y)] = \delta_{np} (1 - \delta_{n0}) \rho^n$$

et que le coefficient entre X et Y est précisément ρ .

La forme d'une loi bigamma dépend fortement de son paramètre α (Figures 1-2). Lorsque $\alpha < 1$, les deux variables prennent en général de faibles valeurs. Il se peut toutefois que l'une d'entre elles prenne une valeur plus élevée. On observe alors que des motifs en ailes de papillon particulièrement nets lorsque ρ n'est pas trop proche de 1. Lorsque α augmente, ces motifs s'estompent peu à peu pour totalement disparaître à la valeur $\alpha = 1$. A partir de cette valeur, les lignes d'isodensité se referment pour dessiner des formes de plus en plus elliptiques.



(a) : $\alpha = 0.1$

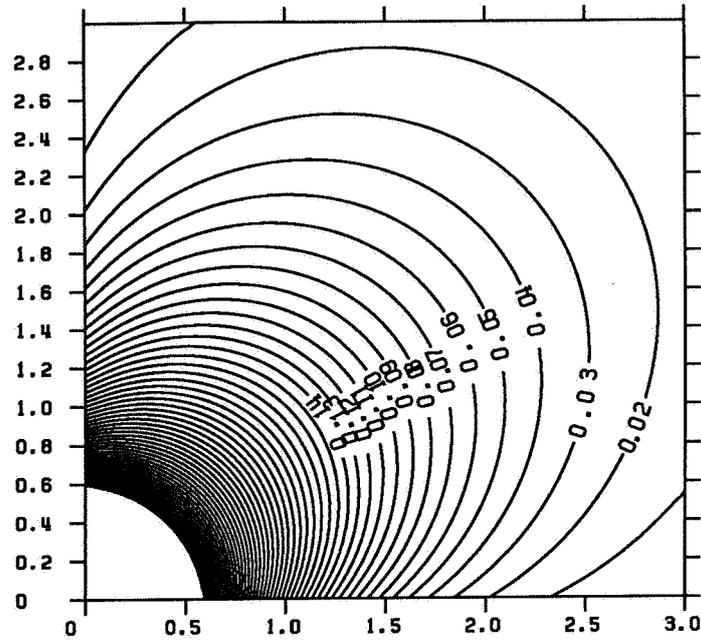


(b) : $\alpha = 0.5$

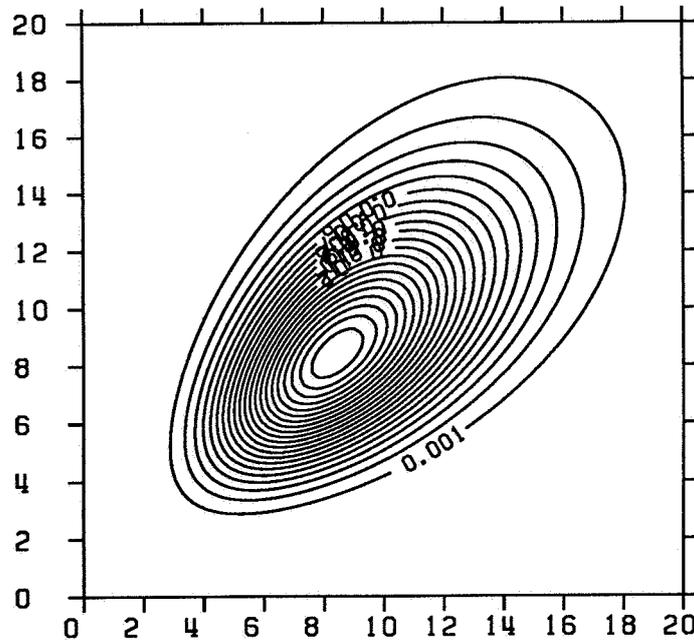
Figures 1-2 : Tracé de lois bigamma par lignes d'isodensité.

Le paramètre α prend les valeurs 0.1, 0.5, 1. et 10.

Le coefficient de corrélation entre les variables reste le même (0.6).



(c) : $\alpha = 1.$



(d) : $\alpha = 10.$

Figures 1-2(suite) : Tracé de lois bigamma par lignes d'isodensité.
 Le paramètre α prend les valeurs 0.1, 0.5, 1. et 10.
 Le coefficient de corrélation entre les variables reste le même (0.6).

La raison de ce phénomène vient de ce qu'une loi bigamma tend à se rapprocher d'une loi bigaussienne lorsque son paramètre α augmente, comme le montre le petit calcul suivant :

Partons de la transformée de Laplace d'une loi bigamma qui s'obtient à partir de celle des polynômes de Laguerre :

$$E(e^{-\lambda X - \mu Y}) = [1 + \lambda + \mu + (1 - \rho)\lambda\mu]^{-\alpha}$$

On en déduit immédiatement la transformée de Fourier du couple centré réduit :

$$E\left\{e^{i\left[u\left(\frac{X-\alpha}{\sqrt{\alpha}}\right)+v\left(\frac{Y-\alpha}{\sqrt{\alpha}}\right)\right]}\right\} = e^{-i\sqrt{\alpha}(u+v)} \left[1 - \frac{iu}{\sqrt{\alpha}} - \frac{iv}{\sqrt{\alpha}} - (1-\rho)\frac{uv}{\alpha}\right]^{-\alpha}$$

Passons au logarithme et faisons tendre α vers l'infini. On obtient :

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \ln E\left\{e^{i\left[u\left(\frac{X-\alpha}{\sqrt{\alpha}}\right)+v\left(\frac{Y-\alpha}{\sqrt{\alpha}}\right)\right]}\right\} = -\frac{u^2 + v^2 + 2\rho uv}{2}$$

qui est précisément le logarithme de la transformée de Fourier d'une loi bigaussienne.

Notons aussi qu'une anamorphose gaussienne ne transforme pas une loi bigamma en une loi bigaussienne. En effet, si $Y(x)$ est une fonction aléatoire stationnaire à loi bigamma (1-2), son anamorphosée gaussienne $Z(x) = G^{-1}\{G_\alpha[Y(x)]\}$ admet la densité bi-variable :

$$f(s, t) = g(s)g(t) \sum_{n=0}^{+\infty} \rho^n l_n^\alpha\{G_\alpha^{-1}[G(s)]\} l_n^\alpha\{G_\alpha^{-1}[G(t)]\}$$

où g et G désignent respectivement la densité et la fonction de répartition de la loi de Gauss centrée et réduite, et où G_α est la fonction de répartition de la loi gamma g_α . Sous cette forme, il est clair que $f(s, t)$ n'est point une loi bigaussienne. On observe sur les figures 1-3 que $f(s, t)$ s'éloigne de plus en plus de la densité bigaussienne lorsque α diminue.

1.1.4. La loi de Laguerre

Par mélange de lois bigamma, on peut obtenir une généralisation de la loi bigamma. Il s'agit de la loi de Laguerre dans la terminologie de Matheron (1975), qui admet une densité de la forme :

$$g_\alpha(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \rho_n l_n^\alpha(x) l_n^\alpha(y) g_\alpha(x) g_\alpha(y) \quad (1-3)$$

où les ρ_n sont les moments d'une variable aléatoire R comprise entre 0 et 1 et non presque sûrement égale à 1 :

$$\rho_n = E(R^n) = \int_0^1 r^n \bar{\omega}(dr)$$

Il est aisé de voir que si R est une constante, on retrouve une loi bigamma.

On peut aussi vérifier qu'une anamorphose gaussienne ne transforme pas une loi de Laguerre en une loi hermitienne (sauf le cas mosaïque où R est concentrée aux deux points 0 et 1).

1.2. L'anamorphose empirique

Nous désirons anamorphoser la fonction aléatoire stationnaire Z en une autre fonction aléatoire Y de la loi stationnaire g_α . Pour ce faire, nous devons connaître la loi stationnaire F de Z , ce qui, en général, n'est malheureusement pas le cas. Nous ne disposons souvent que d'un estimateur de F , à savoir la loi empirique :

$$F^*(dz) = \sum_{i=1}^N p_i \delta_{z_i}(dz)$$

où les z_i sont les valeurs prises par les échantillons de Z et les p_i sont leur fréquence d'apparition.

Dans ces conditions, pourquoi ne pas introduire la fonction d'anamorphose entre F^* et g_α ? Compte-tenu du caractère atomique de F^* , cette fonction notée ϕ aura pour valeur :

$$\phi(y) = \sum_{i=1}^N z_i 1_{[y_{i-1}, y_i[}(y)$$

les y_i s'expriment simplement à l'aide de la fonction de répartition G_α associée à la loi g_α :

$$y_i = G_\alpha^{-1} \left(\sum_{j=1}^i p_j \right) \quad i = 1, 2, \dots, N$$

et particulièrement $y_0 = 0$. Une telle fonction ϕ est appelée anamorphose empirique (Lantuéjoul, Rivoirard, 1984).

L'anamorphose empirique n'étant pas bijective, il n'existe pas à proprement parler d'anamorphose inverse. En contrepartie, on peut définir une fonction pseudo-inverse en

associant à tout z_i la valeur moyenne de la loi g_α sur l'intervalle $[y_{i-1}, y_i[$:

$$\psi(z_i) = \frac{1}{p_i} \int_{y_{i-1}}^{y_i} y g_\alpha(y) dy$$

ce que l'on peut écrire de façon plus synthétique :

$$\psi(z_i) = E[Y | \phi(Y) = z_i]$$

Cette fonction pseudo-inverse est bien sûr purement conventionnelle. Elle a du moins le mérite de préserver la moyenne de g_α :

$$\sum_{i=1}^N p_i \psi(z_i) = \sum_{i=1}^N \int_{y_{i-1}}^{y_i} y g_\alpha(y) dy = \int_0^{+\infty} y g_\alpha(y) dy$$

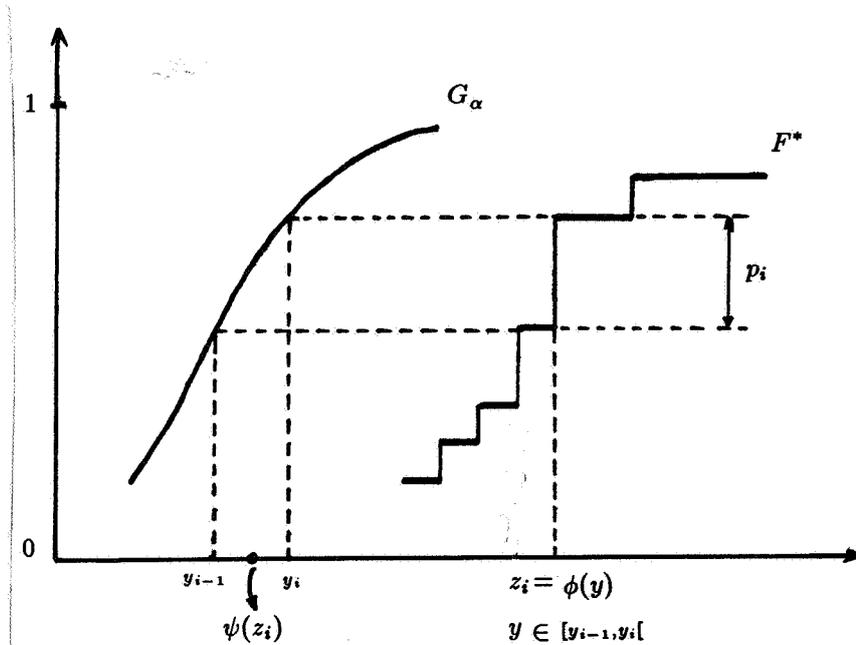


Figure 1-4 : Définition de l'anamorphose empirique et sa fonction pseudo-inverse.

Par contre, les moments d'ordre plus élevé ne sont plus respectés. En particulier, la variance des $\psi(z_i)$ est inférieure à celle de la loi g_α . En effet, si $Y \sim g_\alpha$, alors $\phi(Y) \sim F^*$ et :

$$E\{Y | \psi[\phi(Y)]\} = E\{Y | \phi(Y)\} = \psi[\phi(Y)]$$

qui est une relation de dispersion de Cartier (Matheron, 1984). Il faut noter toutefois que l'écart entre la loi de $\psi(Z)$ et g_α n'est jamais bien important pour peu que l'on dispose d'un nombre raisonnablement élevé d'échantillons et que les valeurs de ceux-ci sont assez bien diversifiées.

Enfin, pour la mise en œuvre du modèle gamma, il est avantageux de développer l'anamorphose $\phi(y)$ en polynômes de Laguerre :

$$\phi(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \phi_n l_n^\alpha(y)$$

avec :

$$\phi_n = \int_0^{+\infty} \phi(y) l_n^\alpha(y) g_\alpha(y) dy = \sum_{i=1}^N z_i \int_{y_{i-1}}^{y_i} l_n^\alpha(y) g_\alpha(y) dy$$

qui se calcule sans aucune difficulté. En pratique, on ne peut utiliser bien sûr qu'un nombre limité (noté n_t) de polynômes. n_t est choisi habituellement de façon à ce que la variance de $\sum_{n=0}^{n_t} \phi_n l_n^\alpha(Y)$ qui vaut $\sum_{n=1}^{n_t} \phi_n^2$ ne diffère guère de $Var[\phi(Y)] = \sum_{n=1}^{+\infty} \phi_n^2$. L'autre critère vraisemblablement plus robuste consiste à respecter au mieux la valeur minimum de $\phi(y)$, à savoir :

$$\min[\phi(y)] \approx z_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \phi_n b_n^\alpha \approx \sum_{n=0}^{n_t} \phi_n b_n^\alpha$$

Notons d'ailleurs que ce critère perd sa signification lorsqu'il s'agit d'une variable aléatoire sans limite inférieure.

1.3. Choix du paramètre d'anamorphose gamma

La mise en œuvre du modèle gamma débute par le choix du paramètre α de la loi gamma g_α que l'on appelle (abusivement) paramètre d'anamorphose gamma (ponctuel).

Du point de vue pratique, il paraît naturel de choisir α de façon à ce que la loi gamma g_α de Y et la loi empirique de Z se "ressemblent" le plus possible, car cela permet d'obtenir une fonction d'anamorphose robuste. Pour comparer les deux lois, on introduit un paramètre d'échelle b tel que :

$$E(bY) = E(Z)$$

Notons $X = bY$. En fait, c'est la ressemblance entre X et Z qui est significative ici. Les caractères de ressemblance dont nous énumérons quelques uns ici sont nombreux :

(a) le même coefficient de variation pour X et Z ou, ce qui revient au même :

$$\sigma_X^2 = \sigma_Z^2$$

(b) la même médiane pour X et Z :

$$m_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor + 1}^X = m_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor + 1}^Z$$

(c) la même sélectivité pour X et Z :

$$S_X = S_Z$$

(d) le même indice de normalité pour X et Z :

$$I_n^X = \frac{S_X}{\sigma_X} \sqrt{\pi} = I_n^Z = \frac{S_Z}{\sigma_Z} \sqrt{\pi}$$

Rappelons que la croissance de cet indice reflète la convergence vers la normalité (Matheron, 1985(b)). Il existe encore d'autres caractères de ressemblance possibles, citons en particulier celui utilisé par Demange, Lajaunie, Lantuéjoul et Rivoirard (1987) à savoir de préserver le pourcentage des échantillons stériles.

Selon ces différents caractères, on obtient souvent des valeurs de α assez variées. Dans le cas des données très dissymétriques (une proportion très forte de faibles valeurs et une queue de distribution très allongée) par exemple, le paramètre α obtenu selon le caractère (a) ou (d) est souvent très faible, au contraire on tombe sur des valeurs de α plutôt élevées d'après le critère (b) ou (c). D'où encore indétermination du paramètre α .

Par ailleurs, le krigeage disjonctif et bien d'autres techniques de géostatistique nécessitent la connaissance de lois bivariées. C'est ici qu'intervient un critère intéressant : α sera choisi de façon à ce que les couples anamorphosés suivent au mieux des lois bigamma ou plus généralement des lois de Laguerre. C'est d'ailleurs là l'intérêt capital du modèle gamma par rapport au modèle gaussien.

Notons que le critère du respect des lois bivariées ne donne pas de formule explicite pour obtenir la valeur de α . En pratique, on peut procéder en choisissant a priori

quelques valeurs d'essai (selon les caractères (a), (b), (c) et (d) précédents par exemple), et puis en testant le caractère bivariable des données anamorphosées. La valeur retenue sera celle dont les anamorphosées respectent le mieux le caractère bigamma ou de Laguerre. C'est la raison pour laquelle nous allons voir comment tester le modèle gamma.

1.4. Quelques tests pour le modèle bigamma

Nous entendons ici par test la définition de propriétés vraies dans le cadre d'un modèle, et que l'on vérifie ou non dans le cas des données expérimentales. Dans la terminologie des statisticiens, le mot test recouvre des procédures beaucoup plus complètes, aboutissant à la définition de zone d'acceptation et de rejet d'hypothèses formulées pour un niveau de risque fixé à l'avance. Cela suppose en général que l'on soit capable de connaître les distributions de certaines statistiques sur lesquelles sont fondées ces tests, ce qui semble peu réaliste dans notre contexte. Les procédures dont il sera question ici pourront néanmoins conduire au rejet de certains modèles, ou à la comparaison de deux modèles en concurrence.

Considérons comme précédemment la fonction aléatoire stationnaire d'étude $Z(x)$, et désignons par $Y(x)$ la fonction déduite de $Z(x)$ par anamorphose selon la loi gamma de paramètre α . Nous voulons tester le caractère bigamma de $Y(x)$: existe-t-il une fonction de corrélation $\rho(h)$ telle que le couple $(Y(x), Y(x+h))$ admette la densité bivariable ?

$$g_{\alpha}^{\rho}(s, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \rho^n(h) I_n^{\alpha}(s) I_n^{\alpha}(t) g_{\alpha}(s) g_{\alpha}(t)$$

1.4.1. Les nuages de corrélation différée

Nous avons constaté dans §1.1.3. que la loi bigamma revêt des formes très différentes selon son paramètre α . Pour une anamorphosée gamma $Y(x)$, il est donc intéressant d'établir les nuages de corrélation différée (c'est-à-dire les nuages de corrélation entre les variables $Y(x)$ et $Y(x+h)$), ce qui permet une comparaison avec le tracé de la densité bigamma théorique de même paramètre α . En particulier, pour l'anamorphose gamma à grande valeur de α (ou l'anamorphose gaussienne), les nuages de corrélation différée doivent être de forme elliptique si $Y(x)$ suit une loi bigamma (ou bigaussienne).

1.4.2. L'espérance conditionnelle des facteurs

Le test qui paraît le plus approprié est le contrôle des égalités :

$$E\{I_n^\alpha[Y(x+h)]|Y(x)\} = \rho^n(h)I_n^\alpha[Y(x)]$$

qui caractérisent le modèle bigamma. Une telle approche a été pratiquée avec succès dans le cas gaussien par D. Guibal et A. Zaupa-Remacre (1984). Elle présente toutefois un certain nombre d'inconvénients que nous consignons ci-dessous :

- Le calcul des espérances conditionnelles requiert un nombre considérable de données.
- En toute rigueur, pour tester le modèle bigamma, il faudrait effectuer le contrôle des espérances conditionnelles à tous les ordres et à toutes les distances qui sont nécessaires pour la mise en œuvre du krigeage disjonctif. Cette opération, particulièrement lourde, n'est ou ne peut jamais être menée complètement.
- Un estimateur sans biais ne présente véritablement d'intérêt que s'il est entaché d'une faible variance. S'il en est ainsi pour le modèle bigaussien, il n'en va certainement pas de même pour le modèle bigamma. Par exemple, on trouve :

$$Var\{I_1^\alpha[Y(x+h)]|Y(x)=y\} = [1 - \rho(h)] \left[\frac{2\rho(h)y}{\alpha} + 1 - \rho(h) \right]$$

Il s'agit d'une fonction affine de la valeur conditionnelle et décroissante en α . Lorsque α tend vers 0, cette variance peut devenir arbitrairement grande.

A vrai dire, il est possible de remédier au premier de ces inconvénients en remplaçant la condition " $Y(x) = y$ " par une condition plus souple du type " $Y(x) < y$ " par exemple. On parvient à des expressions tout aussi simples :

$$E\{I_n^\alpha[Y(x+h)]|Y(x) < y\} = \rho^n(h) E\{I_n^\alpha[Y(x)]|Y(x) < y\}$$

que l'on obtient immédiatement en remarquant que :

$$E\{I_n^\alpha[Y(x+h)]|1_{Y(x)<y}\} = E\{I_n^\alpha[Y(x+h)]|Y(x)|1_{Y(x)<y}\} = \rho^n(h) E\{I_n^\alpha[Y(x)]|1_{Y(x)<y}\}$$

Malheureusement, cette amélioration est insuffisante pour pallier les autres inconvénients.

1.4.3. Les variogrammes d'ordre 1 et 2

Si la fonction aléatoire $Y(x)$ suit un modèle bigamma de paramètre α et de fonction de corrélation $\rho(h)$, Matheron (1982) a établi :

$$\gamma_Y(h) = \frac{1}{2} E \{ [Y(x+h) - Y(x)]^2 \} = \alpha [1 - \rho(h)]$$

$$\gamma_Y^1(h) = \frac{1}{2} E \{ |Y(x+h) - Y(x)| \} = \frac{\Gamma(\alpha + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha)} \sqrt{1 - \rho(h)}$$

d'où il résulte que :

$$\frac{\gamma_Y^1(h)}{\gamma_Y^1(\infty)} = \sqrt{\frac{\gamma_Y(h)}{\gamma_Y(\infty)}}$$

Interprétons ce résultat : à chaque distance h sont associées les valeurs des variogrammes d'ordre 1 et 2 normés. Le graphe de la courbe paramétrée en h ($\gamma_Y^1(h)/\gamma_Y^1(\infty)$, $\gamma_Y(h)/\gamma_Y(\infty)$) a une forme parabolique. Cette forme, particulièrement simple à reproduire, peut servir de test au modèle bigamma.

Ce test est-il caractéristique du modèle bigamma ? En autres termes, si le couple $(Y(x), Y(x+h))$ vérifie :

$$\frac{\frac{1}{2} E \{ |Y(x+h) - Y(x)| \}}{\frac{\Gamma(\alpha + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha)}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{2} E [Y(x+h) - Y(x)]^2}{\alpha}}$$

est-il bigamma ? En fait, rien n'est moins sûr. A l'heure actuelle, nous ne connaissons pas la réponse à cette question, même dans le cas où le couple est infiniment divisible.

Notons toutefois le fait suivant : si le couple $(Y(x), Y(x+h))$ suit une loi de Laguerre vérifiant la propriété ci-dessus, alors le couple est bigamma.

En effet, la propriété étudiée se réécrit :

$$\int_0^1 \sqrt{1-r} \bar{\omega}(dr) = \sqrt{\int_0^1 (1-r) \bar{\omega}(dr)}$$

qui est une formule de Cauchy-Schwarz appliquée aux fonctions $\sqrt{1-r}$ et 1. Puisqu'il y a égalité, on a donc :

$$\sqrt{1-r} = C.1 \quad \bar{\omega} \text{ p.s.}$$

ce qui ne peut se faire que si $\bar{\omega}$ a un support ponctuel, i.e. $\bar{\omega} = \delta_{r_0}$ et le couple $(Y(x), Y(x+h))$ suit bien une loi bigamma.

Une application possible de ce test est la recherche du paramètre α de l'anamorphose gamma. α sera choisi de façon à ce que le graphe de la courbe paramétrée en h des variogrammes d'ordre 1 et 2 de la fonction aléatoire anamorphosée Y_α soit le plus conforme à l'arc de parabole $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$ (cf. Figures 1-5).

1.4.4. Contrôle du variogramme de $Z(x)$

Lorsqu'une valeur de α est obtenue, on peut estimer le variogramme de $Z(x)$ à l'aide de celui de son anamorphosée $Y(x)$. D'où vient un contrôle possible du caractère bigamma de $Y(x)$ qui est le respect du variogramme expérimental de $Z(x)$:

$$\gamma_Z(h) = \sum_{n=1}^{+\infty} \phi_n^2 [1 - \rho^n(h)]$$

où les coefficients ϕ_n désignent les coefficients du développement de la fonction d'anamorphose en polynômes de Laguerre.

Notons par contre que ce contrôle perd sa signification lorsque la fonction d'anamorphose est linéaire.

1.4.5. Le variogramme de rang

Considérons tout d'abord le cas d'une fonction aléatoire bigaussienne $Y(x)$ de fonction de corrélation $\rho(h)$. Notons G la fonction de répartition de la loi de Gauss, il n'est pas difficile d'établir que :

$$\gamma_{G(Y)}(h) = \frac{1}{12} - \frac{1}{2\pi} \text{Arcsin} \frac{\rho(h)}{2}$$

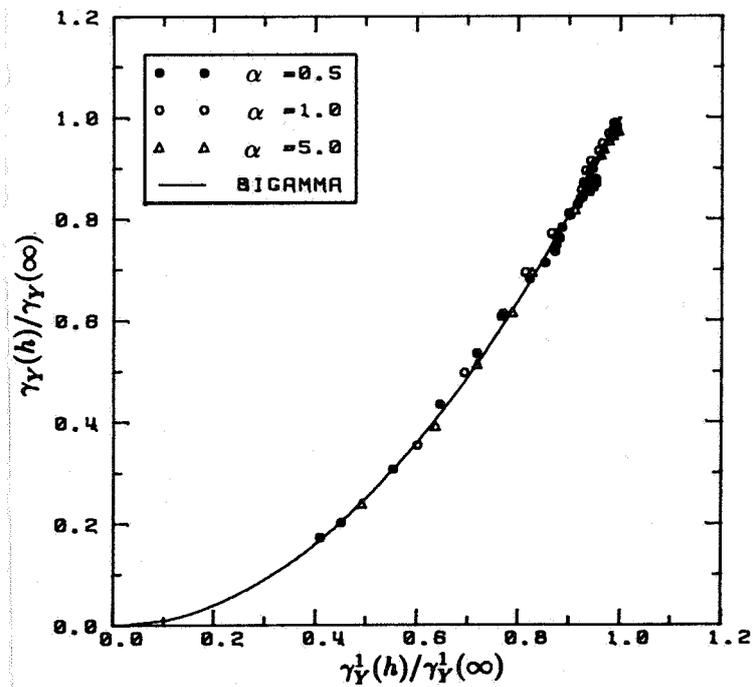
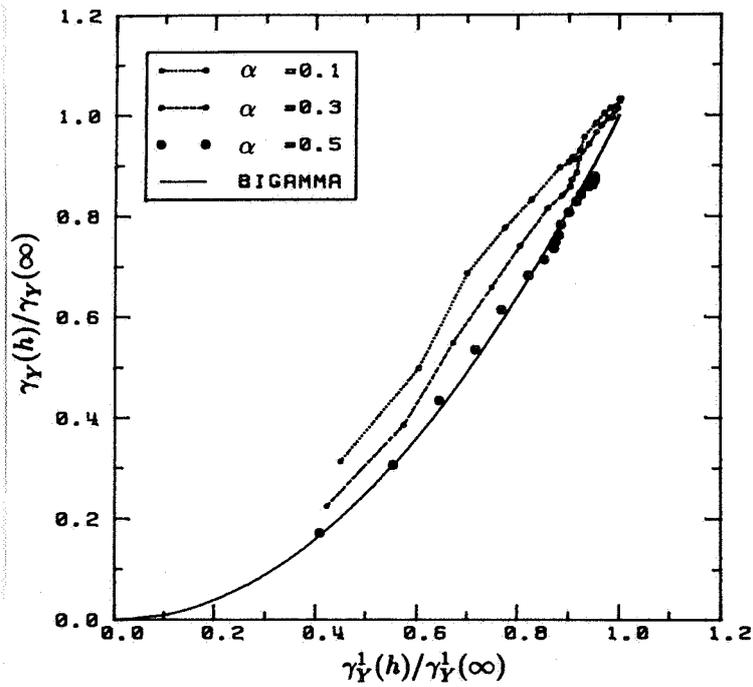
Plus généralement, soit $Z(x)$ une fonction aléatoire stationnaire de loi F , admettant $Y(x)$ pour anamorphosée gaussienne. Alors, $F(z) = G(y)$ de sorte que :

$$\gamma_{F(Z)}(h) = \frac{1}{12} - \frac{1}{2\pi} \text{Arcsin} \frac{\rho(h)}{2}$$

ce qui permet de "lire" la fonction d'autocorrélation de $Y(x)$ à partir du variogramme de rang de $Z(x)$:

$$\rho(h) = 2 \sin \left[\frac{\pi}{6} - 2\pi \gamma_{F(Z)}(h) \right]$$

Une démarche tout à fait similaire peut être appliquée au modèle bigamma.



Figures 1-5 : Un exemple d'adéquation à un modèle bigamma sur un jeu de données simulées d'un processus de diffusion gamma avec $\alpha = 0.5$, $\rho(h) = e^{-|h|}$ et ses anamorphosées.

Considérons une fonction aléatoire bigamma $Y(x)$ de paramètre α et de fonction de corrélation $\rho(h)$. Pour évaluer $\gamma_{G_\alpha(Y)}$, il est commode d'introduire le développement en polynômes de Laguerre de la fonction de répartition G_α :

$$G_\alpha(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \xi_n^\alpha l_n^\alpha(y)$$

où :

$$\xi_n^\alpha = \int_0^{+\infty} G_\alpha(y) l_n^\alpha(y) g_\alpha(y) dy$$

comme :

$$\gamma_{G_\alpha(Y)}(h) = \frac{1}{12} - \sum_{n=1}^{+\infty} \rho^n(h) (\xi_n^\alpha)^2$$

on voit que tout se ramène à l'évaluation des ξ_n^α . Pour ce faire, il suffit d'intégrer par parties de façon à faire disparaître G_α , puis d'intégrer séparément chaque monôme du polynôme de Laguerre. On obtient :

$$\xi_0^\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \xi_n^\alpha &= -\sqrt{\frac{\Gamma(\alpha+n)}{4\pi\Gamma(\alpha)n!} \frac{\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha+1)}} F\left(1-n, 2\alpha; \alpha+1; \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{-1}{2^{2\alpha}\Gamma(\alpha)} \sqrt{\frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha)}} \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \binom{n-1}{k} \frac{\Gamma(2\alpha+k)}{\Gamma(\alpha+1+k)} \quad (n \geq 1) \end{aligned}$$

où F est une fonction hypergéométrique. L'expression plutôt compliquée de ces coefficients ne nous a pas permis de calculer explicitement la somme de la série. Tout au plus avons-nous pu en donner une représentation intégrale :

$$\gamma_{G_\alpha(Y)}(h) = \frac{\Gamma^2(2\alpha)}{\Gamma^3(\alpha)\Gamma(\alpha+1)} \int_{\rho(h)}^1 \frac{(1-r)^{3\alpha-1}}{(2-r)^{4\alpha}} F\left[2\alpha, 2\alpha; \alpha+1; \frac{r}{(2-r)^2}\right] dr$$

qui donne lieu à plusieurs cas intéressants de simplification. Citons en particulier :

$$\gamma_{G_1(Y)}(h) = \frac{1}{3} \left[\frac{1-\rho(h)}{4-\rho(h)} \right]$$

En pratique, les méthodes du variogramme de rang doit être utilisée avec prudence. L'expérience nous a montré (cf. §1.9.) qu'un test basé sur ce variogramme est particulièrement peu puissant, en ce sens qu'il ne permet pas, par exemple, le rejet d'un modèle bigaussien, lorsque celui-ci est manifestement inadapté au vu d'autres statistiques.

1.4.6. Remarques

Parmi les différents tests de loi bivariable qui ont été présentés aux paragraphes précédents, seule l'espérance conditionnelle :

$$E[l_n^\alpha(X)|Y] = \rho_n l_n^\alpha(Y) \quad (n \geq 0)$$

constitue un test exhaustif en ce sens qu'il caractérise la loi bivariable. Cette exhaustivité est d'ailleurs purement illusoire à cause de la difficulté de sa mise en œuvre.

Les autres critères de type variographique ne sont en général pas suffisants pour caractériser les lois bivariées. Mais ils ne sont pas difficiles à mettre en œuvre pourvu que l'on puisse estimer les variogrammes. Dans les trois cas d'études qui suivent, nous verrons comment la combinaison de ces critères permet de contrôler les hypothèses et peut nous orienter vers le choix d'un modèle.

1.5. Quelques exemples du modèle de Laguerre et leurs tests

1.5.1. Expressions générales

Il peut arriver qu'il n'existe aucune anamorphose gamma permettant une modélisation bigamma adéquate des lois bivariées. Dans ce cas, il est nécessaire de se situer dans un cadre plus général que le modèle bigamma. Dans cette partie, nous reprenons le modèle de Laguerre qui n'est autre que le mélange des modèles bigamma.

Rappelons que, dans ce modèle, le couple $(Y(x), Y(x+h))$ admet la densité :

$$g_\alpha(s, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \rho_n(h) l_n^\alpha(s) l_n^\alpha(t) g_\alpha(s) g_\alpha(t)$$

où les $\rho_n(h)$ sont les moments d'une variable aléatoire $R(h)$ comprise entre 0 et 1, et non presque sûrement identique à la constante 1. Dans ce modèle, le coefficient de corrélation entre $Y(x)$ et $Y(x+h)$ n'est autre que $\rho_1(h)$ (noté simplement $\rho(h)$).

Les formules d'échange des facteurs deviennent :

$$E\{l_n^\alpha[Y(x+h)]|Y(x)\} = \rho_n(h) l_n^\alpha[Y(x)]$$

et la formule de contrôle du variogramme de $Z(x)$ ($= \phi[Y(x)]$) s'écrit :

$$\gamma_Z(h) = \sum_{n=1}^{+\infty} \phi_n^2 [1 - \rho_n(h)]$$

Quant aux variogrammes normés de $Y(x)$, on obtient :

$$\frac{\gamma_Y(h)}{\gamma_Y(\infty)} = E[1 - R(h)] = 1 - \rho(h)$$

$$\frac{\gamma_Y^1(h)}{\gamma_Y^1(\infty)} = E \left[\sqrt{1 - R(h)} \right]$$

Ces relations servent ensuite de tests du modèle de Laguerre.

Notons que si $R(h)$ est une constante, on retrouve le modèle bigamma étudié précédemment. Dans ce qui suit, nous allons considérer tour à tour trois autres exemples de modèles de Laguerre en spécifiant la loi de $R(h)$.

1.5.2. Le modèle mosaïque

$R(h)$ prend les valeurs 0 et 1 avec les probabilités respectives $1 - \rho(h)$ et $\rho(h)$. Dans ce cas :

$$\frac{\gamma_Y(h)}{\gamma_Y(\infty)} = 1 - \rho(h) = \frac{\gamma_Y^1(h)}{\gamma_Y^1(\infty)}$$

de sorte que les variogrammes d'ordre 1 et 2 de $Y(x)$ sont proportionnels. Parmi les modèles de Laguerre, le modèle mosaïque est celui qui minimise la destructuration (Matheron, 1982).

1.5.3. Le modèle barycentrique

Dans cet exemple, $R(h)$ prend trois valeurs, à savoir 0, $\rho(h)$ et 1 avec les probabilités q , r et p . Pour avoir $E[R(h)] = \rho(h)$, on doit nécessairement prendre $p = \rho(h)(1 - r)$ et $q = [1 - \rho(h)](1 - r)$ de sorte que le modèle dépend d'un paramètre r qui peut varier entre 0 et 1. Pour une valeur de r fixée, on obtient :

$$\rho_n(h) = E[R^n(h)] = r \rho^n(h) + (1 - r) \rho(h)$$

Quant aux variogrammes d'ordre 1 et 2, on obtient :

$$\frac{\gamma_Y(h)}{\gamma_Y(\infty)} = 1 - \rho(h)$$

$$\frac{\gamma_Y^1(h)}{\gamma_Y^1(\infty)} = (1 - r) [1 - \rho(h)] + r \sqrt{1 - \rho(h)}$$

de sorte que l'on a :

$$\frac{\gamma_Y^1(h)}{\gamma_Y^1(\infty)} = (1-r) \frac{\gamma_Y(h)}{\gamma_Y(\infty)} + r \sqrt{\frac{\gamma_Y(h)}{\gamma_Y(\infty)}}$$

En fonction de la valeur du paramètre r , le modèle barycentrique varie continûment du modèle bigamma au modèle mosaïque (Figure 1-6).

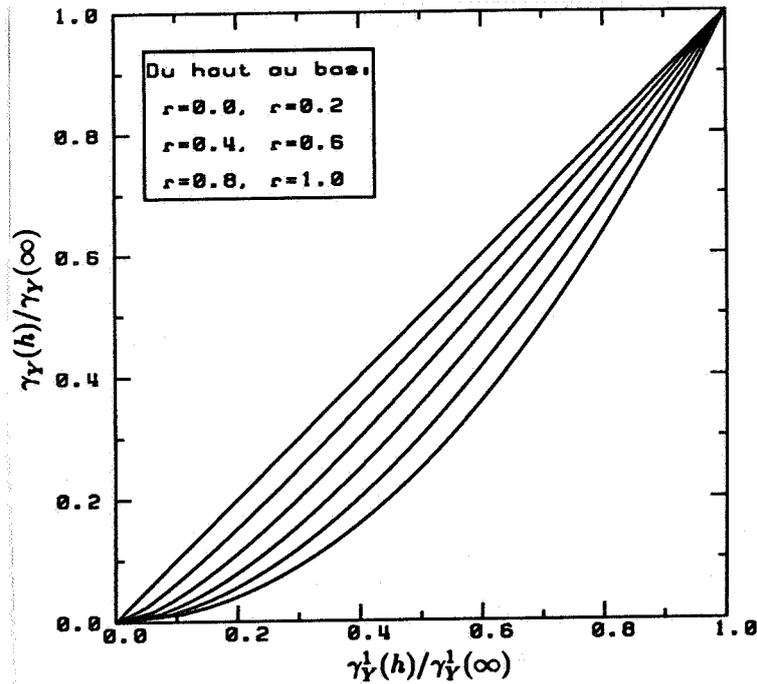


Figure 1-6 : Formes possibles du modèle barycentrique.

1.5.4. Le modèle beta

Dans cet exemple, la variable $R(h)$ suit une loi beta de densité :

$$\bar{\omega}(r) = \frac{\Gamma(\mu + \nu)}{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)} r^{\mu-1} (1-r)^{\nu-1}$$

où μ et ν sont deux paramètres positifs.

Cette loi possède des moments de tout ordre :

$$\rho_n(h) = \frac{\Gamma(\mu + \nu)}{\Gamma(\mu + \nu + n)} \frac{\Gamma(\mu + n)}{\Gamma(\mu)}$$

avec en particulier :

$$\rho_1(h) = \rho(h) = \frac{\mu}{\mu + \nu} \quad (1-4)$$

Pour les variogrammes, on trouve :

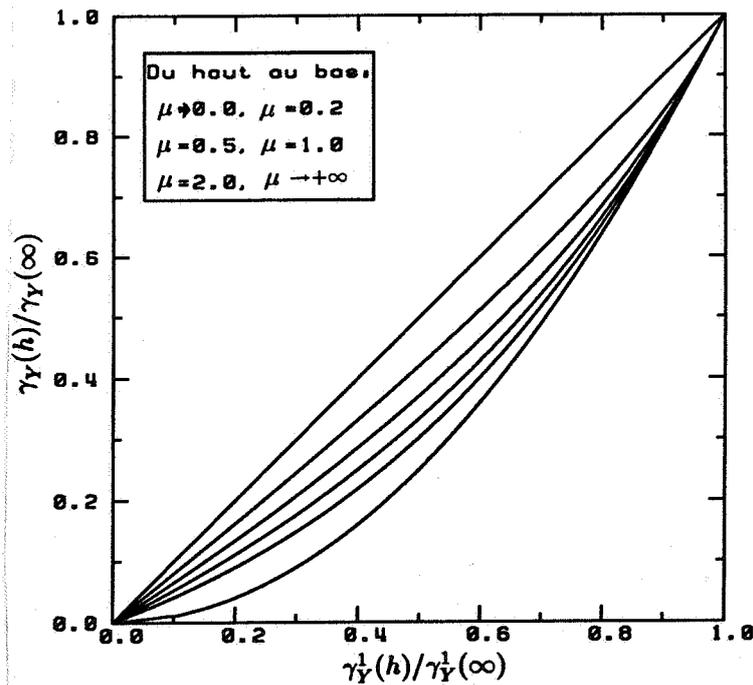
$$\frac{\gamma_Y(h)}{\gamma_Y(\infty)} = 1 - \rho(h)$$

$$\frac{\gamma_Y^1(h)}{\gamma_Y^1(\infty)} = \frac{\Gamma(\mu + \nu)}{\Gamma(\mu + \nu + \frac{1}{2})} \frac{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})}{\Gamma(\nu)}$$

qui peut se récrire à l'aide d'un seulement des deux paramètre μ ou ν en tenant compte de la relation (1-4). Par exemple :

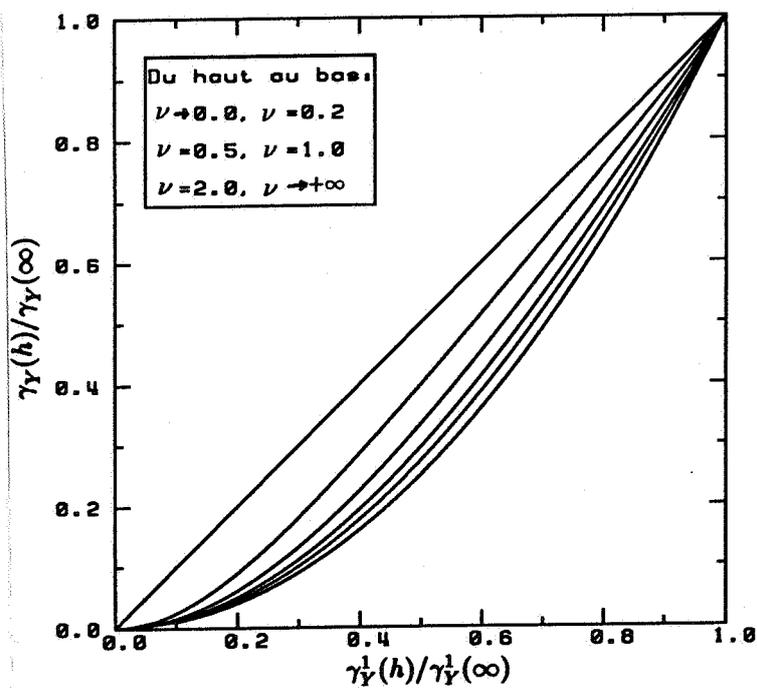
$$\frac{\gamma_Y^1(h)}{\gamma_Y^1(\infty)} = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{1-\rho(h)}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{1-\rho(h)} + \frac{1}{2}\right)} \frac{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})}{\Gamma(\nu)}$$

Les relations entre les variogrammes normés d'ordre 1 et 2 n'ont pas de forme simple (Figures 1-7 (a) et (b)).

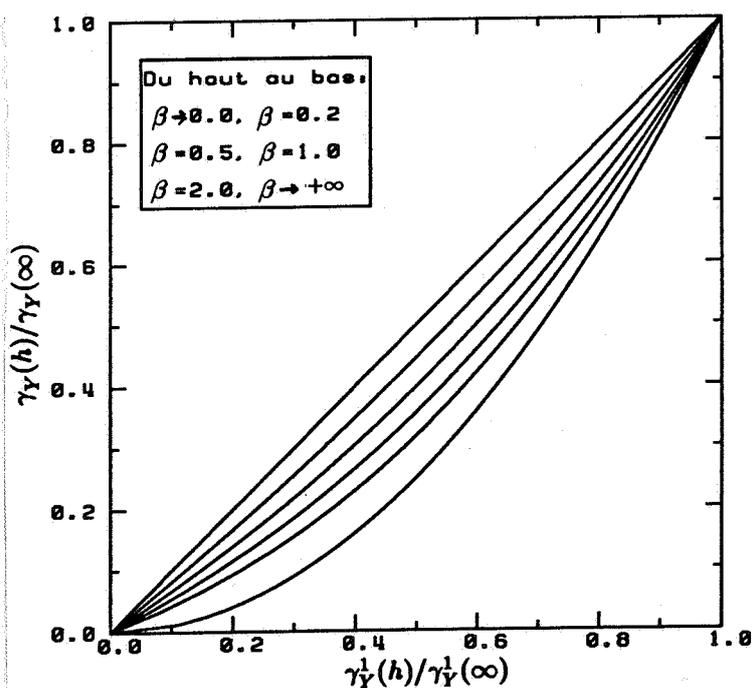


(a) : En paramètre μ

Figures 1-7 : Quelques formes possibles du modèle beta.



(b) : En paramètre ν



(c): En paramètre β

Figures 1-7(suite) : Quelques formes possibles du modèle beta.

On peut aussi prendre $\mu = \beta \rho(h)$ et $\nu = \beta [1 - \rho(h)]$ en introduisant un paramètre β ($0 < \beta < +\infty$). Les $\rho_n(h)$ se récrivent :

$$\rho_n(h) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta + n)} \frac{\Gamma[\beta \rho(h) + n]}{\Gamma[\beta \rho(h)]}$$

La relation entre les variogrammes normés d'ordre 1 et 2 a des formes différentes (Figure 1-7 (c)).

1.6. Cas d'étude : gisement de Bertholène

Il s'agit d'un banc d'une mine d'uranium. On dispose de 144 sondages verticaux de 6m de longueur, implantés selon une maille régulière de 2m×3m. Les échantillons correspondent à des passes de 1m obtenues par régularisation le long des sondages, et pour lesquels on connaît la position du centre de gravité et la teneur moyenne exprimée en ppm.

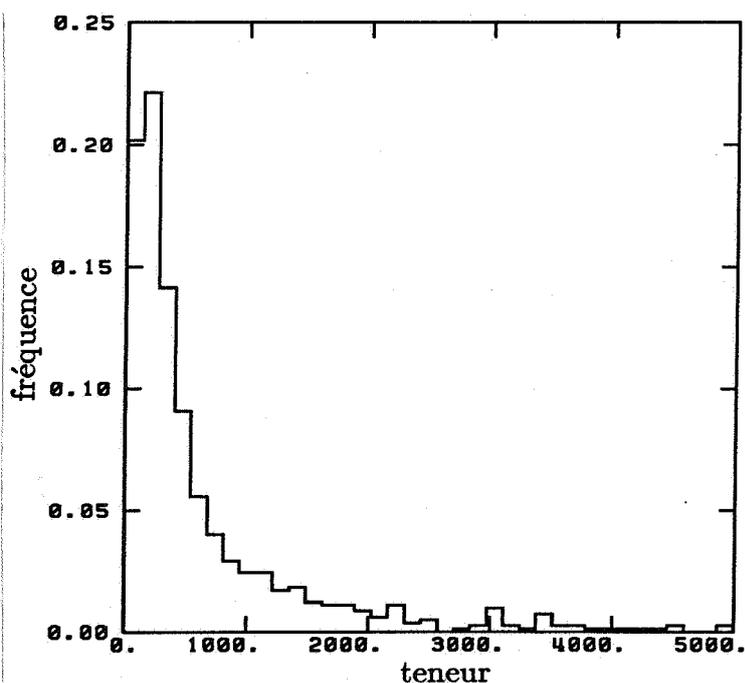


Figure 1-8 : Gisement de Bertholène - histogramme des données brutes.

Compte-tenu de ce que les échantillons présentent un histogramme (Figure 1-8) dissymétrique ($\sigma/m = 1.9$), nous avons choisi de travailler dans le cadre de l'anamorphose gamma. Le tableau 1-1 présente les statistiques des anamorphosées empiriques gamma pour différentes valeurs du paramètre α .

| | α | s | | | σ^2 | | |
|-------|----------|-----------|---------|---------------|------------|---------|---------------|
| | | théorique | expé. | err. rel. (%) | théorique | expé. | err. rel. (%) |
| GAMMA | 0.1 | 0.08831 | 0.08831 | 0.000 | 0.1 | 0.09905 | 0.950 |
| | 0.5 | 0.31831 | 0.31831 | 0.000 | 0.5 | 0.49885 | 0.230 |
| | 1.0 | 0.50000 | 0.50000 | 0.000 | 1.0 | 0.99869 | 0.131 |
| | 2.0 | 0.75000 | 0.74999 | 0.001 | 2.0 | 1.99840 | 0.080 |
| | 5.0 | 1.23047 | 1.23044 | 0.002 | 5.0 | 4.99724 | 0.055 |
| | 10 | 1.76197 | 1.76190 | 0.004 | 10 | 9.9412 | 0.059 |
| GAUSS | | 0.56419 | 0.56416 | 0.005 | 1 | 0.99867 | 0.133 |

Tableau 1-1 : Gisement de Bertholène - statistiques des anamorphosées.

On note que pour chaque valeur de α , les valeurs expérimentales de sélectivité et de variance sont pratiquement confondues avec les valeurs théoriques. Cela justifie l'utilisation de l'anamorphose empirique gamma pour toute valeur de son paramètre α .

Ensuite, nous avons construit les nuages $\gamma_Y/\gamma_Y^{\frac{1}{2}}$ pour ces différentes valeurs de α . Il se trouve que le nuage ne devient très proche de la courbe théorique bigamma qu'aux grandes valeurs de α (Figure 1-9). Le cas bigamma $\alpha = 5$ est pratiquement équivalent au cas bigaussien (Figure 1-10).

Par ailleurs, il n'est pas inintéressant de visualiser les nuages de corrélation différée des anamorphosées gaussiennes (loi bivariable empirique des $(Y(x), Y(x+h))$).

Quelques uns sont reproduits (Figure 1-11). Ils ont été obtenus le long des sondages

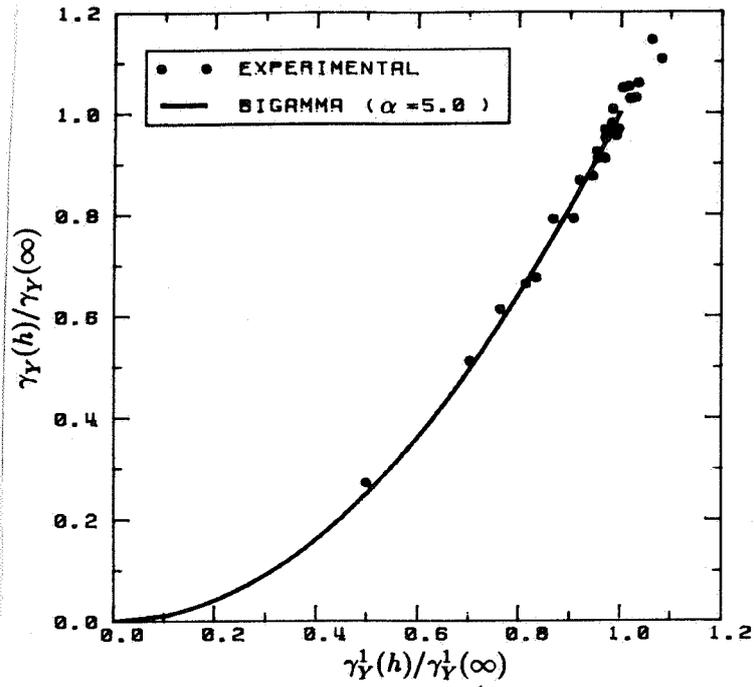


Figure 1-9 : Gisement de Bertholène - nuage associé aux variogrammes d'ordre 1 et 2 des anamorphosées gamma ($\alpha = 5$).

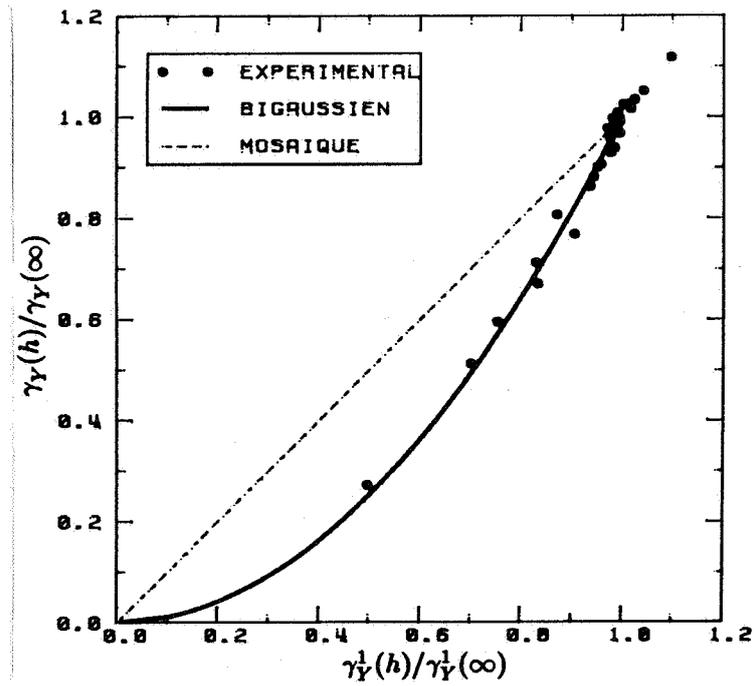


Figure 1-10 : Gisement de Bertholène - nuage associé aux variogrammes d'ordre 1 et 2 des anamorphosées gaussiennes.

au pas $h = 1, 2, 3$ et $4m$. Ces nuages sont bien de forme elliptique, typique du cas bigaussien. La circularité va en s'accroissant lorsque h augmente, traduisant par là un degré de dépendance de plus en plus faible entre les deux points d'appui.

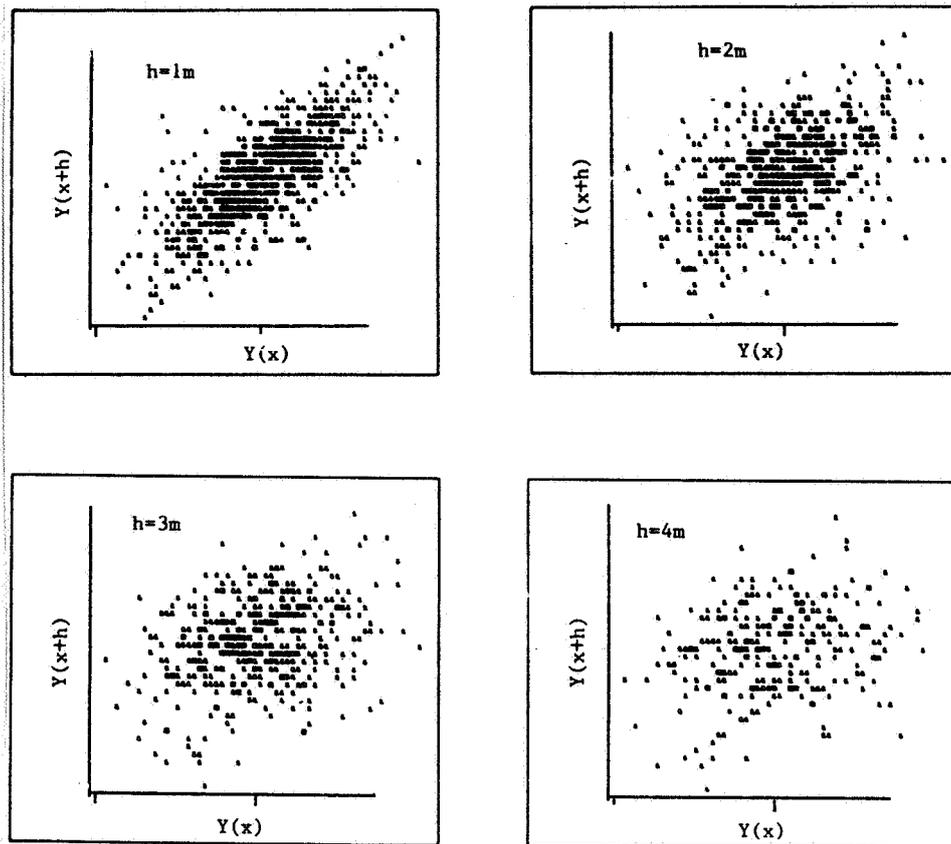
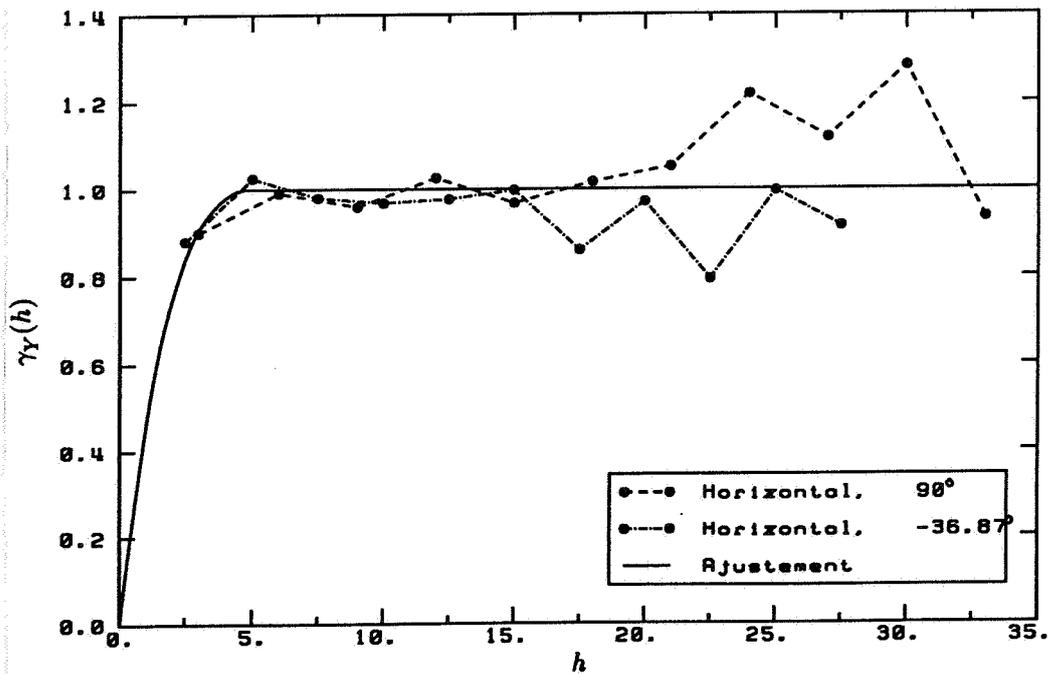
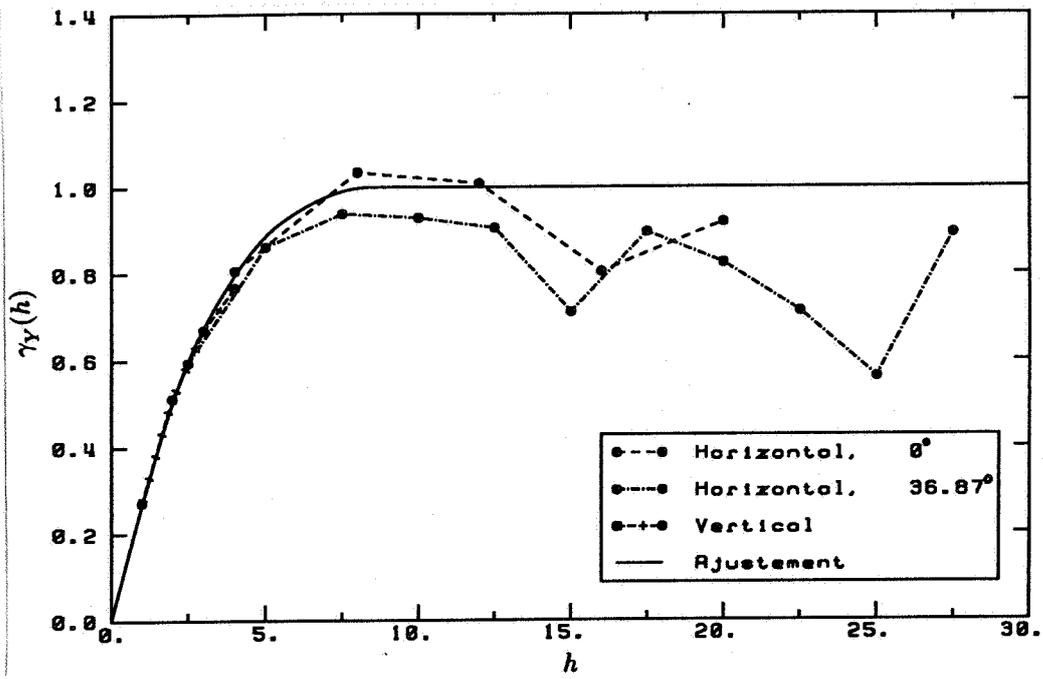


Figure 1-11 : Gisement de Bertholène - nuages de corrélation différée des anamorphosées gaussiennes.

Aux figures 1-12 sont présentés les variogrammes expérimentaux des anamorphosées gaussiennes et leur ajustements. Ils servent par la suite à calculer les variances des combinaisons linéaires et la variance de bloc de sélection, moyennant le caractère bigaussien des données.



Figures 1-12 : Gisement de Bertholène - variogrammes des anamorphosées gaussiennes.

1.7. Cas d'étude : le gisement de Luceda

La situation où une anamorphose gaussienne restitue une fonction aléatoire bigaussienne n'est pas générale, comme nous allons le voir maintenant.

Les données proviennent d'un autre gisement d'uranium reconnu par une cinquantaine de sondages verticaux. Chaque sondage contient en moyenne 40 échantillons. Le coefficient de variation ($\sigma/m = 3.7$) est beaucoup plus élevé que celui du gisement de Bertholène étudié précédemment ($\sigma/m = 1.9$). L'objectif ici est de modéliser la loi bivariable de la teneur des échantillons. S'agissant d'un gisement d'uranium, nous avons fait choix de l'anamorphose gamma. Le paramètre α a été choisi a priori de façon à ce que Z et Y admettent le même indice de normalité ($S/\sigma\sqrt{\pi}$). On obtient ainsi : $\alpha = 0.0541$. Un tel choix a permis une approche grossière de l'histogramme des échantillons.

La comparaison des nuages expérimentaux γ_Y/γ_Y^1 obtenus par anamorphose gaussienne et par anamorphose gamma est fort instructive (Figure 1-13). Le premier nuage est fort éloigné de la courbe bigaussienne. L'adéquation dans le cas bigamma est bien meilleure. Elle peut du reste être encore améliorée par ajustement à un modèle beta ($\beta = 1.$) ou un modèle barycentrique ($r = 0.6$).

A partir de ce modèle de loi bivariable, nous avons calculé le variogramme $\gamma_{\phi(Y)}$ qui est en excellent accord avec le variogramme expérimental de Z (Figure 1-14).

Pour finir, il est intéressant de regarder le nuage de corrélation différée des anamorphosées gaussiennes (Figure 1-15). On sait qu'un tel nuage n'est en rien bigaussien.

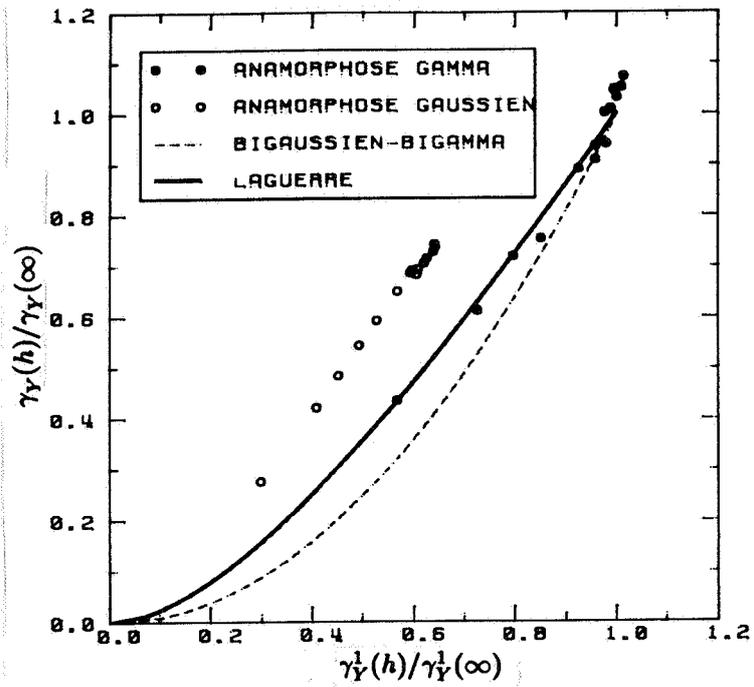


Figure 1-13 : Gisement de Luceda - Nuages expérimentaux γ_Y/γ_Y^1 des anamorphosées gaussiennes et gamma ($\alpha = 0.0541$).

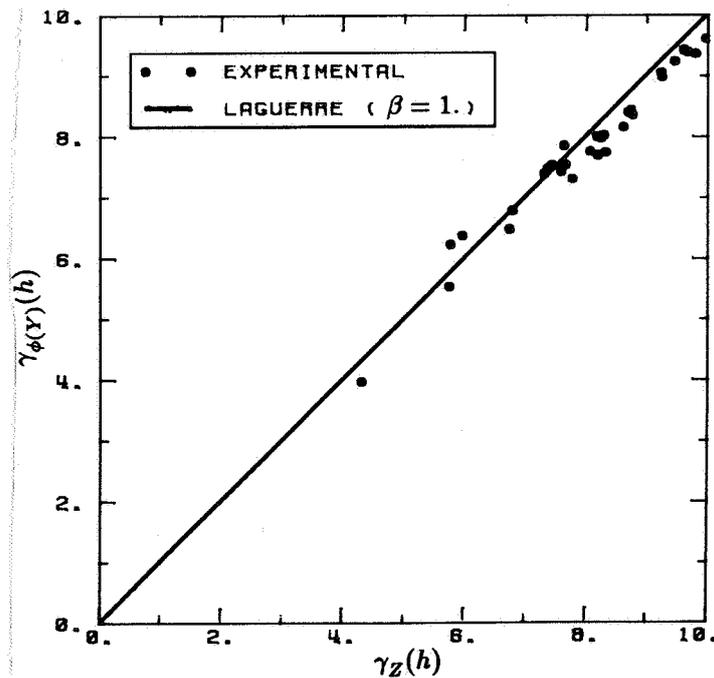


Figure 1-14 : Gisement de Luceda - Nuage de points $\gamma_{\phi(Y)}/\gamma_Z$ pour l'anamorphose gamma ($\alpha = 0.0541$).

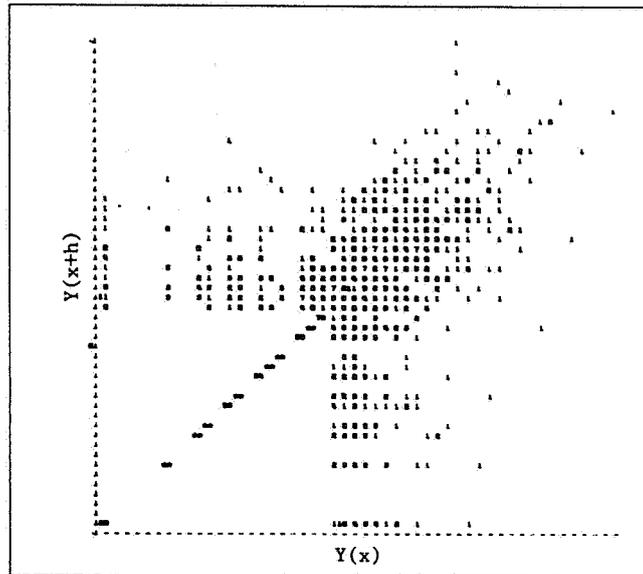


Figure 1-15 : Gisement de Luceda - Nuages de corrélation différée des anamorphosées gaussiennes ($h = 1.5m$).

1.8. Cas d'étude : le site JMC4

Les données considérées ici sont des mesures de pentes le long d'un profil sous-marin. On dispose de 4285 valeurs espacées tous les 10m. Une anamorphose gamma a été construite à partir de plusieurs valeurs de α . Sur le tableau 1-2, où sont consignées les statistiques des anamorphosées, on observe que les valeurs expérimentales de sélectivité et de variance deviennent de plus en plus éloignées des valeurs théoriques lorsque α augmente. Cela résulte de la forte fréquence des faibles valeurs (la fréquence maximale est de 17%). Toutefois, ces écarts sont suffisamment faibles pour que les anamorphoses empiriques gamma puissent être considérées comme acceptables.

Le problème est encore ici la modélisation des lois bivariées. Mais ici les choses ne sont guère aisées. Pour le voir, considérons tout d'abord le cas $\alpha = 5$. Le nuage γ_Y/γ_Y^1 qui lui correspond peut être ajusté par un modèle beta où $\mu = 0.5$ (Figure 1-16).

Malheureusement, ce modèle de loi bivariable entraîne une sous-estimation notable du variogramme de Z (Figure 1-18).

| | α | s | | | σ^2 | | |
|-------|----------|---------|---------|---------------|------------|--------|---------------|
| | | expé. | théor. | err. rel. (%) | expé. | théor. | err. rel. (%) |
| GAMMA | 0.05 | 0.04682 | 0.04683 | 0.021 | 0.04975 | 0.05 | 0.500 |
| | 0.1062 | 0.09309 | 0.09315 | 0.064 | 0.1059 | 0.1062 | 0.282 |
| | 0.208 | 0.16441 | 0.16468 | 0.164 | 0.20757 | 0.208 | 0.207 |
| | 5 | 1.21815 | 1.23047 | 1.001 | 4.95365 | 5 | 0.927 |
| GAUSS | | 0.55657 | 0.56419 | 1.351 | 0.97490 | 1 | 2.51 |

Tableau 1-2 : Site JMC4 - Statistiques des anamorphosées gamma.

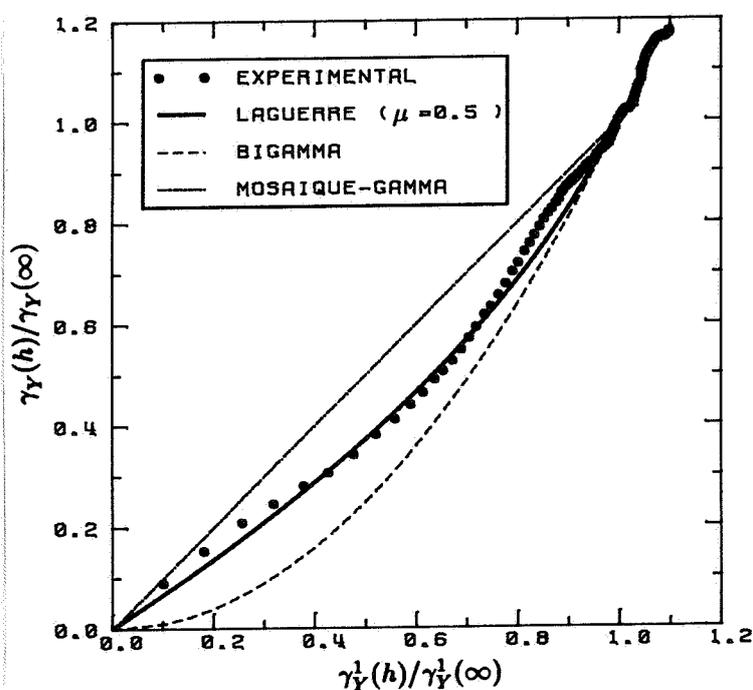


Figure 1-16 : Site JMC4 - Nuage expérimental γ_Y/γ_Y^1 pour l'anamorphose gamma ($\alpha = 5$) et sa modélisation par un modèle beta ($\mu = 0.5$).

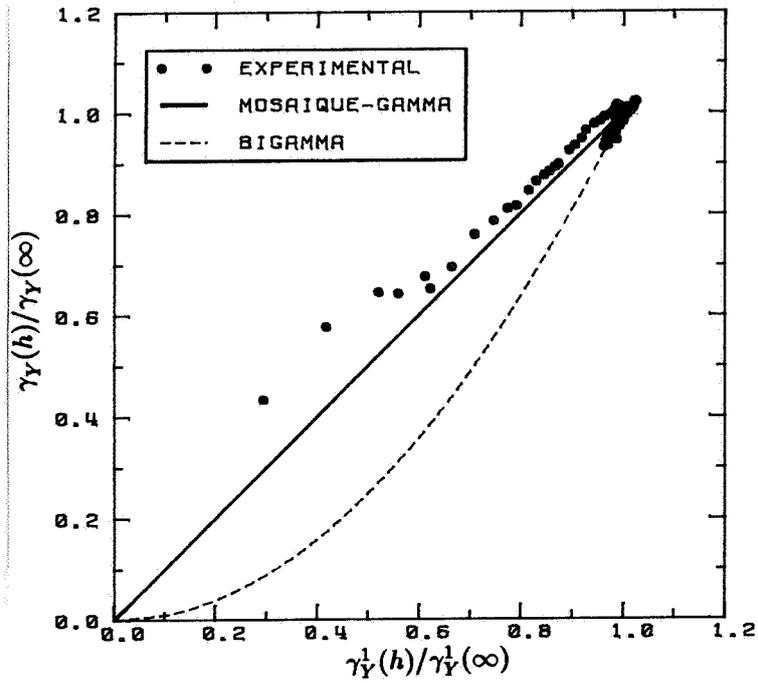


Figure 1-17 : Site JMC4 - Nuage expérimental γ_Y/γ_Y^1 pour l'anamorphose gamma ($\alpha = 0.05$) et le modèle mosaïque.

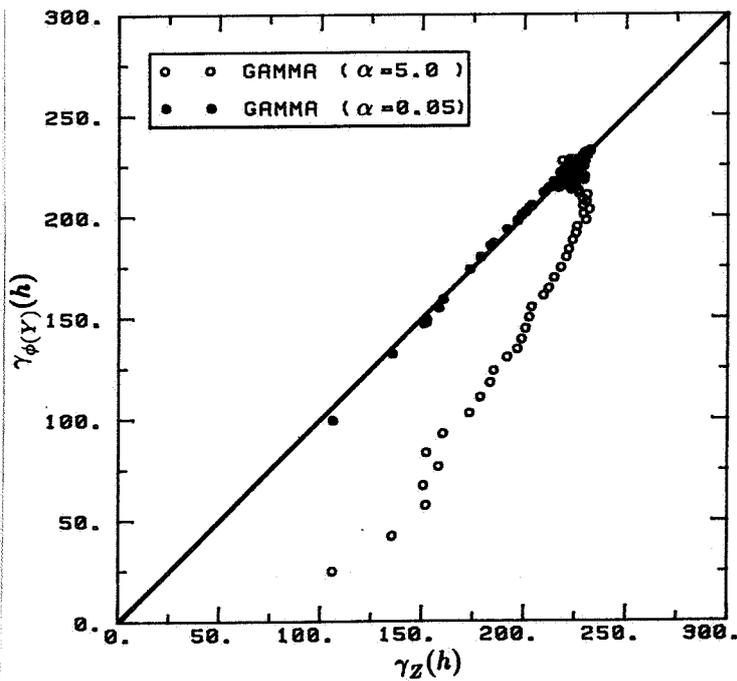


Figure 1-18 : Site JMC4 - Nuage des points $\gamma_{\phi(Y)}/\gamma_Z$ confronté à plusieurs modèles ($\alpha = 5$, modèle beta et $\alpha = 0.05$, modèle mosaïque).

Notre conviction est qu'une anamorphose gamma à partir d'une grande valeur de α ne permet pas une modélisation satisfaisante des lois bivariées. Par voie de conséquence, il ne faut pas attendre grand-chose non plus de l'anamorphose gaussienne.

En revanche, lorsque l'on choisit $\alpha = 0.05$, le nuage expérimental des anamorphosées gamma est proche de la courbe mosaïque (Figure 1-17), et à partir de la loi bivariable ainsi obtenue, on restitue bien le variogramme expérimental de Z (Figure 1-18).

Par ailleurs, il convient de signaler que le modèle mosaïque est un modèle sans destructuration quel que soit le choix du paramètre α : les données anamorphosées gamma d'un modèle mosaïque restent mosaïque, et cela pour toutes les valeurs du paramètre α . Les données expérimentales dont nous disposons ne se comportent pas ainsi, de sorte qu'elles ne sauraient s'ajuster à un modèle mosaïque. Pour le moment, nous ne connaissons pas encore le modèle susceptible de s'ajuster à ce jeu de données. Si nous arrêtons notre choix au modèle mosaïque après anamorphose gamma de paramètre $\alpha = 0.05$, c'est en raison de la bonne restitution du variogramme de Z , ce qui est capital dans bon nombre d'applications (simulation et changement de support).

1.9. Quelques considérations sur les variogrammes de rang

Dans les trois cas d'étude précédents, nous avons constaté qu'après anamorphose gaussienne, la modélisation bigaussienne connaît des succès très inégaux. Et pourtant, le test du variogramme de rang ne permet jamais d'infirmer le modèle bigaussien (Figures 1-18, 1-19 et 1-20). Comme déjà signalé, ce test est très peu puissant pour pouvoir être de quelque utilité en pratique.

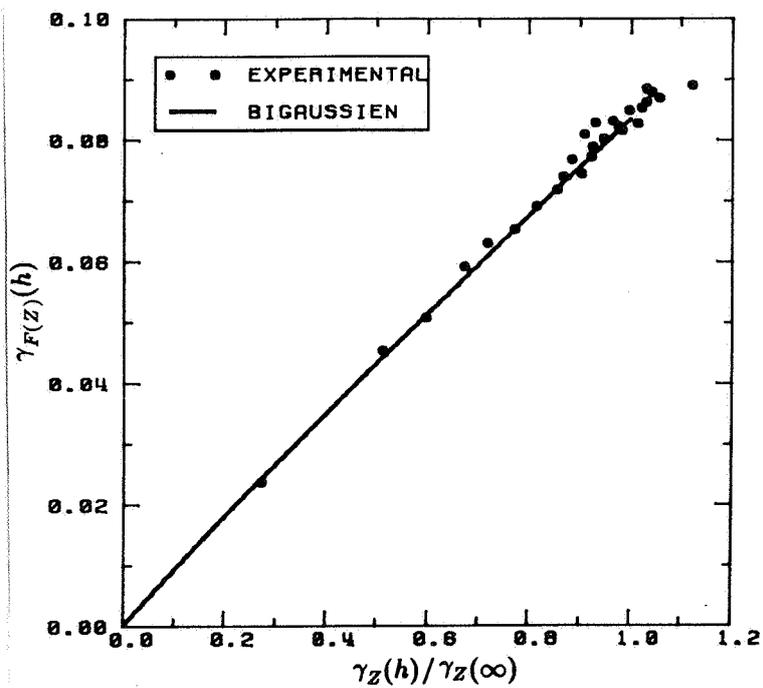


Figure 1-19 : Gisement de Bertholène - Nuage des points $\gamma_{F(z)}/\gamma_z$.

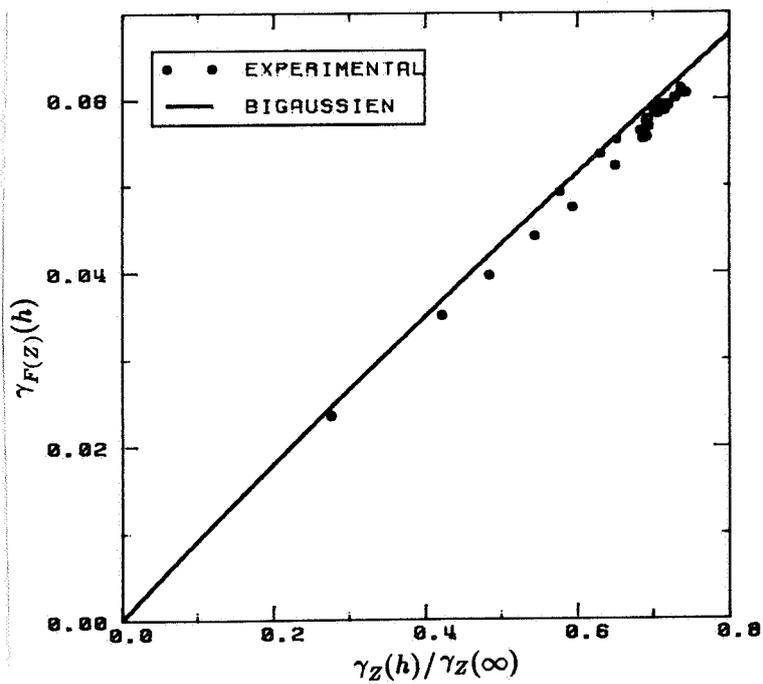


Figure 1-20 : Gisement de Luceda - Nuage des points $\gamma_{F(z)}/\gamma_z$.

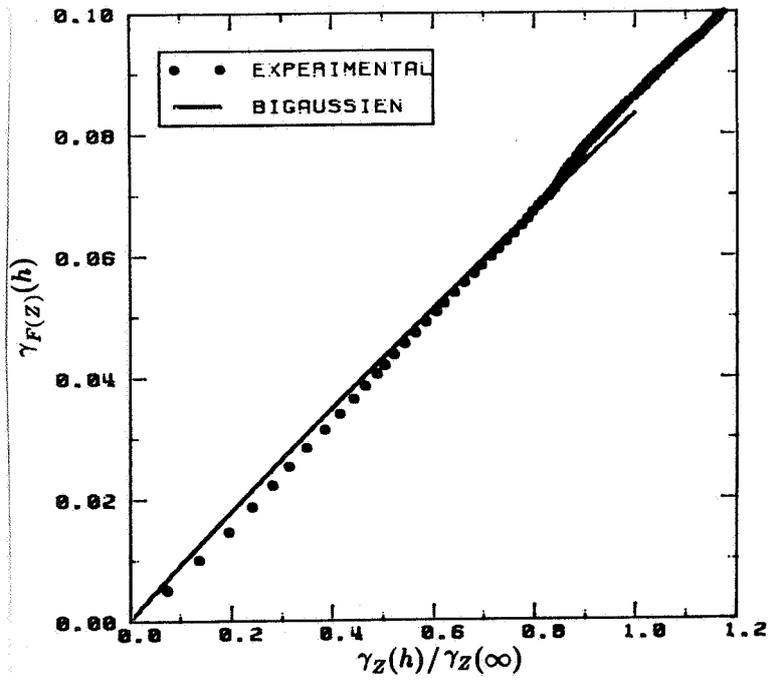


Figure 1-21 : Site JMC4 - Nuage des points $\gamma_{F(z)}/\gamma_Z$.

CHAPITRE 2

ESTIMATION DE DISTRIBUTIONS SPATIALES LOCALES PONCTUELLES

2.1. Position du problème

Considérons une variable régionalisée $z(x)$ reconnue par des échantillons ($z(x_1), z(x_2), \dots, z(x_N)$). On s'intéresse à la distribution de $z(x)$ dans un domaine V donné. Pour cela, introduisons la fonction d'indicatrice de $z(x)$:

$$1_{z(x) < z} = \begin{cases} 1, & \text{si } z(x) < z ; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Son intégrale dans V :

$$f_V(z) = \frac{1}{|V|} \int_V 1_{z(x) < z} dx$$

est manifestement une fonction de répartition. Si par exemple, \underline{x} est un point au hasard dans V , alors la variable aléatoire $z(\underline{x})$ a pour fonction de répartition $f_V(z)$. On voit que $f_V(z)$ caractérise la fréquence d'apparition de valeur prise par la fonction $z(x)$ dans V , et celle-là est appelée la distribution spatiale de $z(x)$ dans V .

En géostatistique, $z(x)$ est interprétée comme une réalisation d'une fonction aléatoire $Z(x)$. Dans ce contexte, le problème de reconnaissance de la distribution spatiale de $z(x)$ dans V devient l'estimation de l'intégrale stochastique :

$$F_V(z) = \frac{1}{|V|} \int_V 1_{Z(x) < z} dx$$

connaissant ($Z(x_1), Z(x_2), \dots, Z(x_N)$).

2.2. Krigeage disjonctif isofactoriel gamma

Pour estimer $F_V(z)$, le krigeage disjonctif (K.D.) consiste à rechercher la meilleure approximation par une somme de N fonctions monovariées :

$$F_V^{KD}(z) = \sum_{i=1}^N f_i[Z(x_i)]$$

où les fonctions f_i sont déterminées par le système d'équations :

$$E [F_V^{KD}(z) | Z(x_i)] = E [F_V(z) | Z(x_i)] \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (2-1)$$

Sous cette forme, il est clair que le K.D. nécessite la connaissance préalable de toutes les lois bivariées de $(Z(x_i), Z(x_j))$ et $(Z(x_i), Z(x))$ ($i, j = 1, 2, \dots, N; x \in V$). Le système (2-1) est une série d'équations intégrales plutôt difficile à résoudre. On est donc conduit à rechercher des cas de simplification : telle est la raison d'être des modèles isofactoriels.

En pratique, la mise en œuvre du K.D. s'effectue assez souvent dans un cadre gaussien : on commence par transformer $Z(x)$ en une fonction aléatoire monogaussienne $Y(x)$ au moyen d'une anamorphose $Z(x) = \phi[Y(x)]$; et si les couples $(Y(x_i), Y(x_j))$ et $(Y(x_i), Y(x))$ sont bigaussiens (ou plus généralement hermitiens), le K.D. se réduit à une suite de krigeages simples des polynômes d'Hermite grâce au développement isofactoriel des lois bivariées.

Toutefois, il s'avère de temps en temps que l'anamorphose gaussienne n'est pas souhaitable (cas des distributions très dissymétriques), ni même possible (cas des distributions présentant de fortes fréquences atomiques). D'un autre côté, bien que cela soit possible, il n'y a pas de raison pour que les lois bivariées soient bigaussiennes ou hermitiennes. D'où vient la nécessité de travailler dans un cadre autre ou plus général que le cadre gaussien.

Le modèle gamma proposé par Matheron en 1973 est un modèle non gaussien auquel nous nous intéressons dans ce travail. Dans ce modèle, on considère que la fonction aléatoire d'étude $Z(x)$ peut être anamorphosée à une autre fonction aléatoire stationnaire à loi gamma $Y(x)$:

$$Z(x) = \phi_\alpha[Y(x)]$$

et l'on suppose que les couples anamorphosés $(Y(x), Y(x+h))$ obéissent aux lois isofactorielles gamma (1-2 ou plus généralement 1-3). Au moyen de cette transformation,

l'estimation de $F_V(z)$ devient celle de $\frac{1}{|V|} \int_V 1_{Y(x) < y} dx$ où $y = \phi_\alpha^{-1}(z)$. Dans le cadre du modèle gamma, le K.D. de $F_V(z)$ se réduit à une série de krigeages simples (K.S.) des polynômes de Laguerre au lieu des polynômes d'Hermite dans le cadre gaussien :

$$F_V^{KD}(z) = \theta_0(y) + \sum_{n=1}^{+\infty} \theta_n(y) \left\{ \frac{1}{|V|} \int_V l_n^\alpha[Y(x)] dx \right\}^{KS}$$

où les $\theta_n(y)$ sont les coefficients du développement de la fonction d'indicatrice $1_{Y(x) < y}$ en polynômes de Laguerre :

$$1_{Y(x) < y} = \sum_{n=0}^{+\infty} \theta_n(y) l_n^\alpha[Y(x)]$$

soit :

$$\theta_n(y) = \int_0^y l_n^\alpha(t) g_\alpha(t) dt = \begin{cases} G_\alpha(y), & n = 0; \\ \sqrt{\frac{\alpha}{n}} l_{n-1}^{\alpha+1}(y) g_{\alpha+1}(y), & n \geq 1. \end{cases}$$

Les K.S. s'expriment :

$$\left\{ \frac{1}{|V|} \int_V l_n^\alpha[Y(x)] dx \right\}^{KS} = \sum_{i=1}^N \lambda_{ni} l_n^\alpha[Y(x_i)] \quad n = 1, 2, \dots$$

où les poids de krigeage λ_{ni} sont déterminés par les systèmes :

$$\sum_{i=1}^N \lambda_{ni} \rho_n(x_i - x_j) = \bar{\rho}_n(x_j, V) \quad (n = 1, 2, \dots; j = 1, 2, \dots, N) \quad (2-2)$$

En ce qui concerne la variance d'estimation de $F_V(z)$, on a :

$$\sigma_e^2(y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \theta_n^2(y) \left[\bar{\rho}_n(V, V) - \sum_{i=1}^N \lambda_{ni} \bar{\rho}_n(x_i, V) \right]$$

Il est important de noter que les systèmes (2-2) sont indépendants de la coupure z . On a donc besoin pour le K.D. de $F_V(z)$ de résoudre ces systèmes une seule fois pour toutes coupures à utiliser.

La convergence de l'estimateur $F_V^{KD}(z)$ dépend essentiellement des coefficients $\theta_n(y)$ et des poids de krigeage λ_{ni} . Bien que le développement en polynômes de Laguerre d'une fonction d'indicatrice converge plutôt lentement, les poids de krigeage λ_{ni} s'annulent rapidement lorsque les $\rho_n(h)$ sont les moments de $R(h)$ n'ayant pas d'atome à la valeur 1 ($P\{R(h) = 1\} = 0$). Si $P\{R(h) = 1\} \neq 0$, il y a des moyens approximatifs possibles pour évacuer le problème de convergence. En particulier, dans le cas du modèle mosaïque, les λ_{ni} sont constants en n (≥ 1), et $F_V^{KD}(z)$ se récrit :

$$F_V^{KD}(z) = G_\alpha(y) \left(1 - \sum_{i=1}^N \lambda_i \right) + \sum_{i=1}^N \lambda_i 1_{Y(x_i) < y}$$

où les λ_i vérifient :

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i \rho(x_i - x_j) = \bar{\rho}(x_j, V) \quad (j = 1, 2, \dots, N)$$

Ceci ne pose donc pas de problème de convergence.

On vérifie aisément que la “moyenne” de $F_V^{KD}(z)$ (une pseudo-distribution) n’est pas autre chose que le K.D. de la moyenne de $Z(x)$ dans V :

$$M = \int_0^{+\infty} z dF_V^{KD}(z) = \left[\frac{1}{V} \int_V Z(x) dx \right]^{KD}$$

Tandis que la “variance” de $F_V^{KD}(z)$ s’exprime sous la forme suivante :

$$\Sigma^2 = \int_0^{+\infty} (z - M)^2 dF_V^{KD}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \psi_n \sum_{i=1}^N \lambda_{ni} I_n^\alpha[Y(x_i)]$$

avec :

$$\psi_n = \int_0^{+\infty} [\phi(y) - M]^2 I_n^\alpha(y) g_\alpha(y) dy$$

2.3. Méthodes non paramétriques

Ayant pour fin l’estimation des distributions spatiales, le K.D. est basé sur un modèle de lois bivariées. Dans le but d’éviter le recours à un modèle de distribution, certaines méthodes se basent sur les covariances et les covariances croisées d’indicatrices. Ces méthodes ont reçu l’appellation de méthodes non paramétriques (Journal, 1982, 1983 et 1984). Des commentaires sur ces deux familles de méthodes ont été données par des nombreux auteurs. Citons en particulier Matheron (1982) et Maréchal (1984). Dans ce paragraphe, nous résumons les différents types de méthodes non paramétriques, ce qui nous amènera à une comparaison numérique au paragraphe suivant.

Tout d’abord, considérons le cokrigage des indicatrices (C.K.I.). Il consiste à utiliser les indicatrices des informations à toutes les coupures possibles. En pratique, on se limite évidemment à un nombre raisonnable de coupures z_k ($k = 1, 2, \dots, K$). Posons $m_k = E[1_{Z(x) < z_k}]$, alors le C.K.I. (à moyenne connue) de $F_V(z_k)$ est de la forme :

$$F_V^{CKI}(z_k) = \sum_{i=1}^N \sum_{k'=1}^K \lambda_{ik'}(z_k) [1_{Z(x_i) < z_{k'}} - m_{k'}] + m_k$$

où les $\lambda_{ik'}(z_k)$ satisfont au système de cokrigeage :

$$\sum_{i=1}^N \sum_{k'=1}^K \lambda_{ik'}(z_k) C_{k'k''}(x_i - x_j) = \bar{C}_{k'k''}(x_j, V) \quad (k'' = 1, 2, \dots, K; j = 1, 2, \dots, N)$$

où $C_{kk'}(h) = Cov [1_{Z(x) < z_k}, 1_{Z(x+h) < z_{k'}}]$. Ainsi la mise en oeuvre de cette méthode nécessite le calcul et l'ajustement des covariances de toutes les indicatrices à utiliser et leurs covariances croisées. Ceci est particulièrement lourd au niveau du calcul. Mais surtout, la difficulté d'obtenir un modèle cohérent de toutes ces covariances rend impossible l'utilisation de cette méthode dans la plupart des situations pratiques.

Toutefois, l'ensemble des covariances (simples) et des covariances croisées des indicatrices caractérise les lois bivariées de $Z(x)$, car on a :

$$C_{kk'}(h) = P[Z(x) < z_k, Z(x+h) < z_{k'}] - m_k m_{k'}$$

On voit que l'utilisation du C.K.I. devient possible si l'on recourt à un modèle de loi bivariable, ce qui n'est pas autre chose que le K.D. En effet, les combinaisons linéaires des indicatrices $\sum_{k'=1}^K \lambda_{ik'}(z_k) 1_{Z(x_i) < z_{k'}}$ ($i = 1, 2, \dots, N$) engendrent les fonctions monovariées $f_i[Z(x_i)]$ à des constantes près. D'où l'identité entre K.D et C.K.I.

Pour simplifier le C.K.I., mais sans avoir recours à un modèle de loi bivariable Journel (1982) propose de remplacer le C.K.I. par le krigeage des indicatrices (K.I.). Dans ce cas, l'estimateur (à moyenne connue) de $F_V(z)$ s'écrit simplement :

$$F_V^{KI}(z) = \sum_{i=1}^N \lambda_i(z) [1_{Z(x_i) < z} - m_z] + m_z$$

avec les $\lambda_i(z)$ vérifiant :

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i(z) C_z(x_i - x_j) = \bar{C}_z(x_j, V) \quad (j = 1, 2, \dots, N) \quad (2-3)$$

La variance d'estimation est donnée par :

$$\sigma_e^2 = \bar{C}_z(V, V) - \sum_{i=1}^N \lambda_i(z) \bar{C}_z(x_i, V)$$

où $C_z(h) = Cov [1_{Z(x) < z}, 1_{Z(x+h) < z}] = P[Z(x) < z, Z(x+h) < z] - m_z^2$ est la covariance de $1_{Z(x) < z}$. Il est clair que la mise en oeuvre de cette méthode nécessite de connaître la covariance d'indicatrice et de résoudre le système (2-3) à chaque valeur de coupure z .

Le cas le plus simple est lorsque $Z(x)$ obéit au modèle mosaïque. Dans ce cas, il y a une proportionnalité entre les covariances des indicatrices de différentes coupures; et le K.D. et le K.I. sont identiques (cf. §2.2.). Cependant, dans la plupart des cas pratiques, on constate l'existence d'un effet de destructuration, à savoir que plus la coupure s'éloigne de la médiane, plus la covariance d'indicatrice se détériore. Examinons par exemple le cas où $Z(x)$ obéit au modèle bigamma de corrélogramme $\rho(h) = e^{-|h|}$. On a pour les corrélogrammes d'indicatrices :

$$\rho_z(h) = \frac{1}{\sigma_z^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \theta_n^2(z) \rho^n(h)$$

où $\sigma_z^2 = m_z(1 - m_z)$ est la variance de $1_{Z(x) < z}$. On observe sur les figures 2-1 que les indicatrices sont en corrélation toujours moins bonne que $Z(x)$ elle-même, et cette différence devient très importante pour les fortes et les faibles coupures. C'est la raison pour laquelle dans le modèle bigamma comme dans le modèle bigaussien, substituer le K.I. au C.K.I. (c'est-à-dire le K.D.) doit entraîner une perte d'information très substantielle (Matheron, 1982).

Une façon d'améliorer le K.I. consiste à utiliser en même temps les données d'indicatrices et les données de rang (c'est-à-dire les anamorphosées uniformes des données brutes) (Journel, 1984 et Sullivan, 1984). Il s'agit donc d'une sorte de cokrigage appelé par ces auteurs "probability kriging". Il serait sans doute plus convenable de l'appeler cokrigage d'indicatrice-rang (C.K.I.R.). Cet estimateur de $F_V(z)$ à moyenne connue s'exprime:

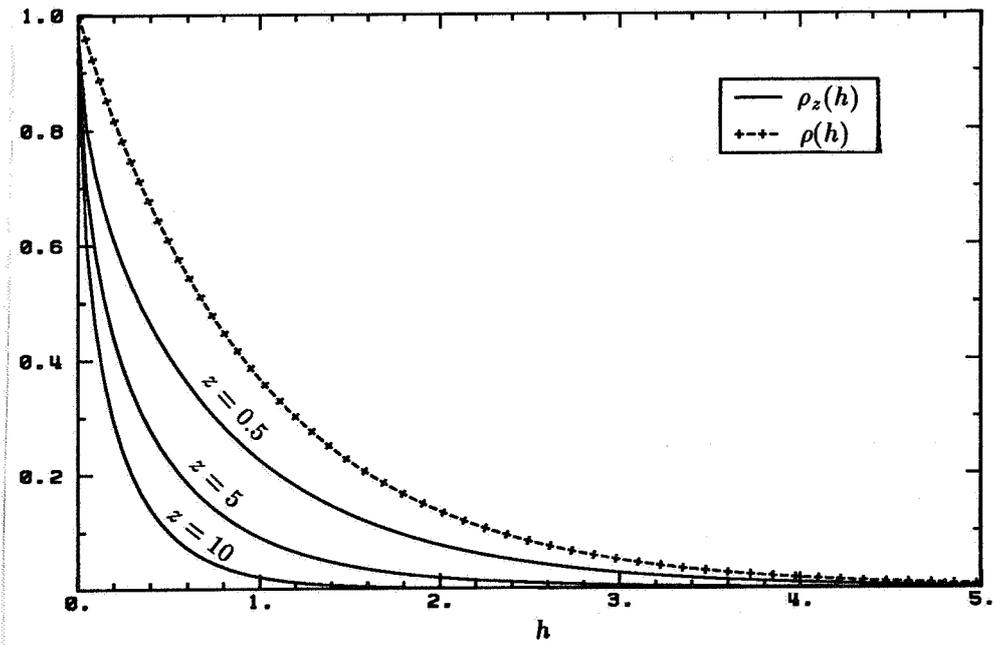
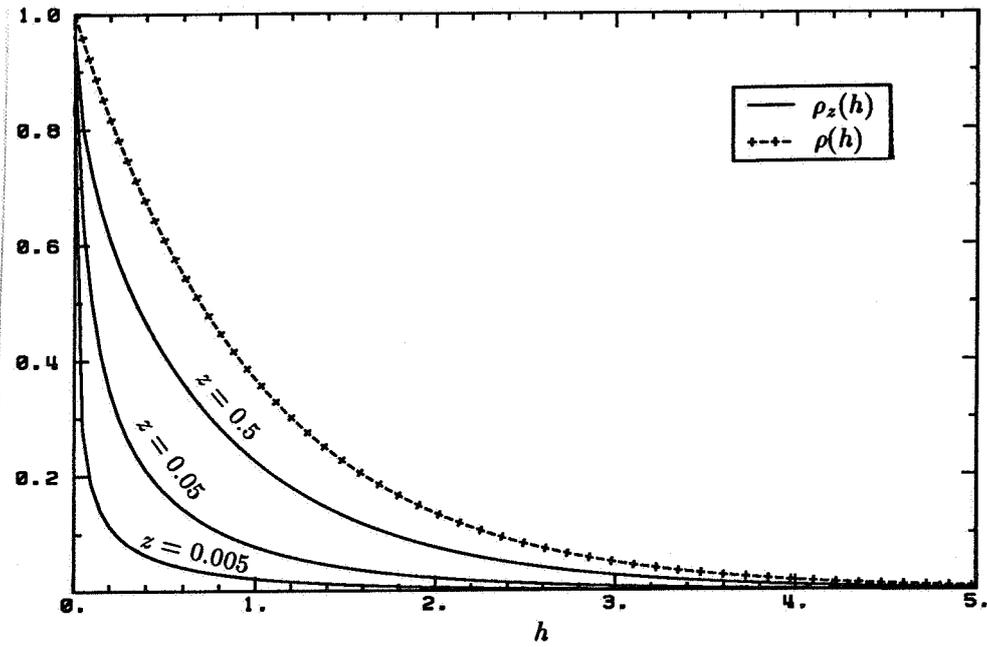
$$F_V^*(z) = m_z + \sum_{i=1}^N \lambda_i(z) [1_{Z(x_i) < z} - m_z] + \sum_{i=1}^N \nu_i(z) \left\{ F[Z(x_i)] - \frac{1}{2} \right\}$$

où F désigne la fonction de répartition de $Z(x)$, et où $\lambda_i(z)$ et $\nu_i(z)$ vérifient le système de cokrigage simple :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N \lambda_i(z) C_z(x_i - x_j) + \sum_{i=1}^N \nu_i(z) C_{uz}(x_i - x_j) = \bar{C}_z(x_j, V) \\ \sum_{i=1}^N \lambda_i(z) C_{uz}(x_j - x_i) + \sum_{i=1}^N \nu_i(z) C_u(x_i - x_j) = \bar{C}_{uz}(x_j, V) \end{cases} \quad (j = 1, 2, \dots, N) \quad (2-4)$$

La variance d'estimation s'écrit :

$$\sigma_e^2(z) = \bar{C}_z(V, V) - \sum_{i=1}^N \lambda_i(z) \bar{C}_z(x_i, V) - \sum_{i=1}^N \nu_i(z) \bar{C}_{uz}(x_i, V)$$



Figures 2-1 : Corrélogrammes d'une fonction aléatoire bigamma $Z(x)$ ($\alpha = 0.5$)
et ceux de ses indicatrices $1_{Z(x) < z}$.

Dans ce système, $C_z(h)$, $C_u(h)$ et $C_{uz}(h)$ sont respectivement la covariance de $1_{Z(x)<z}$, la covariance de $F[Z(x)]$ et la covariance croisée entre $1_{Z(x)<z}$ et $F[Z(x)]$. Sauf pour $C_u(h)$, $C_z(h)$ et $C_{uz}(h)$ doivent être calculées et ajustées pour toutes coupures z à utiliser. Notons que, dans le cas particulier où $Z(x)$ obéit à une loi mosaïque, les choses se simplifient considérablement grâce à la proportionnalité des $C_z(h)$ et aussi des $C_{uz}(h)$ pour les différentes coupures. En effet, le système (2-4) se réécrit :

$$\begin{cases} C_z(0) \sum_{i=1}^N \lambda_i(z) \rho(x_i - x_j) + C_{uz}(0) \sum_{i=1}^N \nu_i(z) \rho(x_i - x_j) = C_z(0) \bar{\rho}(x_j, V) \\ C_{uz}(0) \sum_{i=1}^N \lambda_i(z) \rho(x_j - x_i) + C_u(0) \sum_{i=1}^N \nu_i(z) \rho(x_i - x_j) = C_{uz}(0) \bar{\rho}(x_j, V) \end{cases} \quad (j = 1, 2, \dots, N)$$

D'où l'on déduit immédiatement :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \lambda_i(z) C_z(x_i - x_j) &= \bar{C}_z(x_j, V) \quad j = 1, 2, \dots, N \\ \nu_i(z) &= 0 \quad i = 1, 2, \dots, N \end{aligned}$$

ce qui montre que le cokrigage d'indicatrice-rang coïncide avec le K.I. (donc aussi avec le K.D.) dans le modèle mosaïque.

2.4. Comparaison numérique sur des données simulées

Les méthodes d'estimation que nous avons présentées dans les paragraphes précédents nécessitent des connaissances inégales sur la fonction aléatoire $Z(x)$. Le K.D. est basé sur la connaissance totale de la loi bivariable de $Z(x)$, tandis que le K.I. et le C.K.I.R. profitent seulement de la connaissance partielle de la loi bivariable de $Z(x)$. On s'attend à ce que les résultats fournis par ces méthodes soient bien différents dans les applications. C'est pour faire apparaître ces différences que nous allons confronter ces méthodes sur des données simulées. Ceci a l'avantage de satisfaire les hypothèses de départ des méthodes et de permettre la comparaison entre les estimateurs et le résultat empirique fourni par la simulation.

2.4.1. Utilisation du K.D. et du K.I. sur des données d'un processus de diffusion gamma

A la figure 2-2 est présentée une réalisation d'un processus de diffusion gamma de paramètre $\alpha = 0.5$ et sur un segment de longueur $L = 3$ (cf. Lantuéjoul (1984) pour

l'algorithme de simulation). Pour deux longueurs différentes de segment, nous avons estimé les distributions spatiales de cette réalisation en utilisant le K.D. bigamma et le K.I. Les deux échantillons utilisés dans les deux cas sont prélevés aux points x_1 et x_2 (Figure 2-3).

La figure 2-4 montre les résultats d'estimation sur tout le segment simulé (i.e. $L = 3$). Le K.D. est remarquablement proche de la distribution empirique fournie par la simulation, tandis que le K.I. donne un résultat très pauvre, bien que nous ayons utilisé les covariances d'indicatrice exactes déduites à partir de la loi bivariable. Ceci montre que la perte d'information n'est vraiment pas négligeable lorsque l'on substitue le K.I. au C.K.I. (c'est-à-dire le K.D.). Ensuite, nous avons considéré deux segments plus courts dont l'un va de 0 à 0.5 (zone pauvre) et l'autre de 2.5 à 3 (zone riche). Les conclusions concernant les résultats d'estimation par K.D. et K.I. sont similaires aux précédents (Figures 2-5, 2-6).

Notons aussi en pratique que, lorsque beaucoup d'échantillons sont disponibles dans le voisinage de la zone à estimer, et lorsque leurs poids de krigeage sont assez proches, le K.D. et le K.I. donnent des résultats voisins. Par contre, s'il y a très peu d'échantillons, ou bien si l'un ou deux échantillons ont des poids nettement plus importants que les autres (par exemple, dans l'estimation des réserves récupérables, l'échantillon au centre du panneau à estimer possède souvent un poids très élevé), le K.I. est fortement déconseillé.

2.4.2. Utilisation du C.K.I.R. pour les mêmes données que précédemment

Sur les mêmes données que précédemment, nous avons testé le C.K.I.R. Les figures 2-7, 2-8 et 2-9 montrent que le C.K.I.R. a amélioré l'estimation par rapport au K.I. Notons toutefois que ces résultats ont des comportements assez éloignés des distributions empiriques.

2.4.3. Utilisation du K.D. bigamma et du K.D. bigaussien sur données de processus de diffusion gamma

Au §1.1.3., nous avons indiqué que l'anamorphose gaussienne ne permet pas de transformer un jeu de données bigamma en un jeu de données bigaussiennes. Si l'on

utilise le K.D. bigaussien pour estimer la distribution d'un processus de diffusion gamma, on doit s'attendre à de mauvais résultats. Les figures 2-10 et 2-11 montrent effectivement que le K.D. bigaussien est catastrophique dans le cas d'une petite valeur du paramètre α (les caractéristiques des jeux de données aux figures 2-10(a) et 2-11(a) sont $\alpha = 0.1$ et $\sigma/m = 3.16$). Par contre, la différence entre les K.D. bigaussien et bigamma devient négligeable lorsque α n'est pas trop petit (Figure 2-12 avec $\alpha = 0.5$, $\sigma/m = 1.41$).

De ces exemples et de plusieurs autres, nous suggérons d'utiliser le modèle gaussien pour les données pas trop dissymétriques ($\sigma/m < 2$). Le modèle gamma paraît mieux adapté si σ/m est supérieur à 2. Ceci est aussi confirmé par les jeux de données venant de deux gisements d'uranium précédemment étudiés. Le premier, avec $\sigma/m = 1.9$ (gisement de Bertholène), peut être décrit par un modèle gaussien, tandis que pour le deuxième, avec $\sigma/m = 3.7$ (gisement de Luceda), un modèle gamma est meilleur (cf. §1.6. et §1.7.).

Notons par ailleurs que le modèle gaussien peut couvrir une très large gamme d'applications vu qu'il s'adapte aux phénomènes de coefficient de variation pouvant aller jusqu'à 2.

2.4.4. Sur des données de processus mosaïque gamma

Finalement, comme nous l'avons indiqué, le K.D., le K.I. et le C.K.I.R. coïncident dans le modèle mosaïque. La figure 2-14 présente une réalisation d'un processus mosaïque gamma de paramètre $\alpha = 0.5$. Les figures 2-15 et 2-16 montrent deux exemples d'estimation de distributions spatiales sur deux segments différents de cette simulation. Il apparaît que les résultats d'estimation se comportent de façon analogue par rapport aux distributions empiriques.

2.4.5. Remarques complémentaires

Le K.I. et le C.K.I.R. sont par définition des estimateurs discrets. On peut envisager en pratique de lisser ces estimateurs pour rendre les résultats plus conformes à la réalité. Par contre, si le phénomène à étudier a en quelque sorte le caractère mosaïque, ce lissage n'est pas nécessaire. Ceci suggère donc le besoin d'un modèle sous-jacent de loi bivariable pour savoir s'il faut ou pas faire un lissage. D'ailleurs, ces méthodes de type d'indicatrice nécessitent de calculer et modéliser les covariances des indicatrices (plus les covariances

croisées des indicatrices-rang et la covariance de rang pour le C.K.I.R.). Ceci n'est pas difficile dans le cas mosaïque. Par contre, lorsqu'un effet de destructuration se présente, il est souvent difficile d'obtenir une modélisation cohérente entre les différentes coupures sans recourir à un modèle de loi bivariable. Or cette cohérence est nécessaire pour que la distribution spatiale estimée respecte au mieux les relations d'ordre à savoir qu'elle doit être non-décroissante et entre 0 et 1.

Les comparaisons entre le K.D. bigaussien et le K.D. bigamma ont montré aussi l'importance de la modélisation de loi bivariable. Une modélisation incorrecte peut engendrer une estimation fautive. Différents modèles sont donc nécessaires pour décrire des phénomènes de natures différentes. D'ailleurs, nous allons voir dans ce qui suit que la modélisation des loi bivariées symétriques ponctuelles peut nous orienter vers le choix d'un modèle de changement de support. Un tel modèle est nécessaire pour l'estimation des distributions spatiales au support de bloc, et en particulier pour l'estimation des réserves récupérables.

Mentionnons aussi que l'estimation d'une distribution spatiale locale est beaucoup plus délicate que celle d'une moyenne locale. En général, une modélisation correcte de la loi bivariable, bien que nécessaire, n'est pas suffisante pour que la distribution spatiale estimée soit conforme à la réalité. Il faut aussi que les échantillons voisins soient "représentatifs" de la régionalisation locale, en ce sens qu'ils permettent au moins une estimation correcte de la moyenne locale. Les exemples précédents entre autres ont montré que le K.D. fournit une bonne estimation lorsque le modèle de loi bivariable est bon et la moyenne locale est bien estimée par le K.D. (identique au K.S. pour ces exemples où il n'y a pas d'anamorphose). Par contre, si les échantillons ne sont pas représentatifs, une erreur radicale est inévitable, comme le montre l'exemple de la figure 2-16 où la distribution spatiale estimée par le K.D. bigamma est fortement biaisée. Dans cet exemple, la variable d'étude est la réalisation d'un processus de diffusion gamma sur le segment $[0.5, 1.]$ de la figure 2-2, et les échantillons pris se situent aux deux extrémités du segment. La moyenne du segment estimée par le K.D. bigamma vaut 0.156, ce qui est fort différent de la moyenne empirique (0.394). Par ailleurs, on constate que le K.I. et le C.K.I.R. ont donné aussi des résultats faux.

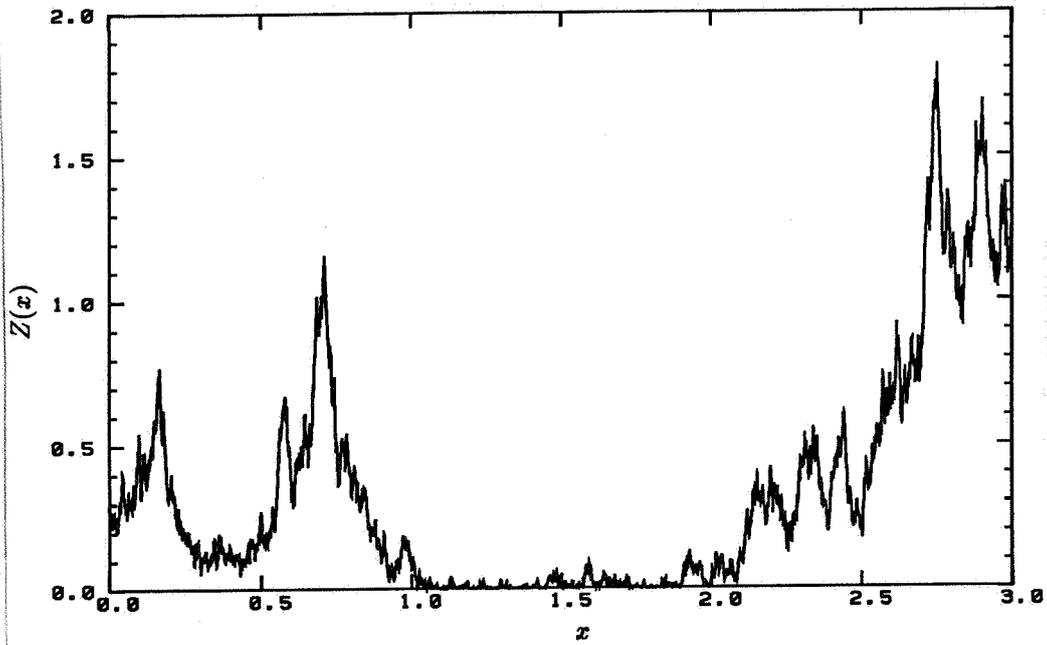


Figure 2-2 : Simulation d'un processus de diffusion gamma avec $\alpha = 0.5$ et $\rho(h) = e^{-|h|}$.

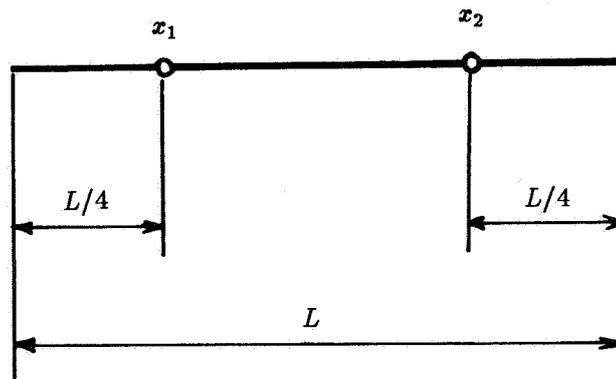


Figure 2-3 : Configuration des échantillons pour tous les exemples (sauf le dernier) présentés dans ce chapitre.

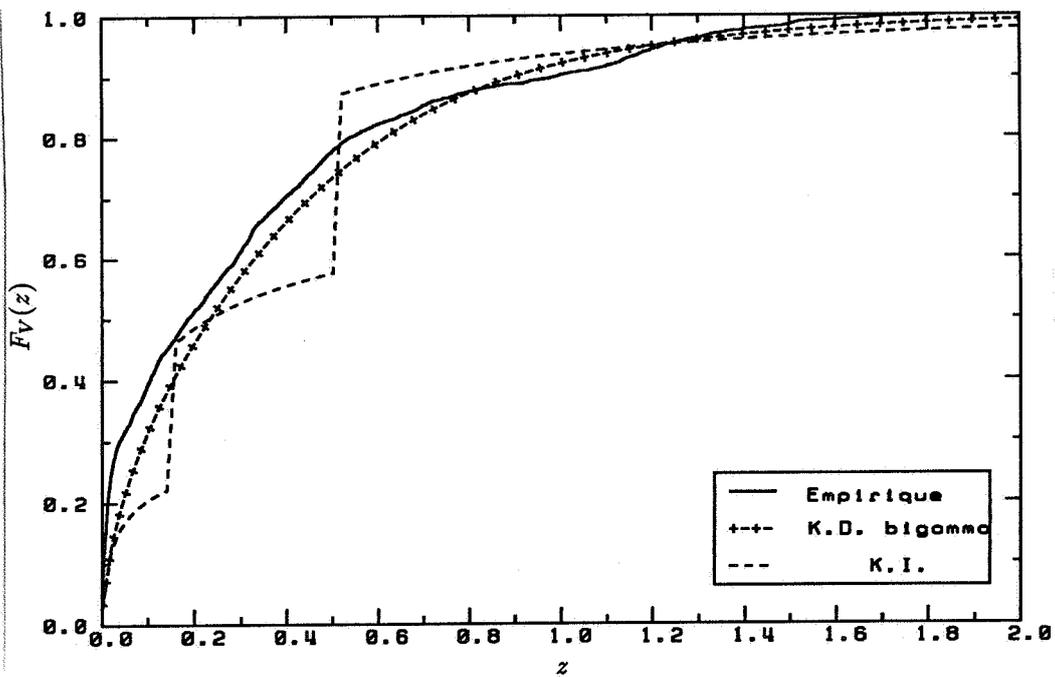


Figure 2-4 : Distributions spatiales estimées et celle empirique des données présentées à la figure 2-2 pour tout le segment $[0, 3]$.

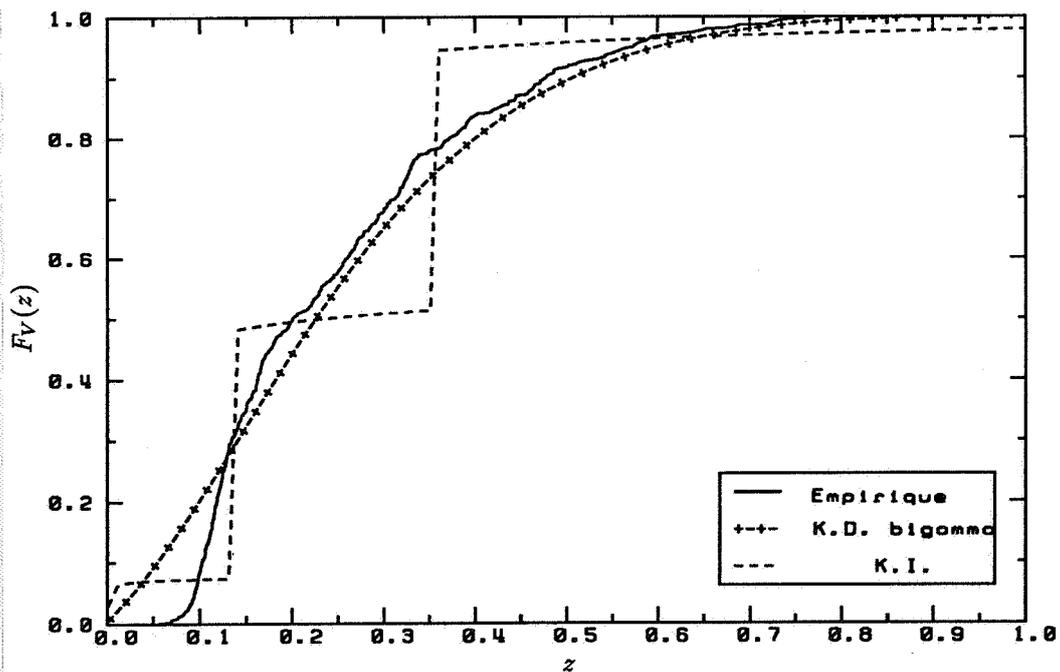


Figure 2-5 : Distributions spatiales estimées et celle empirique des données présentées à la figure 2-2 pour le segment $[0, 0.5]$ (une zone pauvre).

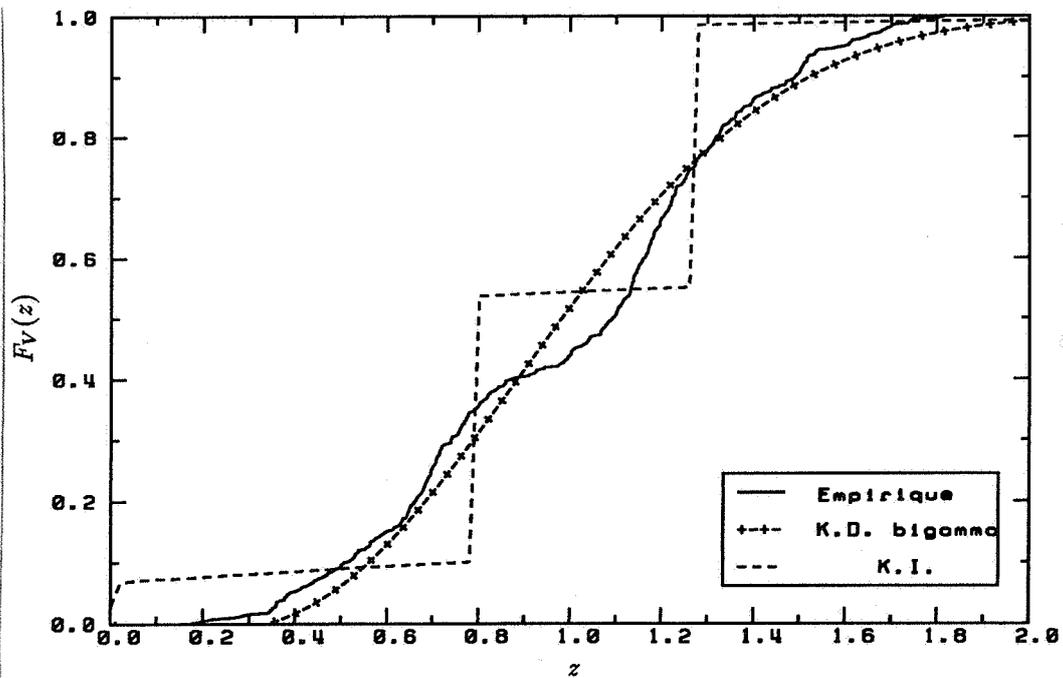


Figure 2-6 : Distributions spatiales estimées et celle empirique des données présentées à la figure 2-2 pour le segment [2.5, 3] (une zone riche).

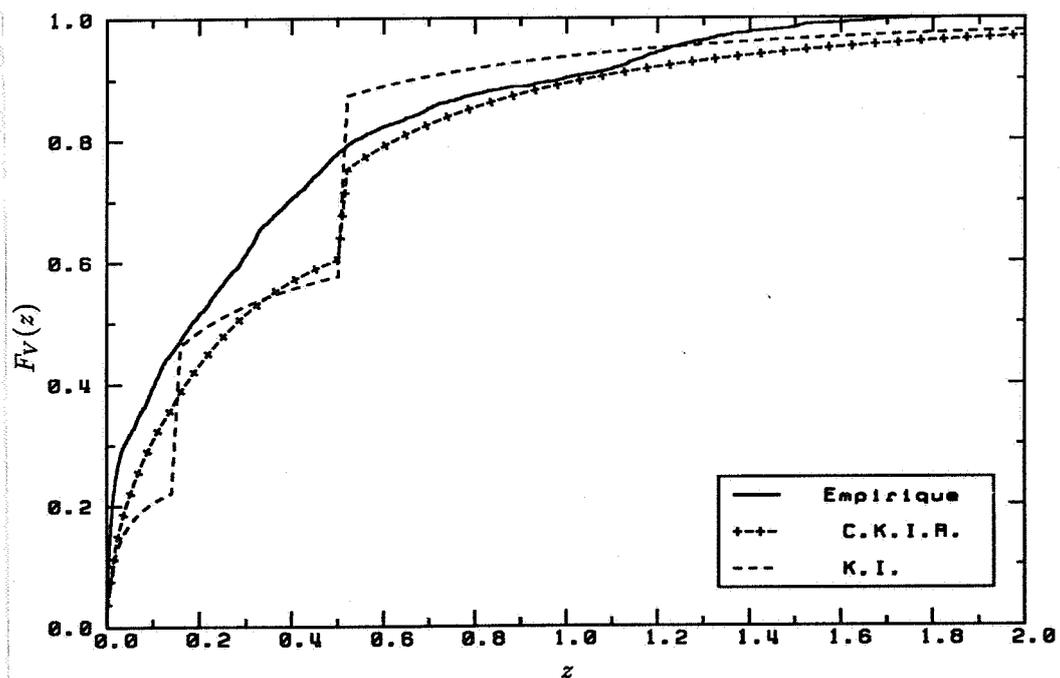


Figure 2-7 : Distributions spatiales estimées et celle empirique des données présentées à la figure 2-2 pour tout le segment [0, 3].

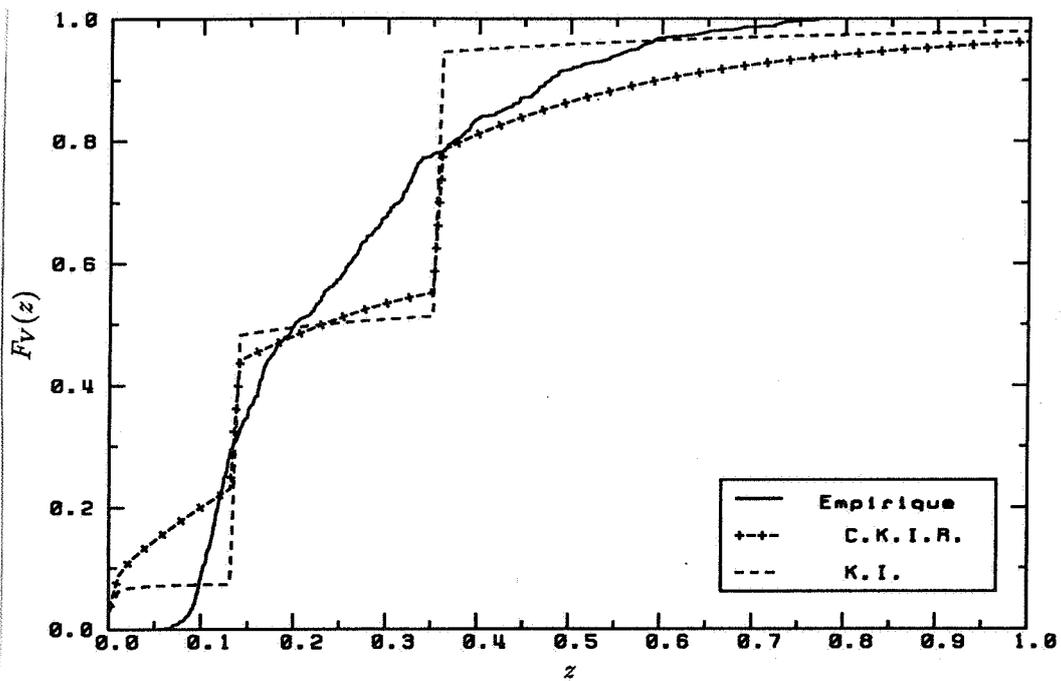


Figure 2-8 : Distributions spatiales estimées et celle empirique des données présentées à la figure 2-2 pour le segment [0, 0.5] (une zone pauvre).

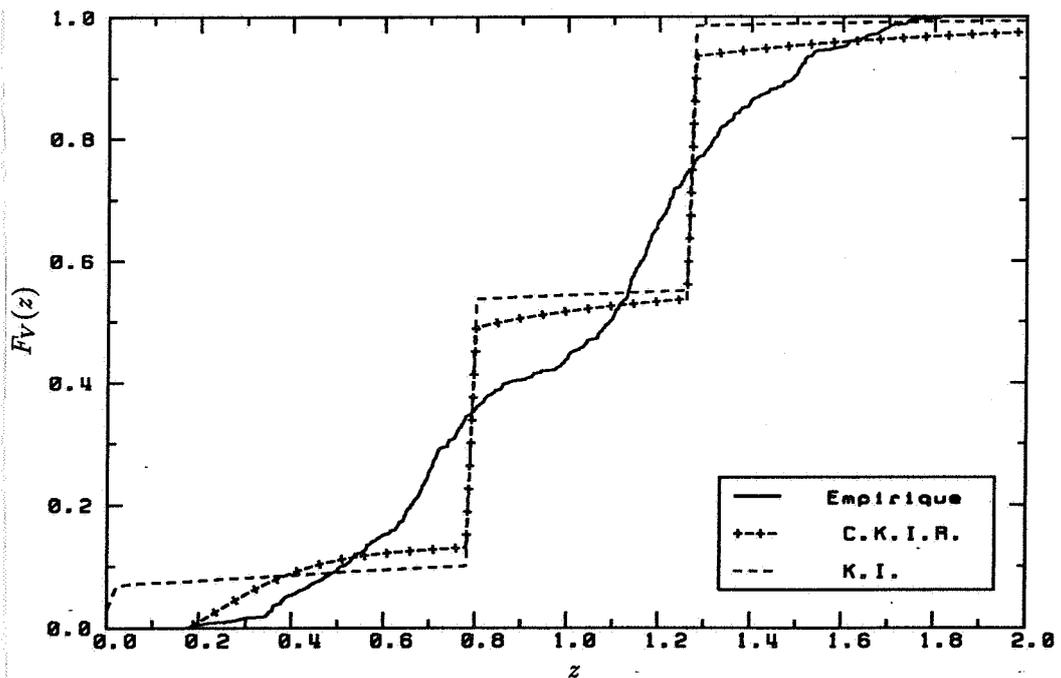


Figure 2-9 : Distributions spatiales estimées et celle empirique des données présentées à la figure 2-2 pour le segment [2.5, 3] (une zone riche).

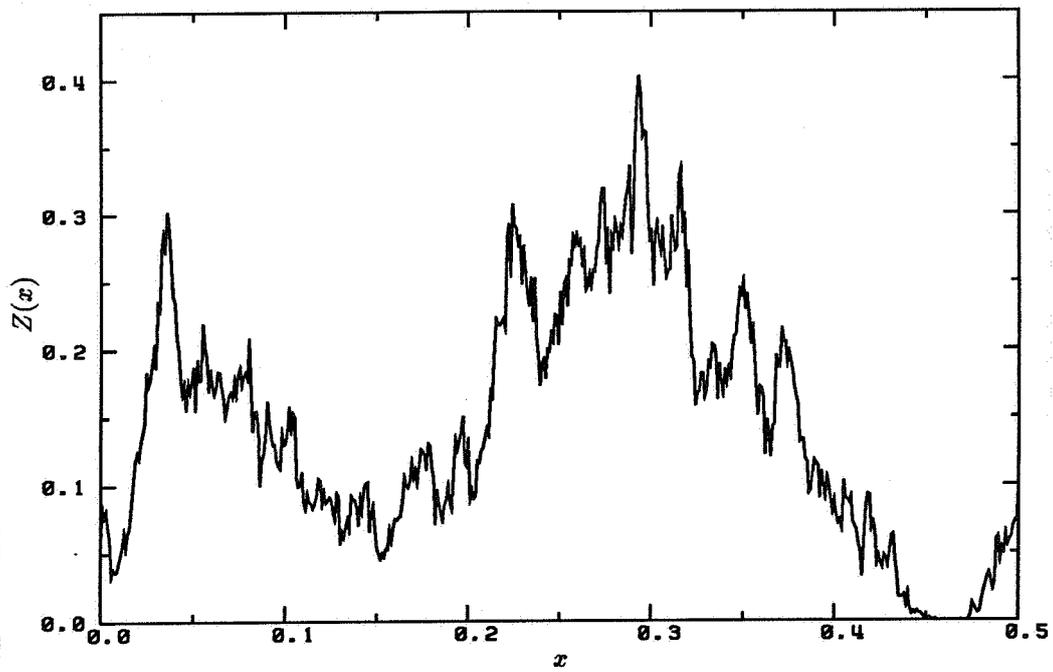


Figure 2-10(a) : Simulation d'un processus de diffusion gamma avec $\alpha = 0.1$ ($\sigma/m = 3.16$) et $\rho(h) = e^{-|h|}$.

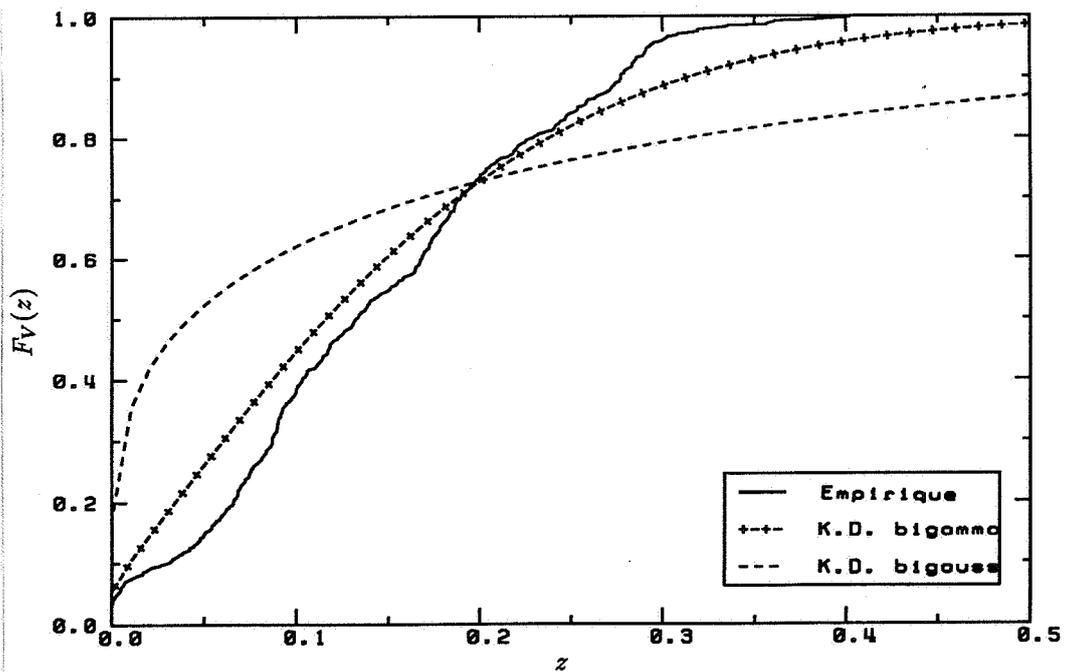


Figure 2-10(b) : Distributions spatiales estimées et celle empirique des données présentées dans la figure 2-11(a).

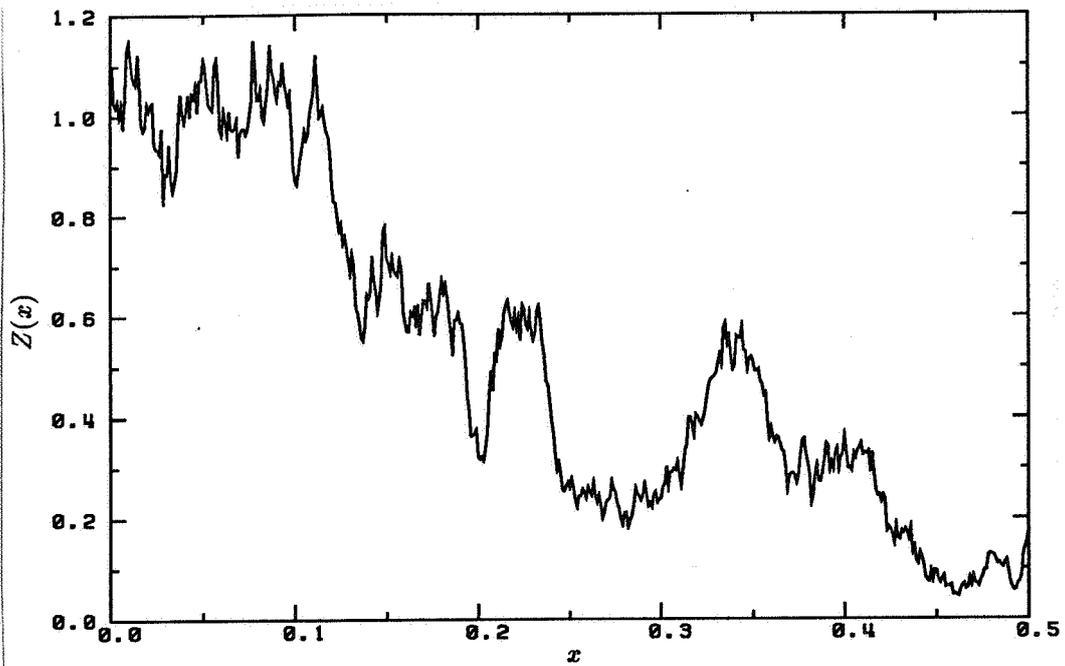


Figure 2-11(a) : Une autre simulation d'un processus de diffusion gamma avec $\alpha = 0.1$ ($\sigma/m = 3.16$) et $\rho(h) = e^{-|h|}$.

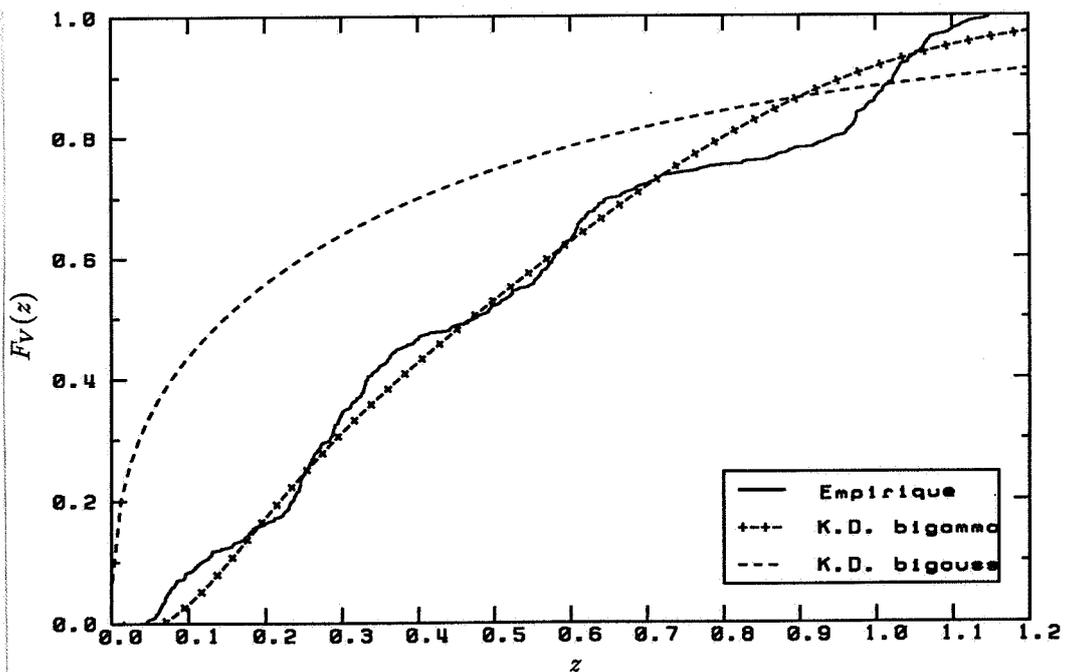


Figure 2-11(b) : Distributions spatiales estimées et celle empirique des données présentées à la figure 2-11(a).

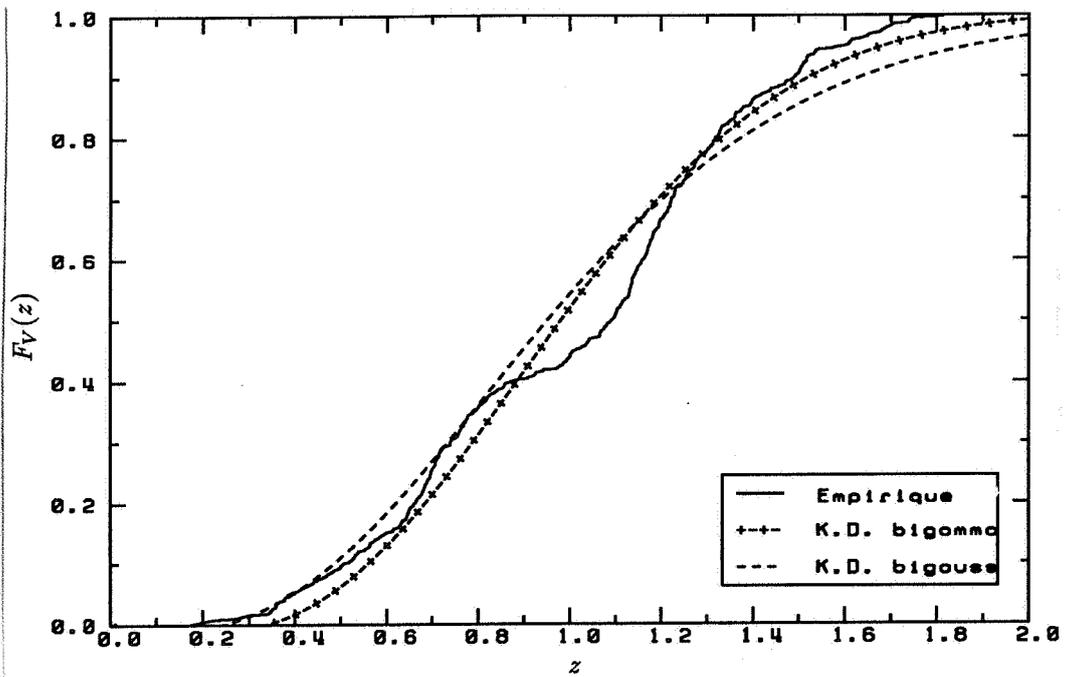


Figure 2-12 : Distributions spatiales estimées et celle empirique des données présentées à la figure 2-2 pour le segment [2.5, 3] ($\alpha = 0.5$, $\sigma/m = 1.41$).

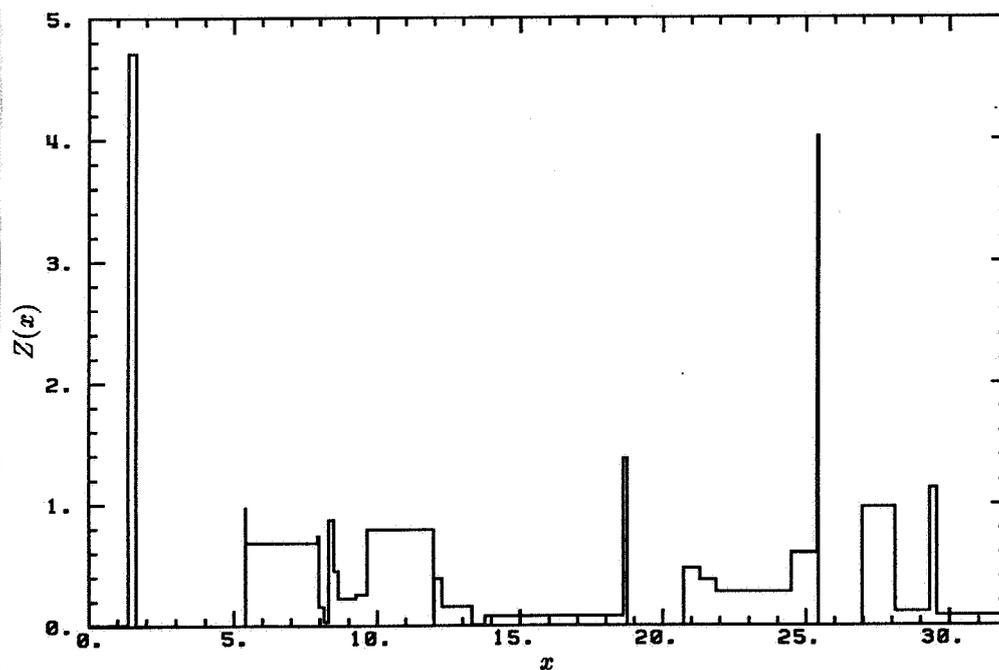


Figure 2-13 : Simulation d'un processus mosaïque gamma avec $\alpha = 0.5$ et $\rho(h) = e^{-|h|}$.

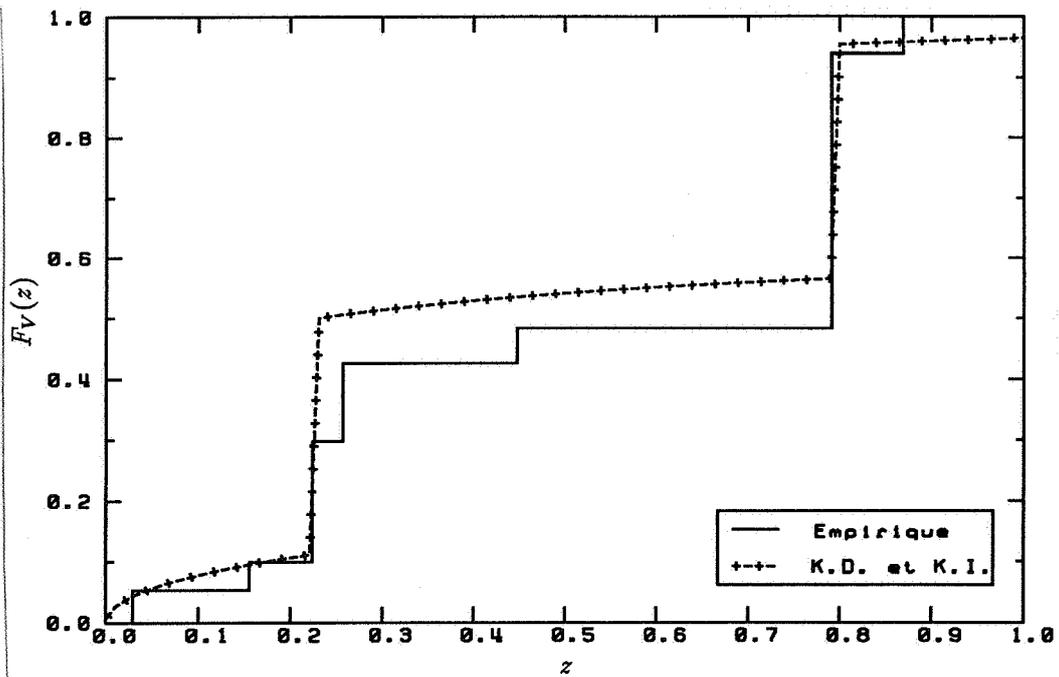


Figure 2-14 : Distributions spatiales estimées et celle empirique des données présentées à la figure 2-13 pour le segment [8, 11].

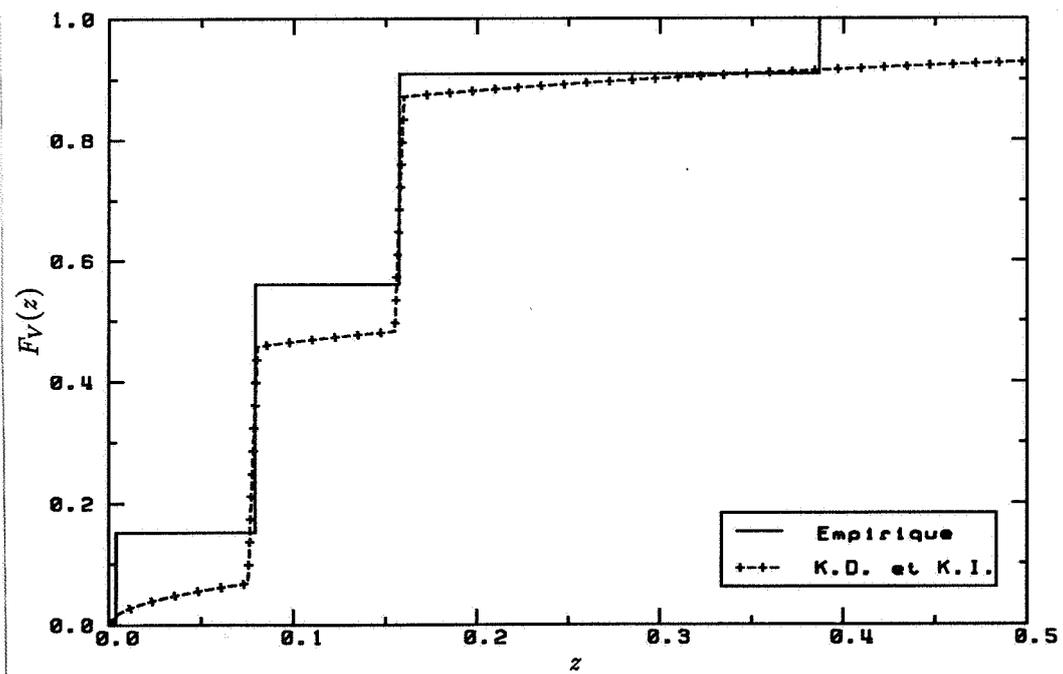


Figure 2-15 : Distributions spatiales estimées et celle empirique des données présentées à la figure 2-13 pour le segment [12, 15].

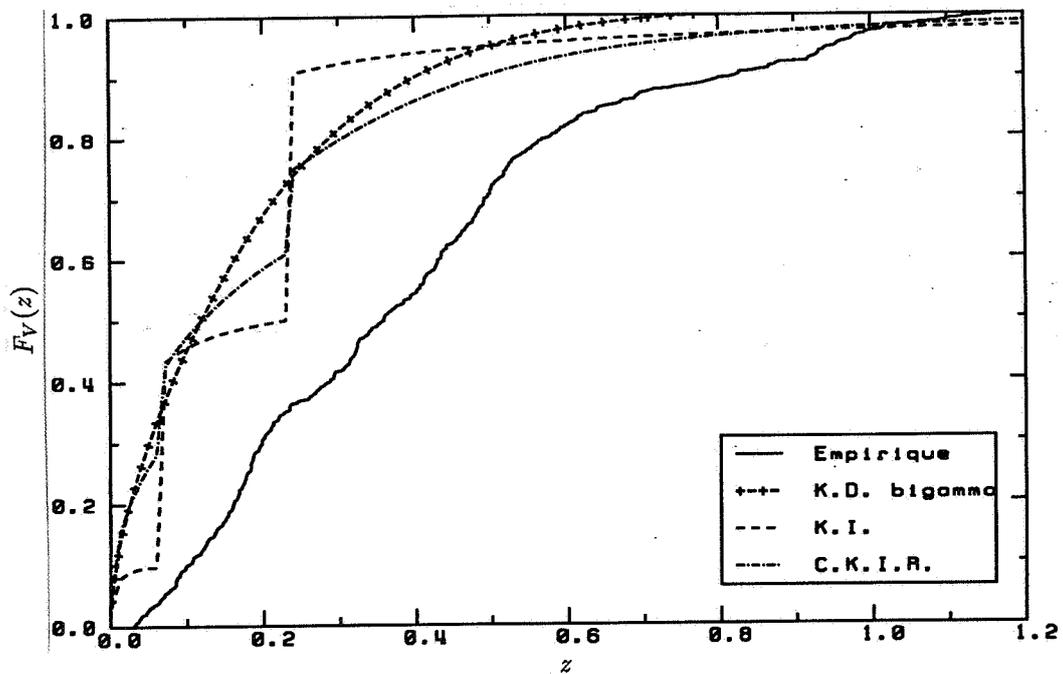


Figure 2-16 : Distributions spatiales estimées et celle empirique des données présentées à la figure 2-2 pour le segment [0.5, 1.].

CHPITRE 3

MODELISATION D'EFFETS DE SUPPORT ET D'INFORMATION

3.1. Concepts et exemples

3.1.1. Effet de support

Soit $z(x)$ une variable régionalisée, on s'intéresse à sa régularisée sur un support v :

$$z_v(x) = \frac{1}{|v|} \int_{v_x} z(t) dt$$

où v_x désigne le support v localisé au point x . En particulier, lorsque $z(x)$ représente la teneur ponctuelle (ou le plus souvent sur le support d'échantillon) dans un gisement (noté D) alors $z_v(x)$ représente la teneur moyenne sur le support de bloc v .

En donnant une teneur de coupure z , on définit le tonnage de minerai $t(z)$ et la quantité de métal $q(z)$ au support ponctuel :

$$t(z) = \frac{1}{|D|} \int_D 1_{z(x) \geq z} dx$$

$$q(z) = \frac{1}{|D|} \int_D z(x) 1_{z(x) \geq z} dx$$

Pour la régularisée $z_v(x)$ ($v \ll D$), si l'on néglige l'effet de bordure, $z_v(x)$ a la même moyenne que $z(x)$, et on peut définir de même les relations tonnage-teneur :

$$t_v(z) = \frac{1}{|D|} \int_D 1_{z_v(x) \geq z} dx$$

$$q_v(z) = \frac{1}{|D|} \int_D z_v(x) 1_{z_v(x) \geq z} dx$$

L'expérience montre que la distribution des teneurs de blocs est toujours moins dispersée et présente moins de valeurs extrêmes que celle des teneurs d'échantillons (support en général beaucoup plus petit que celui de bloc). Par conséquent, un tonnage de minerai sélectionné au support de bloc contient moins de métal qu'un même tonnage sélectionné cette fois-ci au support d'échantillon. Ce phénomène, fondamental en géostatistique, est connu sous le nom : "effet de support". Ceci mérite dès maintenant une illustration à l'aide d'un exemple concret, bien que nous y reviendrons plus tard.

Considérons la variable régionalisée unidimensionnelle $z(x)$ présentée à la figure 3-1. Il s'agit une réalisation d'un processus de diffusion gamma de paramètre $\alpha = 0.5$ sur un segment de longueur $L = 1000$. La covariance est une exponentielle $C(h) = \alpha e^{-|h|}$. Imaginant que $z(x)$ représente la teneur en un certain métal, on peut alors parler de tonnage de minerai et de quantité de métal. Dans la figure 3-2 est présentée la courbe de quantité de métal en fonction du tonnage de minerai (que l'on appelle aussi courbe de sélectivité) de $z(x)$ et celle de $z_v(x)$ où v est ici un segment de longueur $l = 2$. La réduction de variance de dispersion de support ponctuel à celui de segment l vaut 43.2% calculé selon la formule :

$$1 - \frac{D^2(l/L)}{D^2(\cdot/L)} = 1 - \frac{2}{l^2} (e^{-l} - 1 + l)$$

Ces courbes montrent que, pour un tonnage de minerai fixé, on récupère une quantité de métal considérablement moins élevée au support l que ce que l'on pourrait obtenir si l'on sélectionnait au support ponctuel. En général, cette différence est d'autant plus grande que l augmente.

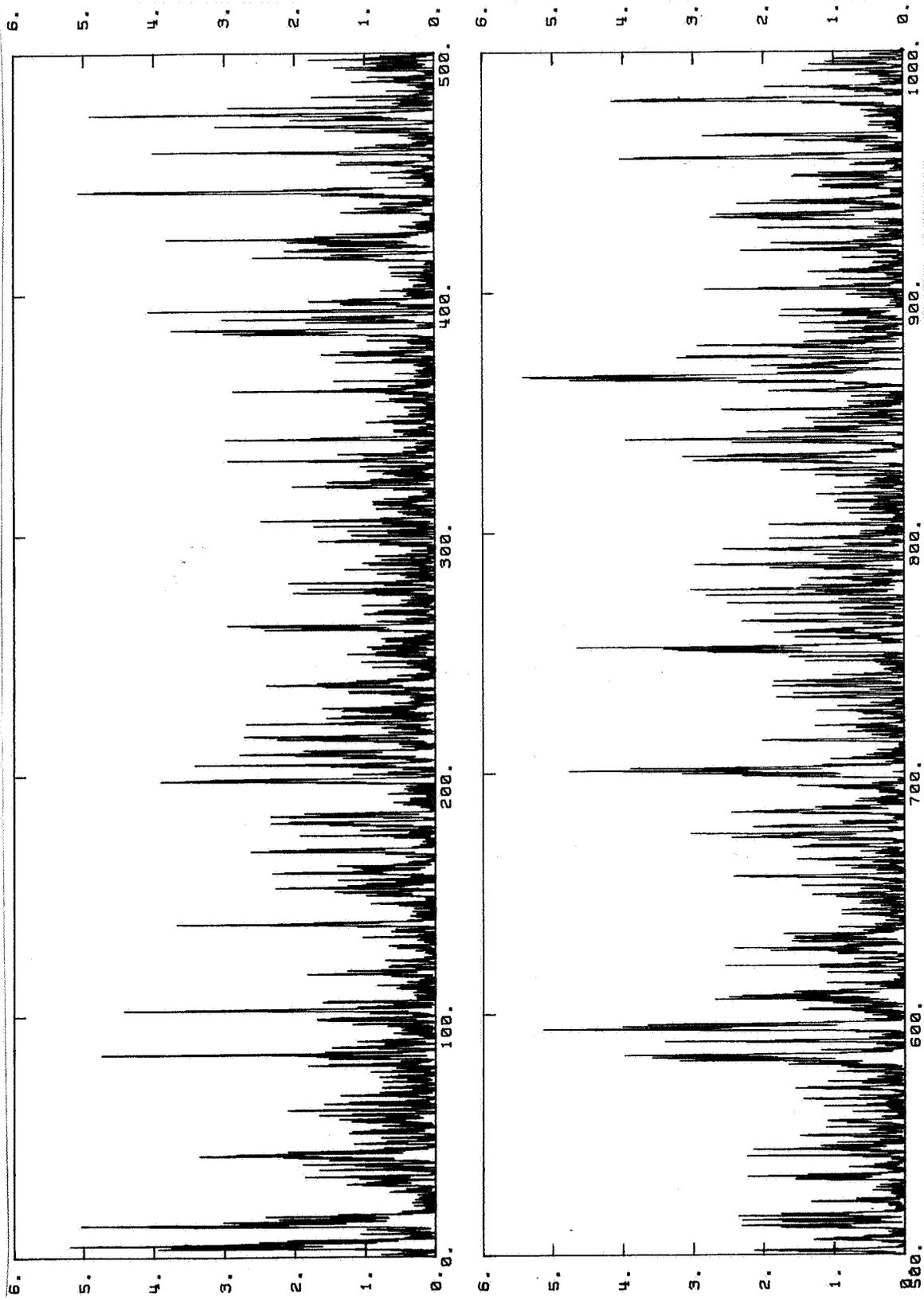


Figure 3-1 : Réalisation d'un processus de diffusion gamma avec $\alpha = 0.5$, $\rho(h) = e^{-|h|}$.

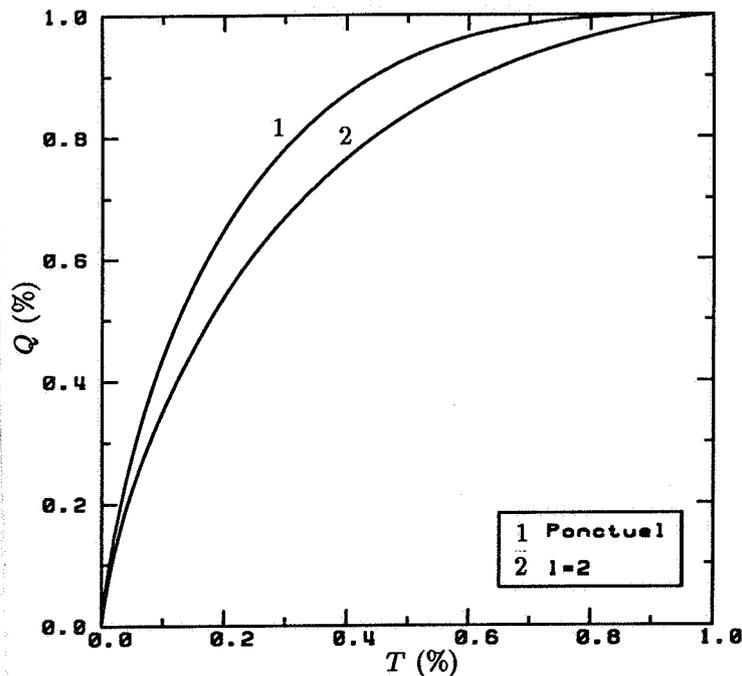


Figure 3-2 : Courbes de sélectivité - exemple d'effet de support.

3.1.2. Effet d'information

Au moment de l'exploitation minière, on ne connaît pas les teneurs réelles des blocs, la sélection est effectuée obligatoirement d'après leurs teneurs estimées. Bien que l'estimateur dont on dispose au moment de la sélection (appelé estimateur ultime) est beaucoup plus précis que celui que l'on peut former avec les informations disponibles à l'exploration, l'écart qui existe entre les teneurs estimées et réelles entraîne inévitablement des erreurs de sélection. Les blocs dont la teneur réelle est au dessous de la coupure, mais dont la teneur estimée est au dessus, seront exploités, tandis que les blocs à teneur réelle riche, mais estimés pauvres, seront considérés comme stériles. Par conséquent, le même tonnage de minerai sélectionné selon l'estimateur ultime contient toujours moins de métal que celui que l'on pourrait sélectionner si l'on connaissait les teneurs réelles. Ce phénomène, lié à l'état d'informations et aussi à la précision de l'estimateur que l'on forme avec ces informations, est donc appelé "effet d'information".

En tenant compte de cet effet, le tonnage de minerai et la quantité de métal

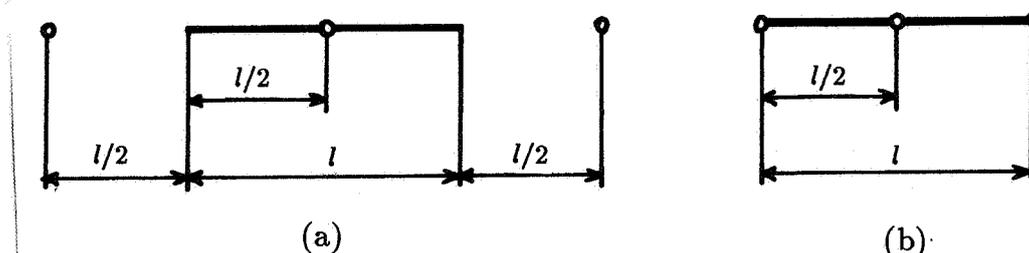
s'expriment :

$$t_v^*(z) = \frac{1}{|D|} \int_D 1_{z_v^*(x) \geq z} dx$$

$$q_v^*(z) = \frac{1}{|D|} \int_D z_v(x) 1_{z_v^*(x) \geq z} dx$$

où $z_v^*(x)$ désigne l'estimateur ultime de $z_v(x)$. Si l'on dit que la sélection d'après les teneurs réelles est "directe" ou "idéale", alors la sélection d'après leurs estimations est dite "indirecte" ou "effective".

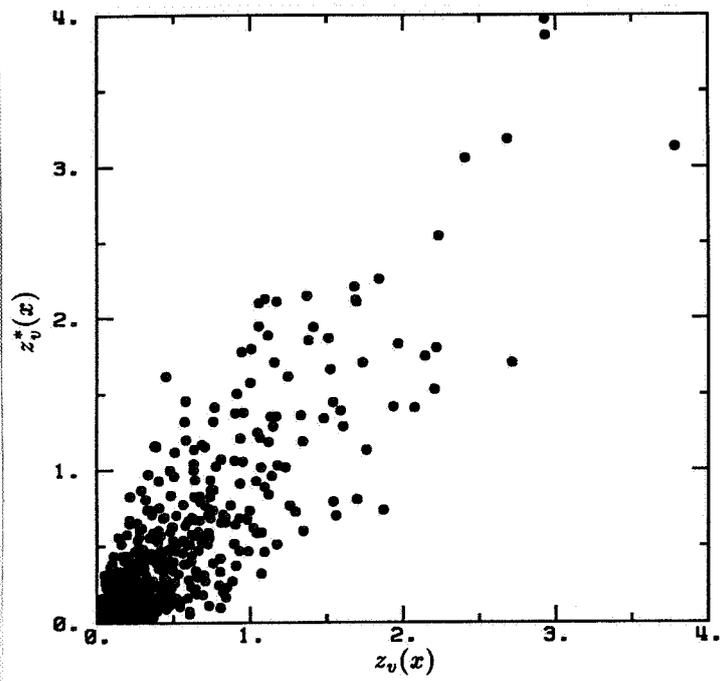
Reprenons l'exemple des données dans la figure 3-1, et supposons que la sélection n'est pas d'après la teneur vraie $z_v(x)$ mais d'après sa valeur estimée $z_v^*(x)$ (v est un segment de longueur $l = 2$). Considérons d'abord que $z_v^*(x)$ est le krigeage ordinaire avec trois informations prélevées selon la configuration de la figure 3-3(a).



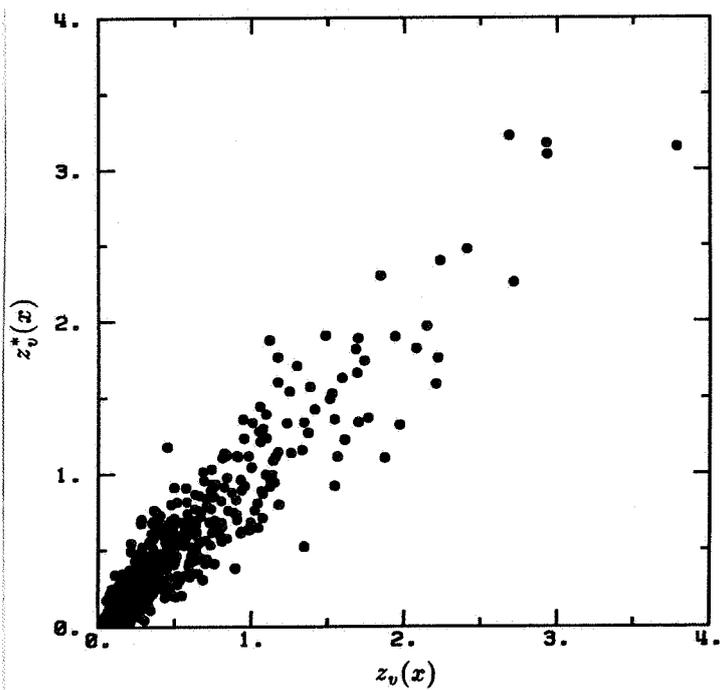
Figures 3-3 : Configurations des informations.

Après avoir obtenu les estimations pour chaque segment, on peut établir le nuage de corrélation entre $z_v^*(x)$ et $z_v(x)$ (Figure 3-4(a)). Ayant fixé une teneur de coupure z , il est remarquable que la sélection d'après les teneurs estimées a abandonné une partie des segments de teneur réellement supérieure à z et retenu une partie de ceux qui ont une teneur inférieure à z . Ainsi du métal est perdu lorsque l'on sélectionne d'après les teneurs estimées (cf. Figure 3-5).

Considérons maintenant que $z_v^*(x)$ est le krigeage ordinaire avec toujours trois informations, mais prélevées d'après la configuration de la figure 3-3(b). L'estimation devient cette fois plus précise, comme le montre le nuage de corrélation plus serré entre $z_v^*(x)$ et $z_v(x)$ (Figure 3-4(b)). Par conséquent, la courbe de sélectivité effective est plus proche de celle idéale (Figure 3-5).



(a)



(b)

Figures 3-4 : Nuages de corrélation entre $z_v^*(x)$ et $z_v(x)$.

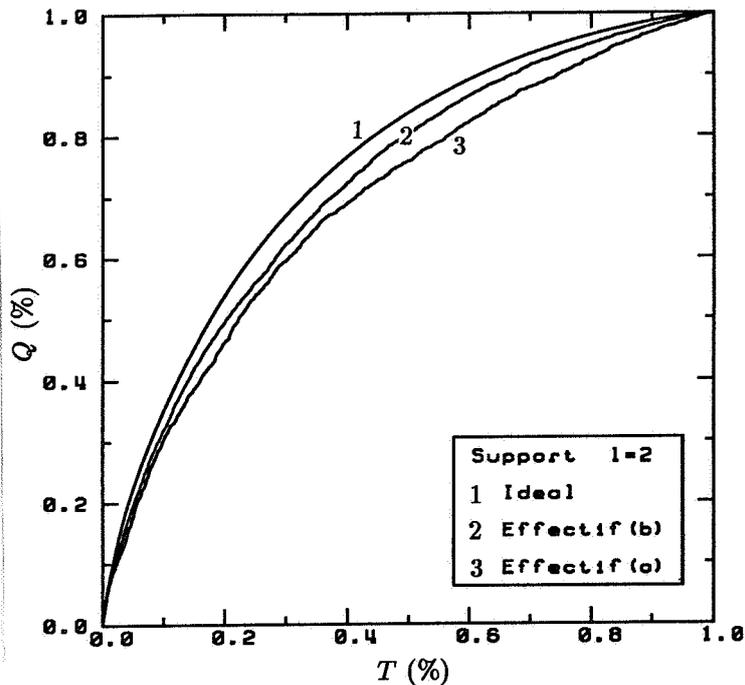


Figure 3-5 : Courbes de sélectivité - exemples d'effet d'information.

3.2. Modélisation

3.2.1. Passage à la modélisation

Les effets de support et d'information sont liés étroitement à la définition des réserves récupérables, et sont particulièrement intenses pour les gisements de métaux précieux (e.g. uranium, or etc.). Cependant, au moment de la planification d'exploitation où l'on a besoin de connaître les réserves récupérables (globales ou locales), on ne dispose ni des teneurs vraies des blocs, ni même des valeurs de leur estimateur (ultime). Il faut donc passer par un modèle qui tient compte de ces effets pour estimer les réserves récupérables.

La géostatistique interprète la variable régionalisée $z(x)$ à laquelle on s'intéresse comme une réalisation d'une fonction aléatoire $Z(x)$, et de même $z_v(x)$ est une réalisation de $Z_v(x)$:

$$Z_v(x) = \frac{1}{|v|} \int_{v_x} Z(t) dt$$

Notons aussi $Z_v^*(x)$ pour l'estimateur ultime de $Z_v(x)$. Supposons maintenant que $Z(x)$ est une fonction aléatoire stationnaire, alors il en est de même pour $Z_v(x)$ et $Z_v^*(x)$ (notées plus souvent Z_v et Z_v^* dans ce qui suit). Les fonctions de tonnage-teneur se récrivent :

- Cas ponctuel :

$$T(z) = E [1_{Z(x) \geq z}]$$

$$Q(z) = E [Z(x) 1_{Z(x) \geq z}]$$

- Cas de sélection directe au support de bloc :

$$T_v(z) = E [1_{Z_v \geq z}]$$

$$Q_v(z) = E [Z_v 1_{Z_v \geq z}]$$

- Cas de sélection indirecte au support de bloc :

$$T_v^*(z) = E [1_{Z_v^* \geq z}]$$

$$Q_v^*(z) = E [Z_v 1_{Z_v^* \geq z}]$$

On voit ainsi que pour évaluer ces fonctions de tonnage-teneur, il faut connaître les lois monovariées de $Z(x)$, Z_v et Z_v^* et la loi bivariable de (Z_v, Z_v^*) . Cela revient à modéliser les distributions spatiales des variables régionalisées $z(x)$, $z_v(x)$, $z_v^*(x)$ et celle du couple $(z_v(x), z_v^*(x))$. Nous avons discuté au premier chapitre la modélisation de la loi monovariée et surtout de la loi bivariable de $Z(x)$. C'est à partir de là que nous allons établir les modèles de lois de Z_v , Z_v^* et (Z_v, Z_v^*) .

3.2.2. Modèle de loi de Z_v

A partir des données au support ponctuel $(z(x_1), z(x_2), \dots, z(x_N))$, on considère qu'il est possible d'évaluer la moyenne et la variance de Z_v :

$$m = E(Z_v) = E[Z(x)]$$

$$\sigma_v^2 = Var(Z_v) = \frac{1}{|v|^2} \int_v \int_v C(x-y) dx dy$$

où $C(x-y)$ est la covariance de $Z(x)$. Dans la plupart des cas, ce sont les deux seuls paramètres dont on dispose concernant la loi de Z_v . D'autre part, l'effet de support est caractérisé par la relation de Cartier (Matheron, 1981 et 1984) :

$$Z_v = E[Z(\underline{x}) | Z_v] \tag{3-1}$$

où \underline{x} désigne un point aléatoire uniforme dans v . Ainsi le problème d'évaluation de la loi Z_v se ramène à celui de l'espérance conditionnelle de $Z(\underline{x})$ à Z_v fixé, ce qui revient à modéliser la loi bivariable de $(Z(\underline{x}), Z_v)$.

Dans le cadre du modèle gamma, on commence par anamorphoser $Z(\underline{x})$ (qui admet la même loi que $Z(x)$ sous l'hypothèse de stationnarité) et Z_v en deux variables aléatoires $Y(\underline{x})$ et Y_v à loi gamma :

$$\begin{aligned} Z(\underline{x}) &= \phi_\alpha[Y(\underline{x})] & Y(\underline{x}) &\sim g_\alpha \\ Z_v &= \phi_{\alpha'}[Y_v] & Y_v &\sim g_{\alpha'} \end{aligned}$$

Le choix du paramètre α pour la détermination de la fonction d'anamorphose ponctuelle ϕ_α a fait l'objet d'étude du chapitre 1. Pour la fonction d'anamorphose de bloc, il semble tout d'abord naturel de choisir α' supérieur à α , vu que la loi de Z_v est moins dispersée que celle de $Z(\underline{x})$. Sous cette contrainte, on introduit une hypothèse sur la loi de $(Y(\underline{x}), Y_v)$, à savoir qu'elle admet la densité :

$$f_{\rho_n}(s, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \rho_n^v c_n(\alpha, \alpha') l_n^\alpha(s) l_n^{\alpha'}(t) g_\alpha(s) g_{\alpha'}(t) \quad (3-2)$$

où $0 \leq \rho_n^v < 1$ et :

$$c_n(\alpha, \alpha') = \sqrt{\frac{\Gamma(\alpha + n) \Gamma(\alpha')}{\Gamma(\alpha' + n) \Gamma(\alpha)}}$$

Si l'on appelle (3-2) la loi dissymétrique de Laguerre, c'est parce qu'elle se déduit à partir de la loi symétrique de Laguerre (1-3). En effet, considérons deux variables aléatoires S et T construites de la manière suivante :

$$\begin{aligned} S &= U \\ T &= V + W \end{aligned}$$

où $U \sim g_\alpha$, $V \sim g_\alpha$ et $W \sim g_{\alpha' - \alpha}$ ($\alpha' \geq \alpha$), et W est indépendante de U et V . Si (U, V) obéit à la loi symétrique de Laguerre (1-3) de coefficient $\rho_n = \rho_n^v$, alors (S, T) admet la transformée de Laplace :

$$\begin{aligned} E(e^{-\lambda S - \mu T}) &= E(e^{-\lambda U - \mu V}) E(e^{-\mu W}) \\ &= \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \rho_n \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\alpha) n!} \frac{\lambda^n}{(1 + \lambda)^{\alpha + n}} \frac{\mu^n}{(1 + \mu)^{\alpha + n}} \right] \frac{1}{(1 + \mu)^{\alpha' - \alpha}} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \rho_n c_n(\alpha, \alpha') \left[\sqrt{\frac{\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\alpha) n!}} \frac{\lambda^n}{(1 + \lambda)^{\alpha + n}} \right] \left[\sqrt{\frac{\Gamma(\alpha' + n)}{\Gamma(\alpha') n!}} \frac{\mu^n}{(1 + \mu)^{\alpha' + n}} \right] \end{aligned}$$

qui est précisément la transformée de Laplace de la loi (3-2).

Au moyen de cette hypothèse de loi bivariable (3-2), on déduit aisément la fonction d'anamorphose de bloc $\phi_{\alpha'}$:

$$\begin{aligned} Z_v = \phi_{\alpha'}(Y_v) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \phi'_n I_n^{\alpha'}(Y_v) = E[Z(\underline{x}) | Z_v] = E\{\phi_{\alpha}[Y(\underline{x})] | Y_v\} \\ &= E\left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} \phi_n I_n^{\alpha}[Y(\underline{x})] | Y_v \right\} = \sum_{n=0}^{+\infty} \phi_n \rho_n^v c_n(\alpha, \alpha') I_n^{\alpha'}(Y_v) \end{aligned}$$

Rappelons que les coefficients ρ_n^v dépendent d'un seul paramètre ρ_v . Par exemple, $\rho_n^v = \rho_v^n$ dans le cas bigamma, et $\rho_n^v = \rho_v$ ($n > 0$) dans le cas mosaïque (cf. §1-5 pour des autres cas). Dans l'expression de ϕ'_{α} , il reste donc deux paramètres α' et ρ_v à déterminer. Pour cela, on recourt aux relations entre ces paramètres et les statistiques disponibles qui sont la moyenne et la variance de Z_v . Or la moyenne est indépendante du choix de α' et ρ_v , puisqu'elle est déjà prise en compte par la relation de Cartier. Il reste donc seulement la variance liée aux α' et ρ_v par la formule :

$$\sigma_v^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \phi_n^2 (\rho_n^v)^2 c_n^2(\alpha, \alpha') \quad (3-3)$$

qui n'est pourtant pas suffisante pour déterminer α' et ρ_v . En revanche, en raison de la cohérence interne du modèle, certaines conditions doivent être respectées pour le choix de α' (Demange, Lajaunie, Lantuéjoul et Rivoirard, 1987) :

- $\alpha' \geq \alpha$, cette condition étant imposée au départ parce que la loi de Z_v est moins dispersée que celle de $Z(x)$, devient ensuite nécessaire pour la construction de la loi bivariable (3-2).
- $\alpha' \leq \alpha'_{max}$, cette contrainte résulte de ce que la relation (3-3) entraîne nécessairement l'inégalité :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \phi_n^2 c_n^2(\alpha, \alpha') \geq \sigma_v^2 \quad (3-3')$$

Mais $c_n(\alpha, \alpha')$ ($n = 1, 2, \dots$) sont des fonctions décroissantes de α' . Cette inégalité ne peut donc être satisfaite que si α' ne dépasse pas un certain seuil noté α'_{max} . α'_{max} est obtenu par la majoration de la partie gauche de l'inégalité (3-3'), à savoir :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \phi_n^2 c_n^2(\alpha, \alpha'_{max}) = \sigma_v^2 \quad (3-4)$$

Notons d'ailleurs que l'on a toujours $\alpha'_{max} \geq \alpha$. En effet, si $\alpha'_{max} < \alpha$, on aurait $c_n^2(\alpha, \alpha'_{max}) > c_n^2(\alpha, \alpha) = 1$ pour que l'inégalité (3-3') ne soit plus vraie.

En résumant ces deux considérations, α' doit être choisi dans l'intervalle $[\alpha, \alpha'_{max}]$. Cette liberté du choix de α' est avantageuse dans le sens qu'elle confère au modèle une souplesse. Mais la question est de savoir sur quel critère on choisit une valeur explicite de α' . Sur ce point, voici une remarque intéressante : On examine les valeurs minimales prises par les réalisations de $Z(\underline{x})$ et de Z_v :

$$\begin{aligned} \min[z(\underline{x})] &= \phi_\alpha(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \phi_n l_n^\alpha(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{\frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)n!}} \phi_n \\ \min(z_v) &= \phi_{\alpha'}(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \phi_n \rho_n^v c_n(\alpha, \alpha') l_n^{\alpha'}(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{\frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)n!}} \phi_n \rho_n^v \end{aligned}$$

La relation de Cartier entraîne nécessairement :

$$\min[z(\underline{x})] \leq \min(z_v) \quad (3-5)$$

pourvu que $\min[z(\underline{x})] \neq -\infty$. En effet, si $\min[z(\underline{x})] > \min(z_v)$, on aurait :

$$E[Z(\underline{x}) | Z_v = \min(z_v)] > \min(z_v)$$

ce qui est contradictoire avec (3-1). D'où (3-5). Il est facile de voir que la relation (3-5) devient une égalité si et seulement si $\rho_n^v = 1$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), c'est-à-dire $\alpha' = \alpha'_{max}$. On aperçoit ainsi une signification objective du paramètre α' . Lorsqu'il s'agit par exemple, d'un gisement de minéralisation par faciès, il y a une bonne chance pour que la teneur au support d'échantillon et celle du bloc aient une valeur minimum très proche, pourvu que le changement de support ne soit pas trop grand. Dans ce cas, on doit choisir une valeur de α' plutôt proche de α'_{max} . Au contraire, s'il s'agit d'un gisement diffusif, il serait plus convenable de prendre une valeur de α' éloignée de α'_{max} . Ici, nous ne pouvons pas ou sans doute nous ne devons pas donner une formule générale qui détermine explicitement le paramètre α' . En fait, un tel choix doit être confronté au phénomène concret en question (e.g. un mode de minéralisation). Nous verrons dans §3-3, §3-4 et §3-5, quelques exemples de données simulées et réelles.

Notons par ailleurs que si ϕ_α est une fonction affine de $Y(x)$ ou plus généralement une fonction affine d'un facteur $l_n^\alpha[Y(x)]$, le modèle de changement de support selon la loi (3-2) de paramètre $\alpha' = \alpha$ coïncide avec le modèle de correction affine. En effet, si

$$Z(x) = \phi_\alpha[Y(x)] = m \pm \sigma l_n^\alpha[Y(x)]$$

où m et σ sont respectivement la moyenne et l'écart-type de $Z(x)$, on obtient d'après (3-1) et (3-2) :

$$Z_v = E \{ \phi_\alpha [Y(\underline{x})] | Y_v \} = m \pm \sigma \rho_n^v I_n^\alpha(Y_v)$$

qui admet la même loi que $m + \frac{\sigma^2}{\sigma} [Z(x) - m]$.

3.2.3. Modèle de loi de Z_v^*

Au moment de l'exploitation, les informations disponibles (trous de tir) sont beaucoup plus nombreuses qu'au moment de l'exploration. Pour estimer la teneur d'un bloc, on se contente en pratique, d'un simple estimateur linéaire (souvent un krigeage) :

$$Z_v^* = \sum_{i=1}^{N_u} \lambda_i Z(x_i)$$

avec la condition de non-biais : $\sum_{i=1}^{N_u} \lambda_i = 1$ pour que $E(Z_v^*) = E(Z_v) = m$. N_u désigne le nombre d'informations ultimes dans le voisinage du bloc v .

Bien qu'au moment de l'estimation des réserves récupérables, on ne dispose pas des valeurs explicites de ces informations ultimes, on peut considérer que leurs positions sont connues. Ceci est suffisant pour calculer les poids de krigeage λ_i , ainsi que la variance de l'estimateur Z_v^* :

$$\sigma_*^2 = Var(Z_v^*) = \sum_{i=1}^{N_u} \sum_{j=1}^{N_u} \lambda_i \lambda_j C(x_i - x_j)$$

Si maintenant, les λ_i sont tous non négatifs, ils peuvent être interprétés comme un système de probabilité. Désignant par \bar{x} le point aléatoire qui coïncide avec x_i avec la probabilité λ_i , alors $Z(\bar{x})$ et Z_v^* sont liées par la relation de Cartier :

$$Z_v^* = E[Z(\bar{x}) | Z_v^*] \quad (3-6)$$

Notons d'ailleurs que $Z(\bar{x})$ admet la même loi que $Z(x)$. En effet, leurs transformées de Laplace sont identiques :

$$E \left[e^{-\mu Z(\bar{x})} \right] = \sum_{i=1}^{N_u} \lambda_i E \left[e^{-\mu Z(x_i)} \right] = E \left[e^{-\mu Z(x)} \right]$$

La relation (3-6) montre donc que la loi de Z_v^* est moins dispersée que celle de $Z(x)$. On voit aussi que le problème de la modélisation de la loi de Z_v^* revient à évaluer l'espérance

conditionnelle $E[Z(\bar{x})|Z_v^*]$. Ceci nous amène à introduire un modèle de loi bivariable de $(Z(\bar{x}), Z_v^*)$. Pour cela, procédons comme dans le cas de changement de support en transformant $Z(\bar{x})$ et Z_v^* en deux variables à loi gamma :

$$Z(\bar{x}) = \phi_\alpha[Y(\bar{x})] \quad Y(\bar{x}) \sim g_\alpha$$

$$Z_v^* = \phi_{\alpha''}(Y_v^*) \quad Y_v^* \sim g_{\alpha''}$$

Puisque Z_v^* est toujours moins dispersée que $Z(\bar{x})$, il est légitime de prendre $\alpha'' \geq \alpha$. On fait l'hypothèse que le couple $(Y(\bar{x}), Y_v^*)$ suit la loi bivariable de type (3-2) :

$$f_{\rho_n^*}(s, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \rho_n^* c_n(\alpha, \alpha'') l_n^\alpha(s) l_n^{\alpha''}(t) g_\alpha(s) g_{\alpha''}(t)$$

où $0 \leq \rho_n^* < 1$, et $\rho_n^* c_n(\alpha, \alpha'')$ est le coefficient de corrélation entre $l_n^\alpha[Y(\bar{x})]$ et $l_n^{\alpha''}(Y_v^*)$. De cette hypothèse de loi bivariable, l'expression de la fonction d'anamorphose $\phi_{\alpha''}$ découle facilement :

$$\begin{aligned} Z_v^* = \phi_{\alpha''}(Y_v^*) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \phi_n'' l_n^{\alpha''}(Y_v^*) = E[Z(\bar{x})|Z_v^*] = E\{\phi_\alpha[Y(\bar{x})]|Y_v^*\} \\ &= E\left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} \phi_n l_n^\alpha[Y(\bar{x})]|Y_v^* \right\} = \sum_{n=0}^{+\infty} \phi_n \rho_n^* c_n(\alpha, \alpha'') l_n^{\alpha''}(Y_v^*) \end{aligned}$$

Le choix du paramètre α'' et la détermination des coefficients ρ_n^* peuvent s'effectuer de façon similaire au modèle de changement de support : α'' doit être choisi dans un intervalle $[\alpha, \alpha''_{max}]$ où α''_{max} est déterminé par l'équation :

$$\sigma_*^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n^2(\alpha, \alpha''_{max}) \phi_n^2 \quad (3-7)$$

On se propose par analogie du choix de α' , de prendre une valeur de α'' . On détermine ensuite les ρ_n^* d'après :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\rho_n^*)^2 c_n^2(\alpha, \alpha'') \phi_n^2 = \sigma_*^2$$

3.2.4. Modèle de loi de (Z_v, Z_v^*)

Pour modéliser l'effet d'information, il faut en plus connaître la loi bivariable du couple (Z_v, Z_v^*) . Après avoir anamorphosé respectivement Z_v et Z_v^* en deux variables

à loi gamma Y_v et Y_v^* , il paraît naturel d'imposer au couple (Y_v, Y_v^*) , la loi de densité suivante :

$$f_r(s, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} r_n c_n(\alpha_1, \alpha_2) l_n^{\alpha'}(s) l_n^{\alpha''}(t) g_{\alpha'}(s) g_{\alpha''}(t)$$

où $\alpha_1 = \min(\alpha', \alpha'')$, $\alpha_2 = \max(\alpha', \alpha'')$. Les coefficients r_n sont entre 0 et 1 et peuvent être déterminés par :

$$Cov(Z_v, Z_v^*) = \sum_{n=1}^{+\infty} \phi_n^2 \rho_n^v \rho_n^* c_n^2(\alpha, \alpha_2) r_n$$

où $Cov(Z_v, Z_v^*)$ est obtenu d'après la covariance de $Z(x)$:

$$Cov(Z_v, Z_v^*) = \sum_{i=1}^{N_u} \lambda_i \bar{C}(x_i, v)$$

3.2.5. Relations tonnage-teneur

A partir des modèles de lois de Z_v , Z_v^* et (Z_v, Z_v^*) , nous pouvons calculer les réserves récupérables globales sans aucune difficulté.

- Cas de sélection directe (cas idéal) :

$$\begin{aligned} T_v(z) &= E(1_{Z_v \geq z}) = E[1_{Y_v \geq \phi_{\alpha'}^{-1}(z)}] \\ &= \int_{\phi_{\alpha'}^{-1}(z)}^{+\infty} g_{\alpha'}(t) dt \\ Q_v(z) &= E(Z_v 1_{Z_v \geq z}) = E[\phi_{\alpha'}(Y_v) 1_{Y_v \geq \phi_{\alpha'}^{-1}(z)}] \\ &= \int_{\phi_{\alpha'}^{-1}(z)}^{+\infty} \phi_{\alpha'}(t) g_{\alpha'}(t) dt \end{aligned}$$

- Cas de sélection indirecte (cas effectif) :

$$\begin{aligned} T_v^*(z) &= E(1_{Z_v^* \geq z}) = E[1_{Y_v^* \geq \phi_{\alpha''}^{-1}(z)}] \\ &= \int_{\phi_{\alpha''}^{-1}(z)}^{+\infty} g_{\alpha''}(t) dt \\ Q_v^*(z) &= E(Z_v 1_{Z_v^* \geq z}) = E\{E[Z_v 1_{Z_v^* \geq z} | Z_v^*]\} \\ &= E[1_{Z_v^* \geq z} E(Z_v | Z_v^*)] \end{aligned}$$

Notons $h(Z_v^*) = E(Z_v | Z_v^*)$ qui s'exprime selon la loi bivariable de (Z_v, Z_v^*) :

$$h(Z_v^*) = \sum_{n=0}^{+\infty} \phi_n \rho_n^v c_n(\alpha, \alpha') r_n c_n(\alpha_1, \alpha_2) l_n^{\alpha''}(Y_v^*)$$

Ainsi on obtient :

$$Q_v^*(z) = \int_{\phi_{\alpha''}^{-1}(z)}^{+\infty} h[\phi_{\alpha''}(t)] g_{\alpha''}(t) dt$$

3.3. Cas d'étude : données simulées

Pour les mêmes raisons que dans §2.4., nous allons utiliser dans ce paragraphe, des données de simulation d'un processus de diffusion gamma pour tester les modèles présentés précédemment.

Reprenons la réalisation du processus de diffusion gamma $Y(x)$ présentée dans la figure 3-1, et étudions la régularisée $Y_l(x)$ de support $l = 2$. La réduction de variance du support ponctuel au support $l = 2$ est de 43.2%.

Matheron a établi la transformée de Laplace explicite de la loi de Y_l qui conduit ensuite à une méthode de simulation de cette loi (Matheron, 1984(b) et Lantuéjoul, 1985). Ainsi on peut déduire les courbes tonnage-teneur de Y_l . D'ailleurs, puisque la trajectoire (réalisation) de $Y(x)$ est presque sûrement continue, on peut donc également procéder par calcul approché de l'intégrale : $y_l = \frac{1}{l} \int_l y(x) dx$, et puis en tirer les courbes tonnage-teneur. L'expérience montre que ces deux méthodes donnent pratiquement le même résultat.

Dans ce qui suit, nous partons du caractère bigamma de la fonction aléatoire $Y(x)$, et moyennant le modèle de changement de support gamma, nous cherchons à approcher les courbes tonnage-teneur de Y_l .

Tout d'abord, $Y(x)$ s'exprime à l'aide des polynômes de Laguerre :

$$Y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \phi_n l_n^{\alpha}[Y(x)] = \phi_0 + \phi_1 l_1^{\alpha}[Y(x)]$$

où $\phi_0 = \alpha$, $\phi_1 = -\sqrt{\alpha}$, $\phi_n = 0$ ($n \geq 2$). D'après la formule (3-4), on obtient $\alpha'_{max} = \alpha^2/\sigma^2 = 0.881$, ainsi le paramètre α' de la fonction d'anamorphose au support l doit être

choisi dans l'intervalle [0.5, 0.881]. La figure 3-6(a) montre que la courbe de sélectivité empirique est entre celles des modèles gamma respectivement avec $\alpha' = \alpha$ et $\alpha' = \alpha'_{max}$. Si l'on choisit une valeur de α' de la manière suivante :

$$\alpha' = \frac{\sigma_l^2}{\sigma^2} \alpha + \left(1 - \frac{\sigma_l^2}{\sigma^2}\right) \alpha'_{max} \quad (3-8)$$

on obtient $\alpha' = 0.665$, ainsi qu'une modélisation très satisfaisante (Figure 3-6(b)).

Dans ce cas particulier où la fonction d'anamorphose ponctuelle est une fonction affine du facteur $l_1^\alpha[Y(x)]$, le modèle de changement de support gamma avec $\alpha' = \alpha$ coïncide comme nous l'avons déjà indiqué dans §3.2.2., avec la correction affine. Toutefois, une différence apparaît si la fonction d'anamorphose n'est pas une fonction affine d'un facteur quelconque $l_n^\alpha[Y(x)]$. Considérons l'exemple du carré de $Y(x)$. Nous avons :

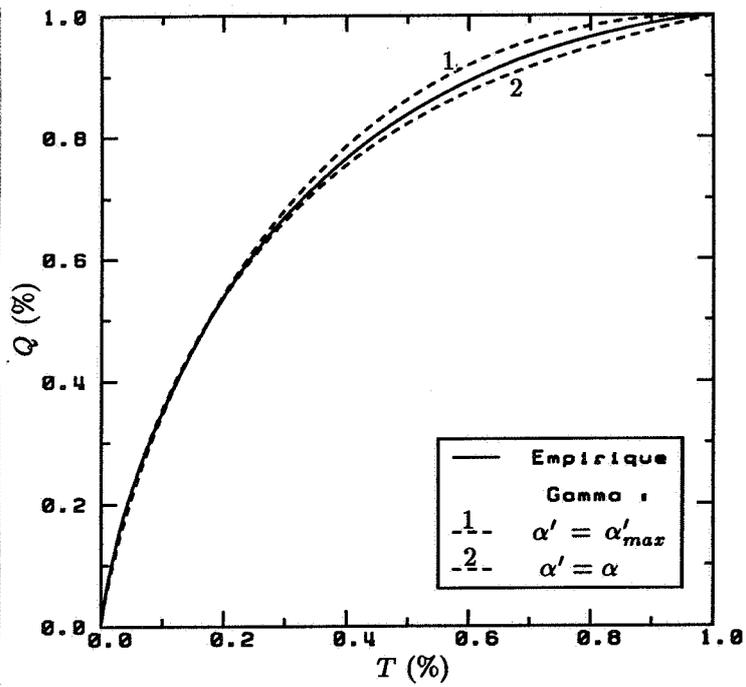
$$\begin{aligned} Z(x) = Y^2(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \phi_n l_n^\alpha[Y(x)] \\ &= \alpha(\alpha+1) - 2\sqrt{\alpha}(\alpha+1) l_1^\alpha[Y(x)] + \sqrt{2\alpha(\alpha+1)} l_2^\alpha[Y(x)] \end{aligned}$$

Prenons toujours $\alpha = 0.5$. Les variances de $Z(x)$ et de la régularisée Z_l sont respectivement $\sigma^2 = 6$ et $\sigma_l^2 = 3.12$. Nous avons tracé aux figures 3-7 la courbe de sélectivité empirique de Z_l et celles des modèles gamma. Nous constatons que la courbe empirique est entre celles des modèles gamma correspondant respectivement à $\alpha' = \alpha = 0.5$ et à $\alpha' = \alpha'_{max} = 0.91$, et pour un tonnage de minerai fixé, la correction affine a entraîné une sous-estimation remarquable par rapport aux modèles gamma. Lorsque l'on choisit α' selon la formule (3-8), on obtient une approche satisfaisante ($\alpha' = 0.697$) (Figure 3-7(b)).

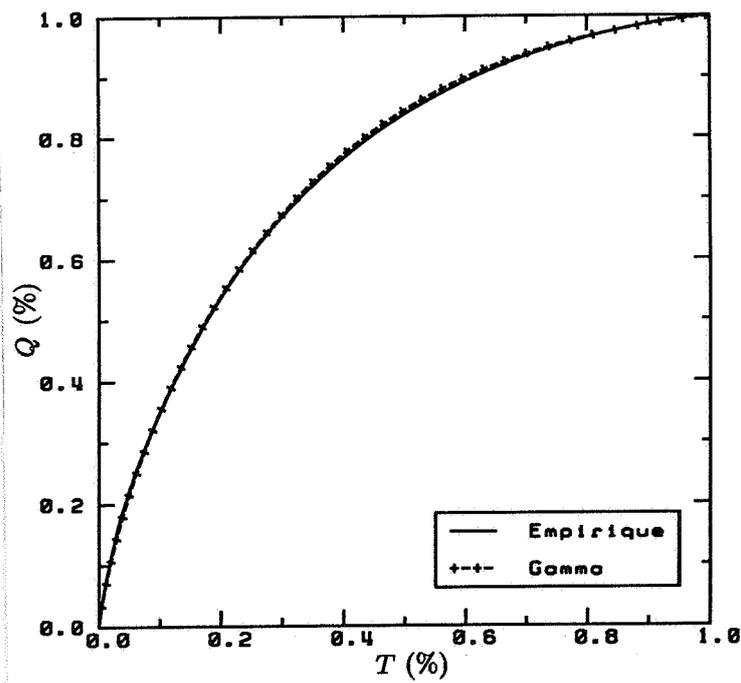
Examinons maintenant un cas où l'effet d'information se présente. Il s'agit du même exemple au §3.1.2. Supposons que l'estimateur Z_l^* d'après lequel va s'effectuer la sélection est un krigeage ordinaire selon la configuration d'informations de la figure 3-3(a). La variance de Z_l^* vaut $\sigma_*^2 = 0.357$. D'après la formule (3-7), on a $\alpha''_{max} = \alpha^2/\sigma_*^2 = 0.7$. Le paramètre α'' de la fonction d'anamorphose de Z_l^* doit donc être entre 0.5 et 0.7. On se propose ici d'essayer le même type de critère pour le choix de α' , à savoir de prendre:

$$\alpha'' = \frac{\sigma_*^2}{\sigma^2} \alpha + \left(1 - \frac{\sigma_*^2}{\sigma^2}\right) \alpha''_{max} = 0.557$$

Un tel choix permet une approche correcte de la courbe de sélectivité empirique dans ce cas de sélection indirecte (Figure 3-8).

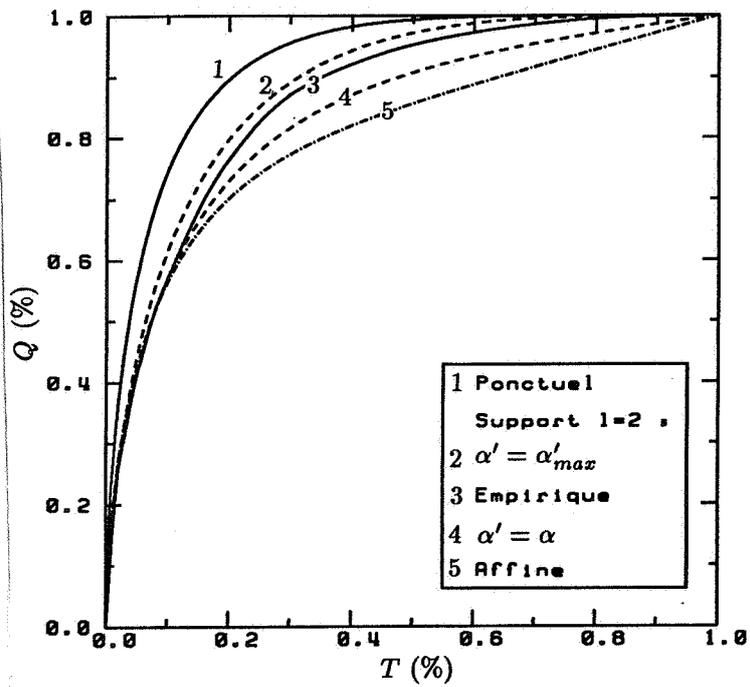


(a)

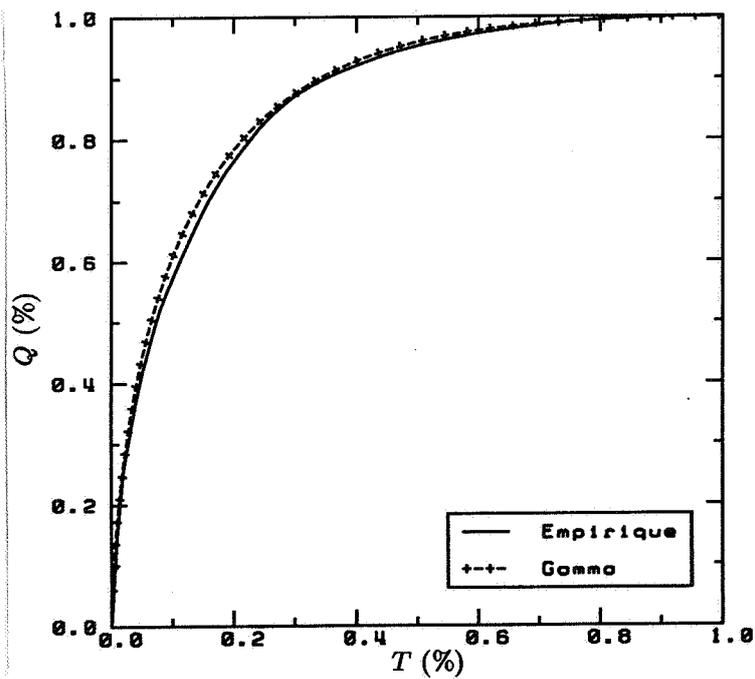


(b)

Figures 3-6 : Courbe de sélectivité empirique de Y_l et ses modélisations.



(a)



(b)

Figures 3-7 : Courbe de sélectivité empirique de Z_l et ses modélisations.

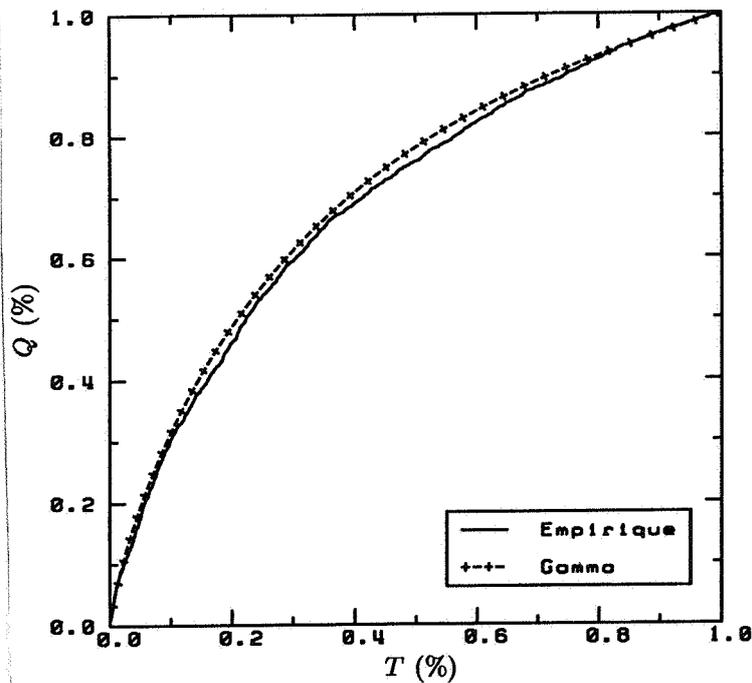


Figure 3-8 : Courbe de sélectivité empirique dans le cas de sélection indirecte et sa modélisation.

3.4. Cas d'étude : gisement de Bertholène

3.4.1. Changement de support le long des sondages

Revenons au gisement de Bertholène étudié dans §1.6. et rappelons que les teneurs en uranium des échantillons sont de moyenne $m = 847.371$ et de variance $\sigma^2 = 2627280$. Comme les sondages sont à maille régulière et de longueur constante, il est possible d'étudier un changement de support en allant de $1m$ (longueur d'échantillon) à $6m$ (longueur de sondage), ce qui permet de comparer un modèle à la réalité. La variance des teneurs de sondage vaut $\sigma_1^2 = 1332888$. La réduction de variance du support d'échantillon au support de sondage est de $(\sigma^2 - \sigma_1^2)/\sigma^2 = 49.3\%$. On montre dans la figure 3-9, les courbes de sélectivité aux supports d'échantillon et de sondage.

Compte-tenu de ce que la distribution bivariable de la teneur au support d'échantillon peut être approchée par un modèle bigaussien (cf. §1.6.), nous sommes amenés à utiliser le modèle de changement de support gaussien pour calculer la courbe de

sélectivité au support de sondage. On constate qu'une telle modélisation est excellente (Figure 3-9).

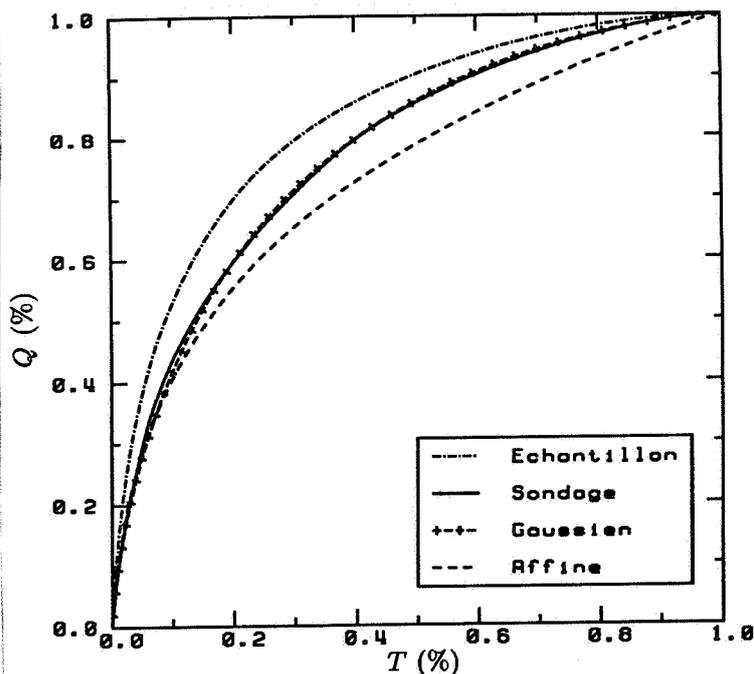


Figure 3-9 : Courbes de sélectivité aux supports 1m et 6m - comparaison entre modèles et réalité.

A titre de comparaison, il est intéressant de voir ce que donne le modèle gamma. Nous avons choisi plusieurs valeurs du paramètre α de la fonction d'anamorphose au support d'échantillon. Leurs valeurs correspondantes de α'_{max} sont obtenues selon (3-4) (Tableau 3-1).

| | | | | |
|-----------------|--------|--------|--------|--------|
| α | 0.2733 | 0.5 | 1. | 2. |
| α'_{max} | 0.5327 | 0.9573 | 1.8487 | 3.5478 |

Tableau 3-1 : Paramètres d'anamorphose du modèle gamma.

Lorsque α' prend sa valeur minimale ($\alpha' = \alpha$), la quantité de métal récupérée à un

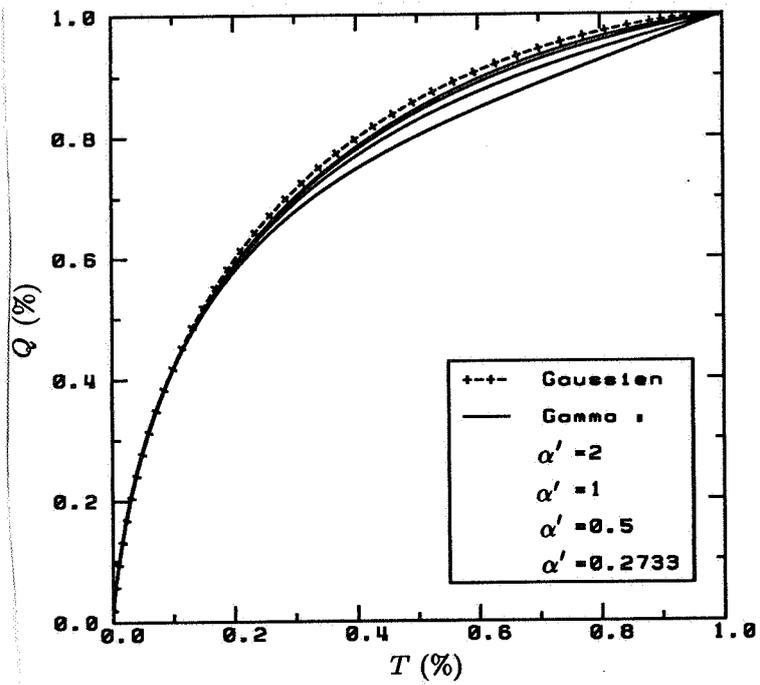
tonnage de minerai fixé est toujours inférieure à celle prévue par le modèle gaussien. Cette différence devient de plus en plus faible aux grandes valeurs de α (Figure 3-10(a)). Ce phénomène est la simple conséquence de la convergence de la loi bigamma vers une loi bigaussienne lorsque α tend vers infini (cf. §1.1.3.). Par ailleurs, si on prend $\alpha' = \alpha'_{max}$, la courbe de sélectivité est pratiquement confondue avec celle du modèle gaussien, ce qui est de plus invariant quelle que soit la valeur de α (Figure 3-10(b)).

Notons par ailleurs, que le modèle de correction affine conduit à une sous-estimation considérable de la quantité de métal à un tonnage de minerai donné. (Figure 3-9).

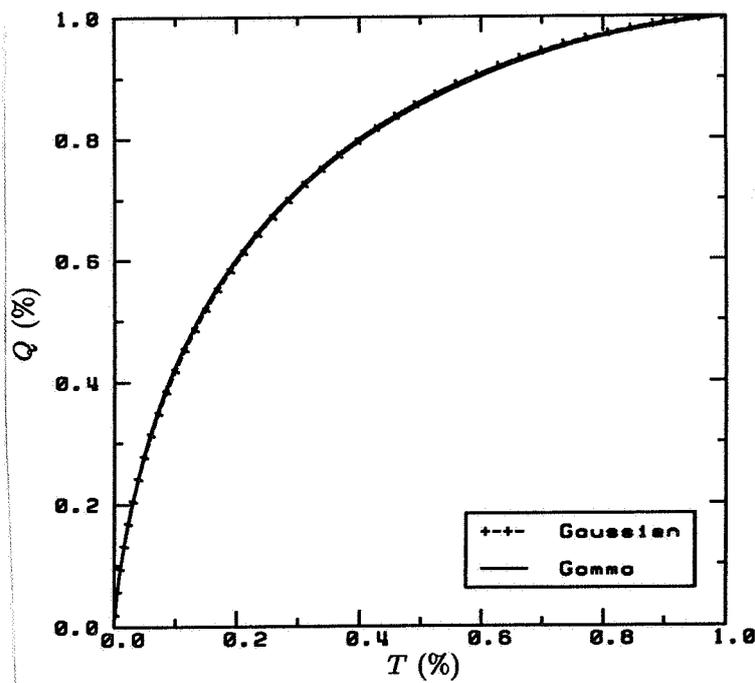
3.4.2. Estimation des réserves récupérables globales

Considérons maintenant les réserves récupérables définies au support de bloc $v = 2m \times 1.5m \times 1m$. La variance des teneurs au support v vaut $\sigma_v^2 = 1492451$. La réduction de variance $(\sigma^2 - \sigma_v^2)/\sigma^2 = 43.2\%$ est du même ordre de grandeur que pour le changement de support le long de sondages de $1m$ à $6m$ précédemment étudié. Compte-tenu de ce que le modèle gaussien est tout à fait approprié au changement de support le long des sondages, on peut se permettre de l'appliquer à l'estimation des réserves récupérables au support v . Aux figures 3-11 sont consignées les courbes tonnage-teneur dans le cas de sélection directe. On peut voir aussi ce que donne le modèle gaussien, si la sélection s'effectue sur un estimateur de teneur des blocs. Les échantillons dont on dispose sont implantés selon une maille régulière (Figure 3-12(a)). On s'aperçoit qu'il y a deux types de blocs différemment informés, les uns contiennent un échantillon à leur centre (Figure 3-12(b)), tandis que les autres n'en ont pas (Figure 3-12(c)). Nous sommes donc obligés de faire la distinction entre les deux types d'estimateur (krigeage ordinaire) qui en résultent.

Nous avons ensuite établi les courbes de sélectivité indirecte (effective) du modèle gaussien selon ces deux types d'estimateur respectivement (Figure 3-13). Dans le cas de la configuration à la figure 3-12(b), l'effet d'information n'est pas vraiment significatif, ce qui montre d'une certaine façon que cet estimateur est assez précis. Dans le cas de la configuration à la figure 3-12(c) au contraire, l'effet d'information est particulièrement fort. Notons que la sélection s'effectuant en fait après mélange de ces deux estimateurs, la courbe de sélectivité indirecte devrait donc être intermédiaire entre celles correspon-

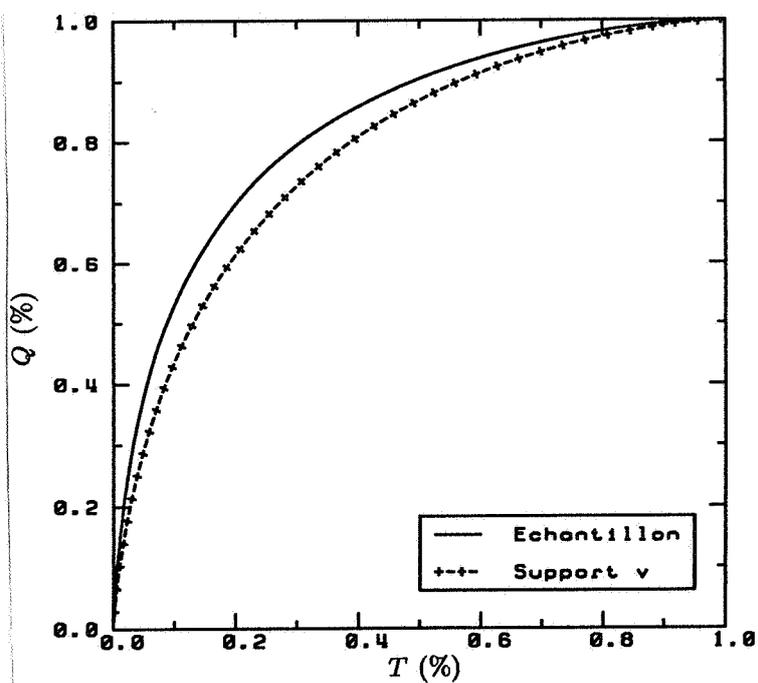


(a) $\alpha' = \alpha$

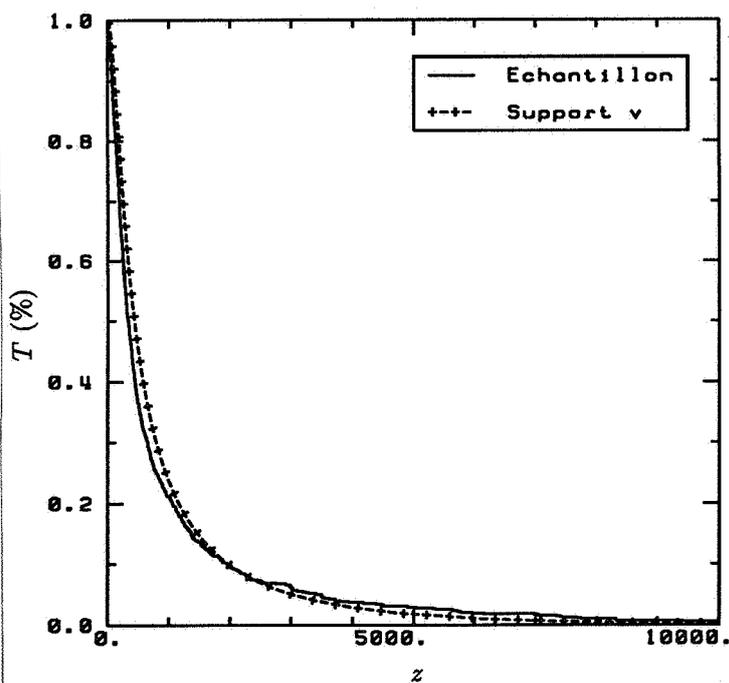


(b) $\alpha' = \alpha'_{max}$

Figures 3-10 : Courbes de sélectivité au support de sondage (6m) - comparaison entre le modèle gaussien et le modèle gamma.

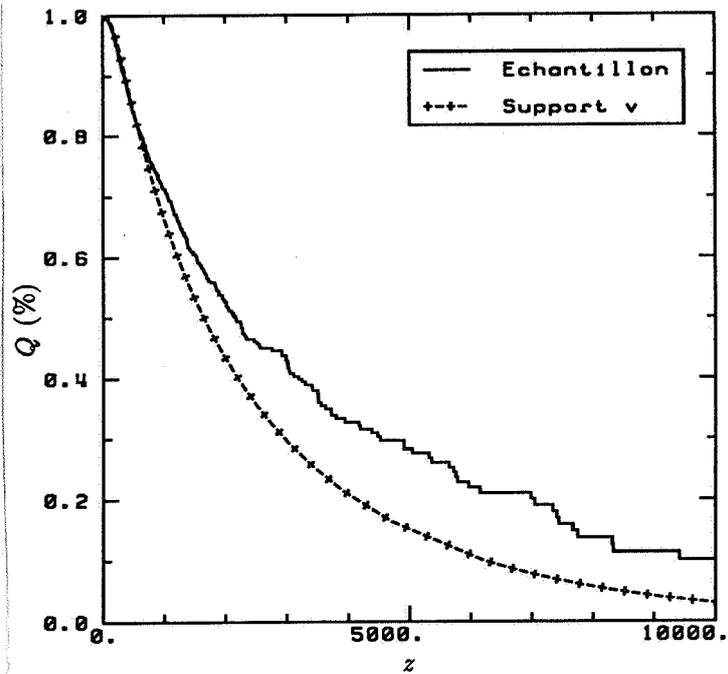


(a) Courbes de sélectivité



(b) Courbes de tonnage de minerai

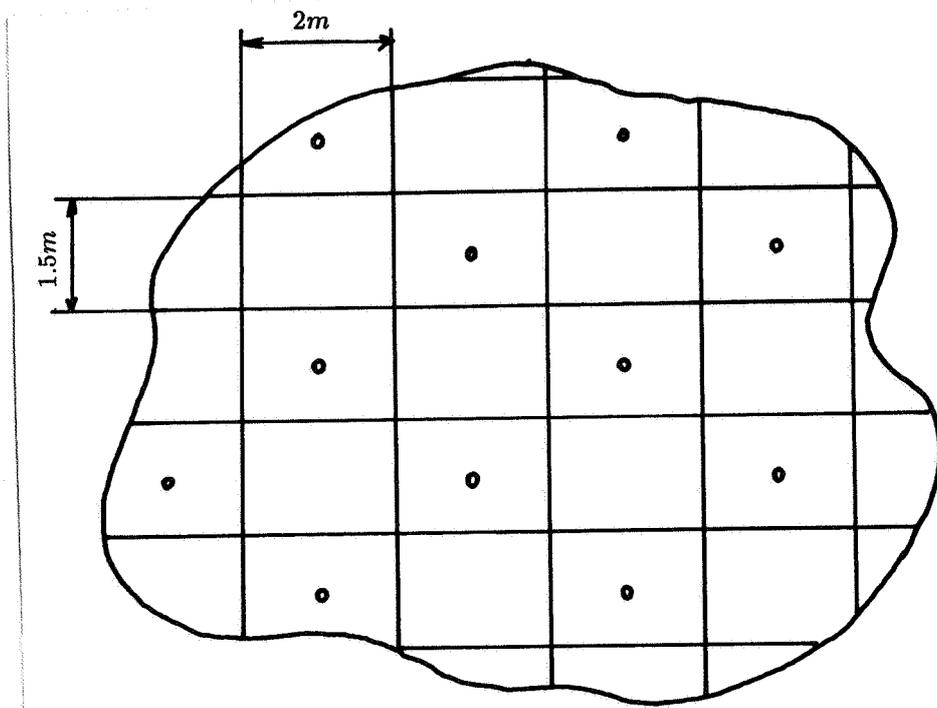
Figures 3-11 : Courbes tonnage-teneur directes au support de bloc v
- gisement de Bertholène.



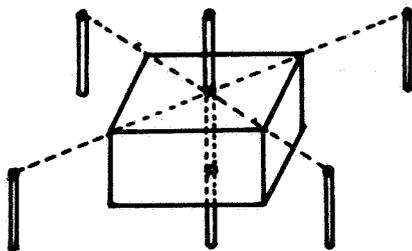
(c) Courbes de quantité de métal

Figures 3-11(suite) : Courbes tonnage-teneur directes au support de bloc v
 - gisement de Bertholène.

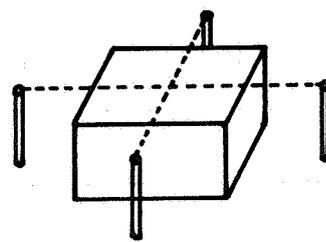
dant respectivement aux estimateurs obtenus selon les configuration des échantillons
 aux figures 3-12(b) et (c).



(a) Dans le plan horizontal



(b)



(c)

Figures 3-12 : Configuration des échantillons - gisement de Bertholène.

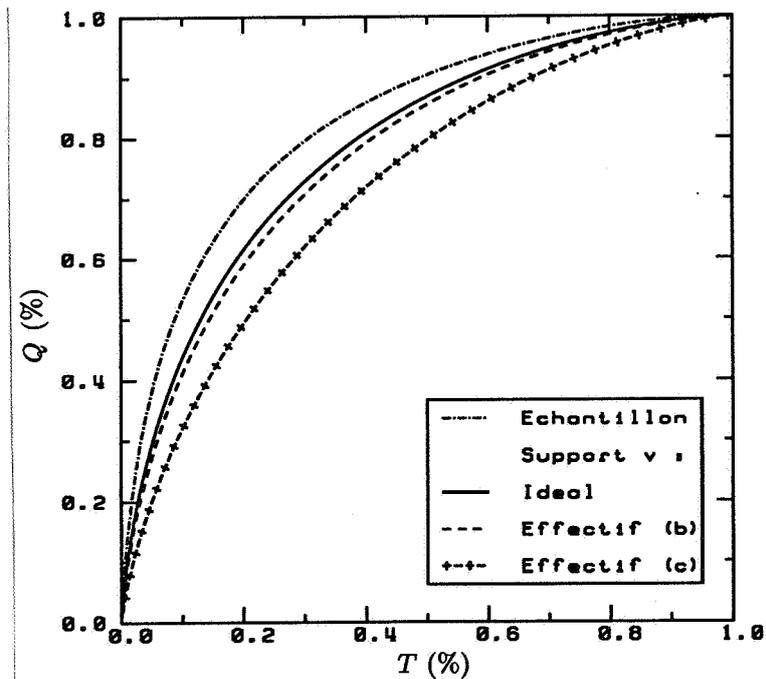


Figure 3-13 : Courbes de Sélectivité indirecte - gisement de Bertholène.

3.5. Cas d'étude : gisement de Luceda

Nous avons vu dans §1.7. que les données de Luceda peuvent s'adapter à un modèle gamma, mais pas à un modèle gaussien. Rappelons que la distribution bivariable des anamorphosées gamma $Y(x_i) = \phi_\alpha^{-1}[Z(x_i)]$ ($i = 1, 2, \dots, N$) avec $\alpha = 0.0541$ peut être approchée par une loi de Laguerre (1-3) de type beta, à savoir :

$$\rho_n(h) = \frac{\Gamma(\beta) \Gamma[\beta \rho(h) + n]}{\Gamma(\beta + n) \Gamma[\beta \rho(h)]} \quad \text{avec } \beta = 1.$$

On obtient selon le modèle de changement de support gamma, l'expression de la fonction d'anamorphose de bloc :

$$\begin{aligned} Z_v &= \sum_{n=0}^{+\infty} \phi_n \rho_n^v c_n(\alpha, \alpha') I_n^{\alpha'}(Y_v) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \phi_n \frac{\Gamma(\beta) \Gamma(\beta \rho_v + n)}{\Gamma(\beta + n) \Gamma(\beta \rho_v)} c_n(\alpha, \alpha') I_n^{\alpha'}(Y_v) \end{aligned}$$

Nous avons pu ici aussi confronter ce modèle à un changement de support le long des sondages où la loi de bloc (plus exactement le regroupement des échantillons le long des

sondages) est parfaitement connue. On retrouve à la figure 3-14 les courbes de sélectivité des échantillons et des blocs, et aussi les deux courbes extrêmes ($\alpha' = \alpha = 0.0541$ et $\alpha' = \alpha'_{max} = 0.2075$) du modèle gamma au support de bloc. Ceci montre clairement que le modèle gamma avec $\alpha' = \alpha'_{max}$ est très satisfaisant, contrairement à celui avec $\alpha' = \alpha$. En effet, la teneur minimale des échantillons et celle de leurs regroupements considérés ici sont identiques.

Nous avons aussi testé le modèle gaussien et la correction affine. Les résultats comparatifs avec le modèle gamma sont donnés dans la figure 3-15. Remarquons d'abord que le modèle gaussien se confond ici avec le modèle gamma de paramètre $\alpha' = \alpha'_{max}$, ainsi donc avec la réalité, bien que la distribution bivariable des échantillons soit très éloignée du modèle gaussien (cf. §1.7). Cela montre dans une certaine mesure que la distribution bivariable ponctuelle n'est guère dominante pour le changement de support. Notons aussi que la correction affine admet quasiment le même résultat que le modèle gamma de paramètre $\alpha' = \alpha$. Ceci se traduit simplement par le fait que l'anamorphose des échantillons est quasiment une fonction affine.

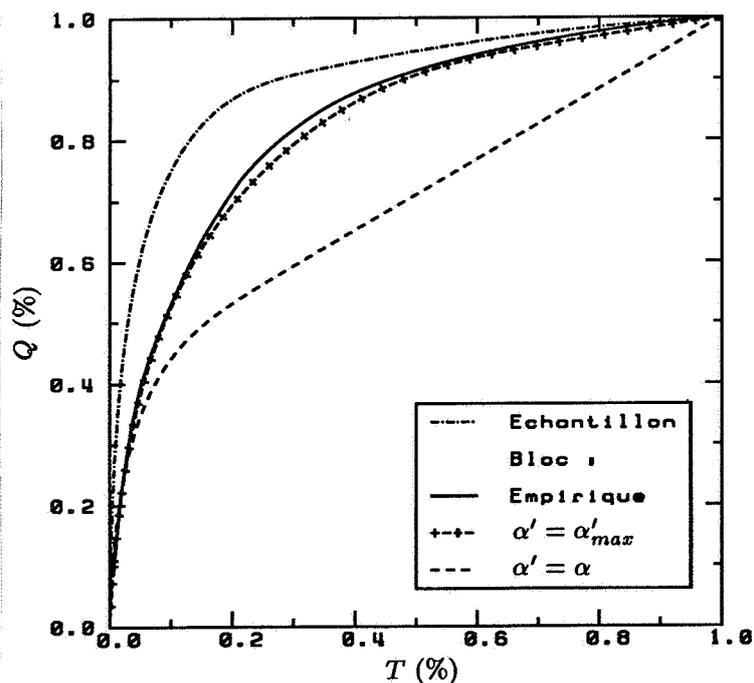


Figure 3-14 : Courbes de sélectivité du gisement de Luceda - comparaison entre le modèle gamma et la réalité.

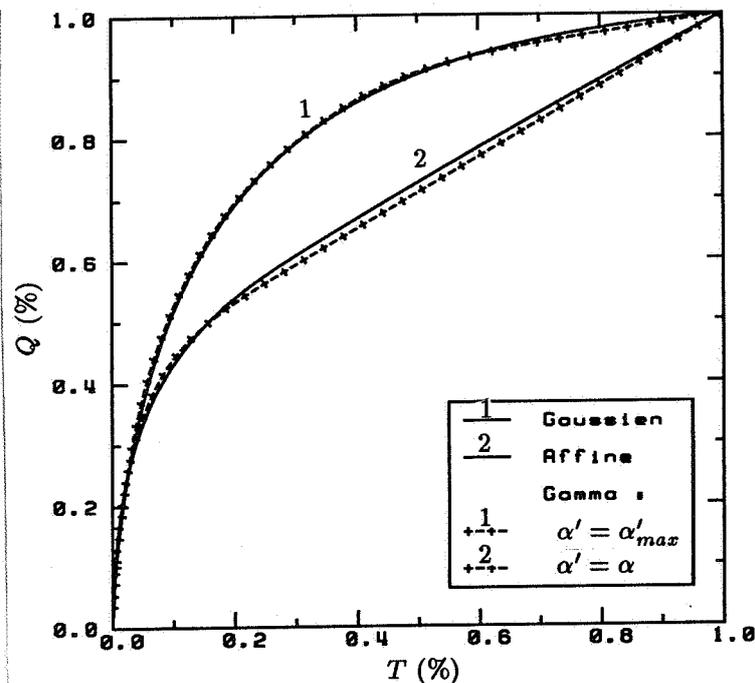


Figure 3-15 : Courbes de sélectivité du gisement de Luceda - comparaison entre le modèle gamma, le modèle gaussien et la correction affine.

3.6. Mélange des supports et des estimateurs ultimes

3.6.1. Remarque pratique

Dans ce qui précède, le support de sélection est considéré comme constant partout dans le gisement dont on estime les réserves récupérables (globales). Cependant, la sélection de l'exploitation d'un gisement ne s'effectue pas souvent sur un support constant pour diverses raisons (utilisation des engins de capacités différentes etc.). Par ailleurs, l'estimateur ultime peut aussi varier d'un bloc à l'autre en fonction de l'implantation des informations ultimes (e.g. trous de tir). A ce sujet, on a déjà vu au §3.4. un exemple simple où deux estimateurs ultimes différents ont été utilisés. Ainsi se pose le problème d'estimation des réserves récupérables (globales) pour des supports non identiques et pour des estimateurs ultimes mélangés.

3.6.2. Cas de sélection directe

Considérons le gisement D divisé en I blocs v_i ($i = 1, 2, \dots, I$) de support identique ou non, et notons ω_i la proportion du tonnage fourni par v_i dans D . Alors :

$$\omega_i = \frac{v_i}{\sum_{j=1}^I v_j} \quad (i = 1, 2, \dots, I)$$

constitue une loi de probabilité (noté ω). Le tonnage de minerai et la quantité de métal à une teneur de coupure z donnée s'écrivent donc :

$$t_\omega(z) = \sum_{i=1}^I \omega_i 1_{z_{v_i} \geq z}$$

$$q_\omega(z) = \sum_{i=1}^I \omega_i z_{v_i} 1_{z_{v_i} \geq z}$$

Considérons ici que la division du gisement est indépendante de la teneur, et supposons que $z(x)$ est une réalisation d'une fonction aléatoire stationnaire $Z(x)$. La modélisation de $t_\omega(z)$ et $q_\omega(z)$ s'écrit alors :

$$T_\omega(z) = \sum_{i=1}^I \omega_i E[1_{Z_{v_i} \geq z}] = \sum_{i=1}^I \omega_i T_{v_i}(z)$$

$$Q_\omega(z) = \sum_{i=1}^I \omega_i E[Z_{v_i} 1_{Z_{v_i} \geq z}] = \sum_{i=1}^I \omega_i Q_{v_i}(z)$$

Cela signifie que pour estimer les réserves récupérables de supports mélangés, on peut procéder par calcul respectif des fonctions tonnage-teneur à chaque support, et puis les pondérer par leurs tonnages.

Notons que cette procédure n'est applicable que si le nombre de supports différents est limité. Dans le cas contraire (e.g. cas où ω est une loi continue), une telle méthode, bien que possible, est très dispendieuse. Ceci nous amène à la recherche d'une simplification. Regardons d'abord un exemple.

Il s'agit d'étudier les comportements des changements de supports mélangés sur la simulation d'un processus de diffusion gamma présentée à la figure 3-1. Nous avons choisi de diviser la droite en segments de longueurs aléatoires indépendantes selon la loi gamma $g_{\alpha, b}$ de paramètres α et b (loi en nombre de segments). Alors les tonnages des

segments suivent également une loi gamma, mais de paramètres $\alpha + 1$ et b (loi en mesure de segments) :

$$\omega(s) = g_{\alpha+1, b}(s)$$

Fixant la moyenne de $\omega(s)$: $s_m = \frac{\alpha+1}{b}$, on envisage de comparer les courbes $Q_\omega(T_\omega)$ pour différents paramètres α et b . La figure 3-16 montre que des valeurs de α très différentes donnent des courbes $Q_\omega(T_\omega)$ remarquablement proches de celle obtenue au support constant s_m .

Ces résultats empiriques étonnants méritent sans aucun doute quelque réflexion. Pour comprendre ce qui se passe, introduisons la variable aléatoire Z_ω qui vaut Z_s ($= \frac{1}{|s|} \int_s Z(x) dx$) avec la probabilité $\omega(ds)$, et qui admet alors la loi :

$$F_\omega(z) = \int F_s(z) \omega(ds)$$

où $F_s(z)$ est la fonction de répartition de Z_s . Il est évident que les relations tonnage-teneur aux supports mélangés selon la loi ω correspondent à la loi F_ω . La comparaison entre $Q_\omega(T_\omega)$ et $Q_{s_m}(T_{s_m})$ revient donc à celle entre les lois F_ω et F_{s_m} . Par construction, F_ω et F_{s_m} ont la même moyenne. En ce qui concerne la variance de F_ω , nous avons :

$$\sigma_\omega^2 = \int \sigma_s^2 \omega(ds)$$

Dans l'exemple précédent, ω est la loi gamma : $g_{\alpha+1, b}$, et le processus (de paramètre $\alpha_p = 0.5$) admet la covariance exponentielle : $\alpha_p e^{-|h|}$. On obtient les expressions de σ_ω^2 :

$$\sigma_\omega^2 = \begin{cases} \frac{2\alpha_p(\alpha+1)}{s_m \alpha} \left\{ 1 - \frac{\alpha+1}{s_m(\alpha-1)} \left[1 - \left(\frac{\alpha+1}{s_m+\alpha+1} \right)^{\alpha-1} \right] \right\}, & (0 < \alpha < 1, \alpha > 1) \\ \frac{2\alpha_p}{s_m^2} [(s_m + 1) \ln(s_m + 1) - s_m], & (\alpha \rightarrow 0) \\ \frac{4\alpha_p}{s_m^2} [s_m - 2 \ln(1 + \frac{s_m}{2})], & (\alpha = 1). \end{cases}$$

Nous avons tracés à la figure 3-17, quelques courbes de $(\sigma_\omega^2 - \sigma_{s_m}^2)/\sigma_{s_m}^2$ (la différence relative de σ_ω^2 par rapport à $\sigma_{s_m}^2$) en fonction de α et pour quelques valeurs de s_m . Sur cette figure, on voit que pour un changement de support pas trop grand et pour une paramètre α pas trop faible, σ_ω^2 et $\sigma_{s_m}^2$ sont peu différentes. Ceci explique grosso modo la coïncidence des courbes tonnage-teneur à s_m fixé dans l'exemple précédent, car la valeur maximum de $(\sigma_\omega^2 - \sigma_{s_m}^2)/\sigma_{s_m}^2$ est de 14% ($\alpha \rightarrow 0$), et une différence relative inférieure à celle-ci est peu sensible sur les courbes tonnage-teneur. Notons d'ailleurs que $(\sigma_\omega^2 - \sigma_{s_m}^2)/\sigma_{s_m}^2$ ne dépend pas du paramètre du processus de diffusion α_p .

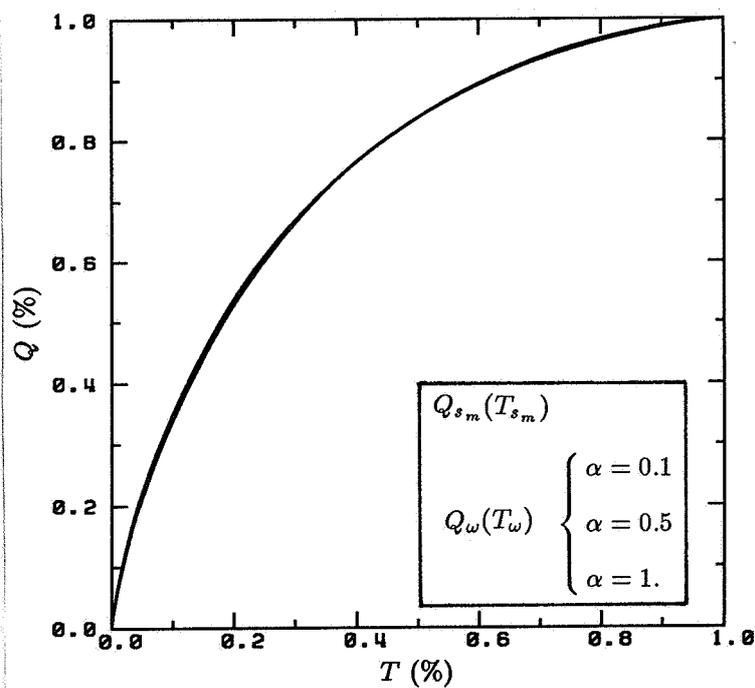


Figure 3-16 : Courbes de sélectivité – données simulées.

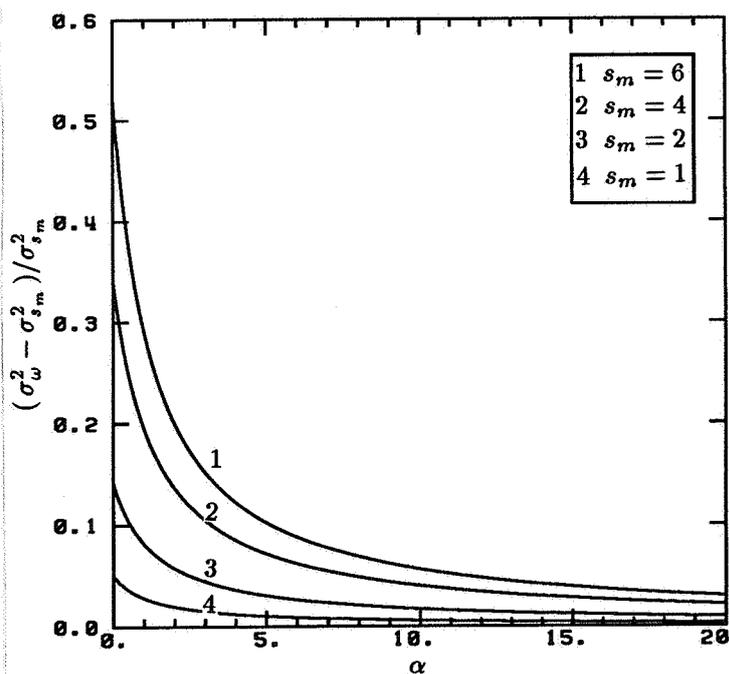


Figure 3-17 : Courbes de $(\sigma_{\omega}^2 - \sigma_{s_m}^2) / \sigma_{s_m}^2$ en fonction de α et s_m .

En pratique, lorsque que les variances σ_{ω}^2 et $\sigma_{s_m}^2$ sont peu différentes, $Q_{s_m}(T_{s_m})$ serait une approximation très raisonnable de $Q_{\omega}(T_{\omega})$. Nous avons d'ailleurs une forte chance de tomber sur cette situation dans la pratique minière, puisque les supports de sélection ne se varient jamais du ponctuel à l'infini (la dimension du gisement) comme dans l'exemple précédent. Donnons ici un exemple sur des données réelles.

Il s'agit du gisement de Luceda dont on a étudié au §3.5. un changement de support constant le long des sondages. Considérons maintenant un changement de supports mélangés toujours le long des sondages. Nous avons choisi deux supports s_1 (21 mètres par regroupement de 14 échantillons) et s_2 (3 mètres par regroupement de 2 échantillons). Après regroupement, chaque sondage est composé d'un échantillon de support s_1 (position au hasard) et de 14 échantillons de support s_2 . La longueur moyenne en mesure des supports s_1 et s_2 vaut :

$$s_m = \frac{1}{3}s_1 + \frac{2}{3}s_2 = 9 \text{ (mètres)}.$$

La variance aux supports mélangés σ_{ω}^2 et celle à support constant $\sigma_{s_m}^2$ valent respectivement :

$$\begin{aligned}\sigma_{\omega}^2 &= \frac{1}{3}\sigma_{s_1}^2 + \frac{2}{3}\sigma_{s_2}^2 = 5.36 \\ \sigma_{s_m}^2 &= 5.06\end{aligned}$$

qui ne sont que peu différentes. On donne dans la figure 3-18 la courbe de $Q_{\omega}(T_{\omega})$ expérimentale associée à ces supports mélangés et aussi celle à support constant $s = 9 m$. Elles sont en excellent accord.

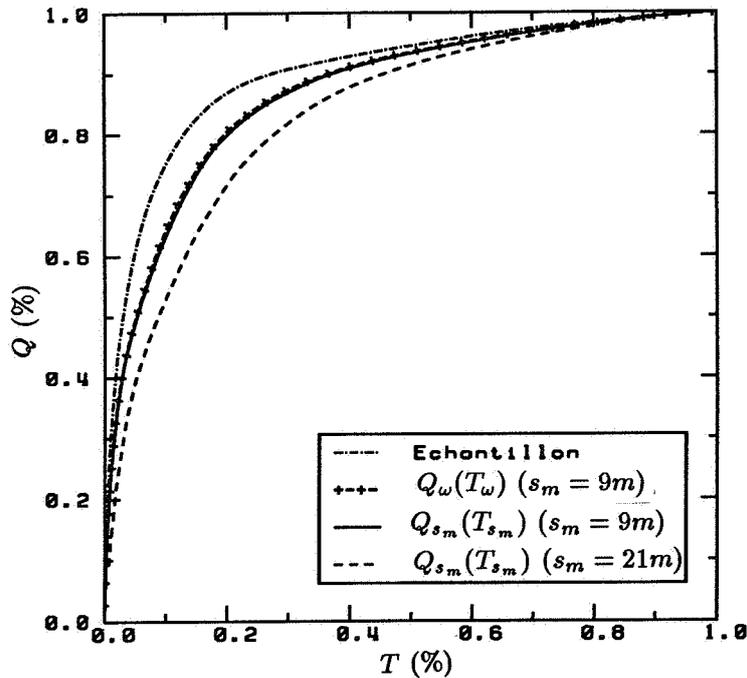


Figure 3-18 : Courbes de sélectivité – données de Luceda.

3.6.3. Cas de sélection indirecte

Lorsque l'estimateur ultime change, le formalisme est analogue à celui du mélange des supports. Considérons d'abord une sélection sur un support constant mais sur des estimateurs ultimes différents. Notons $\bar{\omega}_i$ la proportion du tonnage de blocs en mettant en œuvre l'estimateur ultime de type i , alors les relations tonnage-teneur indirectes s'écrivent :

$$T_{\bar{\omega}}^*(z) = \sum_{i=1}^I \bar{\omega}_i T_i^*(z)$$

$$Q_{\bar{\omega}}^*(z) = \sum_{i=1}^I \bar{\omega}_i Q_i^*(z)$$

où $T_i^*(z)$ et $Q_i^*(z)$ sont les relations tonnage-teneur indirectes correspondantes à l'estimateur de type i . Ceci signifie que dans le cas d'étude sur l'effet d'information des données de Bertholène (§3.4.), il suffit de faire la moyenne des $T_i^*(z)$ et des $Q_i^*(z)$ des deux estimateurs pour en déduire les courbes aux supports mélangés, car les deux estimateurs ont partagé équitablement les blocs de support constant.

En cas de mélange des supports, les estimateurs vont changer certainement d'un

support à l'autre. Considérons ici seulement le cas où les blocs de même support ont le même estimateur. Nous avons pour les relations tonnage-teneur indirectes :

$$T_{\omega}^*(z) = \sum_{i=1}^I \omega_i T_{v_i}^*(z)$$
$$Q_{\omega}^*(z) = \sum_{i=1}^I \omega_i Q_{v_i}^*(z)$$

où ω_i est la proportion du tonnage du support v_i .

CHAPITRE 4

ESTIMATION DE RESERVES RECUPERABLES LOCALES

4.1. Les expressions des réserves récupérables locales

L'estimation des réserves récupérables locales se distingue de l'estimation de celles globales en ce que les réserves récupérables locales sont conditionnées par les informations dans le voisinage du panneau à estimer. Les informations disponibles au moment de l'estimation des réserves récupérables sont en général trop peu nombreuses pour que l'on puisse obtenir une estimation précise de chacun des blocs du panneau. C'est pourquoi l'estimation des réserves récupérables est effectuée sur l'ensemble des blocs du panneau au lieu de les considérer séparément.

Pour définir les réserves récupérables locales à savoir les relations tonnage-teneur locales, on distingue comme dans l'estimation globale, le cas de sélection directe (cas idéal) et le cas de sélection indirecte (cas effectif).

- Réserves récupérables locales directes (idéales) :

$$T_v(z) = \frac{1}{N_b} \sum_{k=1}^{N_b} 1_{Z_{v_k} \geq z}$$

$$Q_v(z) = \frac{1}{N_b} \sum_{k=1}^{N_b} Z_{v_k} 1_{Z_{v_k} \geq z}$$

où N_b désigne le nombre de blocs dans le panneau V .

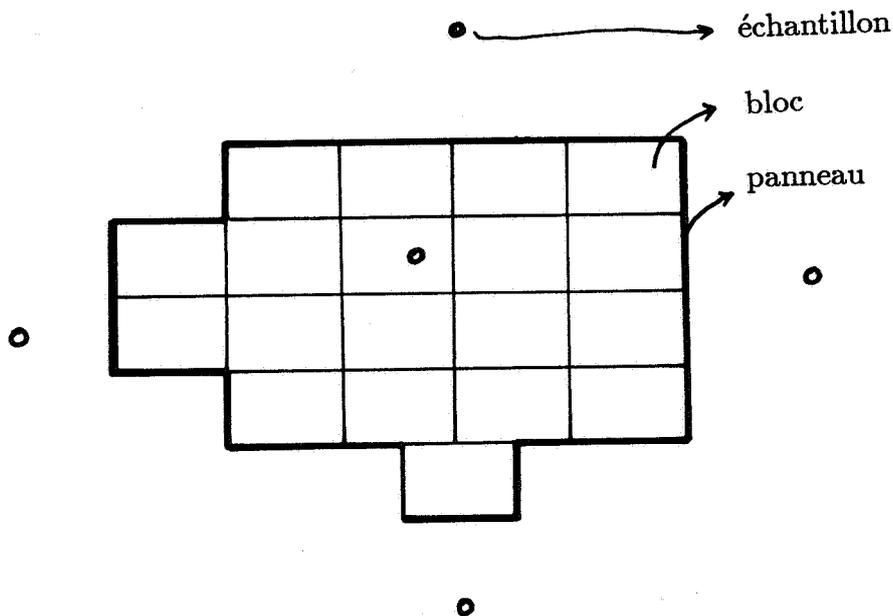


Figure 4-1 : Exemple de configuration d'informations dans l'estimation des réserves récupérables locales.

- Réserves récupérables locales indirectes (effectives) :

$$T_v^*(z) = \frac{1}{N_b} \sum_{k=1}^{N_b} 1_{Z_{v_k}^* \geq z}$$

$$Q_v^*(z) = \frac{1}{N_b} \sum_{k=1}^{N_b} Z_{v_k}^* 1_{Z_{v_k}^* \geq z}$$

où $Z_{v_k}^*$ est l'estimateur ultime de Z_{v_k} .

Rappelons que dans le cadre du modèle gamma, Z_{v_k} et $Z_{v_k}^*$ sont transformées respectivement en deux variables à loi gamma Y_{v_k} et $Y_{v_k}^*$ au moyen de deux fonctions d'anamorphose $\phi_{\alpha'}$ et $\phi_{\alpha''}$. La détermination de ces deux fonctions a fait l'objet du chapitre 3. Après transformation, les expressions des réserves récupérables locales se récrivent de la manière suivante :

- Cas de sélection directe (cas idéal) :

$$\begin{aligned}
T_v(z) &= \frac{1}{N_b} \sum_{k=1}^{N_b} 1_{Y_{v_k} \geq y} = \theta_0^{\alpha'}(y) + \sum_{n=1}^{+\infty} \theta_n^{\alpha'}(y) \left[\frac{1}{N_b} \sum_{k=1}^{N_b} l_n^{\alpha'}(Y_{v_k}) \right] \\
Q_v(z) &= \frac{1}{N_b} \sum_{k=1}^{+\infty} \phi_{\alpha'}(Y_{v_k}) 1_{Y_{v_k} \geq y} = \omega_0^{\alpha'}(y) + \sum_{n=1}^{+\infty} \omega_n^{\alpha'}(y) \left[\frac{1}{N_b} \sum_{k=1}^{N_b} l_n^{\alpha'}(Y_{v_k}) \right]
\end{aligned} \tag{4-1}$$

où $y = \phi_{\alpha'}^{-1}(z)$ et où $\theta_n^{\alpha'}(y)$ et $\omega_n^{\alpha'}(y)$ sont respectivement le coefficient de développement en polynômes de Laguerre de $1_{Y_v \geq y}$ et celui de $\phi_{\alpha'}(Y_v) 1_{Y_v \geq y}$:

$$\begin{aligned}
\theta_n^{\alpha'}(y) &= \int_0^{+\infty} 1_{t \geq y} l_n^{\alpha'}(t) g_{\alpha'}(t) dt \\
&= \begin{cases} 1 - G_{\alpha'}(y), & n = 0; \\ -\sqrt{\frac{\alpha'}{n}} l_{n-1}^{\alpha'+1}(y) g_{\alpha'+1}(y), & n \geq 1. \end{cases} \\
\omega_n^{\alpha'}(y) &= \int_0^{+\infty} \phi_{\alpha'}(t) 1_{t \geq y} l_n^{\alpha'}(t) g_{\alpha'}(t) dt \\
&= \int_y^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} [\phi'_m l_m^{\alpha'}(t)] l_n^{\alpha'}(t) g_{\alpha'}(t) dt \\
&= \sum_{m=0}^{+\infty} \phi'_m \left[\int_y^{+\infty} l_m^{\alpha'}(t) l_n^{\alpha'}(t) g_{\alpha'}(t) dt \right] \\
&= \sum_{m=0}^{+\infty} \phi'_m \pi_{mn}^{\alpha'}(y)
\end{aligned}$$

où $\pi_{mn}^{\alpha'}(y)$ se calcule à l'aide de son développement fini :

$$\begin{aligned}
\pi_{mn}^{\alpha'}(y) &= \int_y^{+\infty} l_m^{\alpha'}(t) l_n^{\alpha'}(t) g_{\alpha'}(t) dt \\
&= \sqrt{\frac{\Gamma(\alpha' + m) \Gamma(\alpha' + n)}{m! n! \Gamma^2(\alpha')}} \int_y^{+\infty} \left[\sum_{p=0}^m (-1)^p \binom{m}{p} \frac{\Gamma(\alpha')}{\Gamma(\alpha' + p)} t^p \right] \left[\sum_{q=0}^n (-1)^q \binom{n}{q} \frac{\Gamma(\alpha')}{\Gamma(\alpha' + q)} t^q \right] g_{\alpha'}(t) dt \\
&= \sqrt{\frac{\Gamma(\alpha' + m) \Gamma(\alpha' + n)}{m! n!}} \sum_{p=0}^m \sum_{q=0}^n \left\{ (-1)^{p+q} \binom{m}{p} \binom{n}{q} \frac{\Gamma(\alpha' + p + q)}{\Gamma(\alpha' + p) \Gamma(\alpha' + q)} [1 - G_{\alpha'+p+q}(y)] \right\}
\end{aligned}$$

- Cas de sélection indirecte (cas effectif) :

$$\begin{aligned}
T_v^*(z) &= \frac{1}{N_b} \sum_{k=1}^{N_b} 1_{Y_{v_k}^* \geq y} = \theta_0^{\alpha''}(y) + \sum_{n=1}^{+\infty} \theta_n^{\alpha''}(y) \left[\frac{1}{N_b} \sum_{k=1}^{N_b} l_n^{\alpha''}(Y_{v_k}^*) \right] \\
Q_v^*(z) &= \frac{1}{N_b} \sum_{k=1}^{N_b} \phi_{\alpha'}(Y_{v_k}) 1_{Y_{v_k}^* \geq y}
\end{aligned} \tag{4-2}$$

4.2. Estimation par krigeage disjonctif gamma

4.2.1. Les modèles de lois bivariables

Les quatre types de lois bivariables que nous énumérons ici sont nécessaires pour la mise en œuvre du krigeage disjonctif gamma des réserves récupérables locales (directes et indirectes), à savoir :

$$(Y(\underline{x}_i), Y(\underline{x}_j)) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} \rho_n(\underline{x}_i, \underline{x}_j) l_n^\alpha(s) l_n^\alpha(t) g_\alpha(s) g_\alpha(t) \quad (4-3)$$

$$(Y(\underline{x}_i), Y_{v_k}) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} \rho_n^v(\underline{x}_i, v_k) c_n(\alpha, \alpha') l_n^\alpha(s) l_n^{\alpha'}(t) g_\alpha(s) g_{\alpha'}(t) \quad (4-4)$$

$$(Y(\underline{x}_i), Y_{v_k}^*) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} \rho_n^*(\underline{x}_i, v_k) c_n(\alpha, \alpha'') l_n^\alpha(s) l_n^{\alpha''}(t) g_\alpha(s) g_{\alpha''}(t) \quad (4-5)$$

$$(Y_{v_k}, Y_{v_k}^*) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} r_n c_n(\alpha_1, \alpha_2) l_n^{\alpha'}(s) l_n^{\alpha''}(t) g_{\alpha'}(s) g_{\alpha''}(t) \quad (4-6)$$

$$(i, j = 1, 2, \dots, N_e; k = 1, 2, \dots, N_b)$$

où $\alpha_1 = \min(\alpha', \alpha'')$ et $\alpha_2 = \max(\alpha', \alpha'')$. N_e désigne le nombre d'échantillons dans le voisinage du panneau V , et les points \underline{x}_i (échantillons) sont considérés comme au hasard dans les blocs où ils se situent. Cette randomisation de position des échantillons est nécessaire pour assurer la cohérence interne du modèle. En effet, les deux hypothèses à savoir que les deux couples $(Y(x), Y_v)$ et $(Y(\underline{x}), Y_v)$ suivent chacun le même type de loi (4-4) ne sont pas compatibles. Cela est tout à fait similaire au modèle gaussien (Matheron, 1978(b)).

Nous avons déjà discuté aux chapitres 1 et 2 comment déterminer les paramètres α , α' et α'' de ces modèles de lois bivariables. Les coefficients ρ_n , ρ_n^v , ρ_n^* et r_n se déterminent par des covariances.

4.2.2. Cas de sélection directe

A partir des expressions (4-1), on voit que les krigeages disjonctifs de $T_v(z)$ et $Q_v(z)$ se ramènent tous à ceux des quantités $\frac{1}{N_b} \sum_{k=1}^{N_b} l_n^{\alpha'}(Y_{v_k})$ ($n = 1, 2, \dots$), compte tenu de ce

que le K.D. est un opérateur linéaire. Nous avons :

$$\left[\frac{1}{N_b} \sum_{k=1}^{N_b} l_n^{\alpha'}(Y_{v_k}) \right]^{KD} = \sum_{i=1}^{N_e} f_n^i[Y(\underline{x}_i)] = \sum_{i=1}^{N_e} \sum_{m=0}^{+\infty} \lambda_{nm}^i l_m^\alpha[Y(\underline{x}_i)]$$

où les $\lambda_{nm}^i = \int_0^{+\infty} f_n^i(t) l_m^\alpha(t) g_\alpha(t) dt$ satisfont aux équations de K.D. :

$$E \left[\frac{1}{N_b} \sum_{k=1}^{N_b} l_n^{\alpha'}(Y_{v_k}) | Y(\underline{x}_j) \right] = E \left\{ \sum_{i=1}^{N_e} \sum_{m=0}^{+\infty} \lambda_{nm}^i l_m^\alpha[Y(\underline{x}_i)] | Y(\underline{x}_j) \right\}$$

($j = 1, 2, \dots, N_e; n = 1, 2, \dots$)

d'où l'on déduit immédiatement :

$$\begin{cases} \lambda_{nm}^j = 0, & m \neq n; \\ \sum_{i=1}^{N_e} \lambda_{nm}^i \rho_n(\underline{x}_i, \underline{x}_j) = \frac{c_n(\alpha, \alpha')}{N_b} \sum_{k=1}^{N_b} \rho_n^v(\underline{x}_j, v_k), & m = n. \end{cases}$$

($j = 1, 2, \dots, N_e; n = 1, 2, \dots$)

Notons $\lambda_n^i = \lambda_{nm}^i$ ($m = n$). Nous avons alors :

$$\left[\frac{1}{N_b} \sum_{k=1}^{N_b} l_n^{\alpha'}(Y_{v_k}) \right]^{KD} = \sum_{i=1}^{N_e} \lambda_n^i l_n^\alpha[Y(\underline{x}_i)] \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Remarquons que l'orthogonalité entre $l_n^\alpha(\cdot)$ et $l_m^{\alpha'}(\cdot)$ n'est en général pas vérifiée pour $n \neq m$ lorsque $\alpha \neq \alpha'$. En effet, nous avons :

$$\int_0^{+\infty} l_n^\alpha(t) l_m^{\alpha'}(t) g_\alpha(t) dt \begin{cases} = 0, & m < n; \\ \neq 0, & m \geq n. \end{cases}$$

et

$$\int_0^{+\infty} l_n^\alpha(t) l_m^{\alpha'}(t) g_{\alpha'}(t) dt \begin{cases} = 0, & m > n; \\ \neq 0, & m \leq n. \end{cases}$$

Cependant, les relations d'échange des facteurs :

$$E[l_n^\alpha(X) | Y] = \rho_n^v c_n(\alpha, \alpha') l_n^{\alpha'}(Y)$$

lorsque (X, Y) suit une loi de Laguerre dissymétrique de type (4-4), permettent toujours la simplification du K.D. En particulier, le K.D. de $\frac{1}{N_b} \sum_{k=1}^{N_b} l_n^{\alpha'}(Y_{v_k})$ se réduit à son krigeage simple par les $l_n^\alpha[Y(\underline{x}_i)]$ ($i = 1, 2, \dots, N_e$).

Enfin, les K.D. de $T_v(z)$ et de $Q_v(z)$ s'écrivent :

$$[T_v(z)]^{KD} = \theta_0^{\alpha'}(y) + \sum_{n=1}^{+\infty} \theta_n^{\alpha'}(y) \sum_{i=1}^{N_e} \lambda_n^i l_n^\alpha[Y(\underline{x}_i)]$$

$$[Q_v(z)]^{KD} = \omega_0^{\alpha'}(y) + \sum_{n=1}^{+\infty} \omega_n^{\alpha'}(y) \sum_{i=1}^{N_e} \lambda_n^i l_n^\alpha[Y(\underline{x}_i)]$$

4.2.3. Cas de sélection indirecte

La démarche du K.D. de $T_v^*(z)$ est tout à fait similaire à celle du K.D. de $T_v(z)$, tandis que le K.D. de $Q_v^*(z)$ est un peu plus difficile à cause de la présence de l'espérance conditionnelle :

$$E \left[\phi_{\alpha'}(Y_{v_k}) 1_{Y_{v_k}^* \geq y} \mid Y(\underline{x}_i) \right] \quad (k = 1, 2, \dots, N_b; i = 1, 2, \dots, N_e)$$

Son calcul requiert en toute rigueur la connaissance de la loi trivariante de $(Y(\underline{x}_i), Y_{v_k}, Y_{v_k}^*)$ (ou la loi de $(Z(\underline{x}_i), Z_{v_k}, Z_{v_k}^*)$), ce qui est en général difficilement accessible en pratique. Toutefois, dans la plupart des cas, l'espérance conditionnelle de Z_{v_k} connaissant son estimateur ultime $Z_{v_k}^*$ et les informations actuelles $Z(\underline{x}_i)$ ($i = 1, 2, \dots, N_e$) ne doit pas être réellement différente de celle connaissant seulement $Z_{v_k}^*$. En effet, $Z_{v_k}^*$ est une estimation de Z_{v_k} avec une base d'informations (ultimes) beaucoup plus riche que celles dont on dispose actuellement, de telle sorte que ces dernières ne peuvent guère modifier l'espérance conditionnelle de Z_{v_k} à $Z_{v_k}^*$ fixé. Il est donc légitime de poser en première approximation (Matheron, 1978(c)) :

$$E [Z_{v_k} \mid (Z_{v_k}^*, Z(\underline{x}_i))] \approx E [Z_{v_k} \mid Z_{v_k}^*]$$

ce qui se réécrit en utilisant l'anamorphose :

$$E [\phi_{\alpha'}(Y_{v_k}) \mid (Y_{v_k}^*, Y(\underline{x}_i))] \approx E [\phi_{\alpha'}(Y_{v_k}) \mid Y_{v_k}^*]$$

Notons :

$$\begin{aligned} h(Y_{v_k}^*) &= E [\phi_{\alpha'}(Y_{v_k}) \mid Y_{v_k}^*] \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \phi'_n r_n c_n(\alpha_1, \alpha_2) l_n^{\alpha''}(Y_{v_k}^*) \end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} E [\phi_{\alpha'}(Y_{v_k}) 1_{Y_{v_k}^* \geq y} \mid Y(\underline{x}_i)] &= E [\phi_{\alpha'}(Y_{v_k}) 1_{Y_{v_k}^* \geq y} \mid (Y_{v_k}^*, Y(\underline{x}_i)) \mid Y(\underline{x}_i)] \\ &\approx E [h(Y_{v_k}^*) 1_{Y_{v_k}^* \geq y} \mid Y(\underline{x}_i)] = E \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \delta_n^{\alpha''}(y) l_n^{\alpha''}(Y_{v_k}^*) \mid Y(\underline{x}_i) \right] \end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned} \delta_n^{\alpha''}(y) &= \int_y^{+\infty} h(t) l_n^{\alpha''}(t) g_{\alpha''}(t) dt \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} \phi'_m r_m c_m(\alpha_1, \alpha_2) \pi_{mn}^{\alpha''}(y) \end{aligned}$$

Moyennant cette approximation, on déduit que le K.D. de $Q_v^*(z)$ se ramène également à ceux des $\frac{1}{N_b} \sum_{k=1}^{N_b} I_n^{\alpha''}(Y_{v_k}^*)$. Or on sait que ces derniers sont autokrigeables :

$$\left[\frac{1}{N_b} \sum_{k=1}^{N_b} I_n^{\alpha''}(Y_{v_k}^*) \right]^{KD} = \sum_{i=1}^{N_e} \lambda_n^i I_n^{\alpha}[Y(\underline{x}_i)] \quad (n = 1, 2, \dots)$$

où λ_n^i s'obtiennent selon le système de krigeage simple :

$$\sum_{j=1}^{N_e} \lambda_n^i \rho_n(\underline{x}_i, \underline{x}_j) = \frac{c_n(\alpha, \alpha'')}{N_b} \sum_{k=1}^{N_b} \rho_n^*(\underline{x}_i, v_k)$$

($i = 1, 2, \dots, N_e$; $n = 1, 2, \dots$)

Enfin, les K.D. de $T_v^*(z)$ et $Q_v^*(z)$ s'expriment :

$$[T_v^*(z)]^{KD} = \theta_0^{\alpha''}(y) + \sum_{n=1}^{+\infty} \theta_n^{\alpha''}(y) \sum_{i=1}^{N_e} \lambda_n^i I_n^{\alpha}[Y(\underline{x}_i)]$$

$$[Q_v^*(z)]^{KD} = \delta_0^{\alpha''}(y) + \sum_{n=1}^{+\infty} \delta_n^{\alpha''}(y) \sum_{i=1}^{N_e} \lambda_n^i I_n^{\alpha}[Y(\underline{x}_i)]$$

4.3. Estimation par conditionnement uniforme gamma

Le K.D. n'est certainement pas le seul substitut de l'espérance conditionnelle pour estimer les réserves récupérables locales. Le conditionnement uniforme (C.U.) (Matheron, 1978(c)) entre autres est particulièrement intéressant en pratique grâce à sa simplicité d'utilisation et a sans doute à peu près la même efficacité que le K.D. Ceci est confirmé par l'expérience de Guibal et Zaupa-Remacre (1984) dans le cadre du modèle gaussien. Dans cette partie, nous transposons la démarche de la méthode de conditionnement uniforme gaussien au cadre gamma, ce qui pourrait s'avérer très utile dans le cas de gisements très dissymétriques.

4.3.1. Variable conditionnante

On sait que dans le cadre du modèle multigaussien, les anamorphosées gaussiennes $Y(x_1), Y(x_2), \dots, Y(x_{N_e}), Y_{v_k}$ suivent une loi multigaussienne. Par conséquent, la loi conditionnelle de Y_{v_k} à $(Y(x_1), Y(x_2), \dots, Y(x_{N_e}))$ fixé ne dépend que du krigeage simple de Y_{v_k} à partir de $(Y(x_1), Y(x_2), \dots, Y(x_{N_e}))$:

$$[Y_{v_k} | (Y(x_1), Y(x_2), \dots, Y(x_{N_e})))] \stackrel{\mathcal{L}}{\equiv} [Y_{v_k} | (Y_{v_k})^{KS}] \quad (k = 1, 2, \dots, N_b)$$

On s'aperçoit ainsi que l'estimation des réserves récupérables locales nécessite de calculer un K.S. pour chacun des blocs dans le panneau, et puis de les utiliser pour conditionner la loi de chacun de ces blocs. Ceci est tout à fait dispendieux en pratique. L'idée du conditionnement uniforme consiste à remplacer les différents krigeages $(Y_{v_k})^{KS}$ ($k = 1, 2, \dots, N_b$) par un krigeage unique pour conditionner tous les blocs, ce qui simplifie considérablement les calculs. Ce krigeage unique peut être le krigeage simple de $\frac{1}{N_b} \sum_{k=1}^{N_b} Y_{v_k}$. De la même manière, on peut penser que cette démarche pourrait aussi être possible dans le cadre gamma.

Posons donc :

$$[f(Y_{v_k})]^{CU} = E[f(Y_{v_k}) | Z_u]$$

où Z_u désigne le K.S. de $\frac{1}{N_b} \sum_{k=1}^{N_b} Y_{v_k}$ à l'aide des $Y(\underline{x}_i)$ ($i = 1, 2, \dots, N_e$) :

$$Z_u = \sum_{i=1}^{N_e} \lambda_i [Y(\underline{x}_i) - \alpha] + \alpha' \quad (4-7)$$

où les λ_i vérifient le système :

$$\sum_{j=1}^{N_e} \lambda_j \text{Cov}[Y(\underline{x}_i), Y(\underline{x}_j)] = \frac{1}{N_b} \sum_{k=1}^{N_b} \text{Cov}[Y(\underline{x}_i), Y_{v_k}] \quad (i = 1, 2, \dots, N_e)$$

Ici, une difficulté apparaît par rapport au cas multigaussien. On ne sait pas que les couples (Y_{v_k}, Z_u) sont laguerriens, ni même que Z_u suit une loi gamma. Pour cette raison, il est nécessaire d'effectuer une anamorphose gamma sur Z_u . Posons :

$$Z_u = \phi_{\alpha^\circ}(Y_u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \phi_n^\circ l_n^{\alpha^\circ}(Y_u) \quad Y_u \sim g_{\alpha^\circ} \quad (4-8)$$

avec :

$$\begin{aligned} \phi_n^\circ &= E[\phi_{\alpha^\circ}(Y_u) l_n^{\alpha^\circ}(Y_u)] = E[Z_u l_n^{\alpha^\circ}(Y_u)] \\ &= -\sqrt{\alpha} \sum_{i=1}^{N_e} \lambda_i E\{l_1^\alpha[Y(\underline{x}_i)] l_n^{\alpha^\circ}(Y_u)\} + \alpha' E[l_n^{\alpha^\circ}(Y_u)] \end{aligned}$$

Si l'on considère que $(Y(\underline{x}_i), Y_u)$ obéit à une loi de Laguerre de densité :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r_n(\underline{x}_i, u) c_n(\alpha, \alpha^\circ) l_n^\alpha(s) l_n^{\alpha^\circ}(t) g_\alpha(s) g_{\alpha^\circ}(t)$$

on en déduit immédiatement :

$$\begin{aligned} \phi_0^\circ &= \alpha' \\ \phi_1^\circ &= -\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^\circ}} \sum_{i=1}^{N_e} \lambda_i r_1(\underline{x}_i, u) \\ \phi_n^\circ &= 0 \quad n \geq 2 \end{aligned}$$

L'anamorphose (4-8) est donc une fonction affine :

$$Z_u = \alpha' + \phi_1^{\circ} \left(\sqrt{\alpha^{\circ}} - \frac{Y_u}{\sqrt{\alpha^{\circ}}} \right) \quad (4-8')$$

de sorte que l'estimation par conditionnement uniforme peut également s'écrire :

$$[f(Y_{v_k})]^{CU} = E[f(Y_{v_k}) | Y_u]$$

D'autre part, pour respecter la variance de Z_u , on a nécessairement :

$$\sigma_u^2 = Var(Z_u) = \alpha \sum_{i=1}^{N_e} \sum_{j=1}^{N_e} \lambda_i \lambda_j \rho_1(\underline{x}_i, \underline{x}_j) = (\phi_1^{\circ})^2 = \frac{\alpha^2}{\alpha^{\circ}} \left[\sum_{i=1}^{N_e} \lambda_i r_1(\underline{x}_i, u) \right]^2$$

d'où l'on obtient la valeur maximum du paramètre α° :

$$\alpha_{max}^{\circ} = \frac{\alpha^2}{\sigma_u^2} \left(\sum_{i=1}^{N_e} \lambda_i \right)^2 = \alpha \frac{\sum_{i=1}^{N_e} \sum_{j=1}^{N_e} \lambda_i \lambda_j}{\sum_{i=1}^{N_e} \sum_{j=1}^{N_e} \lambda_i \lambda_j \rho_1(\underline{x}_i, \underline{x}_j)} \geq \alpha$$

Pour choisir une valeur explicite de α° , on procède par identification des termes constants de (4-7) et de (4-8') :

$$\alpha' - \alpha \sum_{i=1}^{N_e} \lambda_i = \alpha' + \sqrt{\alpha^{\circ}} \phi_1^{\circ}$$

ce qui nous conduit finalement à prendre $\alpha^{\circ} = \alpha_{max}^{\circ}$.

En résumant ce qui précède, on conditionne les réserves récupérables par Y_u :

$$Y_u = \frac{\sqrt{\alpha_{max}^{\circ}}}{\phi_1^{\circ}} (\phi_1^{\circ} \sqrt{\alpha_{max}^{\circ}} + \alpha' - Z_u) = \frac{\alpha}{\sigma_u^2} \left(\sum_{i=1}^{N_e} \lambda_i \right) \left[\sum_{i=1}^{N_e} \lambda_i Y(\underline{x}_i) \right]$$

qui est supposée suivre la loi gamma de paramètre α_{max}° .

4.3.2. Cas de sélection directe

On introduit une hypothèse sur les lois bivariées de (Y_{v_k}, Y_u) ($k = 1, 2, \dots, N_b$), à savoir qu'ils admettent des densités de type :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \rho_n^u(v_k, u) c_n(\alpha_1, \alpha_2) l_n^{\alpha'}(s) l_n^{\alpha^{\circ}}(t) g_{\alpha'}(s) g_{\alpha^{\circ}}(t) \quad (4-9)$$

où $\alpha_1 = \min(\alpha', \alpha^0)$ et $\alpha_2 = \max(\alpha', \alpha^0)$. Les coefficients $\rho_n^u(v_k, u)$, quant à eux, sont déterminés par les covariances entre Z_{v_k} et Z_u . Nous avons en effet :

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Z_{v_k}, Z_u) &= E \left\{ \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \phi'_n l_n^{\alpha'}(Y_{v_k}) \right] \left[\phi_1^0 l_1^{\alpha^0}(Y_u) \right] \right\} \\ &= \phi'_1 \phi_1^0 \rho_1^u(v_k, u) \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Z_{v_k}, Z_u) &= E \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} \phi'_n l_n^{\alpha'}(Y_{v_k}) \sum_{i=1}^{N_e} \lambda_i [Y(\underline{x}_i) - \alpha] \right\} \\ &= -\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha'}} \phi'_1 \sum_{i=1}^{N_e} \lambda_i \rho_1^v(\underline{x}_i, v_k) \end{aligned}$$

Par identification, on en déduit :

$$\rho_1^u(v_k, u) = \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha'}} \frac{1}{\sigma_u} \sum_{i=1}^{N_e} \lambda_i \rho_1^v(\underline{x}_i, v_k)$$

qui permet obtenir tous les $\rho_n^u(v_k, u)$ ($n = 1, 2, \dots$).

Moyennant cette hypothèse de lois bivariées (4-9), on obtient les espérances conditionnelles des facteurs :

$$E \left[l_n^{\alpha'}(Y_{v_k}) | Y_u \right] = \rho_n^u(v_k, u) c_n(\alpha_1, \alpha_2) l_n^{\alpha^0}(Y_u) \quad (k = 1, 2, \dots, N_e)$$

qui conduisent au conditionnement uniforme des réserves récupérables :

$$\begin{aligned} [T_v(z)]^{CU} &= E \left[\frac{1}{N_b} \sum_{k=1}^{N_b} 1_{Y_{v_k} \geq y} | Y_u \right] \\ &= \theta_0^{\alpha'}(y) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ \theta_n^{\alpha'}(y) c_n(\alpha_1, \alpha_2) l_n^{\alpha^0}(Y_u) \left[\frac{1}{N_b} \sum_{k=1}^{N_b} \rho_n^u(v_k, u) \right] \right\} \\ [Q_v(z)]^{CU} &= E \left[\frac{1}{N_b} \sum_{k=1}^{N_b} \phi_{\alpha'}(Y_{v_k}) 1_{Y_{v_k} \geq y} | Y_u \right] \\ &= \omega_0^{\alpha'}(y) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ \omega_n^{\alpha'}(y) c_n(\alpha_1, \alpha_2) l_n^{\alpha^0}(Y_u) \left[\frac{1}{N_b} \sum_{k=1}^{N_b} \rho_n^u(v_k, u) \right] \right\} \end{aligned}$$

4.3.3. Cas de sélection indirecte

La démarche du conditionnement uniforme des réserves récupérables indirectes est tout à fait analogue au cas direct. Toutefois, on doit connaître en plus les lois bivariées des $(Y_{v_k}^*, Y_u)$ ($k = 1, 2, \dots, N_e$). Il paraît naturel de supposer que ces couples admettent les lois de densité :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \rho_n^*(v_k, u) c_n(\alpha_1, \alpha_2) I_n^{\alpha''}(s) I_n^{\alpha^\circ}(t) g_{\alpha''}(s) g_{\alpha^\circ}(t)$$

où $\alpha_1 = \min(\alpha'', \alpha^\circ)$ et $\alpha_2 = \max(\alpha'', \alpha^\circ)$. Les coefficients $\rho_n^*(v_k, u)$ se calculent de même par identification des covariances, à savoir :

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Z_{v_k}^*, Z_u) &= E \left\{ \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \phi_n'' I_n^{\alpha''}(Y_{v_k}^*) \right] \left[\phi_1^\circ I_1^{\alpha^\circ}(Y_u) \right] \right\} \\ &= \phi_1'' \phi_1^\circ \rho_1^*(v_k, u) \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Z_{v_k}^*, Z_u) &= E \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} \phi_n'' I_n^{\alpha''}(Y_{v_k}^*) \sum_{i=1}^{N_e} \lambda_i [Y(\underline{x}_i) - \alpha] \right\} \\ &= -\sqrt{\alpha} \phi_1'' \sum_{i=1}^{N_e} \lambda_i \rho_1^*(\underline{x}_i, v_k) \end{aligned}$$

D'où l'on déduit :

$$\rho_1^*(v_k, u) = \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha''}} \frac{1}{\sigma_u} \sum_{i=1}^{N_e} \lambda_i \rho_1^*(\underline{x}_i, v_k)$$

qui permet obtenir tous les $\rho_n^*(v_k, u)$ ($n = 1, 2, \dots$).

On obtient enfin le conditionnement uniforme des réserves récupérables indirectes:

$$\begin{aligned}
[T_v^*(z)]^{CU} &= E \left[\frac{1}{N_b} \sum_{k=1}^{N_b} 1_{Y_{v_k}^* \geq y} \mid Y_u \right] \\
&= \theta_0^{\alpha''}(y) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ \theta_n^{\alpha''}(y) c_n(\alpha_1, \alpha_2) l_n^{\alpha^\circ}(Y_u) \left[\frac{1}{N_b} \sum_{k=1}^{N_b} \rho_n^*(v_k, u) \right] \right\} \\
[Q_v^*(z)]^{CU} &= E \left[\frac{1}{N_b} \sum_{k=1}^{N_b} \phi_{\alpha'}(Y_{v_k}) 1_{Y_{v_k}^* \geq y} \mid Y_u \right] \\
&= \frac{1}{N_b} \sum_{k=1}^{N_b} E \left[\phi_{\alpha'}(Y_{v_k}) 1_{Y_{v_k}^* \geq y} \mid (Y_{v_k}^*, Y_u) \mid Y_u \right] \\
&\approx \frac{1}{N_b} \sum_{k=1}^{N_b} E \left[h(Y_{v_k}^*) 1_{Y_{v_k}^* \geq y} \mid Y_u \right] \\
&= \delta_0^{\alpha''}(y) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ \delta_n^{\alpha''}(y) c_n(\alpha_1, \alpha_2) l_n^{\alpha^\circ}(Y_u) \left[\frac{1}{N_b} \sum_{k=1}^{N_b} \rho_n^*(v_k, u) \right] \right\}
\end{aligned}$$

4.4. Cas d'étude : gisement de Luceda

Reprenons les données du gisement de Luceda sur lesquelles ont été testé les modèles de changement de support gamma et gaussien au §3.5. Rappelons que ces modèles ont donné tous deux des résultats satisfaisants. Cependant, on s'attend à ce que ces deux modèles se comportent différemment pour l'estimation des réserves récupérables locales, puisque les réserves récupérables d'un panneau sont conditionnées par des données dans son voisinage et de plus, les lois bivariées de type échantillon-échantillon interviennent en général dans le calcul. Pour le voir, étudions l'exemple simple suivant.

Considérons l'indicatrice de teneur d'un support $v : 1_{Z_v \geq z}$. v est le support de 14 échantillons (21 mètres) regroupés le long de sondage. Nous essayons d'estimer cette indicatrice par le K.D. gamma et le K.D. gaussien en prenant au hasard un échantillon \underline{x} dans v . Prenons par exemple $z = 0.81$ qui correspond grosso modo à la teneur de coupure pratique. Chaque segment (de longueur 21 mètres) est estimé respectivement par chacun des 14 échantillons du segment estimé, de sorte que l'on dispose de suffisamment de valeurs (plus de deux mille) pour en faire des inférences statistiques significatives.

Le nuage (ou plutôt la courbe) de corrélation entre le K.D. gaussien et le K.D. gamma présenté à la figure 4-2 retient notre attention. On constate sur cette figure que ces deux estimateurs sont fortement différents. En particulier, on observe un alignement des points (plus de 80% de l'ensemble des points), là où les K.D. gamma valent approximativement 0.18, tandis que les K.D. gaussiens varient de 0 à 0.6 . En effet, ces points correspondent aux cas où les échantillons sont stériles; et leurs teneurs sont souvent très peu précises. Le K.D. gamma ignore la différence entre ces faibles valeurs, tandis que le K.D. gaussien, à cause de la manque de robustesse de l'anamorphose gaussienne, attribue à ces faibles valeurs dont la différence est peu significative, une forte différence dans l'estimation. Ceci est un défaut d'utilisation du modèle gaussien dans le cas d'estimation locale avec des données présentant une forte proportion des valeurs très faibles. Ce défaut est malgré tout sans rapport avec l'hypothèse de la binormalité ponctuelle souvent inadéquate dans ces situations.

Pour savoir si les estimations par K.D. gaussien et par K.D. gamma se conforment ou non à la réalité, il est intéressant de regarder la regression : $1_{Z_v \geq z} / 1_{Z_v^* \geq z}^*$. En fait, un estimateur sans biais conditionnel de $1_{Z_v \geq z}$ doit vérifier :

$$E(1_{Z_v \geq z} | 1_{Z_v^* \geq z}^*) = 1_{Z_v^* \geq z}^*$$

ce qui signifie simplement qu'à une estimation donnée, on doit s'attendre à ce que la variable réelle est en moyenne égale à cette estimation. Dans l'exemple présent, pour pouvoir calculer l'espérance conditionnelle $E(1_{Z_v \geq z} | 1_{Z_v^* \geq z}^*)$, on procède en regroupant les valeurs estimées en 10 classes de largeur 0.1 . Dans le cas gamma, seule la classe $0.1 < 1_{Z_v \geq z} \leq 0.2$ a un nombre suffisant de points pour permettre une statistique significative. Sur la figure 4-3, on constate effectivement un bon accord entre $E(1_{Z_v \geq z} | 0.1 < 1_{Z_v^* \geq z}^* \leq 0.2)$ et la moyenne de $1_{Z_v^* \geq z}^*$ dans la classe $]0.1, 0.2]$. Au contraire, pour ces indicatrices estimées pauvres par le K.D. gamma, le K.D. gaussien a donné des valeurs dispersées entre 0 et 0.6 . La regression : $1_{Z_v \geq z} / 1_{Z_v^* \geq z}^*$ montre bien que cette dispersion est assez illusoire. En effet, des segments estimés pauvres sont en réalité moins pauvres, tandis que ceux estimés assez riches sont en réalité moins riches(Figure 4-3).

Enfin, deux points supplémentaires sur cet exemple sont à noter. D'abord, le K.D. est ici identique à l'espérance conditionnelle, car on n'utilise qu'une seule information. C'est aussi la raison pour laquelle les lois bivariées échantillon-échantillon n'interviennent pas dans le calcul.

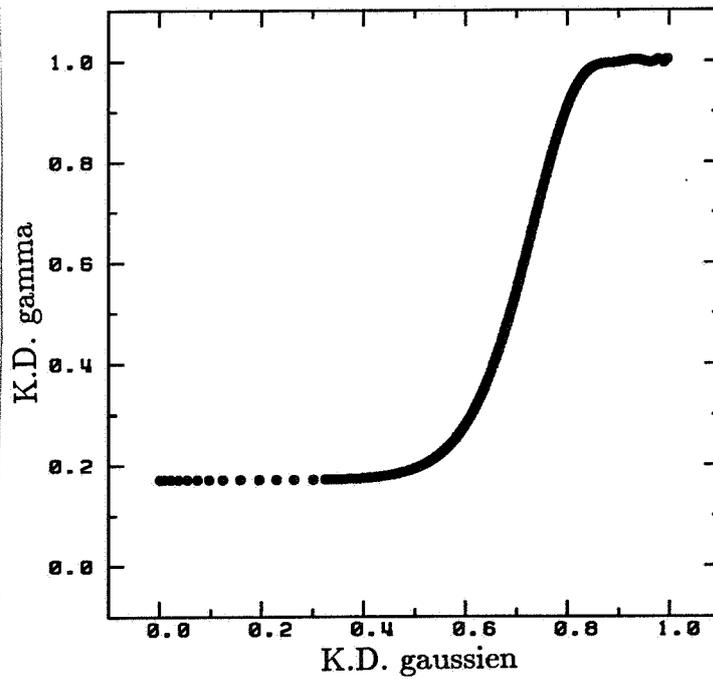


Figure 4-2 : Nuage de corrélation entre le K.D. gaussien et le K.D. gamma de $1_{Z_v \geq z}$.

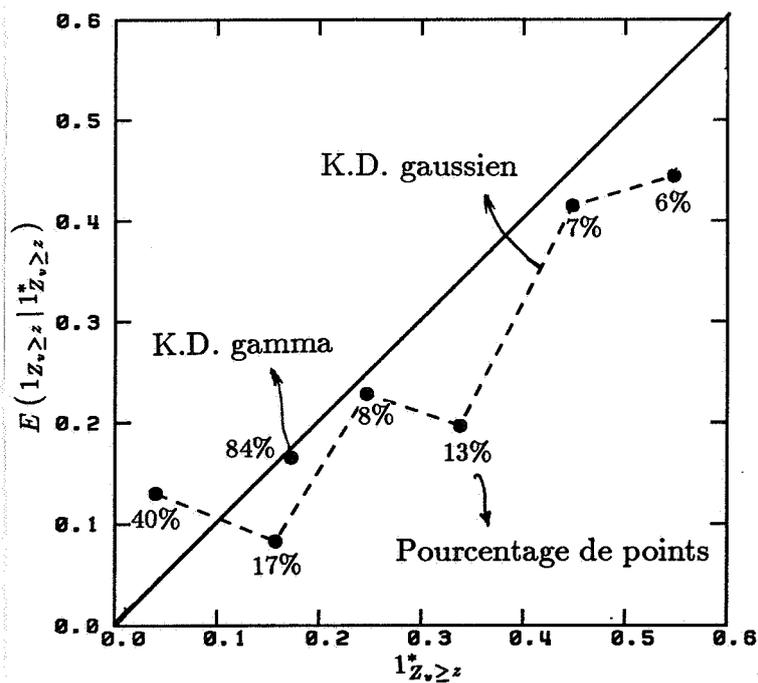


Figure 4-3 : Regression : $1_{Z_v \geq z} / 1_{Z_v^* \geq z}^*$.

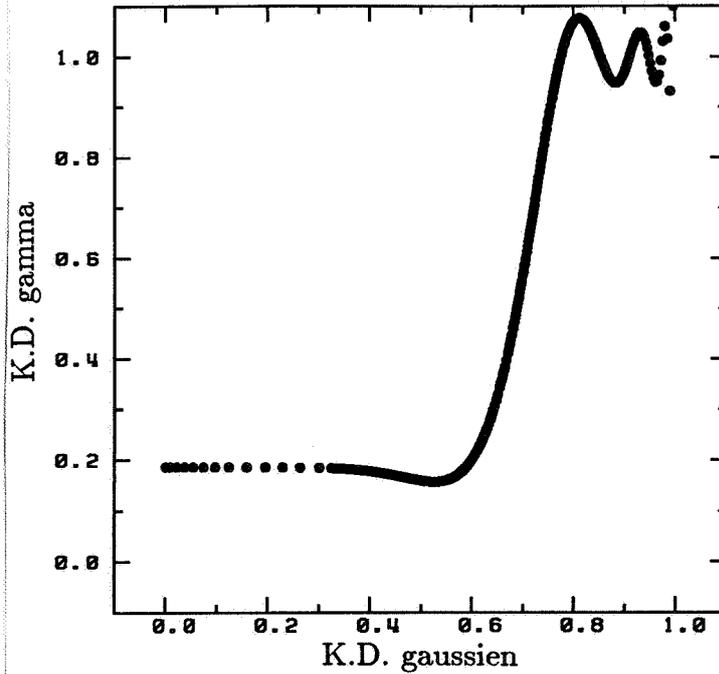


Figure 4-4 : Nuage de Corrélation entre le K.D. gaussien et Le K.D. gamma de $1_{Z_v \geq z}$.

Le deuxième point concerne le problème de convergence du K.D. gamma de l'indicatrice $1_{Z_v \geq z}$ dans le cas particulier où l'on a choisi $\alpha' = \alpha'_{max}$, de sorte que les coefficients $\rho_n^{\alpha'}$ sont strictement égaux à 1. En pratique, il serait préférable dans ce genre de situation, de prendre une valeur de α' légèrement inférieure à α'_{max} . Ceci change très peu notre modèle, mais permet de gagner considérablement sur la vitesse de convergence de l'estimateur. C'est ce que nous avons fait dans l'exemple précédent. Si l'on prend strictement $\alpha' = \alpha'_{max}$, le nuage de corrélation entre le K.D. gaussien et le K.D. gamma ressemble à celui de la figure 4-4. On observe que la convergence du développement du K.D. gamma n'a eu lieu, surtout au grande valeurs, bien qu'une cinquantaine de polynômes aient été utilisée.

CHAPITRE 5

CONCLUSIONS ET QUELQUES THEMES DE REFLEXION

5.1. Conclusions

On se propose maintenant de faire un tour d'horizon sur les aspects essentiels que l'on peut tirer de ce travail sur le modèle gamma.

- L'estimation des distributions spatiales et son application à l'estimation des réserves récupérables nécessitent de recourir à un modèle de distribution. La loi gamma a l'avantage en premier lieu d'avoir des formes très variées selon son paramètre α , ce qui lui permet d'approcher la forme de l'histogramme des données empiriques, et ainsi d'obtenir une fonction d'anamorphose robuste.

- Dans le cas de données très dissymétriques, l'anamorphose gaussienne (même lorsqu'elle est possible) ne conduit pas toujours à une modélisation correcte de lois bivariées; une anamorphose gamma peut être plus convenable. De plus, on peut choisir le paramètre α de façon à ce que les données anamorphosées respectent au mieux une loi isofactorielle gamma. Pour tester le caractère bivariable, on dispose d'un certain nombre d'outils possibles à mettre en œuvre. Bien qu'ils ne soient pas tous exhaustifs, la combinaison de leur utilisation permet de contrôler le choix du modèle et le choix des paramètres dans un modèle. C'est avec des exemples de simulations que nous avons pu montrer l'importance de la modélisation de lois bivariées. Dans les cas où le krigeage d'indicatrice ou sa version améliorée (qui, tous deux, ne recourent pas à un modèle de lois bivariées explicite) s'avèrent peu efficaces, le krigeage disjonctif basé sur un

modèle de lois bivariées admet encore des résultats satisfaisants. Cependant, il faut être prudent lors du choix du modèle. Une modélisation incorrecte de lois bivariées peut fausser l'estimation.

- Pour estimer les distributions spatiales à un support v différent de celui des échantillons, un modèle de changement de support est obligatoire. Un tel modèle est souvent difficile à tester sur la base des données d'exploration. À partir d'une modélisation de type gamma des distributions des données des échantillons, on peut construire un modèle de changement de support à loi gamma. Ce modèle a l'avantage de dépendre du paramètre α' de la fonction d'anamorphose au support v . Ceci lui confère une souplesse vis à vis des phénomènes différents. On choisit différentes valeurs de α' pour différents types de phénomènes. De la même manière, on a pu construire des modèles gamma pour décrire l'effet d'information. Cela conduit immédiatement aux estimations des réserves récupérables globales. À partir de ces modèles, on peut aussi estimer les réserves récupérables locales moyennant la technique du krigeage disjonctif ou la technique du conditionnement uniforme. À l'aide d'un exemple pratique, nous avons pu montrer, dans le cas de données très dissymétriques, l'avantage du modèle gamma par rapport au modèle gaussien pour l'estimation locale, bien que parfois, ces modèles conduisent à des estimations globales analogues.

- Notons d'ailleurs que la loi bigamma comme la loi monovariée gamma, ainsi que le modèle de changement de support gamma, tendent à se rapprocher du modèle gaussien aux grandes valeurs du paramètre α de la fonction d'anamorphose au support d'échantillon. Tout phénomène susceptible d'être décrit par le modèle gaussien peut donc l'être aussi par un modèle gamma. Or, l'anamorphose gaussienne ne permet pas de transformer une loi bigamma en une loi bigaussienne. On s'aperçoit ainsi que le modèle gamma se comporte comme une généralisation du modèle gaussien. Dans les applications, lorsque le modèle gaussien s'avère inadéquat, cela vaut la peine d'essayer le modèle gamma, surtout dans les cas de données très dissymétriques (e.g. les gisements d'uranium et d'or ou la concentration en un polluant etc.). Remarquons finalement que la mise en œuvre du modèle gamma n'est pas plus difficile que celle du modèle gaussien, bien qu'une grande attention doive être prêtée au choix des paramètres.

5.2. Quelques thèmes de réflexion

Pour être complet, il convient aussi d'indiquer quelques problèmes importants, bien qu'ils ne soient pas traités ou pas soulignés dans ce qui précède. On peut croire que la future recherche sur ces problèmes contribuera au développement de la géostatistique tant au plan théorique que pratique.

- Dans les cas de données très dissymétriques, l'estimation du variogramme n'est pas souvent chose aisée. Par rapport à l'anamorphose gamma, l'anamorphose gaussienne réduit l'influence des fortes valeurs, et permet ainsi une analyse structurale plus facile sur l'anamorphosé. Mais, il ne faut pas oublier que l'on ne peut en profiter que si l'on peut construire un modèle de loi bivariable à partir duquel vont s'effectuer les autres étapes d'estimation des distributions spatiales. Malheureusement, ceci n'est souvent pas le cas. Chauvet (1982) suggère de regarder "la nuée variographique" qui contient plus d'information sur la structure des données à étudier que le variogramme usuel, et permet ainsi de mieux comprendre la structure des données dans l'espace. Par ailleurs, de nombreux travaux ont visé à définir des "algorithmes robustes" d'estimation du variogramme (cf. par exemple les proceedings des congrès géostatistiques 83 et 88). Citons ici en particulier la méthode, proposée par Srivastava et al. (1988), qui consiste à calculer simplement le corrélogramme expérimental, puis à en déduire le variogramme.

- Les méthodes présentées dans cette thèse reposent sur l'hypothèse de stationnarité assez stricte. Ceci limite leur application. On se demande naturellement si l'on pourrait s'affranchir de cette hypothèse pour se situer dans un cadre moins exigeant tel que le cadre de l'hypothèse de stationnarité locale ou le cadre de l'hypothèse intrinsèque. En 1977, Matheron a considéré la possibilité d'imposer au krigeage disjonctif des conditions d'universalité en s'inspirant du krigeage ordinaire qui ne requiert qu'une hypothèse de stationnarité locale ou intrinsèque. Cependant, ces conditions d'universalité ne se justifient que pour des variables définies au support d'échantillon et leurs régularisées. D'autre part, même si l'on se trouve dans cette situation, ces conditions d'universalité doivent être utilisées avec prudence. Par exemple, on tombe sur des problèmes de convergence très sévères lorsque l'on cherche à estimer des distributions spatiales locales. En effet, le krigeage disjonctif avec conditions universalité converge aussi lentement que le développement en polynômes orthogonaux de la fonction d'indicatrice (Rivoirard, 1985). Notons par contre que toujours dans le but de franchir le seuil de la stationnarité stricte,

Matheron a suggéré d'utiliser une variable conditionnante supplémentaire représentant la teneur moyenne locale. Cette teneur locale provient de l'estimation du panneau ou une zone englobant le panneau, grâce à des méthodes reposant sur l'hypothèse de stationarité locale ou intrinsèque : krigeage ordinaire par exemple. Une simplification de cette méthode consiste à n'utiliser que cette variable conditionnante. Ceci est développé et utilisé par Zaupa-Remacre (1984) pour l'estimation des réserves récupérables locales. La simplicité et les résultats expérimentaux rendent cette méthode très séduisante. Enfin, bien que cette méthode soit exposée par Zaupa-Remacre dans le cadre gaussien, il en va à peu près de même dans le cadre gamma. Du point de vue pratique, lorsque qu'il s'agit d'un gisement très dissymétrique et présentant une zonéographie, cette méthode est sans doute plus intéressante que ce que l'on a présenté au §4.3., où la variable conditionnante est un krigeage simple des anamorphosées des blocs.

- En suivant la démarche du cas gaussien (Maréchal, 1980; Rivoirard, 1984(a)), on peut établir parallèlement une extension du krigeage disjonctif gamma et du conditionnement uniforme gamma au cas multivariable. Cette extension est très utile surtout pour estimer les gisements polymétalliques et très dissymétriques. Notons d'ailleurs que le modèle gamma apparaît particulièrement souple dans le cas d'un gisement dont la variable principale n'est pas très dissymétrique (adaptation au modèle gaussien), tandis que la variable secondaire est très dissymétrique (inadaptation au modèle gaussien) (e.g. les gisements de cuivre de type porphyrique où la minéralisation en cuivre (peu dissymétrique) est accompagnée par celle en or ou autres métaux précieux (très dissymétriques)). Dans ce genre de situation, on peut appliquer une anamorphose gamma avec une grande valeur de α pour la variable peu dissymétrique, mais une petite valeur de α pour la variable très dissymétrique.

- Au contraire de ce qui se passe dans le cas gaussien, on ne dispose pas à l'heure actuelle de méthode générale de simulation dans le cas gamma, sauf pour certains cas particuliers tels que le processus de diffusion à une dimension et son extension à n dimensions par la méthode de substitution ou la mesure aléatoire orthogonale régularisée etc. Mentionnons par ailleurs que si $Y(x)$ est une fonction aléatoire gaussienne, alors $\frac{1}{2}Y^2(x)$ est une fonction aléatoire à la loi gamma de paramètre $\frac{1}{2}$. Les algorithmes de simulation de type non gaussien font actuellement l'objet de recherches tant dans le domaine géostatistique que dans les autres domaines.

• Devant des phénomènes de natures très variées, on ne dispose pas, à l'heure actuelle (sans doute pour toujours ?), de modèle universel capable de tous les décrire. C'est la raison pour laquelle on s'oriente vers la recherche des modèles différents pour des phénomènes différents. Le modèle gaussien est performant pour les phénomènes ayant une distribution pas très dissymétrique (gisements de fer, de cuivre et de zinc etc), tandis que le modèle gamma est plutôt destiné aux ceux qui présentent une distribution très dissymétrique (gisements d'or et d'uranium etc.). Citons aussi la famille des modèles discrets (Matheron, 1984(d) et 1988(b); Lajaunie et Lantuéjoul, 1988) destinés à estimer des phénomènes de nature discrète tels que des gisements de pierres précieuses ou des phénomènes discrétisables, et aussi le modèle à résidu d'indicatrice autokrigeable de Rivoirard (1988). A titre de curiosité, on se demande d'ailleurs si l'on peut généraliser le modèle gamma en remplaçant la loi gamma par la loi de Gauss inverse généralisée, comme l'on sait que la loi gamma est un cas limite de cette dernière. Sur ce point, quelques résultats sont rassemblés dans l'annexe qui suit.

ANNEXE

QUELQUES REFLEXIONS SUR LA LOI DE GAUSS INVERSE OU VERS UNE GENERALISATION DU MODELE GAMMA

A.1. Introduction

Le modèle gamma se comporte comme une généralisation du modèle gaussien. Ceci lui confère un domaine d'utilisation beaucoup plus large que le modèle gaussien. Toutefois, la loi gamma n'est aussi qu'un cas particulier d'une famille de loi que l'on appelle loi de Gauss inverse généralisée, et qui admet comme densité :

$$\frac{(\beta/\alpha)^\lambda}{2 K_\lambda(\alpha\beta)} y^{\lambda-1} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^2}{y} + \beta^2 y\right)\right] \quad (y > 0) \quad (A-1)$$

où K_λ est la fonction de Bessel modifiée de deuxième espèce. La loi de Gauss inverse généralisée dépend de trois paramètres α , β et λ . On retrouve une loi gamma en prenant $\lambda > 0$ et en faisant tendre α vers 0. Ainsi se pose la question de savoir si l'on pourrait construire des modèles bâtis sur la loi (A-1) qui pourrait généraliser le modèle gamma, permettant ainsi de couvrir un domaine d'utilisation plus large.

La loi de Gauss inverse généralisée a été proposée par Good en 1953. Puis, elle a été utilisée par Sichel (1971) pour construire un mélange de loi de Poisson (que l'on appelle maintenant loi de Sichel discrète). Cette famille de distributions discrètes, à queue très allongée, a un grand intérêt pour modéliser les gisements de métaux précieux dont les gisements de diamant en particulier.

Un cas particulier bien connu de (A-1) est la loi de Gauss inverse ($\lambda = -\frac{1}{2}$). Elle

été obtenu tout d'abord par Schrödinger (1915) en considérant le temps d'atteinte d'une droite par une particule suivant un mouvement brownien. Depuis, elle a été étudié abondamment dans la littérature. En particulier, Matheron (1985(b)) a développé certaines propriétés de cette loi (appelée loi de Sichel continue par cet auteur) qui suggèrent son intérêt dans le domaine géostatistique.

Cependant, on ne connaît que fort peu de chose à propos des lois multivariées gaussiennes inverses. Wasan (1968), puis Kocherlakota (1986) ont introduit des lois bivariées à loi marginale gaussienne inverse. Il s'agit de lois de deux variables aléatoires dépendantes, mais non-corrélées, de sorte qu'elles ne présentent que très peu intérêt pour la géostatistique.

Dans ce qui suit, après quelques rappels sur la loi de Gauss inverse (§A.2.), nous essayons de construire une loi bivariable symétrique à partir du mouvement brownien (§A.3.), et aussi de définir un processus stationnaire admettant cette loi bivariable (§A.4.). Le paragraphe §A.5. est consacré à une loi bivariable dissymétrique qui constitue un modèle de changement de support. Ce modèle est testé sur un jeu de données de teneurs en uranium (§A.6.). Enfin, dans le paragraphe §A-7, sont présentées des séries de fonctions orthogonales à loi de Gauss inverse.

Mentionnons aussi que Barndorff-Nielsen et al. (1978) ont montré que le temps d'atteinte d'une droite par la trajectoire d'un processus de diffusion homogène suit une loi de Gauss inverse généralisée. Ceci suggère que le procédé de construction de lois bivariées gaussiennes inverses, que nous allons présenter, pourrait donner naissance à des lois bivariées gaussiennes inverses généralisées, en remplaçant le mouvement brownien par un processus de diffusion. Nous n'aborderons pas ici ce problème.

A.2. Quelques rappels sur la loi de Gauss inverse

On dira qu'une variable aléatoire Y suit une loi de Gauss inverse si sa densité vaut:

$$f_{\alpha}^{\beta}(y) = \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}} y^{-\frac{3}{2}} \exp\left(\alpha\beta - \frac{\alpha^2}{2y} - \frac{\beta^2 y}{2}\right) \quad (y > 0) \quad (A-2)$$

qui est le cas $\lambda = -\frac{1}{2}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ de la loi de Gauss inverse généralisée (A-1).

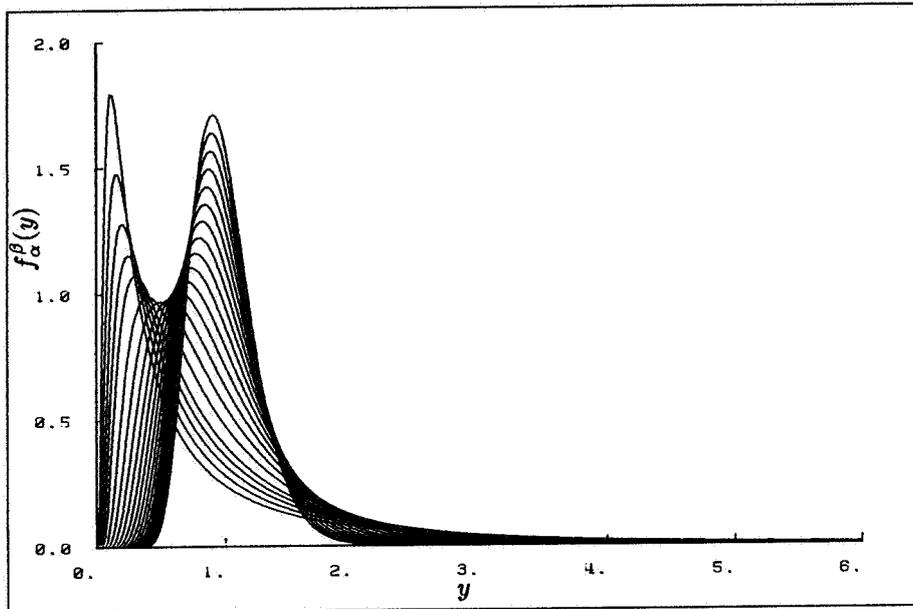


Figure A-1 : Quelques courbes de densité de la loi de Gauss inverse avec $m = 1$, $\sigma^2 = 2.8, \dots, 0.063$ (de gauche à droite).

A partir de la représentation de Sonine-Schläfli des fonctions de Bessel modifiées de deuxième espèce (cf. par exemple Matheron 1965, p.49), nous déduisons les moments de tout ordre de la loi (A-2) :

$$E(Y^n) = \sqrt{\frac{2\alpha\beta}{\pi}} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n e^{\alpha\beta} K_{n-\frac{1}{2}}(\alpha\beta)$$

En particulier, nous avons pour la moyenne et la variance de Y :

$$m = \frac{\alpha}{\beta}; \quad \sigma^2 = \frac{\alpha}{\beta^3}$$

Avec les deux paramètres m et σ^2 , la loi (A-2) se récrit :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \left(\frac{m}{y}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left[\frac{m^2}{\sigma^2} \left(1 - \frac{m}{2y} - \frac{y}{2m}\right)\right] \quad (y > 0) \quad (A-2')$$

A m fixé, la loi de Gauss inverse est très dissymétrique aux grandes valeurs de σ . Au contraire, elle tend à approcher à une loi de Gauss lorsque σ tend vers zéro. (Figure A-1).

La fonction de répartition de la loi de Gauss inverse s'exprime de manière simple à l'aide de celle de la loi de Gauss (centrée et réduite) G :

$$F(y) = G\left(\beta\sqrt{y} - \frac{\alpha}{\sqrt{y}}\right) + e^{2\alpha\beta} \left[1 - G\left(\beta\sqrt{y} + \frac{\alpha}{\sqrt{y}}\right)\right] \quad (A-3)$$

La transformée de Laplace de la loi (A-2) vaut :

$$E(e^{-\lambda Y}) = e^{\alpha(\beta - \sqrt{\beta^2 + 2\lambda})} \quad (A-4)$$

D'où il est clair que la loi de Gauss inverse est indéfiniment divisible (Matheron, 1985).

A.3. Une loi bivariable symétrique

Les techniques pour l'estimation des réserves récupérables de la géostatistique non linéaire ont besoins de deux sortes de lois bivariées, à savoir des lois symétriques (du type échantillon-échantillon ou bloc-bloc) et des lois dissymétriques (du type échantillons-blocs). Une manière commode d'introduire des lois bivariées à loi marginale gaussienne inverse consiste à partir de son interprétation en terme du mouvement brownien, à savoir que si $X(t)$ est le processus gaussien (mouvement brownien) d'espérance nulle et de variance $\sigma^2(t) = t$, l'instant aléatoire où la trajectoire de ce processus atteint pour la première fois la droite $x = \alpha - \beta t$ ($\alpha > 0$, $\beta > 0$) admet la loi de densité (A-2).

Considérons maintenant les instants aléatoires Y_1 , Y et Y_2 où la trajectoire de $X(t)$ atteint respectivement pour la première fois les droites $x = \tau - \beta t$, $x = \alpha - \beta t$ et $x = (\tau + \alpha) - \beta t$ ($\alpha \geq \tau > 0$ et $\beta > 0$).

Notons $Y' = Y_2 - Y_1$. On montre que Y' suit également la loi de Gauss inverse de paramètre α et β . En effet :

$$E(e^{-\lambda Y'}) = E[e^{-\lambda(Y_2 - Y_1)}] = E\left\{E[e^{-\lambda(Y_2 - Y_1)} | Y_1]\right\} = e^{\alpha(\beta - \sqrt{\beta^2 + 2\lambda})}$$

A l'aide de la transformée de Laplace de la loi de Gauss inverse (A-4), On déduit facilement celle du couple (Y, Y') :

$$\begin{aligned} E(e^{-\lambda Y - \mu Y'}) &= E[e^{-\lambda Y - \mu(Y_2 - Y_1)}] = E[e^{-\mu(Y_2 - Y) - (\mu + \lambda)(Y - Y_1) - \lambda Y_1}] \\ &= \exp\left[(\alpha + \tau)\beta - \tau(\sqrt{\beta^2 + 2\mu} + \sqrt{\beta^2 + 2\lambda}) - (\alpha - \tau)\sqrt{\beta^2 + 2(\mu + \lambda)}\right] \end{aligned} \quad (A-5)$$

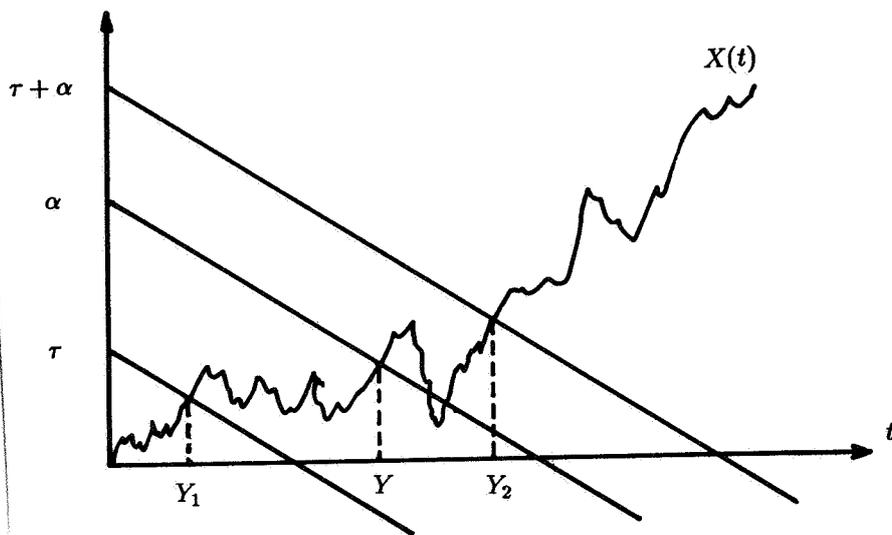


Figure A-2 : Schéma pour la construction d'un couple symétrique à loi marginale gaussienne inverse.

Sous cette forme, on aperçoit que le couple (Y, Y') est aussi indéfiniment divisible.

La covariance entre Y et Y' vaut :

$$\text{Cov}(Y, Y') = E \{ [(Y - Y_1) + Y_1] [(Y_2 - Y) + (Y - Y_1)] \} - m^2 = \frac{\alpha - \tau}{\beta^3}$$

et leur coefficient de corrélation vaut :

$$\rho = \frac{\alpha - \tau}{\alpha}$$

Remarquons que si $\rho = 0$, Y et Y' sont indépendantes, et que dans le sens inverse, si Y et Y' sont indépendantes, alors $\rho = 0$. Autrement dit, l'indépendance et l'absence de corrélation entre Y et Y' sont équivalentes.

On montre d'ailleurs que la loi bivariable (A-5) tend à se rapprocher d'une loi bigaussienne lorsque α augmente à β fixé, ou lorsque β augmente à α fixé. Pour le voir, Posons $\beta = 1$ (ce qui ne nuit pas à la généralité). Partant de la transformée de Laplace du couple (Y, Y') , on en déduit immédiatement la transformée de Fourier du couple

centré normé :

$$E \left\{ \exp \left[i \mu \left(\frac{Y - \alpha}{\sqrt{\alpha}} \right) + i \nu \left(\frac{Y' - \alpha}{\sqrt{\alpha}} \right) \right] \right\}$$

$$= \exp \left\{ \alpha \left[(2 - \rho) - (1 - \rho) \left(\sqrt{1 - \frac{2\mu i}{\alpha}} + \sqrt{1 - \frac{2\nu i}{\alpha}} \right) - \rho \sqrt{1 - \frac{2i(\mu + \nu)}{\alpha}} - \frac{i(\mu + \nu)}{\sqrt{\alpha}} \right] \right\}$$

Faisant tendre α vers l'infini, on obtient :

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} E \left\{ \exp \left[i \mu \left(\frac{Y - \alpha}{\sqrt{\alpha}} \right) + i \nu \left(\frac{Y' - \alpha}{\sqrt{\alpha}} \right) \right] \right\} = \exp \left(-\frac{\mu^2 + \nu^2 + 2\rho\mu\nu}{2} \right)$$

qui est précisément la transformée de Fourier d'une loi bigaussienne.

Malheureusement, nous n'avons pas pu obtenir une inversion simple de (A-5). Cependant nous pouvons donner une représentation intégrale de la fonction de densité :

$$f(y, y') = \int_0^{y \wedge y'} f_{\alpha-\tau}^{\beta}(z) f_{\tau}^{\beta}(y-z) f_{\tau}^{\beta}(y'-z) dz$$

où $y \wedge y'$ désigne la plus petite valeur parmi y et y' .

Notons que la transformée de Laplace (A-5) se développe aussi sous la forme suivante:

$$E \left(e^{-\lambda Y - \mu Y'} \right)$$

$$= E \left(e^{-\lambda Y} \right) E \left(e^{-\mu Y'} \right) \exp \left\{ \alpha \rho \left[\sqrt{\beta^2 + 2\lambda} + \sqrt{\beta^2 + 2\mu} - \sqrt{\beta^2 + 2(\lambda + \mu)} - \beta \right] \right\}$$

$$= E \left(e^{-\lambda Y} \right) E \left(e^{-\mu Y'} \right) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\alpha \rho)^n}{n!} \left[\sqrt{\beta^2 + 2\lambda} + \sqrt{\beta^2 + 2\mu} - \sqrt{\beta^2 + 2(\lambda + \mu)} - \beta \right]^n$$

qui suggère éventuellement une factorisation que nous ne sommes pas parvenus à exploiter.

Notons par ailleurs que si l'on définit les variables Y_1 , Y_2 , Y_3 et Y_4 comme les temps d'atteinte par le processus gaussien $X(t)$ des droites $x = \tau_1 - \beta t$, $x = \tau_2 - \beta t$, $x = (\tau_1 + \alpha) - \beta t$ et $x = (\tau_2 + \alpha) - \beta t$ ($\tau_1 \leq \tau_2$), alors le couple $(Y_3 - Y_1, Y_4 - Y_2)$ suit encore la loi (A-5), puisque avec un simple changement d'origine, on se retrouve dans la situation précédente.

A.4. Un processus stationnaire à loi de Gauss inverse

D'après le schéma de construction d'un couple à loi de Gauss inverse, on peut définir un processus à loi bivariable (A-5). Notons $T(\tau)$ ($\tau \in [0, +\infty[$) l'instant où la trajectoire de $X(t)$ atteint pour la première fois la droite $x = \tau - \beta t$. Posons :

$$Y(\tau) = T(\tau + \alpha) - T(\tau)$$

On vérifie aisément que $Y(\tau)$ ($\tau \in [0, +\infty[$) est un processus stationnaire de covariance triangulaire :

$$C(h) = E[Y(\tau + h)Y(\tau)] - m^2 = \begin{cases} \frac{\alpha-h}{\beta^3}, & \text{if } h < \alpha \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Compte-tenu de ce que $T(\tau)$ est un processus à accroissements indépendants et à loi de Gauss inverse, on en déduit un procédé simple de simulation de $Y(\tau)$. Pour ce faire, faisons choix d'une unité $d\tau$ de façon à ce que le paramètre α soit un multiple de $d\tau$. Puis, on génère une suite de valeurs mutuellement indépendantes et à la loi de Gauss inverse de paramètres $d\tau$ et β : s_1, s_2, \dots, s_N . Notons $p = \frac{\alpha}{d\tau}$ et prenons enfin :

$$Y(n d\tau) = \sum_{i=n+1}^{n+p} s_i \quad (n = 1, 2, \dots, N - p)$$

Rappelons que pour générer des valeurs à loi de Gauss inverse, Matheron (1985) a donné une méthode simple. On part d'une gaussienne centrée réduite X de sorte que $X^2/2$ est une variable gamma réduite, et l'on prend :

$$S = X^2/\alpha^2; \quad z_0(S) = \frac{1}{2}(S + 2 - \sqrt{S^2 + 4S})$$

puis $Z = z_0(S)$ avec la probabilité $1/(1+z_0)$ ou $Z = 1/z_0(S)$ avec la probabilité complémentaire : la variable Z ainsi construite obéit à la loi de Gauss inverse de paramètres α et $\beta = \alpha$. Pour une simulation de la loi de Gauss inverse de paramètres τ et β , il suffit d'utiliser la méthode précédente en prenant $\alpha = \sqrt{\tau\beta}$, puis de multiplier les valeurs générées par τ/β .

Pour tester le modèle de fonction aléatoire à loi bivariable (A-5), On s'intéresse à la relation entre les variogramme d'ordre 1 et d'ordre 2. Partant de la transformée de

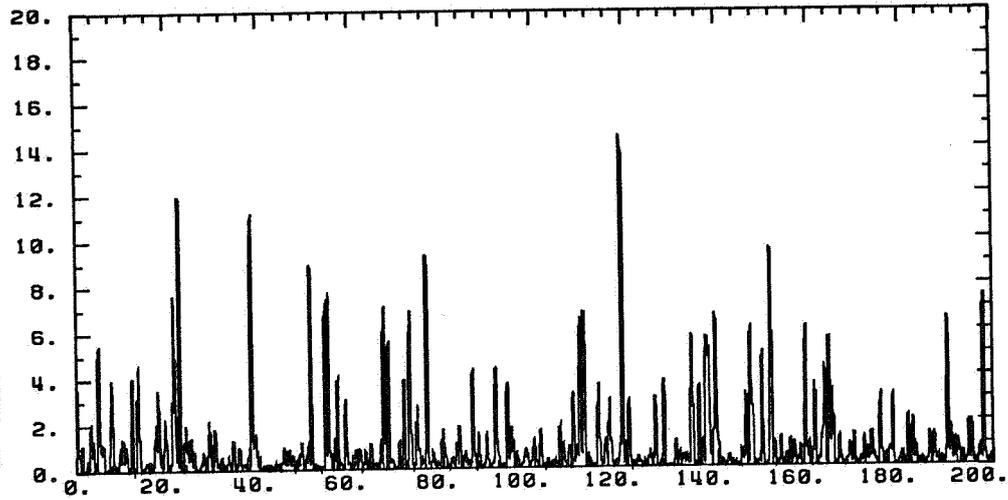


Figure A-3 : Simulation d'un processus stationnaire à loi de Gauss inverse

$$\alpha = \beta = 0.5; d\tau = 0.05$$

Laplace (A-5), on en déduit :

$$\begin{aligned} E \left\{ e^{iu[Y(\tau+h)-Y(\tau)]} \right\} &= \exp \left[(\alpha + h)\beta - h(\sqrt{\beta^2 - 2iu} + \sqrt{\beta^2 + 2iu}) - (\alpha - h)\beta \right] \\ &= \exp \left[2h\beta - h(\sqrt{\beta^2 - 2iu} + \sqrt{\beta^2 + 2iu}) \right] = e^{h(\beta - \sqrt{\beta^2 + 2iu})} e^{h(\beta - \sqrt{\beta^2 - 2iu})} \\ &= E \left[e^{iu(X-X')} \right] \end{aligned}$$

ce qui montre que $Y(\tau+h) - Y(\tau)$ admet la même loi que la différence entre deux variables X et X' indépendantes et à la même loi de Gauss inverse de paramètres h et β . D'où vient :

$$\frac{1}{2}E|Y(\tau+h) - Y(\tau)| = \frac{1}{2}E|X - X'|$$

ainsi que la relation entre le variogramme d'ordre 1 $\gamma_1(h)$ et le variogramme d'ordre 2 $\gamma(h)$:

$$\gamma_1(h) = S(h, \beta) = S(\beta^3 \gamma(h), \beta)$$

où $S(a, b)$ désigne la sélectivité de la loi de Gauss inverse de paramètre a et b . Quelques courbes de cette relation sont reproduits à la figure A-4. Nous constatons que, à moyenne m fixée, la courbe γ/γ_1 tend à se rapprocher de la diagonale (caractère mosaïque) lorsque

mosaïque) lorsque la variance σ^2 augmente. Au contraire, elle devient de plus en plus proche d'une parabole lorsque σ^2 décroît. Notons d'ailleurs que l'on ne dispose pas d'une formule simple de la sélectivité de la loi de Gauss inverse, les courbes dans la figure A-4 sont obtenues par calcul numérique des intégrales.

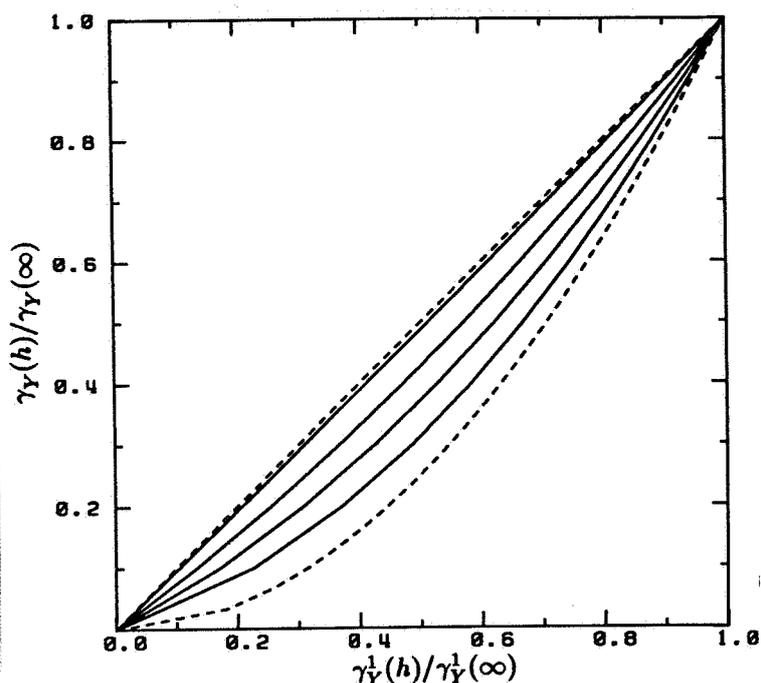


Figure A-4 : Courbes de destructuration de la loi bivariable de Gauss inverse $m = 1$, $\sigma^2 = +\infty, 10, 2, 1, 0.5, 0^+$ (de gauche à droite).

A.5. Une loi bivariable dissymétrique

Des lois bivariées dissymétriques peuvent être contruites également à partir du mouvement brownien. Pour cela, il suffit de considérer les deux instants Y et Y_v où le processus gaussien $X(t)$ atteint pour la première fois respectivement les droites $x = \alpha - \beta t$ et $x = \alpha' - \beta' t$ ($0 < \alpha' \leq \alpha$, $0 < \beta < \beta'$; ou $0 < \alpha' < \alpha$, $0 < \beta \leq \beta'$) (Figure A-5). On en déduit immédiatement la loi conditionnelle de Y à Y_v fixé :

$$Y | Y_v = y_v \sim f_\theta^\beta(y - y_v) \quad (y > y_v) \quad (A-6)$$

où $\theta = (\alpha - \alpha') + (\beta' - \beta)y_v$, ainsi que la loi bivariable de type dissymétrique entre Y et Y_v :

$$(Y, Y_v) \sim f_\theta^\beta(y - y_v) f_{\alpha'}^{\beta'}(y_v) \quad (y > y_v) \quad (A-6')$$

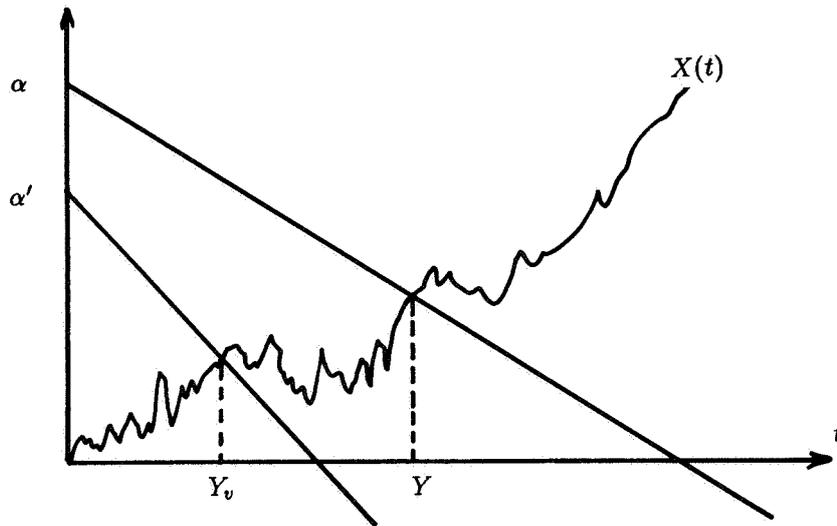


Figure A-5 : Schéma pour la construction d'un couple dissymétrique à loi marginale gaussienne inverse.

Considérons maintenant le problème de changement de support. Si $Z(x)$ et Z_v représentent respectivement la teneur au support d'échantillon et celle de bloc v , alors elles sont liées par la relation de Cartier :

$$Z_v = E(Z(\underline{x}) | Z_v) \quad (A-7)$$

où \underline{x} désigne l'échantillon au hasard dans v . Considérons que $Z(\underline{x})$ et Z_v peuvent être anamorphosées respectivement aux deux variables Y et Y_v à loi de Gauss inverse :

$$Z(\underline{x}) = \phi[Y(\underline{x})]$$

$$Z_v = \phi'(Y_v)$$

et supposons que $(Y(\underline{x}), Y_v)$ suive la loi $(A-6')$. On en déduit l'expression de ϕ' en fonction de ϕ :

$$\begin{aligned} Z_v = \phi'(Y_v) &= E\{\phi[Y(\underline{x})] | Y_v\} \\ &= \int_{Y_v}^{+\infty} \phi(y) f_{\theta}^{\beta}(y - Y_v) dy \\ &= \int_0^{+\infty} \phi(y + Y_v) f_{\theta}^{\beta}(y) dy \end{aligned} \quad (A-8)$$

Il s'agit d'une intégrale plutôt difficile à calculer sauf dans des cas particuliers où par exemple, l'anamorphose au support d'échantillon est une fonction affine. Prenons le cas où $Z(x) = Y(x)$. On aurait simplement :

$$Z_v = \frac{\beta'}{\beta} Y_v + \frac{\alpha - \alpha'}{\beta} \quad (A-9)$$

Dans ce simple modèle de changement de support, les paramètres α et β sont déterminés par la moyenne m et la variance σ^2 des échantillons, tandis que α' et β' doivent satisfaire d'abord la variance de Z_v :

$$\sigma_v^2 = \frac{1}{\beta^2} \frac{\alpha'}{\beta'}$$

Sous cette condition, le choix de α' et de β' est encore très arbitraire. Il est pourtant à remarquer les contraintes suivantes :

- $\alpha' \leq \alpha$;
- $\beta' \geq \beta$ qui entraîne :

$$\sigma_v^2 = \frac{1}{\beta^2} \frac{\alpha'}{\beta'} \leq \frac{\alpha'}{\beta^3} \Rightarrow \alpha' \geq \sigma_v^2 \beta^3 = \frac{\sigma_v^2}{\sigma^2} \alpha$$

Par conséquent, α' doit être choisi dans l'intervalle $[(\sigma_v^2/\sigma^2)\alpha, \alpha]$. Si l'on prend $\alpha' = \alpha$, alors $\min(Z_v) = \min[Z(\underline{x})]$. Sinon, Z_v sera strictement supérieure à la constante positive $(\alpha - \alpha')/\beta$. En tout cas, il faut confronter le choix au phénomène en question (cf. §3.2.2.).

A l'aide de la formule (A-3), on peut calculer les courbes tonnage-teneur sans aucune difficulté. Notant $Z_v = a Y_v + b$ avec $a = \beta'/\beta$ et $b = (\alpha - \alpha')/\beta$, on a :

$$\begin{aligned} T_v(z) &= E(1_{Z_v \geq z}) = E[1_{Y_v \geq (z-b)/a}] = 1 - F\left(\frac{z-b}{a}\right) \\ Q_v(z) &= E(Z_v 1_{Z_v \geq z}) = E[(a Y_v + b) 1_{Y_v \geq (z-b)/a}] \\ &= a E[Y_v 1_{Y_v \geq (z-b)/a}] + b E[1_{Y_v \geq (z-b)/a}] \\ &= a \int_{\frac{z-b}{a}}^{+\infty} t f(t) dt + b \left[1 - F\left(\frac{z-b}{a}\right)\right] \\ &= a \frac{\alpha'}{\beta'} F\left[\left(\frac{\alpha'}{\beta'}\right)^2 \frac{a}{z-b}\right] + b \left[1 - F\left(\frac{z-b}{a}\right)\right] \end{aligned}$$

où F est la fonction de répartition de la loi de Gauss inverse de paramètres α' et β' .

A.6. Cas d'étude : gisement de Bertholène

A.6.1. Approche de la distribution de teneur des échantillons

Les données de teneur en uranium auxquelles nous nous intéressons ici proviennent d'un échantillonnage à maille régulière du gisement de Bertholène (cf. aussi §1.6. et §3.4.). L'histogramme empirique de ces données montre une répartition dissymétrique (coefficient de variation $\sigma/m = 1.9$), à savoir, d'une part la fréquence majeure des valeurs faibles, d'autre part une queue très allongée de quelques fortes valeurs.

Pour la mise en œuvre des techniques de la géostatistique non linéaire, il est avantageux d'associer la variable d'étude à une distribution usuelle, soit par un ajustement direct de l'histogramme empirique, soit plus généralement par une anamorphose. Dans le cas présent, compte-tenu de la forme de l'histogramme empirique, nous avons essayé de l'ajuster par une loi de Gauss inverse. A titre de comparaison, on a envisagé d'utiliser également une loi lognormale. A partir des statistiques sur les données disponibles telles que la moyenne et la variance, on a pu obtenir les paramètres de la loi de Gauss inverse et ceux de la loi lognormale (Tableau A-1).

| | | |
|----------------------|------------------|-----------------------|
| expérimental | $m = 847.371$ | $\sigma^2 = 2627280.$ |
| loi de Gauss inverse | $\alpha = 15.22$ | $\beta = 0.01796$ |
| loi lognormale | $\mu = 5.9727$ | $\nu = 1.2405$ |

Tableau A-1 : Paramètres statistiques sur les échantillons.

Dans le tableau A-1, μ et ν sont les paramètres de la loi lognormale de densité :

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}z} \exp\left[-\frac{1}{2\nu^2}(\ln z - \mu)^2\right] \quad (z > 0)$$

Les figures A-6 reproduisent les courbes de tonnage-teneur empiriques et leurs ajustements respectifs par la loi de Gauss inverse et par la loi lognormale. Nous constatons une bonne adéquation de la loi de Gauss inverse avec les résultats empiriques, mais il n'en est pas ainsi avec la loi lognormale. On observe d'ailleurs que la loi de Gauss inverse est plus sélective que la loi lognormale. Plus généralement, on montre que à moyenne et variance égales, la loi de Gauss inverse est toujours plus sélective que la loi lognormale, et cet écart est d'autant plus important que le coefficient de variation σ/m augmente (Matheron, 1985(b)).

A.6.2. Changement de support le long des sondages

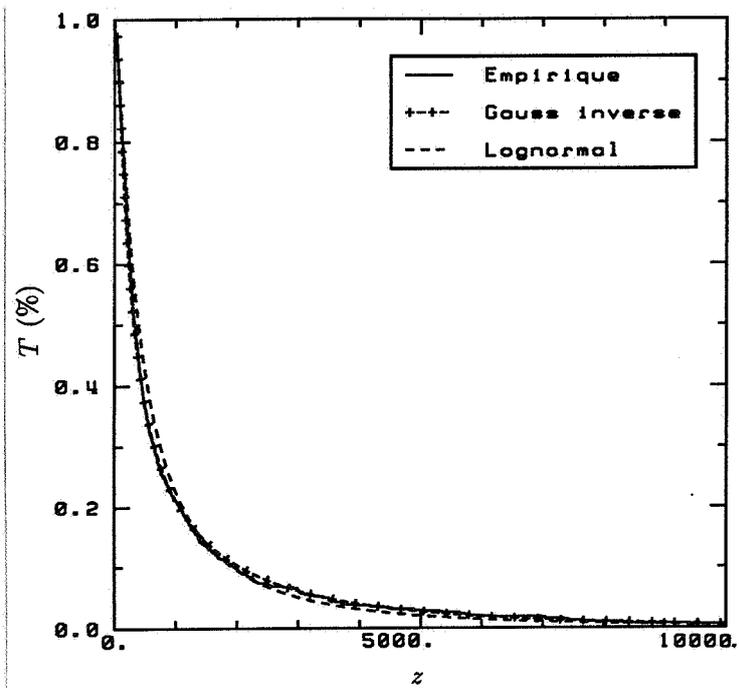
La mise en œuvre du modèle de changement de support présenté au §A-5 est ici chose aisée parce que la distribution des échantillons peut être approchée par une loi de Gauss inverse. Considérons le changement de support de la longueur d'échantillon ($1m$) à celle de sondage ($6m$) d'où une comparaison possible entre le modèle de changement de support et la réalité. Rappelons que la variance des sondages vaut $\sigma_v^2 = 1332888$. On en déduit l'intervalle du paramètre α' :

$$\alpha' \in [\beta^3 \sigma_v^2, \alpha] = [7.72, 15.22]$$

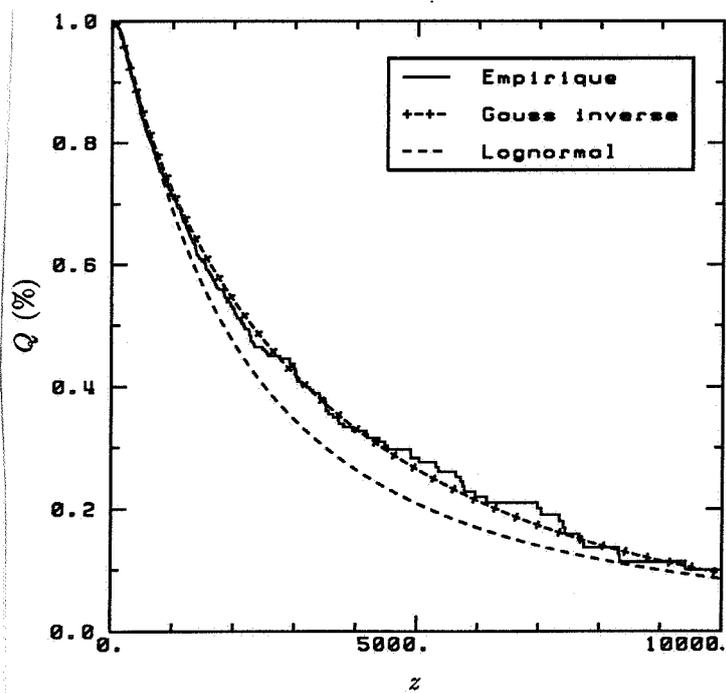
ainsi que l'intervalle du paramètre $\beta' = \frac{1}{\beta^2} \frac{\alpha'}{\sigma_v^2}$:

$$\beta' \in [\beta, \frac{1}{\beta^2} \frac{\alpha}{\sigma_v^2}] = [0.01796, 0.0354]$$

On constate sur les figures A-7, que le modèle avec $\alpha' = \alpha$ admet des résultats excellents contrairement celui avec $\alpha' = \beta^3 \sigma_v^2$ où se produit une sous-estimation très substantielle.

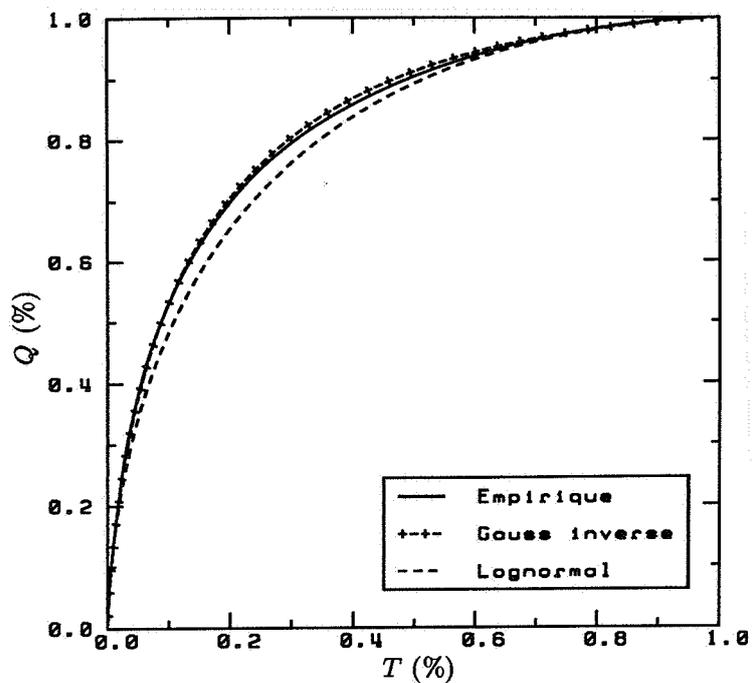


(a) : Courbes de tonnage de minerai



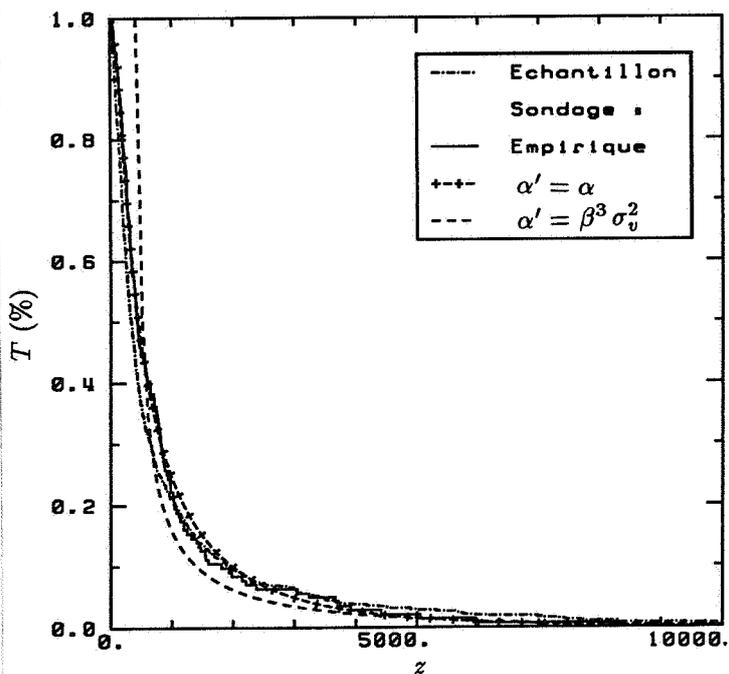
(b) : Courbes de quantité de métal

Figures A-6 : Courbes tonnage-teneur au support d'échantillon.



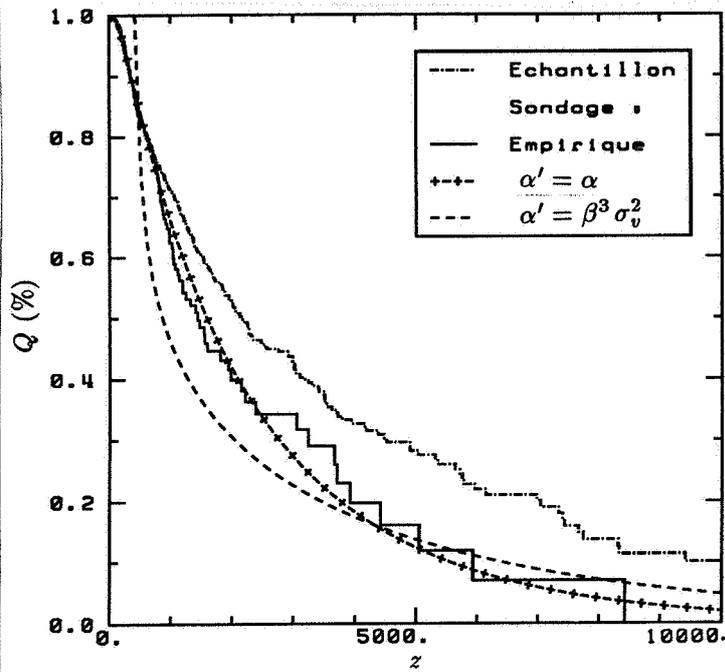
(c) : Courbes de sélectivité

Figures A-6(suite) : Courbes tonnage-teneur au support d'échantillon.

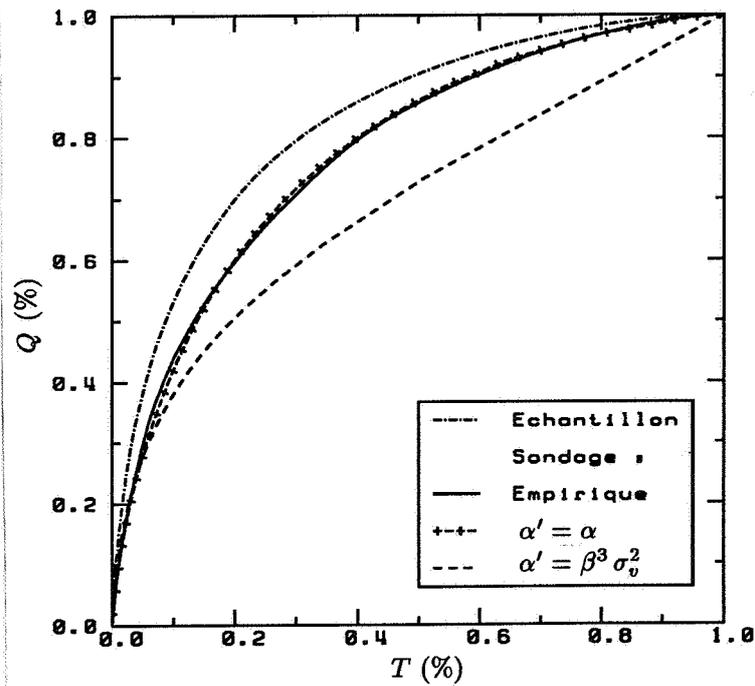


(a) : Courbes de tonnage de minerai

Figures A-7 : Courbes tonnage-teneur au support de sondage.



(b) : Courbes de quantité de métal



(c) : Courbes de sélectivité

Figures A-7(suite) : Courbes tonnage-teneur au support de sondage.

A.7. Fonctions orthogonales à loi de Gauss inverse

Pour rechercher des fonctions orthogonales pour la loi de Gauss inverse, partons des polynômes écrits de la manière suivante :

$$\begin{aligned} w_0 &= 1 \\ w_1 &= 1 + a_{11} u \\ w_2 &= 1 + a_{21} u + a_{22} u^2 \\ &\vdots \\ w_n &= 1 + a_{n1} u + a_{n2} u^2 + \dots + a_{nn} u^n \end{aligned}$$

où $u = u(Y)$ avec Y suivant la loi de Gauss inverse de paramètres α et β . Ensuite, on envisage de déterminer les coefficients a_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$). Notons :

$$W = \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ u^2 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix}$$

On vérifie sans peine que :

$$W = AU \Rightarrow WW' = AUU'A' \Rightarrow E(WW') = AE(UU')A'$$

En imposant la condition d'orthogonalité $E(w_i w_j) = 0 \forall i \neq j$, On obtient les coefficients a_{ij} :

$$\begin{pmatrix} a_{n1} \\ a_{n2} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & \dots & m_n \\ m_2 & m_3 & \dots & m_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_n & m_{n+1} & \dots & m_{n+n-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -m_0 \\ -m_1 \\ \vdots \\ -m_{n-1} \end{pmatrix} \quad (A-10)$$

$(n = 1, 2, \dots)$

où $m_n = E(u^n)$.

Prenons l'exemple $u = Y$, alors :

$$E(u^n) = E(Y^n) = \sqrt{\frac{2\alpha\beta}{\pi}} e^{\alpha\beta} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n K_{n-\frac{1}{2}}(\alpha\beta)$$

ainsi que w_n ($n = 0, 1, \dots$) est une suite de polynômes qui constituent une base d'Hilbert dans $L^2(\mathbb{R}_+, f_\alpha^\beta)$. Notons aussi que le système (A-10) est plutôt difficile à résoudre.

Cependant, il se simplifie considérablement si l'on prend $u = e^{-\frac{\beta^2}{2}Y}$ (Wasan, 1968). En effet :

$$m_n = E \left(e^{-\frac{\beta^2}{2}nY} \right) = e^{\alpha\beta(1-\sqrt{n+1})}$$

Les coefficients a_{ij} se récrivent :

$$\begin{pmatrix} a_{n1} \\ a_{n2} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q^{\sqrt{2}} & q^{\sqrt{3}} & \dots & q^{\sqrt{n+1}} \\ q^{\sqrt{3}} & q^{\sqrt{4}} & \dots & q^{\sqrt{n+2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q^{\sqrt{n+1}} & q^{\sqrt{n+2}} & \dots & q^{\sqrt{2n}} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -q^{\sqrt{1}} \\ -q^{\sqrt{2}} \\ \vdots \\ -q^{\sqrt{n}} \end{pmatrix}$$

($n = 1, 2, \dots$)

où $q = e^{-\alpha\beta}$, ainsi que les fonctions orthogonales :

$$w_n(Y) = 1 + a_{n1} e^{-\frac{\beta^2}{2}Y} + \dots + a_{nn} e^{-\frac{\beta^2}{2}nY} \quad (n = 0, 1, \dots) \quad (A-11)$$

Nous démontrons que cette série de fonctions orthogonales constitue une base d'Hilbert à loi de Gauss inverse. Pour cela, il suffit de montrer que $\forall h(y) \in L^2(\mathfrak{R}_+, f_\alpha^\beta)$ et $\forall n = 0, 1, \dots$,

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{\beta^2}{2}ny} h(y) f_\alpha^\beta(y) dy = 0$$

si et seulement si $h(y) \equiv 0$ p.s.

La condition est évidemment suffisante. Pour la nécessité, partons de la fonction continue définie comme :

$$H(y) = \int_0^y h(t) f_\alpha^\beta(t) dt \quad (y \in]0, +\infty[)$$

$H(0) = H(+\infty) = 0$. En intégrant par partie, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{\beta^2}{2}ny} H(y) dy = 0 \quad \forall n = 1, 2, \dots$$

Faisons changement de variable $y = \frac{2}{\beta^2} \ln \frac{1}{z}$, et définissons :

$$H^*(z) = \begin{cases} 0, & z = 0; \\ H\left(\frac{2}{\beta^2} \ln \frac{1}{z}\right), & z \in]0, 1[; \\ 0, & z = 1 \end{cases}$$

$H^*(z)$ est continue sur $[0, 1]$. Selon le théorème d'approximation de Weierstrass, $\forall \varepsilon > 0$, il existe un polynôme $P(z) = \sum_{i=0}^{N_\varepsilon} p_i z^i$ tel que

$$|H^*(z) - P(z)| < \varepsilon \quad (z \in [0, 1])$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \int_0^1 H^*(z) P(z) dz &= \sum_{i=0}^{N_\varepsilon} p_i \int_0^1 H^*(z) z^i dz \\ &= \frac{\beta^2}{2} \sum_{i=0}^{N_\varepsilon} p_i \int_0^{+\infty} H(y) e^{-\frac{\beta^2}{2}(i+1)y} dy = 0 \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \int_0^1 |H^*(z)|^2 dz &= \int_0^1 H^*(z) [H^*(z) - P(z)] dz \\ &\leq \varepsilon \int_0^1 |H^*(z)| dz \leq \varepsilon \sqrt{\int_0^1 |H^*(z)|^2 dz} \end{aligned}$$

d'où :

$$\int_0^1 |H^*(z)|^2 dz \leq \varepsilon^2$$

qui entraîne $H^*(z) = 0 \forall z \in [0, 1]$ p.s. Cela revient $H(y) = 0 \forall y \in]0, +\infty[$ p.s. D'où en déduit $h(y) = 0 \forall y \in]0, +\infty[$ p.s.

Pour calculer les fonctions $w_n(Y)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), il est souhaitable de le faire par récurrence. D'après l'algorithme de Stieltjes, on peut poser :

$$w_{n+1}(Y) = b_n u w_n(Y) + c_n w_n(Y) + d_n w_{n-1}(Y) \quad (n > 1) \quad (A-12)$$

où $u = e^{-\frac{\beta^2}{2}Y}$. En utilisant l'orthonormalité des $w_n(Y)$, il est aisé d'obtenir les coefficients b_n , c_n et d_n . Nous avons :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\sqrt{E[u^2 w_n^2(Y)] - E^2[u w_n^2(Y)] - E^2[u w_n(Y) w_{n-1}(Y)]}} \\ c_n &= -b_n E[u w_n^2(Y)] \\ d_n &= -b_n E[u w_n(Y) w_{n-1}(Y)] \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} E[u^l w_n(Y) w_m(Y)] &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m a_{ni} a_{mj} \exp \left[\alpha \beta \left(1 - \sqrt{i+j+l+1} \right) \right] \\ &(l = 1, 2; \quad m = n-1, n; \quad n = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

Par conséquent, partant de $w_0(Y) = 1$ et $w_1(Y) = 1 - e^{(\sqrt{2}-1)\alpha\beta} e^{-\frac{\beta^2}{2}Y}$, nous pouvons calculer selon (A-12) toutes les autres $w_n(Y)$ pour $n > 1$.

BIBLIOGRAPHIE

Armstrong, M. et Matheron, G., 1986 :

Disjunctive kriging revisited. *Mathematical Geology*, Vol. 18, N. 8.

Barndorff-Nielsen, O., Blæsild, P. et Halgreen, C., 1978 :

First hitting time models for the generalized inverse gaussian distribution. *Stochastic Processes and their Applications*, 7, pp. 49-54.

Chauvet, P., 1982 :

The variogram cloud. *Proceedings of the 17th International APCOM Symposium*, Golden, Colorado.

Demange, C., Lajaunie, Ch., Lantuéjoul, Ch. et Rivoirard, J., 1987 :

Global recoverable reserves : testing various changes of support models on uranium data. "Geostatistical Case Study", D. Reidel Pub. Co., Dordrecht, Holland, pp. 187-208.

Folks, J. L. et Chhikara, R. S., 1978 :

The inverse gaussian distribution and its statistical application - a review. *J. R. Statist. Soc. B* 40, N. 3, pp. 263-289.

Good, I. J., 1953 :

The population frequencies of species and the estimation of population parameters. *Biometrika*, 40, pp. 237-264.

Guibal, D. et Zaupa-Remacre, A., 1984 :

Local estimation of the recoverable reserves : comparing various methods with the reality on a porphyry copper deposit. "Geostatistics for Natural Resources Characterization", D. Reidel Pub. Co., Dordrecht, Holland, pp. 435-448.

Hu, L. Y. et Lantuéjoul, Ch., 1988 :

Recherche d'une fonction d'anamorphose pour la mise en œuvre du krigeage disjonctif isofactoriel gamma. "Etudes Géostatistiques", Séminaire CFSG, 15-16 Juin 1987, dans Sc. de la Terre, Sér. Inf. N. 28.

Hu, L. Y., 1988 :

Comparing gamma isofactorial disjunctive kriging and indicator kriging for estimating local spatial distributions. Proceedings of the Third International Geostatistics Congress, Avignon, Sept. 5-9 1988.

Journal, A., 1982 :

The indicator approach to estimation of spatial distributions. Proceedings of the 17th International APCOM Symposium, Golden, Colorado.

Journal, A., 1983 :

Nonparametric estimation of spatial distributions. Mathematical Geology, Vol. 15, N. 3.

Journal, A., 1984 :

The place of non-parametric geostatistics. "Geostatistics for Natural Resources Characterization", D. Reidel Pub. Co., Dordrecht, Holland, pp. 307-335.

Kocherlakota, S., 1986 :

The bivariate inverse gaussian distribution : an introduction. Commun. Statist. - Theor. Meth., 15(4), pp. 1081-1112.

Lajaunie, Ch. et Lantuéjoul, Ch., 1988 :

Setting up the general methodology for discrete isofactorial models. Proceedings of the Third International Geostatistics Congress, Avignon, Sept. 5-9 1988.

Lantuéjoul, Ch. et Rivoirard, J., 1984 :

Une méthode de détermination d'anamorphose. Note interne, N-916, Centre de Géostatistique, ENSMP, Fontainebleau.

Lantuéjoul, Ch., 1984 :

Trois modèles de changement de support à partir d'une distribution ponctuelle gamma. "Etudes Géostatistiques", Séminaire CFSG, 14-15 Juin 1984, dans Sc. de la Terre Sér. Inf. N. 21.

Lantuéjoul, Ch., 1988 :

On the importance of choosing a change of support model for global reserves estimation. Mathematical Geology, Vol. 20, N. 8.

Maréchal, A., 1980 :

Les modèles multivariés et leur estimation. Note interne, N-649, Centre de

Géostatistique, ENSMP, Fontainebleau.

Maréchal, A., 1984 :

Recovery estimation : a review of models and methods. "Geostatistics for Natural Resources Characterization", D. Reidel Pub. Co., Dordrecht, Holland, pp. 385-420.

Matheron, G., 1965 :

Les variables régionalisées et leur estimation. Masson et Cie, Paris.

Matheron, G., 1970 :

La théorie des variables régionalisées et ses applications. Cahier interne, Centre de Géostatistique, ENSMP, Fontainebleau.

Matheron, G., 1973 :

Le krigeage disjonctif. Note interne, N-360, Centre de Géostatistique, ENSMP, Fontainebleau.

Matheron, G., 1975 :

Compléments sur les modèles isofactoriels. Note interne, N-432, Centre de Géostatistique, ENSMP, Fontainebleau.

Matheron, G., 1976(a) :

A simple substitute for conditional expectation : the disjunctive kriging. "Advanced Geostatistics in Mining Industry", D. Reidel Pub. Co., Dordrecht, Holland, pp. 221-236.

Matheron, G., 1976(b) :

Forecasting block grade distributions : the transfer functions. "Advanced Geostatistics in Mining Industry", D. Reidel Pub. Co., Dordrecht, Holland, pp. 237-251.

Matheron, G., 1977 :

Peut-on imposer la condition d'universalité au krigeage disjonctif? Note interne, N-539, Centre de Géostatistique, ENSMP, Fontainebleau.

Matheron, G., 1978(a) :

Estimer et choisir. Cahier interne, Centre de Géostatistique, ENSMP, Fontainebleau.

Matheron, G., 1978(b) :

L'estimation globale des réserves récupérables. Note interne, C-75, Centre de Géostatistique, ENSMP, Fontainebleau.

Matheron, G., 1978(c) :

Le krigeage disjonctif et le paramétrage local des réserves. Note interne, C-76, Centre de Géostatistique, ENSMP, Fontainebleau.

- Matheron, G., 1981 :
La sélectivité des distributions. Note interne, N-686, Centre de Géostatistique, ENSMP, Fontainebleau.
- Matheron, G., 1982 :
La destructuration des hautes teneurs et le krigeage des indicatrices. Note interne, N-761, Centre de Géostatistique, ENSMP, Fontainebleau.
- Matheron, G., 1984(a) :
The selectivity of the distributions and the "second principle of geostatistics". "Geostatistics for Natural Resources Characterization", D. Reidel Pub. Co., Dordrecht, Holland, pp. 421-434.
- Matheron, G., 1984(b) :
Modèle isofactoriel et changement de support. "Etudes Géostatistiques", Séminaire CFSG, 2-3 juin 1983, dans Sc. de la Terre, Sér. Inf. N. 18.
- Matheron, G., 1984(c) :
Is factorial models and change of support. "Geostatistics for Natural Resources Characterization", D. Reidel Pub. Co., Dordrecht, Holland, pp. 449-467.
- Matheron, G., 1984(d) :
Une méthodologie générale pour les modèles isofactoriels discrets. "Etudes Géostatistiques", Séminaire CFSG, 14-15 juin 1984, dans Sc. de la Terre, Sér. Inf. N. 21.
- Matheron, G., 1985(a) :
Change of support for diffusion-type random functions. *Mathematical Geology*, Vol. 17, N. 2.
- Matheron, G., 1985(b) :
Comparaison de quelques distributions du point de vue de sélectivité. "Etudes Géostatistiques", Séminaire CFSG, 17-18 juin 1985, dans Sc. de la Terre, Sér. Inf. N. 24.
- Matheron, G., 1987 :
Suffit-il, pour une covariance, d'être de type positif ? "Etudes Géostatistiques", Séminaire CFSG, 16-17 Juin 1986, dans Sc. de la Terre, Sér. Inf. N. 26.
- Matheron, G., 1988(a) :
The consistency of models in geostatistics. Proceedings of the Third International Geostatistics Congress, Avignon, Sept. 5-9 1988.
- Matheron, G., 1988(b) :
Two classes of isofactorial models for change of support. Proceedings of the Third International Geostatistics Congress, Avignon, Sept. 5-9 1988.

- Rivoirard, J., 1984(a) :
 Une méthode d'estimation du récupérable local multivariable. Note interne, N-894, Centre de Géostatistique, ENSMP, Fontainebleau.
- Rivoirard, J., 1984(b) :
 Le comportement des poids de krigeage. Thèse de Docteur-Ingénieur, ENSMP, Fontainebleau.
- Rivoirard, J., 1985 :
 Convergence des développements en polynômes d'Hermite. "Etudes Géostatistiques", Séminaire CFSG, 17-18 Juin 1985, dans Sc. de la Terre, Sér. Inf. N. 24.
- Rivoirard, J., 1988 :
 Modèles à résidus d'indicatrices autokrigeables. "Etudes Géostatistiques", Séminaire CFSG, 15-16 Juin 1987, dans Sc. de la Terre, Sér. Inf. N. 28.
- Schrödinger, E. 1915 :
 Zur Theorie der Fall- und Steigversuche an Teilchen mit Brownscher Bewegung. Physikalische Zeitschrift, 16, pp. 289-295.
- Sichel, H. S., 1971 :
 On a family of discrete distributions particularly suited to represent long-tailed frequency data. Proceedings of the Third Symposium on Mathematical Statistics, S.A. C.S.I.R. (Pretoria), pp. 51-97.
- Srivastava, R. M. et Parker, H. M., 1988 :
 Robust measures of spatial continuity. Proceedings of the Third International Geostatistics Congress, Avignon, Sept. 5-9 1988.
- Sullivan, J., 1984 :
 Conditional recovery estimation through probability kriging - theory and practice. "Geostatistics for Natural Resources Characterization", D. Reidel Pub. Co., Dordrecht, Holland, pp. 365-384.
- Switzer, P., 1977 :
 Estimation of spatial distribution from point sources with application to air pollution measurement. Bull of Int. Stat. Inst. XLVII (2) pp. 123-137.
- Verly, G., 1984 :
 The block distribution given a point multivariate normal distribution. "Geostatistics for Natural Resources Characterization", D. Reidel Pub. Co., Dordrecht, Holland, pp. 495-515.

Wasan, M. T., 1968 :

On an inverse gaussian process. Skand. Actuar., 51, pp. 69-96.

Zaupa-Remacre, A., 1984 :

L'estimation du récupérable local : le conditionnement uniforme. Thèse de Docteur-Ingénieur, ENSMP, Fontainebleau.