Cahiers de Géostatistique, Fascicule 3
Compte–rendu des Journées de Géostatistique,
25–26 Mai 1993, Fontainebleau, pp. 101–105

MODELES DE CHANGEMENT D'ECHELLE EN STATISTIQUE DE RUPTURE

Dominique JEULIN
CENTRE DE GÉOSTATISTIQUE
Ecole des Mines de Paris
35 rue Saint–Honoré
77305 FONTAINEBLEAU France

Un modèle de statistique de rupture doit permettre de prévoir les lois de probabilité de rupture d'un matériau pour diverses conditions de sollicitation et pour diverses échelles de travail. Notre démarche est la suivante: 1) Choix de critères locaux (c'est à dire à une échelle "ponctuelle") et de critères macroscopiques de rupture; un critère local rend compte de l'amorçage d'une fissure, et un critère macroscopique de la rupture d'une pièce. 2) Modèles de structures aléatoires, définies à l'échelle ponctuelle, permettant d'estimer la probabilité de rupture d'un échantillon (passage micro–macro) et de donner des lois d'échelle. 3) Calcul théorique de la probabilité de rupture en fonction du champ de contrainte vu par un milieu homogène équivalent (par exemple, champ homogène, ou pointe de fissure...). Cette simplification permet d'éviter le passage par de lourdes simulations. Nous résumons les acquis récents correspondant aux trois étapes mentionnées.

1. CHOIX DE CRITÈRES DE RUPTURE

1.1. Critères locaux

La rupture se produit localement dans un matériau lorsque les sollicitations appliquées conduisent au dépassement d'un critère, considéré comme une propriété intrinsèque du matériau: contrainte critique σ_c, ou plus généralement facteur d'intensité des contraintes critique, K_{Ic}, pour la rupture en mode I de matériaux ayant un comportement linéaire élastique fragile [1,4]. Lorsque plusieurs mécanismes de rupture sont en compétition (comme pour la rupture par clivage et la rupture intergranulaire dans les roches ou les métaux), on peut faire appel à des modèles multicritères, et remplacer les modèles scalaires par des modèles multivariables [1,4]. On peut également considérer une énergie de rupture γ, correspondant à la création d'une surface de rupture [3].

1.2. Critères macroscopiques:

A titre d'exemple, les modèles théoriques que nous proposons sont basés sur des hypothèses de rupture différentes [3,4]:

• le modèle du *maillon le plus faible* est adapté à la rupture brutale des matériaux fragiles; il correspond à une propagation de fissure aussitôt après l'amorçage;

• les modèles à *seuil d'endommagement* qui généralisent le précédent, sont valables pour une rupture en présence de plusieurs sites potentiels d'amorçage de fissures;

• les modèles avec *critère d'arrêt de Griffith* utilisent la comparaison, pour chaque étape de la trajectoire d'une fissure, entre l'énergie locale de rupture $\gamma(x)$, et l'énergie de déformation $G(x)$.

D'un point de vue formel, le premier type de critère fait intervenir un changement de support de l'information par l'opérateur $\wedge$, la seconde famille un changement de support par convolution, et le troisième type correspond à un changement de support par l'opérateur $\vee$.

2. MODÈLES DE STRUCTURES ALÉATOIRES et 3. CALCUL DE LA PROBABILITÉ DE RUPTURE

Tout critère de rupture est sensible à *la présence d'hétérogénéités* micro-structurales, conduisant localement à la présence d'une valeur critique plus faible que pour l'ensemble du matériau ou à une sollicitation plus élevée par effet de concentration de contraintes. Dans les deux cas, il y a un effet très important des hétérogénéités à petite échelle pour les phénomènes de rupture, contrairement à ce qui peut se passer pour les autres propriétés mécaniques du matériau (et notamment pour le calcul de ses propriétés effectives [5–7]), pour lesquelles il y a un effet de lissage important par changement d'échelle.

On observe généralement une dispersion élevée des caractéristiques mécaniques de rupture pour certains matériaux (aciers, céramiques, composites, roches...). Le recours à une approche probabiliste s'impose. Pour étudier la rupture d'un même matériau sous divers types de sollicitations (liées à la géométrie de chargement), il faut construire des modèles de Statistique de Rupture cohérents à plusieurs échelles, faisant appel à des modèles de fonctions aléatoires définis à l'échelle ponctuelle. Ils simulent les variations d'un critère de rupture (σ_c , K_{Ic} pour des matériaux fragiles; énergie de rupture). Dans notre approche, est utilisé un milieu homogène équivalent, pour lequel le seuil critique de rupture est aléatoire; cette simplification, qui découple le champ appliqué au matériau du champ critique, permet de se passer de simulations d'un grand nombre de réalisations du milieu aléatoire pour des modèles appropriés; cette simplification est justifiée pour un milieu ayant un seul constituant, comme un polycristal métallique ou certaines roches; toutefois, ce compromis ne peut pas tenir compte des fluctuations de sollicitation à petite échelle liées à la microstructure, qui apparaissent pour des constituants de comportements mécaniques très différents.

<u>i) Modèles de changement d'échelle en statistique de rupture fragile.</u> Ces modèles utilisent l'hypothèse du maillon le plus faible, ayant pour conséquence qu'il y a rupture de la pièce dès que, en un point x_0, on a $\sigma(x_0) > \sigma_c(x_0)$; cette hypothèse un peu extrême correspond à l'option "zéro défaut" des critères de qualité; elle est bien adaptée au cas de la rupture fragile et du clivage, pour lesquels une fissure se propage de manière instable après amorçage. Pour estimer la probabilité de rupture dans ces conditions, il faut connaître la loi de probabilité de l'inf. des valeurs $(\sigma_c(x) - \sigma(x))$ prises sur l'ensemble du domaine sollicité. Pour un milieu aléatoire quelconque, le champ

"microscopique" $\sigma(x)$ est une fonction aléatoire qui dépend de manière complexe de $\sigma_c(x)$, par l'intermédiaire de la loi de comportement locale, des conditions aux limites et de la redistribution des contraintes. Comme mentionné plus haut, on peut apporter une simplification importante, en introduisant le champ $\sigma(x)$ déterministe produit dans un milieu homogène équivalent. Pour certaines structures aléatoires, le calcul théorique complet est possible. Contrairement aux approches classiques, ces modèles autorisent des corrélations à grande échelle de $\sigma_c(x)$. Construits entre autres à partir des variétés aléatoires booléennes, ils permettent de simuler des microstructures contenant des défauts ponctuels ou non ponctuels, stratifiés, ou fibreux. En plaçant dans une matrice de contrainte de rupture infinie des défauts ponctuels suivant un processus ponctuel de POISSON avec pour densité une fonction puissance de σ, on retrouve pour la loi du maillon le plus faible en présence d'un champ homogène le modèle de Weibull, d'utilisation quasi routinière en mécanique de la rupture; il s'agit en fait d'un cas particulier, qui n'a aucune raison physique d'être systématiquement retenu pour les applications.

A titre d'exemples, les effets d'échelle théoriques ont été étudiés pour un champ de contraintes homogènes (échantillon cubique) et pour un champ développé par une fissure macroscopique dans un matériau de comportement élastoplastique. Des résultats théoriques exacts ont été obtenus à toutes les échelles pour la loi de probabilité de rupture [1,2,4]. Les principaux résultats asymptotiques, vérifiés pour des échantillons suffisamment grands devant la taille des défauts critiques, sont les suivants : pour un champ de contraintes homogène, l'effet de taille (traduit par la baisse de la contrainte de rupture médiane avec le volume de l'échantillon) dépend du choix du modèle (on tend toujours vers un comportement déterministe des grands échantillons correspondant au minimum de la population des défauts présents dans le matériau) et des propriétés statistiques des défauts (taille, forme, contrainte critique). Pour une population de défauts fixée, l'effet de taille est croissant dans l'ordre: strates, fibres, grains.

<u>*ii) Modèles de statistique de rupture à seuil d'endommagement.*</u> Le critère du maillon le plus faible peut être généralisé:

- On peut tout d'abord se donner comme critère de rupture une fraction volumique critique occupée par les défauts de contrainte de rupture inférieure à la contrainte appliquée (ou défauts critiques); des résultats asymptotiques, valables pour des échantillons de taille supérieure à la microstructure, sont obtenus à partir de la loi de probabilité bivariable de la fonction aléatoire $(\sigma_c(x) - \sigma(x))$. Dans un champ de contraintes homogène, ils prévoient l'absence d'effet de taille pour la contrainte de rupture médiane et la convergence vers un comportement déterministe (c'est-à-dire une contrainte de rupture constante, mais dépendant de l'histogramme des défauts).

- L'approche précédente ne peut plus s'appliquer en présence de défauts de mesure nulle (défauts isolés de faible dimension, assimilables à des points, ou microfissures sans épaisseur). Il est alors préférable d'introduire comme critère de rupture une densité critique de défauts. Lorsque ceux-ci sont distribués de manière poissonienne, la probabilité de rupture a été calculée et des effets de taille différents selon la nocivité des défauts ont été mis en évidence: les grands échantillons sont moins sensibles aux défauts les plus sévères. Pour une sollicitation uniforme, le comportement du matériau en rupture est asymptotiquement déterministe.

• Des modèles du même type, mettant en compétition deux modes de rupture (transgranulaire par clivage et intergranulaire), reposent sur des fonctions aléatoires mosaïques construites à partir d'une partition de Voronoï simulant un polycristal.

iii) Modèles de Statistique de rupture avec critère d'arrêt de fissure. La probabilité de rupture de milieux aléatoires bidimensionnels fissurés a été calculée pour deux types de chargement (donnant lieu à une propagation stable ou instable) et pour deux types de milieux aléatoires:

• Pour une mosaïque poissonienne (affectation d'énergies de ruptures indépendantes, de loi de probabilité $F(\gamma)$, à chaque classe d'une partition de Poisson)

• Pour une mosaïque booléenne, construite par le sup de fonctions primaires. Pour ces deux modèles, les effets de taille obtenus dépendent de la queue de distribution de la loi F: pour une croissance très lente, la probabilité de rupture peut décroître avec la taille de l'échantillon.

L'intérêt des modèles proposés est multiple:

• L'ensemble des modèles développés est utilisable simplement dans un code de calcul par éléments finis en post−processeur. A une échelle plus fine il est loisible de les utiliser pour simuler un seuil critique de rupture associé à un élément de maillage, et respectant l'échelle de travail.

• Ils dépendent de très peu de paramètres ajustables (2, 3 à 4), de manière à ne pas trop exiger des seules données disponibles.

• Il est aisé de les tester à différentes échelles: à l'échelle macroscopique, au moyen d'histogrammes expérimentaux obtenus pour des essais mécaniques sur plusieurs géométries d'éprouvettes ; des compléments d'information indispensables sont accessibles à l'échelle microscopique, après localisation des défauts et mise en oeuvre d'analyse d'images.

• Des relations théoriques exactes, compatibles à plusieurs échelles, sont disponibles (et non pas des ajustements empiriques produits à partir de simulations sur des petits systèmes).

• Enfin des lois d'échelles très diverses ont été obtenues, selon les critères de rupture ou les modèles de structure aléatoires choisis, pour rendre compte de situations variées, selon les matériaux étudiés.

REFERENCES

[1] JEULIN D. Morphological Models for Fracture Statistics. Communication à la 7ème Conférence CMDS, Paderborn (14−19 Juin 1992), à paraître dans Transtech Publications. Note N−14/92/G, Ecole des Mines de Paris.

[2] JEULIN, D. Random functions and fracture statistics models. In SOARES A. (Ed.), *Geostat Tróia '92*, Kluwer Academic Publ., Dordrecht, 1993, Vol. 1, pp. 225−236.− (Quantitative Geology and Geostatistics 5).

[3] JEULIN D. Some Crack Propagation Models in Random Media. Communication au Symposium on the Macroscopic Behavior of the Heterogeneous Materials from the Microstructure, ASME, Anaheim, Nov 8−13, 1992. AMD Vo. 147, pp. 161−170.

[4] JEULIN D. *Modèles morphologiques de structures aléatoires et de changement d'échelle.* Thèse de Doctorat d'Etat ès Sciences Physiques, Université de Caen, 1991.

[5] BERAN M. J. *Statistical Continuum Theories*, Wiley, 1968.

[6] KRÖNER E. *Statistical Continuum Mechanics*, Springer Verlag, 1971; *Modelling Small Deformations in Polycrystals* , Ch. 8, Elsevier, 1986.

[7] SANCHEZ PALENCIA E., ZAOUI A. (éd). *Homogenization Techniques for Composite Media*, Springer Verlag, 1987. (Lecture Notes in Physics 272).