FONTAINEBLEAU/CG N-23/91/G

Sur le krigeage des fonctions complexes

Ch. LAJAUNIE
R. BEJAOUI

Juillet 1991

Sur le krigeage des fonctions complexes

Ch. Lajaunie - R. Bejaoui

13 Septembre 1991

1 Introduction

L'objet de cette note est de faire le point sur le travail effectué à l'occasion du stage de DEA de Bejaoui. De ce fait, un certain nombre de directions de travail sont évoquées, et non approfondies, en raison des contraintes de temps.

Outre le cas où les données elles mêmes sont des variables complexes, l'approche complexe semble naturelle lorsque l'on a affaire à des données directionnelles dans $\mathbb{R}^2$. Il est possible de réaliser l'interpolation de telles données par au moins trois types de krigeage: cokrigeage des parties réelle et imaginaire, krigeage séparé de ces deux variables, et krigeage complexe. Les mérites de ces trois variantes sont discutés brièvement ici, après avoir examiné quelques propriétés, et donné quelques modèles.

Un exemple d'interpolation est ensuite présenté, qui nous donne l'occasion de proposer une méthode d'ajustement.

2 Propriétés élémentaires des covariances

Nous savons que la covariance d'une fonction aléatoire complexe stationnaire, que l'on supposera centrée sans perte de généralité:

$$C(h) = < Z(x+h), Z(x) > = E[Z(x+h)\,\overline{Z(x)}]$$

est une fonction de type positif, et donc, pour toute combinaison linéaire finie:

$$\mathrm{Var}\left[\sum \lambda_i Z(x_i)\right] = \sum \lambda_i \overline{\lambda_j}\, C(x_i - x_j) \geq 0$$

Inversement, à une fonction $C(h)$ vérifiant cette propriété, on peut associer une fonction aléatoire complexe gaussienne (non unique, même lorsque l'espérance est fixée, contrairement au cas réel [1]) admettant une telle covariance.

[1] En effet, les lois spatiales gaussiennes sont déterminées par les moments d'ordre 1 et 2. Dans le cas réel, ces moments dépendent seulement de m et $C(h)$, mais non dans le cas complexe. Par exemple, les variances des parties réelle et imaginaire sont inconnues, seule leur somme est fixée par la covariance complexe.

La classe des fonctions de type positif coïncide donc avec celle des covariances admissibles. Cette classe est caractérisée par le théorème de Bochner, dont on rappelle l'énoncé:

2.1 Le théorème de Bochner

Les fonctions de type positif sont les transformées de Fourier des mesures positives sommables:

$$C(h) = \int e^{-2i\pi<\nu,h>} \chi(d\nu)$$

Dans cette transformation qui à une covariance associe sa mesure spectrale χ, les covariances réelles se trouvent mises en correspondance avec les mesures positives sommables et symétriques.

Il en résulte que si à une mesure de covariance on associe la décomposition suivante en partie symétrique et non symétrique:

$$\begin{aligned} \chi(d\nu) &= \frac{\chi(d\nu) + \check{\chi}(d\nu)}{2} + \frac{\chi(d\nu) - \check{\chi}(d\nu)}{2} \\ &= \chi_1(d\nu) \qquad\quad + \chi_2(d\nu) \end{aligned}$$

(avec $\check{\chi}(B) = \chi(-B)$, mesure du symétrique de B) nous obtenons pour le premier terme χ_1, une mesure spectrale de covariance réelle, tandis que le second, transformée de Fourier d'une fonction imaginaire pure, est associé à la partie imaginaire de la covariance. En d'autres termes si on écrit:

$$C(h) = C^r(h) + i\, C^i(h)$$

alors:

$$\begin{aligned} C^r(h) &= \int e^{-2i\pi<\nu,h>} \chi_1(d\nu) \\ C^i(h) &= -i \int e^{-2i\pi<\nu,h>} \chi_2(d\nu) \end{aligned}$$

On note en passant que C^r est bien une covariance.

2.2 Expression en fonction des covariances des parties réelle et imaginaire

En écrivant la décomposition de la fonction:

$$Z(x) = X(x) + i\, Y(x)$$

en parties réelle et imaginaire, apparaissent les relations élémentaires concernant les covariances. Notons cependant selon une remarque de G. Matheron, que la stationnarité de Z n'entraine pas nécessairement celle de X ni celle de Y.

L'inverse d'ailleurs n'est pas vrai non plus. On supposera ici cependant, que toutes ces fonctions sont effectivement stationnaires.

On a alors:

$$\begin{aligned} C^r(h) &= C_X(h) + C_Y(h) \\ C^i(h) &= C_{XY}(-h) - C_{XY}(h) \end{aligned}$$

Ainsi est bien illustrée la perte d'information subie lors du passage de la structure bivariable définie par C_X, C_Y, et C_{XY} à la structure complexe, définie par C^r et C^i. En particulier, de la variance des parties réelle et imaginaire, on ne retient que leur somme, et de la covariance croisée, on ne considère que sa dissymétrie.

2.3 Symétries et positivité

De la définition:

$$C(h) = E[Z(x+h)\,\overline{Z(x)}] = E[Z(x)\,\overline{Z(x-h)}] = \overline{C(-h)}$$

résulte que:

$$\begin{aligned} C^r(-h) &= C^r(h) \\ C^i(-h) &= -C^i(h) \end{aligned}$$

et, en particulier, $C^i(0) = 0$. D'autre part, le développement de la variance d'une combinaison linéaire:

$$\sum_\alpha \lambda_\alpha\, Z(x_\alpha) = \sum (\lambda^r_\alpha + i\,\lambda^i_\alpha)\, Z(x_\alpha)$$

soit:

$$\mathrm{Var}\left[\sum_\alpha \lambda_\alpha\, Z(x_\alpha)\right] = \sum (\lambda^r_\alpha + i\lambda^i_\alpha)\,(\lambda^r_\beta - i\lambda^i_\beta)\,(C^r_{\alpha\beta} + iC^i_{\alpha\beta}) \geq 0$$

entraîne les deux relations suivantes:

$$\begin{aligned} \sum \left\{(\lambda^r_\alpha\lambda^r_\beta + \lambda^i_\alpha\lambda^i_\beta)C^r_{\alpha\beta} + (\lambda^r_\alpha\lambda^i_\beta - \lambda^r_\beta\lambda^i_\alpha)C^i_{\alpha\beta}\right\} &\geq 0 \\ \sum \left\{(\lambda^r_\beta\lambda^i_\alpha - \lambda^r_\alpha\lambda^i_\beta)\,C^r_{\alpha\beta} + (\lambda^r_\alpha\lambda^r_\beta + \lambda^i_\alpha\lambda^i_\beta)\,C^i_{\alpha\beta})\right\} &= 0 \end{aligned}$$

La seconde relation résulte trivialement des relations de symétrie, et n'a donc rien à nous apprendre. Par contre, de la première résultent certaines inégalités peut-être intéressantes: par exemple, pour la combinaison linéaire $(1+i)Z(0)+(1-i)Z(h)$, on trouve l'inégalité (probablement assez grossière) $|C^i(h)| \leq 2\sigma^2$.

2.4 Caractérisation des parties imaginaires compatibles avec un C^r donné

Les contraintes les plus fortes portant sur la partie réelle de la covariance, une procédure d'ajustement envisageable consisterait à la modéliser dans un premier temps, puis à trouver parmi les parties imaginaires compatibles celle qui conviendrait le mieux.

Cela pose donc le problème de trouver quelles sont ces contraintes de compatibilité. Les inégalités précédentes ne sont que très partielles, et il se trouve que la caractérisation cherchée est commode à l'aide du théorème de Bochner. Cette caractérisation nous a été indiquée par G. Matheron:

Nous supposons donc connue la mesure de la partie réelle de la covariance, χ_1, et nous cherchons quelles sont les mesures χ_2 de parties imaginaires que l'on peut associer à χ_1.

On remarque que, en vertu de la positivité de χ, tout ensemble de mesure nulle pour χ_1 l'est aussi pour χ:

$$\chi_1(B) = \frac{\chi(B) + \check{\chi}(B)}{2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \chi(B) = 0$$

Le théorème de Radon Nikodyme affirme alors l'existence d'une fonction réelle f telle que:

$$\chi(d\nu) \;=\; f(\nu)\; \chi_1(d\nu)$$

fonction qui est d'ailleurs positive ou nulle, comme les mesures χ et χ_1. Alors:

$$\chi_1 \;=\; \frac{f(\nu) + f(-\nu)}{2}\, \chi_1$$

ce qui montre que:

$$f \,+\, \check{f} \;=\; 2 \qquad (\chi_1 \text{ presque partout})$$

$f - 1$ est donc antisymétrique. Avec la positivité, cela entraine $f \leq 2$ (toujours χ_1 presque partout).

Inversement, à toute fonction f satisfaisant à ces deux contraintes, nous associons la mesure de covariance $f.\chi_1$, qui est bien:

- positive et sommable
- et qui admet χ_1 pour mesure de partie réelle

En ce qui concerne la partie imaginaire:

$$\chi_2 \;=\; \frac{f - \check{f}}{2}\, \chi_1 \;=\; \psi\, \chi_1$$

en ayant introduit la fonction $\psi = f - 1$, antisymétrique, et comprise entre -1 et 1. On a donc ce résultat que les parties imaginaires de covariances que l'on peut associer à une partie réelle C^r donnée sont:

$$C^i = -i\, C^r * \phi$$

où ϕ est une distribution tempérée complexe, admettant pour transformée de Fourier une fonction réelle, antisymétrique, et comprise entre -1 et 1. Des exemples de covariances de ce type seront montrés dans un paragraphe suivant.

3 Le krigeage complexe

Le krigeage complexe semble à priori une approche intéressante lorsque l'on a affaire à des données vectorielles, ou directionnelles dans $\mathbb{R}^2$. En effet, la manipulation des modules et arguments tels quels pose des problèmes sérieux:

1. Positivité du module.
2. Périodicité de l'argument, qui fait que le variogramme d'un argument n'a probablement pas beaucoup de sens (par exemple 5 degrés est considéré comme plus éloigné de 355 degrés, que de 180, si on adopte une distance comme $|x - y|$)
3. Un krigeage linéaire basé sur l'argument sera discontinu par rapport aux données lorsque l'une d'entre elles franchira la limite 0 (Mod 2π)

La première remarque ne tire guère à conséquences, puisque le même problème affecte déja le krigeage d'une teneur. La seconde objection peut sans doute être facilement levée par un choix adapté de distance. Par contre, la troisième remarque suggère que les données d'argument ne peuvent pas être krigées telles qu'elles. La transformation exponentielle semble précisément la représentation la plus commode en vue d'un krigeage.

3.1 Définition et équations

On envisagera le plus simple des krigeages, et supposons donc la moyenne de la fonction aléatoire stationnaire connue. Pour la f.a. centrée

$$Y(x) = Z(x) - m,$$

le krigeage de $Y(x_0)$ à partir des $Y(x_1), \cdots, Y(x_n)$, est défini comme la combinaison linéaire:

$$Y_0^{k.s.} = \sum_\alpha \lambda_\alpha\, Y(x_\alpha)$$

(à pondérateurs complexes) rendant minimale la variance d'erreur. Il est caractérisé par les équations de projections:

$$\forall \beta \qquad < Y_0^{k.s.} - Y(x_0)\,,\, Y(x_\beta) > = \; 0$$

La séparation des parties réelles et imaginaires donne le système matriciel:

$$\begin{pmatrix} C^r_{\alpha\beta} & -C^i_{\alpha\beta} \\ C^i_{\alpha\beta} & C^r_{\alpha\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^r_\alpha \\ \lambda^i_\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^r_{0\beta} \\ C^i_{0\beta} \end{pmatrix}$$

3.2 Comparaison avec le cokrigeage, et avec le krigeage simple

On a déjà remarqué que la covariance complexe apporte moins d'information que la corégionalisation des parties réelle et imaginaire. Il est donc vraisemblable que le krigeage complexe, qui utilise celle-là, est moins efficace que le cokrigeage.

C'est en effet le cas, comme il est facile de le voir. On remarque d'abord que le cokrigeage a une forme plus générale que le krigeage complexe:

$$\begin{aligned} Y_0^{c.k.} &= \sum_\alpha \left(\mu^r_\alpha\, Y^r_\alpha + \mu^i_\alpha\, Y^i_\alpha\right) \; + \; i\,\left(\nu^r_\alpha\, Y^r_\alpha + \nu^i_\alpha\, Y^i_\alpha\right) \\ Y_0^{k.s.} &= \sum_\alpha \left(\lambda^r_\alpha + i\,\lambda^i_\alpha\right) Y_\alpha \\ &= \sum_\alpha \left(\lambda^r_\alpha\, Y^r_\alpha - \lambda^i_\alpha\, Y^i_\alpha\right) \; + \; i\,\left(\lambda^i_\alpha\, Y^r_\alpha + \lambda^r_\alpha\, Y^i_\alpha\right) \end{aligned}$$

D'autre part, le critère d'optimisation retenu en krigeage complexe étant la somme des variances d'erreur d'estimation des parties réelles et imaginaires:

$$\mathrm{Var}[Z_0 - Z_o^*] \;=\; \mathrm{Var}[Z_0^r - Z_0^{r*}] \;+\; \mathrm{var}[Z_0^i - Z_0^{i*}]$$

Il en résulte qu'en minimisant indépendament chacun des deux termes de variance, comme cela est fait en cokrigeage, on rend la variance d'erreur complexe minimale. On a donc toujours:

$$||Z_0 - Z_0^{k.s.}|| \;\geq\; ||Z_0 - (Z_0^r)^{c.k.} - i(Z_0^i)^{c.k.}||$$

Cependant, il est intéressant d'évaluer la perte de précision dans des cas pratiques. Avant de donner un exemple, commencons par examiner la situation où l'égalité a lieu. Cela implique que les pondérateurs de cokrigeage doivent satisfaire à:

$$\forall \alpha \quad \begin{cases} \mu^r_\alpha &= \nu^i_\alpha \\ \mu^i_\alpha &= -\nu^r_\alpha \end{cases}$$

en écrivant les systèmes de cokrigeages explicitement:

$$\begin{pmatrix} C_X & C_{YX} \\ C_{XY} & C_Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu^r & \nu^r \\ \mu^i & \nu^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^0_X & C^0_{YX} \\ C^0_{XY} & C^0_Y \end{pmatrix}$$

et en restreignant le voisinage à un seul point informé, on trouve les relations suivantes:

$$\begin{cases} \sigma_y^2 C_X(h) - \sigma_x^2 C_Y(h) & = & C_{XY}(0)\,[C_{XY}(h) - C_{XY}(-h)] \\ C_{XY}(0)\,(C_X(h) + C_Y(h)) & = & \sigma_x^2 C_{XY}(h) + \sigma_y^2 C_{XY}(-h) \end{cases}$$

Deux cas de figurent peuvent alors se présenter, selon que $C_{XY}(0)$ soit nul ou non. Dans le premier cas, cela conduit aux relations:

$$\begin{cases} C_{XY}(0) & = 0 \\ \sigma_x^2\, C_{XY}(h) & = -\,\sigma_y^2\, C_{XY}(-h) \\ \frac{C_X(h)}{\sigma_x^2} & = \frac{C_Y(h)}{\sigma_y^2} \end{cases}$$

Enfin, dans le second cas, $C_{XY}(h)$ peut être exprimée comme combinaison linéaire de $C_X(h)$ et $C_Y(h)$. C'est donc une fonction symétrique de h, et les relations précédentes entraînent:

$$\frac{C_X(h)}{\sigma_x^2} = \frac{C_Y(h)}{\sigma_y^2} = \frac{C_{XY}(h)}{C_{XY}(0)}$$

On est donc dans la situation où les parties réelle et imaginaire sont en corrélation intrinsèque.

Il est facile de vérifier dans les équations de krigeage, que ces ensembles de conditions nécéssaires sont effectivement suffisantes pour tout ensemble de points.

On a vu que le krigeage complexe était dans les autres cas moins précis que le cokrigeage. Mais comment se situe-t-il par rapport au krigeage simple des parties réelle et imaginaire ?

Remarquons que si la covariance C_{XY} est symétrique, les pondérateurs du krigeage complexe sont nécessairement réels, comme on peut le voir sur le système de krigeage. La forme du krigeage complexe est alors celle d'un krigeage simple pour la covariance somme $C_X + C_Y$. Nous concluons donc que le krigeage complexe ne peut apporter d'amélioration par rapport au krigeage simple séparé des parties réelle et imaginaire, que lorsque la covariance C_{XY} présente des non symétries. Dans les autres cas, il donnera une précision moindre.

3.3 Un exemple simple de comparaison

Considérons le cas simple d'une fonction dont les parties réelle et imaginaire sont translatées l'une par rapport à l'autre:

$$Z(x) = X(x) + i\, X(x - \tau)$$

La connaissance de $Z(x)$ permet donc l'estimation sans erreur de la partie réelle de $Z(x-\tau)$ et de la partie imaginaire de $Z(x+\tau)$, particularité qui peut être

exploitée par le cokrigeage, mais non par le krigeage complexe. L'exemple choisi lui est donc par construction défavorable. On supposera l'information:

$$Z(-kl), Z((-k+1)l), \cdots, Z(0), \cdots, Z(kl)$$

disponible. Il est alors facile de calculer la variance d'erreur associée au krigeage complexe ponctuel à une dimension, que l'on comparera à la somme des variances d'erreur d'estimation des parties réelle et imaginaire en cokrigeage.

On donne un tel exemple dans les figures $1-a$ et b, pour une covariance $C_X(h) = e^{-|h|}$, 5 points de données espacés d'une distance unité, et une valeur r de 0.5 et 0.2 respectivement. Dans le premier cas la différence d'erreur relative:

$$\frac{\sigma^2_{k.s.} - \sigma^2_{c.k.}}{\sigma^2_{tot.}}$$

dépasse 25% aux points milieux, tandis qu'elle est inférieure à 10% dans le second.

4 Quelques modèles de covariance

D'après ce qui a été vu précédemment, les seuls modèles de quelque utilité sont ceux présentant une dissymétrie dans les covariances croisées:

$$C_{XY}(-h) \neq C_{XY}(h)$$

On passe ici en revue quelques procédés simples permettant de générer de tels modèles.

4.1 Modèles basés sur des convolutions de F.A. réelles

Un des exemples les plus simples de construction de fonctions complexes est donné par la régularisation d'une fonction aléatoire réelle.

$$\begin{aligned} Z &= \psi * X \\ Z(x) &= \int X(x-y)\, \psi(dy) \\ &= \int X(x-y)\, \psi^r(dy) + i \int X(x-y)\psi^i(dy) \end{aligned}$$

qui conduit aux covariances:

$$C_Z(h) = \int C(h+v-u)\, \psi(du)\, \overline{\psi}(dv)$$

ou, plus explicitement:

$$\begin{aligned} C_Z^r &= \int C(h+u-v)\,(\psi^r(du)\,\psi^r(dv) + \psi^i(du)\,\psi^i(dv)) \\ &= C * \psi^r * \check{\psi}^r + C * \psi^i * \check{\psi}^i \\ C_Z^i &= \int C(h+u-v)\,(\psi^i(du)\,\psi^r(dv) - \psi^r(du)\,\psi^i(dv)) \\ &= C * \check{\psi}^i * \psi^r - C * \check{\psi}^r * \psi^i \end{aligned}$$

Excepté peut-être à une dimension, les calculs sont en général trop compliqués semble-t-il pour donner des modèles paramétriques utilisables. Un cas simple a déja été rencontré au paragraphe précédent, où la mesure de convolution se réduit à deux atomes:

$$\psi(dx) = \delta_0(dx) + i\,\delta_\tau(dx)$$

Les covariances obtenues avec ce modèle un peu simpliste sont cependant déjà intéressantes, et nous en donnons quelques exemples en figure 2.

Cet exemple est facilement généralisable de façon à donner plus de liberté dans l'ajustement. Nous pouvons, par exemple considérer la régularisation:

$$\psi = \sum_\alpha p_\alpha\,\delta_{r_\alpha}(dx) + i \sum_\beta q_\beta\,\delta_{\tau_\beta}(dx)$$

$$Z(x) = \sum p_\alpha\,X(x-r_\alpha) + i \sum q_\beta\,X(x-\tau_\beta)$$

qui conduit aux covariances:

$$\begin{aligned} C_Z(h) &= \sum p_\alpha p_\beta\,C(h+r_\beta-r_\alpha) + \sum q_\alpha\,q_\beta\,C(h+\tau_\alpha-\tau_\beta) \\ &+ i\left\{\sum p_\alpha q_\beta(C(h+r_\alpha-\tau_\beta) - C(h+\tau_\beta-r_\alpha))\right\} \end{aligned}$$

Très apparenté mais un peu plus simple dans l'ajustement, le modèle suivant peut être considéré, dans lequel interviennent plusieurs fonctions X_α non corrélées, et de même covariance C:

$$Z(x) = \sum (p_\alpha\,X_\alpha(x) + i\,q_\alpha\,X_\alpha(x-\tau_\alpha))$$

ce qui conduit au modèle:

$$\begin{aligned} C^r(h) &= \sum (p_\alpha^2 + q_\alpha^2)\,C(h) \\ C^i(h) &= \sum p_\alpha q_\alpha\,[C(h-\tau_\alpha) - C(h+\tau_\alpha)] \end{aligned}$$

Si on note $\sigma_\alpha^2 = p_\alpha^2 + q_\alpha^2$ les composantes de variances, et:

$$\left\{\begin{array}{l} p_\alpha^2 = \rho^2\,\sigma_\alpha^2 \\ q_\alpha^2 = (1-\rho^2)\,\sigma_\alpha^2 \end{array}\right. \qquad \text{avec } \rho \in [0,1]$$

alors $p_\alpha q_\alpha = \epsilon_\alpha \rho_\alpha \sqrt{1-\rho_\alpha^2}.\sigma_\alpha^2$ Comme $\rho_\alpha\sqrt{1-\rho_\alpha^2}$ varie continûment de 0 à 1/2 pour $\rho_\alpha \in [0,1]$, le modèle peut être reparamétré de la manière suivante, avec des coefficients $\beta_\alpha \in [-1/2, 1/2]$

$$\begin{aligned} C^r(h) &= \sum \sigma_\alpha^2 C(h) \\ C^i(h) &= \sum \sigma_\alpha^2 \beta_\alpha [C(h-\tau_\alpha) - C(h+\tau_\alpha)] \end{aligned}$$

En fait, on peut supposer, quitte à changer τ en $-\tau$, les coefficients β positifs. La partie imaginaire s'obtient à partir de la partie réelle par:

$$C^i(h) = \frac{1}{2} \sum_\alpha r_\alpha \left(C^r(h-\tau_\alpha) - C^r(h+\tau_\alpha)\right)$$

Avec des coefficients r_α positifs et de somme ≤ 1. Enfin, en ajoutant un terme de masse $1-\sum r_\alpha$ en $\tau_0 = 0$, dans la sommation, on ne change pas la covariance C^i. La formule précédente peut donc s'écrire comme comme une randomisation:

$$C^i(h) = \frac{1}{2} E[C^r(h-T) - C^r(h+T)]$$

4.2 Indépendance du module et de l'argument

On suppose donc que dans l'écriture de Z en module et argument:

$$Z(x) = R(x)\, e^{i\,\Theta(x)}$$

les fonctions R et Θ sont indépendantes. Cela conduit à une factorisation de la covariance, et donc à rechercher des modèles de covariances pour $e^{i\,\Theta}$.

Un cas intéressant est celui où Θ est la somme d'une Fai-0 et d'une variable uniforme sur $[0, 2\pi[$:

$$\Theta(x) = U + Y(x) - Y(0)$$

ainsi, la loi marginale de Θ Mod(2π) est uniforme entre 0 et 2π, de telle sorte que:

$$E[e^{i\,\Theta(x)}] = 0$$

La covariance associée est donc la transformée de Fourier de l'accroissement:

$$C(h) = E[e^{i\,(\Theta(x+h)-\Theta(x))}] = \mathcal{F}\{Y(x+h) - Y(x)\}\left(\frac{1}{2\pi}\right)$$

Il s'agit donc bien d'une fonction stationnaire d'ordre deux. En pratique, et compte tenu de la remarque faite lors de la comparaison avec le krigeage séparé des parties réelle et imaginaire, un tel modèle ne peut être intéressant que si la loi de l'accroissement de Y est dissymétrique:

$$Y(x+h) - Y(x) \not\equiv Y(x) - Y(x+h)$$

Un exemple de fonction aléatoire intrinsèque possédant cette propriété est donné par le schéma de droites poissonniennes valuées étudié dans [1]. La construction du schéma est résumée par les opérations suivantes:

- On se donne une direction privilégiée, par un vecteur unitaire $\vec{\omega}$. C'est cette direction qui permettra d'avoir la dissymétrie cherchée.
- On se donne un schéma de droites poissoniennes de densité $\frac{\mu}{2}$.
- à chaque droite Δ_p, on associe la fonction qui vaut $\frac{d}{2}$ dans le demi plan défini par l'orientation de $\vec{\omega}$, et $-\frac{d}{2}$ dans l'autre demi-plan.
- La fonction intrinsèque est la somme des fonctions associées à chaque droite du schéma.

L'accroissement de la fonction entre x et $x+h$ est donc la somme des contributions des droites qui intersectent le segment V_h joignant les deux points:

$$Y(x+h) - Y(x) \;=\; \sum_{\Delta_p \cap V_h \neq \phi} D_p$$

en notant D_p l'accroissement dû à la droite Δ_p. Ces accroissements sont indépendants les uns des autres, et de même loi notée ψ. Leur nombre est une variable de Poisson de paramètre $|h|\mu$:

$$E[e^{2i\pi u[Y(x+h)-Y(x)]}] \;=\; e^{\mu|h|\,[\psi(u)-1]}$$

L'accroissement D_p ne peut prendre que les valeurs d et $-d$. On note p et q les probabilités associées. La loi ψ est alors:

$$\psi(u) \;=\; E[e^{2i\pi u D_p}] \;=\; cos(2\pi ud) \,+\, i\,(p-q)\,sin(2\pi ud)$$

La quantité $p-q$ a été calculée dans [1]:

$$|h|(p-q) \;=\; -\,<h,\omega>$$

Ce qui donne finalement la covariance:

$$C(h) \;=\; e^{-\mu(1-\cos(d))\,|h|} \;\times\; e^{-i\,\mu\sin(d)\,<h,\omega>}$$

Il s'agit donc de cosinus pour la partie réelle, et de sinus pour la partie imaginaire, amortis exponentiellement.

4.3 Schémas de dilution

Ces schémas sont construits autour d'une fonction primaire non symétrique ϕ, dont on implante une translatée en chaque point d'un processus de Poisson $\mathcal{P}$ de densité μ. La fonction considérée est la somme de telles contributions:

$$Z(x) \;=\; \sum_{\alpha \in \mathcal{P}} \phi(x - X_\alpha)$$

La covariance associée est donnée par [2] [3]:

$$C(h) \;=\; \mu \int \phi(x+h)\,\overline{\phi}(x)\;dx$$

Bien qu'il soit sans doute possible de trouver des fonctions ϕ pour lesquelles le calcul est faisable, on se borne ici à donner dans les figures 3 et 4 un exemple de fonction primaire, de réalisation, et de covariance expérimentale pour un tel schéma.

4.4 Modèles obtenus par différentiation

Si X est une fonction différentiable en moyenne quadratique, de covariance C, nous pouvons considérer par exemple la fonction:

$$Z \;=\; a\,X \;+\; i\,b\,\frac{\partial}{\partial x}X$$

Les parties réelles et imaginaires de cette fonction admettent les covariances:

$$\begin{array}{lll} C_X(h) &=& a^2\,C(h) \\ C_Y(h) &=& -b^2\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}C(h) \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{lll} C_{YX}(h) &=& ab\,\frac{\partial}{\partial x}C(h) \\ C_{XY}(h) &=& -ab\,\frac{\partial}{\partial x}C(h) \end{array}$$

D'où la covariance de Z:

$$C_Z(h) \;=\; \left[a^2\,C(h) \;-\; b^2\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}C(h)\right] \;+\; i\;2ab\,\frac{\partial}{\partial x}C(h)$$

Par exemple, si X a une covariance gaussienne $C = e^{-\mu h^2}$, la covariance associée est:

$$C_Z(h) \;=\; \left[a^2 \;+\; b^2\,(2\mu - 4\mu^2 x^2)\right]\,e^{-\mu h^2} \;-\; i\;4ab\mu\,x\,e^{-\mu h^2}$$

On donne dans la figure 5 un exemple de covariance obtenue pour $X + iX'$ et un amortissement $\mu = 1$, et dans les directions 0, 30, 60 et 90 degrés. Comme dans le cas réel, ce modèle est très particulier par son extrême régularité.

4.5 Application de la caractérisation spectrale

A toute fonction f réelle, antisymétrique, telle que $|f| \leq 1$, et transformée de Fourier de $\tilde{f}$, on peut associer les modèles:

$$C^i \;=\; -i\;\tilde{f} * C^r$$

par exemple, $f(u) = -\sin(2\pi\mu u)$ est transformée de la mesure $\tilde{f} = \frac{1}{2i}(\delta_{-\mu} - \delta_\mu)$. Dans ce cas, la partie imaginaire de la covariance est:

$$C^i(h) \;=\; \frac{1}{2}\,[C^r(h-\mu) - C^r(h+\mu)]$$

Ce modèle a déja été rencontré à deux reprises. Plus généralement, si la fonction f est transformée de Fourier d'une mesure sommable, ce que nous écrivons pour plus de commodité sous la forme:

$$f = -\int sin(2\pi\nu u)\ \omega(d\nu)$$

la partie imaginaire associée à la covariance C^r est:

$$C^i(h) = \frac{1}{2}\int [C^r(h-\nu) - C^r(h+\nu)]\ \omega(d\nu)$$

En fait, si on note β l'ensemble sur lequel $\omega < 0$, on ne modifie pas cette intégrale en remplaçant ω par la mesure positive:

$$\omega' = \omega . \mathbf{1}_{\beta^c} - \check{\omega} . \mathbf{1}_{-\beta}$$

de telle sorte que nous générons la même classe de fonctions C^i en ne considérant que les mesures positives. Alors, si $S = \int \omega(dx)$, on a:

$$C^i(h) = \frac{1}{2} S\ .\ E[C(h-T) - C(h+T)]$$

où T est une variable de loi ω/S. Le coefficient S ne peut pas être quelconque, puisque:

$$\forall u \qquad |f(u)| = \left|\int \sin(2\pi u\tau)\,\omega(d\tau)\right| = S\,.\,E[\sin(2\pi uT)] \leq 1$$

Inversement, si S vérifie cette condition, la partie imaginaire de covariance C^i est admissible, puisque f a bien les propriétés demandées.

En particulier, $S = 1$ convient toujours, et donne, comme nous l'avons vu, la même classe de covariances que les sommes de fonctions élémentaires du type $X(x) + iX(x-\tau)$. Cette remarque est la base de la procédure d'ajustement que nous décrirons lors de la présentation de l'exemple suivant.

5 Un exemple

Les données sur lesquelles nous avons travaillé ont été fournies par l'EPSHOM. Il s'agit de certains coefficients de marée calculés par des méthodes d'eléments finis. Dans ce contexte, le problème de l'interpolation ne se pose plus, puisqu'il est partie intégrante de la méthode de résolution numérique. De ce fait l'utilisation d'un tel jeu de données est un peu artificielle.

La représentation vectorielle des données (figure 6) illustre leur non stationnarité. Dans cette représentation, deux types de symboles sont utilisés: flèches en traits pointillés et origine marquée d'un cercle pour les points de données

utilisés dans le krigeage par la suite, et flèches en traits pleins pour les données test, mises de coté lors du krigeage, à fin de comparaison. Notons que cette non stationnarité ne peut être filtrée par un simple passage aux accroissements, bien que la grille d'information soit régulière: les accroissements d'ordre un $Z(x+h,y)-Z(x,y)$ et $Z(x,y+h)-Z(x,y)$, et plus encore ceux d'ordre deux, semblant encore moins que la variable initiale se prêter à une modélisation stationnaire. Cela provient probablement des discontinuités de dérivées à la frontière des éléments finis, et c'est donc plutôt un artefact de la méthode: les fonctions d'interpolation utilisées par la méthode numérique étant polynômiales par morceaux, les combinaisons linéaires autorisées ne peuvent faire ressortir que les accidents aux frontières des éléments finis.

On s'est donc par la force des choses limité à une modélisation stationnaire, ceci constituant au moins une première approche du problème.

5.1 La méthode d'ajustement de covariance

L'ajustement a été réalisé de la manière suivante:

On a dans un premier temps modélisé la covariance réelle par une covariance stationnaire. Aucune anisotropie n'ayant été mise en évidence par l'examen selon les 4 directions principales, on a réalisé un ajustement isotrope. Le modèle retenu, covariance sphérique de portée 15 et de palier 0.08, a donné l'ajustement montré sur la figure 7. Il est satisfaisant sur la plage de distance utile, bien que la lenteur de la décroissance de C^r témoigne des limites d'un modèle stationnaire.

Dans une deuxième étape, on ajuste la covariance complexe en choisissant un certain nombre de composantes de base:

$$C_\alpha(h) \;=\; C(h-\tau_\alpha) \;-\; C(h+\tau_\alpha)$$

Les translations τ associées à chaque composante sont repérées par une direction et un module. On a ici pris la même orientation pour chaque composante: $\theta = 100$ degrés par rapport à l'Est (sens trigonométrique). Ce choix est guidé par l'observation que l'amplitude maximale de C^i sur les courbes expérimentales, se trouve aux directions 90 et -45 deg. L'amplitude étant négative en -45, la direction d'amplitude maximale se situe donc entre 90 et 135 deg. Le choix final de 100 deg résulte de plusieurs essais, mais affecte en fin de compte assez peu le résultat final. Le nombre de composantes a été fixé à 5, pour lesquelles les modules de τ on été fixés à $(2,4,5,6,8)$.

L'amplitude attribuée à chaque composante est fixée par moindres carrés:

$$\min_{r_\alpha} \left\{ \sum_k [\hat{C}^i(h_k) - \sum_\alpha r_\alpha C_\alpha(h_k)]^2 W_k \right\}$$

où $\hat{C}^i$ est la partie imaginaire de covariance expérimentale, calculée aux points h_k, et W_k sont des poids à choisir (par exemple proportionnels à la racine carrée

du nombre de couples. Nous avons pris $W_k = 1$ dans notre exemple). Cette minimisation est effectuée sans contraintes, et conduit au système linéaire:

$$\sum_{\alpha} A_{\alpha\beta} \cdot r_\alpha = b_\beta$$

avec:

$$A_{\alpha\beta} = \sum_{k} C_\alpha(h_k) \cdot C_\beta(h_k)\, W_k$$

$$b_\alpha = \sum_{k} C_\alpha(h_k)\, \hat{C}^i(h_k)\, W_k$$

Lorsque $r_\alpha < 0$, on transforme r_α en $-r_\alpha$ et τ_α en $-\tau_\alpha$ de façon à conserver des coefficients positifs. Les coefficients ainsi obtenus:

τ	2	4	-5	6	8
r	0.019	0.098	0.031	0.0022	0.053

étant de somme $\sum r_\alpha < 1$, le modèle est automatiquement correct. Cette situation est vraisemblablement rencontrée dans toutes les applications pratiques, puisque l'amplitude de C^i est faible par rapport à celle de C^r. La condition plus générale est:

$$\max_{u} \sum_{\alpha} \{\sin(u\,\tau_\alpha)\, r_\alpha\} \leq 1$$

La figure 8 permet d'apprécier la qualité de cet ajustement.

Pour conclure ce paragraphe, un mot sur le nombre de composantes à inclure dans un modèle. La limite supérieure à ce nombre est étroitement liée au nombre de classes de distance sur lesquelles la covariance expérimentale est connue. Dans notre exemple, ce nombre étant assez faible, il n'est pas souhaitable d'en mettre trop. La figure 9 illustre les oscillations d'un ajustement à base de 20 composantes avec τ en progression arithmétique de pas 0.5 à partir de $\tau_1 = 0.5$.

5.2 Résultats du krigeage complexe

Les valeurs retenues pour le krigeage sont constituées d'un sous-ensemble des points de données situé sur une grille de pas 4 en x et y. 14 points informés sont ainsi conservés. Le krigeage a alors été réalisé en voisinage unique, et en prenant pour estimation de moyenne, la moyenne arithmétique de toutes les données.

Les résultats d'estimation sont montrés sur la figure 10. Une comparaison avec les valeurs exactes appelle les commentaires suivants:

- Les résultats sont satisfaisants dans l'ensemble, et le conditionnement par les valeurs de module faible, sur la gauche de la figure, a été bien réalisé.

- Les limites de la modélisation stationnaire ne sont réellement évidentes que dans l'extrapolation dans le coin supérieur droit de la figure, où la direction prévue ne s'écarte pas assez de la direction moyenne. Toutefois, l'écart, bien que décelable visuellement, reste assez faible.

Une comparaison avec un cokrigeage des parties réelle et imaginaire n'a pas été réalisée. En effet, l'examen des covariances croisés, non présentées dans ce rapport, mais figurant dans le rapport de DEA de Bejaoui, montre que la modélisation en aurait été très problématique. C'est d'ailleurs l'avantage essentiel du krigeage complexe sur le cokrigeage, qui apparaît là, à savoir sa plus grande économie dans la modélisation. Enfin, il est manifeste que le gain éventuel de précision qu'aurait pu apporter un cokrigeage (en supposant résolus efficacement les problèmes de modélisation) ne peut qu'être marginal.

6 Conclusion

Le krigeage complexe, avec la méthode d'ajustement de covariance complexe proposée, est une méthode opérationnelle. Son champ d'application est l'estimation de données complexes, ou directionnelles dans $\mathbb{R}^2$, telles que la covariance des parties réelle et imaginaire, soit non symétrique en h. Nous pensons que dans cette situation, la perte de précision théorique par rapport au cokrigeage, est compensée en pratique par une moindre exigence de modélisation. Dans le cas contraire (symétrie de la covariance croisée), on aura intérêt à kriger séparément les parties réelle et imaginaire.

Références

[1] Ch. Lantuéjoul (Mars 1989) *Ensembles Aléatoires Subordonnés* Note confidentielle CG N6/89/G, Fontainebleau.

[2] Ch. Lantuéjoul (Mars 1991) *Ergodicity and integral range* Journal of Microsc., Vol 161, Pt3, 1991, pp 387-403

[3] G. Matheron (1991) Cours sur les fonctions aléatoires. Notes de cours de DEA - Fontainebleau 1991-

Figure 1-a Variance d'estimation en krigeage complexe (traits pleins) et en cokrigeage (tiretés) pour une fonction $X(x)+iX(x-\tau)$. 5 points distants d'une unité sont informés, et $\tau = 0.5$. La covariance de X est $e^{-|h|}$.

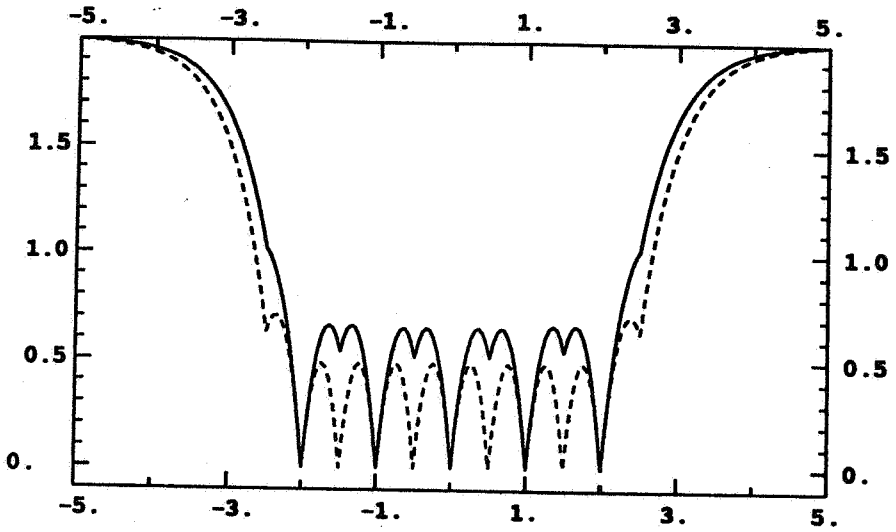

Figure 1-b Idem avec $\tau = 0.2$.

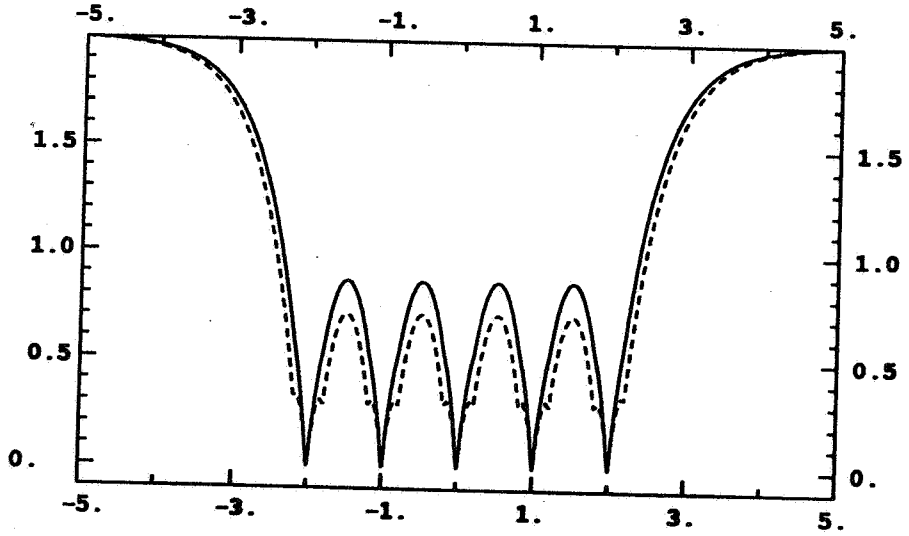

Figure 2-a Partie imaginaire de covariance de $X(x) + iX(x-\tau)$, pour $C_X(h) = e^{-|h|}$ et $\tau = 0.5$. Les directions de calcul sont 0, 30, et 60 degrés.

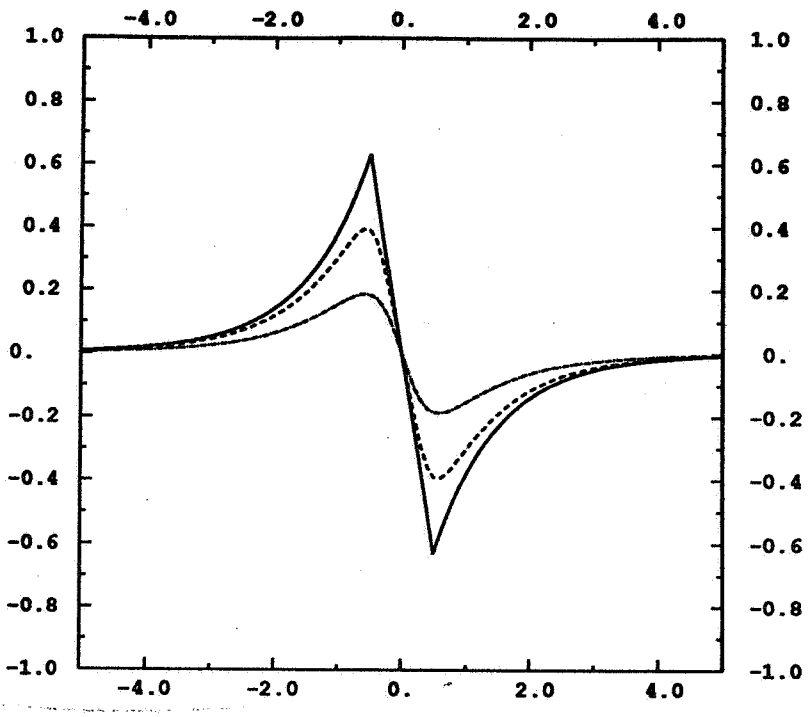

Figure 2-b Idem pour $C_X(h)$ sphérique de portée 4.

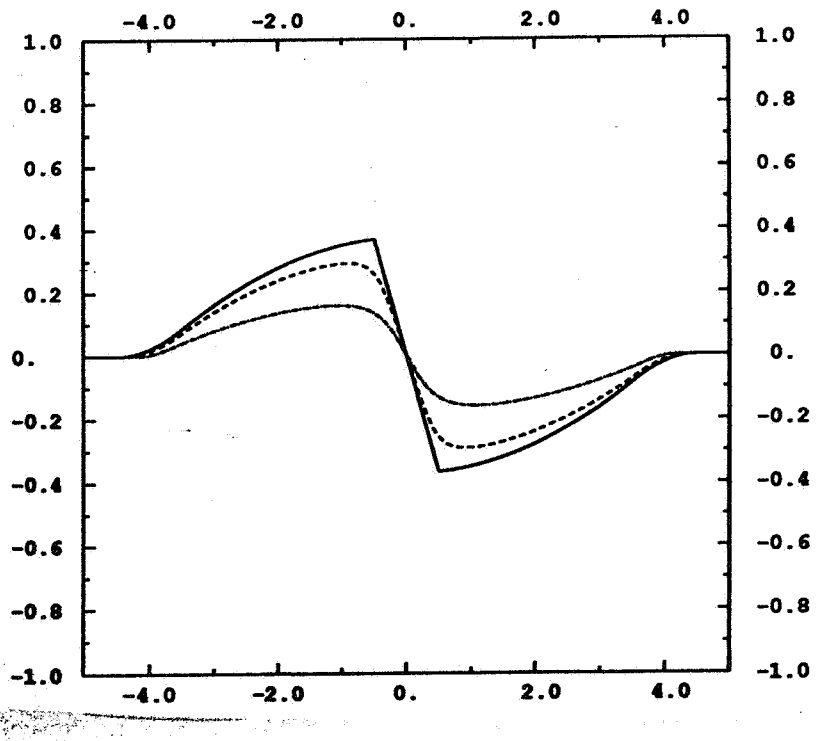

Figure 2-c Idem pour $C_X(h)$ gaussienne.

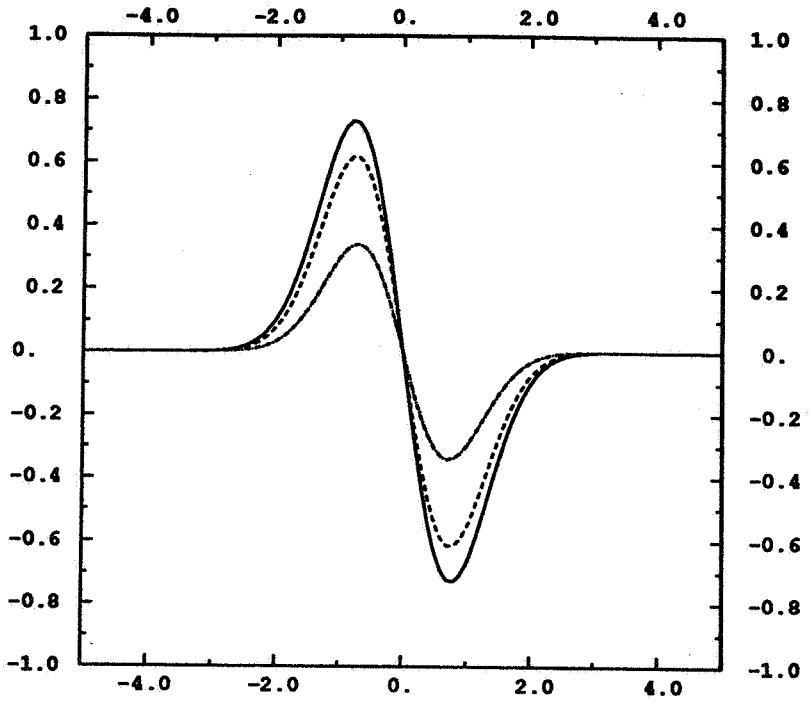

Figure 3-a Fonction primaire utilisée dans le schéma de dilution. La non symétrie permet d'obtenir des covariances possédant une partie imaginaire non nulle.

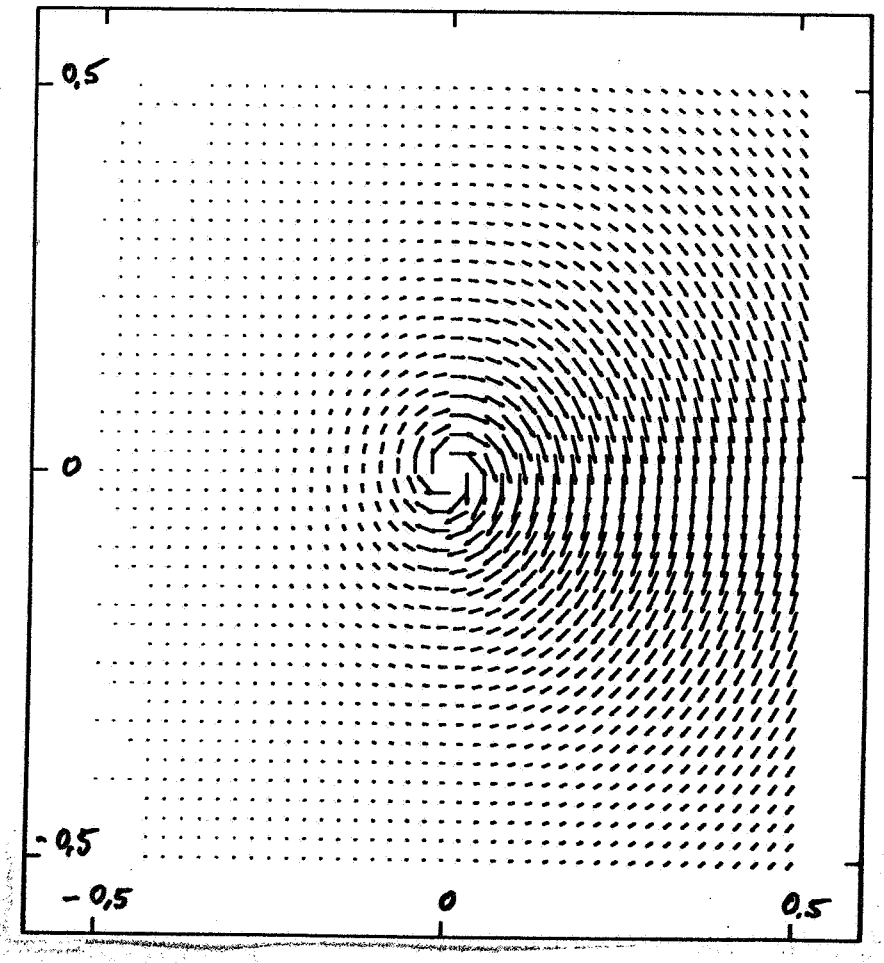

Figure 3-b Un exemple de simulation d'un schéma de dilution utilisant la fonction primaire montrée en $3-a$. (Les échelles de représentation sont différentes de celles utilisées en figure $4-a$).

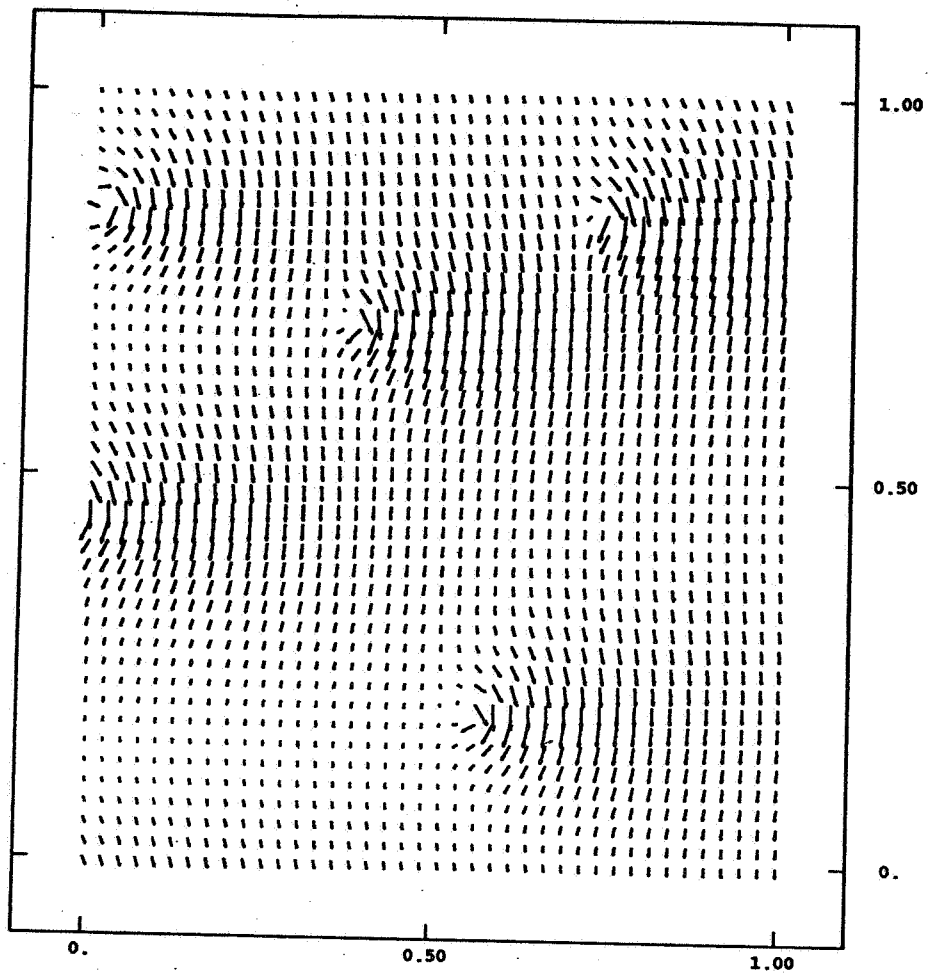

Figure 4-a Partie réelle de la covariance expérimentale de la simulation en $3-b$.

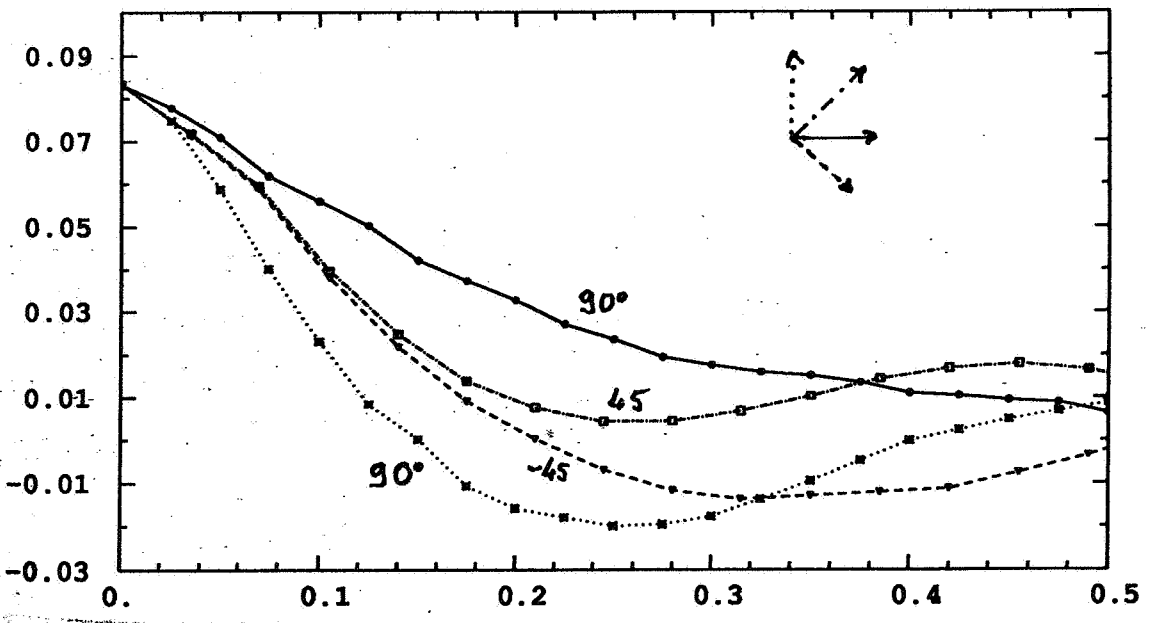

Figure 4-b et partie imaginaire.

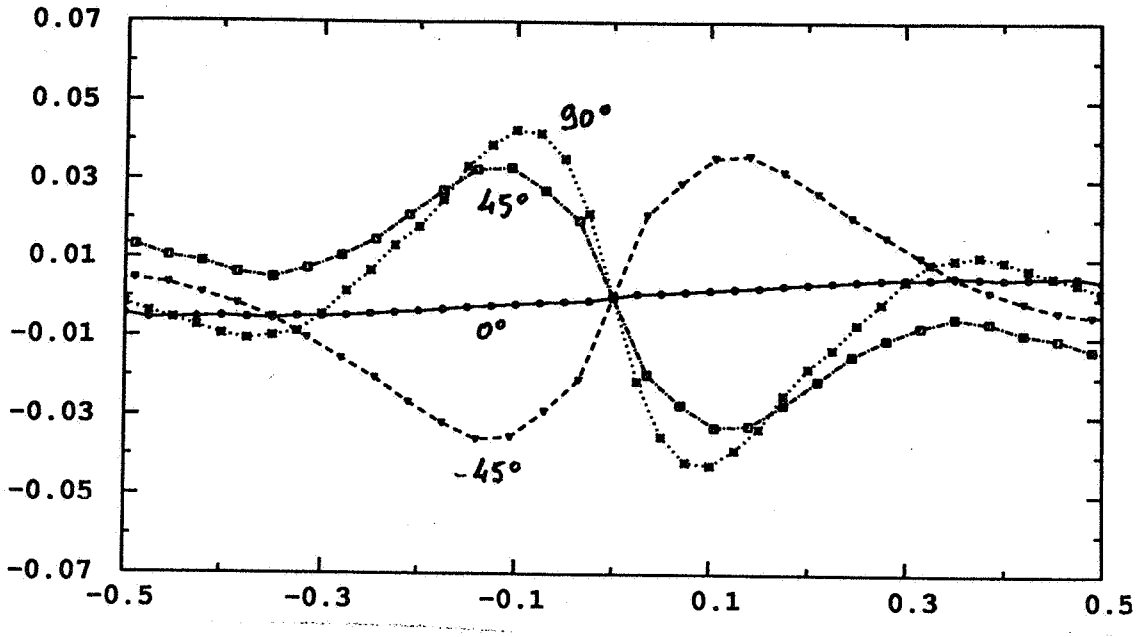

Figure 5-a Partie réelle de covariance de $X + iX'_x$ lorsque la covariance de X est $e^{-|h|^2}$.

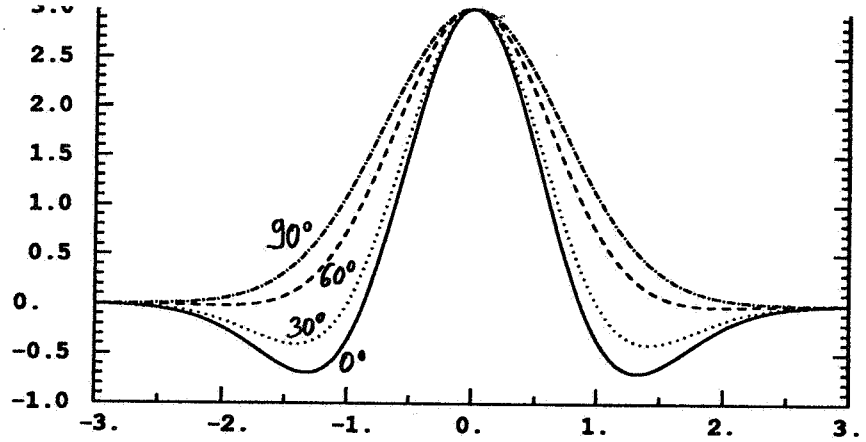

Figure 5-b et partie imaginaire.

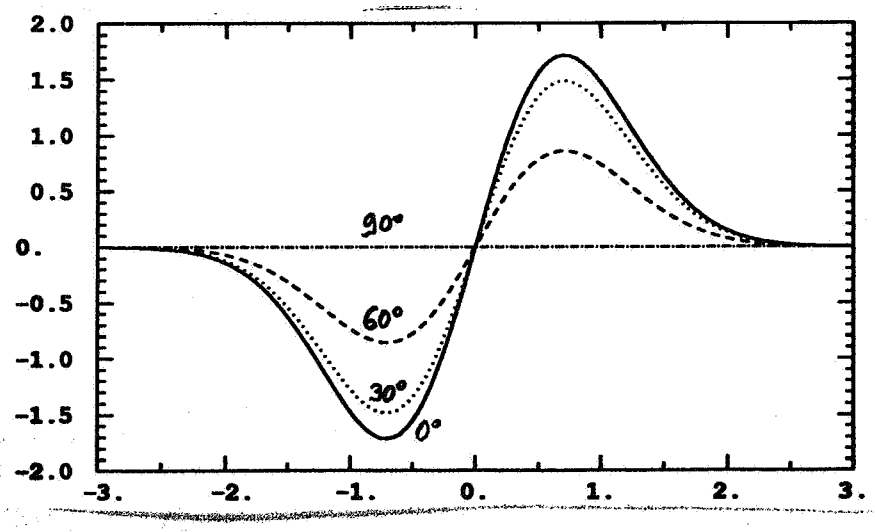

Figure 6 Représentation vectorielle des données. En traits pointillés et avec figuration de l'origine par un cercle, les 14 données utilisées en krigeage.

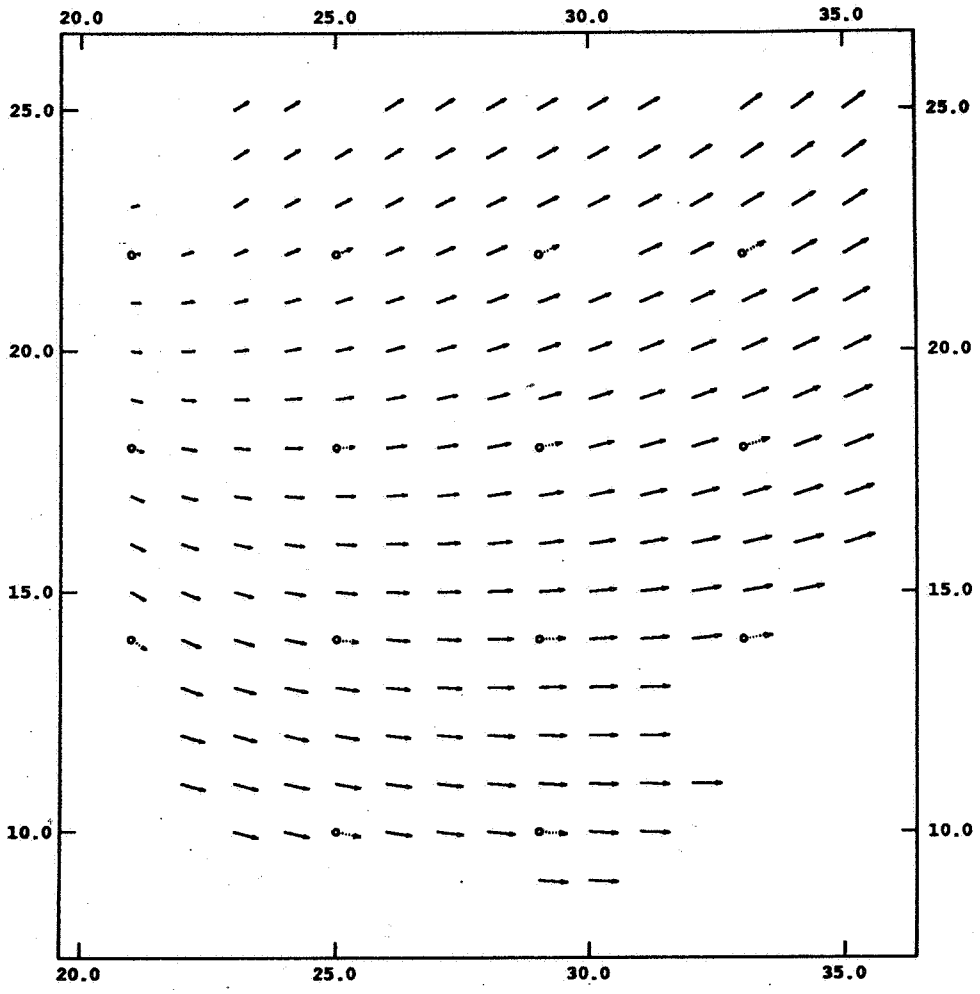

Figure 7 Ajustement de C^r par 0.08 × Sph($|h|/15$)

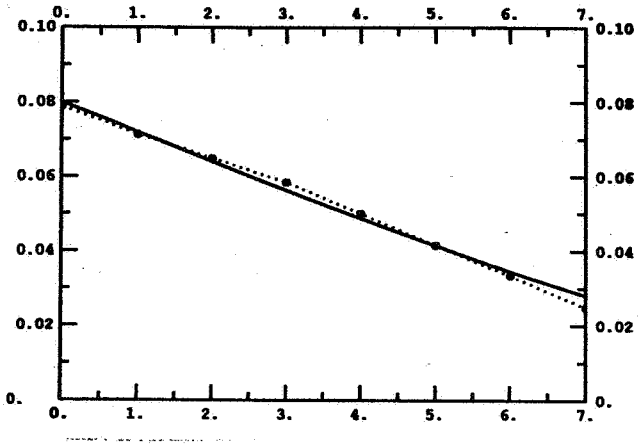

Figure 8 Ajustement de la partie imaginaire C^i.

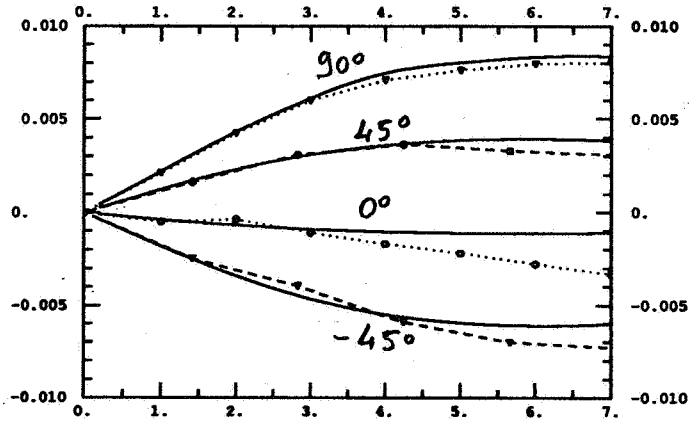

Figure 9 Exemple d'utilisation d'un trop grand nombre de composantes élémentaires. (20 en l'occurence).

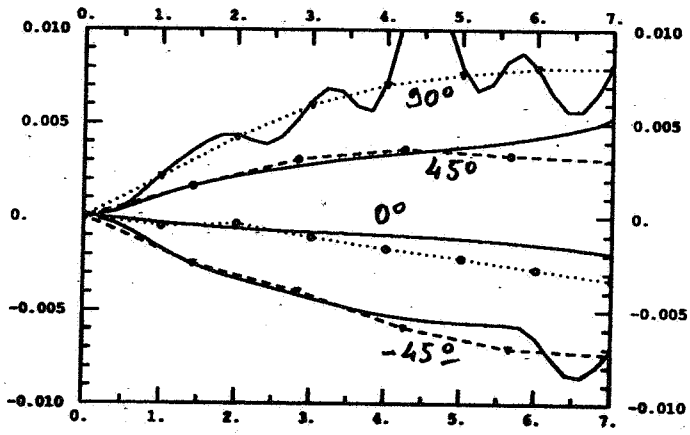
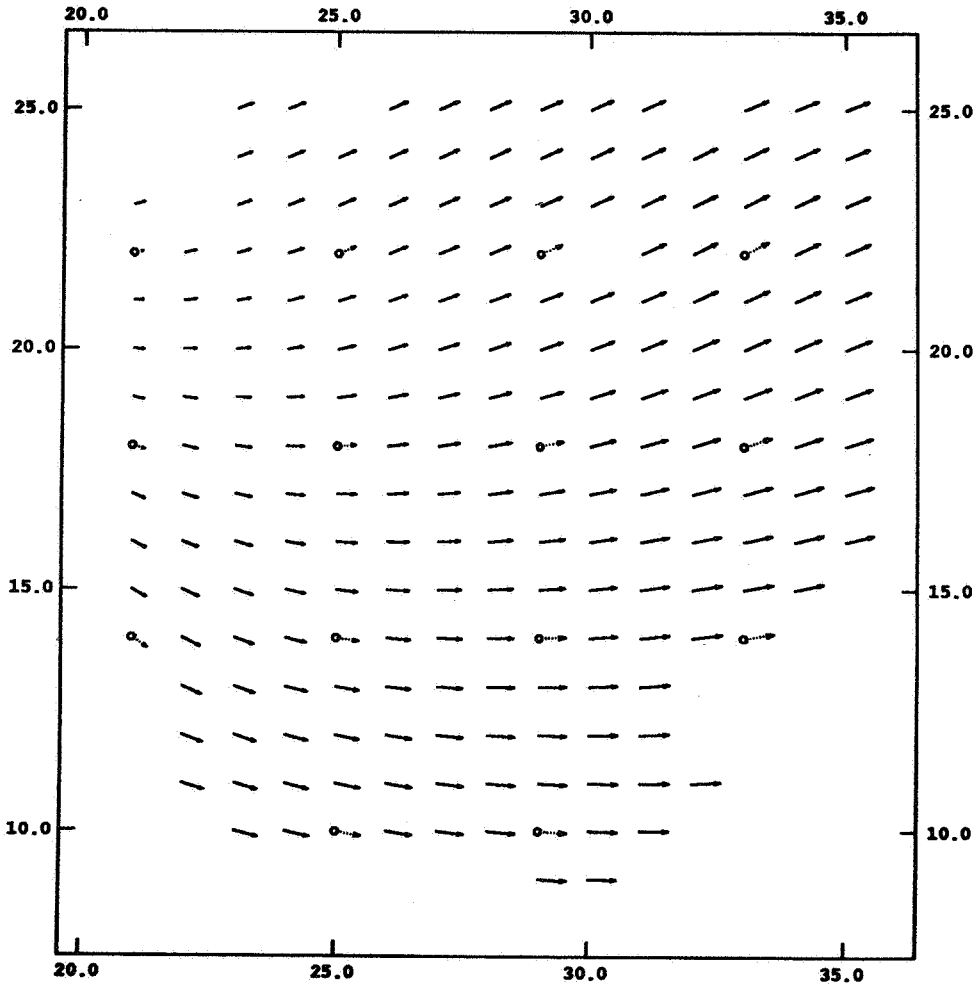
Figure 10 Résultats du krigeage complexe (à moyenne connue). En traits pointillés et avec figuration de l'origine par un cercle, les 14 données utilisées.