

# Les ensembles aléatoires

par

Christian LANTUÉJOUL

---

Cours C-149

Janvier 1993

---

**CENTRE DE GÉOSTATISTIQUE**

**35, RUE SAINT-HONORÉ, 77305 FONTAINEBLEAU (France)**



**ECOLE DES MINES  
DE PARIS**

# Ensembles Aléatoires

A l'origine de ce cours se trouve le problème de la modélisation de phénomènes physiques au moyen de techniques probabilistes.

Tout d'abord, pourquoi modéliser? Les raisons diffèrent en fonction de l'information disponible. Dans un domaine tel que la Science des Matériaux, où l'on peut accéder à une information abondante, parfois redondante fournie par des lames minces, sections polies ou images électroniques, il s'agit de représenter le phénomène étudié à l'aide d'un petit jeu de paramètres. Lorsque les conditions d'élaboration du matériaux changent, il est possible d'observer l'évolution des paramètres de façon à en déduire des lois physiques. Dans un autre domaine tel que le Génie Minier, on dispose au contraire d'une information rare, voire sporadique, sans commune mesure avec les objectifs d'estimation à atteindre. C'est ainsi que se pose, par exemple, le problème de la continuité de la minéralisation dans certains gisements miniers. En pareil cas, il faut introduire une information supplémentaire, ce qui se fait par l'intermédiaire d'un modèle. Bien entendu, le choix du modèle est déterminant, et le recours à un modèle sans adéquation à la réalité ne saurait aboutir à autre chose qu'à des résultats pour le moins douteux... Fort heureusement, l'expérience du géologue est là pour servir de guide quant au choix du modèle.

Maintenant, pourquoi s'appuyer sur des techniques probabilistes pour modéliser un phénomène physique? Cela ne signifie pas que le phénomène est le résultat d'une expérience aléatoire. C'est simplement une décision de notre part que de recourir au formalisme de la théorie des probabilités pour définir un modèle et en examiner les propriétés (Matheron, 1989). Nous savons que ce formalisme est apte à rendre compte des aspects à la fois chaotiques et structurés du phénomène étudié.

Parmi les modèles probabilistes, les ensembles aléatoires constituent une classe particulière, mais d'une grande richesse. Que l'on songe seulement aux processus ponctuels, aux réseaux de droites, aux partitions polyédriques de l'espace, aux agrégats... et aux phénomènes physiques que de tels ensembles peuvent représenter.

Devant une telle diversité de formes, la question se pose de savoir comment caractériser la loi d'un ensemble aléatoire. Question difficile, car elle met en jeu la géométrie des réalisations, leur topologie etc... Il existe des procédés spécifiques pour certains ensembles de géométrie particulière (les processus ponctuels, par exemple). Mais il est également possible d'éviter de travailler au cas par cas. Moyennant une légère hypothèse sur les réalisations, G. Matheron a établi l'existence d'un outil structural de caractérisation de la loi d'un ensemble aléatoire. Une description de cet outil, qui est aux ensembles aléatoires ce qu'une fonction de répartition est aux variables aléatoires, sera donnée au chapitre 2.

L'objet de ce cours n'est pas dresser un inventaire exhaustif des modèles d'ensembles aléatoires que l'on peut trouver dans la littérature. Il s'agit plutôt d'en exhiber quelques exemples de base (processus ponctuels au chapitre 2, modèles d'aggrégats et pavages polyédriques au chapitre 3), que le lecteur pourra ensuite combiner selon son libre choix et son imagination. Sur ces modèles de base, on s'efforcera de mener à bien un certain nombre de calculs, et en premier lieu leur fonction de répartition. Mais on regardera aussi d'autres grandeurs, les proportions, les covariances, les granulométries (définies au chapitre 1)..., dont l'intérêt peut varier d'un modèle à l'autre, et parfois bien commodes pour l'inférence statistique des paramètres.

Compte tenu des données usuellement disponibles en géostatistique, on attachera une importance toute particulière à l'aspect stéréologique des choses. La stéréologie, rappelons-le, a pour objet la détermination de caractéristiques tri-dimensionnelles d'un objet à partir d'informations planes ou linéaires. Les formules de base de la stéréologie sont présentées au chapitre 1.

Pour clore cette courte introduction, je voudrais remercier P. Chauvet, X. Freulon, D. Jeulin et M. Touati qui ont eu la patience et la gentillesse de lire et de critiquer une première rédaction de ce cours.

# Chapitre 1

## Quelques éléments de Stéréologie et de Morphologie Mathématique

L'objet de ce chapitre est de fournir les techniques et les outils dont nous aurons besoin tout au long de ce cours. Nous commencerons par parler d'une technique particulière d'analyse quantitative d'image qui s'appelle la **Morphologie Mathématique**. Une présentation rapide de quelques unes de ses transformations de base nous permettra de déboucher sur le concept de granulométrie. Nous parlerons ensuite de **Stéréologie**, dont l'objet est de répondre à des questions du type: que connaît on des propriétés tri-dimensionnelles d'un objet accessible à partir de sections planes ou bien linéaires seulement?

Pour le lecteur désireux d'approfondir ces deux disciplines, nous recommandons comme référence plus particulièrement les ouvrages de Matheron (1967) et de Serra (1982) pour la Morphologie Mathématique, ainsi que ceux de Hadwiger (1957) et de Santaló (1977) pour la Stéréologie.

### 1.1 Notations

L'espace de travail est  $\mathbb{R}^d$  avec en général  $d = 1, 2$  ou  $3$ . Les points de  $\mathbb{R}^d$  sont en général représentés par des lettres minuscules, les ensembles par des majuscules. Un point  $o$  de  $\mathbb{R}^d$  est arbitrairement pris comme origine. Si  $A \subset \mathbb{R}^d$ , on note  $\bar{A}$  son complémentaire, ainsi que  $\check{A}$  son symétrique par rapport à l'origine.  $A_x$  désigne le translaté de  $A$  selon le vecteur  $\vec{ox}$ . Enfin, si  $A, B \subset \mathbb{R}^d$ , on désigne respectivement par  $A \oplus B$  et  $A \ominus B$  l'addition et la soustraction de Minkowski de  $A$  par  $B$

$$A \oplus B = \bigcup_{b \in B} A_b \quad A \ominus B = \bigcap_{b \in B} A_b$$

Dans le cas où  $A$  est un sous-ensemble mesurable de  $\mathbb{R}^d$  (un borélien), il est possible de considérer son  $d$ -volume, ce que l'on note  $|A|$ . De façon générale, les barres verticales désignent le volume de l'objet dans l'espace dans lequel il est défini. Ainsi, par exemple, le  $(d-1)$ -volume de la frontière  $\partial A$  de  $A$  est noté  $|\partial A|$ .

## 1.2 Transformations morphologiques

**Définition 1.1** Un point  $x$  appartient au dilaté de  $A$  par  $B$  si  $B_x$  rencontre  $A$ .

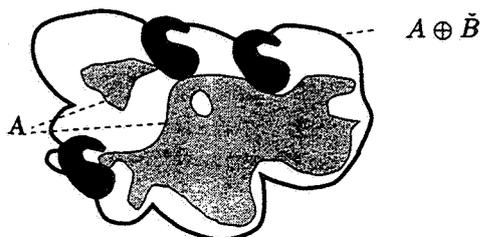


Figure 1.1: Exemple d'un ensemble et de son dilaté par une forme quelconque.

Dire que  $B_x \cap A \neq \emptyset$  signifie qu'il existe un point  $y$  de  $B$  tel que  $x + y \in A$ , ou bien, de façon équivalente, tel que  $x \in A_{-y}$ . Par conséquent,

$$\{x \mid B_x \cap A \neq \emptyset\} = \{x \mid \exists y \in \check{B}, x \in A_y\} = \bigcup_{y \in \check{B}} A_y = A \oplus \check{B}$$

**Définition 1.2** Un point  $x$  appartient à l'érodé de  $A$  par  $B$  si  $B_x$  est contenu dans  $A$ .

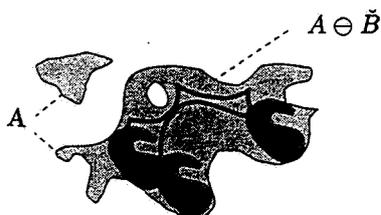


Figure 1.2: Exemple d'un ensemble et de son érodé par une forme quelconque.

$B_x$  est contenu dans  $A$  si et seulement si tout point  $y$  de  $B$  vérifie  $x + y \in A$ , ou encore  $x \in A_{-y}$ . De sorte que

$$\{x \mid B_x \subset A\} = \{x \mid \forall y \in \check{B}, x \in A_y\} = \bigcap_{y \in \check{B}} A_y = A \ominus \check{B}$$

On pourra remarquer que dilatation et érosion sont duales vis-à-vis de la complémentation

$$\overline{A \oplus \check{B}} = \bar{A} \oplus \check{B} \quad \overline{A \ominus \check{B}} = \bar{A} \ominus \check{B}$$

Ces formules reviennent en effet à écrire que  $B_x \subset A \iff B_x \cap \bar{A} = \emptyset$ .

**Définition 1.3** On appelle *ouverture* de  $A$  par  $B$  l'ensemble  $A_B$  engendré par les translatés de  $B$  contenus dans  $A$ .

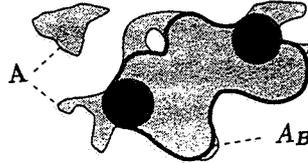


Figure 1.3: Exemple d'un ensemble et de son ouvert par un disque.

Les propriétés de l'ouverture découlent directement de la définition. L'ouverture est

- **anti-extensive**  $A_B \subset A$
- **croissante**  $A \subset A' \implies A_B \subset A'_B$
- **idempotente**  $(A_B)_B = A_B$

Il se trouve que l'ouverture s'exprime simplement comme composée d'une érosion et d'une dilatation. En effet, dire que  $x \in A_B$  revient à dire qu'il existe  $y$  tel que  $x \in B_y$  et  $B_y \subset A$ . Or  $x \in B_y \iff x - y \in B \iff y - x \in \check{B} \iff y \in (\check{B})_x$ . D'autre part,  $B_y \subset A \iff y \in A \ominus \check{B}$ . Cela montre exactement que  $(\check{B})_x \cap (A \ominus \check{B}) \neq \emptyset$ , c'est à dire  $x \in (A \ominus \check{B}) \oplus B$ . On a finalement établi

$$A_B = (A \ominus \check{B}) \oplus B$$

Remarque: on érode par  $B$ , mais on dilate par  $\check{B}$  pour des raisons de recentrage. Si  $B = \{h\}$ , alors  $A \ominus \check{B} = A_{-h}$  et  $A_B = A_{-h+h} = A$ .

**Définition 1.4** On appelle *fermeture* de  $A$  par  $B$  l'ensemble  $A^B$  des points  $x$  tels que tout translaté de  $B$  qui contient  $x$  rencontre  $A$ .

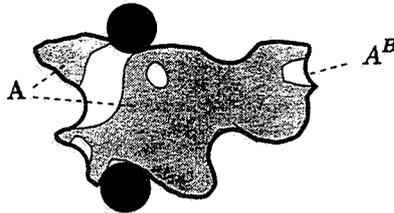


Figure 1.4: Exemple d'un ensemble et de son fermé par un disque.

La terminologie suggère que fermeture et ouverture sont duales l'une de l'autre. De fait, ouvrir un ensemble équivaut à fermer son complémentaire.

$$\overline{A_B} = \bar{A}^B \quad \overline{A^B} = \bar{A}_B$$

En effet,  $x \notin A^B$  si et seulement s'il existe un  $y$  tel que  $x \in B_y$  et  $B_y \subset \bar{A}$ . La dualité montre que la fermeture est

- extensive  $A \subset A^B$
- croissante  $A \subset A' \implies A^B \subset A'^B$
- idempotente  $(A^B)^B = A^B$

Enfin, la fermeture s'exprime comme composée d'une dilatation et d'une érosion

$$A^B = (A \oplus \check{B}) \ominus B$$

Outre leurs caractéristiques géométriques, l'intérêt des ouvertures et des fermetures réside dans leurs propriétés granulométriques.

Pour définir le concept de granulométrie, il est commode de recourir à l'image du tamisage. On se donne une famille de tamis, la maille de chaque tamis étant caractérisée par un paramètre  $\lambda \geq 0$ . Si l'on applique le tamis de maille  $\lambda$  à une population de particules  $X$ , une partie  $\psi_\lambda(X)$  de ces particules est refusée par le tamis. On a clairement les propriétés suivantes:

- i)  $\psi_\lambda(X) \subset X$  et  $\psi_0(X) = X$ .
- ii)  $X \subset Y$  implique  $\psi_\lambda(X) \subset \psi_\lambda(Y)$ . Plus la population de particules est grande, plus le refus est important.
- iii)  $\lambda \geq \mu$  implique  $\psi_\lambda(X) \subset \psi_\mu(X)$ . Plus le tamis est fin, moins il est permissif.
- iv)  $\psi_\lambda \circ \psi_\mu(X) = \psi_\mu \circ \psi_\lambda(X) = \psi_{\max(\lambda, \mu)}(X)$ . Le refus de deux tamis consécutifs coïncide avec le refus du tamis le plus large.

Ces quatre propriétés, érigées en axiomes, conduisent à la définition d'une granulométrie:

**Définition 1.5** On appelle *granulométrie* toute famille de transformations ensemblistes vérifiant les propriétés i) à iv) ci-dessus.

Un exemple typique est la **granulométrie par ouverture**. Soit  $B$  un ensemble convexe. On désigne par  $\psi_\lambda$  l'ouverture selon l'homothétique  $\lambda B$  de  $B$

$$\psi_\lambda(X) = X_{\lambda B}$$

Montrons que  $\psi$  est une granulométrie. i) et ii) découlent directement des propriétés de l'ouverture. Si l'on parvient à montrer iii), alors iv) est immédiat car si  $\lambda \geq \mu$ , on a

$$X_{\lambda B} \supset (X_{\mu B})_{\lambda B} \supset (X_{\lambda B})_{X_{\lambda B}} = X_{\lambda B}$$

$$X_{\lambda B} \supset (X_{\lambda B})_{\mu B} \supset (X_{\lambda B})_{X_{\lambda B}} = X_{\lambda B}$$

Il reste donc à prouver iii). Soit  $x \in X_{\lambda B}$ . Il existe  $y$  tel que  $x \in (\lambda B)_y \subset X$ . On va montrer qu'il existe un point  $z$  tel que  $x \in (\mu B)_z \subset (\lambda B)_y$  ce qui suffira pour établir  $x \in X_{\mu B}$ .

$x - y \in \lambda B$  implique  $\frac{\mu}{\lambda}(x - y) \in \mu B$ . Posons  $x - z = \frac{\mu}{\lambda}(x - y)$ . On a déjà  $x \in (\mu B)_z$ . De plus, si  $t$  est un point quelconque de  $B$ , alors  $\mu t + z = \mu t + x - \frac{\mu}{\lambda}(x - y) = \frac{\mu}{\lambda}\lambda t + (1 - \frac{\mu}{\lambda})(x - y) + y$ . Comme  $B$  est convexe,  $\frac{\mu}{\lambda}\lambda t + (1 - \frac{\mu}{\lambda})(x - y) \in \lambda B$ . On a donc montré que tout point  $\mu t + z$  de  $(\mu B)_z$  est dans  $(\lambda B)_y$ , ce qui achève la démonstration.

Remarque: une démonstration plus systématique est proposée en exercice.

Plutôt que de rester à un niveau ensembliste, il est d'intérêt pratique de passer à une étape plus quantitative. A cette fin, on appelle **courbe granulométrique** associée à  $X$  la courbe qui à tout  $\lambda$  associe le nombre

$$F_X(\lambda) = \frac{|\psi_\lambda(X)|}{|X|}$$

Il s'agit d'une fonction qui a les propriétés d'une fonction de répartition complémentaire.

### 1.3 Stéréologie

Etymologiquement, stéréologie signifie "science des solides de l'espace". Dans ses applications usuelles, il arrive bien souvent qu'un phénomène spatial ne soit accessible expérimentalement qu'à travers des sections planes ou même linéaires. La stéréologie a pour objet la recherche de renseignements tri-dimensionnels à partir d'informations bi- ou mono-dimensionnelles. Une partie importante de la stéréologie est l'étude des **compacts convexes** de  $\mathbb{R}^d$ . On notera en particulier l'hypothèse de convexité sans laquelle de nombreux renseignements quantitatifs ne peuvent être acquis.

On considère l'espace  $\mathcal{C}_d$  des compacts convexes de  $\mathbb{R}^d$ . Cet espace est stable par intersection, dilatation et érosion, projection sur un  $i$ -plan (sous-espace vectoriel de dimension  $i$ ), intersection par un  $i$ -plan affine (ensemble parallèle à un  $i$ -plan).

On s'intéresse aux fonctions numériques définies sur  $\mathcal{C}_d$  qui sont

- **positives:**  $\phi(K) \geq 0$  et  $\phi(\emptyset) = 0$ .
- **croissantes:**  $K \subset K'$  implique  $\phi(K) \leq \phi(K')$ .

- **additives**, au sens où  $\phi(K \cup K') + \phi(K \cap K') = \phi(K) + \phi(K')$  si  $K \cup K'$  est convexe.
- **invariantes par déplacement** (translation et rotation).

Des exemples simples de telles fonctions viennent immédiatement à l'esprit. Par exemple le  $d$ -volume ou encore le  $(d - 1)$ -volume de la frontière. Une telle classe de fonctions constitue un cône convexe, dont une famille génératrice est donnée par le théorème suivant:

**Théorème 1.1** *Tout fonction sur  $\mathcal{C}_d$  qui est positive, croissante, additive et invariante par déplacement est nécessairement une combinaison linéaire positive de  $d+1$  fonctions  $W_0, W_1, \dots, W_d$ , appelées **fonctionnelles de Minkowski***

$$\phi(K) = \sum_{i=0}^d a_i W_i(K)$$

De surcroît, la fonctionnelle  $W_i$  est homogène de degré  $d - i$ : si  $a > 0$ , on a  $W_i(aK) = a^{d-i} W_i(K)$ .

Les fonctionnelles de Minkowski sont définies à une constante multiplicative près. Par commodité, ces constantes multiplicatives ont été choisies de façon à ce que les fonctionnelles attribuent la même valeur à la boule unité de  $\mathbb{R}^d$ , à savoir son  $d$ -volume

$$\omega_d = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right)}$$

où  $\Gamma$  est la fameuse fonction Eulérienne

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\alpha > 0)$$

qui vérifie  $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha)$  avec en particulier  $\Gamma(1) = 1$  et  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ . Voici une interprétation physique de quelques unes de ces fonctionnelles:

- $W_0(K) = |K|$  est le **volume** de  $K$ .
- $d W_1(K) = |\partial K|$  est le  $d - 1$ -**volume de la frontière** de  $K$ .
- $W_{d-1}(K) = \frac{\omega_d}{2} l(K)$ , où  $l(K)$  désigne la **largeur moyenne** de  $K$ . Si  $l(K, u)$  est la longueur de la projection de  $K$  sur une droite portée par le vecteur unitaire  $u$ , on a

$$l(K) = \frac{1}{d\omega_d} \int_{\partial B} l(K, u) du$$

- $W_d(K) = \omega_d$  est une **constante**.

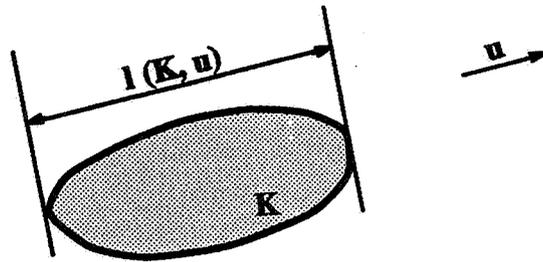


Figure 1.5: Largeur d'un compact dans une direction donnée.

Exemple: dans le cas  $d = 2$ , on a

$$W_1(K) = W_{2-1}(K)$$

ce qui se récrit

$$\frac{|\partial K|}{2} = \frac{\pi}{2} l(K)$$

On retrouve ainsi le théorème de Cauchy pour les convexes du plan.

### 1.3.1 Formule des projections

On désigne par  $\dot{E}_i$  un  $i$ -plan d'orientation uniforme: tous les  $i$ -plans ont la même chance d'être choisis. La projection  $K \downarrow \dot{E}_i$  d'un compact convexe  $K$  sur  $\dot{E}_i$  est un compact convexe aléatoire. On désigne par  $W_j^{(i)}(K \downarrow \dot{E}_i)$  ses fonctionnelles de Minkowski dans  $\dot{E}_i$ . La valeur moyenne prise par ces fonctionnelles est donnée par une formule due à Cauchy:

$$E \{ W_j^{(i)}(K \downarrow \dot{E}_i) \} = \frac{\omega_i}{\omega_d} W_{d+j-i}(K)$$

Voici le principe de la démonstration: on commence par montrer que la moyenne cherchée est une fonction de  $K$  qui est croissante, additive, et invariante par déplacement. D'après le théorème de Minkowski, il s'agit donc d'une combinaison linéaire positive des fonctionnelles de Minkowski de  $K$ . On trouve la valeur explicite des coefficients en prenant  $K = B(r)$  et en identifiant les termes en  $r^j$ .

### 1.3.2 Formule des sections

On s'intéresse maintenant à l'ensemble des  $i$ -plans affines qui rencontrent  $K$ . En attribuant à chacun la même chance d'être choisi, on obtient un  $i$ -plan aléatoire  $\ddot{E}_i$  que l'on appelle  **$i$ -plan affine uniforme rencontrant  $K$** . Bien évidemment, l'orientation de  $\ddot{E}_i$  n'est en général pas uniforme. Par exemple, le convexe de la Figure 1.6 a plus de chance d'être coupé par une droite orthogonale à la direction d'allongement que par une droite parallèle à cette direction.

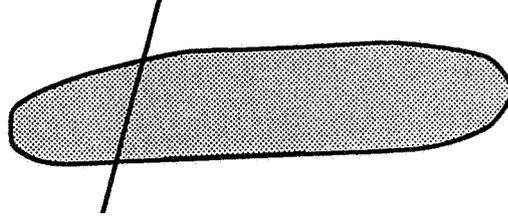


Figure 1.6: Un objet allongé est plus souvent coupé par une droite orthogonale à la direction d'allongement que par une droite qui lui est parallèle.

La formule de **Crofton** donne les fonctionnelles de Minkowski moyennes des sections uniformes de  $K$

$$E \left\{ W_j^{(i)}(K \cap \tilde{E}_i) \right\} = \frac{\omega_i \omega_{d-j}}{\omega_{d-i} \omega_{i-j}} \frac{W_j(K)}{W_i(K)}$$

Pour la démonstration, on pourra consulter Hadwiger (1957).

Exemple : quelle est la traversée linéaire moyenne de  $K$ ? Faisons  $i = 1$  et  $j = 0$  dans la formule de Crofton

$$E \left\{ W_0^{(1)}(K \cap \tilde{E}_1) \right\} = \frac{\omega_d}{\omega_{d-1}} \frac{W_0(K)}{W_1(K)}$$

Remplaçant les fonctionnelles de Minkowski par leur valeur effective, on arrive à

$$E \left\{ W_0^{(1)}(K \cap \tilde{E}_1) \right\} = \frac{d \omega_d}{\omega_{d-1}} \frac{|K|}{|\partial K|}$$

### 1.3.3 Formule des dilatations

Soit  $B(r)$  la boule de rayon  $r$  centrée à l'origine. La dilatation par une boule préservant la convexité, il est possible de considérer les fonctionnelles de Minkowski associées à  $K \oplus B(r)$ . Elles sont données par la formule de **Steiner**

$$W_i(K \oplus B(r)) = \sum_{j=0}^{d-i} \binom{d-i}{j} W_{i+j}(K) r^j$$

Même démonstration que pour la formule des projections.

Donnons ici une application de la formule de Steiner qui nous sera utile pour la suite. Soit  $K$  un compact de  $\mathbb{R}^{d-1}$ , de fonctionnelles de Minkowski  $W_i^{(d-1)}(K)$ ,  $i = 0, \dots, d-1$ .

En tant que compact de  $\mathbb{R}^d$ , les fonctionnelles de Minkowski de  $K$  s'écrivent  $W_i^{(d)}(K)$ ,  $i = 0, \dots, d$ . Quelles sont les relations entre les  $W^{(d-1)}$  et les  $W^{(d)}$ ?

Dilatons  $K$  par la boule à  $d$  dimensions  $B^{(d)}(r)$  de rayon  $r$  centrée à l'origine. Le  $d$ -volume du dilaté peut être obtenu par intégration niveau par niveau

$$W_0^{(d)}(K \oplus B^{(d)}(r)) = \int_{-r}^{+r} W_0^{(d-1)}(K \oplus B^{(d-1)}(\sqrt{r^2 - u^2})) du$$

Le membre de gauche se développe à l'aide de la formule de Steiner

$$W_0^{(d)}(K \oplus B^{(d)}(r)) = \sum_{j=0}^d \binom{d}{j} W_j^{(d)}(K) r^j$$

En ce qui concerne le membre de droite, son intégrand est également développé par la formule de Steiner

$$W_0^{(d-1)}(K \oplus B^{(d-1)}(\sqrt{r^2 - u^2})) = \sum_{j=0}^{d-1} \binom{d-1}{j} W_j^{(d-1)}(K) (r^2 - u^2)^{\frac{j}{2}}$$

et compte tenu de ce que

$$\int_{-r}^{+r} (r^2 - u^2)^{\frac{j}{2}} du = \frac{\omega_{j+1}}{\omega_j} r^{j+1}$$

on arrive à

$$\sum_{j=0}^d \binom{d}{j} W_j^{(d)}(K) r^j = \sum_{j=0}^{d-1} \binom{d-1}{j} W_j^{(d-1)}(K) \frac{\omega_{j+1}}{\omega_j} r^{j+1}$$

et par identification des termes en  $r^j$ , on aboutit à

$$W_j^{(d)}(K) = \frac{j}{d} \frac{\omega_j}{\omega_{j-1}} W_{j-1}^{(d-1)}(K)$$

Plus généralement, si  $K$  est un compact de  $\mathbb{R}^{(d-i)}$ , alors ses fonctionnelles de Minkowski dans cet espace sont reliées à celles de  $\mathbb{R}^d$  par la formule:

$$W_j^{(d)}(K) = \frac{\binom{j}{i}}{\binom{d}{i}} \frac{\omega_j}{\omega_{j-i}} W_{j-i}^{(d-i)}(K)$$

## Chapitre 2

# Des processus ponctuels aux ensembles fermés aléatoires

### 2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous considérons la classe d'ensembles aléatoires constituée par les **processus ponctuels**. L'intérêt est ici triple: tout d'abord, en dépit de leur géométrie assez pauvre, ils permettent la modélisation de nombreux phénomènes naturels. En second lieu, les processus ponctuels peuvent servir de constituant de base pour l'élaboration d'ensembles aléatoires plus sophistiqués, comme nous aurons l'occasion de le constater au prochain chapitre. Enfin, l'introduction des processus ponctuels donne l'occasion d'aborder le problème général de la caractérisation de la loi d'un ensemble aléatoire.

En raison de l'ordre total qui règne dans cet espace, les processus ponctuels sur  $\mathbb{R}$  ont pendant longtemps fait l'objet d'une attention particulière, et une littérature abondante leur a été consacrée. Parmi les références spatiales, citons l'ouvrage historique de Matern (1960) ainsi que le recueil d'articles du livre de Lewis (1972). La théorie des ensembles aléatoires introduite dans ce chapitre est présentée dans son intégralité dans le livre de Matheron (1975). L'approche de Kendall (1974) mérite également d'être mentionnée.

### 2.2 Processus ponctuels

On s'intéresse donc aux phénomènes aléatoires dont toute réalisation se présente sous la forme d'une population de points. On se place ici dans le cas particulier d'un processus dont les réalisations ne présentent pas de points d'accumulation. Cette restriction qui sera levée plus loin permet d'affirmer que tout borélien borné renferme un nombre fini au plus de points. Il est alors commode d'introduire la **mesure de comptage** du processus qui associe à tout borélien  $B$  de  $\mathbb{R}^d$  le nombre  $N(B)$  de points du processus tombés dans  $B$ .  $N(B)$  est une variable aléatoire non négative, éventuellement infinie

(pour des boréliens non bornés).  $N$  est une grandeur additive au sens où l'on a

$$N(B \cup B') + N(B \cap B') = N(B) + N(B')$$

pour tout couple de boréliens  $B$  et  $B'$  de  $\mathbb{R}^d$ .

L'intérêt de la mesure de comptage est qu'elle permet de définir la **loi spatiale** d'un processus ponctuel, de façon tout à fait similaire à ce qui se fait pour les fonctions aléatoires. Par loi spatiale, on entend ici le jeu des valeurs prises par les probabilités pour que  $N(B_1) = n_1, \dots, N(B_k) = n_k$  pour tout choix du nombre  $k$ , tout choix des boréliens  $B_1, \dots, B_k$  de  $\mathbb{R}^d$ , et tout choix des nombres  $n_1, \dots, n_k$ . Ce jeu de valeurs possède évidemment des relations de cohérence, telles que

$$P\{N(B_1) = n_1, \dots, N(B_k) = n_k\} = \sum_{n=0}^{+\infty} P\{N(B_1) = n_1, \dots, N(B_k) = n_k, N(B) = n\}$$

Dans ce qui suit, nous allons passer en revue quelques exemples de processus ponctuels, que l'on cherchera à définir au moyen de leur loi spatiale.

### 2.2.1 Processus de Poisson

Il s'agit là certainement du plus populaire des processus ponctuels. Cette popularité n'est au demeurant guère imméritée car un processus de Poisson exprime exactement l'idée intuitive de points au hasard.

**Définition 2.1** *La mesure de comptage d'un processus de Poisson vérifie*

*i) le nombre de points tombés dans le borélien borné  $B$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\theta |B|$ .*

$$P\{N(B) = n\} = e^{-\theta |B|} \frac{(\theta |B|)^n}{n!}$$

*ii) pour toute famille finie de boréliens deux à deux disjoints  $B_1, \dots, B_k$ , les nombres de points  $N(B_1), \dots, N(B_k)$  sont mutuellement indépendants.*

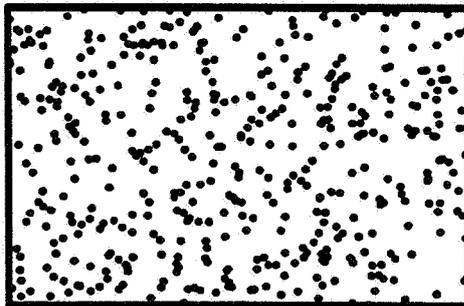


Figure 2.1: réalisation d'un processus de Poisson.

Comme la moyenne d'une loi de Poisson est son paramètre, le nombre moyen de points tombés dans  $B$  est  $\theta |B|$ . En particulier,  $\theta$  est le nombre moyen de points par unité de

volume. Le résultat qui suit montre que le processus de Poisson correspond bien à l'idée de points implantés au hasard.

**Théorème 2.1** *Soit  $B$  un borélien borné de  $\mathbb{R}^d$ . Si  $N(B) = n$ , les  $n$  points sont indépendants et uniformes dans  $B$ .*

**Démonstration:** on va montrer que la loi spatiale de l'ensemble conditionnel coïncide avec celle de  $n$  points indépendants et uniformes dans  $B$ .

Soient  $B_1, \dots, B_k$   $k$  sous-ensembles de  $B$  pas nécessairement disjoints. Pour évaluer

$$p = P \left\{ \bigcap_{j=1}^k N(B_j) = n_j \mid N(B) = n \right\}$$

il est avantageux d'exprimer cette quantité comme probabilité d'événements indépendants. A cette fin, si  $C$  désigne une partie de  $\{1, \dots, k\}$ , on pose

$$B_C = \bigcap_{j=1}^k B'_j$$

où  $B'_j = B_j$  si  $j \in C$  et  $B \setminus B_j$  sinon. Les  $B_C$  constituent une partition de  $B$ , et la probabilité conditionnelle se réécrit

$$p = \frac{1}{P\{N(B) = n\}} \sum P \left\{ \bigcap_C N(B_C) = n_C \right\}$$

la somme étant étendue à tous les indices  $n_C$  tels que  $\sum n_C = n$  ainsi que  $\sum_{j \in C} n_C = n_j$  pour tout  $j = 1, \dots, k$ . Et puisque cette probabilité ne met en jeu que des ensembles disjoints, donc des événements indépendants

$$p = \frac{1}{P\{N(B) = n\}} \sum \prod_C P\{N(B_C) = n_C\}$$

Explicitons ces probabilités Poissonniennes. Cela donne

$$p = \frac{1}{e^{-\theta|B|} \frac{(\theta|B|)^n}{n!}} \sum \prod_C e^{-\theta|B_C|} \frac{(\theta|B_C|)^{n_C}}{n_C!}$$

et après simplification

$$p = \frac{n!}{|B|^n} \sum \prod_C \frac{|B_C|^{n_C}}{n_C!}$$

Passons maintenant au calcul de la loi spatiale associée à  $n$  points indépendants et uniformes dans  $B$ . Désignons par  $N'$  la mesure de comptage correspondante, et posons

$$p' = P \left\{ \bigcap_{j=1}^k N'(B_j) = n_j \right\}$$

Reprenant la décomposition en ensembles disjoints, on peut écrire en reprenant les précédentes notations

$$p' = \sum P \left\{ \bigcap_C N'(B_C) = n_C \right\}$$

Chaque terme de la somme est évalué au moyen d'une loi multinomiale

$$P \left\{ \bigcap_C N'(B_C) = n_C \right\} = \binom{n}{\dots n_C \dots} \prod_C \left( \frac{|B_C|}{|B|} \right)^{n_C}$$

et finalement

$$p' = \sum \binom{n}{\dots n_C \dots} \prod_C \left( \frac{|B_C|}{|B|} \right)^{n_C}$$

c'est à dire  $p' = p$ .

Remarque: on verra au paragraphe consacré aux fermés aléatoires une démonstration plus légère de cet important résultat.

Passons maintenant à la **covariance** de la mesure de comptage. Soient  $A$  et  $B$  deux boréliens bornés de  $\mathbb{R}^d$ . Ecrivant

$$N(A) = N(A \cap B) + N(A \setminus B)$$

$$N(B) = N(A \cap B) + N(B \setminus A)$$

et utilisant l'indépendance de la mesure de comptage sur des domaines disjoints, on obtient

$$Cov \{N(A), N(B)\} = Var \{N(A \cap B)\}$$

et puisque  $N(A \cap B)$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\theta|A \cap B|$ , on obtient finalement

$$Cov \{N(A), N(B)\} = \theta|A \cap B|$$

Remarque: si on s'exprime en termes de teneur en posant

$$Z(A) = \frac{N(A)}{|A|} \quad Z(B) = \frac{N(B)}{|B|}$$

on obtient

$$Cov \{Z(A), Z(B)\} = \theta \frac{|A \cap B|}{|A| |B|}$$

Une telle formule a déjà été rencontrée lors de l'étude de l'effet de pépité (Matheron, 1971). Soit en effet  $Z$  une fonction aléatoire stationnaire d'ordre 2, de fonction de covariance  $C$ . Posons

$$Z(A) = \frac{1}{|A|} \int_A Z(x) dx \quad Z(B) = \frac{1}{|B|} \int_B Z(x) dx$$

On sait que si  $A$  et  $B$  sont de grandes dimensions vis-à-vis de la portée de  $C$ , alors

$$Cov \{Z(A), Z(B)\} \approx \frac{|A \cap B|}{|A| |B|} \int C(h) dh$$

En posant

$$\theta = \int C(h) dh$$

on constate que le processus de Poisson est peut être perçu comme l'émergence macroscopique d'une microstructure, et cela quelle que soit l'échelle d'observation. La constante de pépite attachée à la microstructure n'est autre que la densité Poissonnienne.

### 2.2.2 Processus de Poisson à densité régionalisée

Dans cette partie, nous supposons que la densité  $\theta$  n'est plus constante. Il faut voir ici  $\theta$  comme une fonction mesurable, définie sur  $\mathbb{R}^d$ , et à valeurs positives. Pour simplifier l'écriture, on posera

$$\theta(B) = \int_B \theta(x) dx$$

pour tout borélien  $B$ , et l'on remarquera la relation d'additivité

$$\theta(A \cup B) + \theta(A \cap B) = \theta(A) + \theta(B)$$

**Définition 2.2** *La mesure de comptage d'un processus de Poisson à densité régionalisée vérifie*

i) *si le borélien  $B$  vérifie  $\theta(B) < +\infty$ , les nombres de points tombés qu'il renferme suit une loi de Poisson de paramètre  $\theta(B)$ .*

ii) *pour toute famille finie de boréliens deux à deux disjoints  $B_1, \dots, B_k$ , le nombre de points  $N(B_1), \dots, N(B_k)$  sont mutuellement indépendants.*

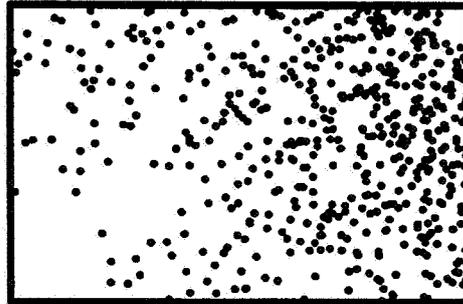


Figure 2.2: réalisation d'un processus de Poisson à densité régionalisée.

Dans ces conditions

$$P\{N(B) = n\} = e^{-\theta(B)} \frac{(\theta(B))^n}{n!}$$

ce qui conduit à

$$\begin{aligned} E\{N(B)\} &= \theta(B) \\ Var\{N(B)\} &= \theta(B) \end{aligned}$$

et plus généralement

$$\text{Cov}\{N(A), N(B)\} = \theta(A \cap B)$$

Bien entendu, dans le cas où la densité régionalisée est constante, on retrouve le cas Poissonien précédent.

Supposons toujours  $\theta(B)$  fini, et faisons l'hypothèse que  $N(B) = n$ . Comment sont implantés les  $n$  points dans  $B$ ? La réponse est à peu près prévisible:

**Théorème 2.2** *Soit  $B$  un borélien de  $\mathbb{R}^d$  tel que  $\theta(B) < +\infty$ . Si  $N(B) = n$ , les  $n$  points sont indépendants et répartis dans  $B$  selon la densité  $\theta(x)/\theta(B)$ .*

Rendons la densité régionalisée aléatoire, et nous arrivons au processus de Cox.

### 2.2.3 Processus de Cox

**Définition 2.3** *Un processus de Cox est un processus de Poisson dont la densité régionalisée est une fonction aléatoire stationnaire non négative.*

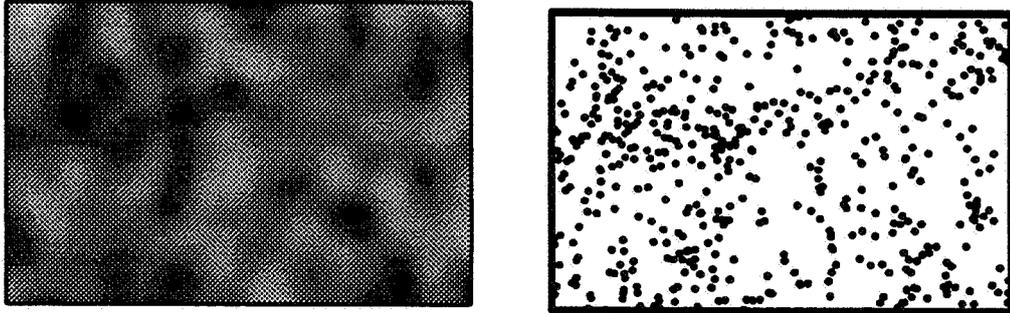


Figure 2.3: réalisation d'un processus de Cox et de sa densité régionalisée.

Désignons par  $\Theta$  la densité régionalisée aléatoire. Par définition,  $N(B)$  suit une loi de Poisson de moyenne aléatoire

$$\Theta(B) = \int_B \Theta(x) dx$$

Le système de probabilités vaut donc

$$P\{N(B) = n\} = E \left\{ e^{-\Theta(B)} \frac{(\Theta(B))^n}{n!} \right\}$$

La moyenne s'en déduit immédiatement

$$E\{N(B)\} = E\{E\{N(B)|\Theta\}\} = E\{\Theta(B)\}$$

La variance est un peu plus compliquée à évaluer. Calculons plus généralement la covariance entre  $N(A)$  et  $N(B)$ .

$$Cov\{N(A), N(B)\} = E\{N(A)N(B)\} - E\{N(A)\}E\{N(B)\}$$

Le deuxième terme du second membre est déjà connu. Pour évaluer le premier terme, on randomise sur  $\Theta$ :

$$E\{N(A)N(B)\} = E\{E\{N(A)N(B)|\Theta\}\}$$

$\Theta$  étant fixé, on est ramené à un processus à densité régionalisée. On a donc

$$E\{N(A)N(B)|\Theta\} = \Theta(A \cap B) + \Theta(A)\Theta(B)$$

de sorte que

$$E\{N(A)N(B)\} = E\{\Theta(A \cap B)\} + E\{\Theta(A)\Theta(B)\}$$

et finalement

$$Cov\{N(A), N(B)\} = E\{\Theta(A \cap B)\} + Cov\{\Theta(A), \Theta(B)\}$$

Ainsi, même si  $A$  et  $B$  sont disjoints,  $N(A)$  et  $N(B)$  ne sont en général pas indépendants. La structure associée à la densité régionalisée assure la propagation des dépendances. On voit ainsi très bien apparaître le caractère **hiérarchique** de ce modèle. Cela au reste se lit sur la formule de la covariance qui est somme de deux termes, le premier exprimant l'implantation Poissonnienne des points une fois la densité fixée, le deuxième terme prenant en charge les fluctuations de la densité. Ce caractère hiérarchique n'est pas rare en pratique. Un exemple typique est donné par un gisement alluvionnaire de pierres précieuses où les pierres sont piégées dans des anfractuosités du terrain. Là où le terrain est régulier, il faut s'attendre à ne rencontrer que peu de pierres. Dans un terrain au contraire cahuté, des amas de pierres peuvent être rencontrés.

Pour expliciter les formules précédentes, désignons respectivement par  $m$  et par  $C$  la moyenne et la fonction de covariance de la densité  $\Theta$ . Avec ces notations, on a

$$E\{N(B)\} = m|B|$$

$$Cov\{N(A), N(B)\} = m|A \cap B| + \int_A \int_B C(x-y) dx dy$$

et en particulier

$$Var\{N(B)\} = m|B| + \int_B \int_B C(x-y) dx dy$$

ou bien encore, par changement de variables

$$Var\{N(B)\} = m|B| + \int_{\mathbb{R}^d} |B \cap B_h| C(h) dh$$

## 2.3 Vers une théorie des ensembles aléatoires

En caractérisant les processus ponctuels par leur mesure de comptage, nous nous sommes implicitement limités au cas de processus localement finis. En d'autres termes, le nombre de points du processus dans un borélien borné est presque sûrement fini. Or, il n'en est pas toujours ainsi. Un exemple typique est donné par les zéros d'un mouvement brownien. Il s'agit bien d'un processus ponctuel, mais le nombre de points tombés dans un intervalle borné est soit nul, soit infini (cf. Figure 2.4). Comment caractériser la loi d'un tel processus ponctuel? De façon plus large, existe-t-il une méthode générale pour caractériser la loi d'un ensemble aléatoire?

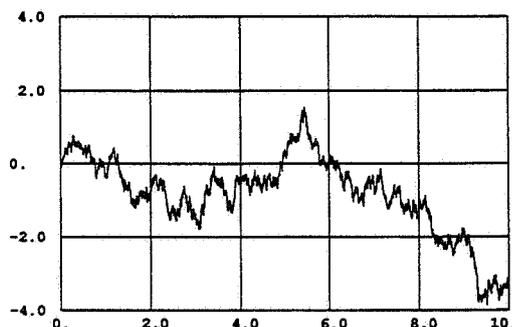


Figure 2.4: exemple de trajectoire d'un mouvement brownien. De telles trajectoires sont continues partout, mais dérivables nulle part.

Dans cette partie, nous nous intéressons à la famille  $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{R}^d)$  des fermés (topologiques) de  $\mathbb{R}^d$ . Rappelons qu'un ensemble est fermé s'il contient sa frontière.  $\mathcal{F}$  va être muni de la tribu  $\sigma(\mathcal{F})$  engendrée par les ensembles de la forme

$$\{F \in \mathcal{F} \mid F \cap K \neq \emptyset\}$$

pour tout compact (fermé borné)  $K$ . Le choix d'une telle tribu n'est pas simple. Il est dicté par la nécessité de rendre mesurable les opérations logiques d'union, d'intersection, de complémentation (attention, la complémentation dans  $\mathcal{F}$  est prise au sens de l'adhérence de la complémentation ensembliste!), ainsi que les opérations morphologiques de dilatation et d'érosion.

Remarque:  $\sigma(\mathcal{F})$  est en réalité la tribu borélienne (i.e. engendrée par les ouverts) associée à une topologie particulière de  $\mathcal{F}$ . Dans le cas présent, la topologie adoptée par Matheron (1975) est engendrée par les ouverts de la forme

$$\mathcal{V}^K = \{F \in \mathcal{F} \mid F \cap K = \emptyset\} \quad \mathcal{V}_G = \{F \in \mathcal{F} \mid F \cap G \neq \emptyset\}$$

pour tout ouvert  $G$  et pour tout compact  $K$ . Par cette topologie, on peut montrer qu'une suite  $F_n$  de fermés converge vers le fermé  $F$  si et seulement si pour tout point  $x$  de  $\mathbb{R}^d$ , la distance de  $x$  aux  $F_n$  converge vers la distance de  $x$  à  $F$ , ces distances pouvant éventuellement être infinies.

**Définition 2.4** Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espace probabilisé. On appelle ensemble fermé aléatoire toute application mesurable de  $(\Omega, \mathcal{A})$  dans  $(\mathcal{F}, \sigma(\mathcal{F}))$ .

### 2.3.1 Fonction de répartition d'un ensemble (fermé) aléatoire.

Ainsi définie, la loi d'un fermé aléatoire, qui est la loi induite par  $P$ , n'est guère manipulable. On est un peu dans la même situation où l'on ne connaît que la loi d'une variable aléatoire. Or, dans ce dernier cas, il existe un moyen de s'en sortir, qui consiste à recourir à la fonction de répartition de la variable aléatoire. Dans le cas des fermés aléatoires, nous allons voir qu'une démarche similaire peut être opérée.

Soit  $X$  un fermé aléatoire. Introduisons l'application  $T$  qui à tout compact  $K$  associe la probabilité pour que  $X$  soit rencontré par  $K$

$$T(K) = P\{X \cap K \neq \emptyset\}$$

$T$  vérifie les propriétés suivantes:

i)  $T$  est **bornée**, avec  $T(\emptyset) = 0$ .

ii)  $T$  est **croissante** au sens où si  $K$  et  $K'$  sont dans  $\mathcal{K}$ , alors  $T(K) \leq T(K \cup K')$ . Cette propriété se généralise de la façon suivante: si  $(K_i, i \in \mathcal{K})$  désigne une famille finie de compacts, l'inégalité

$$P\{X \cap K = \emptyset, \forall i \in I X \cap K_i \neq \emptyset\} \geq 0$$

devient, par application de la formule de Poincaré

$$\sum_{J \subset I} (-1)^{\#J+1} T(K \cup K_J) \geq 0$$

où  $K_J = \cup_{j \in J} K_j$  et  $\#J$  désigne le nombre d'éléments de  $J$ .

iii)  $T$  est **semi continue** supérieurement. Cela s'exprime par le fait que si  $(K_n, n \in \mathbb{N})$  est une suite décroissante de compacts d'intersection  $K$ , alors  $T(K_n)$  converge vers  $T(K)$ .

Remarque: pour employer un langage technique, les trois propriétés ci-dessus montrent que  $T$  est une **capacité de Choquet alternée d'ordre infini**.

L'intérêt de la fonction  $T$  ainsi définie réside dans l'énoncé suivant, établi à la fois par Kendall (1974) et Matheron (1975):

**Théorème 2.3** *Si une fonction  $T$  définie sur  $\mathcal{K}$  et à valeurs dans  $[0, 1]$  vérifie les propriétés i), ii), et iii) ci-dessus, alors il existe une probabilité **unique**  $P_T$  sur  $(\mathcal{F}, \sigma(\mathcal{F}))$  telle que*

$$T(K) = P_T \{\{F \in \mathcal{F} \mid F \cap K \neq \emptyset\}\}$$

Ainsi, la fonction  $T$ , qui a les propriétés d'une fonction de répartition, caractérise la loi d'un ensemble fermé aléatoire, au même titre que la loi spatiale associée à la mesure

de comptage dans le cas d'un processus ponctuel localement fini. Nous ne prétendons pas que la fonction de répartition d'un fermé aléatoire supplante définitivement la loi spatiale. Tout ne peut pas être obtenu de façon simple au moyen de la fonction de répartition, et il y aura des circonstances où il vaudra mieux recourir à la loi spatiale. Simplement, ce que nous voudrions montrer ici, est que la fonction de répartition est un outil de démonstration d'une puissance exceptionnelle. Donnons en un exemple immédiatement: nous savons que le nombre de points d'un processus de Poisson de densité  $\theta$  tombés dans un compact  $K$  suit une loi de Poisson de moyenne  $\theta|K|$ . En particulier

$$P\{N(K) = 0\} = e^{-\theta|K|}$$

Cela montre que la fonction de répartition d'un processus de Poisson vaut

$$T(K) = P\{N(K) > 0\} = 1 - e^{-\theta|K|}$$

Inversement, si un fermé aléatoire a sa fonction de répartition donnée par l'expression ci-dessus, le théorème d'unicité précédent montre qu'il s'agit nécessairement d'un processus de Poisson de densité  $\theta$ . Cela implique ipso facto l'ensemble des propriétés d'un processus de Poisson: qu'il s'agit d'un processus ponctuel, que le nombre de points tombés dans un compact  $K$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\theta|K|$ , que les nombres de points tombés dans deux compacts disjoints  $K$  et  $K'$  sont indépendants, etc...

Pour clore ce chapitre, revenons à la démonstration du théorème 2.1. Calculons tout d'abord la fonction de répartition du fermé aléatoire  $X$  constitué des  $n$  points Poissonniens tombés dans le borélien borné  $B$

$$\begin{aligned} 1 - T_X(K) &= P\{X \cap K = \emptyset \mid N_X(B) = n\} \\ &= P\{N_X(B \cap K) = 0 \mid N_X(B) = n\} \\ &= \frac{P\{N_X(B \cap K) = 0, N_X(B) = n\}}{P\{N_X(B) = n\}} \\ &= \frac{P\{N_X(B \cap K) = 0, N_X(B \setminus K) = n\}}{P\{N_X(B) = n\}} \\ &= \frac{e^{-\theta|B \cap K|} e^{-\theta|B \setminus K|} \frac{(\theta|B \setminus K|)^n}{n!}}{e^{-\theta|B|} \frac{(\theta|B|)^n}{n!}} \\ &= \left( \frac{|B \setminus K|}{|B|} \right)^n \end{aligned}$$

Considérons maintenant le fermé aléatoire  $Y$  constitué de  $n$  points indépendants et uniformes dans  $B$ . La fonction de répartition de  $Y$  vérifie

$$\begin{aligned}1 - T_Y(K) &= P\{Y \cap K = \emptyset\} \\ &= P\{N_Y(B \setminus K) = n\} \\ &= \left(\frac{|B \setminus K|}{|B|}\right)^n\end{aligned}$$

On a ainsi démontré que les deux fermés aléatoires  $X$  et  $Y$  ont même fonction de répartition. Ils sont donc identiques en loi.

## Chapitre 3

# Schéma Booléen et Polyèdres Poissonniens

### 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons considérer deux classes d'ensembles aléatoires. Il s'agira en premier lieu du **Schéma Booléen** qui correspond à l'idée intuitive de la réunion d'objets implantés au hasard. Nous examinerons ensuite l'ensemble dessiné par un réseau d'hyperplans aléatoires, dits **Hyperplans Poissonniens**. Un attrait particulier de cet ensemble aléatoire vient des surprenantes propriétés des **Polyèdres Poissonniens** que ces hyperplans délimitent.

L'essentiel des propriétés du schéma Booléen se trouve dans les deux ouvrages de Matheron de 1967 et de 1975. En ce qui concerne les polyèdres Poissonniens, nous renvoyons à Miles (1969) et à Matheron (1971, 1975). Enfin, de nombreux exemples d'utilisation de ces modèles d'ensemble aléatoire figurent dans Serra (1982).

### 3.2 Schéma Booléen

**Définition 3.1** Soit  $\Upsilon$  un processus de Poisson ponctuel de  $\mathbb{R}^d$ , et soit  $(A(x), x \in \mathbb{R}^d)$  une famille de compacts aléatoires (fermés aléatoires presque sûrement compacts) mutuellement indépendants et de même loi. Un **Schéma Booléen** est la réunion des  $A(x)$  associés aux points de  $\Upsilon$  et implantés en ces points

$$X = \bigcup_{x \in \Upsilon} A(x)_x$$

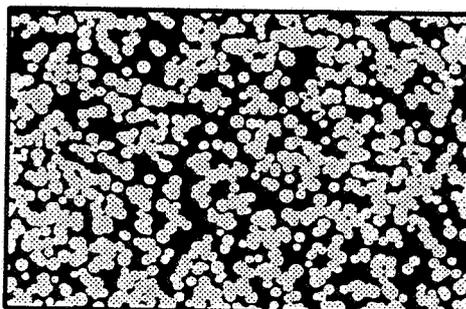


Figure 3.1: réalisation d'un schéma Booléen de disques.

On désigne traditionnellement les compacts  $A(x)$  sous le nom de **grains primaires**. L'espace  $\mathbb{R}^d$  est ainsi divisé en deux parties, le milieu des **grains** qui est la réunion des grains primaires, et le milieu des **pores** qui est son complémentaire.

La loi d'un schéma Booléen dépend de deux paramètres, à savoir la densité Poissonnienne des points d'implantation ainsi que la loi de formation des grains primaires. Donnons dès maintenant quelques propriétés de stabilité du schéma Booléen.

### **Théorème 3.1**

- i) l'union de deux schémas Booléens indépendants est encore un schéma Booléen.*
- ii) le dilaté d'un schéma Booléen par un compact fixe est encore un schéma Booléen.*
- iii) l'intersection d'un schéma Booléen par un  $i$ -plan est encore un schéma Booléen.*

Les deux premiers énoncés i) et ii) sont à peu près évidents. Une démonstration immédiate peut en être donnée une fois connue la fonction de répartition d'un schéma Booléen (cf. paragraphe 3.2.1.). La démonstration de iii) fait l'objet du paragraphe 3.2.2.

#### **3.2.1 Fonction de Répartition**

Soit  $X$  un schéma Booléen de densité Poissonnienne  $\theta$  et de grains primaires identiques en loi à un compact aléatoire  $A$ . Pour déterminer sa fonction de répartition de  $X$ , on va évaluer la probabilité  $Q(K)$  pour qu'un compact  $K$  soit contenu dans les pores de  $X$ . On procédera pour cela en deux étapes.

Commençons tout d'abord par calculer la probabilité  $Q_D(K)$  pour que  $K$  soit disjoint de l'ensemble noté  $X(D)$  qui est la réunion des grains primaires de  $X$  implantés dans le domaine borné  $D$ . Le nombre de ces grains primaires suit une loi de Poisson de paramètre  $\theta|D|$ . Lorsque ce nombre est égal à  $n$ , les  $n$  grains primaires sont implantés de façon indépendante et uniforme dans  $D$ . De plus, un grain primaire  $A_x$  implanté en

un point  $\hat{x}$  uniforme de  $D$  est disjoint de  $K$  avec la probabilité

$$P\{A_{\hat{x}} \cap K = \emptyset\} = P\{\hat{x} \notin K \oplus \check{A}\} = 1 - \frac{E\{|(K \oplus \check{A}) \cap D|\}}{|D|}$$

Par conséquent

$$Q_D(K) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\theta|D|} \frac{(\theta|D|)^n}{n!} \left(1 - \frac{E\{|(K \oplus \check{A}) \cap D|\}}{|D|}\right)^n$$

soit, en sommant

$$Q_D(K) = e^{-\theta E\{|(K \oplus \check{A}) \cap D|\}}$$

Etendons maintenant ce résultat à  $X$  tout entier. Considérons pour cela une suite croissante  $D_n$  de domaines bornés qui recouvrent  $\mathbb{R}^d$ . Les événements " $K \cap X(D_n) = \emptyset$ " de probabilité  $Q_n(K)$  constituent une suite décroissante d'intersection " $K \cap X = \emptyset$ ". L'axiome de continuité des probabilités donne alors

$$Q(K) = \lim_{n \rightarrow +\infty} Q_n(K) = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-\theta E\{|(K \oplus \check{A}) \cap D_n|\}} = e^{-\theta E\{|K \oplus \check{A}|\}}$$

ce que l'on écrit plus couramment

$$Q(K) = e^{-\theta E\{|A \oplus \check{K}|\}}$$

Examinons quelques cas particuliers de cette formule:

- Si  $K$  est réduit à un point, on obtient la porosité du schéma Booléen

$$q = e^{-\theta E\{|A|\}}$$

- Si  $K = \{x, x+h\}$  est un couple de points, alors  $|A \oplus \check{K}| = |A \cup A_h| = 2|A| - |A \cap A_h|$ . Désignant alors par  $K(h) = E\{|A \cap A_h|\}$  le covariogramme géométrique des grains primaires, la loi bivariable des pores du schéma Booléen s'écrit

$$P\{x, x+h \in \overline{X}\} = q^2 e^{\theta K(h)}$$

On en déduit

$$P\{x \in X, x+h \in \overline{X}\} = q - q^2 e^{\theta K(h)}$$

ainsi que

$$P\{x, x+h \in X\} = 1 - 2q + q^2 e^{\theta K(h)}$$

- Si  $K = [x, x + h]$  est un segment, le calcul explicite de  $|A \oplus \check{K}|$  n'est possible que lorsque  $A$  est presque sûrement convexe.

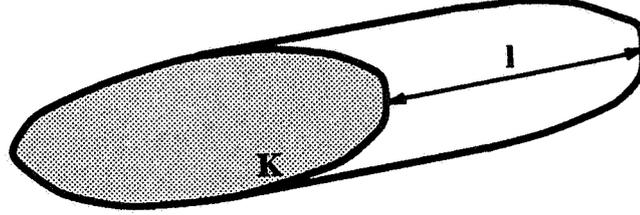


Figure 3.2: dilatation d'un convexe par un segment.

Désignant par  $l$  la longueur de  $K$  et par  $\alpha$  son orientation, on a dans ce cas  $|A \oplus \check{K}| = |A| + l|A_\alpha|$ , ce qui met en jeu le contour apparent  $|A_\alpha|$  de  $A$  dans la direction d'allongement  $\alpha$  du segment  $K$ . Il s'ensuit que

$$P\{[x, x + h] \subset \bar{X}\} = q e^{-\theta l} E\{|A_\alpha|\}$$

Ainsi, un schéma booléen à grains primaires convexes admet une loi de traversée de pores exponentielle.

Dans le cas où la loi des grains primaires est de plus isotrope, la formule des projections

$$E\{|A_\alpha|\} = \frac{\omega_{d-1}}{d\omega_d} E\{|\partial A|\}$$

simplifie encore l'expression.

- Si  $K = B(x, r)$  est une boule de rayon  $r$ , les calculs explicites sont possibles moyennant toujours cette hypothèse de convexité des grains primaires. Car dans ce cas, la formule de Steiner s'applique

$$E\{|A \oplus \check{K}|\} = \sum_{i=0}^d \binom{d}{i} E\{W_i(A)\} r^i$$

et l'on a finalement

$$P\{B(x, r) \subset \bar{X}\} = \exp \left\{ -\theta \sum_{i=0}^d \binom{d}{i} E\{W_i(A)\} r^i \right\}$$

Ces formules sont utiles pour tester la validité du modèle booléen à grains primaires convexes et pour tenter l'inférence statistique de ses paramètres.

### 3.2.2 Stéréologie

Soit  $X$  un schéma Booléen de  $\mathbb{R}^d$  de densité  $\theta_d$  et de grains primaires identiques en loi à un compact aléatoire  $A_d$ . On note  $1 - Q$  la fonction de répartition de  $X$ . L'intersection

de  $X$  par un  $i$ -plan  $H$  donne un nouvel ensemble aléatoire dont la fonction de répartition  $1 - Q_H$  vérifie

$$Q_H(K) = Q(K) = e^{-\theta_d E\{|A_d \oplus \check{K}\|}\}$$

pour tout compact  $K$  de  $H$ . Cette expression n'est toutefois pas pleinement satisfaisante car on ne sait comment l'interpréter. On pressent que  $X \cap H$  est un schéma Booléen. Mais quels sont les grains primaires? Quelle est leur densité?

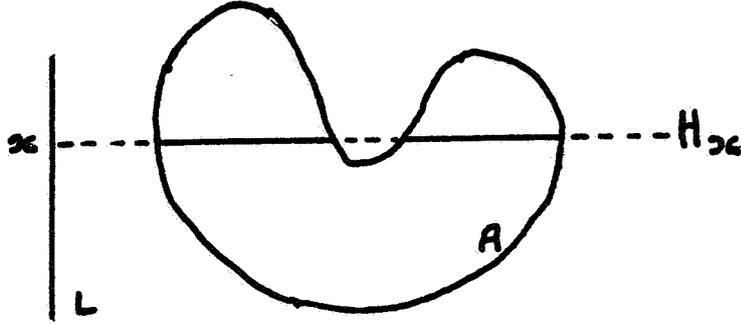


Figure 3.3: détermination du volume d'un compact à partir de ses sections.

Soit  $L$  le  $d - i$ -plan orthogonal à  $H$ . A tout point  $x$  de  $L$ , on associe le  $i$ -plan affine  $H_x$  parallèle à  $H$  et passant par  $x$ . Si  $A$  est un compact de  $\mathbb{R}^d$ , on peut écrire

$$|A| = \int_L |A \cap H_x| dx$$

le domaine d'intégration pouvant même être réduit à la projection de  $A$  sur  $L$

$$|A| = \int_{A \downarrow L} |A \cap H_x| dx$$

Au coefficient  $|A \downarrow L|$  près, l'intégrale peut être interprétée comme le volume moyen des sections. En introduisant un point  $\hat{x}$  uniforme sur  $A \downarrow L$ , on a donc

$$|A| = |A \downarrow L| E\{|A \cap H_{\hat{x}}|\}$$

Appliquons cette formule à  $A \oplus \check{K}$ . Compte tenu de ce que  $K$  est dans  $H$ , on a toujours  $(A \oplus \check{K}) \cap H_x = (A \cap H_x) \oplus \check{K}$ , de sorte que

$$|(A \oplus \check{K})| = |A \downarrow L| E\{|(A \cap H_{\hat{x}}) \oplus \check{K}|\}$$

Remplaçons maintenant  $A$  par le compact aléatoire  $A_d$

$$|(A_d \oplus \check{K})| = |A_d \downarrow L| E\{|(A_d \cap H_{\hat{x}}) \oplus \check{K} \mid A_d\}$$

et passons à l'espérance. La formule précédente devient

$$E\{|(A_d \oplus \check{K})|\} = E\{|A_d \downarrow L| E\{|(A_d \cap H_{\hat{x}}) \oplus \check{K} \mid A_d\}\}$$

ce qui permet d'écrire  $Q_H$  sous la forme

$$Q_H(K) = \exp \left( -\theta_d E\{|A_d \downarrow L|\} E \left\{ \frac{|A_d \downarrow L|}{E\{|A_d \downarrow L|\}} E \left\{ |(A_d \cap H_x) \oplus \check{K}| \mid A_d \right\} \right) \right)$$

Il s'agit bien de la fonction de répartition complémentaire associée à un schéma Booléen de  $H$ . La densité Poissonnienne vaut

$$\theta_i = \theta_d E\{|A_d \downarrow L|\}$$

Les grains primaires, quant à eux, sont les sections uniformes par des  $i$ -plans affines parallèles à  $H$  des grains primaires de  $\mathbb{R}^d$ . La loi de ces derniers est pondérée par leur dimension en projection sur  $L$ .

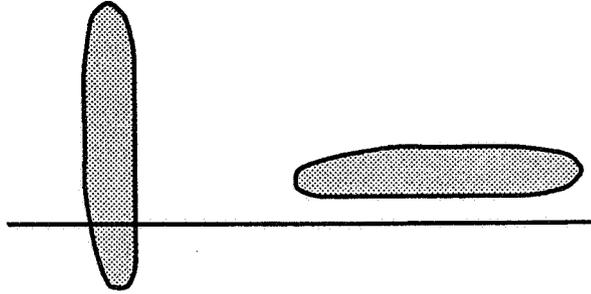


Figure 3.4: plus un grain primaire est allongé dans la direction orthogonale à  $L$ , plus il a de chance de couper  $L$ .

### 3.3 Hyperplans aléatoires

Dans cette partie, nous nous intéressons aux hyperplans de  $\mathbb{R}^d$ , c'est à dire aux processus de points dans  $\mathbb{R}$ , aux réseaux de droites dans  $\mathbb{R}^2$ , aux familles de plans dans  $\mathbb{R}^3$ .

De façon générale, un hyperplan de  $\mathbb{R}^d$  est caractérisé par deux paramètres, un paramètre d'**orientation**  $\alpha$ , et un paramètre de **position**  $p$ :

$$H(\alpha, p) = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \langle x, \alpha \rangle = p\}$$

Remarquons que  $H(\alpha, p) = H(-\alpha, -p)$ . Pour éviter qu'un hyperplan soit paramétré de deux façons différentes, on choisit de prendre  $p$  réel, mais  $\alpha$  n'est autorisé à parcourir qu'une moitié de la sphère unité  $S_d$  que l'on note  $S_d^+$  symboliquement. Par un tel paramétrage, un plan s'identifie à un point de l'espace  $S_d^+ \times \mathbb{R}$ .

**Définition 3.2** *Un réseau d'Hyperplans Poissonniens est paramétré par un processus de points Poissonniens dans  $S_d^+ \times \mathbb{R}$ .*

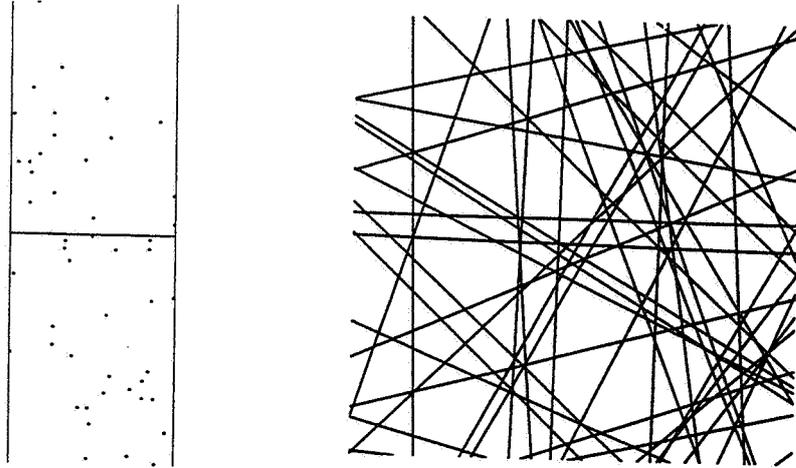


Figure 3.5: Réalisation d'un réseau de droites Poissonniennes dans le plan et son paramétrage.

Pour la suite, on notera  $\lambda_d$  la densité du processus ponctuel.

### 3.3.1 Fonction de Répartition

Soit à nouveau  $K$  un compact de  $\mathbb{R}^d$ . Quelle est la probabilité  $Q(K)$  pour que  $K$  ne soit rencontré par aucun hyperplan?

Considérons un hyperplan d'orientation  $\alpha$ . Cet hyperplan rencontre  $K$  si et seulement si sa position est contenue dans un certain sous-ensemble  $D_\alpha(K)$  de  $\mathbb{R}$ . Par conséquent, les hyperplans qui rencontrent  $K$  sont paramétrés en des points situés dans le domaine

$$D(K) = \bigcup_{\alpha \in S_d^+} \bigcup_{p \in D_\alpha(K)} \{(\alpha, p)\}$$

qui a pour volume

$$|D(K)| = \int_{S_d^+} |D_\alpha(K)| d\alpha$$

Comme la densité des hyperplans est  $\lambda_d$ , le nombre d'hyperplans qui rencontrent  $K$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda_d |D(K)|$ . En particulier

$$Q(K) = e^{-\lambda_d |D(K)|}$$

A ce point, il convient de remarquer que  $|D_\alpha(K)|$  n'est autre que la longueur de la projection de  $K$  sur une droite d'orientation  $\alpha$ . Lorsque  $K$  est **convexe**,  $|D_\alpha(K)|$  est exactement la largeur de  $K$  dans la direction  $\alpha$ . On peut alors exprimer  $|D(K)|$  au moyen de la largeur moyenne  $l(K)$  de  $K$ , ou encore au moyen de sa  $(d-1)^{\text{ème}}$  fonctionnelle de Minkowski

$$|D(K)| = \frac{d\omega_d}{2} l(K) = dW_{d-1}(K)$$

ce qui conduit à la formule simplifiée

$$Q(K) = e^{-d\lambda_d W_{d-1}(K)}$$

Dans le cas où  $K$  est seulement **connexe**, un hyperplan rencontre  $K$  si et seulement s'il rencontre son enveloppe convexe. En conséquence, la formule précédente reste valable à condition de remplacer  $K$  par son enveloppe convexe au second membre.

### 3.3.2 Stéréologie

Soit  $H$  un  $i$ -plan de  $\mathbb{R}^d$ . Les hyperplans Poissonniens de  $\mathbb{R}^d$  dessinent un réseau d'hyperplans dans  $H$ . Ce réseau est-il Poissonnien?

La réponse est oui, et elle peut être établie au prix d'une démonstration austère mais sans difficulté particulière que nous ne reproduirons pas.

Pour déterminer la densité Poissonnienne du réseau en section, le plus simple ici est de partir de la probabilité  $Q_H(K)$  pour qu'un compact convexe  $K$  de  $H$  ne soit coupé par aucun hyperplan

$$Q_H(K) = Q(K) = e^{-d\lambda_d W_{d-1}^{(d)}(K)}$$

où  $W_{d-1}^{(d)}(K)$  est la  $(d-1)^{\text{ème}}$  fonctionnelle de Minkowski de  $K$  considéré comme objet de  $\mathbb{R}^d$ . Or, on a vu au premier chapitre que

$$W_{d-1}^{(d)}(K) = \frac{i}{d} \frac{\omega_{d-1}}{\omega_{i-1}} W_{i-1}^{(i)}(K)$$

$Q_H(K)$  peut donc s'écrire

$$Q_H(K) = e^{-i\lambda_i W_{i-1}^{(i)}(K)}$$

avec le nombre  $\lambda_i$  vérifiant

$$\lambda_i \omega_{i-1} = \lambda_d \omega_{d-1}$$

$\lambda_i$  est la densité cherchée.

Dans le but de simplifier les notations, tous les résultats qui suivent seront exprimés à l'aide du coefficient  $\lambda = \lambda_2$ .

## 3.4 Polyèdres Poissonniens

**Définition 3.3** On appelle *Polyèdres Poissonniens* l'ensemble des polyèdres découpés par un réseau d'hyperplans Poissonniens.

Un polyèdre Poissonnien est une intersection de demi-espaces, et à ce titre, convexe.

La construction d'un ensemble de polyèdres Poissonniens ne met en jeu qu'un seul paramètre, à savoir la densité du processus ponctuel  $\lambda_d$  qui paramétrise le réseau d'hyperplans.

### 3.4.1 Loi en nombre et loi en mesure

Une fois définis les polyèdres Poissonniens, on est tenté de chercher à évaluer un certain nombre de grandeurs, telles que le volume moyen des polyèdres, le nombre moyen de leurs sommets, leur variance... Cette recherche doit être menée avec précaution, car il est possible d'attribuer plusieurs sens possibles à de telles grandeurs, et plus généralement à la loi d'un polyèdre Poissonnien.

Une première approche consiste à attribuer le même poids à chaque polyèdre. Cette approche est intuitivement simple, mais techniquement difficile car les polyèdres sont en nombre infini. La technique passe par un passage à la limite. On considère tout d'abord une réalisation d'un réseau d'hyperplans dans un domaine borné. Ce domaine est rencontré par un nombre fini d'hyperplans et ne contient donc qu'un nombre fini au plus de polyèdres. Dans ce cas, il est possible de compter chaque polyèdre avec le même poids, et de former un histogramme attaché à toute grandeur que l'on peut définir sur les polyèdres. Lorsque les dimensions du domaine tendent vers l'infini, on démontre que cet histogramme tend vers un histogramme limite qui ne dépend pas de la réalisation choisie. Tel est le point de vue de la **loi en nombre**.

Une autre approche consiste à s'intéresser à un seul polyèdre, celui qui contient un point donné, par exemple l'origine. On obtient ainsi un histogramme pris à travers les diverses réalisations des hyperplans Poissonniens. La loi obtenue n'est pas la loi en nombre car l'origine a plus de chance de tomber dans un polyèdre de grande taille que dans un petit. Ce point de vue qui consiste au fond à compter les polyèdres avec un poids proportionnel à leur  $d$ -volume est appelé **loi en mesure**.

Les relations entre la loi en nombre et la loi en mesure sont données par le théorème suivant, dû à Miles:

**Théorème 3.2** *Si  $\Lambda$  est une caractéristique d'un polyèdre, et  $V$  son volume, la loi en nombre  $F(d\Lambda, dV)$  et la loi en mesure  $F_0(d\Lambda, dV)$  sont liées par les formules*

$$F_0(d\Lambda, dV) = \frac{V}{E\{V\}} F(d\Lambda, dV) \quad F(d\Lambda, dV) = \frac{V^{-1}}{E_0\{V^{-1}\}} F_0(d\Lambda, dV)$$

où les symboles  $E$  et  $E_0$  désignent respectivement les moyennes en nombre et en mesure.

Pour la suite, le point de vue en nombre consistera à s'intéresser à un polyèdre **moyen**, que nous noterons  $\Pi$  (ou bien  $\Pi^{(d)}$  quand il faudra préciser la dimension de l'espace dans lequel il est défini). Du point de vue en mesure, on regardera plutôt les propriétés du polyèdre  $\Pi_0$  qui contient l'origine. Les formules de Miles montrent entre autres que

$$E_0\{|\Pi_0|\} = \frac{E\{|\Pi|^2\}}{E\{|\Pi|\}}$$

### 3.4.2 Evaluation de quelques grandeurs

La différence de construction entre loi en nombre et loi en mesure laisse présager qu'il est en général plus difficile d'évaluer des grandeurs moyennes prises en nombre,

que les mêmes grandeurs, prises en mesure. Dans cette partie, nous allons comparer les façons d'obtenir les volumes moyens, en nombre et en mesure, des polyèdres.

### Calculs en mesure

Pour évaluer le volume moyen en mesure des polyèdres, on exprime le volume sous la forme d'une intégrale d'indicatrices

$$|\Pi_o| = \int_{\mathbb{R}^d} 1_{x \in \Pi_o} dx$$

ce qui donne par passage à l'espérance

$$E_o\{|\Pi_o|\} = \int_{\mathbb{R}^d} P\{[o, x] \subset \Pi_o\} dx$$

Or

$$P\{[o, x] \subset \Pi_o\} = Q([o, x]) = e^{-d\lambda_d W_{d-1}([o, x])} = e^{-2\lambda |x|}$$

Par conséquent

$$E_o\{|\Pi_o|\} = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\lambda |x|} dx = d\omega_d \int_0^{+\infty} r^{d-1} e^{-2\lambda r} dr$$

et finalement

$$E_o\{|\Pi_o|\} = \frac{d! \omega_d}{2^d} \frac{1}{\lambda^d}$$

### Calculs en nombre

Désignons par  $N^{(d)}(|D|)$  le nombre de sommets des polyèdres contenus dans le domaine  $D$  de  $\mathbb{R}^d$ . Chaque sommet étant intersection de  $d$  hyperplans, les  $N^{(d)}(|D|)$  sommets dans  $D$  induisent  $d N^{(d)}(|D|)$  sommets sur les hyperplans qui rencontrent  $D$ . Prenons en particulier pour domaine  $D$  une boule  $B^{(d)}(r)$  de rayon  $r$ . Lorsque  $r$  est grand,  $B^{(d)}(r)$  est rencontré en moyenne par  $d\lambda_d W_{d-1}(B^{(d)}(r)) = d\lambda_d \omega_d r$  hyperplans. La section de chaque hyperplan avec la boule est  $\omega_d r^d / 2r$  en moyenne. Par conséquent

$$dN^{(d)}(\omega_d r^d) = d\lambda_d \omega_d r N^{(d-1)}\left(\frac{\omega_d r^{d-1}}{2}\right)$$

Maintenant, le point important est que le nombre de sommets est identique au nombre de polyèdres. En effet, si l'on déplace un hyperplan parallèlement à lui-même dans la population des polyèdres, on constate qu'un sommet apparait à chaque fois que l'hyperplan rencontre un nouveau polyèdre. Pour exploiter ce fait, divisons à gauche et à droite par le volume de la boule

$$\frac{N^{(d)}(\omega_d r^d)}{\omega_d r^d} = \frac{\lambda_d \omega_d r}{2r} \frac{N^{(d-1)}\left(\frac{\omega_d r^{d-1}}{2}\right)}{\frac{\omega_d r^{d-1}}{2}}$$

et faisons tendre son rayon vers l'infini

$$\frac{1}{E\{|\Pi^{(d)}|\}} = \frac{\lambda_d \omega_d}{2} \frac{1}{E\{|\Pi^{(d-1)}|\}}$$

où  $\Pi^{(d)}$  et  $\Pi^{(d-1)}$  désignent respectivement les polyèdres moyens dans les espaces à  $d$  et  $d-1$  dimensions. On obtient ainsi une relation de récurrence portant sur la dimension de l'espace. Pour amorcer la récurrence, faisons  $d = 1$ . On sait que les hyperplans Poissonniens découpent sur une droite un processus de Poisson de densité  $\lambda_1 = 2\lambda$ . Il s'ensuit que  $E\{|\Pi^{(1)}|\} = 1/2\lambda$  et compte tenu de ce que  $\lambda_d = 2\lambda/\omega_{d-1}$ , on arrive finalement à

$$E\{|\Pi^{(d)}|\} = \frac{1}{\omega_d \lambda^d}$$

Une étape supplémentaire peut être franchie avec le calcul explicite des fonctionnelles de Minkowski des polyèdres moyens. Reprenons la boule de rayon  $r$  précédente, que l'on superpose à une réalisation d'un réseau d'hyperplans. Les polyèdres contenus dans la boule sont notés  $\Pi_1, \Pi_2, \dots$ . Soit  $\{H_x, x \in L\}$  la famille des  $i$ -plans affines parallèles à un  $i$ -plan  $H$  et orthogonal à un  $(d-i)$ -plan  $L$ . Nous savons que pour tout polyèdre  $\Pi_k$  nous avons

$$|\Pi_k| = \int_{\Pi_k \downarrow L} |\Pi_k \cap H_x| dx$$

Faisons la somme sur  $k$ , et divisons à gauche et à droite par la somme des volumes projetés des  $\Pi_k$  sur  $L$

$$\frac{\sum_k |\Pi_k|}{\sum_k |\Pi_k \downarrow L|} = \frac{\sum_k \int_{\Pi_k \downarrow L} |\Pi_k \cap H_x| dx}{\sum_k |\Pi_k \downarrow L|}$$

Faisons tendre maintenant le rayon de la boule vers l'infini. Après division par le nombre de polyèdres de la boule, le numérateur et le dénominateur du premier membre convergent respectivement vers  $E\{W_0^{(d)}(\Pi^{(d)})\}$  et vers  $E\{|\Pi^{(d)} \downarrow L|\} = \omega_{d-i}/\omega_d E\{W_i^{(d)}(\Pi^{(d)})\}$  (en vertu de la formule de Cauchy). Compte tenu de ce que le dénominateur du second membre est la somme des volumes des domaines d'intégration du numérateur, la limite de ce second membre n'est autre que  $E\{W_0^{(i)}(\Pi^{(i)})\}$ . On a donc

$$\frac{\omega_d}{\omega_{d-i}} \frac{E\{W_0^{(d)}(\Pi^{(d)})\}}{E\{W_i^{(d)}(\Pi^{(d)})\}} = E\{W_0^{(i)}(\Pi^{(i)})\}$$

On notera le degré de généralité de cette formule qui ne suppose que la convexité et l'isotropie en loi des  $\Pi_k$ , ainsi que son analogie avec la formule des sections. En remplaçant les volumes des polyèdres moyens par leur expression, on obtient

$$E\{W_i^{(d)}(\Pi^{(d)})\} = \frac{\omega_i}{\omega_{d-i}} \lambda^{i-d}$$

### 3.4.3 L'invariance par érosion et les granulométries

Revenons au polyèdre  $\Pi_o$ . Pour caractériser la loi de ce polyèdre, ou bien, ce qui revient au même, la loi de son complémentaire, on est amené à considérer les probabilités pour qu'un compact  $K$  soit dans  $\Pi_o$ . Or, compte tenu de ce que  $\Pi_o$  est convexe et contient l'origine,  $K$  est contenu dans  $\Pi_o$  si et seulement si l'enveloppe convexe de  $K$  et de l'origine l'est également. C'est la raison pour laquelle la caractérisation de la loi de  $\Pi_o$  ne requiert que l'étude des compacts convexes contenant l'origine.

Soit  $K$  un tel compact.  $K$  est totalement contenu dans  $\Pi_o$  si et seulement si aucun hyperplan Poissonnien ne le rencontre, ce qui se passe avec la probabilité

$$Q(K) = e^{-d\lambda_d W_{d-1}(K)}$$

Soit maintenant deux compacts convexes  $K$  et  $K'$  contenant l'origine.  $K \oplus K'$  est encore un compact convexe contenant l'origine, et par conséquent

$$Q(K \oplus K') = e^{-d\lambda_d W_{d-1}(K \oplus K')}$$

Or, la largeur moyenne est une fonctionnelle **additive** pour la somme de Minkowski

$$W_{d-1}(K \oplus K') = W_{d-1}(K) + W_{d-1}(K')$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} Q(K \oplus K') &= e^{-d\lambda_d [W_{d-1}(K) + W_{d-1}(K')]} \\ &= Q(K) Q(K') \end{aligned}$$

ou bien de façon équivalente

$$P\{K \oplus K' \subset \Pi_o\} = P\{K \subset \Pi_o\} P\{K' \subset \Pi_o\}$$

ce qui peut se récrire sous forme de probabilité conditionnelle

$$P\{K' \subset \Pi_o \ominus \check{K} \mid o \in \Pi_o \ominus \check{K}\} = P\{K' \subset \Pi_o\}$$

Cette formule est fondamentale: elle montre que la loi de  $\Pi_o$  est conditionnellement invariante par érosion. A vrai dire, cette formule était déjà bien connue dans le cas  $d = 1$ . Il s'agit simplement du non vieillissement de la loi exponentielle!

Lorsque l'on passe du point de vue en mesure au point de vue en nombre, l'invariance conditionnelle prend la forme suivante, que nous admettrons:

**Théorème 3.3** *Conditionnellement au fait que l'érodé  $\Pi \ominus \check{K}$  du polyèdre Poissonnien  $\Pi$  n'est pas vide, cet érodé admet les mêmes propriétés statistiques que celles de  $\Pi$ .*

Un très belle application de l'invariance conditionnelle par érosion est la détermination de la granulométrie par ouverture selon des boules. Nous avons défini au chapitre 1

ce qu'est cette granulométrie pour un ensemble  $X$  déterministe et borné. Pour chaque rayon de boule  $r$ , il s'agit du rapport entre le volume de  $X$  ouvert selon la boule et le volume initial de  $X$

$$1 - G(r) = \frac{|X_{rB}|}{|X|}$$

Supposons maintenant que nous ayons affaire à une réalisation de polyèdres Poissonniens  $\Pi_1, \Pi_2, \dots$  contenus dans un domaine  $D$  de grande taille. La courbe granulométrique associée à cette réalisation est

$$1 - G_D(r) = \frac{\sum_{\Pi_i \subset D} |(\Pi_i)_{rB}|}{\sum_{\Pi_i \subset D} |\Pi_i|}$$

Divisons numérateur et dénominateur par le nombre de polyèdres totalement contenus dans  $D$ , et faisons tendre les dimensions de  $D$  vers l'infini. Le numérateur tend vers  $E\{|\Pi_{rB}|\}$ , tandis que le dénominateur converge vers  $E\{|\Pi|\}$ . La granulométrie limite vaut

$$1 - G(r) = \frac{E\{|\Pi_{rB}|\}}{E\{|\Pi|\}}$$

Il s'agit donc d'évaluer le volume de l'ouvert du polyèdre moyen. Pour cela, remarquons que l'ouvert  $\Pi_{rB}$  est non vide si et seulement si il en est de même pour l'érodé  $\Pi \ominus rB$ , et écrivons

$$E\{|\Pi_{rB}|\} = E\{|\Pi_{rB}| \mid \Pi \ominus rB \neq \emptyset\} P\{\Pi \ominus rB \neq \emptyset\}$$

Dire qu'une boule est contenue dans  $\Pi$  signifie qu'elle ne rencontre aucun hyperplan Poissonnien. Par conséquent

$$P\{\Pi \ominus rB \neq \emptyset\} = e^{-d\lambda_d \omega_d r} = e^{-\frac{2d\lambda_d \omega_d r}{\omega_{d-1}}}$$

Par ailleurs, pour évaluer l'espérance conditionnelle, appliquons l'invariance conditionnelle par érosion:

$$E\{|\Pi_{rB}| \mid \Pi \ominus rB \neq \emptyset\} = E\{|\Pi \oplus rB|\}$$

puis la formule de Steiner pour les dilatations

$$\begin{aligned} E\{|\Pi \oplus rB|\} &= \sum_{i=0}^d \binom{d}{i} E\{W_i(\Pi)\} r^i \\ &= \sum_{i=0}^d \binom{d}{i} \frac{\omega_i}{\omega_{d-i}} \lambda^{i-d} r^i \end{aligned}$$

Compte tenu de

$$E\{|\Pi|\} = \frac{1}{\omega_d \lambda^d}$$

on arrive finalement à

$$1 - G(r) = \omega_d \left( \sum_{i=0}^d \binom{d}{i} \frac{\omega_i}{\omega_{d-i}} \lambda^i r^i \right) e^{-\frac{2d\lambda\omega_d r}{\omega_{d-1}}}$$

# Bibliographie

- HADWIGER, (1957) H. Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie. Springer, Berlin.
- KENDALL, D.G. (1974) "Foundations of a Theory of Random sets". Stochastic Geometry, publié par Harding, E.F. et Kendall, D.G. Wiley, London, pp. 322-376.
- KLEINGELD, W.J. et LANTUEJOUL, Ch. (1992) "Some comments on the sampling of highly dispersed type orebodies". 4<sup>th</sup> International Geostatistics Congress, Troia, 13-18 septembre.
- LEWIS, P.A.W. (1972) Stochastic Point Processes. Wiley-Intersciences, New York.
- MATÉRN, B. (1986) Spatial Variations. Springer, Berlin (2<sup>ème</sup> édition).
- MATHERON, G. (1967) Eléments pour une théorie des milieux poreux, Masson, Paris.
- MATHERON, G. (1971) La Théorie des Variables Régionalisées et ses Applications. Ecole des Mines de Paris.
- MATHERON, G. (1971) "Les polyèdres Poissonniens isotropes". 3<sup>ème</sup> Symposium Européen sur la Fragmentation, Cannes, 5-8 octobre.
- MATHERON, G. (1975) Random sets and Integral Geometry. Wiley, New York.
- MATHERON, G. (1989) Estimating and Choosing. Springer, Berlin.
- MILES, R.E. (1974) "A synopsis of Poisson flats in Euclidean spaces". Stochastic Geometry, publié par Harding, E.F. et Kendall, D.G. Wiley, London, pp. 202-227.
- SANTALÓ, L. (1976) Integral Geometry and Geometric Probability. Addison-Wesley, Reading.
- SERRA, J. (1982) Image Analysis and Mathematical Morphology. Academic Press, London.

