

# TROIS MODELES DE CHANGEMENT DE SUPPORT A PARTIR D'UNE DISTRIBUTION PONCTUELLE GAMMA

par Ch. LANTUEJOUL \*

## TABLE DES MATIERES

<p><i>RESUME</i> ..... 140</p> <p>A - INTRODUCTION ..... 141</p> <p>B - LA LOI GAMMA ..... 142</p> <p style="padding-left: 20px;">1 - Description ..... 142</p> <p style="padding-left: 20px;">2 - Simulation ..... 143</p> <p style="padding-left: 20px;">3 - Les polynomes de Laguerre ... 145</p> <p>C - PROCESSUS DE DIFFUSION GAMMA .... 146</p> <p style="padding-left: 20px;">1 - Rappel sur les processus de Markov ..... 146</p> <p style="padding-left: 20px;">2 - Diffusion gamma ..... 147</p> <p style="padding-left: 20px;">3 - Simulation ..... 151</p> <p style="padding-left: 20px;">4 - Changement de support ..... 156</p>	<p><i>ABSTRACT</i> ..... 140</p> <p>D - LES PROCESSUS D'AMBARZUMIAN .... 158</p> <p style="padding-left: 20px;">1 - Description et simulation .. 158</p> <p style="padding-left: 20px;">2 - Changement de support ..... 162</p> <p>E - MESURE ORTHOGONALE REGULARISEE.. 164</p> <p style="padding-left: 20px;">1 - Description et simulation .. 164</p> <p style="padding-left: 20px;">2 - Changement de support ..... 165</p> <p style="padding-left: 20px;">3 - Interprétation probabiliste. 166</p> <p>F - LA SELECTIVITE ..... 167</p> <p style="padding-left: 20px;">1 - La dispersion ..... 169</p> <p style="padding-left: 20px;">2 - La sélectivité ..... 170</p> <p>BIBLIOGRAPHIE ..... 173</p>
---	--

## ILLUSTRATIONS

Figure 1 - La loi gamma revêt de multiples formes en fonction de son paramètre.....	142
2 - Description géométrique de la méthode d'acceptation et de rejet.....	144
3 - Simulation d'un processus de diffusion observé à divers grossissements.....	149
4 - Courbes tonnage/teneur associées au processus de diffusion. Taille des supports: 0, 0.1, 0.5, 0.75, 1 et 5.....	159
5 - Courbes tonnage/teneur relatives à la correction affine. Les tailles des supports restent inchangées.....	160
6 - Simulation du processus d'Ambarzumian.....	161
7 - Courbes tonnage/teneur pour le processus d'Ambarzumian. Taille des supports: 0, 0.1, 0.5, 0.75, 1 et 5.....	163
8 - Simulation d'une mesure aléatoire orthogonale régularisée.....	165
9 - Courbes tonnage/teneur associées à la mesure aléatoire orthogonale régularisée. Taille des supports: 0, 0.1, 0.5, 0.75, 1 et 5.....	168
10 - On caractérise la sélectivité d'une loi par l'aire limitée par la courbe tonnage/teneur et la droite $Q = mT$ .....	170
11 - Courbes de sélectivité en fonction de la réduction de variance due au changement de support	
..... processus d'Ambarzumian	
----- mesure aléatoire orthogonale régularisée	
----- processus de diffusion	172

-----

Centre de Géostatistique et de Morphologie Mathématique, ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DES MINES DE PARIS, 35 rue St-Honoré, 77305 FONTAINEBLEAU.

"ETUDES GEOSTATISTIQUES". Séminaire CFSG - 14-15 Juin 1984 - Fontainebleau, France, in Sc. de la Terre, Sér. Inf., n° 21

## **RESUME**

Un modèle de changement de support est nécessaire en estimation minière lorsqu'il s'agit de prévoir la distribution d'unités de sélection (blocs) à partir de données ponctuelles (sondages). Dans cet article, nous considérons trois modèles de changement de support correspondant à une distribution ponctuelle gamma à partir de processus stationnaires. Pour chacun d'eux, nous donnons la loi du changement de support, les courbes tonnage/teneur pour différents supports, ainsi que la variation de l'indice de sélectivité en fonction de la réduction de variance due au changement de support.

## **ABSTRACT**

### *THREE MODELS OF CHANGE OF SUPPORT USING A GAMMA POINT DISTRIBUTION*

A model for a change of support is necessary in mining geostatistics in order to estimate block grade distributions starting from point data (drill holes). In this paper, three models for a change of support are considered. All of them are built using stationary gamma processes. We give the explicit formula for each model, the grade/tonnage curve for various support, and the selectivity index as a function of the decrease in the variance due to the change of support.

## A - INTRODUCTION

Parmi les grands problèmes qui orientent le développement de la géostatistique non-linéaire figure certainement le problème du changement de support. Pour prévoir l'effet de la sélection sur blocs à partir de valeurs ponctuelles, il est nécessaire de recourir à un modèle. Et bien naturellement le choix d'un modèle est important: la qualité de l'estimateur obtenu vaut ce que vaut l'adéquation du modèle à la réalité physique étudiée.

La géostatistique non-linéaire fait actuellement un large usage des modèles gaussiens. Cela tient tout autant à leurs propriétés théoriques de robustesse qu'à la commodité de leur mise en oeuvre. Toutefois si l'on veut utiliser ces modèles, les données doivent être anamorphosées, et l'expérience montre qu'une anamorphose gaussienne n'est pas toujours souhaitable (cas des distributions à queue allongée), ni même possible (cas des distributions présentant un atome à l'origine). De là vient la nécessité d'introduire des modèles bâtis à partir de lois non gaussiennes permettant de mieux résorber ce genre de difficultés.

Pour le présent article, nous avons fait choix de la loi gamma. Cette loi est en effet intéressante à plus d'un titre: lorsque le paramètre croît, elle revêt une grande richesse de formes pour aboutir asymptotiquement à une loi gaussienne. Nous allons présenter tour à tour trois processus monodimensionnels à loi stationnaire gamma. Il s'agit du processus de diffusion gamma, du processus d'Ambarzumian, et de la régularisée d'une mesure aléatoire orthogonale gamma. Il se trouve, et c'est là une circonstance tout à fait exceptionnelle, que l'on connaît explicitement les lois de changement de support de ces trois modèles. Ces lois sont données par leur transformée de Laplace et non pas par leur densité de probabilité, explicitée pour quelques valeurs du paramètre seulement. Pour comparer les trois modèles, il est possible de tracer les courbes tonnage/teneur que l'on obtient par simulation à partir de la transformée de Laplace. Mais il peut être aussi intéressant de faire la comparaison au moyen d'un indice de sélectivité qui est un peu moins informatif mais en revanche beaucoup plus synthétique. Les indices de sélectivité peuvent être obtenus par des méthodes numériques toujours à partir des transformées de Laplace.

Tout au long de cet article, nous utiliserons pour plus de concision plusieurs notations courantes en statistique mais qu'il est peut être bon de rappeler. Si une variable aléatoire  $X$  admet la loi  $F$ , nous écrirons  $X \sim F$ . Nous noterons  $X \equiv Y$  si les deux variables  $X$  et  $Y$  admettent

la même loi. Parmi les lois que nous rencontrerons, citons entre autre

- $u_{a,b}$  loi uniforme sur  $[a,b]$
- $e_a$  loi exponentielle de paramètre  $a$
- $g_{\alpha,b}$  loi gamma de paramètre  $\alpha$  et d'indice  $b$
- $p_\theta$  loi de Poisson de paramètre  $\theta$ .

## B - LA LOI GAMMA

### 1 - DESCRIPTION

On dira qu'une variable aléatoire  $X$  suit une loi gamma de paramètre  $\alpha$  et d'indice  $b$  si sa densité vaut

$$g_{\alpha,b}(x) = \frac{b^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-bx} x^{\alpha-1} \quad (x > 0)$$

où  $\alpha$  et  $b$  sont  $> 0$  et où  $\Gamma$  est la classique fonction eulérienne

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt$$

avec en particulier  $\Gamma(n+1) = n!$  si  $n$  est entier.

Si  $X \sim g_{\alpha,b}$ , alors  $bX \sim g_{\alpha,1}$ . Autrement dit,  $b$  n'est qu'un facteur d'échelle. Au contraire, le rôle joué par  $\alpha$  est essentiel. Si  $\alpha < 1$ ,  $g_{\alpha,b}$  est décroissante et non bornée à l'origine. Si  $\alpha > 1$ ,  $g_{\alpha,b}$  est une courbe en cloche qui tend vers une loi gaussienne aux grandes valeurs de  $\alpha$ . Dans le cas intermédiaire  $\alpha = 1$ ,  $g_{1,b}$  est exponentielle.

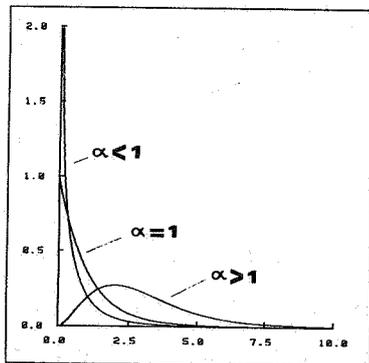


Figure 1 - La loi gamma revêt de multiples formes en fonction de son paramètre.

La loi gamma possède des moments de tout ordre

$$E(X^n) = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{b^n \Gamma(\alpha)}$$

avec en particulier  $E(X) = \frac{\alpha}{b}$  et  $D^2(X) = \frac{\alpha}{b^2}$ . Sa transformée de Laplace vaut

$$E\{e^{-\lambda X}\} = \left(\frac{b}{b+\lambda}\right)^\alpha$$

ce qui montre clairement que la famille des lois gamma de même indice est stable par convolution :

$$g_{\alpha+\beta, b} = g_{\alpha, b} * g_{\beta, b}$$

## 2 - SIMULATION

b n'étant qu'un facteur d'échelle, il nous suffira de savoir simuler  $g_\alpha$  (notation abrégée pour  $g_{\alpha, 1}$ ).

On sait déjà simuler  $g_\alpha$  dans un certain nombre de cas particuliers; en effet  $g_1$  est exponentielle tandis que  $g_{1/2}$  est la densité du carré d'une variable aléatoire gaussienne. Compte-tenu de la stabilité par convolution, on sait donc d'ores et déjà simuler  $g_\alpha$  pour  $\alpha$  entier ou demi-entier. Ce procédé partiel est d'ailleurs peu économique aux grandes valeurs de  $\alpha$ .

En fait, il existe déjà dans la littérature des procédés généraux et rapides de simulation de  $g_\alpha$ . Bon nombre d'entre eux reposent sur les méthodes dites d'acceptation et de rejet proposée par von Neumann (1951). Son principe est le suivant: supposons que l'on puisse écrire

$$g_\alpha \leq C g$$

où C est une constante  $> 1$  et où g est une densité que l'on sait simuler par ailleurs. On génère U uniforme sur  $[0, 1]$  et  $V \sim g$ . Si  $U C g(V) \leq g_\alpha(V)$ , alors V suit la loi  $g_\alpha$ . Sinon, on recommence la génération de U et de V.

Géométriquement parlant, il s'agit simplement de générer un point uniforme dans le sous-graphe de Cg. Si ce point tombe dans le sous-graphe de  $g_\alpha$ , alors son abscisse est une valeur générée de  $g_\alpha$ .

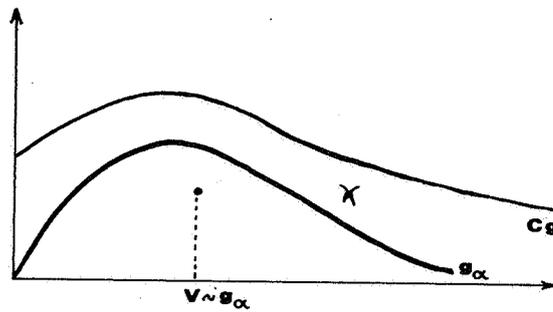


Figure 2 - Description géométrique de la méthode d'acceptation et de rejet.

La constante  $C$ , rapport des aires des deux sous-graphes, s'interprète alors comme le nombre moyen d'essais à effectuer pour générer une valeur de  $g_\alpha$ . Plus  $C$  est petit, plus la méthode est rapide.

Dans le cas  $\alpha < 1$ , le choix de  $C$  et de  $g$  s'impose de lui-même. On prend

$$C g(x) = \begin{cases} \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ \frac{e^{-x}}{\Gamma(\alpha)} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

ce qui conduit à  $C = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{e+\alpha}{e^\alpha}$ .  $C$  croit entre 1 et 1.368 quand  $\alpha$  varie de 0 à 1.  $g$  est aisément simulée par la méthode de Monte-Carlo.

Dans le cas  $\alpha > 1$ , plusieurs choix sont possibles. Citons entre autre

$$(i) \quad C g(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{\left(\frac{\alpha-1}{e}\right)^{\alpha-1}}{1 + \frac{(x-\alpha+1)^2}{2\alpha-1}}$$

proposée par Ahrens et Dieter (1973), où  $g$  est une loi de Cauchy et

$$C = \frac{\pi \sqrt{2\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{\alpha-1}{e}\right)^{\alpha-1}$$

C décroît de  $\Pi$  à  $\sqrt{\Pi}$  quand  $\lambda$  varie de 1 à  $+\infty$ . Autrement dit, plus  $\alpha$  est grand, plus la génération d'une valeur  $g_\alpha$  est rapide!

(ii) Cheng (1977) a proposé

$$C g(x) = \frac{4 \alpha^\lambda}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{\alpha}{e}\right)^\alpha \frac{x^{\lambda-1}}{(\alpha^\lambda + x^\lambda)^2} \quad (x > 0)$$

avec  $\lambda = \sqrt{2\alpha - 1}$ . Dans ce cas, la quantité C vaut  $\frac{4\alpha^\alpha}{\Gamma(\alpha) e^{\alpha\lambda}}$  et décroît de 1.47 à 1.13 quand  $\alpha$  varie de 1 à  $+\infty$ .  $g$  admet pour fonction de répartition

$$G(x) = 1 - \frac{\alpha^\lambda}{\alpha^\lambda + x^\lambda}$$

ce qui rend très facile sa simulation par la méthode de Monte-Carlo.

### 3 - LES POLYNOMES DE LAGUERRE

De même que les modèles isofactoriels gaussiens s'expriment en termes de polynômes d'Hermite, les modèles isofactoriels gamma vont se développer de manière simple sur une base de polynômes de  $L^2(\mathbb{R}_+, g_\alpha)$ . On définit les polynômes de Laguerre à l'aide de la formule de Rodrigues

$$L_n^\alpha(x) = \frac{1}{g_\alpha(x)} \frac{d^n}{dx^n} g_{\alpha+n}(x) \quad n \geq 0$$

Explicitement, on trouve

$$L_n^\alpha(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+k)} x^k$$

En particulier

$$L_0^\alpha(x) = 1$$

$$L_1^\alpha(x) = 1 - \frac{x}{\alpha}$$

$$L_2^\alpha(x) = 1 - \frac{2x}{\alpha} + \frac{x^2}{\alpha(\alpha+1)}$$

On vérifie facilement que ces polygones sont orthogonaux pour  $g_\alpha$

$$\int_0^{+\infty} L_n^\alpha(x) L_p^\alpha(x) g_\alpha(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq n \\ \frac{\Gamma(\alpha)n!}{\Gamma(\alpha+n)} & \text{si } p = n \end{cases}$$

Pour la suite, nous poserons

$$A_n^\alpha = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)n!}$$

On vérifie aussi que le polynome  $L_n^\alpha$  satisfait l'équation différentielle

$$x \frac{d^2 L_n^\alpha(x)}{dx^2} + (\alpha - x) \frac{d L_n^\alpha(x)}{dx} = -n L_n^\alpha(x) \quad (1)$$

## C - PROCESSUS DE DIFFUSION GAMMA

### 1 - RAPPEL SUR LES PROCESSUS DE MARKOV

On sait qu'un processus de Markov stationnaire est caractérisé par sa probabilité de transition  $P_t$

$$P_t f(x) = E [f(X_t) | X_0 = x]$$

La propriété de Markov (le dernier état connu du processus résume toute l'information pour prévoir le futur) entraîne l'équation de semi-groupe

$$P_{t+t'} f = P_t (P_{t'} f)$$

Pour décrire le comportement infinitésimal du processus, il est commode d'introduire son générateur infinitésimal

$$A f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P_t f(x) - f(x)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} E \left[ \frac{f(X_t) - f(X_0)}{t} \mid X_0 = x \right]$$

On vérifie facilement que  $A$  et  $P_t$  commutent. Plus précisément, on a :

$$\frac{\partial P_t f}{\partial t} = P_t (A f) = A (P_t f)$$

d'où l'on tire

$$P_t f = e^{tA} f$$

compte-tenu de  $P_0 f = f$ . Ceci montre entre autre qu'un processus de Markov est caractérisé par son générateur infinitésimal.

## 2 - DIFFUSION GAMMA

Un tel processus admet pour générateur infinitésimal

$$A f(x) = x f''(x) + (\alpha - x) f'(x)$$

Si l'on prend  $f = L_n^\alpha$ , alors (1) entraîne

$$P_t L_n^\alpha = e^{tA} L_n^\alpha = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{t^p}{p!} A^p L_n^\alpha = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{t^p (-n)^p}{p!} L_n^\alpha = e^{-nt} L_n^\alpha$$

et plus généralement si  $f \in L^2(\mathbb{R}_+, g_\alpha)$ , on écrit  $f = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n^\alpha \langle f, L_n^\alpha \rangle L_n^\alpha$  et on obtient

$$P_t f = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nt} A_n^\alpha \langle f, L_n^\alpha \rangle L_n^\alpha$$

Appelant alors  $g_t(y|x)$  la densité de  $X_t | X_0 = x$ , cette dernière formule se réécrit :

$$\int_0^{+\infty} f(y) g_t(y|x) dy = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nt} A_n^\alpha L_n^\alpha(x) f(y) L_n^\alpha(y) g_\alpha(y) dy, \quad \text{ce qui donne}$$

$$g_t(y|x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nt} A_n^\alpha L_n^\alpha(x) L_n^\alpha(y) g_\alpha(y) \quad (2)$$

De cette densité conditionnelle, on déduit la loi stationnaire du processus

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} g_t(y|x) = g_\alpha(y)$$

et finalement la densité du couple  $(X_0, X_t)$  vaut

$$g_t(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nt} A_n^\alpha L_n^\alpha(x) L_n^\alpha(y) g_\alpha(x) g_\alpha(y)$$

ce qui montre que le processus de diffusion gamma constitue un modèle isofactoriel (Matheron, 1975, 1983).

On vérifie sans peine à partir de (2) que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} P(|X_t - X_0| > \varepsilon | X_0 = x) = 0$$

pour tout  $\varepsilon$  aussi petit soit-il, ainsi que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} E(X_t - X_0 | X_0 = x) = \alpha - x$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} E[(X_t - X_0)^2 | X_0 = x] = 2x$$

Ces trois propriétés sont caractéristiques d'un processus de diffusion admettant pour coefficients de dérive et de diffusion les fonctions  $a(x) = \alpha - x$  et  $b(x) = 2x$ . La terminologie se justifie physiquement de la manière suivante: si une particule en suspension dans un liquide se trouve en un point  $x$  à l'instant  $t$ , son mouvement entre les instants  $t$  et  $t+dt$  est la superposition d'un terme déterministe  $a(x, t) dt$  qui est l'entraînement provoqué par la circulation du liquide, et d'un terme aléatoire  $\delta(x, t, t+dt)$  qui prend en compte les fluctuations provoquées par l'agitation thermique des molécules (Guikman, Skorokhod, 1980). On admet de surcroît que  $E[\delta(x, t, t+dt)] = 0$  ainsi que  $D^2[\delta(x, t, t+dt)] = b(x, t) dt$ .

En termes géostatistiques, les trois formules traduisent la continuité du processus, l'existence d'une *dérivée infinitésimale* qui est une forme de rappel vers la moyenne du processus, ainsi

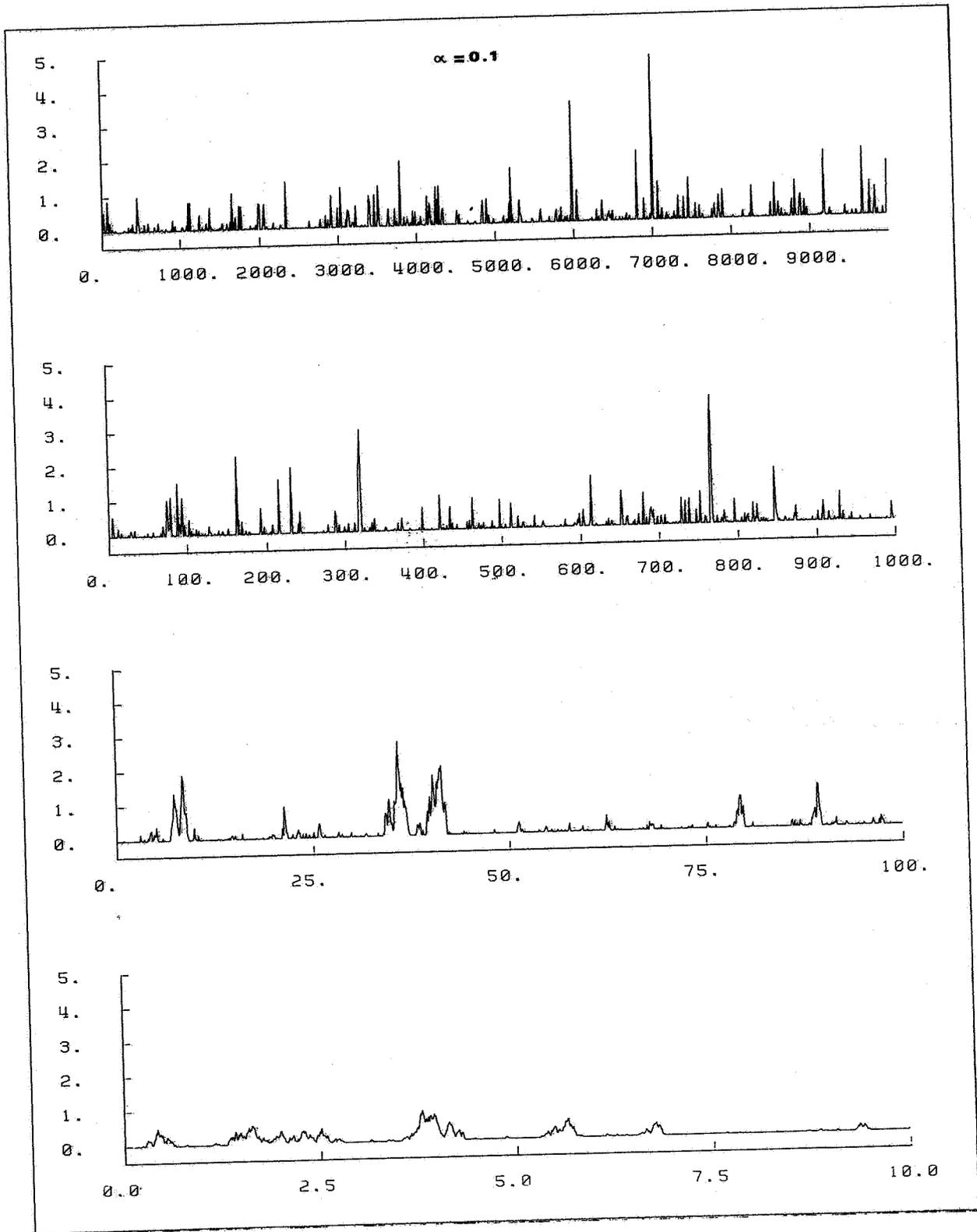


Figure 3.1 - Simulation d'un processus de diffusion observé à divers grossissements  $\alpha = 0.1$ .

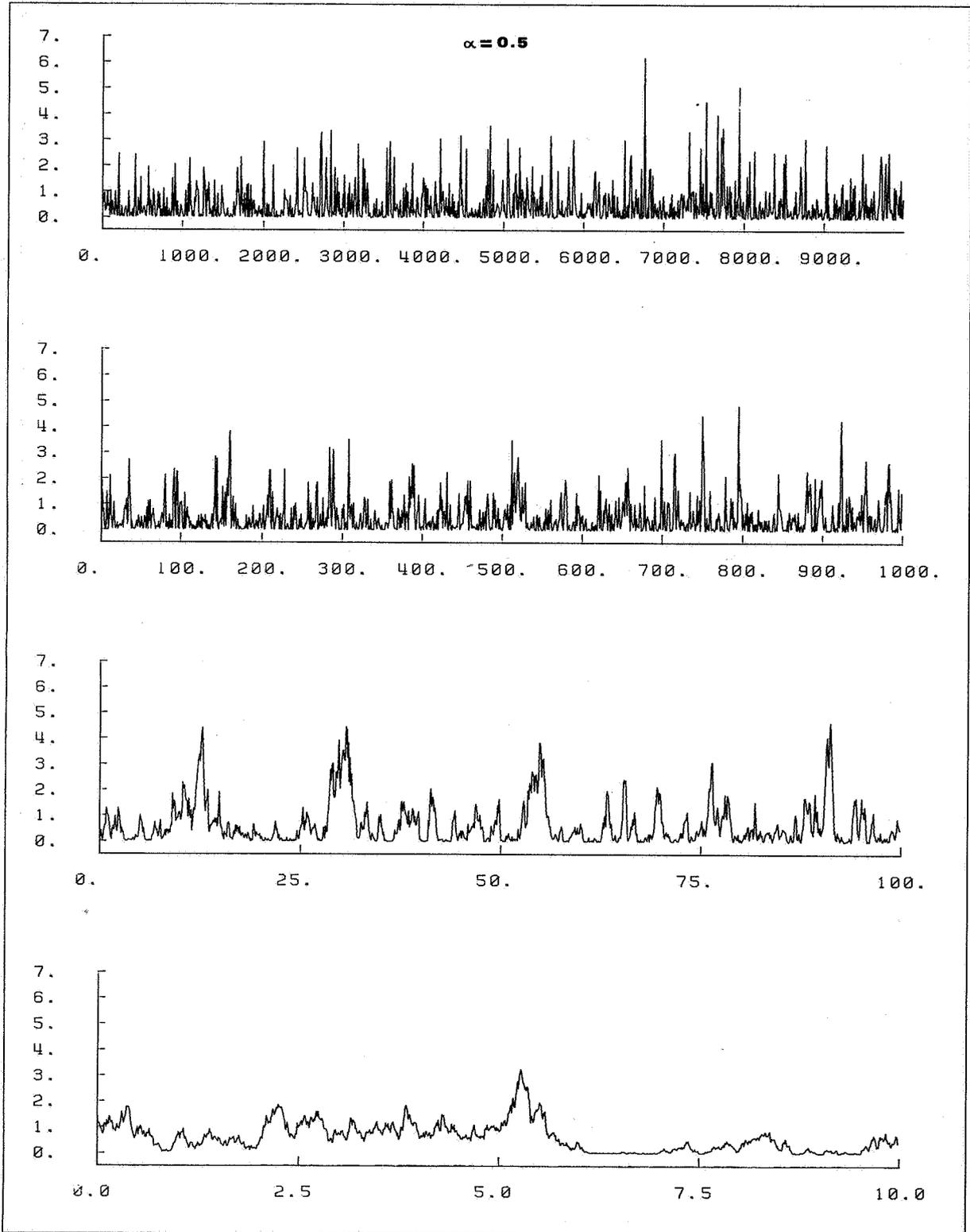


Figure 3.2 - Simulation d'un processus de diffusion observé à divers grossissements  $\alpha = 0.5$ .

que l'existence d'un *variogramme infinitésimal* qui laisse apparaître un *effet proportionnel*.

### 3 - SIMULATION

Compte-tenu de [2], la transformée de Laplace de la densité conditionnelle vaut

$$E \left\{ e^{-\lambda X_t} | X_0 = x \right\} = \left( \frac{1}{1 + \lambda(1 - e^{-t})} \right)^\alpha e^{-\lambda x \frac{e^{-t}}{1 + \lambda(1 - e^{-t})}}$$

Développant l'exponentielle en série, la densité  $g_t(y|x)$  se réécrit

$$g_t(y|x) = e^{-\frac{\rho x}{1-\rho}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left( \frac{\rho x}{1-\rho} \right)^n \frac{e^{-\frac{x}{1-\rho}} x^{n+\alpha-1}}{(1-\rho)^{n+\alpha} \Gamma(n+\alpha)}$$

avec  $\rho = e^{-t}$ , ce qui permet d'interpréter  $g_t$  comme mélange poissonnien des lois gamma (Matheron, 1984).

$$X_t | X_0 = x \sim g_{\alpha+N, \frac{1}{1-\rho}} \quad \text{avec} \quad N \sim P_{\frac{\rho x}{1-\rho}}$$

Compte-tenu du caractère markovien du processus, la génération des  $X_t$  va s'effectuer de proche en proche. Plus précisément, faisons choix d'une origine 0 et d'une unité de temps  $\Delta t$ . On commence par générer  $X_0 \sim g_\alpha$ . Puis on procède par récurrence: si la valeur générée de  $X_{(n-1)\Delta t}$  est  $x$ , on génère  $X_{n\Delta t}$  en utilisant le fait que  $X_{n\Delta t} | X_{(n-1)\Delta t} = x \sim g_{\Delta t}(\cdot | x)$ .

Pour réaliser la simulation, il est donc nécessaire de savoir générer des valeurs poissonniennes. Une méthode classique utilise le fait que dans un processus de Poisson de paramètre  $\theta$ , le nombre de points tombés dans un segment de longueur 1 suit une loi de Poisson de paramètre  $\theta$ . Une méthode dérivée de celle-ci, mais beaucoup plus rapide lorsque  $\theta$  est grand est présentée dans Ahrens et Dieter (1974).

Le lecteur trouvera à la figure 3 des simulations d'un processus de diffusion gamma pour  $\alpha = 0.1, 0.5, 1, 2$  et 5. Chacune de ces simulations a été représentée à plusieurs échelles de grossissement.

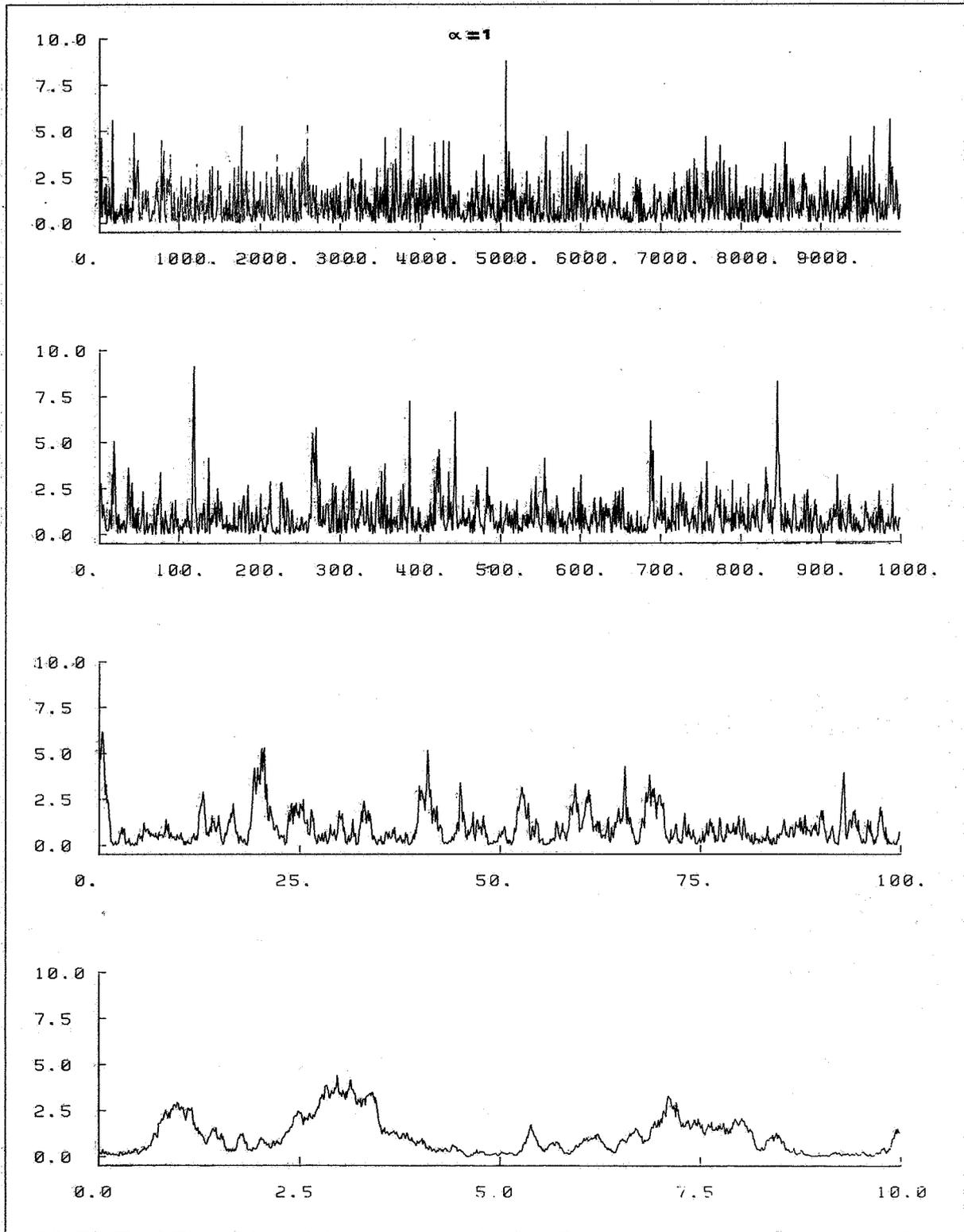


Figure 3.3 - Simulation d'un processus de diffusion observé à divers grossissements  $\alpha = 1$ .

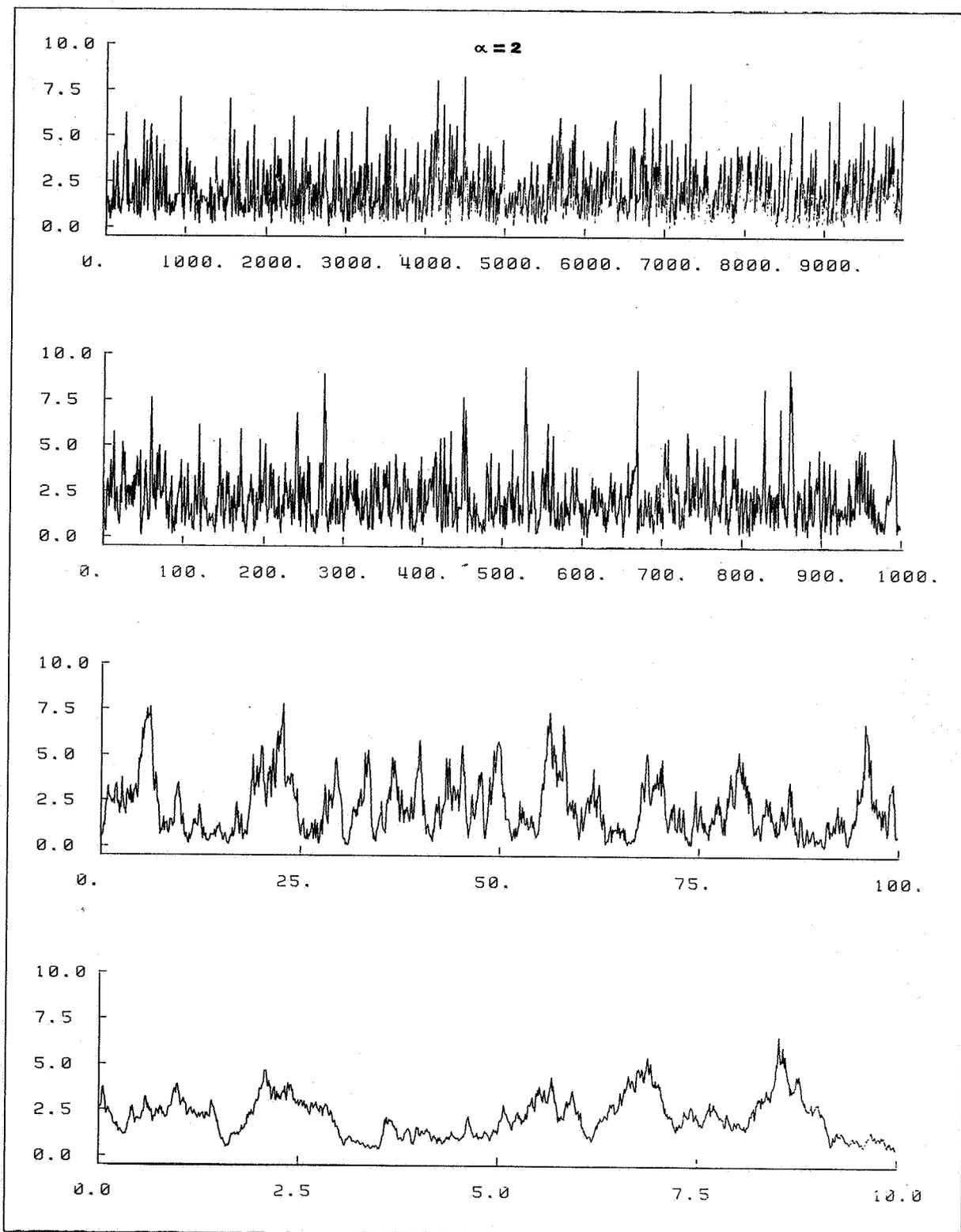


Figure 3.4 - Simulation d'un processus de diffusion observé à divers grossissements  $\alpha = 2$ .

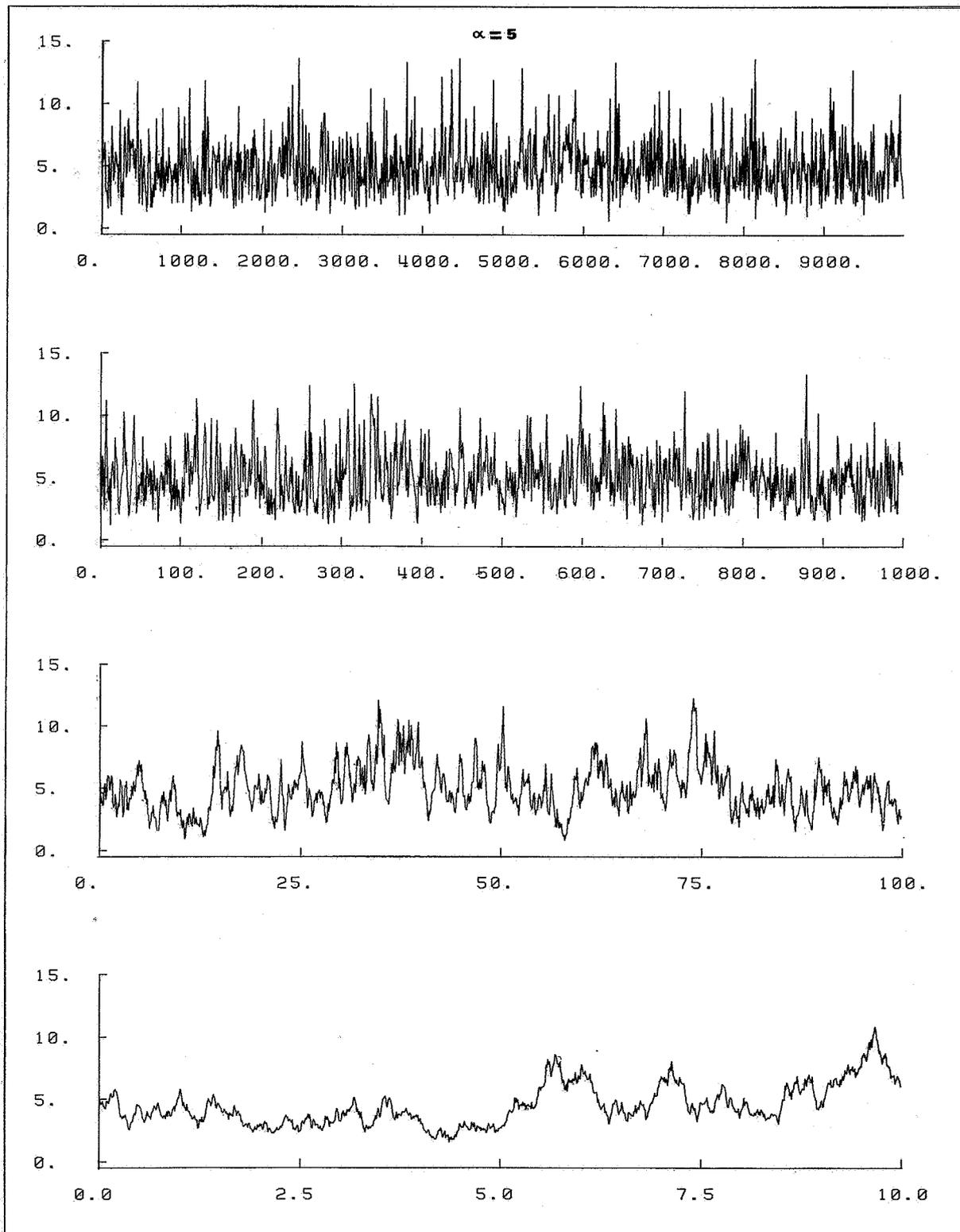


Figure 3.5 - Simulation d'un processus de diffusion observé à divers grossissements  $\alpha = 5$ .

Aux très faibles valeurs de  $\alpha$ , les réalisations restent collées à l'origine avec apparition sporadique de quelques pics. Quand  $\alpha$  croît, le nombre de pics augmente, estompant peu à peu l'effet de collage. Aux grandes valeurs de  $\alpha$ , cet effet a totalement disparu. Les réalisations tendent à se symétriser par rapport à la valeur moyenne de  $\alpha$ , faisant apparaître aussi bien des pics que des vallées.

Pour mieux comprendre la répartition des pics, nous avons choisi un seuil de coupure  $z$  et considéré l'ensemble aléatoire  $\{X_t \geq z\}$ . En considérant le développement de l'échelon unité en polygones de Laguerre, il est aisé de voir que la covariance de cet ensemble est

$$C_z(h) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nh} A_n^\alpha \left[ g_{\alpha+1}(z) L_{n-1}^{\alpha+1}(z) \right]^2$$

La dérivée par rapport à  $h$  de  $C_z$  s'exprime commodément à l'aide de la fonction de Bessel modifiée de 1ère espèce

$$I_\alpha(u) = \left(\frac{u}{2}\right)^{\alpha+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(u/2)^{2n}}{n! \Gamma(\alpha+n+1)}$$

En posant  $\rho = e^{-h}$ , on trouve

$$\frac{\partial C_z}{\partial h}(h) = - \frac{\rho^{1-\frac{\alpha}{2}}}{(1-\rho) \Gamma(\alpha)} e^{-\frac{2z}{1-\rho}} z^\alpha I_\alpha\left(\frac{2z\sqrt{\rho}}{1-\rho}\right)$$

et connaissant le comportement de  $I_\alpha$  aux grandes valeurs de  $u$

$$I_\alpha(u) \sim \frac{e^u}{\sqrt{2\pi u}}$$

on en déduit que

$$\frac{\partial C_z}{\partial h}(h) \sim - \frac{e^{-z} z^{\alpha-\frac{1}{2}}}{2\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha)} \frac{1}{\sqrt{h}}$$

quand  $h \rightarrow 0$ .

#### 4 - CHANGEMENT DE SUPPORT

Soit  $Y_t = \frac{1}{t} \int_0^t X_u \, du$ , et posons  $\phi_t(\lambda) = E\{e^{-\lambda Y_t}\}$ . En impliquant la transformée de Laplace de  $(Y_t | X_0 = x, X_t | X_0 = x)$  dans une équation aux dérivées partielles, Matheron (1984) a établi l'expression rigoureuse de la formule de changement de support

$$\phi_t(\lambda) = \left[ \frac{c e^{\frac{t}{2}}}{\left(c \operatorname{ch} \frac{ct}{4} + \operatorname{sh} \frac{ct}{4}\right) \left(\operatorname{ch} \frac{ct}{4} + c \operatorname{sh} \frac{ct}{4}\right)} \right]^\alpha$$

où  $c = \sqrt{1 + \frac{4\lambda}{t}}$ . De cette formule, on tire la moyenne et la variance de  $Y_t$

$$\left\{ \begin{array}{l} m_t = \alpha \quad (\text{comme prévu}) \\ \sigma_t^2 = 2\alpha \frac{e^{-t} - 1 + t}{t^2} \end{array} \right.$$

REMARQUE : Soit  $N$  une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre  $\frac{t}{4}$ . Les deux variables  $\left[\frac{N}{2}\right]$  et  $\left[\frac{N+1}{2}\right]$  admettent pour fonctions génératrices

$$\left\{ \begin{array}{l} G_{\left[\frac{N}{2}\right]}(s) = e^{-\frac{t}{4}} \left( \operatorname{ch} \frac{t}{4} \sqrt{s} + \frac{1}{\sqrt{s}} \operatorname{sh} \frac{t}{4} \sqrt{s} \right) \\ G_{\left[\frac{N+1}{2}\right]}(s) = e^{-\frac{t}{4}} \left( \operatorname{ch} \frac{t}{4} \sqrt{s} + \sqrt{s} \operatorname{sh} \frac{t}{4} \sqrt{s} \right) \end{array} \right.$$

Autrement dit, la transformée de Laplace de  $Y_t$  peut se récrire sous la forme

$$\phi_t(\lambda) = \left[ G_{\left[\frac{N}{2}\right]} \left(1 + \frac{4\lambda}{t}\right) G_{\left[\frac{N+1}{2}\right]} \left(1 + \frac{4\lambda}{t}\right) \right]^{-\alpha}$$

Cette formulation particulièrement simple n'est sûrement pas une coïncidence. Nous ignorons toutefois à quoi l'attribuer. Par ailleurs, les deux variables  $\left[\frac{N}{2}\right]$  et  $\left[\frac{N+1}{2}\right]$  n'étant pas infiniment divisibles, nous ne sommes pas parvenus à exploiter cette constatation.

On ne sait malheureusement pas inverser  $\phi_t$ , sauf dans le cas particulier  $\alpha = 1$  (Matheron, 1984). En s'intéressant aux pôles de cette transformée, Matheron a établi qu'elle se met sous la forme

$$\phi_t(\lambda) = \prod_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{t b_n}{t b_n + \lambda} \right)^\alpha$$

ce qui s'interprète en disant que  $Y_t$  est une somme de variables aléatoires mutuellement indépendantes  $Y_t = \sum_{n=0}^{+\infty} Z_n$ , où  $Z_n$  suit une loi gamma de paramètre  $\alpha$  et d'indice  $t b_n$ . Le coefficient  $b_n$  est donné par

$$4 b_n = \frac{16}{t^2} \left( n \frac{\pi}{2} + \varepsilon_n \right)^2 + 1$$

le nombre  $\varepsilon_n$  ( $0 < \varepsilon_n < \frac{\pi}{2}$ ) étant quant à lui solution unique de l'équation

$$2 \operatorname{tg} \varepsilon_n = \frac{t}{n\pi + 2 \varepsilon_n}$$

On dispose ainsi d'un moyen commode de simulation de  $Y_t$ . En pratique, pour éviter une sommation infinie des  $Z_n$ , on remplace la queue de la série  $\sum_{n>N} Z_n$  par un résidu aléatoire  $R_N$ . Ici, on est tenté d'attribuer à  $R_N$  la transformée de Laplace

$$E \left\{ e^{-R_N} \right\} = \left( \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{t} \sum_{n>N} \frac{1}{b_n}} \right)^\alpha$$

Alors  $E(R_N - \sum_{n>N} Z_n) = 0$ . On choisit  $N$  de façon à ce que la variance de  $R_N - \sum_{n>N} Z_n$  soit inférieure à un seuil donné. Or

$$\operatorname{Var} (R_N - \sum_{n>N} Z_n) \leq \frac{\alpha}{t^2} \left( \sum_{n>N} \frac{1}{b_n} \right)^2 + \sum_{n>N} \frac{\alpha}{t^2 b_n^2}$$

et comme  $b_n > \frac{n^2 \pi^2}{t^2}$

$$\text{Var} \left( R_N - \sum_{n>N} Z_n \right) < \frac{\alpha t^2}{\pi^4} \left[ \left( \sum_{n>N} \frac{1}{n^2} \right)^2 + \sum_{n>N} \frac{1}{n^4} \right]$$

Cette convergence est assez rapide puisque  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 1.645$  et  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = 1.082$ . On trouvera figure 4 les courbes tonnage/teneur tracées pour  $\alpha = 0.1, 0.3, 0.5, 1, 2$  et  $5$  et pour des supports de taille égale à  $0, 0.1, 0.5, 0.75, 1$  et  $5$ . La comparaison avec la correction affine est particulièrement instructive (cf figure 5).

## D - LE PROCESSUS D'AMBARZUMIAN

Imaginé par V.A. Ambarzumian pour décrire les fluctuations lumineuses de la voie lactée, ce processus a été utilisé par G. Matheron (1969) et J. Jacod (1969) comme modèle de sédimentation détritique. Pour en donner une description simple, nous allons recourir à une analogie électrique.

### 1 - DESCRIPTION ET SIMULATION

Des charges  $S_1, S_2, \dots, S_n \dots$  arrivent sur une capacité aux instants  $T_1, T_2, \dots, T_n \dots$ . On s'intéresse à l'état  $X_t$  de cette capacité à l'instant  $t$  compte-tenu du fait que celle-ci a des fuites. Les paramètres du modèle sont les suivants:

- les  $T_n$  sont les points constitutifs d'un processus de Poisson de paramètre  $\theta$ .
- les  $S_n$  sont indépendantes et suivent toutes une loi exponentielle de paramètre  $a$ .
- le taux de fuite est indépendant de la charge de la capacité. Il est pris égal à  $c$ .

Le processus est complètement décrit par la relation

$$X_t = X_0 e^{-ct} + \sum_{n=1}^{+\infty} S_n 1_{T_n \leq t} e^{-c(t-T_n)} \quad (3)$$

On en déduit facilement

$$E \left\{ e^{-\mu X_t} \mid X_0 = x \right\} = e^{-\mu x} e^{-ct} \left( \frac{a + \mu e^{-ct}}{a + \mu} \right)^{\frac{\theta}{c}}$$

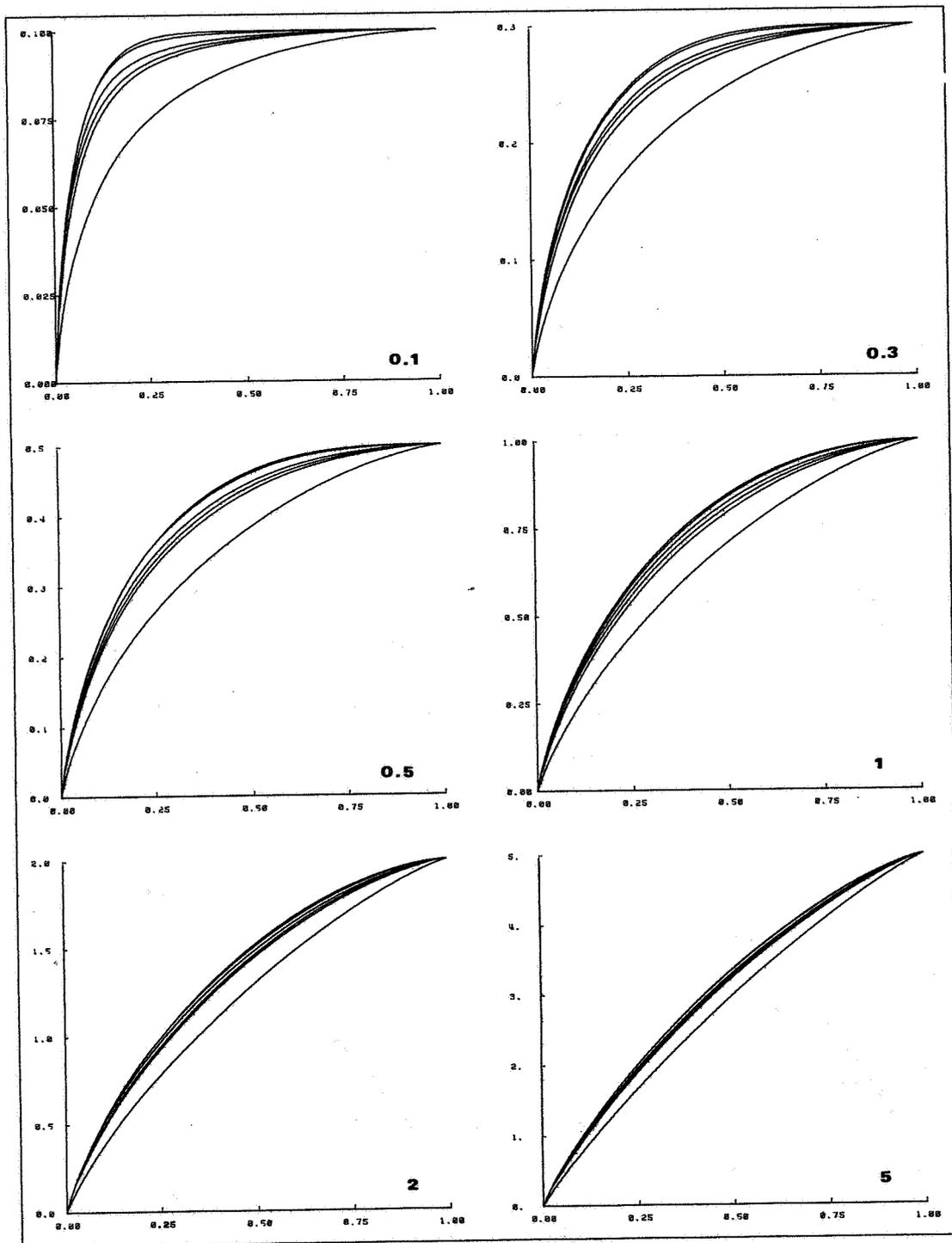


Figure 4 - Courbes tonnage/teneur associées au processus de diffusion.  
 Taille des supports : 0, 0.1, 0.5, 0.75, 1 et 5.

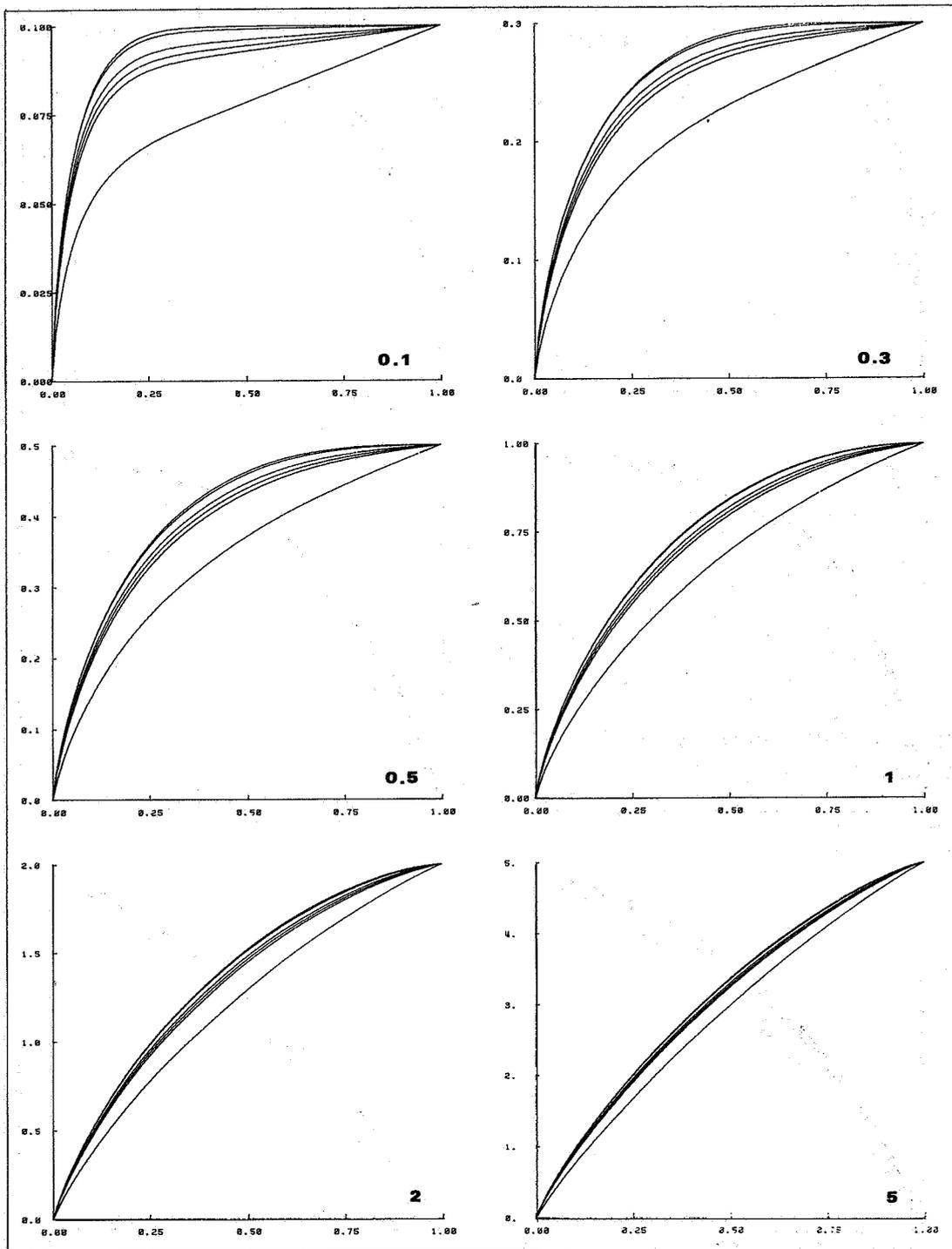


Figure 5 - Courbes tonnage/teneur relatives à la correction affine. Les tailles des supports restent inchangées.

Quand  $t$  devient très grand, cette loi conditionnelle converge vers une loi de densité  $\frac{g_{\theta}}{c}$ .  
 On en déduit que le processus est ergodique et admet  $\frac{g_{\theta}}{c}$  comme loi stationnaire. Si  $X_0$  suit une telle loi, on obtient la loi bivariable

$$E \left\{ e^{-\lambda X_0 - \mu X_t} \right\} = \left[ \frac{a(a + \mu e^{-ct})}{(a+\mu)(a+\lambda+\mu e^{-ct})} \right]^{\frac{\theta}{c}}$$

Mais il ne s'agit pas d'un modèle isofactoriel. En effet, la transformée bivariable se réécrit

$$E \left\{ e^{-\lambda X_0 - \mu X_t} \right\} = \left( \frac{a}{a+\lambda} \right)^{\frac{\theta}{c}} \left( \frac{a}{a+\mu} \right)^{\frac{\theta}{c}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{\theta}{c} + n)}{n! \Gamma(\frac{\theta}{c})} \frac{\lambda^n}{(a+\lambda)^n} \frac{(\mu e^{-ct})^n}{(a+\mu e^{-ct})^n}$$

Cela était du reste prévisible, puisque sur un tel processus le retournement du temps est impossible.

Le processus d'Ambarzumian est un processus de Markov. Cela résulte de l'absence de mémoire de la loi exponentielle. Cette remarque facilite grandement la simulation du processus:

- i) poser  $T = 0$  et générer  $X_T \sim g_{\theta}$
- ii) générer  $U \sim e_{\theta}$  et poser  $T' = T + U$
- iii) si  $T \leq t < T'$   $X_t = X_T e^{-c(t-T)}$
- iv) générer  $S \sim e_a$  et poser  $X_{T'} = X_T e^{-c(T'-T)} + S$ . Poser  $T = T'$  et aller en ii).

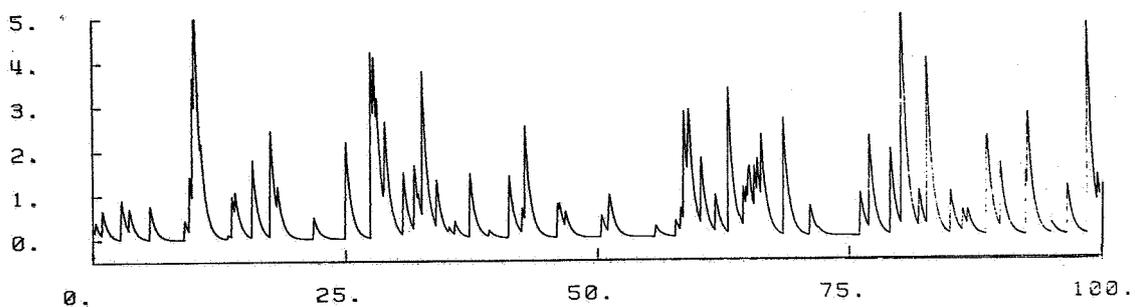


Figure 6 - Simulation du processus d'Ambarzumian.

## 2 - CHANGEMENT DE SUPPORT

En intégrant (3) entre 0 et t, on obtient

$$Y_t = X_0 \frac{1 - e^{-ct}}{ct} + \sum_{n=1}^{+\infty} S_n 1_{T_n \leq t} \frac{1 - e^{-c(t-T_n)}}{ct} \quad (4)$$

ce qui permet aisément d'en déduire la transformée de Laplace de  $Y_t$

$$\phi_t(\lambda) = \left[ e^{ct} + \frac{\lambda}{act} (e^{ct} - 1) \right] \frac{\theta \left( \frac{act}{act+\lambda} - 1 \right)}$$

ainsi que ses premiers moments

$$\begin{cases} m_t = \frac{\theta}{ac} \\ \sigma_t^2 = 2 \frac{\theta}{c} \frac{e^{-ct} - 1 + ct}{(act)^2} \end{cases}$$

Comme dans le cas de la diffusion, nous ne savons pas inverser la transformée de Laplace.

Mais la formule (4) se prête aisément à une simulation :

- i) générer  $X_0 \sim g_{\frac{\theta}{c}, a}$  et  $N \sim p_{\theta t}$
- ii) si  $N \geq 1$ , générer  $T_1, T_2, \dots, T_N \sim u_{0,t}$  ainsi que  $S_1, S_2, \dots, S_N \sim e_a$
- iii) poser  $Y_t$  conformément à la formule (4), la somme étant étendue aux  $n \leq N$ .

Pour comparer les courbes tonnage/teneur du processus d'Ambarzumian (cf Figure 7) et du processus de diffusion (cf Figure 5), nous avons choisi les paramètres de manière à ce que les  $Y_t$  admettent la même moyenne et la même variance pour les deux processus, et cela quelle que soit la taille du support. Cela conduit à prendre  $\theta = \alpha$  ainsi que  $a = c = 1$ .

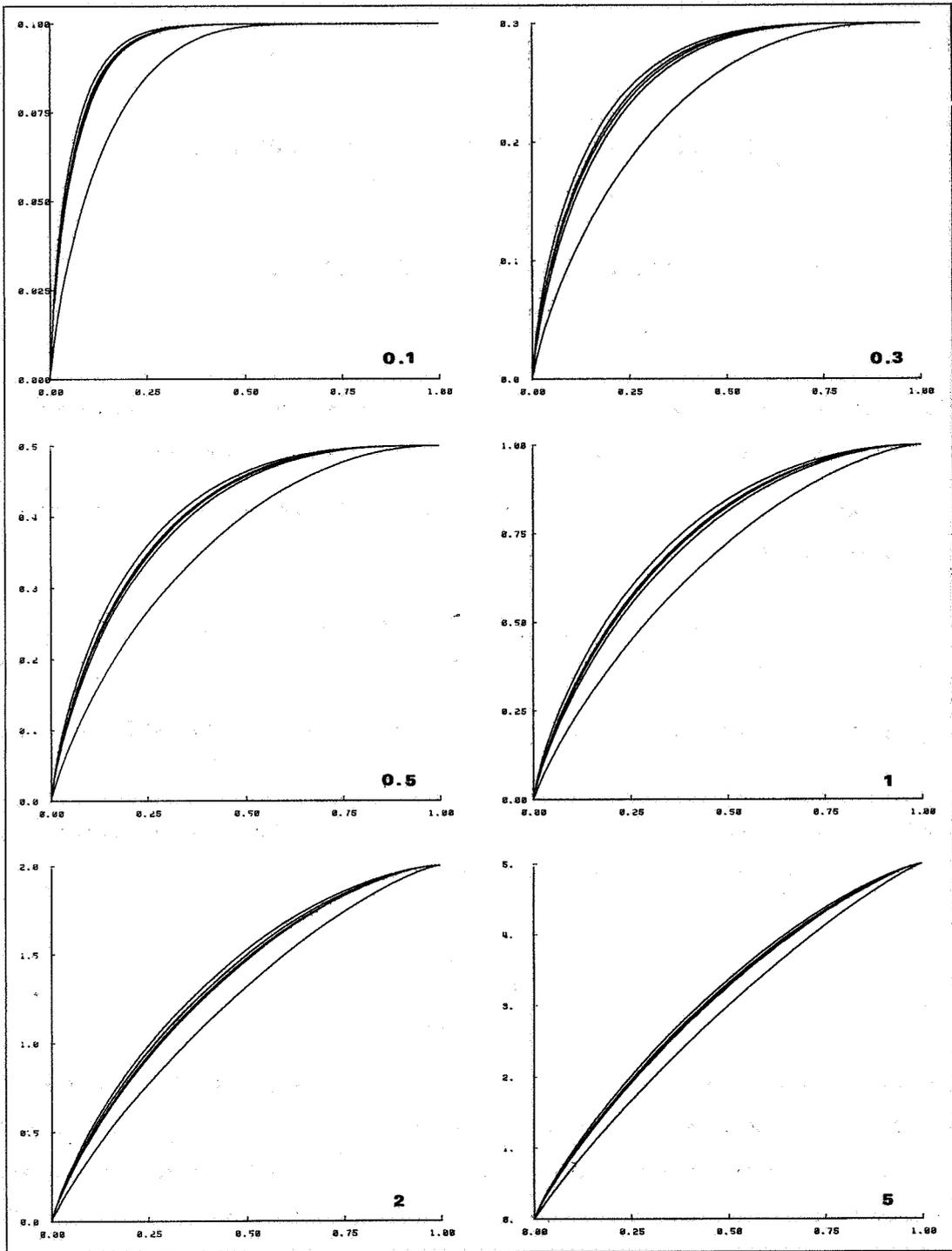


Figure 7 - Courbes tonnage/teneur pour le processus d'Ambarzumian. Taille des supports : 0, 0.1, 0.5, 0.75, 1 et 5.

## E - MESURE ORTHOGONALE RÉGULARISÉE

### 1 - DESCRIPTION ET SIMULATION

Le point de départ de ce paragraphe est une mesure aléatoire  $\chi$  sur  $\mathbb{R}$ , stationnaire, orthogonale et à loi gamma. Celle-ci vérifie les propriétés caractéristiques suivantes :

i) pour tout intervalle  $[a, b]$ ,  $\chi([a, b])$  est une variable aléatoire qui suit une loi gamma de paramètre proportionnel à  $b-a$  :

$$E \left\{ e^{-\lambda \chi([a, b])} \right\} = \left( \frac{1}{1 + \lambda} \right)^{\beta(b-a)}$$

ii) si  $[a, b]$  et  $[a', b']$  sont disjoints, les deux variables  $\chi([a, b])$  et  $\chi([a', b'])$  sont indépendantes.

Soit  $[0, t_0]$  un intervalle fixé une fois pour toutes. La régularisée de la mesure  $\chi$  par  $[0, t_0]$  est un processus stationnaire que nous notons  $X$  :

$$X_t = \chi \left( [t, t_0 + t] \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} 1_{[0, t_0]}(u-t) \chi(du)$$

On peut montrer que ce processus constitue un modèle isofactoriel (Matheron, 1973). Mais il ne s'agit pas d'un processus de Markov. Il nous sera facile de simuler  $X_0, X_t, X_{2t}, \dots$  dès que  $t > t_0$  (génération de variables indépendantes), ou bien dès que le rapport  $t/t_0$  est rationnel. En effet, posons  $t/t_0 = p/q \leq 1$  avec  $p$  et  $q$  entiers premiers entre eux. Il suffit de générer une suite  $\{Z_k\}$  de variables aléatoires mutuellement indépendantes  $t$  de même loi que  $\chi\left(0, \frac{t_0}{q}\right)$  pour en déduire les  $X_{nt}$  :

$$X_{nt} = \sum_{k=np+1}^{(n+1)p} Z_k \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

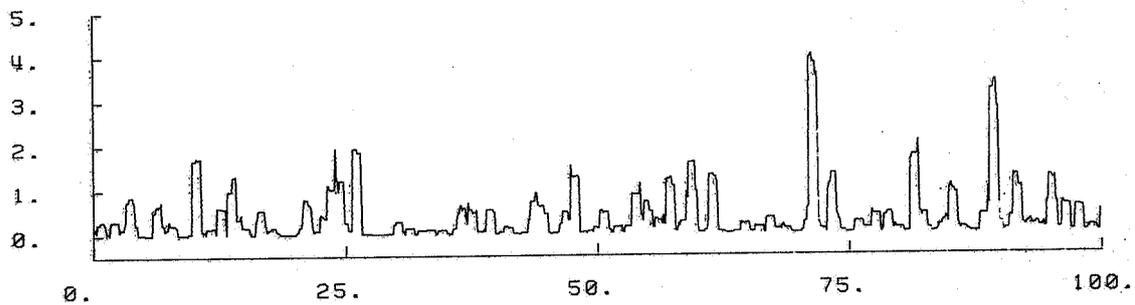


Figure 8 - Simulation d'une mesure aléatoire orthogonale régularisée.

## 2 - CHANGEMENT DE SUPPORT

Posons  $Y_t = \frac{1}{t} \int_0^t X_u \, du$ . En remplaçant  $X_u$  par sa valeur, on obtient

$$Y_t = \frac{1}{t} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} 1_{[0,t] \cap [v-t_0,v]}(u) \, du \right) X(dv)$$

ce qui permet d'exprimer  $Y_t$  comme somme infinie de variables indépendantes. Passons à la transformée de Laplace :

$$\phi_t(\lambda) = E\left\{e^{-\lambda Y_t}\right\} = \prod_{dv} \left( \frac{1}{1 + \lambda \frac{|[0,t] \cap [v-t_0,v]|}{t}} \right)^{\beta \, dv}$$

ce qui donne finalement

$$\phi_t(\lambda) = \left(1 + \lambda \frac{t \wedge t}{t}\right)^{-\beta(t_0 + t + \frac{2t}{\lambda})} e^{2\beta(t_0 \wedge t)}$$

La moyenne et la variance de  $Y_t$  s'obtiennent en considérant le développement limité à l'origine de la  $\phi_t(\lambda)$ . On trouve

$$\begin{cases} m_t = \beta t_0 \\ \sigma_t^2 = \frac{\beta}{3} \left(\frac{t_0 \wedge t}{t}\right)^2 \left[3(t_0 \vee t) - (t_0 \wedge t)\right] \end{cases}$$

### 3 - INTERPRETATION PROBABILISTE

$X$  étant une mesure aléatoire infiniment divisible,  $Y_t$  est également infiniment divisible. D'après le théorème de Lévy-Kintchine,  $\phi_t(\lambda)$  peut se mettre sous la forme

$$\phi_t(\lambda) = \exp \left\{ -u_0 \lambda + \int_0^{+\infty} (e^{-\lambda u} - 1) \mu(du) \right\}$$

où  $u_0 \geq 0$  est un facteur de translation, et où  $\mu$  est une mesure non négative, pas nécessairement sommable, mais vérifiant  $\int_1^{+\infty} \mu(du) < +\infty$  ainsi que  $\int_0^1 u \mu(du) < +\infty$ .  $\mu$  est appelée mesure de Lévy attachée à la loi de  $Y_t$ .

Après quelques tâtonnements, on parvient au résultat suivant :

$$\phi_t(\lambda) = \exp \left\{ \int_0^{+\infty} \left( e^{-\lambda \frac{t_0 \wedge t}{t} u} - 1 \right) \mu(du) \right\}$$

où  $\mu(du)$  admet la densité

$$n(u) = \beta(t_0 + t) \frac{e^{-u}}{u} - 2\beta(t_0 \wedge t) \int_u^{+\infty} \frac{e^{-v}}{v} dv$$

On constate que  $\mu(du)$  vérifie bien les trois propriétés requises plus haut. En particulier,  $\mu(du) \geq 0$  compte-tenu de l'inégalité  $t_0 + t \geq 2 t_0 \wedge t$ , et du fait que  $\int_u^{+\infty} \frac{e^{-v}}{v} dv \leq \int_u^{+\infty} \frac{e^{-v}}{u} dv = \frac{e^{-u}}{u}$ . Pour la suite, nous poserons  $a = \beta(t_0 + t)$  et  $b = 2\beta(t_0 \wedge t)$ .

Il est à remarquer que la fonction  $un(u)$  est décroissante: en effet  $(un(u))' < 0$ . Par ailleurs,  $\lim_{u \rightarrow 0} un(u) = a$  ainsi que  $\lim_{u \rightarrow +\infty} un(u) = 0$ . Par conséquent  $un(u)$  est, à une constante près, une fonction de répartition complémentaire

$$un(u) = a[1 - H(u)]$$

dont la densité est le mélange d'une exponentielle et d'une exponentielle intégrale

$$h(u) = \frac{a-b}{a} e^{-u} + \frac{b}{a} \int_u^{+\infty} \frac{e^{-v}}{v} dv$$

A partir de  $h$ , introduisons la famille de densités  $h_s(u) = e^s h(ue^s)$ . Si  $Z \sim h$ , alors  $e^{-s} Z \sim h_s$ . Remarquons que

$$\int_0^{+\infty} h_s(u) ds = \frac{1}{u} \int_u^{+\infty} h(v) dv = \frac{n(u)}{a}$$

l'expression de  $\phi_t$  devient

$$\phi_t(\lambda) = \exp \left\{ a \int_0^{+\infty} \left( e^{-\lambda \frac{t_0 \wedge t}{t} u} - 1 \right) \int_0^{+\infty} h_s(u) ds du \right\}$$

Cette formule admet une interprétation probabiliste particulièrement simple en termes de processus de Poisson composé :  $Y_t \equiv \frac{t \wedge t_0 + \infty - T}{t} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda \frac{t_0 \wedge t}{t} Z_n}$  où les  $Z_n$  sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi  $h$ , et les  $T_n$  sont les points constitutifs d'un processus de Poisson de paramètre  $a = \beta(t_0 + t)$

C'est cette interprétation que nous avons utilisée pour simuler  $Y_t$ . Tout comme dans le cas de la diffusion, nous avons dû nous limiter à une somme finie de variables en introduisant une variable résiduelle. Nous n'insisterons pas ici sur ce point. En ce qui concerne le choix des paramètres, nous avons posé  $\alpha = \beta t_0$  de façon à faciliter la comparaison avec les deux autres modèles. Dans la gamme des valeurs possibles, nous avons choisi  $t_0 = 1$  et donc  $\beta = \alpha$ . La simulation de la loi  $h$  est fort simple. En effet, le produit de deux variables indépendantes, l'une exponentielle et l'autre uniforme, admet une densité exponentielle intégrale.

## F - LA SELECTIVITE

A vrai dire, les courbes tonnage/teneur obtenues au cours des paragraphes précédents sont assez difficiles à comparer. Il faudrait pour cela ou bien les superposer, ou bien confronter leurs valeurs numériques. C'est la raison pour laquelle nous allons recourir à un autre critère qui est moins informatif car plus synthétique, mais qui permettra une comparaison aisée des trois

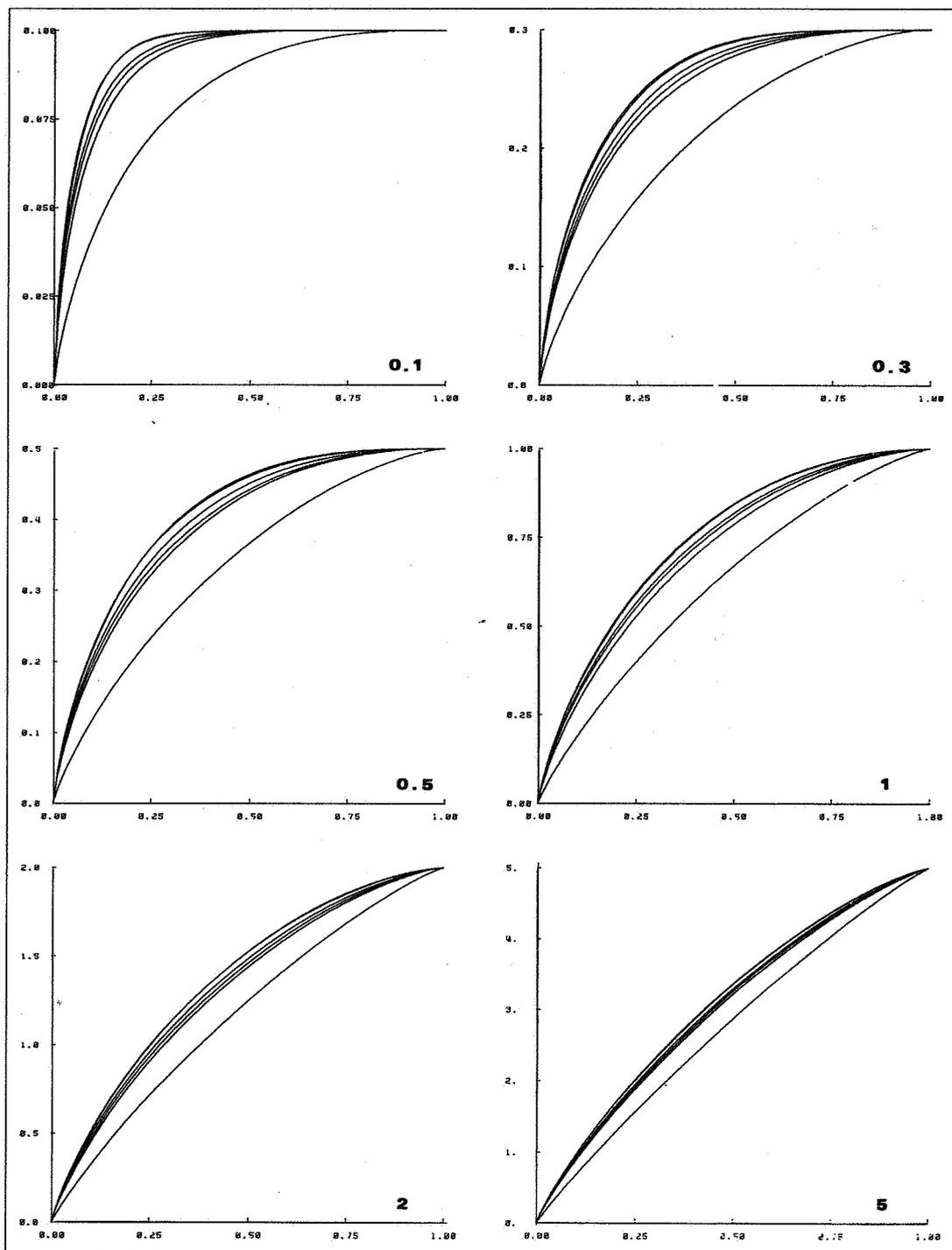


Figure 9 - Courbes tonnage/teneur associées à la mesure aléatoire orthogonale régularisée. Taille des supports : 0, 0.1, 0.5, 0.75, 1 et 5.

modèles. Ce critère repose sur la notion de dispersion que nous présentons dès maintenant.

## 1 - LA DISPERSION

Soit  $f$  une densité de probabilité positive. On appelle dispersion de  $f$  le nombre

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} |y-z| f(y) f(z) dy dz$$

qui s'écrit aussi

$$S = \frac{1}{2} E(|Y-Z|)$$

si  $Y$  et  $Z$  sont deux variables aléatoires indépendantes de même loi  $f$ .

Statistiquement parlant, la notion de dispersion est assez proche de celle de variance. Toutefois, elle présente sur cette dernière un certain nombre d'avantages. Tout d'abord la dispersion existe dès que la moyenne existe ( $S \leq m$ ), ce qui n'est pas le cas de la variance. Par ailleurs, du point de vue de l'inférence statistique, il est plus facile d'estimer la dispersion qui met en jeu une simple moyenne que la variance qui est une moyenne quadratique.

Si  $f$  admet une variance finie  $\sigma^2$ , Matheron (1981) a établi l'inégalité isopérimétrique

$$S \sqrt{3} \leq \sigma$$

et même  $S \sqrt{\pi} \leq \sigma$  dans le cas où  $f$  est infiniment divisible.

Comment en pratique évaluer  $S$ ? Ceci peut se faire par simulation, mais dans bien des cas le calcul est possible. Par exemple, si  $f = g_\alpha$ , Matheron (1982) a montré que

$$S = \frac{\Gamma(\alpha + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha)}$$

Plus généralement, supposons que  $f$  soit caractérisée par sa transformée de Laplace  $\phi$ . Pour déterminer  $S$ , Matheron propose la méthode suivante: partons de l'intégrale

$$|h| = 4 \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos 2\pi u h}{4\pi^2 u^2} du$$

qui n'est autre que la représentation spectrale d'un variogramme linéaire sur  $\mathbb{R}$ . Alors

$$S = \frac{1}{2} E(|Y-Z|) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - E[\cos u(Y-Z)]}{u^2} du$$

Or  $E[\cos u(Y-Z)] = E\{e^{iu(Y-Z)}\} = \phi(iu) \phi(-iu)$ . Par conséquent  $S$  se met sous la forme intégrale

$$S = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \phi(iu) \phi(-iu)}{u^2} du$$

qu'il est facile de calculer par des méthodes numériques.

## 2 - LA SELECTIVITE

Comme d'habitude, on désigne par  $T(y)$  et  $Q(y)$  le tonnage et la quantité de métal sélectionnés à la coupure  $y$  :

$$T(y) = \int_y^{+\infty} f(z) dz \quad Q(y) = \int_y^{+\infty} z f(z) dz$$

On sait que la courbe tonnage/teneur ( $T, Q(T)$ ) est une fonction concave passant par les points  $(0,0)$  et  $(1,m)$ . Elle est d'autant plus éloignée de la droite  $Q(T) = m T$  que  $f$  est sélective (Matheron, 1981). Ceci nous amène à prendre en considération l'intégrale

$$I = \int_0^1 [Q(T) - m T] dT$$

qui correspond à l'aire hachurée de la figure 10.

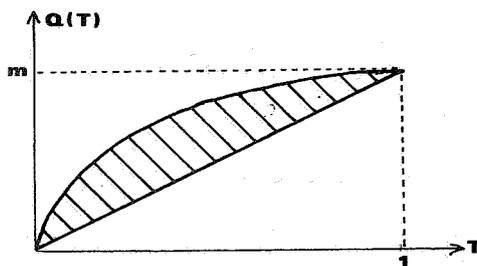


Figure 10 - On caractérise la sélectivité d'une loi par l'aire limitée par la courbe tonnage/teneur et la droite  $Q = mT$ .

Sur cette figure, on voit immédiatement que l'intégrale I se met sous la forme

$$I = \frac{1}{2} \left[ \int_0^1 Q(T) dT - \int_0^m T(Q) dQ \right]$$

Introduisant la coupure y comme nouvelle variable, I apparaît proportionnelle à la moyenne de la valeur conventionnelle du minerai :

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} [Q(y) - y T(y)] f(y) dy$$

En remplaçant alors Q(y) et T(y) par leur expression intégrale, on obtient :

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \int_y^{\infty} (z-y) f(z) f(y) dz dy$$

ce qui se réécrit plus symétriquement :

$$I = \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} |y-z| f(y) f(z) dy dz$$

et finalement on obtient  $I = \frac{1}{2} S$ .

Nous avons reproduit à la figure 11 les courbes de sélectivité des trois processus que nous avons présentés. Afin de disposer de courbes bornées en abscisse comme en ordonnée pour toutes les tailles de support et pour toutes les valeurs du paramètre, nous avons adopté un système de coordonnées un peu particulier. En abscisse, nous avons pris la réduction de variance due au changement de support. L'abscisse varie donc de 1 à 0 lorsque le support, ponctuel au départ, croît jusqu'à l'infini. Pour une réduction de variance égale à  $\rho$  ( $0 < \rho \leq 1$ ), il existe une et une seule taille de support  $t$  qui vérifie  $\frac{\sigma_t^2}{\sigma_0^2} = \rho$ .  $t$  étant alors donnée, nous avons reporté en ordonnée le rapport  $\frac{S_t}{\sigma_t}$  qui reste toujours inférieur à  $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$  pour une loi infiniment divisible.

Plusieurs constatations s'imposent: tout d'abord, des trois processus le plus sélectif est certainement le processus d'Ambarzumian; le moins sélectif est la diffusion. Du point de vue de la sélectivité, la mesure orthogonale régularisée proche d'Ambarzumian aux faibles valeurs de  $\alpha$ , tend à se rapprocher de la diffusion quand  $\alpha$  croît. Mais par dessus tout, il convient d'insister sur les fluctuations de la sélectivité que l'on observe: atténuées lorsque  $\alpha$  est grand (les pro-

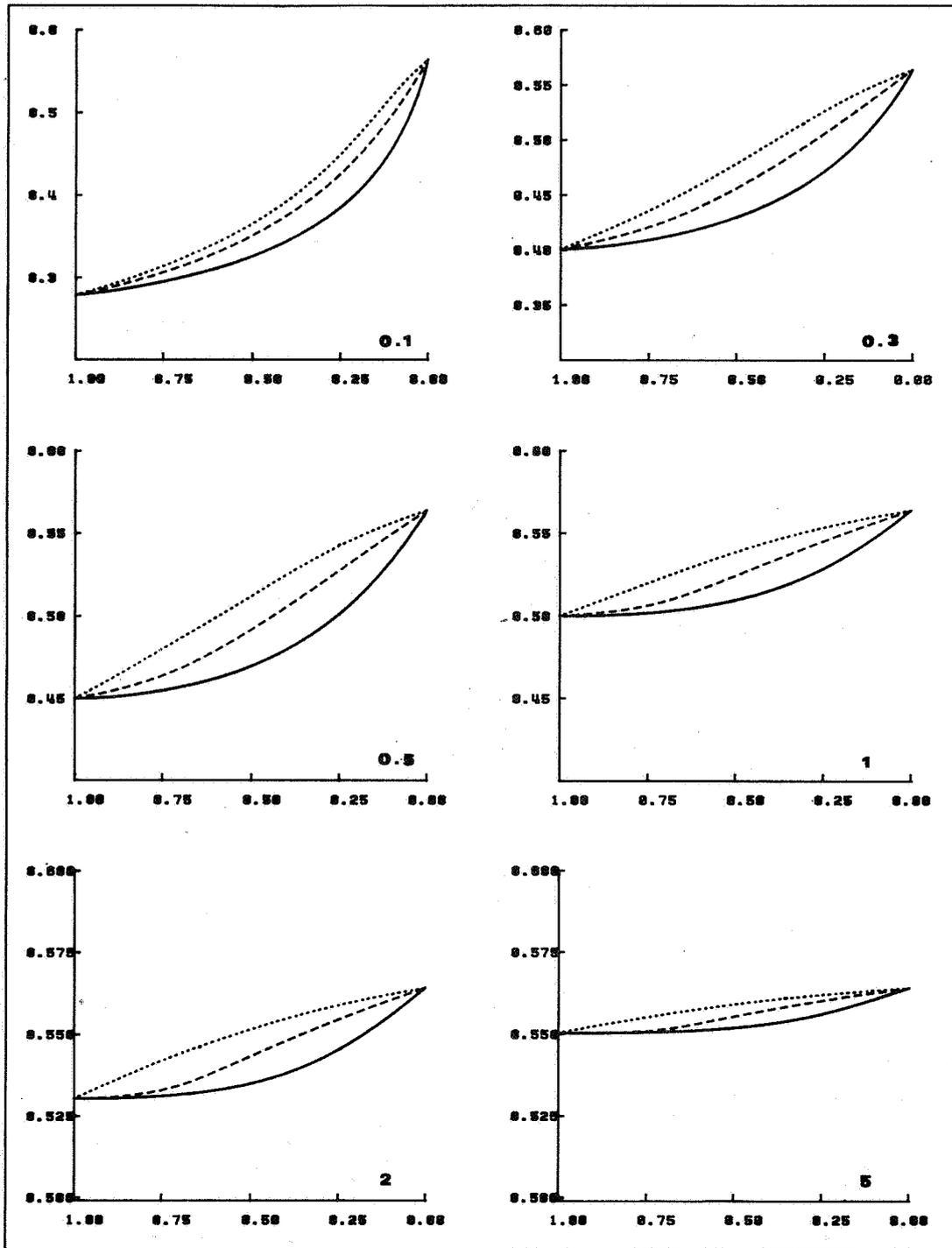


Figure-11 - Courbes de sélectivité en fonction de la réduction de variance due au changement de support

- ..... processus d'Ambarzumian
- mesure aléatoire orthogonale régularisée
- processus de diffusion

cessus devenant progressivement gaussiens), elles peuvent dépasser 15 % pour  $\alpha = 0.1$ . Ces fluctuations parfois considérables, montrent à quel point le choix d'un modèle est important.

Nous n'avons pas représenté sur la figure 11 les courbes de sélectivité associées à la correction affine. Il s'agit tout simplement de segments horizontaux. En effet, si  $\frac{Y_t - m}{\sigma_t} \equiv \frac{X_o - m}{\sigma}$ , alors  $\frac{s_t}{\sigma_t} = \frac{s_o}{\sigma}$ .

## BIBLIOGRAPHIE

- J. JACOD (1969) - Sur un modèle simple de sédimentation détritique - Note interne CGMM, N-125.
- G. MATHERON (1969) - Les processus d'Ambarzumian et leur application en géologie - Note interne CGMM, N-131.
- J. VON NEUMANN (1951) - Various techniques used in connection with random digits - U.S. Nat. Bur. Stand. Appl. Math. Ser. N° 12, pp. 36-38.
- J.H. AHRENS et U. DIETER (1974) - Computer methods for sampling from gamma, beta, Poisson and binomial distributions - Computing, 12, pp. 223-246.
- R.C.H. CHENG (1977) - The generation of gamma variables - Appl. Stat., 26, pp. 71-75.
- G. MATHERON (1975) - Compléments sur les modèles isofactoriels - Note interne CGMM, N-432.
- G. MATHERON (1984) - Modèles isofactoriels et changement de support - Sciences de la Terre, Série Informatique Géologique N° 18, pp. 73-124.
- I. GUIKHMAN et A. SKOROKHOD (1980) - Introduction à la théorie des processus aléatoires - Ed. Mir.
- V.A. AMBARZUMIAN (1944) - On the brightness fluctuations in the milky way - Doklady Akad. Nauk USSR, Vol. 44, pp. 223-226.
- G. MATHERON (1973) - Le krigeage disjonctif - Note interne CGMM, N-360.
- G. MATHERON (1981) - La sélectivité des distributions - Note interne CGMM, N-686.
- G. MATHERON (1982) - La déstructuration des heutes teneurs et le krigeage des indicatrices - Note interne CGMM, N-761.

