

FONTAINEBLEAU-CG

N-17/90/G

Ergodicité et portée intégrale

Ch. LANTUEJOUL

Août 1990

ERGODICITE ET PORTEE INTEGRALE

Ch. Lantuéjoul

*Centre de Géostatistique
35 rue Saint Honoré
77305 Fontainebleau*

Résumé: Cet article porte sur l'estimation de grandeurs stéréologiques associées à un certain phénomène physique et accessibles à partir d'échantillons (sections polies ou lames minces par exemple). Quelle taille de champ convient-il d'analyser de façon à ce que les mesures recueillies soient représentatives du phénomène étudié? C'est pour répondre à cette question que le concept de portée intégrale est introduit. Un tel concept permet de comparer deux échelles, celle du phénomène et celle de son observation. L'évaluation de la portée intégrale se fait en traçant une courbe de variance de dispersion. Incidemment, cette courbe peut également fournir une loi empirique de changement d'échelle.

Mots-clefs: Géostatistique, portée intégrale, variance de dispersion, ergodicité, changement d'échelle, modèles non fractals.

1 Introduction

L'objet de cet article est l'évaluation de moyennes spatiales connues sous le nom de grandeurs spécifiques en Stéréologie. Une telle évaluation soulève deux types de difficultés. La première, non étudiée ici, est de nature quantitative. Il n'est pas toujours facile ni même possible d'effectuer des mesures spatiales. La deuxième, qui retiendra toute notre attention, est de nature statistique. En Microscopie Quantitative, il arrive fréquemment que les objets d'étude (e.g. lames minces ou sections polies) soient beaucoup trop grands pour être analysés de façon exhaustive. On se borne alors à effectuer des analyses sur des échantillons prélevés, ce qui ne manque pas de soulever le problème de la représentativité des mesures obtenues.

Ce problème de représentativité des mesures se pose en fait à deux niveaux bien différenciés:

i) si les échantillons sont remplacés par d'autres échantillons de taille plus grande, il importe que les mesures obtenues ne soient pas significativement

différentes.

ii) si l'on peut disposer non pas d'un, mais de plusieurs objets d'étude élaborés sous les mêmes conditions expérimentales, les mesures obtenues sur les différents échantillons doivent être approximativement les mêmes.

C'est dans le cas où ces deux conditions sont satisfaites que l'on pourra prétendre avoir atteint une grandeur spécifique.

En toute rigueur, une grandeur spécifique est une caractéristique d'une fonction aléatoire stationnaire ergodique (en abrégé Faste). Physiquement parlant, la stationnarité exprime que les réalisations de la Faste possèdent une certaine homogénéité spatiale, ce qui garantit la validité de la condition i). L'ergodicité quant à elle énonce que l'inférence statistique est possible à partir d'une seule réalisation, ce qui correspond précisément à la condition ii). De sorte que le passage d'une mesure sur échantillon à la grandeur spécifique correspondante s'effectue en deux étapes:

i) on considère que l'objet d'étude est une réalisation d'une Faste. Cette hypothèse garantit à la fois l'existence de la grandeur spécifique que l'on cherche à évaluer, ainsi que la possibilité de son inférence statistique.

ii) on suppose que les échantillons sont connus dans un domaine V suffisamment grand pour que la valeur explicite de la grandeur spécifique puisse être obtenue avec une bonne précision.

Mais la grandeur spécifique recherchée existe-t-elle vraiment? Si oui, peut-on l'obtenir avec une bonne précision?

L'objet de cet article est une tentative de réponse à ces deux questions. Nous les aborderons tour à tour, mais dans l'ordre inverse. Dans un premier temps, nous admettrons l'existence de la grandeur spécifique. Nous considérerons le problème de son estimation à partir d'échantillons, et nous regarderons tout particulièrement comment varie la précision sur cette estimation en fonction de la taille V des échantillons, et cela aux grandes tailles de V . Cette partie donnera l'occasion de rappeler quelques propriétés liées à l'ergodicité et d'introduire le concept de portée intégrale qui joue un rôle essentiel dans le calcul de la précision. Les résultats obtenus seront repris dans une deuxième partie où nous regarderons dans quelle mesure les échantillons disponibles permettent d'infirmer ou non l'hypothèse de l'existence d'une grandeur spécifique.

2 Estimation de la valeur moyenne d'une Faste

Pour fixer les idées, partons d'une fonction aléatoire stationnaire $(Z_x)_{x \in \mathbb{R}^d}$ de moyenne ponctuelle m , de variance ponctuelle σ^2 et de fonction de corrélation ρ . Toutes ces quantités sont inconnues. La seule chose connue est une réalisation $(z_x)_{x \in V}$ de Z dans le champ V . Nous cherchons à évaluer m .

Pour ce faire, on peut penser à considérer l'approximation

$$z(V) = \frac{1}{|V|} \int_V z_x dx$$

mais cette approche n'est pas pleinement satisfaisante dans la mesure où l'on ne sait pas donner la précision d'une telle approximation. Cela vient de la circonstance générale suivante: à partir d'un jeu de données seulement, il n'est pas possible d'en déduire à la fois une approximation ainsi que sa précision (Matheron, 1969). Pour donner une précision, il faut disposer d'une information supplémentaire, par exemple d'un modèle. Or dans le cas présent, nous disposons d'un modèle. Il s'agit de la fonction aléatoire Z . Dans ce contexte aléatoire, nous sommes amenés à considérer l'estimateur

$$Z(V) = \frac{1}{|V|} \int_V Z_x dx$$

Il n'est pas difficile d'établir que cet estimateur est sans biais

$$E\{Z(V)\} = m$$

Quant à sa variance, elle vaut:

$$Var\{Z(V)\} = \frac{\sigma^2}{|V|^2} \int_V \int_V \rho(x-y) dx dy$$

Il convient ici de s'arrêter un instant sur le sens physique de cette variance. Il s'agit d'une valeur moyenne prise sur l'ensemble des réalisations. En d'autres termes, il s'agit de la précision moyenne que l'on est en droit d'attendre si la même procédure d'estimation est effectuée un très grand nombre de fois.

On aurait bien envie que la précision moyenne devienne parfaite lorsque le domaine V s'étend à l'infini. Malheureusement, il n'en est pas toujours ainsi, comme le montre l'exemple suivant: soit Y une variable aléatoire, et posons $Z_x = Y$. Alors $Z(V) = Y$, de sorte que $Var\{Z(V)\} = Var\{Y\}$ qui ne tend pas vers 0 lorsque V tend vers l'infini.

C'est la raison pour laquelle le concept d'ergodicité est introduit. Par définition, on dit que la fonction aléatoire Z est *ergodique* si $Var\{Z(V)\}$ tend vers 0 lorsque les dimensions du domaine V deviennent infinies.

Ainsi, l'ergodicité peut se récrire

$$E\{|Z(V) - m|^2\} \rightarrow 0$$

ce qui s'exprime en disant que la variable $Z(V)$ converge en moyenne quadratique vers m . Pour obtenir une interprétation physique intuitive de l'ergodicité,

exprimons cette espérance en intégrale, faisant ainsi apparaître les diverses réalisations ω de la fonction aléatoire:

$$\lim_{V \rightarrow \infty} \int_{\Omega} [Z(V, \omega) - m]^2 dP(\omega) = 0$$

Maintenant, si la fonction aléatoire vérifie quelques conditions de régularité, il est licite d'inverser l'intégrale et la limite, si bien que

$$\int_{\Omega} \lim_{V \rightarrow \infty} [Z(V, \omega) - m]^2 dP(\omega) = 0$$

Or, ceci ne peut se faire que si

$$\lim_{V \rightarrow \infty} [Z(V, \omega) - m]^2 = 0 \quad P - ps$$

ou en d'autres termes

$$\lim_{V \rightarrow \infty} Z(V, \omega) = m \quad P - ps$$

Ainsi, l'hypothèse d'ergodicité ne fait qu'exprimer la possibilité d'atteindre la moyenne m à partir d'une réalisation unique, et cela pour presque toutes les réalisations.

Donnons ci-dessous deux propriétés équivalentes à l'ergodicité qui peuvent servir à son établissement:

- On a la formule de Slutsky (citée dans Yaglom, 1986)

$$\lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{|V|} \int_V \rho(h) dh = 0$$

qui exprime que les corrélations entre la valeur en un point quelconque de l'espace et la valeur moyenne dans le domaine V s'éteignent lorsque V devient très grand.

- On sait qu'une fonction de corrélation est de type positif, condition qui exprime que les variances des combinaisons linéaires des variables sont non négatives. Un théorème dû à Bochner énonce qu'une fonction de type positif est la transformée de Fourier d'une mesure positive sommable

$$\rho(h) = \int_{\mathbb{R}^d} \exp\{-i \langle u, h \rangle\} \chi(du)$$

On peut montrer (cf. Annexe 1) que la fonction aléatoire est ergodique si et seulement si la mesure χ n'a pas d'atome à l'origine. En guise d'illustration, si

on revient au cas $Z_x = Y$ cité plus haut, la limite de Slutsky est 1. La mesure associée n'est autre que la mesure de Dirac à l'origine.

Ainsi donc, l'ergodicité est nécessaire pour établir la convergence de l'estimateur de la moyenne dans V . En revanche, cette propriété d'ergodicité ne permet en aucun cas de savoir pour quelle taille de champ V la variance de $Z(V)$ peut être considérée comme négligeable. C'est le rôle qui va être imparti à la portée intégrale.

3 La portée intégrale

Commençons par deux exemples pour souligner l'importance du problème.

A la Figure 1 on peut voir la réalisation d'une Faste qui a été obtenue par simulation (cf. Annexe 4 pour le procédé de construction). Cette réalisation dégage une très grande impression d'homogénéité spatiale. Ce que l'on voit est une texture.

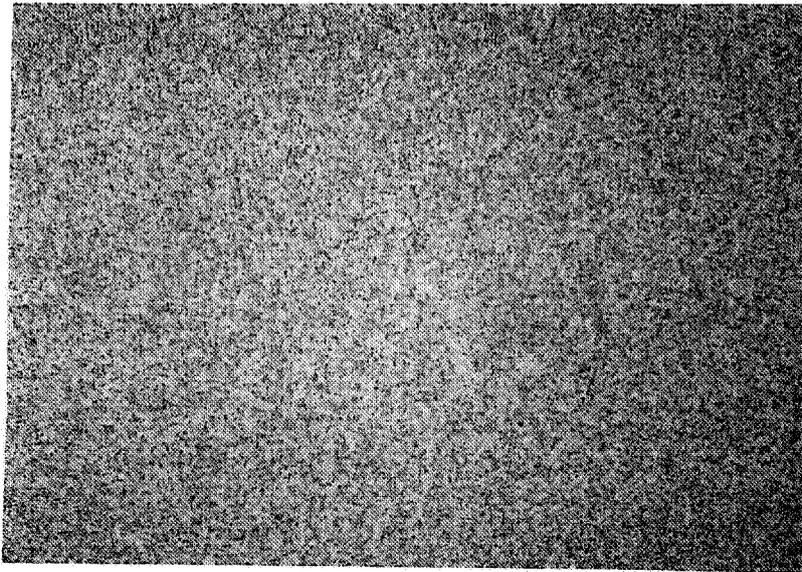
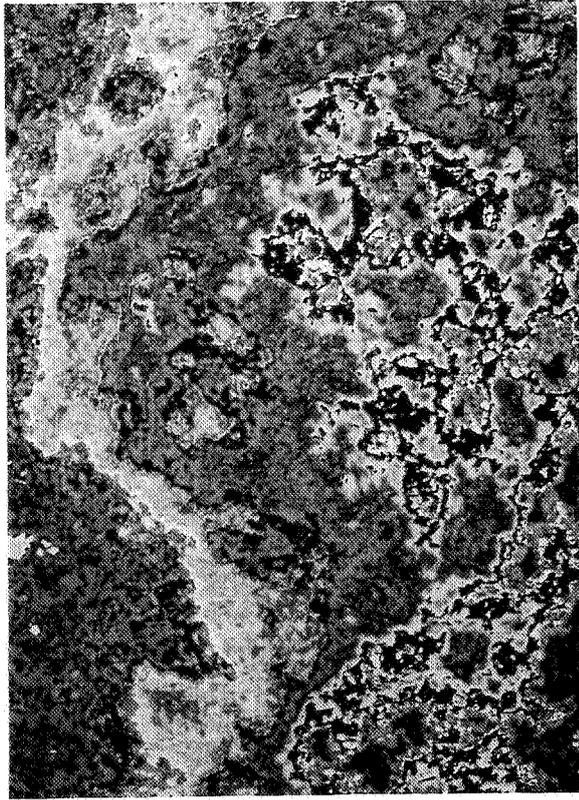
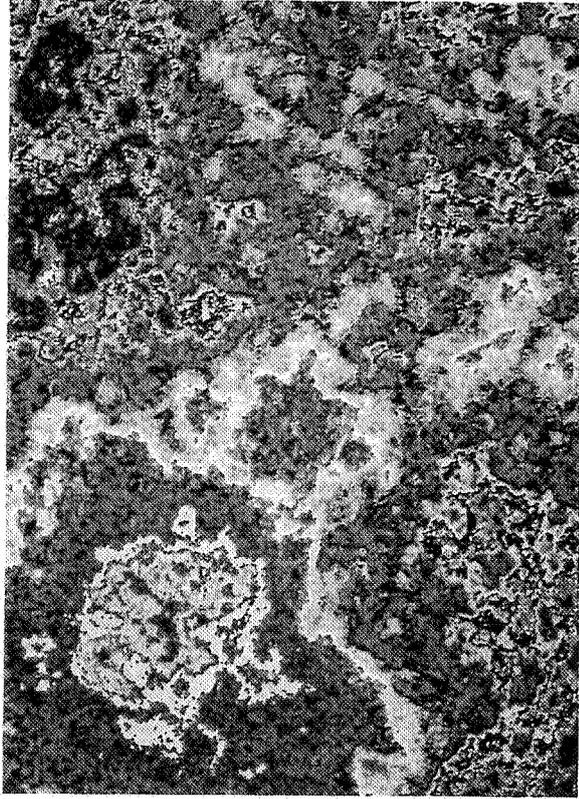


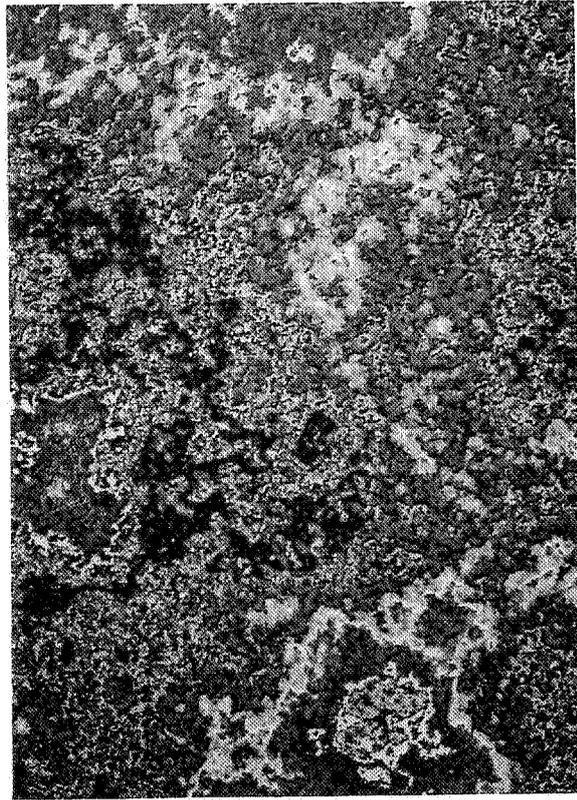
Figure 1: Exemple de réalisation d'une Faste. De la très grande impression d'homogénéité spatiale se dégage une impression de texture.



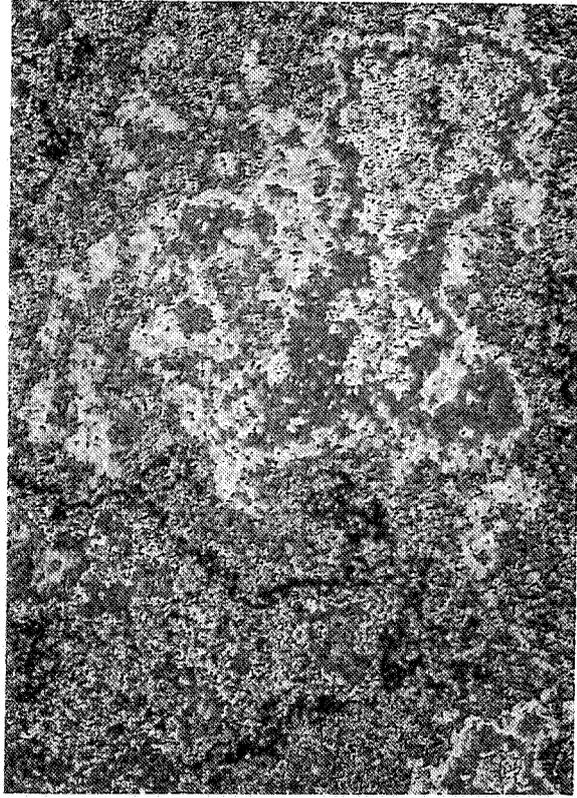
(1)



(2)



(3)



(4)

Figure 2: Exemple de réalisation d'une Faste observée à quatre échelles différentes. A chaque échelle, de nouvelles structures apparaissent, interdisant toute impression d'homogénéité spatiale.

La Figure 2 quant à elle est la réalisation d'une autre Faste (en fait, il s'agit du même modèle de Faste, mais avec des paramètres différents). Ici, au contraire, on n'a plus du tout l'impression d'homogénéité spatiale. Nous avons représenté la réalisation à 4 échelles doubles l'une de l'autre, et à chaque échelle on assiste à l'émergence de nouvelles structures. Qu'est ce qui fait que ces réalisations paraissent aussi différentes?

A la Figure 1, il est frappant de constater à quel point il est difficile de prévoir la valeur prise en un point lorsque l'on connaît la valeur en un autre point suffisamment éloigné. L'effet de mélange est tel que la variance de la valeur moyenne dans un domaine V décroît très vite en fonction de la taille de V . On n'observe rien de tel à la Figure 2. La présence de chenaux à toutes les échelles fait que deux points même éloignés peuvent avoir une corrélation non négligeable. Pour la même raison, la variance dans un domaine V assez grand peut être très différente de 0. Au fond, ce qui différencie les deux réalisations, c'est la différence de vitesse de décroissance de la fonction de corrélation aux grandes distances.

On a vu au paragraphe précédent la définition de l'ergodicité

$$\lim_{V \rightarrow \infty} \text{Var}\{Z(V)\} = 0$$

On définit la *Portée Intégrale* par la formule

$$A = \lim_{V \rightarrow \infty} |V| \frac{\text{Var}\{Z(V)\}}{\sigma^2}$$

Cette quantité peut très bien ne pas exister. Lorsqu'elle existe, il s'agit d'une quantité non négative (mais éventuellement infinie) qui a la dimension d'un d-volume (d'où la terminologie de longueur de corrélation, ou bien de surface de corrélation etc... qu'on trouve parfois dans la littérature (Yaglom, 1986)). La Figure 1 correspond à une Faste de portée intégrale finie, la Figure 2 à une Faste de portée intégrale infinie.

Quel sens physique attribuer à la portée intégrale? Si $A < +\infty$, on peut écrire aux grandes tailles de V

$$\text{Var}\{Z(V)\} \approx \frac{\sigma^2 A}{|V|}$$

Si de plus $A \neq 0$, on peut trouver un nombre entier N tel que

$$\frac{|V|}{A} \approx N$$

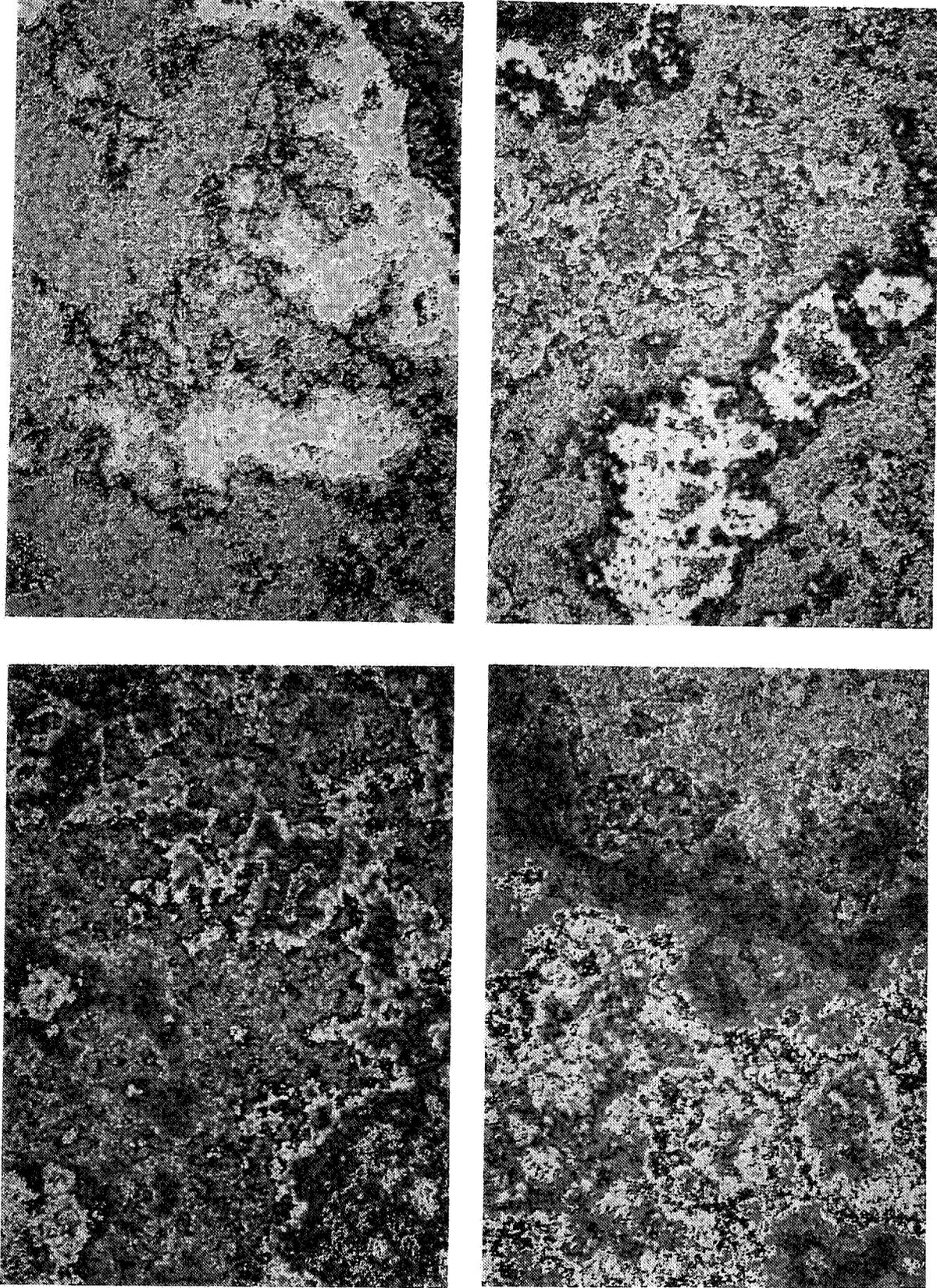


Figure 3: Quatre réalisations indépendantes d'une Faste de portée intégrale infinie. Les fluctuations entre les différentes réalisations sont considérables. Le domaine sur lequel chaque réalisation est connue est beaucoup trop petit pour permettre une estimation précise de la moyenne de la Faste.

de sorte que

$$\text{Var}\{Z(V)\} \approx \frac{\sigma^2}{N}$$

Or, cette formule approximative n'est autre que la variance de la moyenne de N points indépendants. Tout se passe donc comme si le domaine V avait été découpé en N domaines indépendants de même taille A . C'est la raison pour laquelle on attribue à A le sens de l'échelle du phénomène. Le champ V joue quant à lui le rôle de l'échelle d'observation.

Nous avons consigné en Annexe 2 quelques formules pour la portée intégrale dans le cas où la fonction de corrélation est intégrable. Mais plus important est de connaître le comportement de la variance de $Z\{(V)\}$ aux grandes tailles de V , car c'est sur lui que reposera la procédure d'échantillonnage. Nous avons vu que la variance est en $\frac{1}{|V|}$ si $0 < A < +\infty$. Dans le cas où $A = +\infty$, on sait que la variance décroît doucement. On doit donc s'attendre à un comportement plus lent qu'en $\frac{1}{|V|}$. Enfin, lorsque $A = 0$, le premier terme du développement limité de la variance en $\frac{1}{|V|}$ est nul, de sorte que le comportement sera certainement plus rapide qu'en $\frac{1}{|V|}$.

A titre d'illustration, estimer la moyenne de la Faste à partir de la réalisation donnée Figure 1 ne présentera pas de difficulté particulière. Il n'en est certainement pas de même pour la réalisation de la Figure 2. Pour montrer l'ampleur des fluctuations, nous avons reproduit Figure 3 plusieurs réalisations indépendantes de la même Faste de portée intégrale infinie. Le domaine sur lequel les réalisations sont connues est manifestement beaucoup trop petit pour permettre une estimation précise de la moyenne de la Faste.

4 Mise en oeuvre pratique

Revenons au problème tel qu'il se rencontre dans la pratique. On dispose d'un objet d'étude confectionné selon un certain procédé d'élaboration, et partiellement reconnu par quelques échantillons. L'on se demande s'il existe une grandeur spécifique attachée à ce procédé d'élaboration (et pas à l'objet d'étude). Si oui, comment l'estimer avec une précision donnée à l'avance. Nous adopterons ici la démarche préconisée par Matheron dans "Estimating and Choosing" (1988).

Considérons pour cela les échantillons comme réalisation dans un domaine V d'une Faste Z . Dans le cadre de ce modèle, la grandeur spécifique en question s'identifie à la moyenne ponctuelle de la Faste. On admet donc dans un premier temps l'existence de cette grandeur spécifique, et l'on en testera les implications. Supposons que le domaine V puisse être décomposé en une réunion disjointe de

sous-domaines v_1, \dots, v_k , tous de la même forme et de la même taille qu'un champ v . Dans chaque sous-domaine v_i , la fonction aléatoire a pour moyenne

$$Z_i = \frac{1}{|v|} \int_{v_i} Z_x dx$$

où $|v|$ désigne le volume de v_i . La variance des Z_i dans V n'est autre que la variance de dispersion

$$\sigma^2(v|V) = \text{Var}\{Z(v)\} - \text{Var}\{Z(V)\}$$

Supposons maintenant que la portée intégrale soit finie et non nulle, et que v soit très grand vis à vis de A . Dans ce cas, les formules d'approximation sont valides pour $\text{Var}\{Z(v)\}$ comme pour $\text{Var}\{Z(V)\}$, et l'on obtient:

$$\sigma^2(v|V) \approx \sigma^2 A \left(\frac{1}{|v|} - \frac{1}{|V|} \right)$$

et si maintenant V a été découpé en un nombre assez grand de sous-domaines (par exemple une cinquantaine), alors $\frac{1}{|V|}$ peut être négligé devant $\frac{1}{|v|}$, et il reste

$$\sigma^2(v|V) \approx \frac{\sigma^2 A}{|v|}$$

Ainsi la variance de dispersion apparaît-elle inversement proportionnelle au volume des sous-domaines.

Cette formule peut être testée expérimentalement. Pour chaque découpage de V en sous-domaines, on commence par déterminer la valeur moyenne z_i de la réalisation dans chaque sous-domaine v_i , puis on forme la variance des z_i qui est une variance expérimentale de dispersion

$$s^2(v|V) = \frac{\sum_i z_i^2}{k} - \left(\frac{\sum_i z_i}{k} \right)^2$$

et l'on trace la courbe de dispersion expérimentale en fonction de la taille du sous-domaine en coordonnées bilogarithmiques.

Nous avons tenté cette expérience sur des échantillons qui sont les réalisations données aux Figures 1 et 2. En ce qui concerne la première réalisation, les points expérimentaux sont représentés à la Figure 4. Plusieurs de ces points apparaissent sur la même verticale, correspondant à des sous-domaines rectangulaires de même surface, mais d'allongement différent. En tout cas, ces points s'alignent pratiquement en une droite de pente -1 . Il s'agit d'une observation parfaitement cohérente avec le modèle, et rien donc n'empêche d'affirmer que l'échantillon étudié est un morceau de la réalisation d'une Faste de portée

intégrale finie non nulle. Le produit $\sigma^2 A$ peut être estimé comme la valeur prise par la droite au point $|v| = 1$. Compte tenu alors de ce que

$$\text{Var}\{Z(V)\} \approx \frac{\sigma^2 A}{|V|}$$

il n'est pas difficile de choisir V de façon à ce que la variance soit inférieure à une valeur donnée à l'avance.

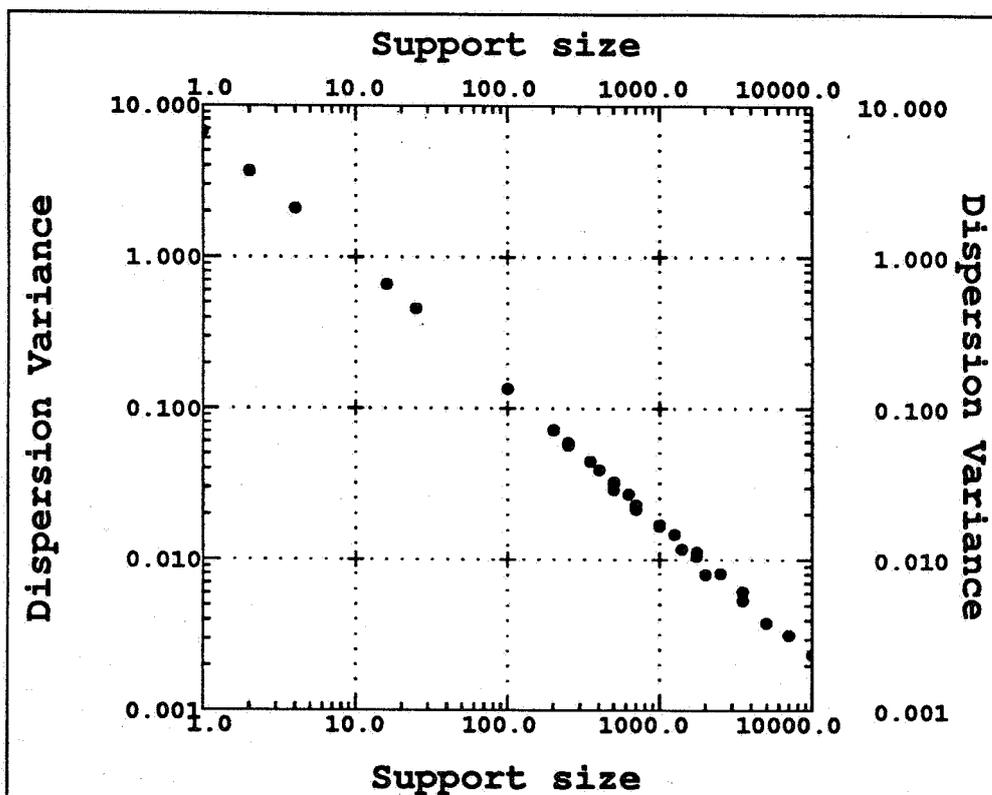


Figure 4: Points expérimentaux donnant la variance de dispersion en fonction de la taille des sous-domaines. L'alignement des points en une droite de pente -1 est cohérent avec le modèle d'une Faste de portée intégrale finie et non nulle. La moyenne de la Faste peut être estimée avec une très bonne précision.

Remarque: Il peut paraître curieux de passer par l'estimation d'une quantité qui dépend essentiellement de moments d'ordre 2 (des variances), alors que le problème initial qui nous concernait était l'évaluation d'un simple moment

d'ordre 1 (la moyenne m). Or précisément, la possibilité de calcul de la portée intégrale servira de gage de stabilité pour l'estimation de m .

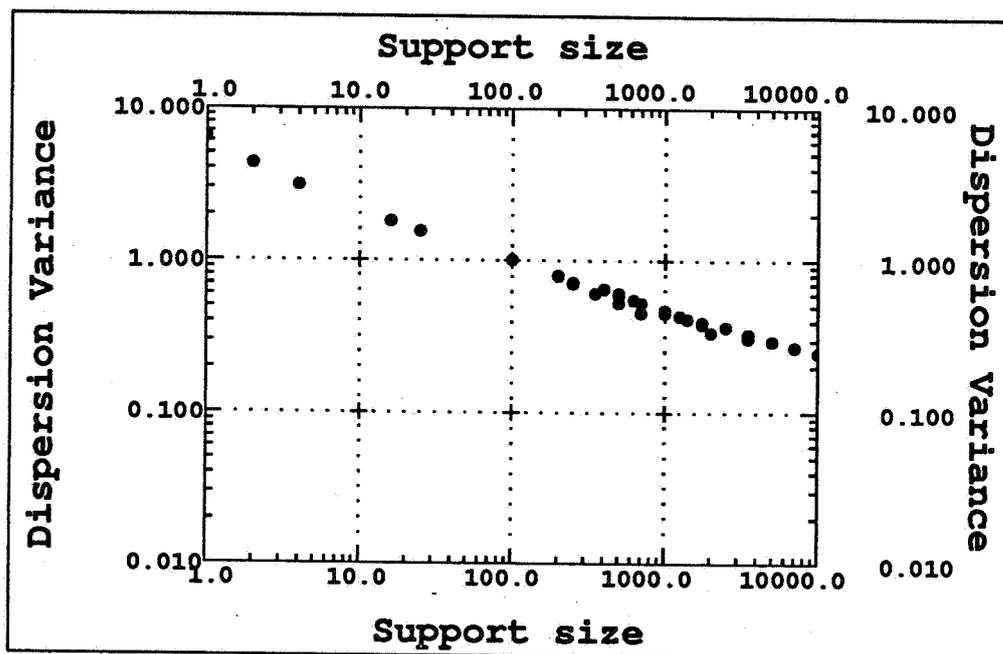


Figure 5: Points expérimentaux donnant la variance de dispersion en fonction de la taille des sous-domaines. Les points non alignés en une droite de pente -1 infirment l'hypothèse d'une Faste de portée intégrale finie et non nulle. Dans un tel cas, il est préférable de renoncer à l'existence d'une grandeur spécifique.

Rien de tel avec l'échantillon de la Figure 2. Les points expérimentaux obtenus ont été reproduits Figure 5. Ils suggèrent plusieurs commentaires:

- Tout d'abord, les points ne s'alignent pas sur une droite de pente -1 . L'hypothèse d'une Faste de portée intégrale finie non nulle ne trouve donc pas confirmation dans ses implications. Il se peut que la taille des sous-domaines ne soit pas suffisamment grande vis-à-vis de la portée intégrale, de sorte que la formule d'approximation n'est pas légitime. Mais il se peut également que certains éléments du modèle doivent être reconsidérés, tels que le caractère fini de la portée intégrale, voire la stationnarité. Avec une portée intégrale infinie, tout au mieux peut-on espérer estimer la moyenne de la Faste entâchée d'une grosse imprécision. Il n'en va pas du tout de même en l'absence de stationnarité, car dans un tel cas l'existence même d'une moyenne (donc d'une grandeur

spécifique) est remise en cause. Or à partir du seul jeu d'échantillons, il n'est pas possible d'explicitier les raisons de cet accroc au modèle. Aussi devons-nous renoncer à attribuer une existence effective à la grandeur spécifique.

- La courbe expérimentale obtenue Figure 5 est pratiquement linéaire, ce qui suggère une formule empirique du type

$$s^2(v|V) \approx \frac{K}{|v|^\alpha}$$

c'est-à-dire une formule empirique de changement d'échelle. Le coefficient α qui régit la pente de la droite est clairement inférieur à 1. Comme prévu, la variance décroît tout doucement en fonction de la taille des sous-domaines.

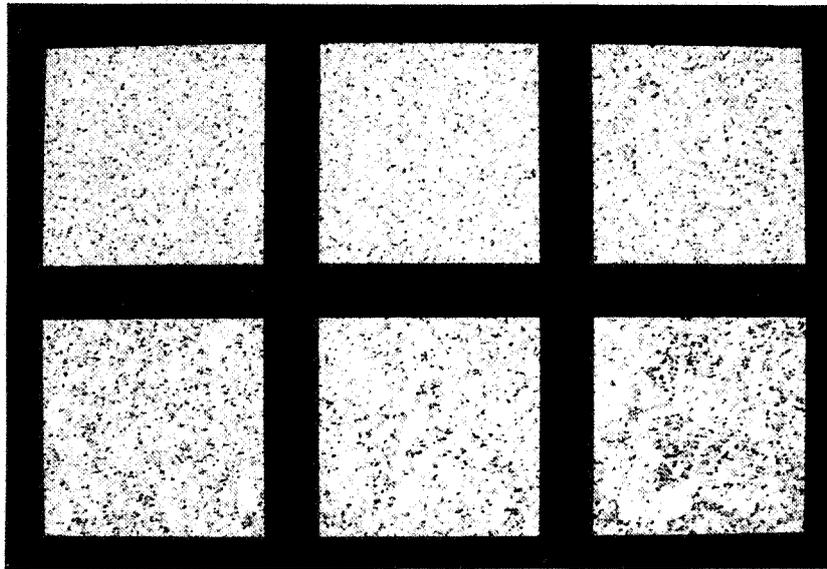


Figure 6: Par variation continue d'un paramètre, on peut passer d'une Faste de portée intégrale finie à une Faste de portée intégrale infinie. Les trois réalisations du haut correspondent à une portée intégrale finie, les trois du bas à une portée intégrale infinie.

5 Quelques remarques

Au vu des exemples montrés dans cet article, on peut penser qu'il y a une différence d'aspect considérable entre des réalisations d'une Faste de portée intégrale finie et une Faste de portée intégrale infinie. La différence peut parfois être ténue, comme le montre la Figure 6.

Au cours de l'article, nous avons évoqué l'existence de Faste de portée intégrale nulle. Un exemple en est donné à la Figure 7. Il s'agit d'une fonction aléatoire de dilution (cf. Annexe 4). Conformément à ce qui avait été annoncé, la variance décroît plus vite qu'en $\frac{1}{r}$ (cf. Figure 8).

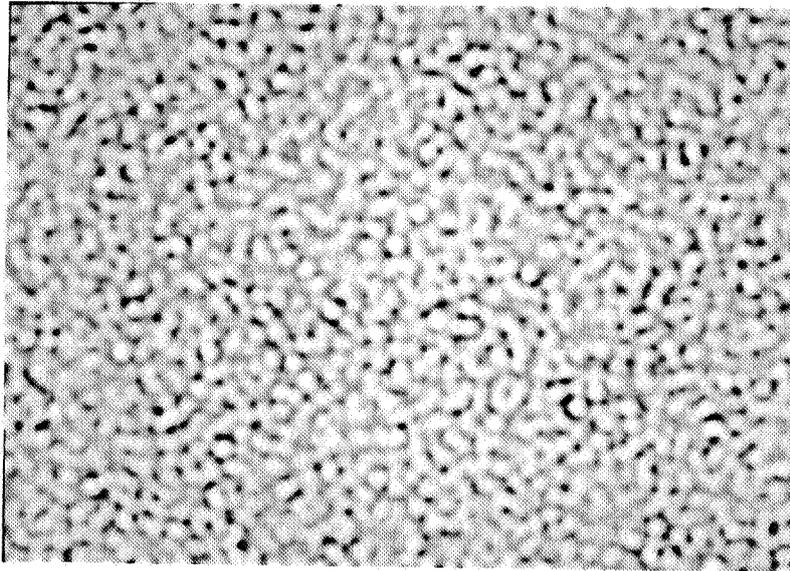


Figure 7: Réalisation d'une Faste de portée intégrale nulle (fonction aléatoire de dilution).

Il convient également de mentionner la possibilité d'évaluer des portées directionnelles. Si Z est une Faste de \mathbb{R}^d , sa restriction à \mathbb{R}^e ($e < d$) est encore une Faste et l'on peut donc évaluer sa portée intégrale dans \mathbb{R}^e . Il se peut que la portée intégrale soit finie dans certaines directions et infinie dans d'autres. A titre d'exemple, considérons une fonction aléatoire de fonction de corrélation

$$\rho(h) = \frac{1}{1 + |h|^2}$$

dans \mathbb{R}^3 . Sa portée intégrale est infinie. En revanche, prise comme fonction de \mathbb{R} , sa portée intégrale est finie. Cela voudrait-il dire que l'estimation de la moyenne se passera mieux avec des échantillons monodimensionnels plutôt que tridimensionnels?

Dans le cas monodimensionnel, la variance associée à un segment de longueur r très grande est en $\frac{1}{r}$. Dans le cas tridimensionnel, la variance associée à une

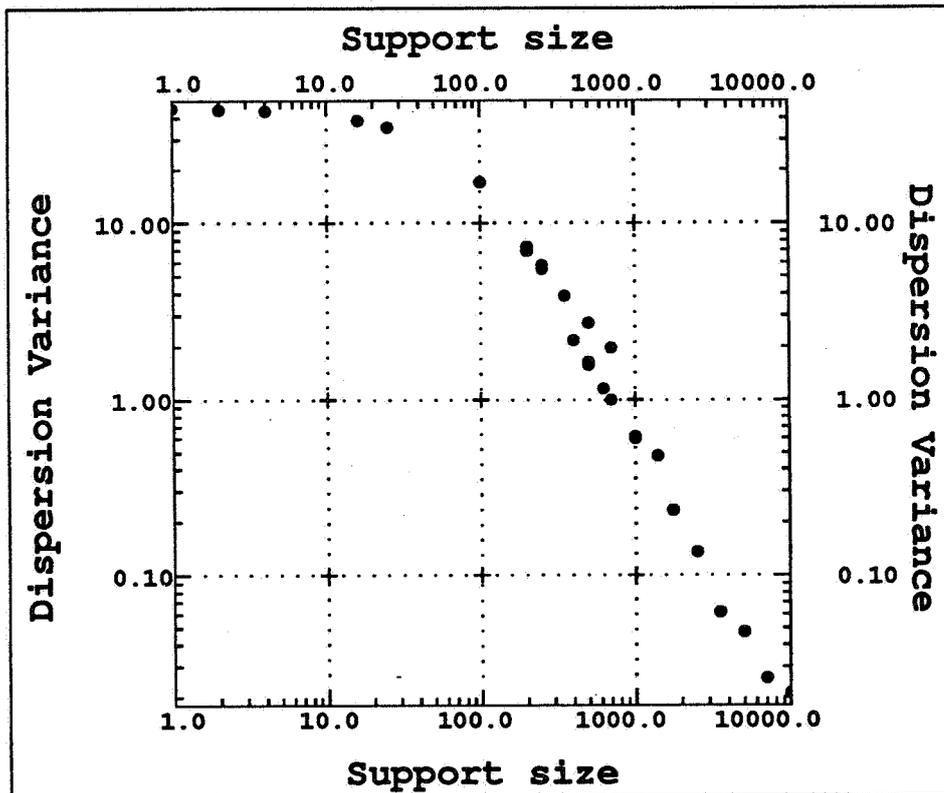


Figure 8: Points expérimentaux donnant la variance de dispersion en fonction de la taille des sous-domaines, à partir d'un échantillon qui est une réalisation d'une Faste de portée intégrale nulle. Aux grandes tailles des sous-domaines, la décroissance est particulièrement rapide.

boule de rayon r (toujours très grand) décroît plus lentement que $\frac{1}{r}$ puisque la portée intégrale est infinie. Un simple calcul montre que cette variance est en $\frac{1}{r^2}$. Même si la variance ne décroît pas aussi vite que l'on pourrait escompter, il vaut quand même mieux faire l'estimation dans \mathbb{R}^3 plutôt que dans \mathbb{R} !

6 Conclusions

La difficulté qu'il y a d'évaluer une grandeur spécifique réside dans ce qu'une telle grandeur est une caractéristique d'un modèle, et que l'on ne dispose pour ce faire que de mesures expérimentales obtenues sur des échantillons. L'ergodicité est nécessaire pour garantir l'existence, au niveau du modèle, de la grandeur

spécifique. Pour lui attribuer une existence autre que conventionnelle, il faut d'une part que les données fournies par les échantillons soient en adéquation avec le modèle, et que les échantillons soient suffisamment grands pour permettre l'inférence statistique d'autre part. A ce niveau, la portée intégrale s'avère particulièrement utile, car elle permet la comparaison entre l'échelle d'un phénomène et celle de son observation. On peut évaluer la portée intégrale en traçant des courbes de variance de dispersion qui incidemment fournissent des lois empiriques de changement d'échelle.

References

- Berger, M. (1978) Géométrie 3. Cedic/Nathan, Paris.
- Feller, W. (1971) An introduction to Probability Theory and its Applications, Vol. 2. Wiley, New York.
- Lantuéjoul Ch. (à paraître) Fonctions aléatoires de substitution.
- Matheron G. (1965) Les variables régionalisées et leur estimation. Masson, Paris.
- Matheron G. (1975) Random sets and Integral geometry. Wiley, New-York.
- Matheron G. (1978) La formule de Steiner pour les érosions. J. Appl. Prob., 15, 126-135.
- Matheron G. (1989) Estimating and Choosing. Springer-Verlag, Berlin.
- Yaglom A.M. (1986) Correlation Theory of Stationary and Related Random Functions. Springer Series in Statistics, New York.

Annexe 1: L'ergodicité

Commençons par rappeler la définition de l'ergodicité qui a été adoptée pour cet article. La variance de la moyenne dans un bloc tend vers 0 lorsque les dimensions du bloc deviennent très grandes:

$$\lim_{V \rightarrow \infty} \text{Var}\{Z(V)\} = 0$$

Il convient bien sûr de préciser ce que l'on entend par $\lim_{V \rightarrow \infty}$. Ici, les V désignent des compacts de \mathbb{R}^d , et l'on dira que la suite $(V_n)_{n \geq 0}$ converge vers \mathbb{R}^d si les deux conditions suivantes sont réalisées:

- i) les V_n convergent vers \mathbb{R}^d au sens des fermés (Matheron, 1975). Cela signifie que pour tout point x de \mathbb{R}^d , on a $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x, V_n) = 0$.
- ii) pour tout compact W , le rapport entre le volume de l'érodé de V_n selon W et le volume de V_n tend vers 1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|V_n \ominus W|}{|V_n|} = 1$$

Physiquement parlant, ii) signifie que les V_n peuvent être morcelés, mais que les morceaux sont pour l'essentiel de grande taille. Le recouvrement de l'espace, quant à lui, est assuré par i). Ce mode de convergence n'est pas très restrictif. Il s'applique aussi bien aux suites croissantes de boules ou de parallélépipèdes, qu'aux suites des homothétiques d'un compact d'intérieur non vide. On pourra voir en fin de cette Annexe la démonstration de ce qu'une suite de compacts convexes converge vers \mathbb{R}^d dès que la condition i) est satisfaite.

Commençons par deux lemmes techniques:

Lemme 1 *Soit V un compact de \mathbb{R}^d , et soit K son covariogramme géométrique. La transformée de Fourier de l'indicatrice 1_V de V vérifie en chaque point u non nul de \mathbb{R}^d l'inégalité*

$$|\hat{1}_V(u)| \leq \inf [K(0) - K(h)]$$

la borne inférieure étant prise sur tous les points h de \mathbb{R}^d tels que $\langle u, h \rangle = -\pi$.

Démonstration: Soit $h \in \mathbb{R}^d$ tel que $\langle u, h \rangle = -\pi$. Puisque $e^{-i\langle u, h \rangle} = -1$, on peut écrire

$$\hat{1}_V(u) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle u, x \rangle} 1_V(x) dx = - \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle u, x+h \rangle} 1_V(x) dx$$

Un changement de variable dans la deuxième intégrale donne

$$\hat{1}_V(u) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle u, x \rangle} 1_V(x) dx = - \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle u, x \rangle} 1_{V_h}(x) dx$$

Par addition, on obtient

$$2\hat{1}_V(u) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle u, x \rangle} [1_V(x) - 1_{V_h}(x)] dx$$

ce qui conduit à l'inégalité

$$2|\hat{1}_V(u)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |1_V(x) - 1_{V_h}(x)| dx$$

Or

$$\int_{\mathbb{R}^d} |1_V(x) - 1_{V_h}(x)| dx = \int_{\mathbb{R}^d} [1_V(x) - 1_{V_h}(x)]^2 dx = 2[K(0) - K(h)]$$

Ce qui conduit à l'inégalité de l'énoncé.

Lemme 2 Soit $(V_n, n \in \mathbb{N})$ une suite de compacts de \mathbb{R}^d qui converge vers \mathbb{R}^d . Alors les transformées de Fourier des V_n vérifient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{|V_n|} |\hat{1}_{V_n}(u)| = 1_{\{0\}}(u)$$

Démonstration: Comme $\hat{1}_{V_n}(0) = |V_n|$, le cas $u = 0$ est immédiat. Supposons donc $u \neq 0$, et posons $h = -\pi u / |u|^2$. D'après le lemme 1, on a

$$|\hat{1}_{V_n}(u)| \leq K_n(0) - K_n(h)$$

où les K_n désignent les covariogrammes géométriques des V_n . Divisons les deux membres par $|V_n|$

$$\frac{1}{|V_n|} |\hat{1}_{V_n}(u)| \leq 1 - \frac{K_n(h)}{K_n(0)}$$

et faisons tendre maintenant n vers l'infini. La condition ii) de convergence des V_n entraîne

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{K_n(h)}{K_n(0)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|V_n \ominus \{0, h\}|}{|V_n|} = 1$$

d'où le résultat annoncé.

Venons en maintenant à l'énoncé qui figure dans le corps de l'article.

Théoreme 1 *Si Z est une fonction aléatoire stationnaire ergodique, les trois assertions suivantes sont équivalentes:*

- i) la variance de $Z(V)$ tend vers 0 quand V tend vers l'infini.*
- ii) la covariance entre Z_0 et $Z(V)$ tend vers 0 quand V tend vers l'infini.*
- iii) la mesure spectrale associée à la fonction aléatoire n'a pas d'atome à l'origine.*

Démonstration: i) est simplement la définition de l'ergodicité. En ce qui concerne les deux autres assertions, la démonstration va être établie grâce à l'implication i) \implies ii) ainsi qu'aux équivalences ii) \iff iii) et i) \iff iii).

• L'implication dans le sens i) \implies ii) est aisée en vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwarz:

$$[Cov\{Z_0, Z(V)\}]^2 \leq \sigma^2 Var\{Z(V)\}$$

• Pour montrer l'équivalence entre ii) et iii), il nous suffira d'établir

$$\lim_{V \rightarrow \infty} Cov\{Z_0, Z(V)\} = \sigma^2 \chi(\{0\})$$

où χ désigne la mesure spectrale associée à la fonction de corrélation ρ . D'après le théorème de Bochner, on sait que ρ peut s'écrire:

$$\rho(h) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle h, u \rangle} \chi(du)$$

Soit V un compact quelconque. On a:

$$Cov\{Z_0, Z(V)\} = \frac{\sigma^2}{|V|} \int_V \rho(h) dh = \frac{\sigma^2}{|V|} \int_V \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle h, u \rangle} \chi(du) dh$$

ce qui donne, après permutation des intégrales

$$Cov\{Z_0, Z(V)\} = \frac{\sigma^2}{|V|} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{1}_V(u) \chi(du)$$

où $\hat{1}_V$ est la transformée de Fourier de l'indicatrice de V .

Considérons maintenant une suite de compacts V_n qui converge vers \mathbb{R}^d . Les intégrants étant bornés par 1 et χ étant une mesure sommable, la limite peut passer sous l'intégrale, et l'on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Cov}\{Z_0, Z(V_n)\} = \sigma^2 \int_{\mathbb{R}^d} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{|V_n|} \hat{1}_{V_n}(u) \chi(du)$$

Il suffit alors d'appliquer le lemme 2, ce qui donne

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Cov}\{Z_0, Z(V_n)\} = \sigma^2 \int_{\mathbb{R}^d} 1_{\{0\}}(u) \chi(du) = \sigma^2 \chi(\{0\})$$

• Pour établir l'équivalence entre i) et iii), la démarche est analogue. On va établir également que

$$\lim_{V \rightarrow \infty} \text{Var}\{Z(V)\} = \sigma^2 \chi(\{0\})$$

Partant de

$$\text{Var}\{Z(V)\} = \frac{\sigma^2}{|V|^2} \int_V \int_V \rho(x-y) dx dy$$

on exprime ρ à l'aide de son développement spectral, et l'on arrive à

$$\text{Var}\{Z(V)\} = \frac{\sigma^2}{|V|^2} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{1}_V(u) \hat{1}_V(-u) \chi(du) = \frac{\sigma^2}{|V|^2} \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{1}_V(u)|^2 \chi(du)$$

Si maintenant $(V_n, n \in \mathbb{N})$ est une suite de compacts qui converge vers \mathbb{R}^d , alors

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Var}\{Z(V_n)\} &= \sigma^2 \int_{\mathbb{R}^d} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{|V_n|^2} |\hat{1}_{V_n}(u)|^2 \chi(du) \\ &= \sigma^2 \int_{\mathbb{R}^d} 1_{\{0\}}(u) \chi(du) = \sigma^2 \chi(\{0\}) \end{aligned}$$

Pour clore cette Annexe, on établit le résultat suivant:

Proposition 1 Soit $(V_n, n \in \mathbb{N})$ une suite de compacts convexes de \mathbb{R}^d qui converge au sens des fermés vers \mathbb{R}^d . Alors pour tout compact W , on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|V_n \ominus W|}{|V_n|} = 1$$

Démonstration: Comme tout compact est contenu dans une boule, il suffira d'établir la proposition uniquement pour des boules. Soit donc ρB une boule de rayon ρ . La convexité de l'application $\rho \mapsto |V_n \ominus \rho B|$ (Matheron, 1978) a pour conséquence

$$|V_n| - \rho |\partial V_n| \leq |V_n \ominus \rho B| \leq |V_n|$$

où ∂V_n désigne la frontière de V_n . Après division par V_n , on obtient:

$$1 - \rho \frac{|\partial V_n|}{|V_n|} \leq \frac{|V_n \ominus \rho B|}{|V_n|} \leq 1$$

Tout revient donc à montrer que $|\partial V_n|/|V_n|$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

Soit λ_n le rayon de la boule inscrite dans V_n . Comme on a toujours

$$\frac{|\partial V_n|}{|V_n|} \leq \frac{d}{\lambda_n}$$

(Berger, 1978), il suffit de voir que λ_n tend vers l'infini.

On considère un hypercube de côté 4λ , où λ un nombre positif quelconque. Soit x_i ($i = 1, 2, \dots, 2^d$) un sommet quelconque de l'hypercube. D'après le mode de convergence des V_n , $d(x_i, V_n) \leq \lambda$ dès que $n \geq N_i$. Sous cette condition, il existe $x_{i,n} \in V_n$ tel que $d(x_i, x_{i,n}) \leq \lambda$. posons alors $N = \max(N_1, \dots, N_{2^d})$. Pour $n \geq N$, le convexe V_n contient l'enveloppe convexe des $x_{i,n}$, qui contient à son tour la boule de même centre que l'hypercube et de rayon λ . Nous avons ainsi établi que

$$\forall \lambda > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \lambda_n \geq \lambda$$

ce qui signifie exactement $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = +\infty$.

Annexe 2: Cas où la fonction de corrélation est intégrable

La portée intégrale a été définie par

$$A = \lim_{V \rightarrow \infty} |V| \frac{\text{Var}\{Z(V)\}}{\sigma^2}$$

avec le mode de convergence spécifié en Annexe 1. Nous allons établir le résultat suivant:

Théorème 2 Si $\rho \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors $A < +\infty$, et de plus

$$A = \int_{\mathbb{R}^d} \rho(h) dh = (2\pi)^d f(0)$$

où f désigne la densité spectrale de ρ .

Démonstration: soit $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de compacts qui converge vers \mathbb{R}^d . On a:

$$|V_n| \frac{\text{Var}\{Z(V_n)\}}{\sigma^2} = \frac{1}{|V_n|} \int_V \int_V \rho(x-y) dx dy = \int_{\mathbb{R}^d} \rho(h) \frac{K_n(h)}{K_n(0)} dh$$

où $K_n(h) = |V_n \cap (V_n)_h|$ désigne le covariogramme géométrique de V_n . Tous les intégrants sont majorés par la fonction intégrable $|\rho(h)|$. Par ailleurs, ces intégrants convergent simplement vers $\rho(h)$ (cf. le lemme 2 de l'Annexe 1). On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |V_n| \frac{\text{Var}\{Z(V_n)\}}{\sigma^2} = \int_{\mathbb{R}^d} \lim_{n \rightarrow +\infty} \rho(h) \frac{K_n(h)}{K_n(0)} dh = \int_{\mathbb{R}^d} \rho(h) dh$$

ce qui établit la première partie de l'énoncé.

Si $\rho \in L^1(\mathbb{R}^d)$, sa transformée de Fourier

$$\hat{\rho}(u) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle u, h \rangle} \rho(h) dh$$

est une fonction continue bornée et s'annulant à l'infini. Par ailleurs, comme $\rho^2(h) \leq |\rho(h)| \leq 1$, on a aussi $\rho \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Or, la transformée de Fourier est bijective sur L^2 . Plus précisément, on peut écrire

$$\rho(h) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle h, u \rangle} \hat{\rho}(u) du$$

Ainsi, $\hat{\rho}/(2\pi)^d$ est la densité spectrale de ρ . Il s'ensuit

$$A = \int_{\mathbb{R}^d} \rho(h) dh = \hat{\rho}(0) = (2\pi)^d \frac{\hat{\rho}(0)}{(2\pi)^d}$$

Remarque: le fait que A soit finie n'entraîne nullement que la fonction de corrélation soit intégrable. Prendre par exemple $\rho(h) = \cos h$ sur \mathbb{R} .

Annexe 3: Influence du comportement à l'origine de la densité spectrale sur la variance de $Z(V)$ aux grandes tailles de V

Dans ce qui suit, on désignera par λV l'homothétique de centre o et de rapport λ du domaine V .

Théoreme 3 Si la fonction de corrélation admet une densité spectrale de la forme

$$f(u) = \frac{g(u)}{|u|^\beta}$$

où g est une fonction continue bornée telle que $g(0) \neq 0$ et $0 < \beta < d$, alors

$$\text{Var}\{Z(\lambda V)\} \approx \frac{\sigma^2 g(0)}{\lambda^{d-\beta} |V|^2} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\hat{K}_V(u)}{|u|^\beta} du$$

lorsque λ est grand. En particulier la variance de $Z(V)$ est en $|V|^{\beta/d-1}$ aux grandes tailles de V .

Démonstration: Il s'agit donc d'établir que

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\text{Var}\{Z(\lambda V)\}}{\frac{\sigma^2 g(0)}{\lambda^{d-\beta} |V|^2} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\hat{K}_V(u)}{|u|^\beta} du} = 1$$

Nous allons commencer par donner une forme simple à la variance de $Z(\lambda V)$, puis nous étudierons le passage à la limite.

• Partons de la formule qui donne la variance de $Z(\lambda V)$ en fonction du covariogramme géométrique de λV :

$$\text{Var}\{Z(\lambda V)\} = \frac{\sigma^2}{|\lambda V|^2} \int_{\mathbb{R}^d} \rho(h) K_{\lambda V}(h) dh$$

Compte tenu de ce que $K_{\lambda V}(h) = \lambda^d K_V(h/\lambda)$, le changement de variable $h/\lambda \mapsto h$ permet d'écrire:

$$\text{Var}\{Z(\lambda V)\} = \frac{\sigma^2}{|V|^2} \int_{\mathbb{R}^d} \rho(\lambda h) K_V(h) dh$$

Remplaçons maintenant ρ par sa transformée de Fourier

$$\text{Var}\{Z(\lambda V)\} = \frac{\sigma^2}{|V|^2} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle \lambda h, u \rangle} f(u) K_V(h) du dh$$

et nous obtenons, après permutation des intégrales

$$\text{Var}\{Z(\lambda V)\} = \frac{\sigma^2}{|V|^2} \int_{\mathbb{R}^d} f(u) \hat{K}_V(\lambda u) du$$

ou encore

$$\text{Var}\{Z(\lambda V)\} = \frac{\sigma^2}{\lambda^d |V|^2} \int_{\mathbb{R}^d} f\left(\frac{u}{\lambda}\right) \hat{K}_V(u) du$$

• Etudions maintenant le passage à limite. Remplaçant $\text{Var}\{Z(\lambda V)\}$ par sa valeur, tout se ramène à montrer que

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\int_{\mathbb{R}^d} g\left(\frac{u}{\lambda}\right) \frac{\hat{K}_V(u)}{|u|^\beta} du}{\int_{\mathbb{R}^d} g(0) \frac{\hat{K}_V(u)}{|u|^\beta} du} = 1$$

ou, ce qui revient au même

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{g\left(\frac{u}{\lambda}\right) - g(0)}{|u|^\beta} \hat{K}_V(u) du = 0$$

Notons $I(\lambda)$ cette intégrale et décomposons la sous la forme $I(\lambda) = I_1(\lambda) + I_2(\lambda)$, avec

$$I_1(\lambda) = \int_{|u| \leq r} \frac{g\left(\frac{u}{\lambda}\right) - g(0)}{|u|^\beta} \hat{K}_V(u) du$$

$$I_2(\lambda) = \int_{|u| > r} \frac{g\left(\frac{u}{\lambda}\right) - g(0)}{|u|^\beta} \hat{K}_V(u) du$$

Soit ε un nombre positif quelconque. La fonction \hat{K}_V étant intégrable, il en est de même de $\hat{K}_V(u)/|u|^\beta$ (pas de problème en particulier à l'origine grâce à la condition $\beta < d$), et l'on peut trouver $r > 0$ tel que

$$\int_{|u| > r} \frac{|\hat{K}_V(u)|}{|u|^\beta} du < \frac{\varepsilon}{2M}$$

où M est la borne supérieure de $|g|$. Alors

$$|I_2(\lambda)| \leq 2M \int_{|u| > r} \frac{|\hat{K}_V(u)|}{|u|^\beta} du \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Fixons ainsi la valeur de r et passons à la limite de I_1 . Compte tenu de la continuité à l'origine de la fonction g , le théorème de convergence dominée de

Lebesgue s'applique, et l'on peut trouver $\lambda_0 > 0$ tel que l'on ait pour tout $\lambda > \lambda_0$

$$|I_1(\lambda)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

et finalement $|I(\lambda)| \leq \varepsilon$ dès que $\lambda > \lambda_0$, ce qui est la première partie de l'énoncé.

Soit maintenant V un grand domaine, de volume λ^d . Appliquons la formule d'approximation précédente à $V = \lambda W$. Alors:

$$\text{Var}\{Z(V)\} \approx \frac{\sigma^2 g(0)}{|\lambda W|^{1-\beta/d}} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\hat{K}_W(u)}{|u|^\beta} du$$

On trouve bien une décroissance moins rapide que $\frac{1}{|V|}$. Le coefficient associé à cette décroissance dépend de la forme de V .

Théoreme 4 *Si la fonction de corrélation admet une densité spectrale de la forme*

$$f(u) = g(u) |u|^\beta$$

où g est une fonction continue bornée telle que $g(0) \neq 0$, et β un nombre positif tel que $|u|^\beta \hat{K}_V(u)$ soit intégrable sur \mathbb{R}^d , alors

$$\text{Var}\{Z(\lambda V)\} \approx \frac{\sigma^2 g(0)}{\lambda^{d+\beta} |\lambda V|^2} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{K}_V(u) |u|^\beta du$$

lorsque λ est grand. En particulier le comportement de $\text{Var}\{Z(V)\}$ est en $|V|^{\beta/d+1}$.

Nous ne reproduisons pas ici la démonstration qui est fondamentalement la même. Signalons toutefois une différence importante entre les deux précédents énoncés: aucune valeur maximale ne peut être attribuée à β . La valeur maximale autorisée dépend en fait de la forme de V . Plus V a des contours réguliers, plus β pourra être grande.

Annexe 4: Modèles simulés

Dans cet article, les simulations qui ont été proposées à titre d'illustration proviennent de deux types de modèles différents. Il s'agit d'une part des fonctions aléatoires de *substitution*, et des fonctions aléatoires de *dilution* d'autre part. Nous allons donner une description succincte de chacune d'entre elles.

Fonction aléatoire de substitution

Une fonction aléatoire de substitution dans \mathbb{R}^2 est de la forme $Z = Y_X$ où $X = (X_x, x \in \mathbb{R}^2)$ est une fonction aléatoire à accroissements stationnaires, et $Y = (Y_t, t \in \mathbb{R})$ est une fonction aléatoire stationnaire et ergodique. Il se trouve que lorsque X et Y sont indépendantes, Z est stationnaire et ergodique (Lantuéjoul, à paraître). La loi marginale de Z est celle de Y . La corrélation entre Z_x et Z_{x+h} vaut:

$$\rho_Z(h) = E\{\rho_Y(X_{x+h} - X_x)\}$$

ρ_Y étant la fonction de corrélation de Y .

Bien sûr, de nombreux choix sont possibles pour X et pour Y . Dans les exemples proposés au long de cet article, nous avons pris pour Y un processus Markovien de naissance et de mort à nombre fini d'états (Feller, 1966). On sait que la fonction de corrélation d'un tel processus est de la forme

$$\rho_Y(t) = \sum_{n=1}^N \omega_n e^{-\lambda_n |t|}$$

avec $\lambda_n, \omega_n > 0$ et $\sum_{n=1}^N \omega_n = 1$.

En ce qui concerne X , nous sommes partis d'un réseau de droites Poissoniennes. Chaque droite d du réseau sépare le plan en deux demi-plans. Tous les points de l'un sont valués aléatoirement à U_d , tous les points de l'autre à $-U_d$. On définit ainsi une fonction aléatoire du plan, que l'on note V_d , et qui vaut U_d ou $-U_d$ (peu important les valuations des points de la droite d qui constituent un ensemble négligeable du plan). Procédons ainsi indépendamment pour toutes les droites du réseau. On pose conventionnellement $X_0 = 0$, puis

$$X_x = X_0 + \sum_{d \cap [0, x] \neq \emptyset} V_d(x)$$

Notons que c'est par un tel procédé que Mandelbrot (1975) parvient à simuler des fonctions aléatoires auto-homothétiques. Mais la fonction de substitution

Z obtenue n'est pas auto-homothétique puisque stationnaire. Elle n'est pas davantage fractale.

X et Y ayant ainsi été choisies, revenons à la détermination de la fonction de corrélation de Z :

$$\rho_Z(h) = \sum_{n=1}^N \omega_n E \left\{ e^{-\lambda_n |X_{x+h} - X_x|} \right\}$$

Le calcul de la transformée de Laplace de $|X_{x+h} - X_x|$ s'effectue en remarquant que la différence $X_{x+h} - X_x$ ne dépend que des droites qui coupent le segment $[x, x+h]$. Tous calculs faits, on trouve

$$E \left\{ e^{-\lambda |X_{x+h} - X_x|} \right\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2\mu|h|[\Phi(2\lambda u)-1]}}{1+u^2} du$$

où μ est la densité Poissonienne du réseau et Φ est la transformée de Fourier commune aux valuations U_d des demi-plans. On a ainsi obtenu:

$$\rho_Z(h) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+u^2} \sum_{n=1}^N \omega_n e^{2\mu|h|[\Phi(2\lambda_n u)-1]} du$$

Passons maintenant au calcul de la portée intégrale de Z . Puisque ρ_Z est positive, on peut poser

$$A = \int_{\mathbb{R}^2} \rho_Z(h) dh$$

cette intégrale prenant une valeur finie ou infinie. On passe en coordonnées polaires, ce qui donne

$$A = \frac{1}{\mu^2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^2} \sum_{n=1}^N \frac{\omega_n}{[\Phi(2\lambda_n u) - 1]^2} du$$

Pour des valuations en ± 1 , $\Phi(u) = \cos(u)$ et A est infini. C'est le cas de la Figure 2. Pour des valuations stables de paramètre α

$$\Phi(u) = e^{-|u|^\alpha} \quad (0 < \alpha \leq 2)$$

on vérifie que A est fini lorsque α est inférieur à 0.5 et infini sinon. Un tel résultat n'a rien de surprenant: plus α est faible, plus la loi des valuations est dissymétrique. La Figure 1 correspond au cas $\alpha = 0.47$.

Fonction aléatoire de dilution

Une fonction aléatoire de dilution est définie dans \mathbb{R}^2 par

$$Z_x = \sum_{y \in \mathcal{P}} f(x - y)$$

où \mathcal{P} est un processus de Poisson ponctuel dans \mathbb{R}^2 et f une fonction numérique. Z_x étant somme infinie de variables aléatoires, il importe d'imposer certaines conditions sur f pour éviter tout problème de convergence. Ces conditions sont que f et f^2 doivent être intégrables. Moyennant quoi, Z est une fonction stationnaire et ergodique. La fonction de covariance de Z est donnée par

$$C(h) = \mu \int_{\mathbb{R}^2} f(x) f(x + h) dx$$

μ étant la densité Poissonienne. La portée intégrale quant à elle prend la valeur

$$A = \frac{\left[\int_{\mathbb{R}^2} f(x) dx \right]^2}{\int_{\mathbb{R}^2} f^2(x) dx}$$

Il est donc possible de générer des fonctions de dilutions de portée intégrale nulle. Il suffit pour cela de prendre pour f une fonction d'intégrale nulle. Dans le cas de la Figure 8, nous avons fait choix de

$$f(x) = (|x|^2 - r^2)^2 (r^2 - 4|x|^2) 1_{|x| \leq r}$$