ECOLE DES MINES DE PARIS
CENTRE DE GÉOSTATISTIQUE

Fontainebleau CG C-75

L'estimation globale des réserves récupérables

G. MATHERON

Ecole d'Eté 1978

35, rue Saint-Honoré, 77305 FONTAINEBLEAU CEDEX – Téléphone 01 64 69 47 04 – Télécopieur 01 64 69 47 05

L'ESTIMATION GLOBALE DES RESERVES RECUPERABLES

-=-=-=-=-=-=-=-

TABLE

L'ESTIMATION GLOBALE DES RESERVES RECUPERABLES

0 - INTRODUCTION

Comment corriger l'effet de support et l'effet d'information ? Nous nous plaçons dans le cas le plus simple : celui d'une sélection libre à un seul niveau :

Effet de support : parmi les blocs de taille v existant dans le gisement, nous voulons prévoir le nombre et la teneur moyenne de ceux dont la teneur $Z(v)$ est $\geq z$. Autrement dit : nous souhaitons connaître la loi $F_v(dz)$ des teneurs des blocs de taille v.

Effet d'information : en réalité, la sélection n'opèrera pas sur les teneurs $Z(x)$ elles-mêmes (qui resteront inconnues au moment de la décision ultime), mais sur les estimateurs ultimes $Z^*(v)$ (formés, par krigeage ou par d'autres procédés, au moment où l'information ultime sera connue).

Pour prévoir le nombre des blocs que l'on sélectionnera en coupant à $Z^*(v) \geq z$, il suffit de connaître la loi $F_v^*(dz)$, à une seule variable, de cet estimateur ultime $Z^*(v)$. Par contre, pour prévoir la teneur moyenne des blocs ainsi sélectionnés, il faut de plus connaître la loi à deux variables $F(dz,dz^*)$ de $Z(v)$ et de son estimateur $Z^*(v)$, ou, au moins, l'espérance conditionnelle

$$h(z^*) = E[Z(v)|Z^*(v) = z^*]$$

de la teneur réelle $Z(v)$ du bloc lorsque celle de son estimateur est connue $Z^*(v) = z^*$.

Si l'estimateur ultime $Z^*(v)$ vérifie la condition de non biais conditionnel $z^* = h(z^*)$, il suffit donc de connaître la loi : $F_v^*(dz)$ de cet estimateur. Mais, en général, les estimateurs usuels ne vérifient pas cette condition (même le krigeage : si la variance de krigeage est petite, on peut souvent admettre $z^* = h(z^*)$ en première approximation, mais celà cesse d'être admissible si σ_K^2 est un peu grande).

Les éléments ci-dessus (loi F_v de $Z(v)$ pour l'effet de support ; loi F_v^* de $Z^*(v)$ et espérance conditionnelle $h(z^*)$ de $Z(v)$ à $Z^*(v) = z^*$) permettent d'effectuer les corrections voulues au niveau global, donc de prévoir la relation tonnage teneur globale du gisement :

$$\begin{cases} T_{v^*}(z) = N\,v \int_z^{\infty} F_v^*(dx) \\ Q_{v^*}(z) = N\,v \int_z^{\infty} h(x) F_v^*(dx) \end{cases}$$

Mais l'on désire souvent disposer de la même opération au niveau local, disons panneaux par panneaux. Il faut alors être capable d'estimer les lois précédentes (F_v^* ou F_v) conditionnellement à l'information disponible au voisinage de chaque bloc v à estimer.

Les données étant représentées par les teneurs Z_α, $\alpha = 1,2.$ des échantillons disponibles, il faut donc, en principe, connaître la loi à (n+1) variables $(Z^*(v), Z_1, \ldots Z_n)$: le problème se complique considérablement, et le recours à un modèle se révèle obligatoire [N.B. : c'est toujours à nos risques et périls que nous choisissons un modèle. Ce modèle, moyennant des calculs plus ou moins rapides mais faisables, nous fournit une solution. Maintenant que vaut cette solution ? Exactement autant que notre modèle. Si ce modèle est grossièrement faux, la "solution" correspondante risque d'être illusoire. L'expérience et la pratique en décident : les "bons" modèles sont justement ceux qui fournissent des solutions que la pratique ultérieure confirme].

1 - LA CORRECTION AFFINE

Pour apprécier l'<u>ordre de grandeur</u> de la correction <u>de support</u>, voici un procédé très rapide : A partir des données expérimentales (les teneurs ponctuelles Z_α), nous estimons la loi $F(dz)$ de ces teneurs, leur moyenne m, leur variance S^2, leur variogramme γ. Connaissant γ_1, nous pouvons aussi prévoir la variance $S_v^2 = S^2 - \bar{\gamma}(v,v)$ des blocs.

La loi F_v (inconnue) des blocs doit admettre cette moyenne m et cette variance S_v^2 : on peut donc en avoir une approximation grossière en resserrant la loi F autour de sa moyenne m, de manière à obtenir la variance voulue. Ce procédé consiste à admettre que les variables

$$Z(v) \quad \text{et} \quad m + \frac{S_v}{S}(Z-m)$$

ont la même loi, soit :

$$P(Z(v) \geq z) = 1-F_v(z) = 1-F(m + \frac{S}{S_v}(z-m))$$

En ce qui concerne la relation tonnage teneur <u>paramétrée en T</u> ($Q = Q(T)$ au niveau ponctuel, $Q_v = Q_v(T)$ pour les blocs v), partons de la relation

$$z(T) = \frac{dQ}{dT} \quad ; \quad z_V(T) = \frac{dQ_v}{dT}$$

Par construction, nous avons :

$$Z_v(T) = m + \frac{S_v}{S}[z(T)-m] \tag{1-1}$$

En intégrant en T, (et compte tenu de $Q(T) = Q_v(T) = 0$ en $T = 0$), il vient donc :

$$\begin{cases} Q_v(T) = (1 - \frac{S_v}{S})m\,T + \frac{S_v}{S}\,Q(T) \\ m_v(T) = (1 - \frac{S_v}{S})\,m + \frac{S_v}{S}\,m(T) \end{cases} \tag{1-2}$$

Ce paramétrage en T est donc facile à former. Pour en déduire le paramétrage en z, il faut effectuer le changement de variable (1-1) : Si $T(z)$ et $T_v(z)$ sont les tonnages de minerai coupé à z respectivement au niveau des carottes et des blocs, on a :

$$T_v(z) = T[m + \frac{S}{S_v}(z-m)]$$

On en déduit $Q_v(z)$ en substituant dans (1-2)

$$Q_v(z) = (1 - \frac{S_v}{S})m\ T_v(z) + \frac{S_v}{S}\ Q[T_v(z)]$$

On peut, de la même manière, estimer la loi F_v^* de l'estimateur futur $Z^*(v)$, à partir de sa moyenne (qui est toujours égale à la moyenne m) et de sa variance S^2_{v*} (que l'on sait calculer) : mais ce procédé <u>ne permet pas d'évaluer l'espérance conditionnelle</u> $h(z^*)$ des blocs. Donc, on pourra prévoir le tonnage sélectionné à $Z^*(v) \geq z$, mais non la quantité de métal correspondante - sauf si on admet (mais c'est une approximation déjà plus grossière) que $h(z*) = z*$ (par exemple : cas où $Z^*(v)$ est un krigeage et où la variance de krigeage est faible). Enfin, ce procédé ne permet absolument pas de reconstituer les lois à plusieurs variables ($Z^*(v)$, et Z_α), donc échoue radicalement en ce qui concerne les estimations locales. Il faut trouver autre chose. Pour nous orienter dans cette recherche, examinons le cas particulièrement favorable d'une FA (multi-)lognormale.

2 - LE CAS LOGNORMAL

Dans ce modèle, la FA $Z(x)$ représentant les teneurs ponctuelles est de la forme :

$$Z(x) = m\ e^{\sigma Y(x) - \frac{\sigma^2}{2}}$$

où $Y(x)$ est une FA gaussienne stationnaire, d'espérance nulle, de variance unité, dont la loi spatiale (multi-gaussienne) est donc déterminée par la covariance (= corrélogramme) :

$$\rho_{x,y} = \rho(x-y) = E(Y(x)Y(y))$$

Avec ces notations $m = E(Z(x))$ est l'espérance de la FA $Z(x)$, et σ^2 est la variance du logarithme (neperien) de $Z(x)$. La variance de $Z(x)$ et la covariance (centrée) de $Z(x)$ et $Z(y)$ sont alors :

$$\begin{cases} S^2 = m^2(e^{\sigma^2} - 1) \\ S_{xy} = m^2(e^{\sigma^2 \rho_{xy}} - 1) \end{cases}$$

Ce modèle (FA lognormale stationnaire) est assez souvent admissible pour certaines catégories de gisement à basse teneur (Uranium, Or, éventuellement cuivre, etc...) .

En ce qui concerne un bloc v, sa teneur est représentée dans ce modèle par la VA :

$$Z(v) = \frac{1}{v}\int_v Z(x)dx = m\,\frac{e^{-\sigma^2/2}}{v}\int_v e^{\sigma\, Y(x)}\,dx$$

En toute rigueur, $Z(v)$ ne peut pas être lognormale. Malgré cet interdit théorique, on constate très fréquemment que la loi de $Z(v)$ reste (à peu près) lognormale tant que la taille du bloc v n'est pas trop grande (permanence empirique de la lognormalité).

Compte tenu de cette permanence empirique, nous admettons donc le modèle suivant : $Z(v)$ est lognormale, soit :

$$Z(v) = m\, e^{\sigma_v Y_v - \frac{1}{2}\sigma_v^2}$$

où Y_v est une gaussienne réduite (= centrée, normée). Il reste à choisir σ_v^2 (variance logarithmique de $Z(v)$) de manière à ce que $Z(v)$ ait la variance correcte S_v^2. Donc :

$$S_v^2 = m^2(e^{\sigma_v^2} - 1), \text{ i.e. } \sigma_v^2 = \log(1 + \frac{S_v^2}{m^2})$$

Les avantages de ce modèle (lorsqu'il est valable) sont écrasants :

1/ Extrême simplicité du paramétrage

Dans tout ce qui suit, g et G désigneront la densité et la fonction de répartition de la loi de Gauss réduite :

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, e^{-\frac{y^2}{2}} \quad ; \quad G(y) = \int_{-\infty}^{y} g(x)dx$$

Alors (à un facteur près T_o, représentant le tonnage de minerai total, c'est-à-dire coupé à $z = 0$) et en posant :

$$y = \frac{1}{\sigma_v} \log \frac{z}{m} + \frac{1}{2} \sigma_v$$

(valeur de la gaussienne réduite Y_v associée à $Z(v) = z$), il vient

$$(2\text{-}1) \qquad \begin{cases} T_v(z) = 1 - G(y) \\ \\ Q_v(z) = m[1 - G(y - \sigma_v)] \end{cases}$$

[Exercice : établir ces formules]

2/ On peut prendre en compte l'effet d'information

En effet, supposons (par exemple) que l'estimateur ultime soit de la forme :

$$Z^*(v) = \sum_i \lambda_i \, Z(x_i)$$

$$\text{avec} \quad \sum \lambda_i = 1$$

(les $Z(x_i)$ représenteront les teneurs des échantillons voisins du bloc v et disponibles au moment de la sélection : par exemple, des trous de tir. Il n'est pas nécessaire, bien que ce soit recommandable, que cet estimateur soit le krigeage). Cette combinaison linéaire peut (au même titre que l'intégrale $Z(v)$ être assimilée à une VA lognormale, soit

$$(2\text{-}2) \qquad Z^*(v) = m \, e^{\sigma_v^* Y_v^* - \frac{1}{2} \sigma_v^{*2}}$$

où Y_v^* est une gaussienne réduite. Comme on sait calculer la variance S_{v*}^2 de $Z^*(v)$, on détermine σ_v^{*2} par :

$$S_{v*}^2 = m^2(e^{\sigma_v^{*2}} - 1)$$

Il reste à franchir un pas de plus en admettant que les deux VA, Y_v et Y_v^*, individuellement gaussiennes, obéissent ensemble <u>à une loi de Gauss à 2 variables</u>, caractérisée par un coefficient de corrélation

$$\rho = \rho_{vv*} = E(Y_v\ Y_v^*)$$

(N.B. : il s'agit réellement d'une hypothèse supplémentaire, d'ailleurs essentielle, et non d'une conséquence de ce qui précède : mais, si les lois des teneurs ponctuelles peuvent être considérées comme multi-lognormales, et si v n'est pas trop grand, cette nouvelle hypothèse (bilognormalité de $Z(v)$ et $Z^*(v)$) a toutes les chances d'être à peu près vérifiée).

On choisira ρ de manière à respecter la covariance S_{vv*} de $Z(v)$ et $Z^*(v)$ (que l'on sait calculer). Donc ρ est défini par

$$S_{vv*} = m^2[e^{\rho\ \sigma_v\ \sigma_{v*}} - 1]$$

Nous connaissons la loi (lognormale) de $Z^*(v)$, de moyenne m et de variance logarithmique σ_v^{*2}, voir (2-2).

Il reste à calculer l'espérance conditionnelle $h(z^*)$ de $Z(v)$ à $Z^*(v)$ fixé. On trouve :

$$h(z^*) = E[Z_v | Z_v^* = z^*] = m\ e^{\rho\ \sigma_v\ y^* - \frac{\rho^2\ \sigma_v^2}{2}} \tag{2-3}$$

avec, évidemment, y^* défini par

$$z^* = m\ e^{\sigma_v^*\ y^* - \frac{1}{2}\ \sigma_v^{*2}}$$

On en déduit le tonnage et la quantité de métal récupérable en coupant à $Z^*(v) \geq z^*$:

(2-4)
$$\begin{cases} T_{v^*}(z^*) = 1 - G(y^*) \\ Q_{v^*}(z^*) = m[1 - G(y^* - \rho\ \sigma_v)] \end{cases}$$

[Exercice : établir ces formules].

En comparant à (2-1), on voit que la perte de quantité de métal dûe à l'effet d'information se traduit par le remplacement de σ_v par $\rho\sigma_v$: soit, à $T = 1 - G(y)$ constant :

$$Q_v(z) - Q_{v^*}(z^*) = m\ [G(y-\rho\ \sigma_v) - G(y-\sigma_v)] > 0$$

Remarque : Lorsque l'estimateur vaut z^*, le minerai, en moyenne, vaut non pas z^* mais $h(z^*)$. La coupure sur $Z^*(v)$ fait donc illusion : si la teneur limite est θ, il faut couper sur l'estimateur $Z^*(v)$, non à θ, mais à la teneur z^* défini par $h(z^*) = \theta$, soit

$$z^* = m\ \left(\frac{\theta}{m}\right)^{\frac{\sigma_v^*}{\rho\sigma_v}} \exp\left(\frac{\rho^2\ \sigma_v^2 - \sigma_v^{*2}}{2}\right)$$

Il est plus simple de remplacer l'estimateur initial $Z^*(v)$ par :

$$H = h(Z^*(v)) = E(Z(v)/Z^*(v)]$$

Soit, explicitement

$$H = m\ \left(\frac{Z_v^*}{m}\right)^{\frac{\rho\sigma_v}{\sigma_v^*}} \exp\left(\frac{\sigma_v^{*2} - \rho^2\ \sigma_v^2}{2}\right)$$

H est lognormale, avec l'espérance m et la variance logarithmique

$$\sigma_h^2 = \rho^2\ \sigma_v^2$$

Si donc nous paramètrons à l'aide de la gaussienne réduite associée à h selon (2-3), i.e.

$$y = \frac{1}{\sigma_h} \log \frac{h}{m} + \frac{1}{2} \sigma_h$$

On retrouvera les formules (2-1) avec σ_h au lieu de σ_v:

$$(2\text{-}5) \qquad \begin{cases} T_v(h) = 1 - G(y) \\ Q_v(h) = m[1 - G(y-\sigma_h)] \end{cases}$$

3/ <u>Le paramètrage est possible au niveau local</u>

Enfin, il est possible d'obtenir la loi du bloc Z(v) et de son estimateur $Z^*(v)$ conditionnée par l'information disponible au voisinage du bloc v.

Si, en effet, les Z_α représentent les teneurs des échantillons disponibles et les Y_α les gaussiennes réduites qui leur sont associées, nous pouvons introduire l'hypothèse (supplémentaire) suivante : Y_v, Y_v^* et les Y_α ont une loi multigaussienne .

Cette loi multigaussienne sera entièrement déterminée par les données des coefficients

$$\rho_{v_\alpha} = E(Y_v \; Y_\alpha) \quad ; \quad \rho_{v*\alpha} = E(Y_v^* \; Y_\alpha)$$

(nous connaissons déjà ρ_{vv*}). On choisira, comme toujours, ces coefficients de manière à respecter les covariances (connues) S_{v_α} et $S_{v*\alpha}$, soit

$$\begin{cases} S_{v\alpha} = m^2[\; e^{\rho_{v\alpha} \; \sigma_v \; \sigma} - 1] \\ S_{v*\alpha} = m^2[\; e^{\rho_{v*\alpha} \; \sigma_v^* \; \sigma} - 1] \end{cases}$$

Le reste (la détermination des relations tonnage teneur conditionnées par les Z_α) est affaire de calculs faciles que l'on pourra effectuer à titre d'exercice.

Autre exercice proposé : krigeage lognormal. Au lieu de l'estimateur linéaire $Z^*(v) = \sum \lambda^i Z(x_i)$ étudié ci-dessus, on peut (théoriquement, c'est préférable ; en pratique, c'est plus compliqué et vraisemblablement moins robuste) utiliser l'espérance conditionnelle de $Z(v)$ lorsque les $Z(x_i)$ sont fixés, soit $Z'(v) = f(Z_i)$: montrer que $Z'(v)$ est encore lognormale, et transposer les résultats précédents.

3 - RECHERCHE D'UNE ANAMORPHOSE GAUSSIENNE

Si nous analysons les raisons du succès du modèle lognormal nous trouvons ceci : pour chacune de nos variables (teneur de bloc $Z(v)$, estimateur ultime $Z^*(v)$, teneurs ponctuelles $Z(x)$) nous avons trouvé une gaussienne (Y_v, Y_v^*, Y_x etc...) et une transformation ou anamorphose (φ_v, φ_{v*} etc...) telles que :

$$Z(v) = \varphi_v(Y_v) \quad \text{etc...}$$

et que ces différentes gaussiennes réduites obéissent, dans leur ensemble, à une loi multigaussienne. Le fait que ces anamorphoses se soient trouvées être du type particulier (exponentiel) $\varphi_v(y) = m \exp\{\sigma_v y - \sigma_v^2/2\}$ n'a joué, en réalité, aucun rôle, sinon pour simplifier les calculs. On peut donc espérer généraliser ce modèle qui nous a si bien réussi, et le rendre applicable à d'autres cas, non lognormaux. Voyons celà.

Au niveau ponctuel d'abord : il est essentiel que notre modèle soit une FA stationnaire $Z(x)$. Moyennant cette stationnarité, les données ponctuelles (les Z_α) permettront d'estimer la fonction de répartition $F(z)$ de la VA $Z(x)$. Pour simplifier l'exposé, je suppose que $F(z)$ est continue. En désignant par $G(y)$ la fonction de répartition de la loi de Gauss réduite, nous pouvons à chaque y associer la valeur z telle que $F(z) = G(y)$. Ceci définit une fonction :

$$z = \varphi(y) = F^{-1}[G(y)]$$

que nous appellerons anamorphose : c'est une fonction croissante, de sorte qu'inversement y s'exprime en fonction de z par :

$$y = \varphi^{-1}(z) = G^{-1}[F(z)]$$

Par construction, Z obéit à la loi F si et seulement si $Z = \varphi(Y)$ avec $Y = \varphi^{-1}(Z)$ gaussienne réduite.

Définissons donc une nouvelle FA stationnaire Y(x) en posant

$$Y(x) = \varphi^{-1}(Z(x))$$

Pour chaque x, la VA Y(x) est donc gaussienne réduite. Cela n'implique absolument pas que, pour plusieurs points d'appui x_α ($\alpha = 1,2,\dots n$), les $Y_\alpha = Y(x_\alpha)$ obéissent, dans leur ensemble, à une loi multigaussienne. Toutefois (encouragés par la réussite du modèle lognormal, et, sous réserve, naturellement, de procéder dans chaque cas particulier à un contrôle de cette hypothèse) nous supposerons qu'il en est bien ainsi. Après la stationnarité, donc, notre seconde hypothèse fondamentale sera que notre anamorphose φ est multigaussienne.

A ce stade, notre modèle est de la forme :

$$Z(x) = \varphi[Y(x)] \tag{3-1}$$

où Y(x) est une F.A. stationnaire multigaussienne (d'espérance nulle et de variance 1) et φ une fonction croissante quelconque appelée anamorphose (la donnée de l'anamorphose φ équivaut à celle de la loi F de Z_x). Le modèle lognormal correspond au cas particulier où φ est une fonction exponentielle.

Passons au problème du changement de support. A la teneur $Z(v)$ du bloc v, de loi F_v, on peut encore associer une anamorphose φ_v et une gaussienne réduite Y_v telles que

$$Z(v) = \varphi_v(Y_v)$$

Ici encore $\varphi_v(y) = F_v^{-1}[G(y)]$, de sorte que la donnée de φ_v équivaut à celle de la loi F_v. Toutefois, à la différence du cas ponctuel, nous n'avons pas (en dehors de la moyenne m et de la variance S_v^2 que nous savons calculer) en général d'information expérimentale sur la loi F_v. Notre première tâche consiste donc à trouver un modèle plausible pour l'anamorphose φ_v.

Quelles sont les conditions requises pour un tel modèle ? Dans le cas lognormal, nous avions :

$$\varphi_v(y) = m \exp(\sigma_v\, y - \sigma_v^2/2)$$

m étant fixe (c'est la moyenne générale, évidemment invariante). Il s'agissait donc d'un modèle à un seul paramètre, soit σ_v. Au lieu de σ_v, prenons un paramètre $r > 0$ quelconque, et proposons nous de chercher une famille φ_r de fonctions vérifiant les conditions suivantes :

a) pour chaque r, φ_r est une fonction croissante

b) conservation de la moyenne : pour chaque r, on doit avoir

$$\int \varphi_r(y) g(y) dy = m$$

c) détermination bi-univoque de la variance : la fonction

$$S^2(r) = \int [\varphi_r(y)]^2 g(y) - m^2$$

doit être croissante, de manière à ce que la seule donnée de la variance suffise à déterminer r.

d) Si nous choisissons de faire correspondre la valeur r=1 au support ponctuel, $\varphi_1(y) = \varphi(y)$ est connue à l'aide des données expérimentales. Dans le cas gaussien, c'est-à-dire :

$$\varphi(y) = m + \sigma y$$

nous savons que les teneurs des blocs sont encore gaussiennes. Donc :

$$\varphi_r(y) = m + r \sigma y$$

(avec $S^2(r) = r^2 \sigma^2$, σ^2 désignant la variance ponctuelle).

Dans le cas lognormal, c'est-à-dire :

$$\varphi(y) = m \exp(\sigma y - \sigma^2/2)$$

nous savons que φ_r doit être de la forme :

$$\varphi_r(y) = m \exp(r \sigma y - \sigma^2 r^2/2)$$

Nous imposerons donc à l'algorithme exprimant φ_r en fonction de φ de respecter la permanence de la normalité et de la lognormalité.

e) Lorsque la variance devient petite, c'est-à-dire dans le cas de grands blocs, les théorèmes généraux du calcul des probabilités suggèrent que la loi de Z(v) doit se rapprocher d'une loi de Gauss : donc (convergence vers la loi de Gauss) lorsque r est petit, φ_r doit différer assez peu de l'expression linéaire $m + s(r).y$.

f) On sait qu'augmenter v, donc diminuer r, doit détériorer la relation tonnage teneur. Si nous posons

$$Q_r(y) = \int_y^\infty \varphi_r(x) g(x) dx$$

nous exigeons donc la condition :

$$\frac{\partial Q_r}{\partial r} \geq 0$$

Le modèle gaussien

Il existe plusieurs modèles plausibles vérifiant ces conditions. Nous n'examinerons ici que le plus simple d'entre eux, connu sous le nom de modèle gaussien discrétisé (la justification de cette terminologie apparaîtra ultérieurement).

Pour introduire ce modèle, partons de la relation de définition :

$$Z(v) = \frac{1}{v} \int_v Z(x)dx = \frac{1}{v} \int_v \varphi(Y_x)dx$$

Désignons par $\underline{x}$ le point aléatoire choisi dans v selon une loi uniforme, et par $Y_{\underline{x}}$ la variable aléatoire composée obtenue en remplaçant x dans Y(x) par ce point aléatoire. C'est encore une gaussienne réduite. La relation intégrale ci-dessus nous indique qu'à Z(v) fixé ou, ce qui revient au même puisque $Z(v) = \varphi_v(Y_v)$, à Y_v fixé, l'espérance conditionnelle de $\varphi(Y_{\underline{x}})$ doit être égale à Z(v). Autrement dit, on a nécessairement :

(3-1) $$\varphi_v(Y_v) = E[\varphi(Y_{\underline{x}})|Y_v]$$

Cette relation (3-1), purement formelle, est valable dans tous les cas. Pour avoir un modèle explicite, introduisons l'hypothèse suivante (nécessairement approximative : on peut montrer qu'en toute rigueur une telle hypothèse ne peut pas être vérifiée) : la loi à deux variables $(Y_{\underline{x}}, Y_v)$ est gaussienne elle aussi, au moins approximativement et pour les petites valeurs de v. Comme $Y_{\underline{x}}$ et Y_v sont des gaussiennes réduites, cette loi binormale est entièrement définie par le coefficient de corrélation r de $Y_{\underline{x}}$ et Y_v.

Sous cette hypothèse, la relation (3-1) détermine complètement φ_v dès que φ et r sont connus : mais c'était exactement notre objectif. Explicitement, notons qu'à $Y_v = y$ fixé, $Y_{\underline{x}}$ est gaussienne avec la variance $(1-r^2)$ et l'espérance ry. Par suite, d'après (z-1), en écrivant φ_r au lieu de φ_v, nous obtenons la relation cherchée :

(3-2) $$\varphi_r(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(r\,y + \sqrt{1 - r^2}\;\; x)\; g(x)dx$$

Tel est <u>l'algorithme du changement de support dans le modèle discrétisé</u>. Vérifie-t-il les conditions a/,... f/ énumérées ci-dessus ? Il en est bien ainsi.

a/ Comme φ est (par construction) déjà une anamorphose, c'est-à-dire une fonction croissante, la fonction à intégrer dans (3-2) augmente avec y, donc φ_r est une fonction croissante de y.

b/ La moyenne m est conservée, soit :

$$\int \varphi_r(y)g(y)dy = \int \varphi(y)g(y)dy$$

On peut le vérifier par un calcul explicite à partir de (3-2). Il est plus simple de remarquer que (3-1) assure automatiquement cette conservation :

$$E[\varphi_v(Y_v)] = E[\varphi(Y_{\underline{x}})] = m$$

d'après les propriétés de l'espérance conditionnelle.

c/ Il n'est pas très commode de vérifier directement sur (3-2) que $S^2(r)$ est une fonction croissante de r. Celà apparaîtra, par contre, comme une conséquenceimmédiate du développement de φ_r en polynomes d'Hermite.

d/ La permanence de la normalité et de la lognormalité se vérifient immédiatement.

Pour les conditions e/ et f/, il sera plus facile de les vérifier sur les développements du paragraphe suivant. [Pour la condition f/, on peut également déduire d'abord de (3-2) la relation différentielle :

$$\text{(3-3)} \qquad \frac{r\,\partial\,\varphi_r}{\partial\, r} = -\frac{\partial^2\varphi_r}{\partial\, y^2} + y\,\frac{\partial\,\varphi_r}{\partial\, y}$$

(qui résulte aussi immédiatement d'une interprétation de (3-1) à l'aide d'un processus gaussien markovien stationnaire), et substituer dans

$$\frac{\partial Q_r}{\partial r} = \int_y^\infty \frac{\partial \varphi_r(x)}{\partial r} g(x)dx$$

Après une intégration par partie, on trouvera :

(3-4) $$\frac{\partial Q_r(y)}{\partial r} = \frac{1}{r} g(y) \frac{\partial \varphi_r(y)}{\partial y}$$

Comme φ_r est une fonction croissante de y, cette expression est effectivement positive.]

4 - LES DEVELOPPEMENTS EN POLYNOMES D'HERMITE

Le polynome d'Hermite de degré n, soit $H_n(x)$ est défini par :

$$H_n(x) = \frac{1}{g(x)} \frac{d^n}{d x^n} g(x)$$

Ces polynomes vérifient la relation d'orthogonalité

$$\int H_n(x) H_m(x) g(x) dx = 0 \qquad \text{pour } n \neq m$$

$$\int H_n^2(x) g(x) dx = n!$$

et toute fonction f(x) (telle que $\int f^2 \, g \, dx < \infty$) admet le développement :

$$\begin{cases} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{n!} H_n(x) \\ f_n = \int H_n(x) f(x) g(x) dx \end{cases}$$

En particulier, l'exponentielle $e^{\lambda x}$ admet le développement

(4-1) $$e^{\lambda x} = e^{\lambda^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} H_n(x)$$

Notons les relations :

$$\begin{cases} H_n' = -n\, H_{n-1} \\ H_{n+1} = H_n' - x\, H_n \\ H_n'' - x\, H_n' = -\, n\, H_n \end{cases}$$

Mais la propriété principlae, en ce qui nous concerne, est la suivante : si X et Y sont deux gaussiennes réduites et ρ leur coefficient de corrélation, alors :

$$E[H_n(X)\,|\,Y = y] = \rho^n\, H_n(y) \tag{4-3}$$

Donnons deux démonstrations différentes de cette relation fondamentale.

1 - Si nous prenons $\varphi = H_n$ dans (3-2), alors $\varphi_\rho(y)$ est justement cette espérance conditionnelle. Compte tenu de l'équation (3-3) et de la dernière relation (4-2), il vient :

$$\rho\, \frac{\partial \varphi_\rho}{\delta\ \rho} = n\, \varphi_\rho$$

En intégrant, et en remarquant $\varphi_\rho = 0$ pour $\rho = 0$, on trouve bien $\varphi_\rho = \rho^n \varphi$, c'est-à-dire (4-3).

2 - A Y=y fixé, on a :

$$E[\ e^{\lambda X}\ /\ Y = y] = e^{\rho\ \lambda y\ +\ (1-\rho^2)\ \frac{\lambda^2}{2}}$$

D'après (4-1), le premier membre est :

$$e^{\frac{\lambda^2}{2}}\ \Sigma\ (-1)^n\ \frac{\lambda^n}{n!}\ E[H_n(X)\,|\,Y{=}y]$$

et le second :

$$e^{\frac{\lambda^2}{2}}\ \Sigma\ (-1)^n\ \frac{\lambda^n}{n!}\ \rho^n\ H_n(y)$$

Par identification, on en déduit (4-3).

Conséquence : Pourvu que $|\rho|<1$, la loi X à Y = y fixé admet la densité :

$$g_\rho(x|y) = \left(\sum \frac{\rho^n}{n!} H_n(x)H_n(y)\right)g(x)$$

Expression du changement de support

Pour effectuer les calculs rapidement, il sera commode d'utiliser le développement de l'anamorphose φ en polynomes d'Hermite, soit :

$$\varphi(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{n!} H_n(x) \tag{4-4}$$

$$\left(C_n = \int \varphi(x)H_n(x)g(x)dx\right)$$

En particulier :

$$C_o = m = \int \varphi(x)g(x)dx$$

est l'espérance de $Z_x = \varphi(Y_x)$. Quant à la variance S^2, compte tenu des propriétés d'orthogonalité, on trouve

$$S^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n^2}{n!}$$

(le terme en $n = 0$ disparaît, du fait que l'on retranche $m^2 = C_0^2$).

Compte tenu de notre propriété fondamentale (4-3), il résulte de (3-2) ou, plus facilement, de (3-1) que l'algorithme du changement de support prend la forme très simple :

$$\varphi_r(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{n!} r^n H_n(y) \tag{4-5}$$

valable pour $|r|\leq 1$. La variance correspondante est alors

$$S^2(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n^2 \, r^{2n}}{n!} \tag{4-6}$$

C'est donc bien une fonction croissante de r (du moins pour $r \geq 0$, seul cas que nous envisageons.

Exemple : Dans le cas lognormal, on a

$$\varphi(y) = m\, e^{\sigma y-\sigma^2/2} = m \sum (-1)^n \frac{\sigma^n}{n!} H_n(y)$$

d'après (4-1). D'après (4-5), il vient :

$$\varphi_r(y) = m \sum (-1)^n \frac{\sigma^n r^n}{n!} H_n(y)$$

Donc, en utilisant à nouveau (4-1) :

$$\varphi_r(y) = m\, e^{r\sigma y-r^2\sigma^2/2}$$

On retrouve ainsi la permanence de la lognormalité.

5 - LES RELATIONS TONNAGE/TENEUR

Dans notre modèle discrétisé, les relations (4-5) et (4-6) résolvent le problème du changement de support : de fait, si $Z(x) = \varphi(Y(x))$, nous développons l'anamorphose φ des teneurs ponctuelles comme en (4-4) ; nous choisissons pour $r > 0$ la valeur (unique) déterminée d'après (4-6) en posant $S^2(r) = S_v^2$, où S_v^2 est la variance (connue) des blocs v ; l'anamorphose $\varphi_v = \varphi_r$ des teneurs Z(v) est alors donnée par (4-5), et la loi F_v des blocs s'en déduit.

Les relations tonnage/teneur (pour les teneurs réelles Z(v) des blocs v) sont alors paramétrées en y sous la forme :

$$T_v(y) = 1 - G(y)$$
$$Q_v(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n r^n}{n!} \int_y^{\infty} H_n(x) g(x) dx$$

Compte tenu de la définition des polynomes H_n, on voit que la quantité de métal admet le développement :

$$Q_v(y) = m[1 - G(y)] - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n r^n}{n!} H_{n-1}(y) g(y) \tag{5-1}$$

Après l'effet de support, examinons l'effet d'information. Si l'estimateur ultime $Z^*(v)$ est de la forme :

$$Z^*(v) = \Sigma \lambda_i Z(x_i) \quad \text{avec} \quad \Sigma \lambda_i = 1$$

nous pouvons lui appliquer (au même titre qu'à $Z(v)$) le modèle développé plus haut : donc nous considérerons que cet estimateur ultime admet l'anamorphose gaussienne :

$$Z^*(v) = \varphi_{r*}(Y_v^*)$$

où Y_v^* est une gaussienne réduite, et r^* déterminé par la condition habituelle de variance, soit :

$$S^2(r^*) = S_{v*}^2$$

Pour avoir la loi simultanée de $Z(v)$ et des $Z^*(v)$, nous introduisons à ce stade une hypothèse (supplémentaire) : la binormalité des deux gaussiennes Y_v et Y_v^*. Pour achever de déterminer cette loi à deux variables, il faut connaître le coefficient

$$\rho = \rho_{vv*} = E(Y_v \, Y_v^*)$$

Or, compte tenu de la relation capitale (4-3) et de l'orthogonalité des polynomes d'Hermite, il est immédiat que la covariance de $Z(v) = \varphi_r(Y_v)$ et de $Z^*(v) = \varphi_{r*}(Y_v^*)$ est

(5-2) $$S_{vv*} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n^2 \, r^n r^{*n}}{n!} \rho^n$$

S_{vv*}, r et r^* étant connus, cette relation détermine la valeur ρ cherchée (de manière univoque si nous nous limitons aux valeurs positives).

Nous pouvons dès lors calculer l'espérance conditionnelle $h(z)$ de $Z(v)$ à $Z^*(v) = z$ fixé en utilisant (4-3) :

$$\begin{cases} h(z) = E[\varphi_r(Y_v) | Y_v^* = y] \\ (z = \varphi_{r*}(y) \end{cases}$$

Il vient :

$$h(z) = \sum \frac{C_n}{n!} r^n \rho_{vv*}^n H_n(y) = \varphi_{r\rho_{vv*}}(y)$$

En général, donc, z est différent de h(z). Pour que la condition de non biais conditionnel soit vérifiée dans ce modèle, il faut et il suffit que l'on ait $r\rho_{vv*} = r^*$, c'est-à-dire, d'après (5-2) :

$$S_{vv*} = S_{v*}^2$$

En général cette condition <u>n'est pas vérifiée</u> (même si $Z^*(v)$ est un krigeage) à cause de la condition imposée aux poids $\sum \lambda^\alpha = 1$).

[N.B. : la condition $\sum \lambda^\alpha = 1$ n'est nullement, ici, une condition de non biais. Elle a seulement pour objet de nous permettre d'évaluer l'anamorphose φ_{r*} de $Z^*(v)$, puisque c'est seulement aux combinaisons linéaire de poids 1 que s'applique notre modèle de changement de support.

Supposons que nous prenions comme estimateur le krigeage simple $\quad Z_K(v) = \sum \lambda_K^\alpha(Z_\alpha - m) + m \quad$ avec, en général

$$\nu = \sum \lambda_K^\alpha \neq 1$$

Pour appliquer notre modèle, posons

$$Z^*(v) = \frac{1}{\nu} \sum \lambda_K^\alpha Z_\alpha \ ; \quad Z_k(v) = \nu\, Z^*(v) + (1-\nu)m$$

La combinaison linéaire $Z^*(v)$ vérifie la condition sur les poids, mais, en général, $S_{vv*} \neq S_{v*}^2$ et le non biais n'est pas vérifiée. On calcule comme ci-dessus l'anamorphose φ_{r*} de $Z^*(v)$ et celle du krigeage Z_K s'en déduit par

$$Z_k(v) = \nu\, \varphi_{r*}\,(Y_v^*) + (1 - \nu)\, m$$

Par conséquent, l'espérance conditionnelle :

$$E[Z(v))/Z_K(v)] = h(Z_v^*) = \varphi_{r\rho}\ (Y_v^*)$$

<u>n'est nullement égale à $Z_K(v)$</u>, sauf dans le cas gaussien (c'est-à-dire dans le cas où φ est linéaire)].

<u>Le paramètrage des réserves</u> s'en déduit.

Si l'on choisit de couper à $Z^*(v) \geq z$, en définissant y par la condition :

$$z = \varphi_{r*}(y)$$

il vient :

$$\begin{cases} T_{v*}(z) = 1 - G(y) \\ Q_{v*}(z) = \displaystyle\int_y^\infty \varphi_{r\rho}(x)g(x)dx \end{cases}$$

et on trouve, comme précédemment, le développement suivant de la quantité de métal coupée à $z = \varphi_{r*}(y)$:

$$Q_{v*}(z) = m[1-G(y)] - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n\ r^n\ \rho^n}{n!}\ H_{n-1}(y)g(y)$$

On peut aussi remarquer que ce paramétrage en $z = \varphi_{r*}(y)$ fait illusion, puisque l'espérance de la teneur $Z(v)$ du bloc dont l'estimation est $Z^*(v) = z$ n'est pas z, mais

$$h(z) = \varphi_{\rho r}(y)$$

de sorte que (du point de vue de la recherche d'une coupure optimale) tout se passe comme si nous coupions à $h(z)$ et non à z.

On peut alors, comme dans le cas lognormal, suggérer de remplacer l'estimateur initial $Z^*(v)$ par l'<u>estimateur corrigé</u>

$$H = h(Z^*(v)) = \varphi_{\rho r}[\varphi_{r*}^{-1}(Z^*(v))]$$

que vérifie la condition de non biais.

En coupant, sur ce nouvel estimateur, à $H \geq h$, on obtient, en posant cette fois

$$h = \varphi_{\rho r}(y)$$

le paramètrage associé à l'estimateur corrigé

$$\begin{cases} T_v(h) = 1 - G(y) \\ Q_v(h) = \int_y^\infty \varphi_{\rho r}(x) g(x) dx \end{cases}$$

identique au précédent en tant que fonction de y - mais non, évidemment, en tant que fonction de h (et, en pratique, ce sont les fonctions T_v et Q_v exprimées en h qui doivent être utilisées dans les calculs économiques).

Exercices proposés - 1 - Vérifier, à l'aide de (4-5), la convergence vers la loi de Gauss lorsque r tend vers 0.

2 - A partir du développement (5-1) de la quantité de métal, démontrer que $Q_r(y)$ est une fonction croissante de r et retrouver la relation (3-4).

6 - LE MODELE GAUSSIEN DISCRETISE

Le paramètrage local est-il possible dans le présent cadre, autrement dit notre modèle permet-il de reconstituer les lois de $Z(v)$ et $Z^*(v)$, ou, ce qui revient au même, des gaussiennes Y_v et Y_v^* conditionnellement aux données $Z_\alpha = \varphi(Y_\alpha)$ disponibles au voisinage d'un bloc v donné ?

En apparence, la réponse devrait être positive : rien ne nous empêche, semble-t-il, d'introduire sur la lancée la nouvelle hypothèse ad hoc, celle de la multinormalité des variables (Y_v, Y_v^*, Y_α).

Pour déterminer cette loi multigaussienne, ρ_{vv*} étant déjà connue, il nous suffit de choisir les coefficients $\rho_{v\alpha}$ et $\rho_{v*\alpha}$ de manière à reconstituer les covariances (connues) $S_{v\alpha}$ et $S_{v*\alpha}$ correspondantes, selon les relations

$$\begin{cases} S_{v\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n^2}{n!} r^n \rho_{v\alpha}^n \\ S_{v*\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n^2}{n!} r^{*n} \rho_{v*\alpha}^n \end{cases}$$

De fait, on pourra procéder effectivement ainsi en pratique <u>pourvu que chaque bloc v contienne au plus un échantillon ponctuel</u>. Par contre, si les blocs v contiennent plusieurs échantillons, des difficultés surgissent, qui mettent en question la <u>cohérence interne</u> de notre modèle dès que nous admettons la multinormalité de Y_v et de <u>toutes</u> les variables ponctuelles Y_x.

En effet, supposons que pour <u>chaque point x</u>, le couple (Y_v, Y_x) soit bigaussien. Alors, l'espérance conditionnelle de $Z(x) = \varphi(Y_x)$ à $Z(v)$, c'est-à-dire à Y_v fixé est :

$$\text{(6-1)} \qquad E(Z(x)/Z(v)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{n!} \rho_{xv}^n \; H_n(Y_v)$$

le coefficient ρ_{xv} étant déterminé par la condition

$$\text{(6-2)} \qquad S_{xv} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n^2}{n!} r^n \rho_{xv}^n$$

Intégrons (6-1) dans v il vient :

$$\text{(6-2)} \qquad E\left[\frac{1}{v}\int_v Z(x)dx/Z(v)\right] = \sum \frac{C_n}{n!} H_n(Y_v) \frac{1}{v}\int_v \rho_{xv}^n \, dx$$

Mais, puisque dans tous les cas $Z(v)$ est égal à l'intégrale $(1/v)\int_v Z(x)dx$, le premier membre est $Z(v)$ lui-même, c'est-à-dire (dans notre modèle) :

$$Z(v) = \varphi_r(Y_v) = \sum \frac{C_n r^n}{n!} H_n(Y_v)$$

Or la relation (6-2), qui définit ρ_{xv}, n'entraine certainement pas l'égalité

$$r^n = \frac{1}{v}\int_v \rho_{xv}^n \, dx$$

pour chaque n : nous tombons ainsi sur une redoutable contradiction.

Pour rétablir la cohérence interne du modèle, nous devons renoncer à attribuer une localisation précise, à l'intérieur de chaque bloc v, aux teneurs ponctuelles $Z(x)$, $x \in v$.

De fait, le point de départ de notre modèle, c'est-à-dire le passage de la relation formelle (3-1) à l'expression explicite (3-2) a consisté à admettre la binormalité du couple (Y_v et $Y_{\underline{x}}$), où $\underline{x}$ est le point aléatoire dans v : or il est facile de voir que cette hypothèse est incompatible avec la binormalité du couple (Y_v, Yx) pour chaque point x individualisé dans v (à moins, ce qui ne sera jamais le cas en pratique, que ρ_{xv} ne reste constant lorsque x décrit v).

Conséquence : pour assurer la cohérence du modèle, nous devons considérer chaque échantillon ponctuel $Z(x_i)$ comme implanté de manière aléatoire dans le bloc v_i contenant le point x_i, c'est-à-dire remplacer $Z(x_i) = \varphi(Y_{x_i})$ par $Z(\underline{x}_i) = \varphi(Y_{\underline{x}_i})$, $\underline{x}_i$ aléatoire dans v_i.

La relation (6-1) est alors remplacée par

$$E[Z(\underline{x})/Z(v)] = \Sigma \frac{C_n}{n!} \rho_{\underline{x}v}^n H_n(Y_v) \tag{6-3}$$

avec un coefficient $\rho_{\underline{x}v}$ déterminé par la relation (6-2) écrite avec $S_{\underline{x}v}$ au lieu de S_{xv} : mais, $S_{\underline{x}v}$, covariance de la teneur du bloc v et de celle du point $\underline{x}$ aléatoire dans v est évidemment :

$$S_{\underline{x}v} = \frac{1}{v} \int_v S_{xv} \, dx = S_v^2$$

c'est-à-dire la variance de $Z(v)$. Donc $\rho_{\underline{x}v}$ est déterminé par

$$S_v^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n^2}{n!} r^n \rho_{\underline{x}v}^n$$

Or, par construction, r vérifie la relation :

$$S_v^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n^2}{n!} r^{2n}$$

Par suite, on a l'égalité :

$$\rho_{\underline{x}v} = r \tag{6-4}$$

et, dans ces conditions, (6-3) se réduit à :

$$E[Z(x)/Z(v)] = \varphi_r(Y_v) = Z(v)$$

La cohérence est donc assurée.

Pour achever de spécifier ce nouveau modèle où les points expérimentaux x_i sont maintenant remplacés par des points aléatoires $\underline{x}_i$ implantés dans les blocs v_i correspondants, nous devons préciser les coefficients de corrélation suivants (entre les gaussiennes associées aux diverses variables)

$\rho_{v_i v_j}$: entre deux blocs v_i, v_j distincts

$\rho_{\underline{x}_i v_j}$: entre le point $\underline{x}_i$ dans v_i et le bloc $v_j \neq v_i$

$\rho_{\underline{x}_i \underline{x}_j}$: entre deux points pris dans deux blocs distincts

$\rho_{\underline{x}\,\underline{x}'}$: entre deux points pris dans le même bloc v

Partant des relations suivantes entre covariances :

$$S_{v_i v_j} = S_{\underline{x}_i \underline{x}_j} = S_{\underline{x}_i\, v_j}$$

$$S_{\underline{x}\,\underline{x}'} = S_{\underline{x}\, v} = S_v^2$$

et utilisant la fonction :

$$S^2(r) = \Sigma \frac{C^n}{n!} r^{2n}$$

nous trouvons que ces coefficients sont déterminés par les relations :

$$S_{v_iv_j} = s^2[\sqrt{r^2\,\rho_{v_iv_j}}] = s^2[\sqrt{\rho_{\underline{x}_i\underline{x}_j}}] = s^2[\sqrt{r\,\rho_{\underline{x}_iv_j}}]$$

$$s_v^2 = s^2(\sqrt{\rho_{\underline{x}\,\underline{x}'}}) = s^2(\sqrt{r\,\rho_{\underline{x}\,v}}) = s^2(\sqrt{r^2})$$

Donc :

$$\rho_{\underline{x}_i\underline{x}_j} = r\,\rho_{\underline{x}_iv_j} = r^2\,\rho_{v_iv_j}$$

$$\rho_{\underline{x}\,\underline{x}'} = r\,\rho_{\underline{x}\,v} = r^2$$

Ces relations expriment que, dans ce modèle, la teneur d'un échantillon ponctuel $Z(\underline{x}_i)$ est conditionnellement indépendante de toutes les autres variables (de blocs et de points) lorsque la teneur $Z(v_i)$ du bloc correspondant est fixée.

Nous arrivons ainsi à la conception suivante (qui justifie la terminologie) de notre modèle gaussien discrétisé :

La FA initiale $Z(x)$, stationnaire et définie au niveau ponctuel est remplacée par une version discrétisée de la même FA régularisée sur les blocs v : Autrement dit, le gisement entier étant considéré comme la réunion d'un nombre N (peut-être grand, mais fini) de blocs v_i disjoints, la structure du modèle est déterminée par la donnée des variables aléatoires :

$$Z(v_i) = \varphi_r(Y_{v_i})$$

(teneurs des blocs) anamorphosées par φ_r des gaussiennes réduites Y_{v_i} : la loi (multivariable) correspondante est définie par les coefficients de corrélation $\rho_{v_iv_j}$.

Les blocs v_i sont ensuite munis d'échantillons "ponctuels" (que l'on doit concevoir comme implantés au hasard, chacun dans son bloc et indépendamment les uns des autres) avec des teneurs de la forme

$$Z(\underline{x}_i) = \varphi(Y_{\underline{x}_i})$$

où chaque gaussienne réduite $Y_{\underline{x}_i}$ est :

$$Y_{\underline{x}_i} = r\, Y_{v_i} + \sqrt{1-r^2}\,\varepsilon_i$$

avec des ε_i gaussiennes réduites <u>indépendantes les unes des autres et des Y_{v_j}.</u>

Ce modèle (qui permet le paramétrage local et global des réserves) présente, en outre, de grands avantages pour les techniques de <u>simulation</u>, conditionnelles ou non.