C 11

ECOLE D'ETE DE FONTAINEBLEAU

1968

Exercices sur les processus stochastiques

Exercice 1. Soit un processus de Poisson de paramètre a. On se place conditionnellement dans l'hypothèse où le nombre N de points de discontinuités tombés dans $(0,\ell)$ est n : N = n.

a/ Montrer que le nombre $K \leq n$ des points tombant dans $(0,x)$ $x \leq \ell$ est alors une variable binomiale $(n,\ p = x/\ell)$

[Ecrire la probabilité a priori d'avoir k points dans $(0,x)$ et n-k dans $(\ell - x,\ \ell)$: $\frac{(ax)^k}{k!}e^{-ax}\frac{a^{n-k}(\ell-x)^{n-k}}{(n-k)!}e^{-a(\ell-x)} = \frac{a^n}{n!}C_n^k\, x^k(\ell-x)^{n-k}e^{-a\ell}$
et la prob. a priori d'avoir n points dans $(0,\ell)$: $\frac{(a\ell)^n}{n!}e^{-a\ell}$
Faire le rapport .

b/Plus généralement montrer que tout se passe comme si ces n points avaient été implantés au hasard dans $(0,\ell)$ indépendamment les une des autres avec une densité de probabilité uniforme.

La probabilité a priori d'avoir n points exactement sur $(0,\ell)$ vérifiant $Y_i \in (y_i + dy_i)$ $(0 \leq y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n < \ell)$ est

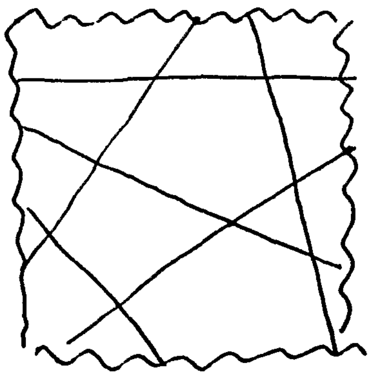
$$e^{-ay_1}a\,dy_1\ e^{-a(y_2-y_1)}a\,dy_2 \cdots e^{-a(y_n-y_{n-1})}a\,dy_n\ e^{-a(\ell-y_n)} = a^n e^{-a\ell}dy_1dy_2\cdots dy_n$$

la probabilité a priori de N=n est d'autre part $\frac{(a\ell)^n}{n!}e^{-a\ell}$. D'où la densité conditionnelle à n variables :

$$\frac{n!}{\ell^n}dy_1dy_2\cdots dy_n \qquad (0 \leq y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_n \leq \ell)$$

Si $X_1, X_2 \dots X_n$ sont n points implantés au hasard et indépendamment sur le segment, classer ces variables par ordre croissant $X_{i_1} \leq X_{i_2} \leq \dots \leq X_{i_n}$ et poser $Y_k = X_{i_k}$. Montrer que ces variables Y_ℓ ont la même densité que les n points du processus (la nécessité de ranger les points par ordre croissant résulte de ce que l'on n'a aucun autre moyen d'individualiser les points d'un processus de Poisson que de les prendre dans leur ordre d'arrivée).

Exercice 2. Droites poissoniennes dans le plan. On définit un système aléatoire de droites dans le plan de la manière suivante : les droites



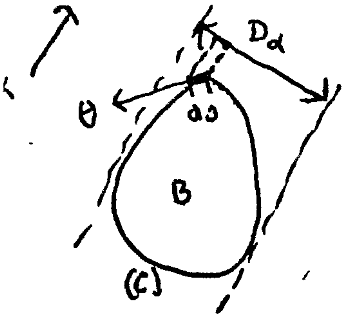
de direction $\in (\alpha, \alpha + d\alpha)$ induisent sur une droite perpendiculaire à leur direction un processus de Poisson de paramètre infiniment petit $\lambda\, d\alpha$ (λ constante ne dépendant pas de α). On obtient ainsi une partition aléatoire du plan en polygones convexes. (Pourquoi convexes ?) Comme λ ne dépend pas de α, ce schéma est isotrope.

a/ Ce schéma induit sur une droite quelconque un processus de Poisson de densité 2λ

[les droites de direction $\in (\alpha, \alpha + d\alpha)$ induisent un petit Poisson de densité $\lambda \sin\alpha\, d\alpha$, d'où un Poisson résultant de paramètre $\int_0^\pi \lambda \sin\alpha\, d\alpha = 2\lambda$]

b/ Sachant que l'axe des x rencontre une droite du schéma enttre x et x+dx, quelle est la probabilité pour que cette droite ait une direction $\in (\alpha, \alpha + d\alpha)$ $(0 \leq \alpha \leq \pi)$

[On doit diviser la probabilité a priori $dx\, \lambda \sin\alpha\, d\alpha$ par la probabilité $2\lambda\, dx$ pour q'une droite rencontre le segment (X,X+dx), d'où la densité conditionnelle $\frac{\sin\alpha}{2} d\alpha$ $(0 \leq \alpha \leq \pi)$. Noter que ces directions ne sont pas uniformément réparties sur l'intervalle $(0, \pi)$]

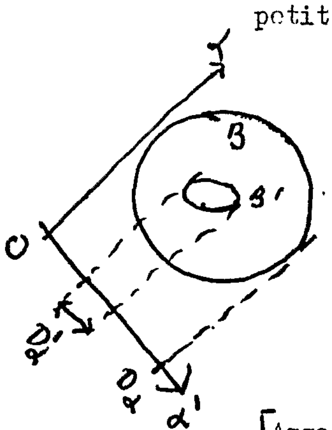


c/ (Théorème de Minkowski) Soit B un ensemble convexe, C son contour, $2\mathcal{L}$ son périmètre, D_α son diamètre apparent dans la direction α. On a : $\int_0^\pi D_\alpha\, d\alpha = 2\mathcal{L}$

[Si θ est la direction de la tangente au point courant, on a $D_\alpha = \frac{1}{2}\int_C |\sin(\theta - \alpha)|\, ds$. Intégrer d'abord en α]

d/ Le nombre N des droites du schéma rencontrant cet ensemble convexe B est une variable de Poisson de paramètre $2\lambda\mathcal{L}$. On a : $P_n(B) = \frac{(2\lambda\mathcal{L})^n}{n!} e^{-2\lambda\mathcal{L}}$. En particulier , la probabilité pour que B ne soit rencontré par aucune des droites du schéma est $P_0(B) = e^{-2\lambda\mathcal{L}}$

[le nombre des droites de direction $\in (\alpha, \alpha+d\alpha)$ rencontrant B est un petit Poisson de paramètre $\lambda D_\alpha \, d\alpha$. Appliquer c/]



e/ Soit $B' \subset B$ un autre ensemble convexe, C' son contour, $2\mathcal{L}'$ son périmètre. Lorsque l'on sait qu'une droite et une seule rencontre B, la probabilité conditionnelle pour que cette droite rencontre également B' est égale au rapport des périmètres : $P(N_{B'}=1 \mid N_B=1) = 2\mathcal{L}'/2\mathcal{L}$

[Associer à toute direction α un axe $0\alpha'$ comme sur la figure. La probabilité conditionnelle pour que la droite du schéma rencontrant B ait une ~~direction~~ $\in (\alpha, \alpha+d\alpha)$ et rencontre (C, α') en un point $\in (x, x+dx)$ est $\frac{\lambda d\alpha \, dx \, e^{-2\lambda\mathcal{L}}}{\lambda 2\mathcal{L} \, e^{-2\lambda\mathcal{L}}} = \frac{d\alpha \, dx}{2\mathcal{L}}$ $\quad (0 \le x \le D_\alpha, \; 0 \le \alpha \le \pi)$

$\left(\frac{D_\alpha}{2\mathcal{L}} d\alpha \right)$

Cette droite a donc la prob. conditionnelle $D_\alpha/2\mathcal{L} \, d\alpha$ d'avoir une direction $\in (\alpha, \alpha+d\alpha)$, et son pied sur $0\alpha'$ est uniformément réparti sur le segment $(0, D_\alpha)$. La probabilité pour que cette droite rencontre aussi B' est alors $\frac{D'_\alpha}{D_\alpha}$. La probabilité conditionnelle cherchée est donc :

$$\int_0^\pi \frac{D'_\alpha}{D_\alpha} \frac{D_\alpha}{2\mathcal{L}} \, d\alpha = \frac{2\mathcal{L}'}{2\mathcal{L}}$$

f/ Traversée moyenne. Sachant qu'une droite du schéma rencontre l'ensemble convexe B d'aire S, l'espérance conditionnelle de la longueur de la corde interceptée est $\pi S/2\mathcal{L}$

Si cette droite a une direction $\in (\alpha, \alpha+d\alpha)$, l'espérance conditionnellle est S/D_α . D'où $E(L \mid N=1) = \int_0^\pi \frac{S}{D_\alpha} \frac{D_\alpha}{2\mathcal{L}} \, d\alpha = \pi \frac{S}{2\mathcal{L}}$

g/ Nombre moyen θ de sommets ou de polygones par unité de surface

Les polygones étant convexe, les nombres spécifiques de convexité et de connexité coincident. Ce nombre est $\theta = \pi \lambda^2$ -

[Prendre une sphère de rayon R. Se placer conditionnellement dans l'hypothèse où cette sphère rencontre deux droites du schéma(prob. a priori $\frac{(2\lambda\mathcal{L})^2}{2} e^{-2\lambda\mathcal{L}}$). Montrer qu'il y a alors une chance sur deux pour que ces deux droites se coupent à l'intérieur de la sphère : si la corde interceptée par la première droite est de longueur L, la seconde la coupe avec la prob. $\frac{2L}{2\pi R}$ d'après e/. Mais l'espérance conditionnelle de L est $\frac{1}{2}\pi R$ d'après f/ . On voit ensuite qu'une petite sphère de rayon δR contient un sommet avec la probabilité $\frac{1}{2}\frac{(2\pi\lambda\delta R)^2}{2} = \pi^2\lambda^2\delta R^2$ D'où $\theta = \pi\lambda^2$-]

h/ De $\theta = \pi\lambda^2$ résulte que la valeur moyenne en nombre de la surface S d'un polygone est $E(S) = \frac{1}{\pi\lambda^2}$. Montrer que la valeur moyenne en surface est $\mathcal{M}(S) = \frac{\pi}{2\lambda^2}$. Ainsi : $\mathcal{M}(S)/E(S) = 1 + D^2(S)/[E(S)]^2 = \frac{\pi^2}{2}$
On notera aussi la valeur très élevée de la variance relative $\frac{D^2(S)}{[E(S)]^2} = \frac{\pi^2}{2} - 1$

XXX XXXXXXX[La probabilité pour que deux points du plan distants de r soient dans le même polygone est $P(r) = e^{-2\lambda r}$. La valeur moyenne en surface s'en déduit : $\mathcal{M}(S) = \int_0^\infty 2\pi r\,dr\, e^{-2\lambda r} = \frac{\pi}{2\lambda^2}$]

Exercice 3. (processus de renouvellement à deux états obtenu à partir d'un processus de renouvellement). Soit un processus de renouvellement, et F la loi de la distance entre points de discontinuités successifs. (moyenne m, variance σ^2, transformée de Laplace Φ). On tire au sort, indépendamment les uns des autres, l'appartenance des segments (Y_i, Y_{i+1}) à l'un ou l'autre de deux états e_1 (prob. p) et e_0 (prob. $q = 1-p$).

a/ Montrer que l'on obtient ainsi un processus de renouvellement à deux états. Les granulométries en nombre ont les transformées de Laplace :

$$\Phi_1 = \frac{q\Phi}{1-p\Phi}, \quad \Phi_0 = \frac{p\Phi}{1-q\Phi}$$

[Partir de $f_1 = qf + qp\, f*f + \dots + qp^{n-1} f^{*(n)} + \dots$]

b/ Calculer la moyenne et la variance de ces granulométries en nombre ($m_1 = \frac{m}{q}$, $\sigma_1^2 = \frac{p}{q^2} m^2 + \frac{1}{q}\sigma^2$; Vérifier $p = p_q = \frac{m_1}{m_0 + m_1}$)

[Dériver deux fois le logarithme de $\Phi_1 = \frac{q\Phi}{1-p\phi}$]

c/ Montrer que la covariance est : $C_0(h) = \frac{pq}{m} \int_0^h [1-F(x)]dx$

On peut utiliser la formule générale $\chi_{10} = \frac{1}{m_0+m_1} \frac{(1-\phi_0)(1-\phi_1)}{\lambda^2[1-\phi_0\phi_1]}$
qui donne ici : $\chi_{10} = pq \frac{1-\Phi}{m\lambda^2}$
On peut aussi faire un raisonnement direct : Pour avoir $0 \in e_1$ et $h \in e_0$ écrire que 0 appartient à e_1 avec la prob. p, que le ~~XXXXXXXX~~ segment du processus de renouvellement dans lequel 0 est tombé s'arrete avant h avec la prob. $\int_0^h \frac{1-F(x)}{m}dx$ (granulométrie résiduelle), et qu'on a ensuite $h \in e_0$ avec la prob. q)

d/ Calculer la portée $(a = m + \frac{\sigma^2}{m})$

[la formule (14) donne $a = pq(m_0+m_1)\left(\frac{\sigma_0^2}{m_0^2} + \frac{\sigma_1^2}{m_1^2}\right) = m[p + q\frac{\sigma^2}{m^2} + q + p\frac{\sigma^2}{m^2}]$]
On peut aussi faire le calcul direct :

$$a = -\frac{2}{pq}\int_0^\infty [C_{10}(h) - pq]\,dh = -\frac{2}{m}\int_0^\infty dh \left[\int_0^h [1-F(x)]dx - m\right] =$$
$$= \frac{2}{m}\int_0^\infty dh \int_h^\infty [1-F(x)]\,dx = \frac{2}{m}\int_0^\infty [1-F(x)]dx \int_0^x dh = \frac{2}{m}\int_0^\infty x[1-F(x)]dx = \frac{1}{m}(\sigma^2+m^2)$$

Exercice 4. Reprendre l'exercice précédent dans le cas $F(x) = 1 - e^{-bx}$ (processus de Poisson), et montrer que l'on obtient ainsi le Markov à deux états dont la matrice de transition est :

$$P(h) = \begin{pmatrix} q + pe^{-bh} , & q - qe^{-bh} \\ p - pe^{-bh} & , p + qe^{-bh} \end{pmatrix}$$

D'on peut appliquer directement Ex. 4 : $\Phi_1 = \frac{q\phi}{1-p\phi} = \frac{qb}{qb+\lambda}$
D'où : $1-F_1(x) = e^{-bqx}$; $C_{10}(h) = \frac{pq}{m}\int_0^h e^{-bx}dx = pq[1-e^{-bh}]$; $a = \frac{m^2+\sigma^2}{m} = \frac{2}{b}$

On peut aussi faire un raisonnement direct : conditionnellement si $x \in e_1$ il y a indépendance entre les évènements antérieurs et postérieurs à x, à cause de la propriété caractéristique des lois exponentielles. Si n points de discontinuité séparent x et x+h (prob. $\frac{(\theta h)^n}{n!} e^{-\theta h}$), la prob. conditionnelle pour que le segment (x,x+h) soit contenu dans e_1 est p^{n+1} d'où : $P[(x,x+h) \subset e_1] = p \sum_n p^n \frac{(\theta h)^n}{n!} e^{-\theta h} = p\, e^{-\theta q h}$ et la granulomètrie $1-F_1 = e^{-\theta q h}$. S'il n'y a pas de discontinuité entre x et x+h, $P(x+h \in e_1 \mid x \in e_1) = 1$;s'il y a des discontinuités, cette probabilité est p. D'où : $P_{11}(h) = e^{-\theta h} + p(1-e^{-\theta h}) = p + q\, e^{-\theta h}$

Exercice 5. Covariances conditionnelles. Soit un cycle à deux états, dans lequel l'état e_0 seul est récurrent. Il y a une dissymétrie entre les deux états, qui n'apparait pas sur l'expression de la covariance. Pour la prendre en charge, on introduit la covariance conditionnelle $H_0(h)$, donnant la probabilité conditionnelle de $x+h \in e_0$ sachant que x est l'origine d'un segment e_0, et on définit de même $H_1(h)$.

a/ Montrer $D_0 = \frac{1}{\lambda} \frac{1-\Phi_0}{1-\psi}$ et $D_1 = \frac{1}{\lambda} - \Phi_1 D_0 = \frac{1}{\lambda}\left[1 - \frac{\Phi_1(1-\Phi_0)}{1-\psi}\right]$

la prem ière formule est établie dans le cours, pour la seconde établir l'équation de convolution: $1-H_1(x) = \int_0^x f_1(y)\, H_0(x-y)\, dy$

b/ Appliquer au schéma de migration $\Phi_0 = \frac{a}{a+\lambda q}$, $\Phi_1 = \frac{a}{a+\lambda p}$, $\psi = \frac{a}{a+\lambda}$

$$D_0 = \frac{q}{\lambda} + \frac{pq}{a+q\lambda}$$

$$D_1 = \frac{1}{\lambda} - \frac{a}{a+p\lambda}\left[\frac{q}{\lambda} + \frac{pq}{a+q\lambda}\right] = \frac{p}{\lambda} + \frac{pq^2}{p-q}\left[\frac{1}{a+q\lambda} - \frac{1}{a+p\lambda}\right]$$

D'où $H_0(h) = q + p\, e^{-\frac{a}{q}h}$ (comme dans un Markov à deux états, mais :

$H_1(h) = p + \frac{pq}{p-q} e^{-\frac{a}{q}h} - \frac{q^2}{p-q} e^{-\frac{a}{p}h}$

~~Exercice 6. On considère la partition aléatoire du plan en polygones convexes de l'ex.2. On attribue à chacun de ces polygones (indépendamment les uns des autres) l'état e ou e avec les prob. p et q respectivement. Montrer que ce schéma induit sur toute droite du plan un Markov à deux~~

c/ Déduire de a/ la relation $C_{01}(h) = \frac{1}{m_0+m_1}\int_0^h [H_0(x)+H_1(x)-1]\,dx$
(Remarque : on peut montrer que cette relation entre covariance et covariances conditionnelles est valable pour tout processus à deux états, cycliques ou non)

Pour démontrer la formule dans le cas général, introduire les moments d'ordre 3 : $J_1(x,y,z) = P(x \in e_1,\ y \in e_1,\ z \in e_1)$ et J_0. Etablir la relation $J_0 + J_1 = 1 - 3p_1 + C_{11}(x-y) + C_{11}(y-z) + C_{11}(z-x)$
(passer par l'espérance de $[1-k(x)][1-k(y)][1-k(z)]$, $k(x)$ désignant l'indicatrice de e_1) et exprimer H_0 et H_1 à l'aide des dérivées à gauche $\frac{\partial^-}{\partial a} J_0(a,0,h)\Big|_{a=0}$, $\frac{\partial^-}{\partial a} J_1(a,0,h)\Big|_{a=0}$

Exercice 6. On considère la partition aléatoire du plan en polygones convexes de l'exercice 2. On attribue à chacun de ces polygones (indépendamment des autres) l'état e_1 ou e_0 avec les prob. p et q resp. Montrer que ce schéma induit sur toute droite du plan un Markov à deux états (utiliser Ex.,a/ et ex.4). Le nombre spécifique de convexité des grains est $q^2 p \pi \lambda^2$ (utiliser ex. 2, g/)

Exercice 7. Formule de Gy pour l'échantillonnage des minerais. Soit un lot de minerai dont les fragments sont caractérisés par un poids $Z = X+Y$, X et Y désignant le poids de métal et le poids de stérile contenu dans ce fragment. On tire au sort, indépendamment les uns des autres, des fragments de poids Z_1 , Z_2, ;;.. jusqu'à un nombre (aléatoire) N tel que :

$$\sum_1^N Z_n \le \varpi < \sum_1^{N+1} Z_n$$

(échantillon de poids ϖ donné) Calculer la variance d'échantillonnage (variance de $T = \frac{1}{\varpi}\sum_1^N X_n$) montrer que, sous forme de variance relative, on a : $\frac{D^2(T)}{[E(T)]^2} = \frac{1}{E(N)} D^2\left[\frac{Z}{m_z} - \frac{X}{m_x}\right]$

[assimiler ϖ à un temps ou une longueur; les segments successifs X_n, Y_n donnent un renouvellement à deux états. La variance de la teneur T de l'échantillon de longueur ϖ est $\frac{a}{\varpi} p q = p^2 q^2 \frac{E(Z)}{\varpi} D^2\left(\frac{X}{m_x} - \frac{Y}{m_y}\right)$
Noter ensuite $\frac{Z}{m_x+m_y} - \frac{X}{m_x} = \frac{m_y}{m_x+m_y}\left(\frac{Y}{m_y} - \frac{X}{m_x}\right) = q\left(\frac{Y}{m_y} - \frac{X}{m_x}\right)$]

<u>Exercice 8. Schéma booléen à une dimension.</u> On considère des grains convexes primaires (qui sont des segments), et on désigne par F leur granulométrie en nombre. Soit F_1 la granulométrie en nombre des grains obtenus après passage en booléen (densité de germes θ), et F_0 celle des pores.

a/ Rapport entre F et K(h) : $1 - F(h) = - K'(h)$

(On a ici $K'(0) = -1$. Directement : un grain primaire A' de longueur L et son translaté A'_h dans la translation $h \leq L$ ont une intersection de longueur L-h, d'où $K(h) = \int_h^\infty (L-h)\, f(L)\, dL$, et $-K'(h) = \int_h^\infty f(h)dh = 1-F(h)$

b/ Poser $U(h) = \int_0^h [1 - F(x)]\, dx = K(0) - K(h)$. Montrer par un raisonnement direct $P(x+h \in e_0 \mid x \in e_0) = e^{-\theta U(h)}$

(Si l'on a n extrémités gauches de grains primaires sur (0,h) - prob. $\frac{(\theta h)^n}{n!} e^{-\theta h}$ - celles-ci sont réparties au hasard sur (0,h) (Ex.1). La probabilité pour que l'un, donné, de ces grains primaires ne contiennent pas le point h est $\frac{1}{h}\int_0^h F(y)dy$. D'où :

$$P(x+h \in e_0 \mid x \in e_0) = \sum_n \frac{(\theta h)^n}{n!} e^{-\theta h} \left[\frac{1}{h}\int_0^h F(y)dy\right]^n = e^{-\theta U(h)} \quad]$$

c/ Montrer que $P(h \in e_1 \mid 0 \in e_0) = 1 - e^{-\theta U(h)}$ vérifie :

$$1 - e^{-\theta U(h)} = \int_0^h \theta\, e^{-\theta U(h-x)} [1 - F_1(x)]\, dx$$

(l'origine du grain ~~primaire~~ contenant h doit tomber en un point h-x entre 0 et h)

d/ Soit Φ_1 la transformée de Laplace de f_1 et R celle de $e^{-\theta U(h)}$

On a : $\frac{1}{\lambda} - R = \theta \frac{(1-\Phi_1)}{\lambda} R$

Si $m = U(\infty)$ est l'espérance du grain primaire, celle du grain booléen est $m_1 = \frac{1}{\theta}\left(e^{\theta m} - 1\right)$

(la partie principale de $R(\lambda)$ en $\frac{1}{\lambda}$ est $\frac{e^{-\theta m}}{\lambda}$ pour $\lambda \to 0$)

e/ <u>Calcul de la portée.</u> Montrer $a = \theta \frac{q^2}{h} (m_1^2 + \sigma_1^2)$

(On a $m_0 = \frac{1}{\theta}$, $m_1 = \frac{e^{\theta m} - 1}{\theta}$ d'où $q = e^{-\theta m} = \frac{1}{1+\theta m_1}$

$C_{00}(h) = q\, e^{-\theta U}$ et :

$$a = \frac{2}{pq}\int_0^\infty [(v_0(h) - q^2]\,dh = \frac{2}{p}\int_0^\infty [e^{-\theta v(h)} - e^{-\theta m}]\,dh.$$

Evaluer l'intégrale par $\lim_{\lambda \to 0} \left[R(\lambda) - \frac{e^{-\theta m}}{\lambda}\right] = \frac{1}{2}\,\theta\,(m_1^2 + \sigma_1^2)\,e^{-2\theta m}$

D'où $a_1 = \theta \frac{q^2}{p} (m_1^2 + \sigma_1^2)$

f/ Trouver une granulométrie primaire F telle que le schéma booléen soit un processus de Markov à deux états. On notera le coté paradoxal de ce probleme, qui consiste à simuler l'absence de mémoire, caractéristique des phénomènes markoviens, en effectuant un passage en booléen à partir d'une granulométrie primaire F non exponentielle (et ne vérifiant donc pas cette propriété markovienne). Il n'est pas évident au départ que ce probleme comporte une solution: en fait, nous allons montrer qu'il en existe effectivement une, qui est la vieille loi "logistique", aujourd'hui bien démodée, après avoir connu la faveur de la mode il y a une trentaine d'années.

(On cherche à avoir $\Phi_1 = \frac{a}{a+\lambda}$. D'après c/, il faut $R = \frac{a+\lambda}{\lambda}\,\frac{1}{a+\theta+\lambda}$

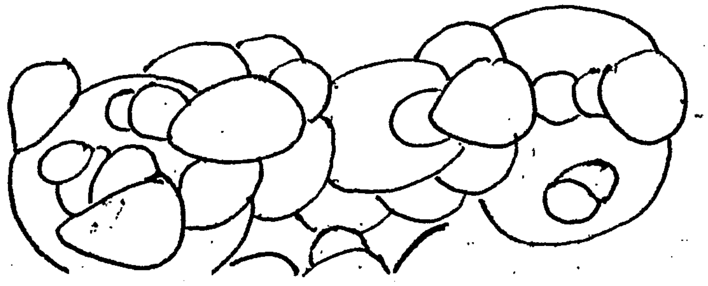
d'où $e^{-\theta v(h)} = \frac{a}{a+\theta} + \frac{\theta}{a+\theta}\,e^{-(a+\theta)h}$

Passer aux log, dériver. On trouve :

$$1 - F(h) = \frac{(a+\theta)\,e^{-(a+\theta)h}}{a + \theta\,e^{-(a+\theta)h}}$$

(loi logistique)Le probleme est donc effectivement soluble.

Exercice 9. (partition aléatoire obtenue en recouvrant le plan avec des jetons aléatoires mis en place depuis l'origine des temps jusqu'à aujourd'hui). Soit A un grain primaire aléatoire dans l'espace à deux dimensions. Depuis l'origine des temps, rejetée à $-\infty$, on met en place des microschémas booléens de densité poissonienne $a\,dt\,dx$, et de même grain primaire A. Les grains A tombés entre $-t$ et $-t+dt$ cachent les portions des grains antérieurs qu'ils recouvrent. L'origine des temps étant rejetée à $-\infty$, le plan entier est couvert, et on a une partition aléatoire (constituée des portions visibles des derniers grains tombés) ;



a/ Si B est un ensemble quelconque, soit R_B l'évènement : "B est contenu dans une seule classe de la partition aléatoire", c'est à dire "B n'est coupé par aucune des frontières visibles". Montrer que l'on a

$$P(R_B) = \frac{E[\mathrm{Mes}(A \ominus \check{B})]}{E[\mathrm{Mes}(A \oplus \check{B})]}$$

(Démonstration directe : écrire qu'au temps $-t$ un grain primaire a recouvert B (prob. $a\,dt \int \varpi(B_{-\xi})\, d\xi = a\,dt\; E[A \ominus \check{B}]$ et que de $-t$ à 0 aucun grain primaire n'a plus recoupé B (prob. $e^{-at\,E[\mathrm{Mes}\, A \oplus \check{B}]}$ comme dans le schéma booléen de densité $\theta = at$) . Intégrer ensuite en t.

Démonstration "par récurrence" : on note que R_B se réalise de deux manières : ou bien R_B est déjà réalisé au temps $-\delta t$, et B n'est pas rencontré par les grains tombant entre $-\delta t$ et 0 ; ou bien, de $-\delta t$ à 0, un grain primaire recouvre B. D'où :

$$P(R_B) = P(R_B)\,[1 - a\,\delta t\; E(\mathrm{Mes}(A \oplus \check{B}))] + a\,\delta t\; E[\mathrm{Mes}(A \ominus \check{B})]$$

b/ En déduire la granulométrie linéaire (en nombre) F des composantes connexes des classes de cette partition. On se ramenera au cas à une dimension avec $K(h) = \int_h^\infty [1 - F_0(x)]\,dx$ (F_0, granulométrie linéaire originelle des grains primaires A, exprimée en nombre). Montrer que la traversée moyenne de ces composantes est égale à <u>la moitié de la</u> traversée moyenne des grains primaires. $m = \frac{1}{2} m_0$ -

$K(h) = \int_h^\infty (x-h) f(x)\, dx = E[A \ominus h]$

(Partir de $1 - F(h) = \frac{P'(h)}{P'(0)}$ avec $P(h) = K(h)/(h + m_0)$. Pour $h = 0$, on trouve $P'(0) = -1/m = -2/m_0$ et, avec $\nu = 1/m$ (nombre specifique) :

$$\nu\,[1 - F(h)] = \frac{K(h)}{(h+m_0)^2} - \frac{K'(h)}{h+m_0}$$

c/ Traiter le cas où la granulométrie originelle F_0 est la loi gamma de paramètre 2, de densité : $a^2 h\, e^{-ah}$ ($m_0 = 2/a$) : la loi F est alors <u>exponentielle.</u>

(Calculer d'abord $K(h) = \int_h^\infty dx \int_x^\infty a^2 y\, e^{-ay}\, dy = (h + \frac{2}{a})\, e^{-ah} = (h + m_0)\, e^{-ah}$

D'où $P(h) = e^{-ah}$ et $1 - F(h) = e^{-ah}$

<u>Exercice 10.</u> <u>Traversées en relief, en creux et en escalier.</u> On considère le même schéma que dans l'exercice précédent, mais on suppose que l'on peut distinguer les traversées en creux : enrrelief : et en escalier : ou

Soient $\nu_c, \nu_r, \nu_e, f_c, f_r, f_e$ les nombres spécifiques et les densités des granulométries en nombre de ces différentes espèces de traversées. On désignera aussi par $p_i = \nu_i m_i$ (probabilité en mesure) la probabilité pour qu'un point donné x appartienne à une traversée d'espèce i (i = r,c ou e), et par $\varpi_i = \frac{\nu_i}{\nu}$ la probabilité en nombre (probabilité pour qu'une traversée donnée soit d'espèce i)

a/ Montrer $\nu_r f_r(h) = \frac{f_0(h)}{h+m_0} = \frac{K''(h)}{h+m_0}$ Remarquer le biais. En déduire la relation : $p_r + 2\varpi_r = 1$ (si les traversées de type r occupentbeaucoup de place sur la droite, elles sont moins nombreuses que les traversées des deux autres espèces)

(On a une traversée en relief dont l'origine $\in (0, dh_1)$ et l'extrémité $\in (h, h+dh_2)$ si ce dispositif était déjà réalisé au temps $-\delta t$ et n'a pas été dérangé de $-\delta t$ à 0 ; ou bien si un grain primaire de longueur h s'est mis en place dans cette position entre $-\delta t$ et 0 . D'où

$$\nu_r f_r(h) = \nu_r f_r(h)\,[1 - a\delta t\,(h+m_0)] + a\delta_t\, f_0(h)$$

En intégrant, on en déduit à la fois $\nu_r = \int_0^\infty \frac{f_0(h)\,dh}{h+m_0}$ et $\nu_r(m_r+m_0) = 1$ soit, puisque $\nu = \frac{1}{m} = \frac{2}{m_0}$, : $p_r + 2\varpi_r = 1$]

b/ Montrer que la granulométrie des traversées en creux vérifie :

$$\nu_c f_c(h) = 2\,\frac{K(h)}{(h+m_0)^3}$$

(Ecrire qu'un grain primaire a couvert h au temps $-t$ (prob. a dt K(h)) que le segment h n'a plus ensuite été rencontré par aucun grain ($e^{-at(m_0+h)}$) mais que de $-t$ à 0 une extrémité droite est tombée en $(-dh_1, 0)$ et une extrémité gauche dans $(h, h+dh_2)$ ($a^2 t^2 dh_1 dh_2$). D'où :

$$\nu_c f_c(h) = a^3 K(h) \int_0^\infty t^2 e^{-at(m_0+h)}\,dt = \frac{2\,K(h)}{(m_0+h)^3}$$

c/ Il y a autant de traversées en creux que de traversées en relief.

(intégrer par parties les expressions a/ et b/ de $\nu_c f_c$ et de $\nu_r f_r$
On trouve :

$$\nu_c = \nu_r = \frac{1}{2m} + \int_0^\infty \frac{k'(h)}{(h+m_0)^2}\, dh \quad)$$

d/ La granulométrie des traversées en escalier est $\nu_e f_e = -\frac{2k'(h)}{(h+m_0)^2}$

(on peut faire un raisonnement direct, ou remarquer $\nu_r f_r + \nu_e f_e + \nu_c f_c = \nu f$ avec $\nu = \frac{1}{m} = \frac{2}{m_0}$) et f déduit de l'ex.9,b/. Noter qu'on obtient νf en dérivant deux fois P(h) :

$$\nu f = P''(h) = \frac{d^2}{dh^2}\frac{k(h)}{h+m_0} = \frac{k''(h)}{h+m_0} - \frac{2k'(h)}{(h+m_0)^2} + \frac{2k(h)}{(h+m_0)^3}$$

Les trois termes qui apparaissent correspondent à $\nu_r f_r$, $\nu_e f_e$ et $\nu_c f_c$ -

e/ Relation $p_r = \varpi_e$

[On a $p_r + 2\varpi_r = 1$, d'après a/, et $\varpi_e + 2\varpi_r = 1$ puisque $\varpi_r = \varpi_c$ (c/)]

Exercice 11. On suppose que le grain primaire de l'exercice 9 est un cercle, dont le rayon R est une variable aléatoire de loi $F_0(r)$ (granulométrie originelle en nombre). On s'interesse à la granulométrie F des cercles intacts (qui n'ont été rencontrés par aucun des cercles qui leur sont postérieurs) N.B. : les traversées en relief de Ex.10 ne coincident pas avec les traversées de ces cercles intacts.

a/ La granulométrie F et le nombre spécifique ν des cercles intacts vérifient :

$$\nu f(r) = \frac{f_0(r)}{\pi(m_2 + 2m_1 r + r^2)} \qquad \left(\quad m_n = \int_0^\infty r^n f_0(r)\, dr \right.$$

(Ecrire qu'en -t un cercle de rayon R $\in$ (r,r+dr) a germé en x $\in$ dx et n'a pas été rencontré par les grains ultérieurs : prob. :
$a\,dt\,dx\, f_0(r)\,dr\; e^{-at\pi(m_2+2m_1 r+r^2)}$. Intégrer en t .

b/ Le nombre spécifique ν est $\nu = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{f_0(r)\,dr}{m_2+2m_1 r+r^2}$
les moments m'_n de la loi des cercles intacts se déduisent des moments ~~XX~~ m_n de la loi des cercles originels par les relations :

$$m_n = \pi\nu\left[m_2 m'_n + 2m_1 m'_{n+1} + m'_{n+2}\right]$$

Inversement, ces relations permettent de déterminer m_1 et m_2 à partir de ν et de $f(r)$, puis de reconstituer la loi originelle :

$$f_0(r) = \pi\nu\,(m_2+2m_1 r+r^2)\,f(r)$$