Journel A.
C-13c

COURS de PROBABILITES

Exercices

Octobre 1965

COURS de PROBABILITES

Exercices

Table des Matières

. . . / . . .

Table des Matières (suite)

... / ...

Table des Matières (suite)

E 1.- PROBLEME DES TROIS JOUEURS

Trois joueurs, A, B, C engagent une série de parties où ils auront à s'affronter deux à deux. A et B ouvrent le jeu en une première partie. Le vainqueur de la première partie - appelons le A - se mesure avec C lors d'une seconde partie. Si A l'emporte de nouveau, il a gagné le championnat. Si C, par contre, l'emporte, il prend B à partie. Si C est le vainqueur de cette troisième partie, C a gagné. Sinon B va rejouer avec A une quatrième partie et ainsi de suite. D'une façon générale, aura gagné le joueur qui remporte deux parties successives.(Bien distinguer le vainqueur d'une partie et le gagnant du championnat).

1°) - On demande de montrer, qu'à ce genre de championnat, il y a presque sûrement un gagnant, c'est-à-dire que le match ne saurait (presque sûrement) s'éterniser.

2°) - On calculera alors la probabilité a priori qu'à chacun des joueurs de gagner le championnat (probabilités p_A, p_B, p_C).

- Pour construire le raisonnement, on pourra se placer à une étape quelconque du championnat. A ce moment vont s'affronter le vainqueur de la partie précédente - que l'on pourrait appeler le favori F - et son adversaire immédiat - appelé E(ennemi) - Quant au troisième joueur - le mort M - il assiste passif. On formera un système très simple de relations entre les probabilités f, e, m qu'ont alors les trois joueurs F, E et M - non également favorisés - de gagner le championnat.

Ayant montré qu'il y a presque sûrement un gagnant au championnat, on est certain que :

$$f + e + m = 1$$

*

* *

1°)- Si une $\underline{n}$ ième partie a été jouée (probabilité ω_n de cet évènement), c'est-à-dire s'il n'est pas apparu de gagnant jusque là, il y a une probabilité $\frac{1}{2}$ que soit jouée une n+1 ième partie (probabilité ω_{n+1} de cet évènement) - à savoir que le vainqueur de la n-1 ième partie n'emporte pas la n ième partie mais son adversaire. Il en résulte que :

$$\omega_{n+1} = \frac{1}{2}\ \omega_n$$

depuis

$$\omega_3 = \frac{1}{2}$$

car les deux première parties sont inévitables. D'où

$$\omega_n = \frac{1}{2^{n-2}}$$

Lorsque n tend vers l'infini, la probabilité que le jeu dure encore tend vers zéro. Il est donc presque sûr que le jeu s'arrêtera après un nombre fini de parties par apparition d'un gagnant.

Ayant montré que le championnat ne saurait se prolonger indéfiniment, c'est-à-dire qu'il doit y avoir (presque sûrement) un gagnant, il est légitime de rechercher la probabilité de gagner qu'a chacun des joueurs.

A un certain stade du championnat vont s'affronter le vainqueur de la partie précédente : le favori F et son adversaire E. A l'issue de cette confrontation, deux éventualités :

- F est vainqueur : probabilité $\frac{1}{2}$, le championnat est terminé. F a gagné
- E est vainqueur : " $\frac{1}{2}$, le championnat continue mais,

E vient en position de favori, il joue avec
M qui vient en position d'adversaire,

Quant à F, il fait le mort.

Si donc E a remporté la partie, la situation est la même qu'en fin de partie précédente, à ceci près que :

F	est venu en position	de	M
E	" "	de	F
M	" "	de	E

Le théorème des probabilités totales et composées donne ainsi le système de relations :

$$f = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,m$$

$$e = \frac{1}{2}\,f$$

$$m = \frac{1}{2}\,e$$

soit

$$m = \frac{1}{4}\,f = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,m\right) \qquad \text{d'où}$$

$$\begin{cases} m = \frac{1}{7} \\ e = \frac{2}{7} \\ f = \frac{4}{7} \end{cases}$$

Le raisonnement précédent, formulé à un stade quelconque du championnat, peut être appliqué au début de la seconde partie, donc :

$$p_A = \frac{4}{7} \qquad p_B = \frac{2}{7} \qquad p_C = \frac{1}{7}$$

E 2.- PROBLEME DES CHROMOSOMES

Les cellules humaines comportent 24 paires de chromosomes. Les deux chromosomes d'une même paire sont en général un peu différents. Les gênes dont ils sont porteurs et qui commandent les caractères héréditaires ne sont pas en général identiques pour ces deux chromosomes. Envisageons par exemple la paire de chromosomes dont dépend la couleur des yeux. Les deux chromosomes de la paire peuvent porter chacun le gêne des yeux noirs N, ou chacun le gêne des yeux bleus B, ou encore l'un le gêne des yeux noirs et l'autre celui des yeux bleus.

On a donc pour cette paire les éventualités suivantes - avec leur probabilité respective :

$$\begin{pmatrix} N\ N & \text{probabilité } \alpha \\ N\ B & \text{probabilité } 2\beta \\ B\ B & \text{probabilité } \gamma \end{pmatrix} \qquad \alpha + 2\beta + \gamma = 1$$

α, β et γ étant comptées sur une population donnée : les normands par exemple ou les scandinaves.

Lors de la reproduction, la paire de chromosomes du père se scinde en ses deux chromosomes constituants, de même celle de la mère. Parmi les quatre chromosomes libérés, deux disparaissent (un du père et un de la mère) et les deux autres se constituent en paire dans l'oeuf selon les lois du hasard (du moins en première approximation) et formeront une partie du patrimoine de l'enfant.

On suppose que le père et la mère appartiennent à la même population de caractéristiques $\alpha, 2\beta, \gamma$.

1°) - On demande d'écrire les différentes combinaisons de gênes N(yeux noirs) et B(yeux bleus) qui peuvent se constituer avec les probabilités respectives.

2°)- D'évaluer, d'après ce tableau, ou <u>mieux d'une façon plus synthétique</u>, les probabilités d'avoir chez l'enfant respectivement

$$\begin{array}{lll} N\ N & \text{probabilité} & p_{NN} \\ B\ B & \text{probabilité} & p_{BB} \\ N\ B & \text{probabilité} & p_{NB} \end{array}$$

On considérera que NB est équivalent à BN.

3°)- De montrer que le patrimoine héréditaire est conservatif, c'est-à-dire que la probabilité p_N d'avoir N(ou p_B d'avoir B) dans son patrimoine génétique est la même pour les parents et pour l'enfant.

On sait que la couleur de l'iris dépend de ces combinaisons, le gène yeux noirs N l'emporte pour la couleur des yeux sur le gène yeux bleus B (le gène B est récessif, il peut exister à l'état latent et ne pas se manifester).

Ainsi :

la combinaison N N donnera des yeux noirs
la combinaison B B donnera des yeux bleus
la combinaison N B donnera des yeux noirs (dits noirs impurs).

Il n'est pas impossible que des parents aux yeux noirs engendrent un enfant aux yeux bleus. Il est par contre impossible (selon la théorie du moins !) à des parents aux yeux bleus d'avoir un enfant aux yeux noirs.

*

* *

1°) - Voici le tableau des combinaisons possibles chez l'enfant. Les probabilités sont écrites entre parenthèses.

Parents	N N (α)	N B (2β)	B B (γ)	($p_N = \alpha + \beta$) ($p_B = \gamma + \beta$)
N N (α)	N N (α^2)	N N ($\alpha\beta$) N B ($\alpha\beta$)	N B ($\alpha\gamma$)	
N B (2β)	N N ($\alpha\beta$) N B ($\alpha\beta$)	N N (β^2) N B ($2\beta^2$) B B (β^2)	N B ($\beta\gamma$) B B ($\beta\gamma$)	
B B (γ)	N B ($\alpha\gamma$)	N B ($\beta\gamma$) B B ($\beta\gamma$)	B B (γ^2)	
($p_N = \alpha + \beta$) ($p_B = \gamma + \beta$)				

2°) - La probabilité d'avoir N N s'évalue en dénombrant les combinaisons N N sur le tableau précédent. Plus simplement, comme les évènements sont indépendants, la probabilité d'avoir N N chez l'enfant est égale au produit des probabilités d'avoir N chez le père et N chez la mère (probabilité composée pour des évènements indépendants).

$$p_{NN} = p_N\, p_N = (p_N)^2 = \underline{(\alpha + \beta)^2}$$

De façon analogue

$$p_{BB} = (p_B)^2 = \underline{(\alpha + \beta)^2}$$

La probabilité d'avoir N B chez l'enfant est égale à la probabilité d'avoir N chez le père et B chez la mère augmentée de la probabilité d'avoir B chez le père et N chez la mère (probabilités totales et composées).

$$p_{NB} = p_N \, p_B + p_B \, p_N = 2p_N \, p_B = 2(\alpha + \beta)\,(\gamma + \beta)$$

$$p_{NN} = (\alpha + \beta)^2$$

$$p_{NB} = (2(\alpha + \beta)(\gamma + \beta)$$

$$p_{BB} = (\gamma + \beta)^2$$

$$p_{NN} + p_{NB} + p_{BB} = 1$$

3°)- La probabilité p'_N qu'a l'enfant d'avoir N dans son patrimoine est égale au rapport du nombre d'évènements favorables au nombre total d'évènements possibles :

$$p'_N = \frac{2(\alpha + \beta)^2 + 2(\alpha + \beta)(\gamma + \beta)}{2} = (\alpha + \beta)^2 + (\alpha + \beta)(\gamma + \beta) = (\alpha + \beta)(\alpha + 2\beta + \gamma)$$

de même

$$p'_N = \alpha + \beta = p_N$$

$$p'_B = \gamma + \beta = p_B$$

Il y a même probabilité de trouver le gène $N(p'_N)$ chez l'enfant que chez les parents (p_N). Le patrimoine génétique est conservatif.

E 3.- MISE EN PLACE DE PARTICULES DANS DES CASES

Cet exercice vise à résoudre de façon élémentaire une question dont il sera donné ultérieurement une solution beaucoup plus élégante par le biais de la "poissonnisation".

On met en place n particules dans N cases. Chaque particule a la même chance de tomber dans chacune des cases. Une même case peut recevoir plusieurs particules : on a affaire à N^n évènements élémentaires équiprobables.

1°) Calculer la probabilité $P_o(n,N)$ pour que les cases soient toutes occupées. On pourra, pour cela chercher la probabilité $Q_o(n,N) = 1 - P_o(n,N)$ pour que l'une au moins des N cases soit vide. Etablir :

$$P_o(n,N) = 1 - C_N^1\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n + \ldots\ldots (-1)^k C_N^k \left(1 - \frac{k}{N}\right)^n + \ldots (-1)^N C_N^N\left(1 - \frac{N}{N}\right)^n$$

soit

(1) $$P_o(n,N) = \sum_{k=o}^{N} (-1)^k \; C_N^k\left(1 - \frac{k}{N}\right)^n$$

2°) D'une façon plus générale, on cherche la probabilité $P_m(n,N)$ d'avoir exactement m cases vides.

On pourra désigner par

(2) $$A_{n,N} = N^n \; P_o(n,N)$$

le nombre de configurations ne laissant aucune case vide.

Montrer que le nombre de configurations laissant exactement m cases vides est :

(3) $$C_n^m \; A_{n,N-m}$$

En déduire l'expression de $P_m(n,N)$

(4) $$P_m(n,N) = C_N^m \sum_{k=o}^{n-m} (-1)^k \, C_{N-m}^k\left(1 - \frac{m+k}{N}\right)^n$$

3°) <u>Etablir par un raisonnement probabiliste simple la relation de récurrence</u> :

$$(5) \qquad P_m(n+1,N) = \frac{N-m}{N} P_m(n,N) + \frac{m+1}{N} P_{m+1}(n,N)$$

Remarquer que l'on peut démontrer l'expression (4) à partir de la relation (5) et de l'expression (1) des $P_o(n,N)$.

4°) Montrer que la probabilité $U_p(n,N)$ pour que $\underline{p}$ <u>cases données</u> soient occupées est :

$$(6) \qquad U_p(n,N) = \sum_{k=o}^{p} (-1)^k \; C_p^k \left(1 - \frac{k}{N}\right)^n$$

On procédera de façon analogue à celle qui a permis d'établir la relation (1) : on pourra chercher à déterminer la probabilité $V_p(n,N) = U_p(n,N)$ pour que l'une au moins des p cases ne soit pas occupée.

*

* *

1°) Si $a_1, a_2 \ldots\ldots a_i \ldots\ldots a_N$ sont les évènements " aucune des n particules n'atteint la case numéro i " et

(a_i) la probabilité que la case i ne soit pas atteinte $a_i = (1 - \frac{1}{N})^n$

(a_{ij}) la probabilité pour que ni la case i ni la case j ne soient atteintes

$$a_{ij} = (1 - \frac{2}{N})^n$$

$(a_{i_1 i_2 \ldots i_k})$ la probabilité pour qu'aucune des cases $i_1, i_2 \ldots i_k$ ne soit atteinte

$$a_{i_1 i_2 \ldots i_k} = (1 - \frac{k}{N})^n$$

et $S_1, S_2, \ldots S_k$ les fonctions symétriques

$$S_1 = \sum_i a_i \quad (C_N^1 \text{ termes égaux}) \quad S_1 = C_N^1 (1 - \frac{1}{N})^n$$

$$S_2 = \sum_{ij} a_{ij} \quad (C_N^2 \text{ termes égaux}). \quad S_2 = C_N^2 (1 - \frac{2}{N})^n$$

$$S_k = \sum_{i_1 i_2 \ldots i_k} a_{i_1 i_2 \ldots i_k} \quad (C_N^k \text{ termes égaux}) \quad S_k = C_N^k (1 - \frac{k}{N})^n$$

La probabilité $Q_o(n,N)$ pour que l'un au moins des évènements $a_1, a_2 \ldots a_i \ldots a_N$ se produise est donnée par le <u>théorème généralisé des probabilités totales</u> :

$$Q_o(n,N) = P\left\{a_1 \dot{+} a_2 \dot{+} \ldots \dot{+} a_N\right\} = S_1 - S_2 + \ldots (-1)^{k-1} S_k + \ldots (-1)^{N-1} S_N$$

$$Q_o(n,N) = C_N^1 (1 - \frac{1}{N})^n - C_N^2 (1 - \frac{2}{N}) + \ldots (-1)^{N-1} (1 - \frac{N}{N})^n$$

d'où

$$(1) \qquad \boxed{P_o(n,N) = 1 - Q_o(n,N) = \sum_{k=o}^{N} (-1)^k \, C_N^k (1 - \frac{k}{N})^n}$$

2°) Le nombre de configurations ne laissant aucune case vide est :

(2) $$A_{n,N} = N^n P_o(n,N)$$

Désignons par $A_{n,N}(m)$ le nombre de configurations laissant m cases vides. Si l'on retranche de l'une de ces configurations les m cases vides, on obtient une configuration à <u>N-m</u> cases et <u>sans case vide</u>.

Or, parmi toutes les configurations à m cases vides, il y a C_N^m manières d'enlever les m cases vides. On a donc

(3) $$A_{n,N}(m) = C_N^m \; A_{n,N-m}$$

Soit d'après (2)

$$A_{n,N}(m) = C_N^m (N-m)^m \; P_o(n,N-m)$$

On obtient la probabilité correspondante $P_m(n,N)$ en divisant par le nombre total d'évènements élémentaires possibles N^n

$$P_m(n,N) = C_N^m \left(1 - \frac{m}{N}\right)^n P_o(n,N-m)$$

Et d'après l'expression (1) de $P_o(n,N)$

$$P_m(n,N) = C_N^m \sum_{k=o}^{N-m} (-1)^k \; C_{N-m}^k \left(1 - \frac{k}{N-m}\right)^n \left(1 - \frac{m}{N}\right)^n$$

(4) $$\boxed{P_m(n,N) = C_n^m \sum_{k=o}^{N-m} (-1)^k \; C_{N-m}^k \left(1 - \frac{m+k}{N}\right)^n}$$

3°) Supposons que l'on jette une à une les particules. Pour avoir m cases vides au n+1 ième jet, il y a deux possibilités et deux seulement :

- avoir m cases vides au <u>n</u> ième jet et la n+1 ième particule tombant dans l'une des N-m cases pleines,

- avoir m+1 cases vides au n ième jet et la n+1 ième particule tombant dans l'une des m+1 cases vides.

La probabilité a priori $P_m(n+1,N)$ s'obtient donc par pondération de $P_m(n,N)$ et de $P_{m+1}(n,N)$ respectivement par $\frac{N-m}{N}$ et $\frac{m+1}{N}$ (d'après le théorème des probabilités totales et composées.

$$\boxed{P_m(n+1,N) = P_m(n,N)\,\frac{N-m}{N} + P_{m+1}(n,N)\,\frac{m+1}{N}} \tag{5}$$

Il était évidemment possible d'obtenir la relation (5) à partir de l'expression générale (4). Inversement l'expression générale (4) vérifie (5) quel que soit m. Si donc l'expression (4) est exacte pour m, elle est exacte pour $m+1$. Or il a été établi directement que l'expression (4) est vérifiée pour $m = 0$. L'expression (4) est donc générale.

4°) Pour calculer la probabilité $U_p(n,N)$ pour que p cases données soient occupées, on déterminera la probabilité $V_p(n,N)$ pour que l'une au moins des p cases ne soit pas occupée. Si (a_i), $(a_{ij})\ldots(a_{i_1 i_2\ldots i_k})$ désignent, de façon tout-à-fait analogue à ce qui a été dit au 1°), les probabilités pour que les cases i, i et $j,\ldots$ $i_1,i_2\ldots i_k$, appartenant au groupe des p cases données, c'est-à-dire k pouvant varier de 1 à p et non plus de 1 à N comme dans le 1°) ne soient pas atteintes par les n particules, ont mêmes expressions qu'au 1°).

Cependant, le nombre de termes dans les sommes $S_1, S_2\ldots S_k$ est respectivement C_p^1, $C_p^2\ldots C_p^k$

Le théorème généralisé des probabilités totales donne alors :

$$V_p(n,N) = C_p^1\left(1-\frac{1}{N}\right)^n - C_p^2\left(1-\frac{2}{N}\right)^n + \ldots(-1)^{k-1} C_p^k\left(1-\frac{k}{N}\right)^n + \ldots(-1)^{p-1} C_p^p\left(1-\frac{p}{N}\right)^n$$

soit

$$\boxed{U_p(n,N) = 1 - V_p(n,N) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k\, C_p^k\left(1-\frac{k}{N}\right)^n} \tag{6}$$

E 4.- PROBLEME DU SCRUTIN

Il y a, dans une urne, p bulletins de vote en faveur du candidat A et m en faveur du candidat B, p étant supérieur à m. Le dépouillement s'effectue par tirages successifs de sorte qu'à chaque tirage chacun des bulletins restant dans l'urne a la même chance d'être tiré.

- On cherche la probabilité $P(p,m)$ pour que le candidat A mène du début à la fin du dépouillement.

On désigne x_k une variable aléatoire attachée à chaque tirage telle que

$x_k = +1$ si le tirage est pour le candidat A,

et $x_k = -1$ si le tirage est pour le candidat B.

On forme à chaque tirage la somme

$$X_i = \sum_{k=1}^{i} x_k$$

celle-ci représente l'avantage (algébrique) du candidat A sur le candidat B au i ième tirage. Le candidat A mènera du début jusqu' à la fin si $(X_1, X_2 \ldots X_{p+m})$ sont tous positifs. $P(p,m)$ est la probabilité d'un tel évènement.

Il sera commode de tracer le diagramme des avantages donnant les X_i en ordonnées en fonction du numéro du tirage X. Un évènement $(X_1, X_2 \ldots X_{p+m})$ sera représenté par un chemin en escalier reliant l'origine 0 au point A de coordonnées $(p+m, p-m)$. Pour que le candidat A mène du début à la fin, le chemin ne doit pas couper l'axe des X.

a) - Donner le nombre de chemins possibles reliant 0 à A.

b) - Tout chemin favorable (ne rencontrant pas l'axe X) passe obligatoirement par le point $B(1,1)$. On cherchera donc à dénombrer le nombre de chemins favorables (ne rencontrant pas OX) et joignant B à A.

On associe à B son symétrique $B'(1,-1)$ par rapport à l'axe des X. A l'aide d'une méthode de réflexion dans un miroir figuré par l'axe OX, on pourra dénombrer les mauvais chemins (rencontrant l'axe OX) joignant B à A. On en déduira le nombre des chemins favorables et la probabilité que le candidat A mène du début à la fin.

c) - On peut retrouver de façon encore plus rapide ce résultat sur un diagramme en (p_i, m_i) sur lequel on porte le nombre des bulletins $\underline{p_i}$ favorables au candidat A, en abscisses, et en ordonnées, le nombre $\underline{m_i}$ de bulletins favorables au candidat B, <u>ces bulletins étant totalisés</u> au i ième tirage. Le chemin est tracé paramétriquement en fonction du numéro du tirage. On déduira le résultat du principe de réflexion et de l'analyse des chemins passant par les points $A_1(1,0)$ et $B_1(0,1)$ qui peuvent être atteints à partir de l'origine lors du premier tirage.

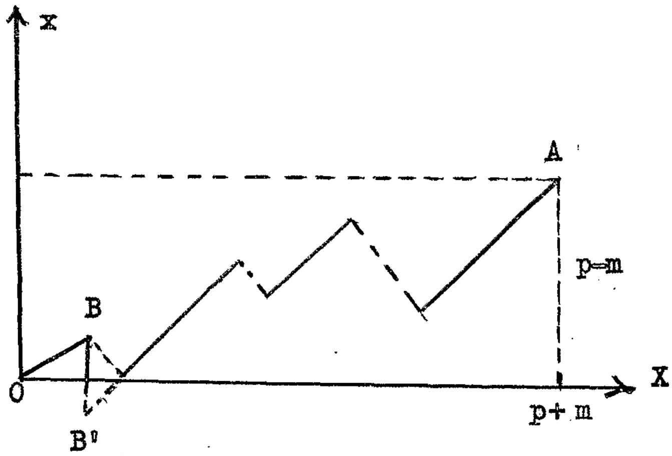
*

* *

PROBLEME DU SCRUTIN

a) <u>Le nombre de chemins favorables ou non</u> joignant O à A est égal au nombre de combinaisons de $p+m$ objets m à m (ou p à p) :

$$C^m_{p+m}$$



b) <u>Tout chemin favorable</u> (ne rencontrant pas l'axe des X) passe nécessairement par le point B. Il y a au total :

$$C^m_{p+m-1} \quad \text{chemins favorables ou non joignant B à A.}$$

Or, à tout mauvais chemin passant par le point B, c'est-à-dire joignant B à A en rencontrant l'axe OX correspond un chemin joignant à A. Le symétrique B' de B et la correspondance est biunivoque. On en conclut que le nombre de mauvais chemins passant par B est égal au <u>nombre total de chemins joignant B' à A.</u> Or le nombre de chemins joignant B' à A s'obtient en intervertissant les deux candidats (symétrie) c'est-à-dire en permutant m et p dans la dernière formule

$$C^p_{p+m-1}$$

Tel est donc le nombre de mauvais chemins joignant B à A. Le nombre de chemins favorables est alors égal à la différence du nombre total de chemins issus de B et allant à A. C^m_{p+m-1} et du nombre de mauvais chemins allant de B à A : C^p_{p+m-1}

Le nombre de chemins favorables est donc :

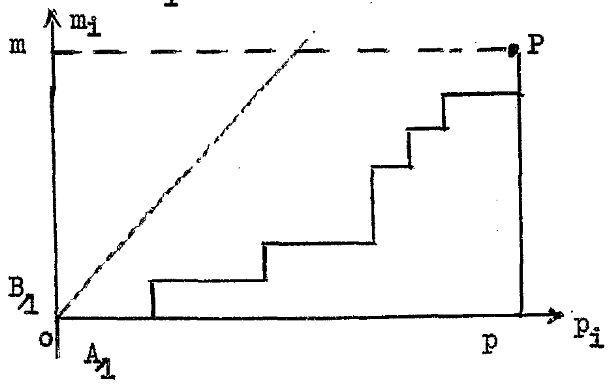
$$C^m_{p+m-1} - C^p_{p+m-1} = \frac{(p+m-1)!}{m!(p-1)!} - \frac{(p+m-1)!}{p!(m-1)!} = \frac{(p+m)!}{p!\ m!}\ \frac{p-m}{p+m}$$

$$\boxed{\text{Nombre de chemins favorables issus de O(ou de B)} = \frac{p-m}{p+m}\, C_{p+m}^{m}}$$

Comme il y a un nombre total de chemins possibles joignant O à A égal à C_{p+m}^{m}, on en déduit la probabilité d'un chemin favorable (rapport du nombre d'évènements favorables au nombre total d'éventualités) c'est-à-dire que le candidat A mène du début à la fin est

$$\boxed{P(p,m) = \frac{p-m}{p+m}}$$

c) On peut retrouver le résultat précédent de façon encore plus simple, sur un diagramme en $p_i\ m_i$) p_i est le nombre de bulletins en faveur de A et m_i le nombre de bulletins en faveur de B totalisés au i ième tirage.



Tout chemin favorable doit être entièrement situé en dessous de la première bissectrice. Tout chemin passant par B_1 est donc un mauvais chemin. Or d'après le principe de réflexion, il y a autant de chemins issus de B_1 que de mauvais chemins issus de A_1.

La probabilité d'un mauvais chemin est donc le double de la probabilité pour que l'on se trouve en B_1 au premier tirage. Or la probabilité de se trouver en B_1 au premier tirage est évidemment :

$$\frac{m}{p+m}$$

La probabilité d'un mauvais chemin est donc

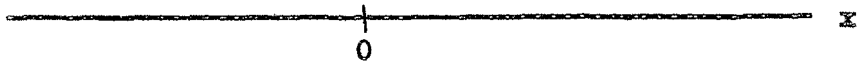
$$\frac{2m}{p+m}$$

et celle d'un chemin favorable

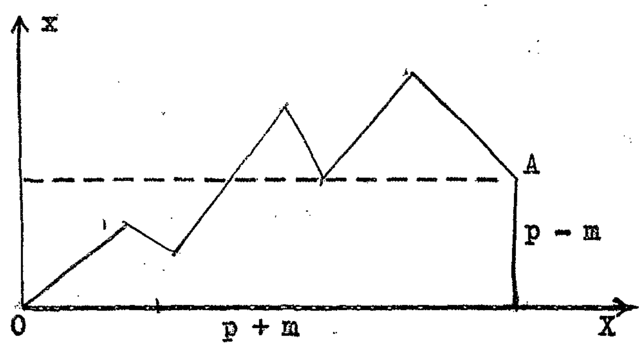
$$P(p,m) = 1 - \frac{2m}{p+m} = \frac{p-m}{p+m}$$

E 5.- PROMENADE ALEATOIRE OU JEU DE PILE OU FACE

Aux temps $t = 1, 2 \ldots$ une particule se déplace de $+1$ ou -1 sur un axe avec la probabilité $\frac{1}{2}$ pour chaque éventualité. Elle est à l'origine $x = 0$ au temps $t = 0$.



a) Trouver la probabilité $P_n(k)$ pour que le point d'abscisse k soit atteint pour la première fois à l'époque $t = n$ (premier passage par $x = k$). Remarquer que n doit avoir la même parité que k : distinguer le cas pair et le cas impair.



On remarquera que la question de la promenade aléatoire est analogue au problème du scrutin abordé dans un exercice antérieur. Les principales formules peuvent être déduites des deux principaux résultats mentionnés alors.

Si l'on porte sur un diagramme les points figuratifs des sommes algébriques obtenues à chaque tirage et chiffrant l'avantage d'un candidat sur son adversaire, on représente également la position de la particule dans le temps.

Si l'on s'occupe de dénombrer les chemins reliant l'origine 0 au point A de coordonnées $(p + m, p - m)$, il y a :

$$C_{p+m}^{m} = C_{p+m}^{p}$$ chemins possibles (propriété A)

$$\frac{p - m}{p + m} \; C_{p+m}^{m}$$ chemins possibles et ne touchant pas l'axe des X(propriété B).

Par ailleurs, il y a autant de chemins joignant 0 et A $(p + m, p - m)$ sans toucher l'axe des z que de chemins qui atteignent l'ordonnée $p-m$ de A pour la première fois en A

$$\frac{p - m}{p + m} \; C_{p+m}^{p}$$ chemins possibles atteignant la cote de A pour la première fois en A (propriété B).

Les analogies avec les notions de passage de la particule en un point d'abscisse $x = k$ à un temps n, et de premier passage en ce point sont manifestes. On peut se représenter, si l'on veut, la promenade aléatoire comme la projection sur l'axe Ox perpendiculaire à OX du diagramme des avantages.

b) Premier retour : Trouver la probabilité P_{2n} pour que la particule revienne pour la première fois à l'origine au temps (nécessairement pair) $2n$.

Il sera commode de déduire la solution de ce qui se passe à l'instant $t = 1$.

c) k ième retour à l'origine au temps $2n$: Trouver la probabilité P_{2n}^{k}

Montrer d'abord que p étant une abscisse comprise entre 0 et k, on a la relation :

$$P_n(k) = \sum_{q=1}^{n} P_q(p) \; P_{n-q}(k-p) \qquad p < k$$

Etablir ensuite, par récurrence en k la propriété :

$$P_{2n}^{k} = P_{2n-k}(k)$$

On admettra cette propriété vraie pour k et on montrera qu'elle subsiste pour $k+1$.

d) Trouver la probabilité U_{2n} d'avoir un retour à l'origine au temps $2n$.

Ce retour n'est pas en général le premier. U_{2n} est donc égal à :

$$U_{2n} = \sum_{k=1}^{\infty} P_{2n}^{k} \qquad (U_0 = 1 \text{ conventionnellement})$$

Etablir que :

$$U_{2n} = \frac{C_{2n}^{n}}{2^{2n}}$$

On se gardera bien de calculer cette somme, la propriété découle immédiatement du résultat A des "scrutins" rappelé plus haut.

e) Démontrer que la probabilité pour qu'aucun retour ne se produise entre les temps 0 et 2n est aussi égale à U_{2n}

A cette fin, établir analytiquement la relation :

$$U_{2n} - U_{2n-2} = - P_{2n}$$

calculer U_{2n} et conclure. Montrer que U_{2n} tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. En déduire qu'il y a presque certainement retour à l'origine lorsque la partie se prolonge indéfiniment.

f) Trouver la probabilité V_{2n}^{k} qu'il y ait k retours exactement des instants 0 à 2n

Etablir tout d'abord la relation :

$$U_{2n} = P_{2n} + \sum_{k=1}^{n-1} P_{2k} \; U_{2n-2k} \qquad \text{soit}$$

$$U_{2n} = \sum_{k=1}^{n} P_{2k} \; U_{2n-2k} \qquad (U_0 = 1 \text{ conventionnellement})$$

U_{2n} est donc aussi la probabilité V_{2n}^{1} pour qu'il y ait exactement un retour de 0 à 2n.

(pour $n \geqslant 1$ $\quad V_{2n}^{1} = U_{2n}$, et évidemment $V_0^{1} = 0$)

Démontrer que la probabilité pour qu'il y ait exactement 2 retours de 0 à 2n est donnée par :

$$V_{2n}^{2} = U_{2n} - P_{2n}$$

d'où

$$V_{2n}^{2} = \frac{1}{2^{2n-2}} \; C_{2n-2}^{n}$$

En conclure, par un raisonnement utilisant la propriété A que V_{2n}^{2} est égale à la probabilité d'atteindre (pas nécessairement pour la première fois) le point $x = 2$ au temps $2n - 2$.

Généraliser cette propriété et démontrer que V_{2n}^{k} probabilité de k retours exactement de 0 à 2n est égale à la probabilité d'atteindre (pas nécessairement pour la première fois) le point $x = k$ au temps $2n - k$.

On commencera par montrer que :

$$V_{2n}^{k+1} = \sum_{q=1}^{n} V_{2q}^{k} \; V_{2n-2q}^{1}$$

On raisonnera alors par récurrence en k en supposant la propriété énoncée vraie pour V_{2n}^{k} et à l'aide de la relation qui vient d'être écrite, on constatera qu'elle est vraie pour V_{2n}^{k+1}.

On conclura alors, par un raisonnement analogue utilisant la propriété A que :

$$V_{2n}^{k} = \frac{1}{2^{2n-k}} C_{2n-k}^{n}$$

Loi limite pour le nombre exact de retours N(n) lorsque n est grand.

- Etablir, à l'aide de la formule de Stirling que :

$$U_{2n} = \frac{1}{2^{2n}} C_{2n}^{n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \quad \text{lorsque } n \text{ tend vers l'infini.}$$

- En déduire que

$$V_{2n}^{k} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} e^{-\frac{k^2}{4n}}$$

- Ecrire la fonction de répartition du nombre de retours de 0 à 2n, c'est-à-dire :

$$\text{Prob} \left\{ N(n) \leqslant k \right\}$$

- Donner l'espérance mathématique du nombre de retours

$$E\left[N(n)\right]$$

et le temps de retour moyen sur une longue série :

$$\frac{2n}{E\left[N(n)\right]}$$

g) Temps passé au dessus de l'axe des X (c'est-à-dire à abscisses x positives)

Calculer la probabilité $H_{2n,2k}$ pour que la particule reste un temps 2k au dessus de l'axe des X, de l'époque 0 à l'époque 2n. Il n'est absolument pas supposé que le temps 2k s'écoule d'une seule traite.

- Etablir

$$H_{2n,2k} = H_{2n,2n-2k}$$

- Prouver par récurrence en n que :

$$H_{2n,2k} = U_{2k} U_{2n-2k}$$

1°) Tout d'abord pour $k = 0$ (ou pour $k = n$, ce qui revient au même).

On pourra écrire que $H_{2n,0}$ est la probabilité pour qu'un premier passage par $x = 1$ n'ait pas lieu de l'époque 0 à l'époque $2n$ et on en déduira que $H_{2n,0} = U_{2n}$.

2°) - pour $k \neq 0$ et $k \neq n$. On formulera qu'un premier retour à l'origine a eu lieu à l'époque $t = 2q$ et que de 0 à $2q$ la particule est restée soit toujours au dessus, soit toujours au dessous de l'axe des X (on raisonnera ensuite par récurrence en n) admettant que la propriété énoncée est vraie jusqu'à l'indice $2n - 2$ et à l'aide de la formulation précédente, on verra qu'elle subsiste pour l'indice $2n$.

- A partir de l'expression $H_{2n,2k} = U_{2n-2k}\ U_{2k}$

  trouver la loi limite du temps passé au dessus de l'axe des X lorsque k et $n-k$ sont grands.

Donner la fonction de répartition c'est-à-dire la probabilité pour que le temps passé au dessus de l'axe des X soit supérieur à $2k$.

$$F(2k)$$

et la fonction de répartition du temps passé au dessus de l'axe des X en valeur relative c'est-à-dire

$$G(\alpha) = \text{Prob}\left\{ \frac{k}{n} \leqslant \alpha \right\}$$

*

* *

a) Selon la propriété A' rappelée dans l'énoncé, il y a

(1) $$\frac{p-m}{p+m} C_{p+m}^{m}$$

chemins reliant 0 à A(p+m, p-m) et atteignant l'altitude p-m pour la première fois en A. Il en résulte la solution de la question posée à propos de la promenade aléatoire: atteinte pour la première fois de l'abscisse $x = 2k$ au temps $2n$.

Posant donc $\begin{cases} p + m = 2n \\ p - m = 2k \end{cases}$

le nombre de tels cheminements est $\frac{k}{n} C_{2n}^{n-k}$

La probabilité s'obtient en divisant par le nombre total 2^{2n} d'itinéraires possibles en $2n$ pas (n'aboutissant pas en général à $x = 2k$ au temps $t = 2n$).

Si l'abscisse atteinte est impaire $= 2k + 1$, le temps sera aussi impair du type $2n+1$. On pose alors

$$p + m = 2n + 1$$
$$p - m = 2k + 1$$

le nombre de cheminements est $\frac{2k+1}{2n+1} C_{2n+1}^{n-k}$

D'où :

(2) $$P_{2n}(2k) = \frac{1}{2^{2n}} \frac{k}{n} C_{2n}^{n-k}$$

(3) $$P_{2n+1}(2k+1) = \frac{1}{2^{2n+1}} \frac{2k+1}{2n+1} C_{2n+1}^{n-k}$$

b) Probabilité d'un premier retour à l'origine au temps 2n.

A l'instant $t = 1$ la particule est, soit en $x = 1$ avec la probabilité $\frac{1}{2}$ soit en $x = -1$ avec la même probabilité $\frac{1}{2}$. donc :

$$P_{2n} = \frac{1}{2} \text{ Prob } \{\text{d'aller de } 1 \text{ à } 0 \text{ pendant } 2n-1 \text{ unités de temps}\}$$
$$+ \frac{1}{2} \text{ Prob } \{\text{d'aller de } -1 \text{ à } 0 \text{ pendant } 2n-1 \text{ unités de temps}\}$$

Ces deux probabilités sont manifestement égales et égales à $P_{2n-1}(1)$

(4) $$P_{2n} = P_{2n-1}(1)$$

soit d'après la formule (3) pour $n \longrightarrow n-1$ et $k = 0$

(5) $$P_{2n} = \frac{1}{2^{2n-1}} \cdot \frac{1}{2n-1} \; C_{2n-1}^{n}$$

c) k ième retour à l'origine au temps 2n : trouver la probabilité $\overset{k}{P}_{2n}$

Pour passer pour la première fois en $\underline{k}$ au temps n, il faut être passé par une abscisse $\underline{p} < \underline{k}$ à une époque q antérieure à n, puis être passé de p à k pour la première fois pendant l'intervalle de temps n-q. En sommant sur tous les instants possibles de passage en p :

(6) $$P_n(k) = \sum_{q=1}^{n} P_q(p) + P_{n-q}(k-p) \qquad p < k$$

Ceci posé, cherchons à établir la loi de récurrence :

(7) $$\overset{k}{P}_{2n} = P_{2n-k}(k)$$

et supposons la démontrée pour l'indice k.

Pour être revenu pour la k+1 ième fois à l'origine au temps 2n, il faut y être revenu pour la première fois en un instant 2q compris entre 0 et 2n puis être revenu de nouveau k fois à l'origine entre les instants 2q et 2n. En sommant sur tous les instants q possibles :

(8) $$P_{2n}^{k+1} = \sum_{q} \overset{1}{P}_{2q} \; \overset{k}{P}_{2n-2q}$$

Or d'après (4)

$$\overset{1}{P}_{2q} = P_{2q} = P_{2q-1}(1)$$

et d'après l'hypothèse (7)

$$P_{2n-2q}^{k} = P_{2n-2q-k}(k)$$

portant en (8)

(9) $$P_{2n}^{k+1} = \sum_{q} P_{2n-2q-k}(k) \quad P_{2q-1}(1)$$

Si on écrit la relation (6) en y faisant :

$$\begin{aligned} p &\longrightarrow 1 \\ q &\longrightarrow 2q - 1 \\ k &\longrightarrow k + 1 \\ n &\longrightarrow 2n - k - 1 \end{aligned}$$

on obtient

$$P_{2n-k-1}(k+1) = \sum_q P_{2q-1}(1) \; P_{2n-2q-k}(k)$$

soit finalement

(10) $$P_{2n}^{k+1} = P_{2n-k-1}(k+1)$$

Si donc la propriété est vraie pour l'indice k, elle subsiste pour k+1. Etant vraie pour $k = 1$, elle est générale.

d) <u>Probabilité U_{2n} qu'il y ait un retour (qui n'est pas en général le premier) à l'origine au temps 2n.</u>

(11) $$U_{2n} = \sum_{k=1}^{\infty} P_{2n}^{k}$$

La propriété A dénombre les chemins menant de 0 à A, l'altitude de A ayant pu être déjà atteinte entre 0 et A. Ceci correspond, en projection sur l'axe Ox, à un passage de la particule par une position qui a pu être antérieurement dépassée.

En prenant, dans le diagramme, une altitude nulle pour A, on obtient la probabilité de passage de la particule par l'origine à une époque donnée.

$$\begin{aligned} p + m &= 2n \\ p - m &= 0 \end{aligned}$$

$$U_{2n} = \frac{1}{2^{2n}} \; C_{m+p}^{p}$$

(12) $$\underline{U_{2n} = \frac{1}{2^{2n}} \; C_{2n}^{n}}$$

e) Probabilité pour qu'aucun retour ne se produise entre 0 et 2n

On a

$$U_{2n} - U_{2n-2} = \frac{1}{2^{2n}} C_{2n}^{n} - \frac{1}{2^{2n-2}} C_{2n-2}^{n-1} = \frac{1}{2^{2n}} \frac{(2n)!}{(n!)^2} - \frac{1}{2^{2n-2}} \frac{(2n-2)!}{\left[(n-1)!\right]^2}$$

$$U_{2n} - U_{2n-2} = \frac{1}{2^{2n-2}} \frac{(2n-2)!}{\left[(n-1)!\right]^2} \left\{ \frac{n(2n-1)}{2n^2} - 1 \right\} = \frac{1}{2^{2n-1}} \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}$$

(13) $$U_{2n} - U_{2n-2} = - \frac{1}{2^{2n-1}} \frac{1}{2n-1} C_{2n-1}^{n} = - P_{2n}$$

d'après la formule (5).

En sommant de telles relations (13) de $k = 1$ à n et notant que $U_0 = 1$

(14) $$U_{2n} = 1 - \sum_{k=1}^{n} P_{2k}$$

$\sum_{k=1}^{n} P_{2k}$ est la probabilité pour qu'il y ait au moins un retour à l'origine de 1 à 2n.

U_{2n} représente donc aussi la probabilité pour qu'il n'y ait aucun retour de 1 à 2n.

Comme, n tendant vers l'infini : $U_{2n} = \frac{1}{2^{2n}} C_{2n}^{n} \sim \frac{(2n)!}{2^{n}(n!)^2} \sim \frac{(2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{4\pi n}}{2^{2n}\, n^{2n} e^{-2n}\, 2\pi n}$

d'après la formule de Stirling

(15) $$U_{2n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \quad \text{lorsque } n \text{ tend vers l'infini}$$

Donc U_{2n} tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini : il y a donc presque certainement retour à l'origine lorsque la partie se prolonge indéfiniment.

f) Probabilité V_{2n}^{k} de k retours exactement de 0 à 2n.

Un retour au temps $2n$ est un premier retour, ou bien ce retour a été précédé d'un premier retour en un temps $2k$ inférieur à $2n$. La probabilité totale s'obtient en sommant ces évènements qui s'excluent mutuellement :

(16) $$U_{2n} = P_{2n} + \sum_{k=1}^{n-1} P_{2k}\, U_{2n-2k} = \sum_{k=1}^{n} P_{2k}\, U_{2n-2k} \qquad U_0 = 1$$

Mais, venons-nous de voir en (e), U_{2n-2k} est <u>aussi</u> la probabilité pour qu'il n'y ait aucun retour entre les temps 2k et 2n.

L'égalité (16) montre alors que U_{2n} est aussi la probabilité $\overset{1}{V}_{2n}$ pour qu'il y ait exactement un retour de 1 à 2n

(17) $$n \geqslant 1 \qquad \overset{1}{V}_{2n} = U_{2n} = \frac{C_{2n}^{n}}{2^{2n}} = \frac{1}{2^{2n-1}} C_{2n-1}^{n} \qquad (\overset{1}{V}_{0} = 0)$$

<u>Ceci posé</u>, calculons directement $\overset{2}{V}_{2n}$

Pour qu'il y ait exactement 2 retours au temps 2n, il faut qu'il y ait eu un premier retour à l'instant $2k < 2n$ et un seul retour entre les temps 2k et 2n.

$$\overset{2}{V}_{2n} = \sum_{k=1}^{n-1} P_{2k} \overset{1}{V}_{2n-2k} = \sum_{k=1}^{n-1} P_{2k} U_{2n-2k}$$

Cette somme n'est autre que $U_{2n} - P_{2n}$ d'après (16), d'où

(18) $$\overset{2}{V}_{2n} = U_{2n} - P_{2n}$$

Or

$$(12) \qquad U_{2n} = \frac{1}{2^{2n}} C_{2n}^{n}$$

$$P_{2n} = \frac{1}{2^{2n-1}} \frac{1}{2n-1} C_{2n-1}^{n}$$

$$\overset{2}{V}_{2n} = U_{2n} - P_{2n} = \frac{1}{2^{2n}} \frac{(2n)!}{(n!)^2} - \frac{1}{2^{2n-1}} \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} = \frac{1}{2^{2n-1}} \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} \left[2n-1 - 1\right] = \frac{1}{2^{2n-2}} \frac{(2n-2)!}{n!(n-2)!}$$

(19 $$\overset{2}{V}_{2n} = \frac{1}{2^{2n-2}} C_{2n-2}^{n}$$

On voit ici une expression parente de (12). Et en effet si l'on applique la propriété A de l'énoncé avec

$$\begin{cases} p + m = 2n - 2 \\ p - m = 2 \end{cases}$$

on voit que la probabilité d'atteindre (pas nécessairement pour la première fois) le point d'abscisse 2 à l'instant 2n-2 est

$$\frac{1}{2^{2n-2}} C_{p+m}^{p} = \frac{1}{2^{2n-2}} C_{2n-2}^{n} \tag{20}$$

Ainsi

V_{2n}^{2} est aussi la probabilité d'atteindre $x = 2$ au temps $2n-2$.

De façon analogue d'après la formule (17) <u>on voit que V_{2n}^{1} est aussi la probabilité d'atteindre $x = 1$ au temps $2n-1$.</u>

Cherchons à généraliser la propriété que nous subodorons à savoir que

V_{2n}^{k} est la probabilité d'atteindre $x = k$ au temps $2n-k$.

Nous supposons vraie cette proposition pour l'indice k, afin de former un raisonnement par récurrence en k.

Or, pour qu'il y ait eu exactement $k+1$ retours en $2n$ il faut qu'il y ait eu exactement k retours jusqu'à une date $2q$ comprise entre 0 et $2n$, suivis d'un retour seulement entre $2q$ et $2n$.

$$V_{2n}^{k+1} = \sum_{q=1}^{n-1} V_{2q}^{k} \, V_{2n-2q}^{1} \tag{21}$$

La proposition est vraie pour l'indice $k = 1$, venons-nous de voir. Nous formons en outre l'hypothèse qu'elle est vraie pour l'indice k.

Il résulte alors de l'égalité précédente :

$$V_{2n}^{k+1} = \sum_{q=1}^{n-1} \text{Prob}\left\{ \text{d'atteindre } k \text{ au temps } 2q-k \right\} \text{Prob}\left\{ \text{d'atteindre } 1 \text{ au temps } 2n-2q-1 \right\}$$

$$V_{2n}^{k+1} = \text{Prob}\left\{ \text{d'atteindre } k+1 \text{ au temps } 2q-k+2n-2q-1 \right\}$$

$$V_{2n}^{k+1} = \text{Prob}\left\{ \text{d'atteindre } k+1 \text{ au temps } 2n-k-1 \right\}$$

Vraie pour V_{2n}^{k} la propriété est vraie pour V_{2n}^{k+1}. Or elle est vraie pour V_{2n}^{1} (ou V_{2n}^{2}) elle est donc générale.

Enfin, l'application une nouvelle fois de la propriété A dénombrant les chemins aboutissant au point A d'altitude k, donne en faisant

$$p + m = 2n - k$$
$$p - m = k$$

et divisant par le nombre total 2^{2n-k} d'itinéraires possibles en 2^{2n-k} pas (et n'aboutissant pas en général en $x = k$ au temps $t = 2n-k$).

$$\text{Prob}\left\{\text{d'atteindre } k \text{ au temps } 2n-k\right\} = \frac{1}{2^{2n-k}}\, C^{p}_{p+m} = \frac{1}{2^{2n-k}}\, C^{n}_{2n-k}$$

Et finalement

(22) $$V^{k}_{2n} = \frac{1}{2^{2n-k}}\, C^{n}_{2n-k}$$

Loi limite pour le nombre exact de retours $N(n)$ lorsque n est grand.

Il a déjà été établi en e (15) :

(15) lorsque n tend vers l'infini $\quad U_{2n} = \frac{1}{2^{2n}}\, C^{n}_{2n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi\, n}}$

Or

$$V^{k}_{2n} = \frac{1}{2^{2n-k}}\, C^{n}_{2n-k} = \frac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\dots(1-\frac{k-1}{n})}{(1-\frac{1}{2n})(1-\frac{2}{2n})\dots(1-\frac{k-1}{2n})}\;\frac{C^{n}_{2n}}{2^{n}}$$

Prenant les logarithmes, au premier ordre :

$$\text{Log}\left(\frac{1-\frac{q}{n}}{1-\frac{q}{2n}}\right) \sim -\frac{q}{2n}$$

$$\text{Log}\left(V^{k}_{2n}\,\sqrt{\pi\, n}\right) \sim -\frac{1}{2n}\sum_{q=1}^{k-1} q = \frac{k(k-1)}{4n} \sim -\frac{k^{2}}{4n}$$

(23) $$V^{k}_{2n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi\, n}}\; e^{-\frac{k^{2}}{4n}}$$

On en déduit lorsque n tend vers l'infini la fonction de répartition $N(n)$ du nombre exact de retours à l'origine :

$$\text{Prob}\left\{N(n) \leqslant k\right\} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi\, n}} \sum_{q=1}^{k} e^{-\frac{q^{2}}{4n}}$$

Assimilant la somme discontinue à une intégrale, ce qui est légitime lorsque n est grand :

$$\text{Prob}\left\{N(n) \leqslant k\right\} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \int_0^k e^{-\frac{x^2}{4n}} dx \quad \text{ou encore} \quad \text{Prob}\left\{\frac{N}{\sqrt{2n}} \leqslant \alpha\right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\alpha e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

La loi limite est normale. La valeur probable du nombre de retours est :

$$E\left[N(n)\right] = \sum_{k=1}^{\infty} k \; V_{2n}^{k} \sim \int_0^\infty x \; e^{-\frac{x^2}{4n}} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \left[2n \, e^{-x^2}\right]_0^\infty$$

$$E\left[N(n)\right] = 2\sqrt{\frac{n}{\pi}}$$

Elle n'est pas proportionnelle à n. Le temps de retour moyen sur une longueur série :

$$\frac{2n}{E\left[N(n)\right]} = \sqrt{\pi n} \qquad \text{croît avec n.}$$

g) Temps passé au dessus de l'axe des X (c'est-à-dire en abscisses x positives).

On se porpose de calculer la probabilité $H_{2n,2k}$ pour que la particule reste un temps 2k au dessus de l'axe des X, c'est-à-dire conserve une abscisse positive, de t = 0 à t = 2n.

On a bien évidemment

(24) $$H_{2n,2k} = H$$

car le phénomène est symétrique, l'instant initial 0 et l'instant final jouent évidemment le même rôle.

Il s'agit d'établir la relation :

(25) $$H_{2n,2k} = U_{2k} \; U_{2n-2k}$$

1°) Pour $k = 0$ (ou $k = n$) $H_{2n,0}$ est la probabilité pour qu'un premier passage par 1 n'ait pas lieu entre 0 et 2n. Donc :

$$H_{2n,o} = 1 - \sum_{q=1}^{n} P_{2q-1}(1)$$

Or d'après (4)

$$P_{2q-1}(1) = P_{2n}$$

$$H_{2n,o} = 1 - \sum_{q=1}^{n} P_{2q}$$

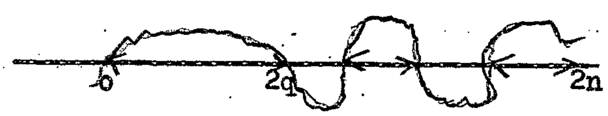
Soit d'après (14) $\sum_{q=1}^{n} P_{2q} = 1 - U_{2n}$

(26) $$H_{2n,0} = H_{2n,2n} = U_{2n}$$

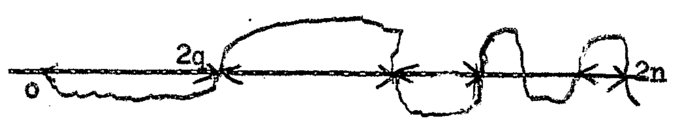
2°) k est différent de 0 (ou ce qui revient au même $k \neq n$)

Un premier retour en 0 a donc eu lieu à l'époque $2q < 2n$ avec une probabilité P_{2q}. Deux éventualités

- de 0 à 2q la particule est restée au dessus de l'axe des X. Il lui restera à accomplir du temps 2q au temps 2n un séjour de $2k - 2q$ au dessus de l'axe des X.



- de 0 à 2q la particule est restée en dessous de l'axe des X. Il lui faudra accomplir son séjour de 2k entre les époques 2q et 2n



Or ces deux éventualités ont mêmes chances de se produire. On obtiendra la probabilité $H_{2n,2k}$ en sommant sur les divers instants possibles q

$$H_{2n,2k} = \sum_{q} \left\{ \frac{1}{2} P_{2q} H_{2n-2q,2k-2q} + \frac{1}{2} P_{2q} H_{2n-2q,2k} \right\}$$

Raisonnons par récurrence en n nous admettons la loi (25) vraie jusqu'à l'indice 2n-2, c'est-à-dire

$$H_{2n-2q,2k-2q} = U_{2k-2q} \; U_{2n-2k}$$

$$H_{2n-2q,2k} = U_{2k} \; U_{2n-2q-2k}$$

Il y a lieu de traiter à part chacune des sommes et de regarder de près les limites de sommation :

$$\sum_{q} P_{2q} \, H_{2n-2q,2k-2q} = U_{2n-2k} \sum_{q=1}^{k} P_{2q} \; U_{2k-2q}$$

$$\sum_{q} P_{2q} \; H_{2n-2q,2k} = U_{2k} \sum_{q=1}^{n-k} P_{2q} \; U_{2n-2q-2k}$$

Or il a été établi en (16) que $\sum_{q=1}^{k} P_{2q} \, U_{2k-2q} = U_{2k}$

De même : $$\sum_{q=1}^{n-k} P_{2q} \; U_{2n-2k-2q} = U_{2n-2k}$$

D'où

(27) $$H_{2n,2k} = U_{2k} \; U_{2n-2k}$$

Etant vraie pour l'indice 2n-2 la formule subsiste pour l'indice 2n. Or elle est vraie pour $n = k$ puisque d'après (26)

$$H_{2k,2k} = U_{2k} = U_{2k} \; U_{o}$$

La formule est donc générale.

LOI LIMITE DU TEMPS PASSE AU DESSUS DE L'AXE DES X (c'est-à-dire en abscisses x positives)

On suppose que k et n-k tendent vers l'infini. D'après la formule (15) :

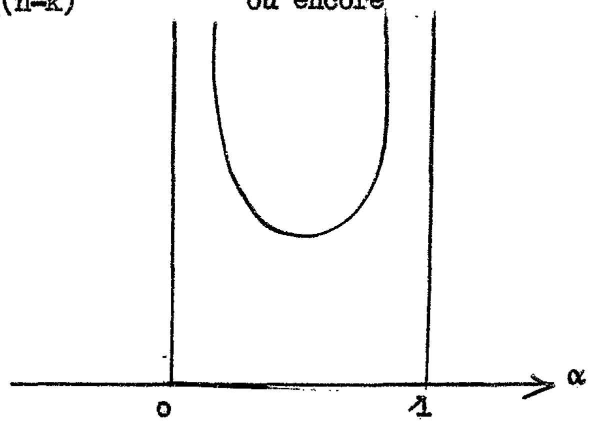
$$U_{2k} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi \, k}} \qquad \text{et} \qquad U_{2n-2k} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi(n-k)}}$$

(28) $$H_{2n,2k} \sim \frac{1}{\pi\sqrt{k(n-k)}}$$

La probabilité pour que le temps passé au dessus de l'axe des X(en abscisses positives) soit inférieure ou égale à 2k est :

$$F(2k) \sim \frac{1}{\pi} \sum_{q=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{q(n-k)}}$$

ou encore



que l'on peut assimiler à l'intégrale :

$$F(2k) = \frac{1}{\pi} \int_0^k \frac{dx}{\sqrt{x(n-x)}}$$

$$G(\alpha) = \text{Prob} \left\{ \frac{k}{n} \leqslant \alpha \right\} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\alpha} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$$

c'est la loi de l'Arc sinus.

- Un calcul numérique montrerait qu'il y a une chance sur 5 pour que la particule reste 97,6 % du temps du même côté de l'axe.

  Une chance sur dix pour qu'elle reste 99,4 % du temps du même coté de l'axe.

<u>Exemple</u>

Deux joueurs jouent une partie de pile ou face à raison d'un coup toutes les secondes pendant 365 jours sans interruption. Il y a cinq chances sur cent pour que l'un des joueurs mène pendant moins de 14 heures tandis que l'autre mène pendant 364 jours et 10 heures.

E 6.- QUELQUES LOIS - SOMME DE VARIABLES ALEATOIRES - LOI CONDITIONNELLE

1°) Donner l'expression des moments - en particulier de la moyenne et de la variance d'une loi Bêta de densité

$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}\, x^{\alpha-1}\,(1-x)^{\beta-1} \qquad \alpha, \beta > 0$$

2°) Donner les moments d'une loi gamma de densité

$$f(x) = \frac{b^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\, x^{\alpha-1}\, e^{-bx}$$

ainsi que la loi de la somme de deux variables indépendantes X_1 et X_2 obéissant à des lois gamma de paramètres (α_1, b) et $\alpha_2, b)$

- Montrer que la loi conditionnelle de X_1 à $Y = X_1 + X_2 = y$ fixé est une loi Bêta de paramètres α_1 et α_2 -

- Donner la moyenne et la variance conditionnelles de X_1 à $Y = y$ fixé.

3°) - La loi de Poisson de paramètre θ est la loi de probabilité

$$P(X = n) = \frac{\theta^n}{n!}\, e^{-\theta}$$

- Trouver la loi de la somme $Y = X_1 + X_2$ de deux variables poissonniennes indépendantes de paramètres θ_1 et θ_2.

- Montrer que la loi conditionnelle de X_1 à $Y = X_1 + X_2 = n$ fixé est une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

- Donner la moyenne et la variance conditionnelles de X_1 à $Y = n$ fixé.

*

* *

SE 6.- QUELQUES LOIS - SOMME DE VARIABLES ALEATOIRES - LOIS CONDITIONNELLES

1) Loi Bêta, densité, moments, moyenne et variance.

$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} \qquad 0 \leq x \leq 1 \qquad \alpha > 0 \quad \beta > 0$$

Moment d'ordre γ $\qquad M_\gamma = E(x^\gamma) = \dfrac{\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \quad \dfrac{\Gamma(\alpha+\gamma)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{moyenne} = m = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta} \\[2ex] \text{variance} = m_2 - m^2 = \dfrac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)} - \dfrac{\alpha^2}{(\alpha+\beta)^2} = \dfrac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} \end{array}\right.$$

---

2) Loi Gamma, densité, moments, somme de deux variables indépendantes

$$Y = X_1 + X_2 \quad \left\{\begin{array}{l} X_1 \ \text{loi}\ \Gamma(\alpha_1, b) \\ X_2 \ \text{loi}\ \Gamma(\alpha_2, b) \end{array}\right.$$

Loi conditionnelle de X_1 à $Y = X_1 + X_2$ fixé - Moyenne et Variance de la loi conditionnelle.

$$f(x) = \frac{b^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-bx} \qquad (x \geqslant 0)$$

a) Moments

$$M_\gamma = b^{-\gamma} \frac{\Gamma(\alpha+\gamma)}{\Gamma(\alpha)}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{moyenne} = m = \dfrac{\alpha}{b} \\[2ex] \text{variance} = m_2 - m^2 = \dfrac{\alpha(\alpha+1)}{b^2} - \dfrac{\alpha^2}{b^2} = \dfrac{\alpha}{b^2} \end{array}\right.$$

b) Somme $X_1 + X_2 = Y$

$$f(y) = \int_0^y f_1(y-z)\ f_2(z)dz = \int_0^y \frac{b^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1)} (y-z)^{\alpha_1-1}\ e^{-(y-z)} \frac{b^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2)}\ z^{\alpha_2-1}\ e^{-z}\ dz$$

$$f(y) = \frac{b^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} e^{-y} \int_0^y (y-z)^{\alpha_1-1}\ z^{\alpha_2-1}\ dz$$

$$= \frac{b^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\ y^{\alpha_1+\alpha_2-1}\ e^{-y} \int_0^1 (1-u)^{\alpha_1-1}\ u^{\alpha_2-1} du$$

$$f(y) = \frac{b^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}\ y^{\alpha_1+\alpha_2-1}\ e^{-by}$$

c) **Loi conditionnelle de X_1 à $Y = X_1 + X_2$ fixé $= y$**

X_1 et X_2 étant indépendantes, la loi du couple (X_1,X_2) est :

$$f(x_1,x_2) = \frac{b^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\ x_1^{\alpha_1-1}\ x_2^{\alpha_1-2}\ e^{-(x_1+x_2)}$$

remplaçant x_2 par $y - x_1$ $\qquad o \leq x_1 \leq y$

$$f(x_1,y) = \frac{b^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\ x_1^{\alpha_1-1}\ (y-x_1)^{x_2-1}\ e^{-by}$$

Et la loi conditionnelle de X_1 à $Y = y$ fixé :

$$f(x_1/y) = \frac{f(x_1,y)}{f(y)} = \frac{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \left(1 - \frac{x_1}{y}\right)^{\alpha_2-1} \left(\frac{x_1}{y}\right)^{\alpha_1-1} \frac{dx_1}{y}$$

$\frac{x_1}{y}$ obéit à une loi bêta (α_1, α_2)

d) Moyenne et Variance conditionnelles de X_1 à $Y = y$ fixé.

$$\begin{cases} \text{moyenne de } x_1 = \dfrac{\alpha_1 y}{\alpha_1 + \alpha_2} \\ \text{variance de } x_1 = \dfrac{\alpha_1 \alpha_2 y^2}{(\alpha_1+\alpha_2)^2(\alpha_1+\alpha_2+1)} \end{cases}$$

3) Loi de Poisson, expression de la probabilité, somme de deux variables indépendantes

$$Y = X_1 + X_2 \quad \begin{cases} X_1 \text{ loi de Poisson de paramètre } \theta_1 \\ X_2 \text{ loi de Poisson de paramètre } \theta_2 \end{cases}$$

Loi conditionnelle de X_1 à $Y = X_1 + X_2$ fixé - Moyenne et Variance de la loi conditionnelle.

a) Expression de la probabilité. Prob $(X = n) = \dfrac{\theta^n}{n!} e^{-\theta}$

b) Somme de $X_1 + X_2 = Y$.

$$\text{Prob } (Y = n) = \sum_{k=o}^{n} p_1(n-k)\, p_2(k) = \sum_{k=o}^{n} e^{-\theta_1} \frac{\theta_1^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\theta_2} \frac{\theta_2^k}{k!}$$

$$\text{Prob}(Y = n) = e^{-(\theta_1+\theta_2)} \sum_{k=o}^{n} \frac{\theta_1^{n-k}\,\theta_2^k}{k!(n-k)!} = \frac{(\theta_1+\theta_2)^n}{n!} e^{-(\theta_1+\theta_2)}$$

La loi de la somme est une loi de Poisson ayant pour paramètre la somme des paramètres.

c) Loi de X_1 à $Y = X_1 + X_2$ fixé = n.

La loi du couple (X_1, X_2), X_1 et X_2 étant indépendantes :

$$f(k_1, k_2) = \frac{0_1^{k_1} \; 0_2^{k_2}}{k_1! \; k_2!} \; e^{-(0_1 + 0_2)}$$

remplaçant k_2 par $n - k_1$, Y étant fixé égal à n :

$$f(k_1, n) = \frac{\theta_1^{k_1} \; \theta_2^{(n-k_1)}}{k_1!(n-k_1)!} \; e^{-(\theta_1 + \theta_2)}$$

Et la loi conditionnelle de X_1 à $Y = n$ fixé.

$$f(k_1/n) = \frac{f(k_1, n)}{f(n)} = \frac{n!}{k_1!(n-k_1)!} \left(\frac{\theta_1}{\theta_1 + \theta_2}\right)^{k_1} \left(\frac{\theta_2}{\theta_1 + \theta_2}\right)^{n-k_1} = C_n^{k_1} \left(\frac{\theta_1}{\theta_1 + \theta_2}\right)^{k_1} \left(\frac{\theta_2}{\theta_1 + \theta_2}\right)^{1-k_1}$$

La loi conditionnelle de X_1 à $Y = n$ fixé est une loi binomiale $\dfrac{\theta_1}{\theta_1 + \theta_2}$, n

d) Moyenne et Variance conditionnelle de X_1 à $Y = n$ donné.

$$\text{moyenne} = \frac{n \, \theta_1}{\theta_1 + \theta_2}$$

$$\text{variance} = \frac{n \, \theta_1 \, \theta_2}{(\theta_1 + \theta_2)^2}$$

E 7.- QUELQUES PROPRIETES DE LA LOI LOGNORMALE

Si Y est une variable normale de moyenne $\operatorname{Log} \gamma$ et de variance σ^2, la loi log-normale de médiane γ et de variance logarithmique σ^2 est, par définition, la loi de la variable :

$$X = e^Y$$

ou encore si Z est la variable normale réduite :

$$Z = \frac{Y - \operatorname{Log} \gamma}{\sigma} \quad P(Z > z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_z^\infty e^{-\frac{u^2}{2}} du = G(z)$$

$$X = \gamma \, e^{\sigma Z}$$

Il sera souvent commode d'associer au nombre x le nombre z

$$(x) \qquad z = \frac{1}{\sigma} \operatorname{Log} \frac{x}{\gamma}$$ z est la variable associée à x.

La densité de probabilité de la variable X sera désignée par $f(x)$.

La loi lognormale est d'une assez grande utilité pratique, on pourra, à titre d'exercice retrouver les quelques propriétés suivantes :

I.- CALCULER LES MOMENTS INCOMPLETS D'ORDRE α

$$M_\alpha(z) = \int_z^\infty x^\alpha f(x) dx$$

et en particulier les moments d'ordre α

$$M_\alpha = \int_0^\infty x^\alpha f(x) dx$$

la moyenne et la variance.

II.- FORMULE DES TRANCHES DE TENEUR

Si les teneurs X des granules d'un minerai se distribuent de façon log-normale, quelle est la teneur moyenne du minerai enrichi dont on ne retiendrait que les granules de teneurs supérieures à une valeur donnée x ?

III.- A l'aide de l'expression de la fonction caractéristique d'une loi de Gauss à deux variables, trouver la covariance de deux variables lognormales - obéissant l'une à la loi (γ_1, σ_1^2), l'autre à la loi $\gamma_\gamma, \sigma_2^2$ - et non indépendantes de coefficient de corrélation logarithmique ρ.

IV.- Le couple (X_1, X_2) obéissant à une loi log normale à deux variables caractérisée par les 5 paramètres $(\gamma_1\ \gamma_2\ \sigma_1^2\ \sigma_2^2\ \rho)$ trouver la loi liée de X_2 à $X_1 = x_1$ fixé. Donner l'expression de la moyenne liée $E(X_2|X_1)$. On pourra introduire dans cette expression les valeurs des moyennes arithmétiques m_1 de X_1 et m_2 de X_2.

V.- FORMULE DES MINERAIS CONNEXES

(X_1, X_2) étant le couple lognormal défini en IV, trouver l'expression de la valeur moyenne de X_2 sachant que X_1 est supérieur à une valeur donnée a, c'est-à-dire

$$E(X_2 | X_1 \geqslant a)$$

ou encore, si $f_1(x_1)$ est la loi marginale des X_1 de paramètres m_1 et σ_1^2 :

$$E(X_2 | X_1 \geqslant a) = \frac{\int_a^\infty E(X_2|x_1)\ f_1(x_1)dx_1}{\int_a^\infty f_1(x_1)dx_1}$$

On pourra s'aider de la formule donnant l'expression des moments incomplets d'un certain ordre α établie en I.

*

* *

SE 7.- QUELQUES PROPRIETES DE LA LOI LOGNORMALE

I.- MOMENT INCOMPLET D'ORDRE α, MOYENNE, VARIANCE

On pourra appeler moment incomplet d'ordre α de X l'intégrale (z étant la variable associée à x)

$$M_\alpha(z) = \int_z^\infty x^\alpha f(x)dx$$

Le moment, à proprement parler, est bien entendu :

$$\underline{M_\alpha = M_\alpha(-\infty) = \int_0^\infty x^\alpha f(x)dx}$$

$$M_\alpha(z) = \int_z^\infty \gamma^\alpha e^{\alpha\sigma u} \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} du = \gamma^\alpha \frac{e^{\frac{\alpha^2\sigma^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_z^\infty e^{-\frac{(u-\alpha\sigma)^2}{2}} du$$

$$\boxed{M_\alpha(z) = \gamma^\alpha e^{\frac{\alpha^2\sigma^2}{2}} G(z - \alpha\sigma)}$$

En particulier

$$M_\alpha = \gamma^\alpha e^{\frac{\alpha^2\sigma^2}{2}}$$

moyenne

$$m = M_1 = \gamma\, e^{\frac{\sigma^2}{2}}$$

En introduisant la moyenne m, la formule générale des moments incomplets s'écrit:

$$\boxed{M_\alpha(z) = m^\alpha \; e^{\frac{\alpha(\alpha-1)\sigma^2}{2}} \; G(z - \alpha\sigma)}$$

$$M_2 = m^2 e^{\sigma^2}$$

variance

$$S^2 = M_2 - m^2 = m^2(e^{\sigma^2} - 1)$$

d'où la formule donnant la variance logarithmique σ^2 d'une loi lognormale en fonction de la variance arithmétique S^2.

$$\sigma^2 = \mathrm{Log}\left(1 + \frac{S^2}{m^2}\right)$$

Si la variance logarithmique σ^2 est faible, elle peut être assimilée à la variance relative $\frac{S^2}{m^2}$. Il peut être intéressant de noter qu'il existe, dans une minéralisation, une limite supérieure de la variance des teneurs. La variance maxima correspond à des supports géométriques ponctuels à teneurs 0 et x_o correspondant aux granules de stérile et de minerai pur. Ceux-ci sont dans les proportions respectives $\frac{x_o - m}{x_o}$ et $\frac{m}{x_o}$. Il en résulte une variance :

$$S^2 = \frac{x_o - m}{x_o} m^2 + \frac{m}{x_o}(x_o - m)^2 = m(x_o - m) \qquad \text{d'où } \sigma^2 < \mathrm{Log}\,\frac{x_o}{m}$$

Plus la teneur moyenne est élevée, plus la borne supérieure de la variance logarithmique est faible.

II.- FORMULE DES TRANCHES DE TENEUR.

Si les teneurs X d'un minerai se répartissent de façon log-normale, quelle est la teneur moyenne m(x) du minerai si l'on ne retient que les teneurs supérieures à x :

$$m(x) = \frac{\int_x^\infty x\, f(x)dx}{\int_x^\infty f(x)dx} = \frac{G(z - \sigma)}{G(z)} \qquad z = \frac{1}{\sigma}\,\mathrm{Log}\,\frac{x}{\gamma}$$

D'après l'expression des moments incomplets, $G(z)$ apparaît comme la proportion du tonnage dans les teneurs supérieures à x et $G(z - \sigma)$ la proportion au tonnage total du métal recelé dans ce tonnage.

III.- LOI LOGNORMALE A DEUX VARIABLES - CALCUL DE LA COVARIANCE.

On considère deux variables normales Y_1 et Y_2 de moyennes $\mathrm{Log}\,\gamma_1$, $\mathrm{Log}\,\gamma_2$ de variances respectives σ_1^2, σ_2^2 et de coefficient de corrélation ρ. Les deux variables

$$X_1 = e^{Y_1} \text{ et } X_2 = e^{Y_2}$$

sont alors dites suivre une loi lognormale à deux variables $(\mathrm{Log}\,\gamma_1, \mathrm{Log}\,\gamma_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$

On demande de calculer la covariance de X_1 et X_2, c'est-à-dire

$$S_{12} = E\left[(X_1 - m_1)(X_2 - m_2)\right] = E(X_1 X_2) - m_1\, m_2$$

On pourra se servir de l'expression de la fonction caractéristique $\Phi(u,v) = E(e^{iuY_1 + ivY_2})$ de la loi de gauss à deux variables.

On a

$$E(X_1 X_2) = E(e^{Y_1 + Y_2}) = \Phi(u = -i,\ v = -i)$$

$$\Phi(u,v) = e^{iu\,\mathrm{Log}\,\gamma_1 + iv\,\mathrm{Log}\,\gamma_2 - \frac{1}{2}(\sigma_1^2 u^2 + 2\rho\,\sigma_1\sigma_2 uv + \sigma_2^2 v^2)}$$

$$\Phi(-i,-i) = \gamma_1\gamma_2\ e^{\frac{1}{2}(\sigma_1^2 + 2\rho\,\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)} = \gamma_1\, e^{\frac{1}{2}\sigma_1^2}\ \gamma_2\ e^{\frac{1}{2}\sigma_2^2}\ e^{\rho\,\sigma_1\sigma_2}$$

$$E(X_1 X_2) = m_1\, m_2\ e^{\rho\,\sigma_1\sigma_2}$$

$$\boxed{S_{12} = m_1\, m_2 (e^{\rho\,\sigma_1\sigma_2} - 1)}$$

En faisant $\rho = 1$, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, on retrouve l'expression, déjà établie, de la variance d'une variable lognormale.

IV.- LOI DE X_2 A $X_1 = x_1$ FIXE dans une loi lognormale à deux variables. Expression de la moyenne liée $E(X_2 | X_1)$

A $X_1 = x_1$ fixé, c'est-à-dire à Y_1 fixé, la loi de Y_2 est une loi normale.

de moyenne $\quad \mathrm{Log}\ \gamma_2 + \rho \frac{\ }{\sigma_1}\ \mathrm{Log} \frac{x_1}{\gamma_1}$

de variance $\quad \sigma_2^2(1 - \rho^2)$

Il en résulte que la loi de X_2 est une loi log-normale.

de médiane $\quad \gamma(x_1) = \gamma_2\left(\frac{x_1}{\gamma_1}\right)^{\rho \frac{\ }{\sigma_1}}$

soit en introduisant les moyennes $m_1 = \gamma_1\ e^{\frac{1}{2}\sigma_1^2}$ et $m_2 = \gamma_2\ e^{\frac{1}{2}\sigma_2^2}$:

$$\gamma(x_1) = m_2\left(\frac{x_1}{m_1}\right)^{\rho \frac{\ }{\sigma_1}} e^{\frac{1}{2}(\rho\ \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2^2)}$$

de variance logarithmique $\quad \sigma_2^2\ (1 - \rho^2)$

La moyenne de X^2 à $X_1 = x_1$ fixé est donc (d'après l'expression de la moyenne arithmétique d'une variable log normale) :

$$E(X_2 | X_1) = \gamma(x_1)\ e^{\frac{1}{2}\sigma_2^2(1-\rho^2)} = m_2\left(\frac{x_1}{m_1}\right)^{\rho \frac{\sigma^2}{\sigma_1}} e^{\frac{1}{2}(\rho\ \sigma_1\sigma_2 - \rho^2\ \sigma_2^2)}$$

V.- FORMULE DES MINERAIS CONNEXES.

Donner l'expression de la valeur moyenne de X_2 sachant que X_1 est supérieur à <u>a</u>, c'est-à-dire de

$$E(X_2 | X_1 \geqslant a)$$

$$E(X_2 | X_1 \geqslant a) = \frac{\int_a^\infty E(X_2 | x_1)\ f_1(x_1) dx_1}{\int_a^\infty f_1(x_1) dx_1}$$

L'intégrale du dénominateur n'est autre que $G(z_1)$ avec $\underline{z_1 = \frac{1}{\sigma_1} \text{Log} \frac{a}{\gamma_1}}$

Quant à l'intégrale du numérateur c'est, à une constante près un moment incomplet d'ordre de la variable $x_1(m_1, \sigma_1)$

$$\alpha = \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$$

Appliquant la formule des moments incomplets établie au (I)

$$M_\alpha(z) = m^\alpha e^{\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\sigma^2} G(z - \alpha\sigma)$$

Il vient :

$$\int_a^\infty E(X_2 | x_1)\, f_1(x_1) dx_1 = m_2 m_1^{-\rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1}} e^{\frac{1}{2}(\rho\sigma_\rho\sigma_2 - \rho^2\sigma_2^2)} \cdot m_1^{\rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1}} e^{\frac{1}{2}(\rho^2 \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} - \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1})\sigma_1^2}\; G(z_1 - \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \sigma_1)$$

$$\int_a^\infty E(X_2 | x_1)\, f_1(x_1) dx_1 = m_2 \; G(z_1 - \rho\, \sigma_2)$$

d'où

$$\underline{E(X_2 | X_1 \geqslant a) = m_2 \frac{G(z_1 - \rho\,\sigma_2)}{G(z_1)} \qquad \text{avec} \quad z_1 = \frac{1}{\sigma_1} \text{Log} \frac{a}{\gamma_1}}$$

Telle est la formule des minerais connexes. Son interprétation physique est immédiate. Si les teneurs plomb et zinc d'un minerai de plomb-zinc obéissent à une loi log-normale à deux variables, la formule des minerais connexes donnera la teneur moyenne en zinc des échantillons dont la teneur en plomb s'est révélée supérieure à a.

E 8.- PONDERATION DES FREQUENCES PAR UNE VARIABLE LOGNORMALE AUXILIAIRE

Imaginons, pour fixer les idées que l'on a tracé l'histogramme des teneurs relevées sur n sondages implantés à maille régulière, la teneur du sondage numéro i est x_i et sa puissance h_i. L'histogramme des x_i donne la répartition des teneurs en fonction de l'aire minéralisée :

Prob$(X < x)$ = Proportion de l'aire minéralisée, à teneur inférieure à x, à l'aire minéralisée totale. Or, ce qui est le plus intéressant en général, ce n'est pas la répartition des teneurs en fonction des aires minéralisées, mais des teneurs en fonction des tonnages minéralisées, c'est-à-dire des puissances.

Pour passer de la répartition en fonction des aires à la répartition en fonction des tonnages, les fréquences $f(x)$ doivent être pondérées par les puissances. Autrement dit, il faut substituer à $f(x)$

$$\frac{E(h|x)}{E(h)} f(x)$$

Dans le cas où les teneurs x et les puissances h obéissent à une loi log-normale à deux variables ainsi définie

$(\gamma_x, \gamma_h, \sigma_x^2, \sigma_h^2, \rho)$ la moyenne non pondérée de x étant $m_x = \gamma_x e^{\frac{1}{2}\sigma_x^2}$

Calculer la densité de répartition des x pondérés par les puissances. Montrer que cette répartition est log-normale, donner sa médiane et sa variance logarithmique. En déduire la teneur moyenne pondérée m par les puissances. Rapprocher le résultat obtenu de la valeur de l'accumulation moyenne.

Il sera commode, ainsi qu'on l'a vu plus haut d'introduire la variable z associée à x :

$$(x) \qquad x = \gamma_x e^{\sigma_x z}$$

Applications

a) Granulométrie lognormale - Soit $f(d)$ la densité de fréquence des grains de diamètre d comptée en nombre de grains de médiane γ_d et de variance logarithmique σ_d^2. En déduire la densité de fréquence comptée en poids. Ceci revient à pondérer les fréquences d par $h = d^3$.

Donner les caractéristiques de la nouvelle répartition log-normale des fréquences : médiane, variance logarithmique, moyenne pondérée.

b) <u>Répartition des teneurs en fonction du métal</u>

Supposons un gisement de puissance constante. Connaissant la répartition des teneurs <u>x</u> selon le tonnage de minerai, en déduire la répartition des teneurs en fonction du tonnage de métal. Ceci revient à pondérer x par lui-même.

Donner la médiane, la variance logarithmique, et la moyenne de la nouvelle répartition lognormale.

*
* *

SE 8.- PONDERATION DES FREQUENCES PAR UNE VARIABLE LOGNORMALE AUXILIAIRE

A la densité de répartition $f(x)$, on substitue :

$$\frac{E(h \mid x)}{E(h)} f(x)$$

D'après le paragraphe IV de l'exercice précédent

$$\frac{E(h \mid x)}{E(h)} = \left(\frac{x}{m_x}\right)^{\rho \frac{\sigma_h}{\sigma_x}} e^{\frac{1}{2}(\rho\, \sigma_h\, \sigma_x - \rho^2\, \sigma_h^2)}$$

ou encore, tenant compte de

$$m_x = \gamma_x\ e^{\frac{1}{2} \sigma_x^2}$$

$$\frac{E(h \mid x)}{E(h)} = \left(\frac{x}{\gamma_x}\right)^{\rho \frac{\sigma_h}{\sigma_x}} e^{-\frac{1}{2} \rho^2\, \sigma_h^2}$$

La nouvelle densité de répartition est donc

$$e^{-\frac{1}{2} \rho^2\, \sigma_h^2} \left(\frac{x}{\gamma_x}\right)^{\rho \frac{\sigma_h}{\sigma_x}} f(x)dx$$

Introduisant la variable z associée à x :

$$x = \gamma_x\ e^{\sigma_x\ z}$$

on a

$$f(x)dx = \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\,\pi}}\, dz$$

La nouvelle densité est :

$$e^{-\frac{1}{2}\rho^2 \sigma_h^2} \; e^{\rho \sigma_h z} \; \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dz = \frac{e^{-\frac{1}{2}(z-\rho \sigma_h)^2}}{\sqrt{2\pi}} dz$$

Il en résulte que, dans la nouvelle répartition, z obéit à une loi normale de moyenne $\rho \sigma_h$ et de variance 1

$$z = u + \rho \sigma_h \qquad u \text{ étant la variable normale réduite}$$

et par suite que la teneur pondérée x^* par les puissances

$$x^* = \gamma_x \, e^{\sigma_x(u + \rho \sigma_h)} = \gamma_x \, e^{\rho \sigma_h \sigma_x} \; e^{\sigma_x u}$$

obéit à une loi

<u>log normale</u> de médiane $\underline{\gamma_x \, e^{\rho \sigma_h \sigma_x}}$, de <u>variance logarithmique σ_x^2</u>, et par suite de moyenne pondérée par les puissances $\underline{m = \gamma_x \, e^{\frac{1}{2}\sigma_x^2} \; e^{\rho \sigma_h \sigma_x} = m_x \, e^{\rho \sigma_h \sigma_x}}$

<u>Comment ce point de vue s'accorde t'il avec l'accumulation moyenne ?</u>

Si les teneurs x et les puissances h obéissent à une loi log normale à deux variables, l'accumulation hx est une variable log normale de variance $\sigma_h^2 + \sigma_x^2 + 2\rho \, \sigma_h \, \sigma_x$ dont la moyenne est d'après le III de l'exercice précédent :

$$E(hx) = m_h \, m_x \; e^{\rho \sigma_h \sigma_x}$$

On constate que

$$E(hx) = m \, m_h$$

$$\underline{\frac{E(hx)}{E(h)} = m}$$

La teneur moyenne pondérée par les puissances apparaît comme le quotient de l'accumulation moyenne par la puissance moyenne. Ce qui est hautement satisfaisant.

Applications.

a) Granulométrie log normale

La densité de fréquence des grains de diamètre d est pondérée par $h = d^3$. Il en résulte que

$$\sigma_h = 3\,\sigma_d \qquad \rho = 1$$

La loi de répartition des fréquences pondérées par les poids a donc, d'après les résultats précédents :

pour médiane $\gamma_d\, e^{3\sigma_d^2}$, pour variance logarithmique σ_d^2

et pour moyenne $\gamma_d\, e^{\frac{1}{2}\sigma_d^2}\, e^{3\,\sigma_d^2} = \gamma_d\, e^{\frac{7}{2}\sigma_d^2}$

b) Répartition des teneurs en fonction du métal

La fréquence des teneurs x est pondérée par $h = x$ lui-même. Il en résulte :

$$\sigma_h = \sigma_x \qquad \rho = 1$$

La loi de répartition des teneurs en fonction du métal a

pour médiane $\gamma_x\, e^{\sigma_x^2}$, même variance logarithmique σ_x^2 et pour

moyenne $m = m_x\, e^{\sigma_x^2} = \gamma_x\, e^{\frac{3}{2}\sigma_x^2}$

E 9.- FONCTIONS CARACTERISTIQUES DE VARIABLES NORMALES, POISSONNIENNES, GAMMA, BINOMIALES

Etablir les expressions des fonctions caractéristiques de variables obéissant à

I.- Une loi de Gauss de densité $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

II.- Une loi de Poisson de paramètre θ.

III.- Une loi gamma de densité $\frac{b^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-bx}$

IV.- Une loi binomiale de paramètre p.

Que peut-on dire, et dans quelles conditions, de la somme de variables indépendantes obéissant à de telles lois ?

*

* *

SE 9.- FONCTIONS CARACTERISTIQUES DE VARIABLES NORMALES, POISSONNIENNES, GAMMA, BINOMIALES

Ces questions sont très faciles, nous passerons rapidement

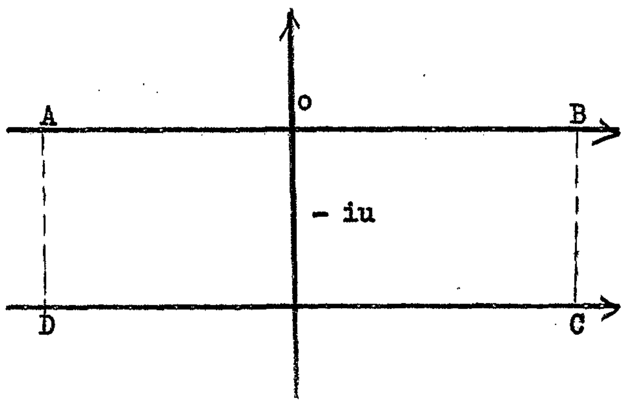
I.- LOI NORMALE - Etablissons tout d'abord l'expression pour la loi canonique de Gauss, de densité :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux - \frac{x^2}{2}} dx = \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x-iu)^2} dx = \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{DC} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

l'image du nombre complexe $z = x - iu$ décrit la parallèle à Ox d'ordonnée à l'origine $-iu$.

La fonction $e^{-\frac{z^2}{2}}$ étant régulière dans la bande A B C D, l'intégrale sur le contour A B C D est nulle quelles que soient les abscisses de B et C et de A et D. Si l'on fait tendre indépendamment l'un de l'autre les points A et B vers l'infini, l'intégrale sur les portions AD et BC tend vers zéro et on a :



$$\begin{matrix} A \to -\infty \\ B \to +\infty \end{matrix} \quad \int_{DC} + \int_{BA} = 0 \quad \text{soit} \int_{DC} = \int_{AB}$$

Or $\begin{matrix} A \to -\infty \\ B \to +\infty \end{matrix} \quad \int e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$ d'où

$$\underline{\Phi(u) = e^{-\frac{u^2}{2}}}$$

Si la loi a pour moyenne m et pour variance σ^2, on a d'après la propriété générale des changements de variables sur une fonction caractéristique :

$$\Phi(u) = e^{imu - \frac{\sigma^2 u^2}{2}} \quad \text{et} \quad \text{Log } \Phi(u) = i\, m\, u - \frac{\sigma^2}{2} u^2$$

II.- LOI DE POISSON de paramètre θ

$$\Phi(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^n}{n!} e^{inu-\theta} = e^{-\theta} e^{\theta e^{iu}}$$

$$\Phi(u) = e^{\theta(e^{iu}-1)} \qquad \text{Log}\, \Phi(u) = \theta(e^{iu}-1)$$

III.- LOI GAMMA DE DENSITE $\frac{b^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-bx}$

$$\Phi(u) = \frac{b^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{iux-bx}\, dx = \frac{b^\alpha}{(b-iu)^\alpha} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-u} u^{\alpha-1}\, du$$

Comme

$$\int_0^\infty e^{-u} u^{\alpha-1}\, du = \Gamma(\alpha)$$

$$\Phi(u) = \frac{1}{\left(1 - i\frac{u}{b}\right)^\alpha}$$

IV.- LOI BINOMIALE DE PARAMETRE p, $q = 1-p$ et n :

$$P_k = C_n^k p^k q^{n-k}$$

$$\Phi(u) = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k p^k q^{n-k} e^{iuk} = (q + p e^{iu})^n$$

$$\Phi(u) = (q + p e^{iu})^n$$

Remarque générale

La forme des fonctions caractéristiques montre que la somme de variables indépendantes normales ou poissonniennes est encore une variable normale ou poissonnienne. La somme de variables indépendantes gamma ayant même paramètre b ou binomiales ayant même paramètre p est encore une variable gamma ou binomiale.

E 10.- CONVERGENCES EN LOI OBTENUES A L'AIDE DE LA FONCTION CARACTERISTIQUE

A l'aide des fonctions caractéristiques, montrer :

I.- Que la loi binomiale (n, p) converge vers une loi de Poisson de paramètre θ lorsque n tend vers l'infini et p tend vers zéro de sorte que le produit np tende vers une valeur finie θ.

II.- Que la distribution de la variable aléatoire

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{npq}}$$

X étant une variable binomiale (n, p), tend vers une loi de Gauss réduite lorsque n tend vers l'infini.

*

* *

SE 10.- CONVERGENCES EN LOIS OBTENUES A L'AIDE DE LA FONCTION CARACTERISTIQUE

I.- CONVERGENCE DE LA LOI BINOMIALE VERS LA LOI DE POISSON lorsque n tend vers l'infini et p vers zéro en sorte que le produit np tende vers une valeur finie θ.

La fonction caractéristique d'une variable binomiale est

$$(q + p\, e^{iu})^n = \left[1 + p(e^{iu} - 1)\right]^n$$

$$(q + p\, e^{iu})^n = e^{n \operatorname{Log}\left[1 + p(e^{iu} - 1)\right]}$$

lorsque p tend vers zéro :

$$(q + p\, e^{iu})^n \sim e^{np(e^{iu} - 1)}$$

si $p \longrightarrow 0$, $n \longrightarrow \infty$ $np \longrightarrow \theta$ fini

$$\underline{(q + p\, e^{iu})^n \longrightarrow e^{\theta(e^{iu} - 1)}}$$

La loi binimiale (p, n) tend donc vers la loi de Poisson de paramètre $\theta = \lim np$.

II.- CONVERGENCE DE LA LOI BINOMIALE VERS LA LOI NORMALE.

Chercher la limite de la fonction caractéristique de la variable binomiale réduite

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{npq}} \qquad X \text{ binomiale } (p, n)$$

On a, successivement :

$$\Phi_X(u, n) = (q + p\, e^{iu})^n$$

$$\Phi_{X-np}(u, np) = e^{-inpu}\,(q + p\, e^{iu})^n = (p\, e^{iqu} + q\, e^{-ipu})^n$$

$$\Phi_Z(u, n) = \left(p\, e^{\frac{iq}{\sqrt{npq}}u} + q\, e^{-\frac{ip}{\sqrt{npq}}u}\right)^n$$

Développant les exponentielles, lorsque n tend vers l'infini :

$$\operatorname{Log} \Phi_Z(u, n) = n \operatorname{Log}\left\{1 - \frac{u^2}{2n}\left[1 + \varepsilon\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)\right]\right\} \longrightarrow -\frac{u^2}{2} \text{ quand } n \longrightarrow \infty$$

Lorsque n tend vers l'infini, u restant borné dans un intervalle fini par un nombre indépendant de n, $\frac{u}{\sqrt{n}}$ ainsi que $2(\frac{u}{\sqrt{n}})$ tendent vers zéro. $\operatorname{Log} \Phi_x(u,n)$ converge uniformément vers $-\frac{u^2}{2}$. La loi de Z tend vers la loi normale réduite.

E 11.- LOIS COMPOSEES - LOI BINOMIALE NEGATIVE

Si l'on classe les automobilistes en plusieurs catégories, on s'aperçoit qu'au sein de chaque catégorie les accidents de voiture se répartissent de façon poissonnienne avec un paramètre θ. Sa loi de probabilité est :

$$P_n = \frac{\theta^n}{n!} e^{-\theta}$$

Cependant chaque catégorie possède une valeur du paramètre θ qui lui est propre. La répartition de ces paramètres obéit approximativement à une loi gamma :

$$\frac{b^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \theta^{\alpha-1} e^{-b\theta}$$

On demande de déterminer la loi composée :

a) par sa fonction caractéristique $\Phi(u)$ - dont on pourra déduire la loi de probabilité de la loi composée.

b) directement à partir de la loi de répartition des accidents dans chaque catégorie.

*

* *

SE 11.- LOIS COMPOSEES - LOI BINOMIALE NEGATIVE

Il suffit d'appliquer le théorème de composition des fonctions caractéristiques ou des fonctions de répartition dépendant d'un paramètre.

a) La fonction caractéristique $\varphi(u)$ d'une loi de Poisson de paramètre θ est :

$$\varphi(u) = e^{\theta(e^{iu}-1)}$$

La fonction caractéristique composée est :

$$\Phi(u) = \frac{b^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{\theta(e^{iu}-1)} \; e^{\alpha-1} \; e^{-b\theta} \, d\theta = \frac{b^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \; \frac{\Gamma(\alpha)}{(b+1-e^{iu})^\alpha}$$

$$\Phi(u) = \frac{b^\alpha}{(b+1-e^{iu})^\alpha}$$

que l'on peut encore écrire :

$$\Phi(u) = \left(\frac{b}{(1+b)}\right) \left(1 - \frac{e^{iu}}{1+b}\right)^\alpha$$

En développant la fonction caractéristique, on obtient la loi de probabilité :

$$\Phi(u) = \frac{b^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{b}{1+b}\right)^\alpha \sum_{n=0} \frac{\Gamma(\alpha+n)}{n!} \left(\frac{1}{(1+b)}\right)^n e^{inu} \qquad \text{d'où}$$

$$P_n = \frac{b^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \; \frac{\Gamma(\alpha+n)}{n!} \; \frac{1}{(1+b)^{\alpha+n}}$$

Cette loi est appelée loi binomiale négative.

b) Directement

$$P_n = \frac{b^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-\theta} \frac{\theta^n}{n!} \theta^{\alpha-1} e^{-b\theta} \, d\theta = \frac{1}{n!} \frac{b^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-(1+b)\theta} \; \theta^{n+\alpha-1} \, d\theta$$

$$P_n = \frac{b^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \; \frac{\Gamma(\alpha+n)}{n!} \; \frac{1}{(1+b)^{\alpha+n}} = \left(\frac{b}{1+b}\right)^\alpha \left[1 + \frac{\alpha}{1+b} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2!(1+b)^2} + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{3!(1+b)^2} + \dots\right]$$

E 12.- PROBABILITES CONDITIONNELLES ET FONCTIONS GENERATRICES DANS L'ETUDE D'UNE ALTERNATIVE REPETEE

On considère une alternative répétée, c'est-à-dire une suite de variables aléatoires indépendantes X_n définies par

$$\begin{cases} P(X_n = 1) = p \\ P(X_n = 0) = q = 1 - p \end{cases}$$

L'indice entier n sera interprété comme un temps, la variable X_n représentant le résultat de l'épreuve effectuée au temps $t = n$. L'instant initial sera $t = 0$ (et non $t = 1$), l'épreuve initiale ayant donné un résultat X_0. Plutôt que de calculer directement des probabilités a priori, il sera commode de calculer les probabilités conditionnelles correspondantes dans les deux hypothèses $X_0 = 1$ et $X_0 = 0$.

On dira qu'il y a changement d'état au temps $t = n$ si $X_n \neq X_{n-1}$ (si l'essai n est un succès précédé d'un échec ou bien si l'essai n est un échec précédé d'un succès).

1) Soit ϖ_n la probabilité conditionnelle de l'évènement " le premier changement d'état a lieu en $t = n$ " lorsque $X_0 = 1$, et soit χ_n la probabilité conditionnelle de ce même évènement lorsque $X_0 = 0$. Calculer ϖ_n et χ_n, et les fonctions génératrices

$$\varpi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \varpi_n \, s^n \qquad\qquad \chi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_n \, s^n$$

En déduire la probabilité a priori ρ_n du même évènement, sa fonction génératrice $\rho(s)$ et l'espérance mathématique de l'instant de premier changement.

2) Soient $P_k(n)$ et $Q_k(n)$ les probabilités conditionnelles de l'évènement "il se produit exactement k changements d'états de $t = o$ à $t = n$ inclusivement", dans les hypothèses $X_o = 1$ et $X_o = o$ respectivement.

On considérera les fonctions

$$\begin{cases} G_k(s) = \sum_{n=o}^{\infty} P_k(n)\, s^n \\ \\ H_k(s) = \sum_{n=o}^{\infty} Q_k(n)\, s^n \end{cases}$$

On calculera explicitement $P_o(n)$, $Q_o(n)$, $G_o(s)$ et $H_o(s)$. Puis on établira les relations :

$$\begin{cases} P_{k+1}(n) = \sum_{r=o}^{n} \varpi_r \; Q_k(n-r) \\ \\ Q_{k+1}(n) = \sum_{r=o}^{n} \chi_r \; P_k(n-r) \end{cases}$$

d'où l'on déduira :

$$\begin{cases} G_{k+1}(s) = \varpi(s) \; H_k(s) \\ \\ H_{k+1}(s) = \chi(s) \; G_k(s) \end{cases}$$

On calculera ensuite $H_k(s)$ et $G_k(s)$, en distinguant deux cas selon la parité de k.

3) Soit $R_k(n)$ la probabilité a priori de l'évènement " il se produit exactement k changements de $t = o$ à $t = n$". Exprimer $R_k(n)$ à l'aide de $P_k(n)$ et $Q_k(n)$. Calculer les fonctions :

$$\begin{cases} I_k(s) = \sum_{n=o}^{\infty} R_k(n)\, s^n \\ \\ \psi(s,t) = \sum_{k=o}^{\infty} I_k(s)\, t^k \end{cases}$$

Si l'on pose :

$$\psi_n(t) = \sum_{k=o}^{\infty} R_k(n)\ t^k$$

$\psi_n(t)$ est la fonction génératrice du nombre de changements d'états observés de $t = o$ à $t = n$. Montrer que $\psi_n(t)$ est le coefficient de s^n dans $\psi(s,t)$

En déduire l'espérance mathématique de ce nombre de changements d'états :

$$E(k) = \sum_{k=1}^{\infty} k\ R_k(n)$$

4) Mettre $\psi(s,t)$ sous la forme

$$\psi(s,t) = \frac{A}{s_1 - s} + \frac{B}{s_2 - s}$$

où A, B, s_1 et s_2 ne dépendent que de t, et en déduire l'expression exacte de $\psi_n(t)$

$$\psi_n(t) = \frac{A}{s_1^{n+1}} + \frac{B}{s_2^{n+1}}$$

Cas particulier $p = q = \frac{1}{2}$.

(5) On suppose que $n \to \infty$ et $pq \to o$ de telle manière que le produit $n\,p\,q$ ait une limite finie θ. Montrer que la variable aléatoire k (représentant le nombre de changements d'états de $t = o$ à $t = n$) converge en loi. Donner l'expression exacte de la loi limite, examiner et interpréter sa parenté avec la loi de Poisson.

*

* *

SE 12.- PROBABILITES CONDITIONNELLES ET FONCTIONS GENERATRICES DANS L'ETUDE D'UNE ALTERNATIVE REPETEE

L'instant initial a été caractérisé par un succès ($X_o = 1$). Pour que le premier changement d'état, c'est-à-dire le premier échec ait lieu en $t = n$, il faut avoir gagné aux instants $t = 1, 2 \dots n-1$ et perdu à l'instant n, d'où :

$$\varpi_n = p^{n-1} q \qquad (X_o = 1)$$

D'une façon analogue

$$\chi_n = q^{n-1} p \qquad (X_o = 0)$$

Et les fonctions génératrices :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varpi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \quad {}_n \, s^n = q \sum_{n=1}^{\infty} p^{n-1} s^n = q\, s \sum_{n=o}^{\infty} (ps)^n = \dfrac{qs}{1 - ps} \\ \\ \chi(s) = \dfrac{ps}{1 - qs} \end{array} \right.$$

La probabilité a priori est donnée par la règle des probabilités totales.

$$\rho_n = p\,\varpi_n + q\,\chi_n = p^n q + q^n p = p\,q\,(p^{n-1} + q^{n+1})$$

La fonction génératrice s'obtient de même par composition de $\varpi(s)$ et de $\chi(s)$:

$$q(s) = p\varpi(s) + q\,\chi(s) = p\,q\,s\,\left(\frac{1}{1 - ps} + \frac{1}{1 - qs}\right)$$

L'espérance mathématique de l'instant de premier changement est donnée par :

$$\rho'(1) = pq \left\{ \frac{1}{1 - ps} + \frac{ps}{(1 - ps)^2} + \frac{1}{1 - qs} + \frac{qs}{(1 - qs)^2} \right\}_{s = 1}$$

$$\rho'(1) = pq \left\{ \frac{1}{(1 - ps)^2} + \frac{1}{(1 - ps)^2} \right\}_{s = 1} = pq\,\left(\frac{1}{q^2} + \frac{1}{p^2}\right)$$

$$\boxed{\rho'(1) = \frac{p}{q} + \frac{q}{p}}$$

S'il se produit 0 changement d'état de $t = 0$ à $t = n$ c'est que pour $X_o = 1$ on a eu des succès aux instants $t = 1, 2 \ldots n$. d'où :

D'une façon analogue
$$\begin{cases} P_o(n) = p^n \\ Q_o(n) = q^n \end{cases}$$

Et
$$\begin{cases} G_o(s) = \sum_{n=o}^{\infty} p^n s^n = \dfrac{1}{1 - ps} \\ H_o(s) = \sum_{n=o}^{\infty} q^n s^n = \dfrac{1}{1 - qs} \end{cases}$$

Il est bien évident que l'on a :

$$\underline{P_k(n) = Q_k(n) = 0} \qquad\qquad \underline{\text{pour} \quad n < k}$$

L'état initial étant $X_o = 1$, la probabilité que l'on ait le premier changement d'état à l'instant $t = r$ est ϖ_r et l'état en question sera un <u>échec</u>. La probabilité d'avoir ensuite k changement d'états du temps r au temps n sera donc $Q_k(n-r)$ (Il s'agit évidemment de Q puisque le nouvel état initial en $t = r$ est un échec).

La probabilité pour qi'l y ait <u>$k + 1$</u> changements d'état, le premier changement d'état ayant lieu en $t = r$ est donc

$$\varpi_r \; Q_k(n-r)$$

La probabilité a priori de $k+1$ changements d'état à $X_o = 1$ est donnée par le théorème des probabilités totales : sommation sur tous les évènements possibles et qui s'excluent, c'est-à-dire sur l'indice r prenant toutes valeurs de <u>1 à n</u> moyennant la convention de nullité des $Q_k(n)$ lorsque n est inférieur à k:

$$P_{k+1}(n) = \sum_{r=1}^{n} \varpi_r \; Q_k(n-r)$$

De façon tout-à-fait analogue

$$Q_{k+1}(n) = \sum_{r=1}^{n} \chi_r \, P_k(n-r)$$

On en déduit d'après les définitions :

$$G_k(s) = \sum_{n=0}^{\infty} P_k(n) \, s^n$$

$$H_k(s) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_k(n) \, s^n$$

$$G_{k+1}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{k+1}(n) \, s^n = \sum_{n=0}^{\infty} s^n \sum_{r=1}^{n} \overline{\omega}_r \; Q_k(n-r) = \sum_{n=0}^{\infty} \; \sum_{r=1}^{n} \overline{\omega}_r \, s^r \, Q_k(n-r) \, s^{n-r}$$

On a à former la double sommation selon le diagramme indiqué. Au lieu de sommer par colonnes, on peut sommer par lignes et on a :

$$G_{k+1}(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\omega}_r \, s^r \sum_{n=r}^{\infty} Q_k(n-r) \, s^{n-r}$$

Par le changement de variable $n-r = i$

$$G_{k+1}(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\omega}_r \, s^r \sum_{i=0}^{\infty} Q_k(i) \, s^i$$

De façon analogue $\left\{ \begin{array}{l} G_{k+1}(s) = \overline{\omega}(s) \, H_k(s) \\ H_{k+1}(s) = \chi(s) \, G_k(s) \end{array} \right.$

Faisons dans la première équation :

$$k = 2\,p + 1$$

et dans la seconde : $k = 2\,p$ on a :

$$G_{2p+2} = \overline{\omega} \, H_{2p+1}$$

$$H_{2p+1} = \chi \;\, G_{2p}$$

D'où

$$\underline{G_{2p+2} = \overline{\omega} \cdot G_{2p}}$$

Faisant maintenant $k = 2p$ dans la première équation et $k = 2p - 1$ dans la seconde.

$$G_{2p+1} = \varpi H_{2p}$$

$$H_{2p} = \chi G_{2p-1}$$

$$\underline{\underline{G_{2p+1} = \varpi\chi G_{2p-1}}}$$

On en déduit :

$$G_{2p} = (\varpi\chi)^p G_o$$

Or

$$G_{2p+1} = (\varpi\chi)^p G_1$$

$$G_1 = \varpi H_o$$

D'où finalement :

$$G_{2k} = (\varpi\chi)^k G_o$$

$$G_{2k+1} = (\varpi\chi)^k \varpi H_o$$

de manière analogue

$$H_{2k} = (\varpi\chi)^k H_o$$

$$H_{2k+1} = (\varpi\chi)^k \chi G_o$$

3°) Les règles de probabilités composées et des probabilités totales donnent :

$$R_k(n) = p \; P_k(n) + q \; Q_k(n)$$

D'où

$$I_k(s) = p \; G_k(s) + q \; H_k(s)$$

D'autre part :

$$I_{2k}(s)\ t^{2k} = p\ G_o(\varpi\chi\ t^2)^k + q\ H_o(\varpi\chi\ t^2)^k$$

$$I_{2k+1}(s)\ t^{2k+1} = \left\{ p\ \varpi H_o(\varpi\chi\ t^2)^k + q\ \chi\ G_o(\varpi\chi\ t^2)^k \right\} t$$

$$\sum_{k=o}^{\infty} I_{2k}(s)\ t^{2k} = \frac{p\ H_o + q\ H_o}{1 - \varpi\chi\ t^2}$$

$$\sum_{k=o}^{\infty} I_{2k+1}\ t^{2k+1} = \frac{(p\ \varpi H_o + q\ \chi\ G_o)t}{1 - \varpi\chi\ t^2}$$

Remplaçant $\varpi(s)$, $\chi(s)$ $G_o(s)$ et $H_o(s)$ par leurs valeurs déjà calculées

$$\varpi(s) = \frac{qs}{1 - ps} \qquad \chi(s) = \frac{ss}{1 - ps} \quad G_o(s) = \frac{1}{1 - ps} \quad H_o(s) = \frac{1}{1 - qs}$$

$$I_k(s) = \frac{p(1-qs) + q(1-ps) + 2\ pqs\ t}{(1-ps)(1-qs) - pqs^2t^2}$$

$$\underline{\psi(s,t) = \frac{1 - 2pqs(1-t)}{1 - s + pqs^2(1 - t^2)}}$$

Par ailleurs en remplaçant $I_k(s)$ par son développement en s^n, $\psi(s,t)$ s'exprime par la somme double :

$$\psi(s,t) = \sum_{k=o}^{\infty} t^k \sum_{n=o}^{\infty} R_k(n)\ s^n$$

Si on intervertit les sommations :

$$\psi(s,t) = \sum_{n=o}^{\infty} s^n \sum_{k=o}^{\infty} R_k(n)\ t^k = \sum_{n=o}^{\infty} \psi_n(t)\ s^n$$

Ce qui montre bien que la fonction génératrice du nombre k de changements d'états observés de $t = 0$ à $t = n$ est le coefficient de s^n dans $\psi(s,t)$

Ceci posé l'espérance mathématique du nombre k de changements d'états :

$$E(k) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, R_k(n) = \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \sum_{k=1}^{\infty} R_k(n)\, t^k \right\}_{t=1} = \left[\psi'_n(t) \right]_{t=1}$$

Cette dernière expression peut être calculée par le biais de $\psi(s,t)$. Il suffit de développer $\psi(s,t)$ selon les puissances de s^n

$$\frac{\partial \psi(s,t)}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty} s^n\, \psi'_n(t) \qquad |s| < 1$$

et de faire $t = 1$ dans le coefficient de s^n. On peut aussi faire directement $t = 1$ dans l'expression de $\frac{\partial}{\partial t}\psi(s,t)$ et développer $\left\{ \frac{\partial}{\partial t}\psi(s,t) \right\}_{t=1}$ en s^n à condition que ce développement en s^n soit uniformément convergent pour $t \leq 1$ en sorte que la limite de la somme soit également la somme des limites.

Or $\frac{\partial \psi(s,t)}{\partial t}$ est une fonction croissante de t puisqu'elle s'exprime par un développement en t^k à termes positifs.

$$\frac{\partial \psi(s,t)}{\partial t} = \frac{\left[1 - s + pqs^2(1-t^2)\right] 2pqs - \left[1 - 2pqs(1-t^2)\right] 2pqs^2\, t}{\left[1 - s + pqs^2(1-t^2)\right]^2}$$

$$\frac{\partial \psi(s,t)}{\partial t} \leqslant \frac{2pq(1-s) + 2pqs^2}{(1-s)^2} = \frac{2pqs}{(1-s)^2} = 2pqs \frac{d}{ds}\left[\frac{1}{1-s}\right]$$

$$\frac{\partial \psi(s,t)}{\partial t} \leqslant 2pqs \frac{d}{ds} \sum_{n=0}^{\infty} s^n = 2pq \sum_{n=1}^{\infty} n\, s^n$$

Cette série est absolument convergente pour $|s| < 1$ ce qui établit la convergence uniforme du développement de $\psi(s,t)$ en s^n... Il est donc légitime de faire $t = 1$ dans l'expression de la dérivée avant développement et on a :

$$\boxed{E(k) = 2n\, pq}$$

4°) On peut décomposer la fraction rationnelle $\psi(s,t)$ en éléments simples :

$$\psi(s,t) = \frac{1 - 2pqs(1-t)}{1-s+pqs^2(1-t^2)} = \frac{1 - 2pqs(1-t)}{pq(1-t^2)(s_1-s)(s_2-s)} = \frac{A}{s_1-s} + \frac{B}{s_2-s}$$

s_1 et s_2 étant racines de l'équation

$$pq(1-t^2)\, s^2 - s + 1 = 0$$

$$s_1 = \frac{1+\sqrt{1-4pq(1-t^2)}}{pq(1-t^2)} \qquad s_2 = \frac{1-\sqrt{1-4pq(1-t^2)}}{2pq(1-t^2)}$$

$$s_1 - s_2 = \frac{\sqrt{1-4pq(1-t^2)}}{pq(1-t^2)}$$

$$A = \frac{1-2pqs_1(1-t)}{pq(1-t^2)(s_2-s_1)} \qquad B = \frac{1-2pqs_2(1-t)}{pq(1-t^2)(s_1-s_2)}$$

Développons $\psi(s,t)$ en s^n d'après la décomposition en éléments simples :

$$\psi(s,t) = \frac{A}{s_1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{s}{s_1}\right)^n + \frac{B}{s_2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{s}{s_2}\right)^n$$

$$\psi(s,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{A}{s_1^{n+1}} + \frac{B}{s_2^{n+1}}\right) s^n$$

Si on identifie à :

$$\psi(s,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\psi_n(t)\, s^n$$

$$\underline{\psi_n(t) = \frac{A}{s_1^{n+1}} + \frac{B}{s_2^{n+1}}}$$

<u>Cas particulier $p = q = \frac{1}{2}$</u>. Il vient :

$$s_1 = 2\,\frac{1+t}{1-t^2} = \frac{2}{1-t} \qquad s_2 = 2\,\frac{1-t}{1-t^2} = \frac{2}{1+t}$$

$$s_1 - s_2 = \frac{4t}{1-t^2}$$

d'où

$$A = 0 \qquad\qquad B = \frac{1 - \frac{1-t}{1+t}}{\frac{1}{4}(1-t^2)\,\frac{4t}{1-t^2}} = \frac{2}{1+t}$$

et

$$\psi_n(t) = \frac{B}{s_2^{\,n+1}} = \left(\frac{1+t}{2}\right)^n$$

5°) Si n tendant vers l'infini, pq tendant vers 0 et le produit npq vers une limite θ

$s_1 \sim \dfrac{1}{2pq(1-t^2)}$ tend vers $+\infty$ $\qquad s_1 - s_2 \sim \dfrac{1}{pq(1-t^2)}$ tend aussi vers l'infini.

$$A \sim \frac{1}{1+t} - 1 = -\frac{t}{1+t}$$

Il en résulte que

$$\frac{A}{s_1^{\,n+1}} \text{ tend vers zéro.}$$

Par contre :

$$s_2 = \frac{1-\sqrt{1-4pq(1-t^2)}}{2pq(1-t^2)} \sim \frac{1-\left[1-2pq(1-t^2)-2p^2q^2(1-t^2)^2+\dots\right]}{2pq(1-t^2)} \sim 1 + pq(1-t^2) + \dots$$

B tend vers 1.

Par suite $\psi(s,t)$ tend vers

$$\frac{1}{s_2^{\,n+1}} \sim \frac{1}{\left[1+pq(1-t^2)\right]^{n+1}} \sim \frac{1}{\left[1+\frac{npq}{n}(1-t^2)\right]^n}$$

$$\boxed{\psi_n(t) \text{ tend vers } e^{\theta(t^2-1)}}$$

Le nombre <u>k</u> de changements d'états de $t = 0$ à $t = n$ converge en loi. On reconnaîtra plus aisément cette loi en faisant apparaître la seconde fonction caractéristique $\text{Log}\,\Phi(u)$:

$$t = e^{iu}$$

$$\text{Log}\,\Phi(u) = \theta(e^{2iu} - 1)$$

On voit sous cette forme que l'on peut interpréter k :

$$k = 2\ N$$

N étant une <u>variable poissonienne</u> de paramètre θ :

$$\text{Prob} \left\{ N = \nu \right\} = e^{-\theta} \frac{\theta^{\nu}}{\nu}$$

$$\underline{R_{2\nu}\ (n = \infty) = \text{Prob} \left\{ k = 2\,\nu \right\} = e^{-\theta} \frac{\theta^{\nu}}{\nu!}}$$

On retrouve d'ailleurs de façon tout à fait élémentaire :

$$\psi_{\infty}(t) = \sum_{\nu = 0}^{\infty} R_{2\nu}\ (n = \infty)\ t^{2\nu} = e^{-\theta} \sum_{\nu = 0}^{\infty} \frac{\theta^{\nu}\, t^{2\nu}}{\nu!} = e^{-\theta}\ e^{\theta t^2} = e^{\theta(t^2 - 1)}$$

Il est assez inattendu que la loi ergodique ne permette que des nombres pairs de changements d'états.

E 13.- POISSONNISATION DE LA MISE EN PLACE ALEATOIRE

PROBABILITES CONDITIONNELLES - COMPOSITION DES FONCTIONS GENERATRICES

Cet exercice montre comment on peut calculer des probabilités ou des lois d'une façon détournée en les considérant comme conditionnelles et en appliquant les théorèmes des probabilités ou des lois composées. La question a été, lors d'un exercice antérieur traitée de façon élémentaire. Voici une solution autrement plus élégante.

On imagine N cases $C_1\ C_2 \dots C_n$ et n particules qui peuvent tomber dans les cases, avec une probabilité égale pour chaque case et de façon absolument indépendante. On désigne par $n_1, n_2 \dots n_N$ le nombre de particules tombées dans les cases $C_1, C_2 \dots C_n$.

I.- - n étant un nombre fixe donné, écrire la fonction catactéristique du système des N variables $n_1, n_2 \dots n_N$.

$$\varphi_n(u_1, u_2 \dots u_N)$$

- supposant maintenant que n est un nombre, non plus fixe, mais poissonnien de paramètre θ, écrire la fonction caractéristique $\Phi(u)$ du système des N variables. Montrer que les particules se répartissent dans chaque case selon une loi poissonnienne de paramètre $\frac{\theta}{N}$ et de façon indépendante dans chacune des cases.

II.- On désigne par $P_m(n)$ la probabilité pour que m cases exactement soient vides, n étant fixé et par P_m la probabilité pour que m cases exactement soient vides, n n'étant pas fixé, mais poissonnien de paramètre θ.

P_m s'exprime à l'aide des probabilités conditionnelles $P_m(n)$ par :

$$P_m = e^{-\theta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^n}{n!} P_m(n)$$

- Calculer, à l'aide du résultat final de I, la probabilité P_0 pour qu'une case soit vide. Remarquer que la loi de répartition de m est binomiale. En déduire l'expression de P_m, et par identification des développements en θ l'expression de $P_m(n)$ à partir de celle de P_m.

III.- PROCEDER DE FACON ANALOGUE POUR LES FONCTIONS GENERATRICES.

de la loi conditionnelle à n fixé : $G_n(s) = \sum_{n=0}^{\infty} P_m(s)\, s^n$

de la loi composée pour n poissonnien: $G(s) = \sum_{m=0}^{\infty} P_m\, s^m = e^{-\theta} \sum_{n=0}^{\infty} G_n(s) \frac{\theta^n}{n!}$

$G(s)$ se calcule facilement. Par identification des développements, déduire $G_n(s)$ de $G(s)$.

IV.- On cherchera la limite de la fonction génératrice $G_n(s)$ lorsque n et N tendent tous deux vers l'infini, en supposant toutefois que l'espérance $E_m(n) = G'_n(1)$ du nombre de cases vides, à n fixé, tend vers une limite finie λ lorsque n et N tendent vers l'infini. Cette condition impose que $N e^{-\frac{n}{N}}$ tende vers une limite λ.

Justifier la légitimité du passage à la limite sur la série $G_n(s)$. Sur la limite de la fonction génératrice, reconnaître la loi limite du nombre m de cases vides.

*

* *

SE 13.- POISSONNISATION DE LA MISE EN PLACE ALEATOIRE

PROBABILITES CONDITIONNELLES - COMPOSITION DES FONCTIONS GENERATRICES

I.- Envisageons tout d'abord une particule unique. La particule peut tomber dans une quelconque des cases avec la probabilité $\frac{1}{N}$ (d'avoir 1) et la probabilité $1-\frac{1}{N}$ (d'avoir 0). La fonction caractéristique à N composantes est :

$$E(e^{i\sum u_i x_i}) = \frac{e^{iu_1} + e^{iu_2} + \dots e^{iu_N}}{N}$$

Comme les particules se comportent de façon indépendante les unes des autres, la fonction caractéristique relative à l'ensemble des particules, c'est-à-dire la fonction caractéristique des nombres de particules réparties dans les cases est le produit de n fonctions identiques à la précédente :

$$\varphi_n(u_1, u_2 \dots u_N) = \left[\frac{e^{iu_1} + e^{iu_2} + \dots e^{iu_N}}{N}\right]^n$$

ou si l'on préfère la fonction génératrice

$$g_n(s_1, s_2 \dots s_N) = \left[\frac{s_1 + s_2 + \dots s_N}{N}\right]^n$$

On pourrait en déduire la probabilité pour que $\underline{m}$ cases exactement soient vides en sommant dans le développement de g_n les coefficients des monomes constants en $s_1, s_2 \dots s_m$ et en multipliant par C_N^m. Ce ne serait pas très simple, nous chercherons à obtenir directement l'expression de $P_m(n)$.

- Si maintenant, on considère que n n'est plus un nombre fixe donné, mais une variable poissonnienne de paramètre θ, on obtient la fonction caractéristique $\Phi(u)$ en composant les φ_n par la loi de Poisson :

$$\Phi(u) = e^{-\theta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^n}{n!} \left[\frac{e^{iu_1} + e^{iu_2} + \dots e^{iu_N}}{N}\right]^n = e^{-\theta} e^{\frac{\theta}{N}(e^{iu_1} + e^{iu_2} + \dots e^{iu_N})}$$

$$\Phi(u) = e^{\frac{\theta}{N}\left[(e^{iu_1}-1)+(e^{iu_2}-1)+ \dots (e^{iu_N}-1)\right]}$$

$$\underline{\Phi(u) = e^{\frac{\theta}{N}(e^{iu_1}-1)} \, e^{\frac{\theta}{N}(e^{iu_2}-1)} \dots e^{\frac{\theta}{N}(e^{iu_N}-1)}}$$

Ainsi la répartition dans chaque case est-elle poissonnienne de paramètre $\frac{\theta}{N}$. De plus les particules se répartissent dans <u>chaque case de façon indépendante</u>

$$\text{Prob}\left\{ n_1 = k \right\} = e^{-\frac{\theta}{N}} \frac{\theta^k}{k!}$$

II.- Il en résulte que la probabilité P_o de n'avoir dans une case donnée aucune particule est :

$$P_o = e^{-\frac{\theta}{N}} \qquad (P_o, N)$$

La répartition des "absences" entre les N cases est binomiale, puisque les comportements pour chacune des cases sont indépendants, d'où la probabilité pour que $\underline{m}$ cases exactement soient vides :

$$P_m = C_N^m \; P_o^m \, (1 - P_o)^{N-m}$$

$$P_m = C_N^m \; e^{-m\frac{\theta}{N}} (1 - e^{-\frac{\theta}{N}})^{N-m}$$

$$\underline{P_m = e^{-\theta} \; C_N^m (e^{\frac{\theta}{N}} - 1)^{N-m}}$$

L'expression de P_m est développable en θ

$$P_m = e^{-\theta} \; C_N^m \sum_{k=0}^{N-m} (-1)^k \; C_{N-m}^k \; e^{\frac{N-m-k}{N}\theta}$$

$$P_m = e^{-\theta} \; C_N^m \sum_{k=0}^{N-m} C_{N-m}^k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - \frac{m+k}{N})^n \theta^n}{n!}$$

ou, en intervertissant les sommations :

$$P_m = C_N^m \, e^{-\theta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^n}{n!} \sum_{k=0}^{N-m} (-1)^k \; C_{N-m}^k \, (1 - \frac{m+k}{N})^n$$

On peut maintenant identifier avec le développement de la loi composée

$$P_m = e^{-\theta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^n}{n!} \; P_m(n)$$

$$\boxed{P_m(n) = C_N^m \sum_{k=0}^{N-m} (-1)^k \; C_{N-m}^k (1 - \frac{m+k}{N})^n}$$

III.- Pour déterminer la loi (conditionnelle) à n fixé, on peut aussi chercher sa fonction génératrice et pour ce faire, en agir avec les fonctions génératrices $G(s)$ et $G_n(s)$ comme on l'a fait avec les probabilités P_m et $P_m(n)$.

La fonction génératrice composée

$$G(s) = \sum_{n=0}^{\infty} P_m s^m$$

est celle de la loi binomiale $\left(P_o = e^{-\frac{\theta}{N}}, N\right)$.

$$G(s) = \left(1 - e^{-\frac{\theta}{N}} + s\, e^{-\frac{\theta}{N}}\right)^N$$

On peut développer $G(s)$ en θ comme nous l'avons fait pour P_m.

$$G(s) = e^{-\theta}\left[e^{\frac{\theta}{N}} - (1-s)\right]^N = e^{-\theta}\sum_{k=0}^{N}(-1)^k\, C_N^k\, e^{\frac{N-k}{N}\theta}\,(1-s)^k$$

$$G(s) = e^{-\theta}\sum_{k=0}^{N}(-1)^k\, C_N^k(1-s)^k\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{k}{N}\right)^n \frac{\theta^n}{n!}$$

Intervertissant les sommations :

$$G(s) = e^{-\theta}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\theta^n}{n!}\sum_{k=0}^{N}(-1)^k\, C_N^k\left(1-\frac{k}{N}\right)^n(1-s)^k$$

Identifiant avec :

$$G(s) = e^{-\theta}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\theta^n}{n!}\, G_n(s)$$

On obtient la fonction génératrice de la répartition à n donné

$$\boxed{G_n(s) = \sum_{k=0}^{N}(-1)^k\, C_N^k\left(1-\frac{k}{N}\right)^n(1-s)^k}$$

C'est par l'intermédiaire de la fonction génératrice que nous allons chercher la loi limite n et N tendant vers l'infini.

D'après l'hypothèse de l'énoncé

$$E_m(n) = G'_n(1) = N(1 - \frac{1}{N})^n \quad \text{doit tendre vers une limite } \lambda \text{ ce qui impose :}$$

$$N\, e^{-\frac{n}{N}} \quad \text{tend vers } \lambda.$$

Moyennant cette condition cherchons la limite de :

$$(-1)^k C_n^k \, (1 - \frac{k}{N})^n \, (1 - s)^k$$

$N \longrightarrow \infty$ $\quad C_N^k$ équivalent à $\frac{N^k}{k!}$ par valeurs inférieures quand N tend vers l'infini.

$(1 - \frac{k}{N})^n$ équivalent à $e^{-\frac{kn}{N}}$ par valeurs inférieures quand n et N tendent vers l'infini.

D'où

$$C_N^k (1 - \frac{k}{N})^n \, (1 - s)^k \text{ équivalent à } \frac{N^k}{k!} \, e^{-\frac{kn}{N}} (1 - s)^k \text{ par valeurs inférieures.}$$

Le terme général de la série $G_n(s)$ est donc majoré en valeur absolue par

$$\frac{B^k}{k!} (1 - s)^k \qquad B \text{ étant un nombre supérieur à } \lambda.$$

La série $G_n(s)$, dont le terme général est majoré en valeur absolue par le terme général, indépendant de n et de N, d'une série convergente est donc uniformément convergente. Par suite on peut prendre la limite de chaque terme et la somme de ces limites est la limite de la somme de la série. Le passage à la limite est légitime.

Donc

$$G_n(s) \longrightarrow \Gamma(s) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\lambda^k (1-s)^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\lambda(s-1)]^k}{k!} = e^{\lambda(s-1)}$$

La fonction génératrice $G_n(s)$ converge vers la fonction génératrice d'une loi de Poisson de paramètre λ.

La loi de probabilité du nombre de cases vides tend donc vers une loi de Poisson de paramètre $N\, e^{-\frac{n}{N}}$.

E 14.- ETUDE SOMMAIRE DES REACTIONS EN CHAINE A L'AIDE DE LA FONCTION GENERATRICE

I) - Le temps varie de façon discontinue

A l'instant initial $t = 0$, on a une particule. Au bout du temps $t = 1$, cette particule s'est muée en une population dont le nombre obéit à la loi de probabilité p_k. La population à l'instant (1) est caractérisée par la fonction génératrice

$$G(s) = \sum p_k \, s_k$$

A l'instant $t = 2$, chaque membre de la première génération s'est mué en un certain nombre de particules, nombre qui suit la même loi p_k. A la nouvelle population dont le nombre obéit à la loi de probabilité $P_k(2)$ est attaché la fonction génératrice $G_2(s)$ et ainsi de suite.

- Etablir d'une façon générale que le nombre d'individus de la $n+1$ ième génération obéissant à la loi de probabilité $P_k(n+1)$ est déterminé par la fonction génératrice $G_{n+1}(s)$ qui se déduit ainsi de $G_n(s)$:

$$G_{n+1}(s) = G\left[G_n(s)\right] = G_n\left[G(s)\right]$$

- Montrer que la fonction $G(s) - s$, qui s'annule pour $s = 1$ admet en outre une autre racine s_o comprise entre 0 et 1 si le nombre moyen des particules à la première génération $m = G'(1)$ est supérieur à 1, et qu'elle ne s'annule pas entre 0 et 1 si $G'(1)$ est inférieur ou égal à 1.

En déduire que le nombre de particules présentes à l'instant n ne converge pas en loi. Lorsque n tend vers l'infini :

si $m = G'(1) \leq 1$ la fonction génératrice $G_n(s)$ et la probabilité d'extinction $P_o(n)$ tendent vers 1 : il y a extinction presque certaine.

si $m = G'(1) > 1$ la fonction génératrice $G_n(s)$ et la probabilité d'extinction $P_o(n)$ tendent vers la racine s_o : il y a effet de fuite.

II) Le temps varie de façon continue.

On imagine que les époques $t = 1, 2 \ldots n$ sont rapprochées et séparées par des intervalles de temps petits.

La fonction génératrice $G(s)$ relative à un intervalle de temps petit Δt peut se mettre sous la forme

$$G(s) = s + \Delta t \, \varphi(s)$$

car la probabilité pour qu'un membre de la population présente à l'instant t ait disparu ou ait donné naissance à une particule est faible dans la mesure où Δt est très petit. Or dans la fonction génératrice, la probabilité pour qu'il n'y ait pas de changement, c'est-à-dire pour qu'un individu se mue en lui-même n'est autre que le coefficient de s.

De la loi de formation des fonctions génératrices à temps continu déduire l'équation différentielle donnant $G(s,t)$:

$$\frac{\partial G(s,t)}{\partial t} = \varphi(G)$$

Intégrer l'équation différentielle et montrer, en tenant compte de la situation à l'origine des temps, que la solution est :

$$t = \int_s^{G(s,t)} \frac{dv}{\varphi(v)}$$

Etablir directement sur l'équation différentielle la loi de l'espérance mathématique $m(t)$ du nombre de particules présentes à l'instant t

$$m(t) = e^{t \varphi'(1)}$$

Donner la forme de la fonction $\varphi(s)$ si l'on admet qu'à l'instant t pendant l'intervalle de temps t, $t + \Delta t$ chaque particule peut :

- soit périr avec la probabilité $\alpha_o \Delta t$
- soit se scinder en $k = 2, 3 \ldots n$ particules avec les probabilités respectives $\alpha_k \Delta t$
- soit subsister sans modification avec la probabilité $1 - \sum_{k \neq 1} \alpha_k \Delta t$

$$\varphi(s) = \sum_{k \neq 1}^{n} \alpha_k s^k - s \sum_{k \neq 1}^{n} \alpha_k$$

Montrer que $\varphi(s)$ s'annule une fois au plus pour $s = s_o$ entre 0 et 1 selon le signe de la dérivée au point 1 : $\varphi'(1)$

Discuter le comportement de $G(s,t)$ et de la probabilité pour qu'il n'y ait plus de particule $P_o(t)$ lorsque t tend vers l'infini.

Etablir que t tendant vers l'infini :

- si $G'(1) \leq 1$, condition identique à $\varphi'(1) \leqslant 0$ ou $m(t) \leqslant 1$ $G(s,t)$ et $P_o(t)$ tendent vers 1: il y a extinction presque certaine.

- si $G'(1) > 1$, condition identique à $\varphi'(1) > 0$ ou $m(t) > 1$ $G(s,t)$ et $P_o(t)$ tendent vers s_o: il y a fuite à l'infini.

III) On pourra concrétiser ces notions, en traitant les deux exemples.

a) La particule peut soit se scinder en deux avec une probabilité $\alpha_2 \Delta t$, soit subsister sans changement.

- Calculer explicitement $G(s,t)$, en déduire la loi de probabilité $P_k(t)$ du nombre de particules présentes à l'instant t.

b) La particule peut soit se scinder en deux avec une probabilité $\alpha_2 \Delta t$, soit mourir avec la probabilité $\alpha_o \Delta t$, soit subsister sans changement.

- Calculer explicitement $G(s,t)$. Discuter de son comportement et de celui de $P_o(t)$ lorsque t tend vers l'infini selon les valeurs du rapport $\frac{\alpha_o}{\alpha_2}$. Traiter directement le cas limite $\alpha_o = \alpha_2$

*

* *

SE 14.- ETUDE SOMMAIRE DES REACTIONS EN CHAINE A L'AIDE DE LA FONCTION GENERATRICE

I) Chacun des k membres de la population à l'instant n, dont le nombre obéit à la loi de Probabilité $P_k(n)$ se transforme à l'instant $n+1$ en un nombre de particules dont la fonction génératrice est G. La fonction génératrice de la population à l'instant $n+1$ s'obtient en composant (à l'aide de la probabilité $P_k(n)$ les fonctions caractéristiques de k variables indépendantes correspondant à chacun des k membres.

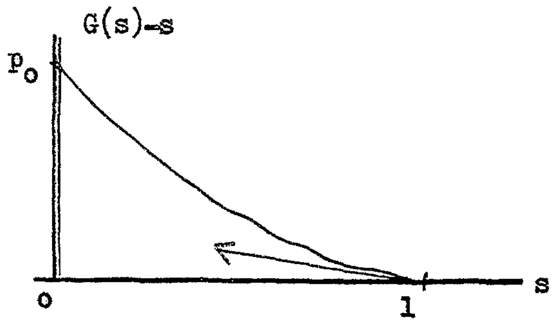
$$G_{n+1}(s) = \sum_k P_k(n) \left[G(s) \right]^k = G_n\left[G(s)\right]$$

On peut aussi dire que les individus présents à l'instant $\underline{n}$ et dont le nombre est défini en probabilité par la fonction génératrice $G_n(s)$ se transforment chacun pour le compte et de façon indépendante en r individus à l'instant $n+1$ avec la probabilité p_r. D'où la composition un peu différente

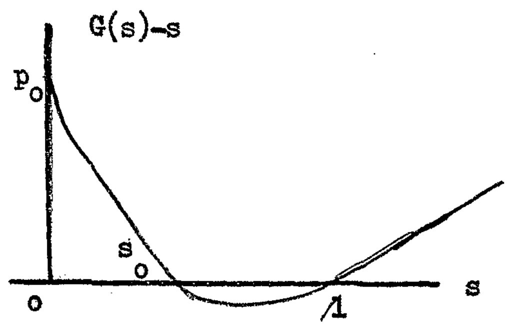
$$G_{n+1}(s) = \sum_r p_r \left[G_n(s) \right]^r = G\left[G_n(s)\right]$$

$$G_{n+1}(s) = G_n\left[G(s)\right] = G\left[G_n(s)\right]$$

Ceci posé la fonction $G(s)-s$ qui s'annule pour $s = 1$, est positive et égale à p_o pour $s = o$, et qui tourne sa concavité vers les ordonnées positives car $G''(s)$ est constituée de termes tous positifs, a nécessairement l'une des allures suivantes, selon l'inclinaison de la tangente :



si $G'(1)-1 \leqslant 0$ c'est-à-dire $m \leqslant 1$



$G'(1)-1$ 0 c'est-à-dire $m \geqslant 1$

La série itérée $G_{n+1}(s) = G\left[G_n(s)\right]$ (cf. méthode de calcul d'une racine par itérations).

converge vers la plus petite racine de l'équation

$$G(s) - s = 0$$

c'est-à-dire vers $\underline{s_o}$ si $\underline{m = G'(1) > 1}$ ou vers 1 si $m = G'(1) \leq 1$

on conclut que, lorsque n tend vers l'infini :

si $G'(1) \leq 1$ $G_n(s) \longrightarrow 1$ et $P_o(n) = G_n(0) \longrightarrow 1$ il y a extinction presque certaine.

si $G'(1) > 1$ $G_n(s) \longrightarrow s_o$ et $P_o(n) = G_n(0) \longrightarrow s_o$ il y a effet de fuite.

En outre, du fait que $G_n(s)$ ne tend jamais vers une fonction, le nombre de particules présente à l'instant n ne converge pas en loi.

II) Appliquons l'équation à temps discontinu en assimilant n à t et $n+1$ à $t + \Delta t$ et en usant de l'expression de la fonction génératrice G relative à un temps court :

$$G = s + \Delta t \quad \varphi(s)$$

$$G_{n+1}(s) = G\left[G_n(s)\right]$$

$$G(s,t + \Delta t) = G(s,t) + \Delta t \quad \varphi\left[G(s,t)\right]$$

si l'on fait tendre Δt vers zéro :

$$\frac{\partial G(s,t)}{\partial t} = \varphi\left[G(s,t)\right]$$

Cette équation s'intègre à vue :

$$t = \int \frac{dG}{\varphi(G)} = \int^{G(s,t)} \frac{dv}{\varphi\ (v)}$$

A l'instant initial, $t = 0$, $G(s,0)$ doit être identique à s puisqu'il n'y a qu'une particule à l'instant initial. cette condition détermine la constante d'intégration (qui est une fonction de s)

$$t = \int_{s}^{G(s,t)} \frac{dv}{\varphi(v)}$$

Cette intégrale définit la fonction génératrice $G(s,t)$ sous forme inverse. Dans un exercice ultérieur : "Evolution d'une population de bactéries," cette solution sera obtenue comme conséquence des équations de Kolmogorov.

Expression de l'espérance mathématique du nombre de particules présentes à l'instant t.

Cette expression s'obtient immédiatement en dérivant en s l'équation différentielle du problème :

$$\frac{\partial^2 G}{\partial s \partial t} = \varphi'(G) \frac{\partial G}{\partial s}$$

où l'on fait $s = 1$ $\quad \left(\frac{\partial G}{\partial s}\right)_{s=1} = m(t) \qquad G = 1$

$$\frac{d\, m(t)}{dt} = \varphi'(1)\; m(t)$$

$$\boxed{m(t) = e^{-\varphi'(1)}}$$

On note que $m(t) \left[\frac{\partial G(s,t)}{\partial s}\right]_{s=1}$ est inférieure ou supérieure à 1 selon que $\varphi'(1)$ est négatif ou positif.

Que peut-on dire de la fonction $\varphi(s)$?

A l'instant t, pendant l'intervalle de temps $t, t+\Delta t$ chaque particule peut :

- soit périr avec la probabilité $\alpha_o \Delta t$
- soit se scinder en $k = 2,3...n$ particules, avec les probabilités res-

- pectives $\alpha_k \Delta t$
- soit subsister sans modification avec la probabilité $1 - \sum_{k \neq 1} \alpha_k \Delta t$

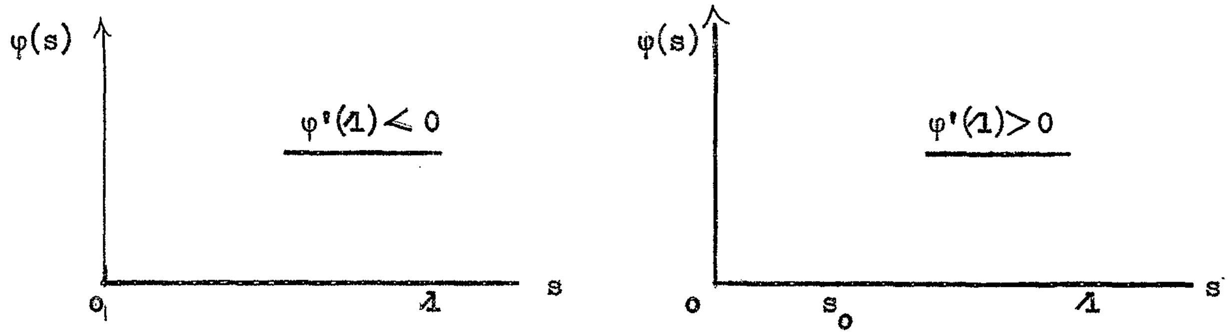
on a donc

$$G(s) = s(1 - \sum_{k \neq 1}^{n} \alpha_k \Delta t) + \Delta t(\alpha_0 + \alpha_2 s^2 + \dots \alpha_n s^n)$$

$$G(s) = s + \Delta t \left[\sum_{k \neq 1}^{n} \alpha_k s^k - s \sum_{k \neq 1}^{n} \alpha_k \right] = s + \Delta t \, \varphi(s)$$

$$\boxed{\varphi(s) = \sum_{k \neq 1}^{n} \alpha_k s^k - s \sum_{k \neq 1}^{n} \alpha_k}$$

On note que $\varphi''(s) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)s^{k-2}$ est toujours positif. Si $\alpha_0 \neq 0$ la courbe représentative a l'une des deux formes suivantes :



Outre la racine 1 la fonction $\varphi(s)$ a une <u>racine unique s_0</u> comprise entre o et 1 si <u>$\varphi'(s) > 0$</u>. Elle n'a pas de racine inférieure à 1 si <u>$\varphi'(1) \leq 0$</u>

Puisque $G(s) - s = \Delta t \, \varphi(s)$, ces résultats découlent d'ailleurs de la discussion faite sur la fonction $G(s)$ au (I).

<u>Comportement de la fonction génératrice $G(s,t)$ lorsque t tend vers l'infini.</u>

Il résulte de la discussion précédente.

Si la fraction $\frac{1}{\varphi(v)}$ n'a pas d'autre pôle que 1, c'est-à-dire si <u>$\varphi'(1) \leq 0$</u>, lorsque t tend vers l'infini $G(s,t)$ tend vers 1 et il en est de même de la probabilité $P_o(t) = G(s = o,t)$ pour qu'il n'y ait plus de particule lorsque t tend vers l'infini. Il y a extinction presque certaine.

Si la fraction $\frac{1}{\varphi(v)}$ a un pôle s_o inférieur à 1 c'est-à-dire si $\varphi'(1)>0$, $G(s,t)$ ainsi que $P_o(t)$ tendent vers s_o lorsque t tend vers l'infini. Il y a fuite à l'infini.

Pour rassembler les résultats :

Lorsque t tend vers l'infini :

Si $\underline{G'(1) \leq 1}$ ce qui est équivalent à $\varphi'(1) \leq 0$ et à $m(t) = \left[\frac{\partial G(s,t)}{\partial t}\right]_{s=1} e^{t\,\varphi'(1)} \leq 1$

$$G(s,t) \longrightarrow P_o(t) \longrightarrow 1 \qquad \text{il y a extinction presque certaine}$$

Si $\underline{G'(1) > 1}$ ce qui est équivalent à $\varphi'(1) > 0$ et à $m(t) = \left[\frac{\partial G(s,t)}{\partial t}\right]_{s=1} e^{t\varphi'(1)} > 1$

$$G(s,t) \longrightarrow P_o(t) \longrightarrow s_o \quad \text{racine de } \varphi(s) = 0 \text{ : il y a fuite à l'infini.}$$

Remarquons que le nombre de particules ne converge jamais en loi puisque $G(s,t)$ tend toujours vers une constante 1 ou s_o.

... / ...

III) Exemples.

a) La particule peut se scinder en deux avec une probabilité $\alpha_2 \Delta t$, soit subsister sans changement.

$$\varphi(s) = \alpha_2 \, (s^2 - s)$$

$$\alpha_2 t = - \int_s^{G(s,t)} \frac{dv}{v(1-v)} = \mathrm{Log} \left\{ \frac{G(s,t)}{1 - G(s,t)} \quad \frac{1-s}{s} \right\}$$

$$G(s,t) = \frac{s\, e^{-\alpha_2 t}}{1 - s(1 - e^{-\alpha 2 t})}$$

Du développement de la fonction génératrice, on déduit la loi de probabilité du nombre de particules présentes à l'instant t :

$$G(s,t) = e^{-\alpha_2 t} \sum_{k=1}^{\infty} (1 - e^{-\alpha_2 t})^{k-1} \; s^k$$

$$P_k(t) = e^{-\alpha_2 t} \, (1 - e^{-\alpha_2 t})^{k-1}$$

Par ailleurs, l'application de la formule générale donne la moyenne $m(t)$ du nombre de particules présentes à l'instant t.

$$m(t) = e^{t\varphi'(1)} = e^{\alpha_2 t}$$

b) La particule peut soit se scinder en deux avec une probabilité $\alpha_2 \Delta t$, soit mourir avec la probabilité $\alpha_o \Delta t$, soit subsister sans changement.

$$\varphi(s) = \alpha_2 \; s^2 - (\alpha_o + \alpha_2)s + \alpha_o = (1 - s)(\alpha_o - \alpha_2 s)$$

$$t = \int_s^{G(s,t)} \frac{dv}{\alpha_2 v^2 - (\alpha_o + \alpha_2)v + \alpha_o} = \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_o} \int_s^{G(s,t)} \left[\frac{\alpha^2}{\alpha_o - \alpha_2 v} - \frac{1}{1-v} \right] dv$$

$$\frac{1 - G(s,t)}{\alpha_o - \alpha_2 G(s,t)} = \frac{1 - s}{\alpha_o - \alpha_2 s} \quad e^{(\alpha_2 - \alpha_o)t}$$

$$G(s,t) = \frac{1 - e^{(\alpha_2 - \alpha_o)t} - s\left[\frac{\alpha_2}{\alpha_o} - e^{(\alpha_2 - \alpha_o)t}\right]}{1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_o} \; e^{(\alpha_2 - \alpha_o)t} \quad \frac{\alpha_2}{\alpha_o} s \left[1 - e^{(\alpha_2 - \alpha_o)t}\right]}$$

$$m(t) = e^{t\varphi'(1)} = e^{(\alpha_2 - \alpha_o)t}$$

Deux cas sont à distinguer selon que la fraction rationnelle sous le signe d'intégration a un pôle inférieur à 1 ou non :

$\alpha_o \geqslant \alpha_2$, il n'y a pas de pôle inférieur à 1 $\varphi'(1) = \alpha_2 - \alpha_o \leqslant 0$ $m(t) \leqslant 1$

$G(s,t) \longrightarrow P_o(t) \longrightarrow 1$ Extinction presque certaine.

$\alpha_o < \alpha_2$, il y a un pôle $\frac{\alpha_o}{\alpha_2}$ inférieur à 1 $\varphi'(1) = \alpha_2 - \alpha_o > 0$ $m(t) > 1$

$G(s,t) \longrightarrow P_o(t) \longrightarrow \frac{\alpha_o}{\alpha_2}$ fuite à l'infini.

Le cas limite $\alpha_o = \alpha_2$ peut d'ailleurs se traiter directement

$$\alpha_o(t) = \int_s^{G(s,t)} \frac{dv}{(1-v)^2} = \frac{G - s}{(1-s)(1-G)}$$

$$G(s,t) = \frac{\alpha_o(t) + s(1 - \alpha_o t)}{1 + \alpha_o(1 - s)t}$$

$t \longrightarrow \infty$ on vérifie sur la formule :

$$G(s,t) \longrightarrow P_o(t) \longrightarrow 1$$

E 15.- CONVERGENCE DE LA MOYENNE DE $\underline{n}$ VARIABLES ALEATOIRES NON INDEPENDANTES

On considère des variables aléatoires $\underline{X_n}$ non indépendantes de moyennes $\underline{m_n}$ et ayant des variances bornées

$$\text{les } \sigma_n^2 \leqslant B$$

- De plus les coefficients de corrélation ρ_{ij} entre deux des variables tendent vers zéro dès que $|i-j|$ tend vers l'infini

$$\lim_{|i-j|\to\infty} \rho_{ij} = 0$$ autrement dit, il existe un nombre k tel que $|i-j|>k$ entraîne $|\rho_{ij}|<\varepsilon$

I.- Montrer que la variable $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - m_k)$ converge vers zéro en <u>moyenne quadratique</u> c'est-à-dire a fortiori en probabilité. On étudiera le comportement de la variance $D^2(Y_n)$ de Y_n.

II.- σ_i^2 et σ_j^2 étant les variances de deux variables X_i et X_j, on ajoute aux hypothèses précédentes que la série double

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \rho_{ij}\,\sigma_i\,\sigma_j$$

est absolument convergente, la somme des valeurs absolues étant :

$$S = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} |\rho_{ij}|\;\sigma_i\,\sigma_j$$

Montrer, en s'aidant de l'inégalité de Tchebycheff, que Y_n converge alors presque sûrement vers zéro.

III.- Si on complète les hypothèses initiales (non pas celles du II) en précisant que les X_n sont des variables obéissant à la <u>même loi normale</u>, de moyenne nulle par exemple, et de <u>variance finie σ^2</u> et qu'en outre les coefficients de corrélation sont tels que

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\rho_{ij}| < A \quad \text{pour tout } i$$

Montrer, que Y_n converge presque sûrement vers zéro.

*

* *

SE 15.- CONVERGENCE DE LA MOYENNE DE n VARIABLES ALEATOIRES NON INDEPENDANTES

I.- La moyenne des Y_n est nulle, la variance des Y_n est donnée par

$$D^2(Y_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i,j \leqslant n} \rho_{ij} \ \sigma_i \ \sigma_j \quad \text{avec évidemment} \quad \rho_{ii} = 1$$

$$D^2(Y_n) = \frac{1}{n^2} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^2 + 2 \sum_{i<j\leqslant n} \rho_{ij} \ \sigma_i \ \sigma_j \right\} \leqslant B \left[\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} \sum_{i<j\leqslant n} |\rho_{ij}| \right]$$

Occupons nous de la somme

$$\sum_{i<j\leqslant n} |\rho_{ij}| = \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=i+1}^{n} |\rho_{ij}| \right]$$

Elle peut être scindée en deux parties :

de $j = i + 1$ à $j = i + k$

de $j = i + k + 1$ à $j = n$

$$\sum_{i<j\leqslant n} |\rho_{ij}| = \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=i+1}^{i+k} |\rho_{ij}| + \sum_{j=i+k+1}^{n} |\rho_{ij}| \right]$$

D'après l'hypothèse faite :

$$\text{pour} \quad j - i > k \qquad |\rho_{ij}| < \varepsilon$$

$$\sum_{i<j\leqslant n} |\rho_{ij}| < nk + \varepsilon \sum_{i=1}^{n} (n - i - k) = n\,k + \varepsilon \left[n(n-k) - \frac{n(n+1)}{2} \right]$$

$$\sum_{i<j\leqslant n} |\rho_{ij}| < nk + \frac{n(n-1)}{2} \varepsilon$$

d'où

$$\underline{D^2(Y_n) < \left(\frac{2k+1}{n} + \varepsilon \right) B}$$

On en conclut que $D^2(Y_n)$ tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini, c'est-à-dire

$$E\left[(Y_n - 0)^2\right] \longrightarrow 0 \qquad n \longrightarrow \infty$$

Y_n converge donc en moyenne quadratique, et a fortiori en probabilité vers 0.

II.– Si l'on forme l'hypothèse supplémentaire

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\rho_{ij}| \ \sigma_i \ \sigma_j = S$$

on a :

$$D^2(Y_n) \leqslant \frac{S}{n^2}$$

Or, d'après Tchebycheff

$$\text{Prob}(|Y_n| \geqslant \alpha) \leqslant \frac{1}{\alpha^2} \ D^2(Y_n) \leqslant \frac{S^2}{\alpha^2 \ n^2}$$

Il en résulte que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[P(|Y_n - 0| \geqslant \alpha) \right]$$ est convergente quel que soit $\alpha > 0$.

D'après le critère de Borel-Cantelli c'est une condition suffisante de convergence presque sûre vers zéro.

Y_n converge presque sûrement vers zéro.

... / ...

III.- Les X_n obéissent à une même loi normale de variance $\underline{\sigma^2}$ et

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\rho_{ij}| < A \quad \text{pour tout } i$$

On a

$$D^2(Y_n) = \frac{\sigma^2}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \rho_{ij} \leqslant \frac{n\,A\,\sigma^2}{n^2}$$

$$D^2(Y_n) \leqslant \frac{A\,\sigma^2}{n}$$

On en déduit la convergence en moyenne quadratique vers zéro, mais on peut aller plus loin. Calculons

$\text{Prob}(|Y_n| \geqslant \alpha)$ on pourra poser pour la commodité $D^2(Y_n) = S_n^2$

$$P(|Y_n| \geqslant \alpha) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\alpha}{S_n}}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

Lorsque n est assez grand, c'est-à-dire $\frac{\alpha}{S_n}$ assez grand l'intégrale de Gauss est inférieure à :

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \; \frac{S_n}{\alpha} \; e^{-\frac{\alpha^2}{2S_n^2}}$$

Or, pour n grand, l'exponentielle négative est inférieure à toute puissance négative de l'exposant. On a par exemple

$$e^{-\frac{\alpha^2}{2\,S_n^2}} < \frac{2\,S_n^2}{\alpha^2}$$

d'où

$$P(|Y_n| \geqslant \alpha) \quad \frac{4}{\alpha^3 \sqrt{2\pi}} \; S_n^3 < \frac{4\,A^{\frac{3}{2}}\,\sigma^3}{\alpha^3 \sqrt{2\pi}} \; \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

La série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[P(|Y_n - 0| \geqslant \alpha) \right]$$ converge quel que soit $\alpha > 0$.

ce qui donne, d'après le critère de Borel-Cantelli une condition <u>suffisante</u> de convergence presque sûre vers zéro.

Y_n converge presque sûrement vers zéro.

E 16.- DISCUSSION DES DIVERS TYPES DE CONVERGENCE D'UNE VARIABLE ALEATOIRE SUR UN EXEMPLE ELEMENTAIRE

On considère des variables <u>indépendantes</u> X_n de lois :

$$P(X_n = n^\alpha) = P(X_n = -n^\alpha) = \frac{1}{2} \qquad \alpha \text{ positif}$$

et la variable

$$Y_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k$$

On demande d'indiquer les divers types de convergence de la variable Y_n selon les valeurs du paramètre α.

1°) - On montrera, à l'aide du premier théorème de Kolmogorov, que Y_n converge presque sûrement vers 0 lorsque $\underline{\alpha < \frac{1}{2}}$.

2°) - On montrera que pour $\underline{\alpha > \frac{1}{2}}$ Y_n ne converge ni en loi, ni par conséquent en probabilité, ni en moyenne quadratique, ni presque sûrement. Il sera commode pour obtenir ce résultat d'étudier la limite de la fonction caractéristique $\Phi(u)$ de Y_n lorsque n tend vers l'infini.

3°) - On montrera enfin que pour $\underline{\alpha = \frac{1}{2}}$ Y_n converge en loi vers une loi de Gauss de variance finie. On en déduira que Y_n ne converge par contre ni en moyenne quadratique, ni en probabilité, ni presque sûrement.

On se rappellera :

$$\begin{tikzcd} & C.L & \\ & C.P \arrow[u, Rightarrow] & \\ C.P.S \arrow[ur, Rightarrow] & & C.M.Q \arrow[ul, Rightarrow] \end{tikzcd}$$

*
* *

SE 16.- DISCUSSION DES DIVERS TYPES DE CONVERGENCE D'UNE VARIABLE ALEATOIRE SUR UN EXEMPLE ELEMENTAIRE

1°) La variance de X_n est

$$\sigma_n^2 = n^{2\alpha}$$

D'après le premier théorème de Kolmogorov, si les X_n sont indépendantes, de variances finies, et si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n^2}{n^2} = \frac{1}{n^{2-2\alpha}}$$

converge, c'est-à-dire si

$$\underline{\alpha < \frac{1}{2}}$$

Y_n converge presque sûrement vers 0.

2°) La fonction caractéristique de X_n est :

$$\frac{1}{2}\left(e^{iu\,n^{\alpha}} + e^{-iu\,n^{\alpha}} \right) = \cos(n^{\alpha} u)$$

On en déduit celle de Y_n

$$\Phi(u) = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{k^{\alpha} u}{n}\right) \quad \text{ou} \quad \operatorname{Log} \Phi(u) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Log} \cos\left(\frac{k^{\alpha} u}{n}\right)$$

<u>Si $\alpha \geqslant 1$</u> il est bien évident que $\Phi(u)$ n'a pas de limite car elle passe selon les valeurs de n de valeurs positives à des valeurs négatives.

<u>Si $\alpha < 1$</u> Puisque k est compris entre 1 et n $\operatorname{Log} \cos\left(\frac{k^{\alpha} u}{n}\right)$ est un infiniment petit lorsque n tend vers l'infini. En conséquence la somme est équivalente à l'intégrale :

$$\operatorname{Log} \Phi(u) \sim \int_1^n \operatorname{Log} \cos\left(\frac{x^{\alpha} u}{n}\right) dx = n \int_{\frac{1}{n}}^{1} \operatorname{Log} \cos\left(\frac{z^{\alpha} u}{n^{1-\alpha}}\right) dz$$

Lorsque n tend vers l'infini, dans l'intervalle des variations 0 à 1 de z.

$\cos\left(\frac{z^{\alpha} u}{n^{1-\alpha}}\right)$ peut être assimilé à $1 - \frac{z^{2\alpha}}{n^{2-2\alpha}} \frac{u^2}{2}$ et

$\operatorname{Log} \cos\left(\frac{z^{\alpha} u}{n^{1-\alpha}}\right)$ peut être assimilé à $- \frac{z^{2\alpha}}{n^{2-2\alpha}} \frac{u^2}{2}$

d'où

$$\operatorname{Log} \Phi(u) \sim - \frac{u^2}{2\, n^{1-2\alpha}} \int_0^1 z^{2\alpha}\, dz$$

$$\operatorname{Log} \Phi(u) \sim - \frac{u^2}{2(2\alpha + 1)}\, n^{2\alpha - 1}$$

Si $\alpha > \frac{1}{2}$ $\Phi(u)$ tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini.

Y_n ne converge donc pas en loi et par suite ni en moyenne quadratique, ni en probabilité, ni presque sûrement.

3°) Si $\alpha = \frac{1}{2}$ $\Phi(u)$ tend vers une limite

$$\Phi(u) \longrightarrow e^{-\frac{u^2}{4}}$$

Y_n converge donc en loi vers une loi de Gauss de variance $\frac{1}{2}$

$$D^2(Y_n) \longrightarrow \frac{1}{2}$$

Ce que l'on vérifie d'ailleurs immédiatement par une autre voie :

$$D^2(Y_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k^{2\alpha} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2n^2} \longrightarrow \frac{1}{2}$$ lorsque n tend vers l'infini.

Si Y_n convergeait presque sûrement, ce serait vers zéro - autrement dit vers une variable de moyenne et de variance nulles - ce fait imposerait que la loi limite de Y_n ait une variance nulle, c'est-à-dire soit la loi de Dirac. Or il n'en est rien puisque la variance de la loi limite est $\frac{1}{2}$. Y_n ne converge donc pas presque sûrement vers zéro.

On en conclut que pour $p = \frac{1}{2}$, Y_n converge en loi mais non en moyenne quadratique, ni en probabilité, ni presque sûrement.

E 17.- SUR LA LONGUEUR D'UNE SERIE DE SUCCES DANS UNE ALTERNATIVE REPETEE : ETUDE DE LA CONVERGENCE (Exercice 1)

On considère une alternative répetée avec, à chaque coup, une probabilité p de succès et on désigne par A_n l'évènement suivant :

A_n = " de l'essai 2^n à l'essai $2^{n+1} - 1$, il apparaît au moins une série de succès de longueur au moins égale à n "

1°) - En majorant $P(A_n)$, on montrera par application du critère de Borel-Cantelli que la probabilité d'avoir une infinité d'A_n est nulle si $p < \frac{1}{2}$

2°) - Si, par contre, $p \geq \frac{1}{2}$, la probabilité d'avoir une infinité d'A_n est égale à 1.

Ce dernier point est plus délicat à établir : De la suite des essais, entre les numéros 2^n et $2^{n+1} - 1$, on extraira une sous-suite et on définiera un évènement B_n :

B_n = "l'un au moins des essais $2^n + n$, $2^n + 2n$, $2^n + 3n, \ldots$ $2^n + kn$ donne une série de succès de longueur supérieure ou égale à n ".

Par construction même de la sous-suite, on a

$$P(A_n) > P(B_n)$$

et les évènements B_n sont indépendants puisque B_n ne fait intervenir que des essais de numéros inférieurs à 2^{n+1} et B_{n+1} que des numéros supérieurs ou égals à 2^{n+1}.

On cherchera à minorer k et à montrer que les séries $\sum P(B_n)$ et $\sum P(A_n)$ sont divergentes.

Comme les évènements B_n sont indépendants, le critère de Borel-Cantelli est aussi une condition nécessaire et par suite la divergence de la série $\sum P(A_n)$ entraîne que l'évènement " un nombre infini d'indices " est presque certain c'est-à-dire P(une infinité d'A_n) = 1.

*

* *

SE 17.- SUR LA LONGUEUR D'UNE SERIE DE SUCCES DANS UNE ALTERNATIVE REPETEE : ETUDE DE LA CONVERGENCE (Exercice 1)

1°)- La probabilité qu'un coup donné donne naissance à une série de n succès au moins est p^n. Or, entre les essais 2^n et $2^{n+1}-1$, on a joué 2^n coups. La probabilité de l'évènement A_n : $P(A_n)$ est inférieure ou égale à la probabilité que l'un quelconque des 2^n coups donne naissance à une série de n succès au moins, c'est-à-dire, d'après le théorème des probabilités totales :

$$P(A_n) \leqslant 2^n p^n$$

$$P(A_n) \leqslant (2p)^n$$

Si donc $p < \frac{1}{2}$ la série $\sum P(A_n)$ converge et $P(\text{une infinité d'}A_n) = 0$ d'après le critère de Borel-Cantelli.

2°)- k apparaît comme le diviseur du nombre 2^n de coups, entre le coup numéro 2^n et le coup numéro $2^{n+1}-1$, par l'espacement n des coups composant la sous-suite :

$$2^n = k\,n + r \qquad \text{le reste} \quad r < n$$

d'où :

$$kn = 2^n - r > 2^n - n$$

$$\underline{k > \frac{2^n}{n} - 1}$$

Ceci posé, si l'on désigne par B_n l'évènement contraire de B_n :

$\overline{B_n}$ = "aucun des essais 2^n+n, 2^n+2n, 2^n+3n... 2^n+kn ne donne une série de succès $\geqslant n$ "

C'est-à-dire : $P(\overline{B_n}) = (1-p^n)^k$

d'où : $P(B_n) = 1 - P(\overline{B_n}) = 1 - (1-p^n)^k$

et

$$P(A_n) > P(B_n) = 1 - (1-p^n)^k > 1 - (1-p^n)^{\frac{2^n}{n}-1}$$

Or,

$$1 - (1-p^n)^{\frac{2^n}{n}-1} \text{ équivalent à } 1 - e^{-\frac{(2p)^n}{n}} \text{ lorsque } n \text{ tend vers l'infini.}$$

Lorsque $p \geqslant \frac{1}{2}$ la série $\sum P(A_n)$ a son terme général supérieur au terme général d'une série divergente, elle diverge.

Comme les évènements B_n sont indépendants le critère de Borel-Cantelli est aussi une condition nécessaire : la divergence de la série $\sum P(A_n)$ entraîne la presque certitude d'une infinité d'évènements A_n :

$$P(\text{une infinité d'}A_n) = 1$$

E 18.- SUR LA LONGUEUR D'UNE SERIE DE SUCCES DANS UNE ALTERNATIVE REPETEE : ETUDE DE LA CONVERGENCE (Exercice 2)

On considère une alternative répétée de Bernoulli, dans laquelle la probabilité de succès à chaque coup est p. On désigne par X_n la longueur de la série de succès se terminant au n ième coup. De façon plus précise :

$X_n = 0$ si le n ième coup est un échec

$X_n = 1$ " est un succès et le n - ième coup un échec.

$X_n = 2$ " et n - 1 ième coups sont des succès et le n - 2 ième coup un échec.

et ainsi de suite.

Ceci posé on désigne par évènement A_n l'évènement suivant :

$$A_n = \text{"} \; X_n \geqslant a \operatorname{Log} n \text{"}$$

Montrer

a) Si $a > \dfrac{1}{\operatorname{Log} \frac{1}{p}}$ il est presque certain qu'un nombre fini seulement d'évènements A_n se produit.

b) Si $a < \dfrac{1}{\operatorname{Log} \frac{1}{p}}$ il est presque certain qu'une infinité d'évènements A_n se produisent.

La proposition (a) est une conséquence directe du critère de Borel-Cantelli.

La démonstration de la proposition (b) est moins aisée. On extraira de la suite des alternatives n une sous-suite désignée k_n, ainsi définie

$$\frac{n \operatorname{Log} n}{\operatorname{Log} \frac{1}{p}} \leqslant k_n \leqslant \frac{n \operatorname{Log} n}{\operatorname{Log} \frac{1}{p}} + 1$$

On définira, de façon analogue, des évènements A_{k_n}

$$A_{k_n} = \text{"} \; X_{k_n} \geq a \operatorname{Log} k_n \text{"}$$

et on établira que les évènements A_{k_n} sont <u>indépendants</u> les uns des autres, d'une façon plus précise que les évènements

$$A_{k_n} = \text{"} \; X_{k_n} \geqslant a \operatorname{Log} k_n \text{"}$$

$$\text{et} \quad A_{k_{n-1}} = "X_{k_{n-1}} \geqslant a \operatorname{Log} k_{n-1}"$$

sont indépendants. Cette indépendance résulte de l'inégalité suivante :

$$k_n - k_{n-1} > a \operatorname{Log} k_n$$

que l'on cherchera à établir.

L'indépendance prouvée, la divergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_{k_n})$ établit, selon le critère de Borel-Cantelli, appliqué comme condition nécessaire de convergence, qu'il est presque certain qu'une infinité d'évènements A_{k_n} et a fortiori d'évènements A_n se produisent.

*

* *

SE 18.- SUR LA LONGUEUR D'UNE SERIE DE SUCCES DANS UNE ALTERNATIVE REPETEE : ETUDE DE LA CONVERGENCE (Exercice 2)

a) $\boxed{a > \dfrac{1}{\operatorname{Log} \frac{1}{p}}}$

Désignons par ν l'entier le plus voisin de $a \operatorname{Log} n$

$$\nu \leqslant a \operatorname{Log} n < \nu + 1$$

La probabilité de l'évènement A_n est que les ν coups : $n, n-1, \dots n-\nu+1$ soient des succès :

$$P(A_n) = p^{\nu}$$

Le terme général de la série $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ est inférieur à celui de la série :

$$p^{a \operatorname{Log} n - 1} = \frac{n}{p}^{a \operatorname{Log} p} = \frac{1}{p} \quad \frac{1}{n^{a \operatorname{Log} \frac{1}{p}}}$$

Selon l'hypothèse (a) $a \operatorname{Log} \frac{1}{p} > 1$, la série majorante est convergente, donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \qquad \text{est une série convergente,}$$

et d'après le critère de Borel-Cantelli, l'évènement A " un nombre fini seulement d'évènements A_n sont réalisés " est presque certain.

... / ...

b) $\boxed{a < \dfrac{1}{\text{Log } \frac{1}{p}}}$ On s'intéresse aux évènements

$$A_{k_n} = \text{"} X_{k_n} \geqslant a \text{ Log } k_n \text{"}$$

k_n étant défini de la façon suivante :

$$\frac{n \text{ Log } n}{\text{Log } \frac{1}{p}} \leqslant k_n \leqslant \frac{n \text{ Log } n}{\text{Log } \frac{1}{p}} + 1$$

On a :

$$k_n - k_{n-1} \geqslant \frac{n \text{ Log } n}{\text{Log } \frac{1}{p}} - \frac{(n-1)\text{Log}(n-1)}{\text{Log } \frac{1}{p}} - 1 = \frac{n}{\text{Log } \frac{1}{p}} \text{ Log } \frac{n}{n-1} + \frac{\text{Log}(n-1)}{\text{Log } \frac{1}{p}} - 1$$

$k_n - k_{n-1}$ est un infiniment grand équivalent à :

$$k_n - k_{n-1} \sim \frac{1}{\text{Log } \frac{1}{p}} - 1 + \frac{\text{Log}(n-1)}{\text{Log } \frac{1}{p}} \sim \frac{\text{Log } n}{\text{Log } \frac{1}{p}}$$

Or, d'après la relation de définition de k_n

$$\text{Log } k_n \sim \text{Log } n + \text{Log}(\text{Log } n) - \text{Log}(\text{Log } \tfrac{1}{p}) \sim \text{Log } n$$

Donc :

$$k_n - k_{n-1} \sim \frac{\text{Log } k_n}{\text{Log } \frac{1}{p}}$$

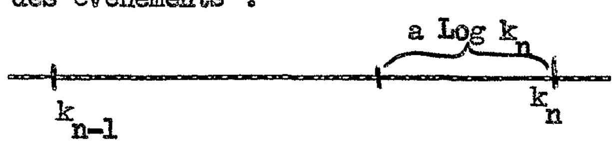
Mais d'après l'hypothèse (b) $\dfrac{1}{\text{Log } \frac{1}{p}} > a$,donc à partir d'une certaine valeur de n assez grande :

$$\boxed{k_n - k_{n-1} > a \text{ Log } k_n}$$

Cette propriété établit l'indépendance des évènements :

$$A_{k_n} \text{ "} X_{k_n} \geqslant a \text{ Log } k_n \text{"}$$

$$A_{k_{n-1}} \text{ "} X_{k_{n-1}} \geqslant a \text{ Log } k_{n-1} \text{"}$$



En effet, si on désigne par γ' l'entier tel que :

$$\gamma' \leqslant a \text{ Log } k_n < \gamma' + 1$$

$P(A_{k_n})$ est la probabilité pour que les ν' coups $k_n, k_n - 1, \ldots k_n - \nu' + 1$ soient des succès.

Or l'inégalité :

$$k_n - k_{n-1} > a \operatorname{Log} k_n$$

entraîne :

$$k_n - k_{n-1} > \nu'$$

soit

$$\underline{k_{n-1}} < k_n - \nu' < \underline{k_n - \nu' + 1}$$

Les domaines de réalisation des évènements A_{k_n} et $A_{k_{n-1}}$ n'ont aucun point commun : les évènements A_{k_n} et $A_{k_{n-1}}$ sont donc bien indépendants.

<u>Ceci posé</u>, par un raisonnement analogue à celui de (a)

$P(A_{k_n})$ est majorée par $p^{a \operatorname{Log} k_n - 1} = \frac{1}{p} k_n^{a \operatorname{Log} p} = \frac{1}{p} \frac{1}{k_n^{a \operatorname{Log} \frac{1}{p}}}$

Or, d'après la relation de définition de k_n

$$k_n \sim \frac{n \operatorname{Log} n}{\operatorname{Log} \frac{1}{p}} \qquad \text{pour } n \text{ grand}$$

d'où

$$P(A_{k_n}) \sim \frac{1}{p}\left(\operatorname{Log} \frac{1}{p}\right)^{a \operatorname{Log} \frac{1}{p}} \frac{1}{(n \operatorname{Log} n)^{a \operatorname{Log} \frac{1}{p}}}$$

Comme $\quad a \operatorname{Log} \frac{1}{p} < 1$

$P(A_{k_n})$ est pour n grand équivalente au terme général d'une série divergente. Donc $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_{k_n})$ diverge. Comme il vient d'être établi que les évènements A_{k_n} étaient indépendants, le critère de Borel-Cantelli peut s'appliquer comme condition <u>nécessaire</u> et suffisante: la convergence ou la divergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_{k_n})$ va de pair avec la quasi certitude d'avoir respectivement un nombre fini ou un nombre infini d'évènements A_{k_n}. Une infinité d'évènements A_{k_n} se produit donc presque sûrement. Or par construction de la sous-série, les évènements A_{k_n} sont en nombre inférieur ou égal aux évènements A_n. Il est donc presque certain qu'une infinité d'évènements A_n se produit.

E 19.- RECHERCHE DE TOUTES LES LOIS INDEFINIMENT DIVISIBLES, DISCRETES ET A VALEURS ENTIERES POSITIVES OU NULLES (ET A VARIANCES FINIES)

APPLICATION A LA LOI BINOMIALE NEGATIVE

Montrer que la variable aléatoire X obéissant à une telle loi peut se mettre sous l'une des formes suivantes :

I.) Sous forme de la somme d'une infinité de variables poissonniennes Y_n

$$X = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n + \dots$$

la loi des Y_n étant

$$\text{Prob}\left\{ Y_n = k_n \right\} = e^{-A_n} \frac{(A_n)^k}{k!}$$

On montrera que la seconde fonction caractéristique $\text{Log}\,\Phi(u)$ de la variable X peut se mettre sous la forme

$$\text{Log}\,\Phi(u) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(e^{iun} - 1\right)$$

tous les A_n étant positifs ou nuls (Pour démontrer ce dernier point, on s'appuiera sur la formule fondamentale des lois indéfiniment divisibles).

On démontrera la proposition directe et la réciproque.

II.) Sous forme de la somme d'un nombre N aléatoire poissonnien de paramètre A de variables X_i de même loi directe α_n.

Cette propriété est une transformation simple de la propriété précédente que l'on abordera en posant :

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \qquad \text{et} \qquad \alpha_n = \frac{A_n}{A}$$

On se rappellera opportunément l'expression de la loi composée de la somme d'un nombre poissonnien N (de paramètre A) de variables indépendantes ayant la même fonction caractéristique $\varphi(u)$.

La fonction caractéristique de la somme de k variables est $\left[\varphi(u)\right]^k$.

Le paramètre N étant aléatoire poissonnien de paramètre A avec la probabilité :

$$\text{Prob}\left\{ N = k \right\} = \frac{A^k}{k!} e^{-A}$$

La fonction caractéristique $\Phi(u)$ d'un nombre poissonnien N de variables obéissant à la loi $\varphi(u)$ s'obtient par composition des $\left[\varphi(u)\right]^k$:

$$\Phi(u) = e^{-A} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \left[\varphi(u)\right]^k = e^{A\,\varphi(u) - A}$$

APPLICATION

On retrouvera les deux modes de décomposition envisagés lorsque la loi de X est une loi binomiale négative :

$$\Phi_\alpha(u) = \frac{q^\alpha}{(1 - p\, e^{iu})^\alpha}$$

On pourra montrer en outre - ce qui donnera une troisième interprétation valable dans le cas particulier de la loi binomiale négative. La loi de X apparaît comme une loi composée : loi de Poisson dont le paramètre θ obéit à une loi gamma. On met ainsi en évidence la propriété inverse de celle démontrée dans l'exercice sur les lois composées et la loi binomiale négative.

*

* *

SE 19.- RECHERCHE DE TOUTES LES LOI INDEFINIMENT DIVISIBLES, DISCRETES ET A VALEURS ENTIERES POSITIVES OU NULLES (ET A VARIANCES FINIES)

I) Si P_n est la loi de probabilité discrète, la variable aléatoire X a pour fonction caractéristique :

$$\Phi(u) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n \, e^{inu}$$

$\Phi(u)$ est continue, périodique et ne s'annule pas. Par conséquent $\operatorname{Log} \Phi(u)$ peut se développer suivant les puissances de l'exponentielle :

$$\operatorname{Log} \Phi(u) = B + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \, e^{iun}$$

u tendant vers zéro donne

$$B + \sum_{n=1}^{\infty} A_n = 0$$

$$\operatorname{Log} \Phi(u) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(e^{iun} - 1 \right)$$

Rien ne prouve que les coefficients A_n sont positifs. Cette propriété va être établie en comparant le développement à l'expression fondamentale d'une loi indéfiniment divisible :

$$\operatorname{Log} \Phi(u) = ium + \sigma^2 \int \frac{e^{iux} - 1 - iux}{x^2} \, d\,G(x)$$

ou encore

$$- \frac{d^2 \operatorname{Log} \Phi(u)}{du^2} = \sigma^2 \int e^{iux} \, d\,G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 A_n \, e^{iun}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sigma^2} A_n \, e^{iun}$$

apparaît ainsi comme le développement de la transformée de Fourier de la loi G de probabilités discrètes (et positives ou nulles) ϖ_n ce qui établit :

$$\varpi_n = \frac{n_2 A_n}{\sigma^2}$$

c'est-à-dire que tous les A_n sont positifs ou nuls.

Réciproquement

Toute loi du type (1) où les A_n sont tous positifs ou nuls - à condition que $\sum A_n$ converge vers un nombre A (même si $\sum n^2 A_n$ ne converge pas) représente une somme de variables de Poisson de paramètres A_n indépendantes donc indéfiniment divisibles.

X est donc de la forme :

$$X = Y_1 + Y_2 + \dots \quad + Y_n + \dots$$

avec
$$\text{Prob}\left\{ Y_n = k_n \right\} = \frac{(A_n)^k}{k!} e^{-A_n}$$

II) Pour établir la seconde décomposition, fixons les idées en évoquant des accidents de la route.

X est le nombre de voitures accidentées en un an. On décompose ce nombre en des Y_n : nombre de voitures accidentées dans des accidents impliquant n voitures ($n = 1$ accident solitaire, $n = 2$ collisions, $n = 3 = 4$, collisions à plusieurs voitures).

$$X = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n$$

$\frac{Y_n}{n}$ représente le nombre d'accidents impliquant n voitures à la fois. Le nombre total N d'accidents est la somme :

$$N = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_n}{n}$$

Comme le nombre des accidents impliquant n voitures $\frac{Y_n}{n}$ est poissonnien, de paramètre $\underline{A_n}$, le nombre total N d'accidents est lui aussi poissonnien de paramètre

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$$

Le rapport $$\frac{A_n}{A} = \alpha_n$$

s'interprète comme la <u>probabilité</u> pour qu'un accident soit un (n - triple).

Ceci posé, la formule (1) donnant la fonction caractéristique de X

$$\text{Log}\,\Phi(u) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(e^{imu} - 1) \quad \text{peut s'écrire} \quad \frac{A_n}{A} = \alpha_n$$

$$\text{Log}\,\Phi(u) = A \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(e^{imu} - 1)$$

$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n e^{imu}$ est la fonction caractéristique $\varphi(u)$ des α_n. D'où

$$\text{Log}\,\Phi(u) = A\left[\varphi(u) - 1\right]$$

$$\varphi(u) = e^{A\left[\varphi(u)-1\right]}$$

D'après le procédé de composition des fonctions caractéristiques évoqué dans l'énoncé, on obtient la seconde interprétation :

$$X = X_1 + X_2 + \ldots\ldots \; X_N$$

le nombre N étant poissonnien de paramètre A(nombre total moyen d'accidents). Chaque X_i est le nombre de voitures impliquées dans l'accident i.

Toutes les variables X_i ont la même loi :

$$\text{Prob}\left\{ X_i = n \right\} = \alpha_n$$

Application : Loi binomiale négative. La fonction caractéristique de X.

$$\Phi_\alpha(u) = \frac{q^\alpha}{(1 - p\, e^{iu})^\alpha}$$

$$\Phi_\alpha(u) = \frac{q^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+n)}{n!}\, p^n\, e^{inu}$$

Ce qui donne la loi de probabilité :

$$p_n = \frac{q^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha+n)}{n!}\, p^n = q^\alpha\, \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots\ldots(\alpha+n-1)}{n!}\, p^n$$

I) Première interprétation.

$$\mathrm{Log}\, \Phi_\alpha(u) = -\alpha\, \mathrm{Log}\, \frac{1 - p\, e^{iu}}{q} = -\alpha\, \mathrm{Log}\left(\frac{1 - p\, e^{iu}}{1 - p}\right) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^n}{n}\left(e^{iun} - 1\right)$$

X est donc la somme d'une infinité de variables poissonniennes Y_n de paramètre $A_n = \alpha\, \frac{p^n}{n}$ telles que :

$$\mathrm{Prob}\left\{ Y_n = k_n \right\} = \left(\frac{\alpha\, p^n}{n}\right)^k \frac{e^{-\frac{\alpha\, p^n}{n}}}{k!}$$

II) Seconde interprétation.

$$\mathrm{Log}\, \Phi_\alpha(u) = -\alpha\, \mathrm{Log}\, q \left[\frac{\mathrm{Log}\,(1 - p\, e^{iu})}{\mathrm{Log}\, q} - 1\right]$$

Or

$$\varphi(u) = \frac{\mathrm{Log}(1 - p\, e^{iu})}{\mathrm{Log}\, q} = \frac{1}{-\mathrm{Log}\, q} \left\{ \sum_{n=1} \frac{p^n\, e^{inu}}{n} \right\}$$

est la fonction caractéristique de la variable X_i ayant pour loi de probabilité

$$\mathrm{Prob}\left\{ X_i = n \right\} = \alpha_n = \frac{1}{-\mathrm{Log}\, q}\, \frac{p^n}{n}$$

D'où :

$$\Phi_\alpha(u) = e^{-\alpha \mathrm{Log}\, q \left[\varphi(u)-1\right]}$$

On vérifie que

$$A = -\alpha \,\mathrm{Log}\, q = -\alpha \,\mathrm{Log}\,(1-p) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$$

X est la somme d'un nombre poissonnien N (de paramètre $-\alpha$ Log q) de variable X_i obéissant à la loi de probabilité

$$\mathrm{Prob}\left\{ X_i = n \right\} = \frac{1}{-\mathrm{Log}\, q} \; \frac{p^n}{n}$$

III) Troisième Interprétation.

De l'expression d'une loi gamma, on déduit immédiatement que :

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha-1} \; e^{-bx} \, dx = \frac{\Gamma(\alpha)}{b^\alpha}$$

d'où
$$\Phi_\alpha(u) = \frac{q^\alpha}{(1-p\, e^{iu})^\alpha} = \left(\frac{q}{p}\right)^\alpha \frac{1}{(\frac{1}{p} - e^{iu})^\alpha} = \frac{q^\alpha}{p^\alpha \;\; (\alpha)} \int_0 \theta^{\alpha-1} \;\; e^{-\theta(\frac{1}{p} - e^{iu})} d\theta$$

$$\underline{\Phi_\alpha(u) = \frac{q^\alpha}{p^\alpha \;\; (\alpha)} \int_0 p^{\alpha-1} \;\; e^{-\frac{q}{p}\theta} \;\; e^{\theta(e^{iu}-1)} \, d\theta}$$

$\Phi_\alpha(u)$ est le fruit de la pondération de la fonction caractéristique d'une loi de Poisson de paramètre θ par la loi gamma $(\alpha, \frac{q}{p})$

$$\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \; e^{-\theta} \;\; \theta^{\alpha-1}$$

La loi de X peut être considérée comme une loi composée : loi de Poisson dont le paramètre θ obéit à une loi gamma.

E 20.- DETERMINATION DE LA FONCTION G ASSOCIEE FIGURANT DANS LA FORMULE FONDAMENTALE DES LOIS INDEFINIMENT DIVISIBLES

$$\operatorname{Log} \Phi(u) = ium + \sigma^2 \int \frac{e^{iux} - 1 - iux}{x^2} \, d\, G(x)$$

1°) Trouver la fonction G associée à la loi Gamma. En déduire une représentation intégrale de $-\operatorname{Log}\left(1 - \frac{iu}{b}\right)$.

On considère la loi Gamma sous la forme $\frac{b^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-x} x^{\alpha-1}$. La fonction caractéristique en est :

$$\Phi(u) = \frac{1}{\left(1 - i\,\frac{u}{b}\right)^\alpha}$$

$$\operatorname{Log} \Phi(u) = -\alpha \operatorname{Log}\left(1 - i\,\frac{u}{b}\right)$$

La méthode consiste à comparer la dérivée seconde avec celle issus de la formule fondamentale.

2°) La loi de Laplace est indéfiniment divisible. On pourra le voir en montrant qu'une variable Laplacienne peut être considérée comme la somme de deux variables obéissant à des lois indéfiniment divisibles. En déduire, à l'aide des résultats de la question précédente, une représentation de $\operatorname{Log}(1 + u^2)$.

3°) Théorème de Cramer

Un théorème célèbre de Cramer établit que si la somme $X + Y$ de deux variables indépendantes est normale, les variables X et Y sont l'une et l'autre normales.

Retrouver ce théorème dans le cas particulier où X et Y obéissent à des lois indéfiniment divisibles. Mettre la propriété en évidence dans le cas où $X + Y$ obéit à une loi normale ou à une loi de Poisson.

*

* *

SE 20.- DETERMINATION DE LA FONCTION G ASSOCIEE FIGURANT DANS LA FORMULE FONDAMENTALE DES LOIS INDEFINIMENT DIVISIBLES

$$\operatorname{Log} \Phi(u) = ium + \sigma^2 \int \frac{e^{iux} - 1 - iux}{x^2} \, d\,G(x)$$

1°)

$$-\frac{d^2}{du^2} \operatorname{Log} = \frac{\alpha}{b^2} \left(\frac{1}{\left(1 - i\frac{u}{b}\right)^2} \right)$$

Dérivant deux fois la formule fondamentale et notant que $\left(\sigma^2 = \frac{\alpha}{b^2},\ m = \frac{\alpha}{b}\right)$

$$-\frac{d^2}{du^2} \operatorname{Log} \Phi = \sigma^2 \int_0^\infty e^{iux} \, d\,G(x)$$

Egalant les deux expressions :

$$\int_0^\infty e^{iux} \, d\,G(x) = \frac{1}{\left(1 - i\frac{u}{b}\right)^2}$$

Le second membre est la fonction caractéristique de la loi gamma d'indice $\alpha = 2$, d'où :

$$g(x) = b^2 \, x \, e^{-bx} \qquad \text{avec} \qquad G(x) = \int^x g(x)dx$$

On en déduit, en écrivant de nouveau la formule fondamentale :

$$\operatorname{Log} \Phi(u) = i\,u\,\frac{\alpha}{b} + \frac{\alpha}{b^2} \int_0^\infty \frac{e^{iux} - 1 - iux}{x^2} \, b^2 \, x \, e^{-bx} \, dx$$

$$\operatorname{Log} \quad (u) = \alpha \int_0^\infty \frac{e^{iux} - 1}{x} \, e^{-bx} \, dx \qquad \text{ou}$$

$$-\operatorname{Log}\left(1 - \frac{iu}{b}\right) = \int_0^\infty \frac{e^{iux} - 1}{x} \, e^{-bx} \, dx$$

2°) Une variable Laplacienne, c'est-à-dire ayant pour densité $e^{-|x|}$ a pour fonction caractéristique $\dfrac{1}{1+u^2}$.

D'une façon générale,

$$\Phi(u) = \frac{1}{(1+u^2)^{\alpha}} = \frac{1}{(1-iu)^{\alpha}} \cdot \frac{1}{(1+iu)^{\alpha}}$$

est la fonction caractéristique de $X - Y$, X et Y étant deux variables indépendantes de la loi Gamma :

$$\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-x}$$

Par ailleurs,

$$\Phi_{\alpha}(u) = -\alpha \operatorname{Log}(1+u^2) = -\alpha\left[\operatorname{Log}(1-iu) + \operatorname{Log}(1+iu)\right]$$

d'après le résultat de l'exercice précédent

$$\Phi_{\alpha}(u) = -\alpha \operatorname{Log}(1+u^2) = 2\alpha \int_0^{\infty} \frac{\cos ux - 1}{x} e^{-x}\, dx$$

$$\operatorname{Log}(1+u^2) = 2\int_0^{\infty} \frac{1-\cos ux}{x} e^{-x}\, dx$$

3°) Soient G_1 et G_2 les fonctions G associées à X et Y respectivement et G la fonction associée à leur somme. σ_1^2 et σ_2^2 étant les variances de X et de Y, $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$ celle de $X+Y$. On a d'après la formule fondamentale

$$\sigma^2 G = \sigma_1^2 G_1 + \sigma_2^2 G_2$$

$$G = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 \quad \sigma_2^2} G_1 + \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} G_2$$

Si $X+Y$ est normale, $G = \theta$, ce qui entraîne nécessairement $G_1 = G_2 = \theta$

De même si $X+Y$ est poissonnien $G = \theta(x-1)$, ce qui entraîne de la même manière $G_1 = G_2 = \theta(x-1)$. (On rappelle que la fonction θ est la fonction égale à 1 pour x positif et égale à θ pour x négatif).

E 21.- DUREE DE VIE D'UN TUBE AU NEON

a) - On admet, tout d'abord, que la probabilité qu'un tube au néon (ou une lampe électrique) claque entre les instants t et $t + \Delta t$ est indépendante de l'époque de sa vie et égale à $a \Delta t$

- Trouver la loi de vie du tube, c'est-à-dire la fonction de répartition de l'instant aléatoire T, auquel il claque.

- On se procure un tube déjà usagé qui a fonctionné pendant un temps t_0. Donner la loi conditionnelle de vie à t_0 fixé, constater qu'elle a même forme que la loi d'un tube neuf : il n'y a pas vieillissement.

b) - Si la probabilité de mort n'est plus indépendante de l'époque de vie et égale à $a(t) \Delta t$, donner la loi de vie du tube et constater qu'il y a vieillissement.

*

* *

a) La fonction de répartition des instants T de mort du tube est

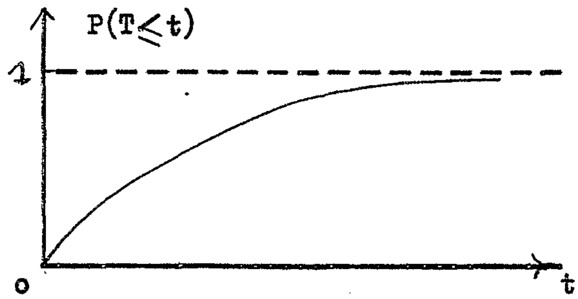
$$\text{Prob}\ (T \leqslant t)$$

Or la probabilité

$$\text{Prob}\ (T > t)$$

est la probabilité qu'il n'y ait eu aucun évènement (fatal) pendant l'intervalle de temps 0, t, c'est-à-dire que la variable poissonnienne $X(t)$ soit nulle

$$\text{Prob}\left\{ X(t) = n \right\} = \frac{a^n}{n!} e^{-at}$$



d'où

$$\text{Prob}(T > t) = \text{Prob}\left[X(t) = 0\right] = e^{-at}$$

La fonction de répartition est donc :

$$\underline{\text{Prob}(T \leqslant t) = 1 - e^{-at}}$$

\- Si le tube a déjà fonctionné pendant un temps t_o, la loi conditionnelle de vie, à t_o donnée est :

$$P\left[T - t_o \leqslant \theta,\ \text{sachant que}\quad T > t_o\right]$$

qui peut se calculer par l'intermédiaire de la loi a priori :

$$P\left[T > t_o + \theta\right] = P\left[T > t_o\right] .\ P\left[T - t_o > \theta, \text{sachant que } T > t_o\right]$$

$$P\left[T - t_o > \theta,\ \text{sachant que } T > t_o\right] = \frac{P\left[T > t_o + \theta\right]}{P\left[T > t_o\right]} = \frac{e^{-a(t_o+\theta)}}{e^{-at_o}} = e^{-a\theta}$$

La fonction de répartition conditionnelle :

$$\underline{P\left[T - t_o \leqslant \theta,\ \text{sachant que}\quad T > t_o\right] = 1 - e^{-a\theta}}$$

a même forme que la loi du tube neuf, il n'y a pas vieillissement.

b) <u>Si la loi de mort pendant le laps de temps t, $t + \Delta t$ dépend elle-même de l'époque t</u> :

$$a(t)\ \Delta t$$

la loi de vie s'obtient par la relation des probabilités composées.

$$P\left[T > t + dt\right] = P\left[T > t\right] .\ P\left[\text{aucun évènement fatal entre } t \text{ et } t + \Delta t\right]$$

$$P\left[T > t + dt\right] = P\left[T > t\right] .\ \left[1 - a(t)\ dt\right]$$

avec des notations évidentes :

$$\frac{d\,P(t)}{dt} = - a(t)\,P(t)$$

$$P\left[T > t\right] = e^{-\int_0^t a(u)du}$$

$$P\left[T \leqslant t\right] = 1 - e^{-\int_0^t a(u)du}$$

Le phénomène n'est pas stationnaire, la loi dépend de l'histoire antérieure du tube : il y a vieillissement.

*
* *

E 22.- LOI DE PROBABILITE $P_n(t)$ DANS UN PROCESSUS DE POISSON

Soit $X(t)$ une fonction obéissant à un processus de Poisson de constante a. On demande de retrouver rapidement, à l'aide de la fonction génératrice, la loi très classique :

$$P_n(t) = \text{Prob}\left\{ X(t) = n \right\} = \frac{(at)^n}{n!} e^{-at}$$

$X(t)$ est une fonction variant par sauts positifs d'amplitude $+1$, ses accroissements sont stationnaires et indépendants pour des intervalles de temps ne se recouvrant pas.

En outre on a, pour un intervalle de temps très petit Δt :

$$P\left[X(\Delta t) = 0\right] = 1 - a\,\Delta t + o(\Delta t)$$

$$P\left[X(\Delta t) = 1\right] = a\,\Delta t + o(\Delta t)$$

$$P\left[X(\Delta t) > 1\right] = o(\Delta t)$$

$o(\Delta t)$ désignant des quantités quelconques tendant vers 0 plus vite que Δt (infiniment petits d'ordre supérieur à 1).

- Retrouver à partir du résultat, <u>la loi conditionnelle</u> dans un processus de Poisson.

*

* *

SE 22.- LOI DE PROBABILITE $P_n(t)$ DANS UN PROCESSUS DE POISSON

L'évènement "$X(t+\Delta t) = n$" est somme des 3 évènements incompatibles suivants

$$"X(t) = n \quad \text{et} \quad X(\Delta t) = 0"$$

$$"X(t) = n-1 \quad X(\Delta t) = 1"$$

$$"X(t) = n-k \quad X(\Delta t) = k"$$

Les évènements $X(t)$ et $X(\Delta t)$ étant indépendants. Les relations donnant les probabilités relatives à l'intervalle très petit Δt donnent :

$$P_n(t+\Delta t) = (1 - a\,\Delta t)\,P_n(t) + a\,\Delta t\;P_{n-1}(t) + 0(\Delta t)$$

Négligeant les infiniments petits d'ordre supérieur

$$\frac{P_n(t+\Delta t) - P_n(t)}{\Delta t} = a\left[P_{n-1}(t) - P_n(t)\right]$$

Δt tendant vers 0

$$\frac{d\,P_n(t)}{dt} = a\left[P_{n-1}(t) - P_n(t)\right]$$

Pour résoudre cette équation, il est commode d'introduire la fonction génératrice des $P_n(t)$

$$V(s,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t)\,s^n$$

Multipliant les équations successives par s^n

$$s^n\,\frac{d\,P_n(t)}{dt} = as\;P_{n-1}(t)\,s^{n-1} - a\,P_n(t)\,s^n$$

$$s^{n-1}\,\frac{d\,P_{n-1}(t)}{dt} = as\,P_{n-2}(t)\,s^{n-2} - a\,P_{n-1}(t)\,s^{n-1}$$

$$s\,\frac{d\,P_1}{dt}(t) = as\;P_o(t) - a\;P_1(t)\,s$$

la dernière étant
$$\frac{d\,P_o(t)}{dt} = -a\,P_o(t)$$

et additionnant de $n = 0$ à l'infini

$$\frac{\partial V(s,t)}{\partial t} = a(s-1)\,V(s,t)$$

$$\underline{V(s,t) = C(s)\,e^{(s-1)at}}$$

On détermine $C(s)$ en considérant l'instant initial $t = 0$

$$V(s,o) = P_o(o) = 1 \qquad \text{d'où } C(s) \equiv 1$$

$$V(s,t) = e^{(s-1)at}$$

On reconnaît la fonction génératrice de la loi de Poisson de paramètre at, soit

$$P_n(t) = \frac{(at)^n}{n!} e^{-at}$$

On déduit de cette loi, le résultat très classique et fort important relatif à la nature de la loi conditionnelle dans un Processus de Poisson.

Prenant $X(0) = 0$ et une époque t comprise entre 0 et t_1, la loi conditionnelle est la loi de répartition de $X(t)$ sachant que $X(t_1) = n$. La formule des probabilités conditionnelles donne

$$P\left\{X(t) = k \mid X(t_1) = n\right\} = \frac{P\left\{X(t) = k \text{ et } X(t_1) = n\right\}}{P\left\{X(t_1) = n\right\}} = \frac{P\left\{X(t) = k \text{ et } X(t_1) - X(t) = n-k\right\}}{P\left\{X(t_1) = n\right\}}$$

$X(t)$ et $X(t_1) - X(t)$ étant des accroissements indépendants.

$$P\left\{X(t) = k \mid X(t_1) = n\right\} \frac{\frac{(at)^k}{k!} e^{-at} \frac{\left[a(t_1-t)\right]^{n-k}}{(n-k)!} e^{-a(t_1-t)}}{\frac{(at_1)^n}{n!} e^{-at_1}} = C_n^k \left(\frac{t}{t_1}\right)^k \left(1 - \frac{t}{t_1}\right)^{n-k}$$

La loi conditionnelle est la loi binomiale de paramètre n et $p = \frac{t}{t_1}$. Ce résultat signifie que chacun des n sauts qui se sont produits dans l'intervalle $(0, t_1)$, sont répartis, indépendamment les uns des autres avec une densité de répartition uniforme sur l'intervalle $(0, t)$.

E 23 - TEMPS D'ATTENTE DANS LES PROCESSUS POISSONNIENS

Trouver la loi de la date d'arrivée T_n de n ième bateau dans un port, sachant que les bateaux ont des arrivées poissonniennes de paramètre a. Opérer directement et retrouver ensuite le résultat en considérant T_n comme la somme de n variables aléatoires indépendantes.

*

* *

SE 23- TEMPS D'ATTENTE DANS LES PROCESSUS POISSONNIENS

Soit $X(t)$ le nombre de bateaux arrivés à l'instant t. On a :

$$\text{Prob}\left\{ S(t) < n \right\} = \text{Prob}\left\{ T_n > t \right\} = \sum_{k=o}^{n-1} \frac{(at)^k}{k!} e^{-at}$$

La densité de probabilité de la variable aléatoire T_n est donc :

$$f_n(t) = -\sum_{k=o}^{n-1} \frac{d}{dt} \frac{(at)^k}{k!} e^{-at} = a\, e^{-at} \left\{ \sum_{k=o}^{n-1} \frac{(at)^k}{k!} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(at)^{k-1}}{(k-1)!} \right\}$$

$$f_n(t) = a\, e^{-at} \left\{ \sum_{k=o}^{n-1} \frac{(at)^k}{k!} - \sum_{k=o}^{n-2} \frac{(at)^k}{k!} \right\} = a\, e^{-at} \frac{(at)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$f_n(t) = \frac{a^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-at}$$

c'est une loi gamma. On note que $E(T_n) = \frac{a^n}{(n-1)!} \int_o^{\infty} t^n e^{-at}\, dt = \frac{n}{a} \frac{1}{n!} \int_o^{\infty} u^n e^{-u} du = \frac{n}{a}$

<u>Autre méthode</u> - T_n est la somme de n variables aléatoires indépendantes T_1 représentant le temps qui s'écoule entre deux arrivées consécutives. Or,

$$\text{Prob}\left\{ T_1 > t \right\} = \text{Prob}\left\{ X(t) = 0 \right\} = e^{-at}$$

T_1 obéit à la loi exponentielle $a\, e^{-at}$. Or la somme de n variables exponentielles indépendantes obéit à la loi gamma.

$$\frac{a^n}{(n-1)!} \quad t^{n-1} e^{-at}$$

On a en outre :

$$E(T_n) = n\, E(T_1) = \frac{n}{a}$$

E 24 .- NOMBRE DE BATEAUX PRESENTS DANS UN PORT A L'INSTANT t

On pourra désigner par $N(t)$ le nombre de bateaux présents au port à l'instant t. On suppose que les arrivées de bateaux sont poissonniennes de paramètre $\underline{at}$ Autrement dit, $K(t)$ étant le nombre d'arrivées, depuis l'origine $t_o = o$ jusqu'à t, obéit à la loi :

$$\text{Prob}\left\{ K(t) = k \right\} = \frac{(at)^k}{k!} e^{-at}$$

On demande de déterminer $N(t)$ dans les deux hypothèses :

a) en admettant que chaque bateau reste un temps Δt fixe

b) que les temps d'escale sont des variables indépendantes de même loi $F(t)$.

Dans cette seconde hypothèse, on pourra obtenir le résultat en se fixant, dans un premier temps le nombre d'arrivées $K(t) = k$. Chacun des k bateaux possède alors un instant d'arrivée t_k dont la probabilité est uniformément répartie sur l'intervalle (o,t) et les t_k sont indépendants (résultat classique relatif à la loi conditionnelle dans un processus de Poisson). On calculera alors la probabilité p pour qu'un certain nombre de ces bateaux soit encore au port à l'instant t. $N(t)$ est ainsi, à k fixé une variable binomiale (proportion p, k tirages). De la loi binomiale conditionnelle relative à k, on déduira la loi de $N(t)$ par composition à partir de tous les k possibles.

On calculera le nombre moyen θ de bateaux présents à l'instant t. On cherchera sa limite en fonctionnement permanent du port (ce qui s'obtient en faisant tendre t_o vers ∞). Application à une loi exponentielle des temps d'escale.

*

* *

a) $N(t)$ est évidemment égal au nombre de bateaux arrivés entre les instants t et $t-\Delta t$. $N(t)$ obéit donc à une loi de Poisson de paramètre $a\Delta t$:

$$\text{Prob}\left\{N(t) = n\right\} = \frac{(a\Delta t)^n}{n!} e^{-a\Delta t}$$

---

b) Ainsi qu'il a été indiqué, on se fixe le nombre d'arrivées

$$K(t) = k$$

et on s'intéresse à un certain bateau donné. Son instant d'arrivée t_k est une variable aléatoire dont la probabilité est uniformément répartie sur l'intervalle o, t.

Ce bateau, s'il était arrivé entre les instants s et $s + ds$, aurait la probabilité

$$1 - F(t - s)$$

d'être encore au port à l'instant t. Or comme ce bateau a une probabilité égale d'être arrivé durant tous les intervalles s, $s + ds$, sa probabilité d'être encore au port à l'instant est :

$$p = \frac{1}{t}\int_o^t \left[1 - F(t-s)\right] ds = \frac{1}{t}\int_o^t \left[1 - F(s)\right] ds$$ (probabilité d'une somme d'évènements qui s'excluent).

à $k = k$ fixé $N(t)$ est donc une variable binomiale de loi conditionnelle :

$$\text{Prob}\ (N = n,\ K = k) = C_k^n\ p^n (1-p)^{k-n}$$

La loi de $N(t)$ s'obtient en composant cette loi par la loi des k. k peut varier de n à l'infini :

$$\text{Prob}\left\{N(t) = n\right\} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(at)^k}{k!} e^{-at}\ C_k^n\ p^n (1-p)^{k-n}$$

$$\text{Prob}\left\{N(t) = n\right\} = e^{-at} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(at)^k}{k!} \frac{k!}{n!(k-n)!}\ p^n (1-p)^{k-n}$$

changement de variable $k - n = k'$

$$\text{Prob}\left\{N(t) = n\right\} = \frac{(pat)^n e^{-at}}{n!} \sum_{k'=o}^{\infty} \frac{\left[(1-p)at\right]^{k'}}{k'}$$

$$\text{Prob}\left\{N(t) = n\right\} = \frac{(pat)^n\, e^{-pat}}{n!}$$

$N(t)$ obéit à une loi de Poisson de paramètre

$$\theta = pat = a\int_0^t \left[1 - F(s)\right] ds$$

<u>Régime permanent</u> - Il s'obtient en reculant dans le temps l'instant initial t_o. En réalité la formule précédente doit s'écrire :

$$\theta = a\int_0^{t-t_o} \left[1 - F(s)\right] ds$$

$$t_o \longrightarrow -\infty \qquad \theta \longrightarrow a\int_0^{\infty} \left[1 - F(s)\right] ds$$

Intégrant par parties :

$$\theta = a\left[s\,1 - F(s)\right]_{s=0}^{s=\infty} + a\int_0^{\infty} s\, f(s)\, ds = a\,\mu$$

μ désignant le <u>temps de séjour moyen</u> dans le port. En conclusion, en régime permanent le nombre de bateaux présents au port soit une loi de Poisson dont le paramètre ne dépend que du paramètre d'arrivée a et du <u>temps d'escale moyen</u> μ.

$$\text{Prob}\left\{N(t) = n\right\} = \frac{(a\mu)^n\, e^{-a\mu}}{n!}$$

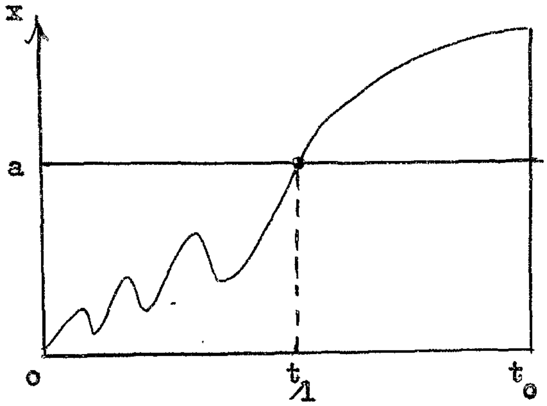
<u>Lorsque la loi des temps d'escale est exponentielle</u> :

$$F(s) = 1 - e^{-\lambda s}$$

$$\theta = a\int_0^t e^{-\lambda s} ds = \frac{a}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t})$$

$$t_o \longrightarrow \infty \qquad \theta \longrightarrow \frac{a}{\lambda}$$

E 25.- PROBABILITE D'ABSORPTION DANS UN PROCESSUS DE WIENER-LEVY



Calculer la probabilité d'absorption entre les instants <u>0 et t_o</u> dans un Wiener-Levy ; le seuil d'absorption étant a :

$$X(t) \qquad f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi c t}} e^{-\frac{x^2}{2ct}}$$

<u>t_o</u> et <u>a</u> étant donnés, on a à chercher la probabilité de l'évènement : " un premier passage par <u>a</u> a lieu entre les instants 0 et t_o " c'est-à-dire :

" On peut trouver un instant $t_1 (0 \leqslant t_1 \leqslant t_o)$ tel que $X(t_1) = a$

On admettra que le processus $X(t)$ est presque sûrement continu et on reliera la probabilité :

$$\text{Prob} \left\{ X(t_o) \geqslant a \right\}$$

avec la probabilité <u>$G_a(t_o)$</u> pour qu'un premier passage en <u>a</u> ait eu lieu antérieurement à l'instant t_o.

Donner l'expression de la densité de probabilité :

$$g_a(t_o) = \frac{d}{dt_o} G_a(t_o)$$

*

* *

SE 25.- PROBABILITE D'ABSORPTION DANS UN PROCESSUS DE WIENER-LEVY

$\text{Prob}\left\{ X(t_o) \geqslant a \right\}$ se calcule à l'aide de la fonction de répartition de processus $\text{Prob}\left\{ X(t_o) \geqslant a \right\} = \int^{\infty} f(x, t_o)\, dx$

Par ailleurs, si un premier passage par a a eu lieu à un instant t_1 $(0 \leqslant t_1 \leqslant t_o)$ la probabilité conditionnelle pour que $X(t_o)$ soit supérieur à a est égale à $\frac{1}{2}$.

- En effet, le processus étant stationnaire, la variable $X(t_1 + t) - X(t_1) = X(t_1+t)-a$ obéit à la même loi que $X(t)$. La loi du processus étant symétrique en x, on en déduit que pour tout t

$$\text{Prob}\left\{ X(t_1 + t) \geqslant a \right\} = \frac{1}{2}$$

- Il en résulte que

$$\text{Prob}\left\{ X(t_o) \geqslant a \right\} = \int_a^{\infty} f(x, t_o)dx = G_a(t_o) \times \text{ probabilité conditionnelle} = \frac{1}{2} G_a(t_o)$$

D'où

$$G_a(t_o) = 2\int_a^{\infty} f(x, t_o)dx$$

$$g_a(t_o) = 2\int_a^{\infty} \frac{\partial f(x, t_o)}{\partial t_o}\, dx$$

On vérifie que la Loi se Wiener-Levy satisfait à l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{c}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

d'où

$$g_a(t_o = c\left[\frac{\partial f(x, t_o)}{\partial x} \right]_a^{\infty} = -c \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi c\, t_o}} e^{-\frac{x^2}{2ct_o}} \right\}_{x=a}$$

$$\boxed{g_a(t_o) = \frac{1}{\sqrt{2\pi c}} \frac{a}{t_o^{3/2}} e^{-\frac{a^2}{2ct_o}}}$$

E 26.- LE PROCESSUS DE WIENER-LEVY N'A PAS DE VITESSE INSTANTANEE

Il s'agit de prouver que la variable $\frac{X(t+h) - X(t)}{h}$ ne converge pas lorsque h tend vers zéro. Il sera commode de montrer que la variable ne converge pas en loi - la convergence en loi étant la plus "faible" des convergences : il en résultera que la variable ne converge ni en probabilité, ni en moyenne quadratique, ni a fortiori, ne possède la convergence presque sûre.

L'absence de convergence en loi résulte immédiatement de l'expression de la fonction caractéristique.

*

* *

SE 26.- LE PROCESSUS DE WIENER-LEVY N'A PAS DE VITESSE INSTANTANEE

L'accroissement $X(t+h) - X(t)$ a pour fonction caractéristique (cf. la fonction caractéristique d'une variable normale)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \longrightarrow \text{pour fonction caractéristique } e^{-\frac{\sigma^2}{2}u}$$

$$\Phi(u,h) = e^{-\frac{ch}{2}u^2}$$

La fonction caractéristique du rapport $\frac{X(t+h) - X(t)}{h}$ s'obtient en remplaçant u par $\frac{u}{h}$

$$\Phi\left(\frac{u}{h},h\right) = e^{-\frac{chu^2}{2h^2}} = e^{-\frac{c\,u^2}{2h}} \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque } h \rightarrow 0$$

Lorsque h tend vers zéro, la fonction caractéristique ne converge vers aucune loi. Le rapport ne converge pas : la vitesse instantanée du processus de Wiener-Levy n'existe pas.

E 27.- CONDITION SUFFISANTE POUR QU'UNE CHAINE IRREDUCTIBLE SOIT APERIODIQUE

Démontrer la propriété suivante :

Si, dans la matrice de transition d'une chaîne irréductible il existe un terme diagonal P_{ii} non nul, la chaîne est apériodique.

*

* *

SE 27.- CONDITION SUFFISANTE POUR QU'UNE CHAINE IRREDUCTIBLE SOIT APERIODIQUE

Le terme diagonal de rang i dans la matrice de transition d'ordre $n+1$ se calcule ainsi :

$$P_{ii}^{(n+1)} = \sum_k P_{ik} P_{ki}^{(n)} \geqslant P_{ii} \; P_{ii}^{(n)}$$

Comme P_{ii} n'est pas nul, si

$P_{ii}^{(n)}$ n'est pas nul, $P_{ii}^{(n+1)}$ ne peut pas être nul.

Or, P_{ii}, c'est-à-dire $P_{ii}^{(1)}$, n'est pas nul, ce qui entraîne par récurrence la non nullité de tous les $P_{ii}^{(n)}$.

$$P_{ii}^{(n)} \neq 0$$

$$P_{ii}^{(n+1)} \neq 0$$

Les entiers n tels que $P_{ii}^{(n)}$ ne soit pas nul, sont donc premiers entre eux (leur P.G.C.D. d est égal à 1) :

$$n = k\,d \qquad\qquad k \text{ et } k' \text{ étant deux entiers positifs.}$$

$$n + 1 = k'\,d$$

en retranchant

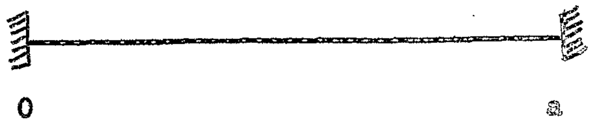
$$1 = (k' - k)d$$

ce qui impose $d = 1$

On en conclut que la chaîne a pour période 1, autrement dit elle est apériodique.

I.- MATRICE DE TRANSITION P D'UNE PROMENADE ALEATOIRE AVEC BARRIERES REFLECHISSANTES.

Une particule se déplace entre deux barrières situées aux abscisses 0 et a. Elle ne peut se déplacer que d'un saut par unité de temps.



La probabilité de progresser de l'abscisse i à l'abscisse $i+1$ est égale à p.

La probabilité de rétrograder de l'abscisse i à l'abscisse $i-1$ est égale à q.

Par ailleurs les barrières sont réfléchissantes.

D'une façon plus précise :

$P_{i,i+1} = p$ $\qquad P_{i,i-1} = q$ $\qquad$ et $\quad P_{ij} = 0$ pour $j \neq i+1$ ou $i-1$

$P_{oo} = q$ $\qquad P_{o1} = p$ $\qquad P_{oi} = o$ pour $j > 1$

$P_{a,a-1} = q$ $\qquad P_{a,a} = p$

Mettre en évidence que la chaîne est irréductible et apériodique.

II.- MATRICE DE TRANSITION P D'UNE PROMENADE ALEATOIRE AVEC BARRIERES ABSORBANTES.

Les hypothèses sont les mêmes, à ceci près que

$P_{oo} = 1$ $\qquad P_{o1} = 0$

$P_{a,a-1} = 0$ $\qquad P_{a,a} = 1$

III.- ECRIRE LA MATRICE DE TRANSITION D'ORDRE n P^n D'UN PROCESSUS DE POISSON. $p_k = e^{-a}\frac{a^k}{k!}$

On écrira la matrice directement, sans chercher la loi de formation des matrices successives.

*

* *

de $j - i$ pendant le temps (o, n) est selon le mode de Poisson :

$$P_{ij}(n) = \frac{(na)^{j-i}}{(j - i)} e^{-na}$$

Les états sont non essentiels car s'il est possible de passer de tout état i à un état $j \gg i$, il est impossible de revenir de l'état $j > i$ à l'état i.

E 29.- CHAINE A DEUX ETATS

On considère la matrice de transition des états 1 et 2

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$$

- Calculer les éléments de la matrice de transition d'ordre n :

$$P^n = \begin{pmatrix} 1-a_n & a_n \\ b_n & 1-b_n \end{pmatrix}$$

A cette fin, donner l'expression de a_{n+1} en fonction de a_n

$$P^{n+1} = P^n \, P$$

et résoudre l'équation aux différences.

- Donner la forme ergodique (n tendant vers l'infini) de la matrice $P^{(n)}$.

- Trouver la probabilité de premier retour à l'état 1 au temps n : $R_n(1)$ en introduisant les fonctions génératrices :

$$G_1(s) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P_{11}(n)\, s^n$$

$$H_1(s) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n(1)\, s^n = \frac{G_1(s) - 1}{G_1(s)}$$

- Retrouver directement ce résultat élémentaire.
- Donner l'espérance mathématique de premier retour à l'état 1

$$\mu_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n \; R_n(1) = H'_1(1)$$

– Retrouver les probabilités ergodiques de transition d'ordre n :

$P_{11}(n)$ et $P_{21}(n) \longrightarrow u_1$ lorsque n tend vers l'infini

$P_{12}(n)$ et $P_{22}(n) \longrightarrow u_2$ " " " " "

comme solution du système :

$$u_j = \sum_i P_{ij}\, u_i \qquad \text{avec} \qquad \sum_j u_j = 1$$

et vérifier que

$$\mu_1 = \frac{1}{u_1}$$

propriété qui résulte du théorème général des propriétés ergodiques.

*

* *

CHAINE A DEUX ETATS

L'expression du terme " 1ère ligne, seconde colonne " de la matrice P^{n+1} est :

$$a_{n+1} = (1 - a_n)a + a_n(1 - b) = (1 - a - b)a_n + a$$

C'est une équation aux différences. La solution générale de l'équation sans second membre est :

$$A(1 - a - b)^n$$

Une solution particulière de l'équation avec deuxième membre est :

$$\frac{a}{a + b}$$

D'où

$$a_n = A(1 - a - b)^n + \frac{a}{a + b}$$

Pour déterminer A, on fait $n = 1$

$$a = A(1 - a - b) + \frac{a}{a + b}$$

$$A = - \frac{a}{a + b}$$

$$a_n = \frac{a}{a + b}\left[1 - (1 - a - b)^n\right]$$

D'où la matrice de transition d'ordre n. (on a b_n par symétrie évidemment)

$$P_n = \begin{pmatrix} \frac{b}{a + b} + \frac{a}{a + b}(1 - a - b)^n & \frac{a}{a + b}\left[1 - (1 - a - b)^n\right] \\ \frac{a}{a + b} + \frac{b}{a + b}(1 - a - b)^n & \frac{b}{a + b}\left[1 - (1 - a - b)^n\right] \end{pmatrix}$$

Lorsque n tend vers l'infini P^n tend vers une limite

$$\begin{pmatrix} \frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b} \\ \frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b} \end{pmatrix}$$

Les probabilités ergodiques sont :

$$P_{11}(n) \text{ et } P_{21}(n) \longrightarrow u_1 = \frac{b}{a+b}$$

$$P_{12}(n) \text{ et } P_{22}(n) \longrightarrow u_2 = \frac{a}{a+b}$$

Calcul de la fonction génératrice $G_1(s)$:

$$G_1(s) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P_{11}(n)\, s^n$$

$$G_1(s) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a}{a+b} + \frac{a}{a+b}(1-a-b)^n\right] s^n = 1 + \frac{b}{a+b}\,\frac{s}{1-s} + \frac{a(1-a-b)}{a+b}\,\frac{s}{1-(1-a-b)s}$$

On en déduit la fonction génératrice des époques de premier retour à l'état 1 :

$$H_1(s) = \frac{G_1(s)-1}{G_1(s)} = \frac{s(1-a)-s^2(1-a-b)}{1-(1-b)s} = (1-a)\sum_{n=1}^{\infty}(1-b)^{n-1}s^n - (1-a-b)\sum_{n=2}^{\infty}(1-b)^{n-2}s^n$$

$$H_1(s) = (1-a)s + \sum_{n=2}^{\infty}(1-b)^{n-2}\, s^n$$

On en déduit les probabilités de premier retour à l'état 1 :

$$R_n(1) = ab(1-b)^{n-2} \qquad \text{pour } n \geqslant 2$$

$$R_1(1) = 1-a \qquad \text{pour } n = 1$$

Ce résultat est évident : Pour retourner à l'état 1 à l'instant n, il faut être passé de l'état 1 à l'état 2 à l'instant 1 (probabilité a) rester à l'état 2 de l'instant 2 à l'instant n-1 [probabilité $(1-b)^{n-2}$] passer de l'état 2 à l'état 1 à l'instant n (probabilité b), d'où

$$\begin{cases} R_n(1) = a(1-b)^{n-2}\, b = ab(1-b)^{n-2} \\ R_1(1) = 1 - a \end{cases}$$

<u>L'espérance mathématique de premier retour à l'état 1 est</u> :

$$\mu_1 = H_1'(1) = \frac{a+b}{b}$$

Au lieu de chercher la limite ergodique sur la matrice P^n, on peut trouver les probabilités ergodiques u_1 et u_2 comme solution du système

$$\begin{cases} u_1 = P_{11}\, u_1 + P_{21}\, u_2 \\ u_2 = P_{12}\, u_1 + P_{22}\, u_2 \end{cases} \quad \text{et} \quad u_1 + u_2 = 1$$

$$\begin{cases} u_1 = (1-a)u_1 + b\, u_2 \\ u_2 = a\, u_1 + (1-b)u_2 \end{cases}$$

$$u_2 = \frac{a}{b}\, u_1$$

$$u_1 = \frac{b}{a+b} \qquad u_2 = \frac{a}{a+b}$$

On vérifie que

$$\mu_1 = \frac{1}{\mu_1}$$

ce qui est conforme au théorème général d'ergodicité.

E 30.- CHAINE A TROIS ETATS CONSTITUEE D'UNE CLASSE ESSENTIELLE ET D'UN ETAT NON ESSENTIEL

On considère la matrice de transition :

$$P = \begin{pmatrix} 1-a & a & 0 \\ b & 1-b & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} \qquad \text{avec } \alpha + \beta + \gamma = 1$$

la matrice de transition d'ordre n a la forme suivante :

$$P^n = \begin{pmatrix} 1-a_n & a_n & 0 \\ b_n & 1-b_n & 0 \\ \alpha_n & \beta_n & \gamma_n \end{pmatrix}$$

avec $\alpha_n + {}_n + \gamma_n = 1$ puisque la somme des probabilités des états issus de e_3 à l'instant n est égale à 1.

Elle révèle une classe essentielle (les états e_1 et e_2) et un état non essentiel (e_3). En formant la matrice

$$P^{n+1} = P^n P \quad \text{de la forme} \quad \begin{pmatrix} 1-a_{n+1} & a_{n+1} & 0 \\ b_{n+1} & 1-b_{n+1} & 0 \\ \alpha_{n+1} & \beta_{n+1} & 0 \end{pmatrix}$$

il apparaît que a_n et b_n ont mêmes expressions que dans la chaîne à deux états.

Calculer α_n, ${}_n$ et γ_n et former la matrice ergodique (n tendant vers l'infini).

*

* *

SE 30.- CHAINE A TROIS ETATS CONSTITUEE D'UNE CLASSE ESSENTIELLE ET D'UN ETAT NON ESSENTIEL

$$P^{n+1} = P^n P$$

Calcul de γ_{n+1}

$$\gamma_{n+1} = 0\,\alpha_n + 0\,\beta_n + \gamma\gamma_n$$

$$\gamma_{n+1} = \gamma\gamma_n$$

d'où

$$\underline{\gamma_n = \gamma^n}$$

Calcul de α_n

En écrivant l'expression du premier terme de la troisième ligne dans la matrice P^{n+1}

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n(1-a) + \beta_n b + \gamma_n \alpha$$

Or

$$\gamma_n = \gamma^n \quad \text{et} \quad \beta_n = 1 - \alpha_n - \gamma_n = 1 - \alpha_n - \gamma^n$$

$$\alpha_{n+1} = (1 - a - b)\ \alpha_n + (\alpha - b)\,\gamma^n + b$$

La solution générale de l'équation sans second membre est

$$A(1 - a - b)$$

Une solution particulière de l'équation avec second membre est :

- pour la partie constante : $\dfrac{b}{a+b}$

- pour la partie en γ^n : $\dfrac{\alpha - b}{\gamma + a + b - 1}\gamma^n$

D'où

$$\alpha_n = A(1 - a - b)^n + \frac{\alpha - b}{\gamma + a + b - 1}\gamma^n + \frac{b}{a+b}$$

Pour calculer α_n on peut faire $n = 1$ ou plus simplement encore $n = 0$ avec $\alpha_o = 0$

$$0 = A + \frac{\alpha - b}{\gamma + a + b - 1} + \frac{b}{a+b}$$

$$A = \frac{b - \alpha}{a - \alpha + b - \beta} - \frac{b}{a+b} = \frac{b\beta - a\alpha}{(a+b)(a - \alpha + b - \beta)}$$

On obtient β_n en permutant a, b et α, β

Il en résulte que la matrice P^n tend vers la limite ergodique suivante :

$$\begin{pmatrix} \frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b} & 0 \\ \frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b} & 0 \\ \frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b} & 0 \end{pmatrix} \qquad \alpha_n \to \frac{b}{a+b} \quad \beta_n \to \frac{a}{a+b} \quad \gamma_n \to 0$$

E 31.- ETUDE D'UNE SERIE DE SUCCES

On appellera état e_k une série de k succès consécutifs et de k seulement, dans une alternative répétée, par exemple le jeu de roulette.

Autrement dit, on a joué r parties avec des alternatives du type

$$X(p) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \quad \text{selon que l'on gagne ou que l'on perd (p de 1 à r)}$$

La probabilité de succès étant p et la probabilité d'échec q.

On a un état e_k si $X(r) = X(r-1) = \ldots\ldots X(r-k+1) = 1$ et $X(r-k) = 0$

- Ecrire les matrices de transition P d'ordre 1 et P^2 d'ordre 2 des états e_k.
- Montrer directement par un raisonnement élémentaire que la probabilité de transition d'ordre n de l'état e_i à l'état e_j.

$$P_{ij}^{(n}\quad \text{tend vers } qp^j \text{ lorsque } n \text{ tend vers l'infini.}$$

En déduire que tous les états sont essentiels et apériodiques.

- Donner l'expression de $P_{kk}^{(n)}$ et en déduire que les états sont tous persistants et positifs. Quelle est la limite u_k de $P_{kk}^{(n)}$ lorsque n tend vers l'infini ?

- Donner l'expression de la fonction génératrice

$$G_k(s) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P_{kk}^{(n)} \; s^n$$

et de celle du premier retour à l'état k, qui est liée à $G_k(s)$ par la relation :

$$H_k(s) = \sum_{n=o}^{\infty} R_n(k)\; s^n = \frac{G_k(s) - 1}{G_k(s)}$$

En déduire le temps de retour moyen de l'état k, c'est-à-dire l'espérance mathématique de l'époque de premier retour en k :

$$\mu_k = H_k'(1)$$

et vérifier, conformément à un théorème général que $\mu_k = \frac{1}{uk}$.

\- Que se passe t'il pour de longues séries, lorsque k est très grand ? Déduire de la fonction génératrice $H_k(s)$ la fonction caractéristique $\Phi(u)$ de l'époque de premier retour T_1. Former la fonction caractéristique de la variable

$$Y_1 = \frac{T_1}{E(T_1)} = \frac{T_1}{\mu_k}$$

et chercher sa limite lorsque k tend vers l'infini.

Déduire de la loi de premier retour (celle de T_1 ou de Y_1) la loi du n ième retour (celle de T_n ou de $Y_n = \frac{T_n}{\mu_k}$) lorsque k est très grand. Montrer que le nombre de très longues séries $Z(t)$ survenant entre 0 et t suit une loi de Poisson.

*

* *

On prendra garde que l'état k_o existe.

$$P = \begin{pmatrix} q & p & o & o & \cdots \\ q & o & p & o & \cdots \\ q & o & o & p & \cdots \\ \cdots & & & & \end{pmatrix} \qquad P^2 = \begin{pmatrix} q & qp & p^2 & o & \cdots & & \\ q & qp & o & p^2 & \cdots & o & \cdots \\ q & qp & o & o & & p^2 & o \\ \cdots & & & & & & \end{pmatrix}$$

- Lorsque n est très grand, pour aboutir à un état terminal j, il faut avoir eu un échec suivi de j succès et ceci quel que soit l'état initial i.

Donc $P_{ij}^{(n)} \longrightarrow q\,p^j$ lorsque n tend vers l'infini

On en déduit que tout état peut être atteint à partir de n'importe quel état : tous les états sont essentiels. Comme

$$P_{kk}^{(n)} \longrightarrow q\,p^k \qquad \text{lorsque } n \text{ tend vers l'infini}$$

quel que soit l'entier k, le P.G.C.G. de k est 1 et tous les états sont apériodiques.

- On a $$p_{kk}^{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \leq k \\ q\,p^k & \text{si } n > k \end{cases}$$ car le retour à l'état k est alors impossible.

Lorsque n tend vers l'infini la série $\sum_{n=o}^{\infty} P_{kk}^{(n)}$ est donc divergente et son terme général ne tend pas vers 0 mais vers $u_k = q\,p^k$. On en déduit que tous les états sont persistants et positifs. On note conformément à un résultat général que

$$\sum_{k=o}^{\infty} u_k = q \sum_{k=o}^{\infty} p^k = \frac{q}{1-p} = 1$$

<u>Temps de retour en e_k</u> - On forme d'abord la fonction génératrice

$$G_k(s) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P_{kk}^{n}\, s^n = 1 + qp^k \sum_{n=k+1}^{\infty} s^n = 1 + \frac{q\,p^k\, s^{k+1}}{1-s}$$

$$G_k(s) = \frac{1 - s + q\,p^k\, s^{k+1}}{1 - s}$$

On en déduit la fonction génératrice du premier retour à l'état k :

$$H_k(s) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n(k)\, s^n = \frac{G_k(s) - 1}{G_k(s)} = \frac{q\, p^k\, s^{k+1}}{1 - s + q\, p^h\, s^{k+1}}$$

et l'espérance mathématique de l'époque de premier retour :

$$\mu_k = H_k'(1) = \frac{1}{q\, p^k} = \frac{1}{u_k}$$

On vérifie ici l'application d'un théorème général

$$\mu_k = \frac{1}{\mu_k}$$

Etude des très longues séries. (k très grand).

On désigne par T_1 l'époque de premier retour. La fonction caractéristique $\Phi(u)$ de T_1 s'obtient en remplaçant s par e^{in} dans la fonction génératrice $H_k(s)$

$$\Phi(u) = \frac{q\, p^k\, e^{iu(k+1)}}{1 - e^{iu} + qp^k\, e^{iu(k+1)}}$$

Si on rapporte T_1 à son espérance mathématique,

$$Y_1 = \frac{T_1}{\mu_k}$$

la fonction caractéristique de Y_1 est :

$$\Phi\left(\frac{u}{\mu_k}\right) = \Phi(qp^k\, u) = \frac{qp^k\; e^{iu(k+1)qp^k}}{1 - e^{iqp^k u} + qp^k\, e^{i(k+1)qp^k u}}$$

Lorsque k tend vers l'infini $\Phi(\frac{u}{\mu_k})$ tend vers une limite.

$k \to \infty \quad \Phi(\frac{u}{\mu_k}) \sim \frac{qp^k}{-iqp^k u + qp^k} = \frac{1}{1-iu}$ fonction caractéristique d'une variable exponentielle.

$Y_1 = \frac{T_1}{\mu_k}$ converge donc en loi vers une variable exponentielle. On doit donc s'attendre à ce que le nombre de séries de longueur k contenues dans un temps donné soit asymptotiquement poissonnier.

L'époque de n ième retour T_n de l'état e_k est la somme de n variables indépendantes T_1. Sa fonction caractéristique est $\left[\Phi(u)\right]^n$. Celle de la variable

$$Y_n = \frac{T_n}{\mu_k}$$

est donc

$$\frac{1}{(1-iu)^n}$$

La fonction de répartition de Y_n est donc

$$\text{Prob}\left\{ Y_n > \lambda \right\} = \frac{1}{(n-1)} \int_\lambda^\infty x^{n-1}\, e^{-x}\, dx$$

que l'on peut encore écrire en intégrant par parties :

$$\text{Prob}\left\{ \frac{T_n}{\mu_k} > \lambda \right\} = e^{-\lambda}\left[1 + \frac{\lambda}{1} + \frac{\lambda^2}{2!} + \ldots\ldots \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)}\right]$$

On peut transformer ce résultat et désigner par <u>$Z(t)$ le nombre de séries de longueur k apparaissant entre 0 et t</u>. On a :

$$\text{Prob}\left\{ Z(t) < n \right\} = \text{Prob}\left\{ T_n > t \right\}$$

posant $\lambda = \frac{t}{\mu_k} = q\, p^k\, t$

$$\underline{\text{Prob}\left\{ Z(t) < n \right\} = e^{-qp^k t} \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{(qp^k t)^\ell}{\ell!}}$$

$Z(t)$ converge donc en loi vers une loi de Poisson de paramètre $qp^k t$ lorsque les séries de k succès sont très longues.

E 32.- REGIME STATIONNAIRE DANS UNE PROMENADE ALEATOIRE A BARRIERES REFLECHISSANTES

Une particule évolue entre deux barrières situées en $x = o$ et $x = a$.

A chaque instant, elle se déplace par sauts de longueur unité, elle a une probabilité p d'avancer et une probabilité q de rétrograder. Cependant elle

peut être soit absorbée, soit réfléchie par les barrières. D'une façon plus précise, voici les probabilités de transition d'ordre 1.

$$\begin{cases} P_{i,i-1} = q & P_{i,i+1} = p & P_{ij} = o \quad \text{pour } j \neq i-1 \text{ ou } i+1 \\ P_{oo} = q & P_{o1} = p & P_{oi} = o \quad \text{pour } i > 1 \\ P_{a,a-1} = q & P_{a,a} = p & \end{cases}$$

On montrera qu'il existe un système de probabilités stationnaires u_k vérifiant les équations :

$$u_k = \sum_{i=o}^{a} u_i P_{ik}$$

Si un tel système de solutions existe, on sait qu'il est unique et que les états sont nécessairement persistants et positifs.

I)- On cherche à vérifier les équations par une fonction de la forme :

$$u_k = A r^k + B$$

on calculera r, A et B.

II)- On étudiera ensuite le cas où la barrière a est rejetée à l'infini. Y a-t-il un régime stationnaire ? La réponse diffère selon que le rapport $\frac{p}{q}$ est inférieur ou bien supérieur ou égal à 1.

Dans le cas $\frac{p}{q} \geqslant 1$, on calculera la probabilité R_o de retour à l'origine et on concluera après avoir noté que la chaîne proposée ne comporte que des états essentiels, elle est irréductible et apériodique. On verra que si $p < q$, tous les états sont persistants et positifs, si $p > q$ ils sont transitoires, si $p = q$, ils sont persistants et nuls.

*

* *

SE 32.- REGIME STATIONNAIRE DANS UNE PROMENADE ALEATOIRE A BARRIERES REFLECHISSANTES

I) Le système $u_k = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \, P_{ik}$

s'écrit

(1) $$u_k = p\, u_{k-1} + q\, u_{k+1}$$

avec les équations terminales

(2) $$u_o = q\, u_o + q\, u_1 \qquad \text{soit} \qquad u_1 = u_o \frac{p}{q}$$

(3) $$u_a = p\, u_{a-1} + q\, u_a \qquad \text{soit} \qquad u_{a-1} = u_a \frac{q}{p}$$

L'équation (1) peut être satisfaite par une fonction du type

$$u_k = A\, r^k + B$$

En substituant dans (1)

$$q\, r^{k+1} - r^k + p\, r^{k-1} = 0$$

$$q\, r^2 - r + p = 0$$

$$r = \frac{p}{q}$$

(4) $$u_k = A\left(\frac{p}{q}\right)^k + B$$

Aux limites :

(5) pour $k = 1$ $$u_1 = u_o \frac{p}{q} + B = \frac{p}{q}(A + B)$$

(6) pour $k = a - 1$ $$u_{a-1} = u_a \frac{q}{p} = A\left(\frac{p}{q}\right)^{a-1} + B = \frac{q}{p}\left[A\left(\frac{p}{q}\right)^a + B\right]$$

L'égalité (5) ou l'égalité (6) impose

$$B = 0$$

On calcule A en exprimant que les u_k constituent un système de probabilités :

$$\sum_{k=0}^{a} u_k = 1$$ c'est-à-dire

$$A \sum_{k=0}^{a} \left(\frac{p}{q}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^{a+1}}{1 - \frac{p}{q}} A = 1$$

D'où finalement la solution du systeme de probabilités stationnaires :

$$u_k = \frac{1 - \frac{p}{q}}{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^{a+1}} \left(\frac{p}{q}\right)^k$$

On sait, d'après le théorème ergodique, que ce systeme de solutions est unique et qu'il entraîne que les états sont persistants et positifs.

II)- Cas où l'une des barrières s'éloigne à l'infini. $a \to \infty$

Y-a-t-il un régime stationnaire ? Supposons l'existence de ce régime stationnaire, on aurait alors la solution générale (4)

$$u_k = A\left(\frac{p}{q}\right)^k + B$$

et

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = 1$$

La sommation étant effectuée jusqu'à l'infini, la relation impose tout d'abord :

$$B = 0$$

ensuite

$$A \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{p}{q}\right)^k = 1$$

Si $\frac{p}{q} < 1$ La dernière équation permet de calculer A :

$$A = 1 - \frac{p}{q}$$ d'où

$$u_k = \left(1 - \frac{p}{q}\right)\left(\frac{p}{q}\right)^k$$

Le régime stationnaire existe : les états sont nécessairement tous persistants et positifs.

Si $\frac{p}{q} > 1$ La dernière équation impose A = 0. Par suite A = 0 et B = 0 :

le régime stationnaire n'existe pas. Comme ils ne peuvent être persistants et positifs, les états sont soit transitoires, soit persistants et nuls.

Pour trancher la question, calculons la probabilité R_o de retour à l'origine.

Raisonnons de façon conditionnelle : La particule est à l'origine à l'instant initial. A l'instant 1, elle peut soit être restée à l'origine avec une probabilité q (elle est alors à l'origine à l'instant 1), soit être au point $i = 1$ avec la probabilité p. Désignons par $R_{1,0}$ la probabilité de revenir à l'origine en partant du point 1.

La probabilité a priori de premier retour à l'origine R_o est la somme pondérée des probabilités conditionnelles :

$$R_o = q.1 + p\,R_{1,0}$$

Or $R_{1,0}$ a été calculée dans le cours et est égale à $\frac{q}{p}$. D'où

$$R_o = q + p\frac{q}{p} = 2\,q \leqslant 1$$

Avant de conclure, on notera que la chaîne ne comporte que des états essentiels : car tout état peut être atteint à partir de tout autre état, elle est irréductible. Comme, d'autre part la matrice de transition comporte un terme P_{ii} non nul correspondant au point 0, elle est apériodique. Or dans une chaîne irréductible et apériodique tous les états sont de même nature, il suffit de conclure pour l'un d'eux : l'état 0 par exemple.

Si $p > q$ soit $q < \frac{1}{2}$, il y a une probabilité non nulle $1-2q$ pour que le système ne repasse jamais par l'origine : tous les états sont donc transitoires.

Si $p = q = \frac{1}{2}$ $2q = 1$, il est presque sûr que la particule repasse par l'origine : les états sont persistants, comme ils ne peuvent être persistants et positifs, ils sont persistants et nuls.

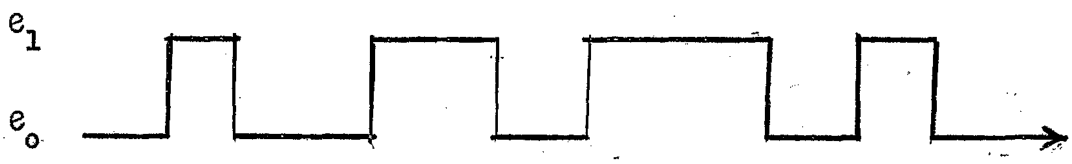
E. 33 - CHAINE A DEUX ETATS A TEMPS CONTINU

Un système peut évoluer, au cours du temps, entre deux états e_o et e_1. Son évolution peut être décrite à l'aide d'une chaîne de Markov stationnaire à temps continu. Voici les probabilités élémentaires de transition pendant l'intervalle de temps t, t + Δt.

$$P_{oo}(\Delta t) = 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t) \qquad P_{1o}(\Delta t) = \mu \Delta t$$

$$P_{o1}(\Delta t) = \lambda \Delta t \qquad P_{11}(\Delta t) = 1 - \mu \Delta t$$

Le phénomène peut être représenté par le graphique



Les lois des longueurs des paliers, c'est-à-dire des intervalles de temps séparant les apparitions consécutives d'un même évènement sont des lois exponentielles (loi des temps d'attente dans un processus poissonnien).

loi des paliers e_o $\qquad e^{-\lambda t}$

loi des paliers e_1 $\qquad e^{-\mu t}$

A l'aide de la seconde équation de Kolmogorov, on formera la matrice de transition.

$$\begin{pmatrix} P_{oo}(t) & P_{o1}(t) \\ P_{10}(t) & P_{11}(t) \end{pmatrix}$$

Il suffit d'ailleurs d'écrire une seule équation de Kolmogorov.

On pourra ensuite écrire sous forme matricielle la probabilité de transition P.

*

* *

SE 33.- CHAINE A DEUX ETATS A TEMPS CONTINU

La seconde équation de Kolmogorov relative à la transition de l'état 0 à l'instant initial à l'état 0 à l'instant t s'écrit :

$$(K_2) \qquad \frac{d\,P_{00}(t)}{dt} = -\lambda\,P_{00}(t) + \mu\,P_{01}(t)$$

mais comme il n'y a que deux état possibles, l'état 0 et l'état 1 :

$$P_{00}(t) + P_{01}(t) = 1$$

$$\frac{d\,P_{00}(t)}{dt} = \mu - (\lambda + \mu)\,P_{00}(t)$$

$$P_{00}(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + A\,e^{-(\lambda + \mu)t}$$

A est défini par

$$P_{00}(0) = 1$$

$$P_{00}(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\,e^{-(\lambda + \mu)t}$$

Il est inutile d'écrire les autres équations de Kolmogorov :

$$P_{01}(t) = 1 - P_{00}(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\left(1 - e^{-(\lambda + \mu)t}\right)$$

$P_{10}(t)$ et $P_{11}(t)$ s'en déduisent par permutation de λ et μ. d'où :

$$P(t) = \begin{pmatrix} \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\,e^{-(\lambda+\mu)t} & \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\left(1 - e^{-(\lambda+\mu)t}\right) \\ \frac{\mu}{\lambda + \mu}\left(1 - e^{-(\lambda+\mu)t}\right) & \frac{\lambda}{\lambda + \mu} + \frac{\mu}{\lambda + \mu}\,e^{-(\lambda+\mu)t} \end{pmatrix}$$

ou encore en posant

q la probabilité d'apparition de l'état 0

et p celle de l'état 1

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha = \lambda + \mu \\ q = \dfrac{\mu}{\lambda + \mu} \\ p = \dfrac{\lambda}{\lambda + \mu}\end{array}\right.$$

$$P(t) = \begin{pmatrix} q + p\,e^{-\alpha t} & p(1 - e^{-\alpha t}) \\ q(1 - e^{-\alpha t}) & p + q\,e^{-\alpha t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0(t) & p_0(t) \\ q_1(t) & p_1(t) \end{pmatrix}$$

Sous forme matricielle, le système des équations de Kolmogorov (K_2) s'écrit en désignant par $P'(0)$ la matrice des dérivées à l'instant $t = 0$

$$P'(0) = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

$$(K_2) \qquad \frac{dP}{dt} = P(t)\,P'(0) = P'(0)\,P(t)$$

Cette équation s'intègre en :

$$P = e^{t\,P'(0)} = I + t\,P'(0) + \dots + \frac{t^n}{n!}\left[P'(0)\right]^n + \dots$$

Or entre les puissances successives de la matrice $P'(0)$ on a :

$$\left[P'(0)\right]^2 = -(\lambda + \mu)\,P'(0)$$

$$\left[P'(0)\right]^n = (-1)^{n-1}\,(\lambda + \mu)^{n-1}\,P'(0)$$

d'où il découle

$$P = I - \frac{P'(0)}{\lambda + \mu}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{\left[(\lambda + \mu)t\right]^n}{n!} = I - \frac{P'(0}{\lambda + \mu}\left[e^{-(\lambda+\mu)t} - 1\right]$$

$$\boxed{P = I + \frac{1 - e^{-(\lambda+\mu)t}}{\lambda + \mu}\,P'(0)}$$

qui synthètise le résultat obtenu plus haut.

E 34.-SCHEMA D'EHRENFEST POUR LA DIFFUSION GAZEUSE

On considère deux réservoirs communicants R_1 et R_2 contenant au total N particules se comportant de façon absolument indépendante les unes des autres. Pendant le laps de temps Δt chaque particule de R_2

a une probabilité $\lambda \Delta t$ de passer dans R_1 et chaque particule de R_1 une probabilité $\mu \Delta t$ de passer dans R_2. Autrement dit, si k représente le nombre de particules incluses dans R_1 à l'instant t, on a des probabilités pour que, à l'instant $t + \Delta t$:

$$\begin{cases} \Delta k = 1 & \lambda(N - k)\Delta t \\ \Delta k = 1 & \mu\, k\, \Delta t \\ \Delta k = 0 & 1 - \left[\lambda N + (\mu - \lambda)k\right]\Delta t \end{cases}$$

Sachant qu'à l'instant initial, il y a $\underline{i}$ particules dans R_1(et N_{-i} dans R_2), et qu'il y en a j à l'instant t, on désigne par $P_{ij}(t)$ la probabilité de transition entre l'état i et l'état j au bout d'un temps t.

Ecrire la seconde équation de Kolmogorov. On introduira ensuite la fonction génératrice

$$G_i(s,t) = \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(t)\, s^j$$

et montrera qu'elle vérifie l'équation aux dérivées partielles linéaires avec second membre :

$$\frac{\partial G_i}{\partial t} + \left[\lambda s^2 + (\mu - \lambda)s - \mu\right]\frac{\partial G}{\partial s} = N\,\lambda(s - 1)G$$

On écrira la solution générale de cette équation et on exprimera G en tenant compte de la forme de G à l'instant initial.

On remarquera que j peut être considéré comme la somme de i variables binomiales $\left[(p_1(t), q_1(t)\right]$ et de N - i variables binomiales $\left[p_0(t), q_0(t)\right]$. Toutes ces variables étant indépendantes. On écrira les valeurs des p et q et on notera l'analogie avec les résultats de l'exercice précédent. On écrira les valeurs de la moyenne $m_i(t)$ et de la variance $\sigma_i^2(t)$ de la variable j à l'instant t. On cherchera la limite ergodique de la loi de répartition (quand t tend vers l'infini).

On cherchera à établir la loi de j sans passer par le calcul de Kolmogorov. On considérera que le nombre $X(t)$ particules présentes dans R_1 à l'instant t est la somme de N processus indépendants $Y_1(t) \dots Y_N(t)$ tels que :

$$Y_\ell(t) = \begin{cases} 0 & \text{si la particule } \ell \text{ est dans } R_2 \\ 1 & \text{si la particule } \ell \text{ est dans } R_1. \end{cases}$$

On écrira la matrice de $Y_\ell(t)$ en utilisant les résultats de l'exercice précédent sur la chaîne à deux états et les fonctions génératrices $g_1(s,t)$ et $g_0(s,t)$ relatives aux valeurs initiales $Y(0) = 1$ et $Y(0) = 0$ du processus $Y(t)$.

On déduira de $g_1(s,t)$ et de $g_0(s,t)$ la fonction génératrice de $X(t)$ et on conclura.

*

* *

SE 34 .- SCHEMA D'EHRENFEST POUR LA DIFFUSION GAZEUSE

La seconde équation de Kolmogorov s'écrit :

$$(K_2) \quad \frac{d\,P_{ij}(t)}{dt} = -\left[\lambda N + (u-\lambda)j\right] P_{ij}(t) + \lambda \left[N-(j-1)\right] P_{i,j-1}(t) + \mu(j+1)P_{i,j+1}(t)$$

Multiplions les deux membres par s^j et sommons de $j = 0$ à l'infini :

$$\sum_{j=0}^{\infty} s^j \frac{d\,P_{ij}(t)}{dt} = -\lambda N \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(t)\, s^j + \lambda Ns \sum_{j=1}^{\infty} P_{i,j-1}(t)\, s^{j-1}$$

$$+ (\lambda-\mu)s \sum_{j=1}^{\infty} j\, P_{ij}(t)\, s^{j-1} - \lambda s^2 \sum_{j=2}^{\infty} (j-1)\, P_{ij}(t)\, s^{j-2} + \mu \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)\, P_{i,j+1}(t)$$

En faisant quelques changements d'indices évidents :

$$\sum_{j=0}^{\infty} s^j \frac{d\,P_{ij}(t)}{dt} = \lambda N(s-1) \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(t)\, s^j + \left[\mu + (\lambda-\mu)s - \lambda s^2\right] \sum_{j=1}^{\infty} j\, P_{ij}(t)\, s^{j-1}$$

... / ...

Or

$$\sum_{j=o}^{\infty} P_{ij}(t)\, s^j = G_i(s,t) \qquad \text{et} \qquad \sum_{j=1}^{\infty} j\, P_{ij}(t)\, s^{j-1} = \frac{\partial G_i(s,t)}{\partial s}$$

$$\underline{\frac{\partial G_i}{\partial t} + \left[\lambda\, s^2 + (\mu-\lambda)s - \mu\right] \frac{\partial G}{\partial s} = \lambda\, N(s-1)\, G_i}$$

La méthode générale de résolution d'une équation aux dérivées partielles linéaire avec second membre du type

$$P \frac{\partial G_i}{\partial t} + Q \frac{\partial G}{\partial s} = R$$

est de considérer le système associé :

$$\frac{dt}{P} = \frac{ds}{Q} = \frac{d\, G_i}{R}$$

La solution générale de l'équation aux dérivées partielles s'obtient en écrivant que l'une des intégrales premières du système associé est une fonction arbitraire de l'autre.

Le système associé est ici :

$$dt = \frac{ds}{\lambda\, s^2 + (\mu-\lambda)s-\mu} = \frac{d\, G_i}{\lambda\, N(s-1)G_i}$$

$$dt = \frac{ds}{(s-1)(\lambda s+\mu)} = \frac{d\, G_i}{\lambda\, N(s-1)}$$

Une intégrale première s'obtient en égalant les deux dernières fractions :

$$\frac{d\, G_i}{G_i} - N \frac{\lambda\, ds}{\lambda s + \mu} = 0$$

$$\underline{\left(s + \frac{\mu}{\lambda}\right)^{-N} G_i = \text{constante.}}$$

Une seconde intégrale première s'obtient en égalant les deux premières fractions :

$$(\lambda+\mu)dt + \left(\frac{1}{1 - s} + \frac{1}{s + \mu/\lambda} \right) ds$$

$$\frac{s + \mu/\lambda}{1 - s} \; e^{(\lambda+\mu)t} = \text{constante}$$

F désignant une fonction arbitraire, la solution générale de l'équation aux dérivées partielles est :

$$G_i = \left(s + \frac{\mu}{\lambda} \right)^N \; F\left[\frac{s + \frac{\mu}{\lambda}}{1 - s} \; e^{(\lambda+\mu)t} \right]$$

A l'instant initial $t = 0$, il y a i particules dans R_1 et par suite

$$G_i(s,0) = s^i$$

D'où le moyen de déterminer la fonction F :

$$s^i = \left(s + \frac{\mu}{\lambda} \right)^N \; F\left(\frac{s + \frac{\mu}{\lambda}}{1 - s} \right)$$

changement de variable

$$u = \frac{s + \frac{\mu}{\lambda}}{1 - s} \quad \text{d'où}$$

$$s = \frac{u - \frac{u}{\lambda}}{u + 1} \qquad s + \frac{\mu}{\lambda} = \frac{\lambda + \mu}{\lambda} \; \frac{u}{u + 1}$$

$$F(u) = \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^N \left(1 - \frac{\mu}{\lambda u} \right)^i \; 1 + \frac{1}{u}\;{}^{N-i}$$

$$G_i = \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu} \right)^N \left[s + \frac{\mu}{\lambda} - \frac{\mu}{\lambda}(1-s)e^{-(\lambda+\mu)t} \right]^i \left[s + \frac{\mu}{\lambda} + (1-s)e^{-(\lambda+\mu)t} \right]^{N-i}$$

$$G_i = \left[\frac{\mu}{\lambda+\mu} \left(1-e^{-(\lambda+\mu)t}\right) + s\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu} + \frac{\mu}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t} \right) \right]^i \left[\frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t} + \frac{s\lambda}{\lambda+\mu} \; 1-e^{-(\lambda+\mu)t} \right]^{N-i}$$

On reconnaît dans les coefficients les termes de la matrice $P(t)$ de transition dans la chaîne à deux états :

$$G_i = q(1-e^{-\alpha t}) + s(p + qe^{-\alpha t})^{\ i} \quad q + p\, e^{-\alpha t} + s\, p(1 - e^{-\alpha t})^{\ N-i}$$

$$= q_1(t) + s\, p_1(t)^{\ i} \quad q_o(t) + s\, p_o(t)^{\ N-i}$$

Une fonction génératrice du type $(q + ps)^n$ est celle d'une loi binomiale (p,q) à n tirages. On en déduit que la loi de j est la somme de i variables binomiales $p_1(t)$, $q_1(t)$ et de $N-i$ variables binomiales $p_o(t)$, $q_o(t)$. Toutes ces variables étant indépendantes. Si $\lambda = \mu$ $p_1(t) = q_o(t)$ et $q_1(t) = p_o(t)$.

On déduit de cette remarque la somme et la variance du nombre de particules présentes à l'instant t dans le réservoir R_1

$$m_i(t) = i(p + qe^{-\alpha t}) + (N-i)\, p(1-e^{-\alpha t}) = Np + (i - Np)\, e^{-\alpha t}$$

$$\sigma_i^2(t) = (1 - e^{-\alpha t}) \quad iq(p + q\, e^{-\alpha t}) + (N-i)\, p(q+p\, e^{-\alpha t})$$

$$= \left\{ Npq + (N-i)\, p^2 + i\, q^2 \quad e^{-\alpha t} \right\} (1 - e^{-\alpha t}$$

<u>Limite ergodique</u> - En faisant tendre t vers l'infini dans l'expression de fonction génératrice

$$t \longrightarrow \infty \qquad G \longrightarrow (q + ps)^i\, (q + ps)^{N-i} = (q + ps)^N$$

Les j convergent donc en loi vers une loi binomiale $p = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$, $q = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$ à N tirages. Tout se passe comme si la position de chaque particule était tirée au sort indépendamment les unes des autres.

Démonstration synthétique - Le nombre de particules présentes à l'instant t dans le réservoir R_1. $X(t)$ peut être considéré comme la somme de N processus indépendants $Y_1(t)\dots Y_N(t)$ tels que :

$$Y_\ell(t) = \begin{cases} 0 & \text{si la particule } \ell \text{ est dans } R_2 \\ 1 & \text{si la particule } \ell \text{ est dans } R_1 \end{cases}$$

La matrice de transition de $Y_\ell(t)$ est celle de la chaîne à deux états.

$$P(t) = \begin{pmatrix} P_{00}(t) = q_0(t) & P_{01}(t) = p_0(t) \\ P_{10}(t) = q_1(t) & P_{11}(t) = p_1(t) \end{pmatrix}$$

On en déduit la fonction génératrice du processus $Y_\ell(t)$ mais il y a deux cas à considérer selon la valeur de $Y(t)$ à l'instant initial :

- si $Y_\ell(0) = 1$ c'est-à-dire si ℓ est dans R_1 à l'instant 0, on nommera $g_1(s,t)$ la fonction génératrice correspondante

$$g_1(s,t) = P_{10}(t) + s\,P_{11}(t) = q_1(t) + s\,p_1(t)$$

- si $Y_\ell(0) = 0$ c'est-à-dire si ℓ est dans R_2 à l'instant 0, on nommera $g_0(s,t)$ la fonction génératrice correspondante

$$g_0(s,t) = P_{00}(t) + s\,P_{01}(t) = q_0(t) + s\,p_0(t)$$

Quant à $X(t)$, c'est la somme de i processus indépendants $Y(t)$ tels que $Y(0) = 1$
et de $N - i$ processus indépendants $Y(t)$ tels que $Y(0) = 0$

La fonction génératrice de $X(t)$ est donc le produit de i fonctions g_1 et de $N-i$ fonctions g_0

$$G_i(s,t) = \left[g_1(s,t)\right]^i \left[g_0(s,t)\right]^{N-i}$$

$$\underline{G_i(s,t) = \left[q_1(s,t) + s\,p_1(t)\right]^i \left[q_0(t) + s\,p_0(t)\right]^{N-i}}$$

On retrouve la loi établie à l'aide de la 2ème équation de Kolmogorov, d'où on peut formuler les propriétés énumérées plus haut.

E 35.- FILES D'ATTENTE (OU APPELS TELEPHONIQUES) SANS SATURATION

On imagine un bureau de poste dans lequel le nombre de guichets ouverts serait infini, des clients dont les arrivées seraient poissonniennes de paramètre λ, ainsi que des départs de paramètre μ - ce qui revient à dire que les temps de service aux guichets obéissent à une loi de répartition exponentielle - On suppose que les guichets ne sont pas saturés c'est-à-dire que, sitôt entré dans le bureau, le client se précipite à un guichet ouvert et que le postier s'occupe de lui immédiatement.

Si à l'époque t, k clients sont présents dans le bureau, il y a pendant le laps de temps t, $t + \Delta t$:

- une probabilité $\lambda \Delta t$ pour qu'arrive un nouveau client (et nulle pour qu'il en arrive plusieurs).
- une probabilité $k\mu\Delta t$ pour qu'un client s'en aille, ayant été servi.
- une probabilité $1 - (\lambda + k\mu)\Delta t$ pour qu'aucun changement ne se produise.

Sachant qu'il y a, à l'instant initial, i personnes dans le bureau, on désigne par j le nombre de personnes présentes à l'instant t et par $P_{ij}(t)$ la probabilité de transition.

On demande d'écrire la seconde équation de Kolmogorov (K_2), de montrer que la fonction génératrice

$$G_i(s,t) = \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(t)\, s^j$$

vérifie l'équation

$$\frac{\partial G_i}{\partial t} + \mu(s-1)\frac{\partial G_i}{\partial s} = \lambda(s-1)G_i$$

et de trouver la solution qui répond à l'état initial. On donnera la probabilité pour que le bureau de poste chôme à un instant t.

On montrera que j peut être considéré comme la somme d'une variable binomiale et d'une variable de Poisson, on indiquera la limite ergodique de la loi de répartition de j (lorsque t tend vers l'infini). On en déduira la moyenne $m_i(t)$ et la variance $\sigma_i^2(t)$ du nombre de personnes présentes à un instant t.

*

* *

La seconde équation de Kolmogorov s'écrit :

$$\frac{d\,P_{ij}(t)}{dt} = -(\lambda + j\mu)\,P_{ij}(t) + \lambda\,P_{i,j-1}(t) + \mu(j+1)\,P_{i,j-1}(t)$$

multiplions les deux membres par s^j et sommons de $j = 0$ à l'infini :

$$\sum_{j=o}^{\infty} \frac{d\,P_{ij}(t)}{dt}\,s^j = -\lambda \sum_{j=o}^{\infty} P_{ij}(t)\,s^j + \lambda\,s \sum_{j=1}^{\infty} P_{i,j-1}(t)$$

$$- \mu\,s \sum_{j=1}^{\infty} j\,P_{ij}(t)\,s^{j-1} + \mu \sum_{j=o}^{\infty} (j+1)\,P_{i,j+1}(t) s^{j-2}$$

$$\sum_{j=o}^{\infty} \frac{d\,P_{ij}(t)}{dt}\,s^j = \lambda(s-1) \sum_{j=o}^{\infty} P_{ij}(t)\,s^j + \mu(1-s) \sum_{j=1}^{\infty} j\,P_{ij}(t)\,s^{j-1}$$

A l'aide de la fonction génératrice :

$$\frac{\partial G_i}{\partial t} + \mu(s-1)\,\frac{\partial G_i}{\partial s} = \lambda(s-1)\,G_i$$

Le système associé à cette équation aux dérivées partielles est :

$$dt = \frac{ds}{\mu(s-1)} = \frac{d\,G_i}{\lambda(s-1)G_i}$$

Une intégrale première est :

$$\underline{G_i\,e^{-\frac{\lambda}{\mu}s} = \text{constante}}$$

Une autre intégrale première :

$$\text{Log}\,(1-s) - \mu t = \text{constante} \quad \text{ou}$$

$$\underline{(1-s)\,e^{-\mu t} = \text{constante}}$$

La solution générale de l'équation aux dérivées partielles s'obtient en écrivant qu'une intégrale première du système associé est une fonction arbitraire de l'autre intégrale première - F étant une fonction arbitraire :

$$G_i\,e^{-\frac{\lambda}{\mu}s} = F\left[(1-s)\,e^{-\mu t}\right]$$

La détermination de F se fait en écrivant qu'à l'instant initial :

$$G_i(s,o) \equiv s^i$$
$$F(1-s) = s^i \, e^{-\frac{\lambda}{\mu} s}$$

Par le changement de variable

$$1 - s = u$$
$$F(u) = (1-u)^i \, e^{\frac{\lambda}{\mu}(u-1)}$$

D'où

$$\underline{G_i(s,t) = \left(1 - e^{-\mu t} + s\, e^{-\mu t}\right)^i \, e^{\frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t})(s-1)}}$$

La probabilité pour qu'il n'y ait personne dans le bureau à l'instant t s'obtient en faisant $s = o$ dans l'expression de G_i

$$P_{io} = G(0,t) = (1 - e^{-\mu t})^i \quad e^{-\frac{\lambda}{\mu}(1 - e^{-\mu t})}$$

L'expression de la fonction génératrice montre que le nombre de personnes présentes à l'instant t peut être considéré comme la somme de i variables binomiales (fruit de i tirages indépendants dans une urne à proportion

$$p = e^{-\mu t}$$

et d'une variable de Poisson de paramètre

$$\theta = \frac{\lambda}{\mu}(1 - e^{-\mu t})$$

Lorsque t tend vers l'infini, la loi du nombre de personnes présentes converge vers une loi de Poisson de paramètre $\theta = \frac{\lambda}{\mu}$.

Lorsqu'il n'y a personne à l'instant initial, $i = o$, on a seulement une loi de Poisson

$$\theta = \frac{\lambda}{\mu}(1 - e^{-\mu t})$$

Ce résultat a été obtenu antérieurement (cf. l'exercice ayant déterminé la nombre de bateaux présents dans un port non saturé). Mais ici, du fait que les départs ont une loi exponentielle et non une loi $F(s)$ quelconque, le nombre $N(t)$ de bateaux présents est une chaîne de Markov et le calcul des $P_{ij}(t)$ est possible.

Des résultats précédents, il découle que la moyenne $m_i(t)$ et la variance $\sigma_i^2(t)$ du nombre de personnes présentes à l'instant t sont :

$$m_i(t) = N e^{-\mu t} + \frac{\lambda}{\mu}(1 - e^{-\mu t})$$

$$\sigma_i^2(t) = N e^{-\mu t}(1 - e^{-\mu t}) + \frac{\lambda}{\mu}(1 - e^{-\mu t})$$

E 36 .- FILES D'ATTENTE A N GUICHETS

La question des files d'attente à N guichets est une généralisation du problème des files d'attente sans saturation traité plus haut. Si le régime transitoire est assez lourd à expliciter. Le régime stationnaire est par contre aisé à déterminer.

On envisage N guichets - Les arrivées sont poissonniennes. La probabilité d'arrivée pendant le laps de temps Δt est $\underline{\lambda \Delta t}$. La probabilité de départ est pour chaque client pris en charge à un guichet $\mu \Delta t$. On désigne par $\underline{i}$ le nombre de personnes présentes à l'instant initial dans le bureau de poste et par $\underline{j}$ le nombre de personnes présentes à l'instant t, par $P_{ij}(t)$ la probabilité de transition de i à j pendant le temps t.

Ecrire les secondes équations de Kolmogorov dans les deux cas :

a) - non saturation c'est-à-dire pour $j \leq N-1$

b) - saturation c'est-à-dire pour $j \geq N$.

- Etudier dans les deux cas le régime stationnaire, c'est-à-dire en faisant dans les équations $\frac{d P_{ij}}{dt} = 0$ (Pour simplifier on notera $P_{ij}(t)$ simplement P_j).

- Montrer que dans le cas (b) la solution générale est du type :

(b) $j \geqslant N$ $\qquad P_j = A r^j + B$

on donnera les valeurs de r, A, B.

- Montrer par récurrence que dans le cas (a) la solution est de la forme :

(a) $j \leq N$ $\qquad P_j = \frac{P_o}{j!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j$

- Le raccordement des deux solutions pour $j = N$ donne le rapport $\frac{A}{P_o}$

- Calculer P_o en écrivant que

$$\sum P_j = 1$$

*

a) Non saturation. La seconde équation de Kolmogorov est celle des files d'attente sans saturation ($j + 1 \leq N$).

$$\frac{d\,P_{ij}(t)}{dt} = -(\lambda+j\mu)\,P_{ij}(t) + \mu(j+1)\,P_{i,j+1}(t) + \lambda\,P_{i,j-1}(t) \qquad j \leq N-1$$

en particulier :

$$\frac{d\,P_{io}(t)}{dt} = -\lambda\,P_{io}(t) + \mu\,P_{i1}(t) \qquad j = 0$$

b) Avec saturation.

$$\frac{d\,P_{ij}(t)}{dt} = -(\lambda + N\mu)\,P_{ij}(t) + \mu\,N\,P_{i,j+1}(t) + \lambda\,P_{i,j-1}(t) \qquad j \geq N$$

Etude du régime stationnaire. $\dfrac{d\,P_{ij}(t)}{dt} = 0$

(b) Avec saturation $j \geq N$. On peut satisfaire à l'équation aux différences finies par une fonction du type

$$P_j = A\,r^j + B$$

$$\mu\,N\,r^{j+1} - (\lambda + N\mu)\,r^j + \lambda\,r^{j-1} = 0$$

$$r = \frac{\lambda}{N\mu}$$

La solution générale de l'équation aux différences finies est :

$$P_j = A\left(\frac{\lambda}{N\mu}\right)^j + B$$

Le régime stationnaire exige $\lambda < N\mu$, par ailleurs la relation $\sum_{j=0}^{\infty} P_j = 1$ impose que B soit nul.

(1) $$P_j = A\left(\frac{\lambda}{N\mu}\right)^j$$

En particulier

(2) $$P_N = A\left(\frac{\lambda}{N\mu}\right)^N$$

a) Non saturation $j \leq N-1$

Les équations de Kolmogorov (a) donnent :

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_o \qquad\qquad j = 0$$

$$2\mu\, P_2 - (\lambda + \mu)\, P_1 + \lambda\, P_o = 0 \qquad\qquad j = 1$$

soit

$$P_2 = \frac{P_o}{2\,!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2$$

Montrons que l'on a d'une façon générale

$$P_{j+1} = \frac{P_o}{(j+1)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{j+1}$$

Raisonnons par récurrence, supposons la propriété vraie pour P_j et pour P_{j-1}

$$P_j = \frac{P_o}{j!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j \qquad\qquad P_{j-1} = \frac{P_o}{(j-1)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{j-1}$$

et montrons qu'elle est vraie pour P_{j+1}

L'équation de Kolmogorov donne

$$\mu(j+1)\, P_{j+1} = (\lambda + j\mu)\, P_j - \lambda\, P_{j-1} = \lambda\, P_j + \left\{ j\,\mu\, P_j - \lambda\, P_{j-1} \right\}$$

D'après les expressions supposées de P_j et de P_{j-1} la quantité entre accolades est nulle et

(3) $$P_{j+1} = \frac{\lambda}{\mu}\, \frac{P_j}{j+1} = \frac{P_o}{(j+1)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{j+1} \qquad\qquad j \leq N-1$$

Vraie pour $j = 1$ et $j = 2$ la propriété est vraie pour $j = 3$ et ainsi de suite. elle est générale.

La formule est valable jusqu'à $j = N-1$ on a donc :

(4) $$P_N = \frac{P_o}{N!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^N$$

En égalant les deux valeurs trouvées pour P_N [équations (2) et (4)]

$$P_N = A\left(\frac{\lambda}{N\mu}\right)^N = \frac{P_o}{N!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^N$$

On obtient la valeur de A

(5) $$A = \frac{N^N}{N!} P_o$$

La solution du problème est donc finalement

$$\boxed{\begin{array}{ll} P_j = \dfrac{P_o}{j!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^j & j \leq N \\ P_j = P_o \dfrac{N^N}{N!}\left(\dfrac{\lambda}{N\mu}\right)^j & j \geqslant N \end{array}}$$

Il reste à calculer P_o. On y parvient en écrivant que la somme des probabilités de transition, à partir d'un même état i, est égale à 1.

$$\sum_{j=o}^{\infty} P_j = 1 \qquad \text{c'est-à-dire}$$

$$P_o \left\{ \sum_{j=o}^{N-1} \frac{1}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j + \frac{N^N}{N!} \sum_{j=N}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{N\mu}\right)^j \right\} = 1$$

$$\frac{1}{P_o} = 1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{1}{2!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \dots \frac{1}{(N-1)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{N-1} + \frac{1}{N!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^N \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{N\mu}}$$

E 37. - EVOLUTION D'UNE POPULATION DE BACTERIES

Etant donné une population de bactéries, on admet que chacune des bactéries évolue indépendamment les unes des autres et sans vieillissement. On entend par là que chacune des bactéries présentes à l'instant t peut, pendant l'intervalle de temps $t, t+\Delta t$:

- soit périr avec la probabilité $\alpha_0 \Delta t + 0(\Delta t)$
- soit se scinder en $k = 2,3 \ldots n$ bactéries avec les probabilités respectives :

$$\alpha_k \Delta t + 0(\Delta t)$$

- soit subsister sans modification avec la probabilité $1 - \sum_{k \neq 0} \alpha_k \Delta t = 0(\Delta t)$

La notation $\sum_{k \neq 1} \alpha_k$ signifie que l'on effectue une somme sur les indices 0,2,3... n, à l'exclusion de l'indice 1. $0(\Delta t)$ indique les autres éventualités possibles ayant des probabilités infiniment petites d'ordre supérieur à 1 en Δt. Les α_k sont des constantes.

L'évolution d'une telle population peut, manifestement, se décrire à l'aide d'une chaîne de Markov stationnaire à temps continu. On désignera par $P_{ij}(t)$ la probabilité pour qu'il y ait $\underline{j}$ bactéries au temps t sachant qu'il y en avait $\underline{i}$ au temps 0.

I.-) <u>Former la première équation de Kolmogorov</u> (on prendra garde que, lorsqu'il y a i bactéries, la probabilité pour qu'une scission en k bactéries se produise n'est pas du type $\alpha_k \Delta t$, mais du type $i \alpha_k \Delta t$).

On introduira la fonction génératrice

$$G_i(s,t) = \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(t)\, s^j$$

- Montrer à l'aide de la première équation de Kolmogorov que G_i pour $i \geqslant 1$ vérifie l'équation :

(1) $$\frac{\partial G_i}{\partial t} = - i \sum_{k \neq 1} \alpha_k G_i + i \sum_{k \neq 1} \alpha_k G_{i+k-1}$$

- Montrer par un raisonnement probabiliste simple que l'on a :

(2) $$G_i = (G_1)^i$$

dans la suite, on écrira G au lieu de G_1 et $P_j(t)$ au lieu de $P_{1j}(t)$

- Compte tenu de (2) mettre (1) sous la forme :

(3) $$\frac{\partial G}{\partial t} = \varphi(G)$$

en désignant par $\varphi(s)$ le polynôme :

(4) $$\varphi(s) = \sum_{k \neq 1} \alpha_k s^k - s \sum_{k \neq 1} \alpha_k$$

- Montrer, en passant, que $\varphi(s)$ a, outre la racine $s = 1$, une racine et une seule s_o comprise entre 0 et 1 si $\varphi'(1)$ est positif, qu'elle n'a pas de racine comprise entre 0 et 1 si $\varphi'(1)$ est négatif.

- A l'aide de (3) calculer l'espérance mathématique $m(t)$ et la variance $\sigma^2(t)$ du nombre de bactéries présentes au temps t - sachant qu'il y avait une seule bactérie au temps 0. En déduire l'espérance $m_i(t)$ et la variance $\sigma_i^2(t)$ de ce même nombre lorsque i bactéries sont présentes au temps 0.- Il s'introduit dans ces expressions les constantes $\varphi'(1)$ et $\varphi''(1)$.

- Intégrer l'équation différentielle (3) - et tenant compte de l'expression de G à l'instant $t = 0$ - montrer que $G(s,t)$ est défini par l'équation :

(5) $$t = \int_s^G \frac{dv}{\varphi(v)}$$

<u>II.- Former la seconde équation de Kolmogorov.</u> Montrer que G_i vérifie :

(6) $$\frac{\partial G_i}{\partial t} = \varphi(s) \frac{\partial G_i}{\partial s}$$

- Retrouver à partir de (6) les expressions de l'espérance mathématique $m_i(\ )$ et $\sigma_i^2(t)$ obtenues plus haut.
- Intégrer l'équation (6) dans le cas $i = 1$ (une bactérie présente à l'instant initial) et retrouver l'expression (5)

III.- Lorsque t tend vers l'infini, existe-t-il une limite ergodique ? Examiner les deux cas $\varphi'(1) > 0$ et $\varphi'(1) \leq 0$. Les $P_{ij}(t)$ et par suite les $P_{ij}(t)$ convergent-ils en loi?

- Calculer la probabilité $P_o(t)$ pour qu'il n'y ait plus de bactéries au temps t (sachant qu'il n'y en avait qu'une au temps 0). Montrer que $P_{io}(t) = \left[P_o(t)\right]^i$.

- Montrer que $P_o(t)$ tend vers une limite finie lorsque t tend vers l'infini dans le cas où $\varphi'(1)$ est positif.

- Montrer que $P_o(t)$ tend vers 1 lorsque t tend vers l'infini dans le cas où $\varphi'(1)$ est négatif ou nul. Il en est de même pour $P_{io}(t)$. L'extinction finale est presque certaine.

- Lorsque $\varphi'(1)$ est négatif ou nul, l'extinction du processus relatif à i bactéries à l'instant initial, est presque certaine. On désigne par T_i la variable aléatoire représentant l'instant d'extinction (l'indice i rappelle qu'il y avait i bactéries à l'instant initial). T_i est telle que pour $t \leq T_i$ il y ait un nombre nul de bactéries et pour $t > T_i$ un nombre nul. Montrer que la fonction de répartition $F_i(t)$ de la variable T_i est égale à $P_{io}(t)$.

- Calculer l'espérance mathématique de T_i dans le cas où $\varphi'(1)$ est négatif. On pourra intégrer par parties et montrer que :

$$E(T_i) = \Big\{ t\left[1 - P_{io}(t)\right]\Big\}_{t=0}^{t \to \infty} + \int_0^{\infty} \left[1 - P_{io}(t)\right] dt$$

A l'aide de la solution (5) on montrera que le terme tout intégré est nul et que par suite :

$$E(T_i) = \int_0^1 \frac{1 - z^i}{\varphi(z)} \, dz$$

- on précisera que cette dernière intégrale est bien convergente lorsque $\varphi'(1)$ est négatif.
- on montrera ensuite par la même voie que l'espérance mathématique de T_i n'existe pas lorsque $\varphi'(1)$ est nul.

V.-) On concrétisera les résultats suivants dans une étude de la di-reproduction des bactéries : Pendant l'intervalle t, $t + \Delta t$ chaque bactérie peut :

- soit subsister sans changement avec la probabilité $1 - (\alpha + \beta)\Delta t + o(\Delta t)$
- soit se diviser en deux $\alpha \Delta t + o(\Delta t)$
- soit périr $\beta \Delta t + o(\Delta t)$

La théorie précédente s'applique avec $\alpha_0 = \beta$ $\alpha_2 = \alpha$. On passera en revue les résultats établis d'une façon générale. On explicitera en particulier les valeurs de l'espérance mathématique $m_i(t)$ et de la variance $\sigma_i^2(t)$ du nombre de bactéries présentes à l'instant t, les expressions de $\underline{G(s,t)}$, de $\underline{P_0(t)}$, de $\underline{E(T_i)}$. On pourra calculer les intégrales donnant $E(T_i)$ dans les cas $i = 1$ (une bactérie présente à l'instant initial) et $i = 2$ (deux bactéries présentes à l'instant initial).

- On traitera directement le cas limite $\alpha = \beta$ et on donnera pour ce cas limite l'expression explicite de la loi de probabilité $P_n(t)$ du nombre de bactéries présentes à l'instant t.

*

* *

SE 37.- EVOLUTION D'UNE POPULATION DE BACTERIES

Le problème proposé vise à étudier l'évolution d'une réaction en chaîne à l'aide de l'une ou l'autre des deux équations de Kolmogorov.

Chaque bactérie peut, entre les instants t et $t + \Delta t$ soit

- périr avec la probabilité $\alpha_o \Delta t + 0(\Delta t)$
- soit se scinder en $k = 2, 3 \dots n$ bactéries avec les probabilités respectives $\alpha_k \Delta t + 0(\Delta t)$
- soit subsister sans modification avec la probabilité $1 - \sum_{k \neq 1} \alpha_k \Delta t + 0(\Delta t)$

La notation $\sum_{k \neq 1} \alpha_k$ signifie que l'on effectue une somme sur les indices $0, 2, 3 \dots n$ à l'exclusion de l'indice 1.

I.-) Solution à l'aide de la première équation de Kolmogorov.

Celle-ci s'obtient en énumérant les modifications possibles pendant un intervalle de temps très court Δt au voisinage de l'instant initial.

$$\frac{d\,P_{ij}(t)}{dt} = - i \sum_{k \neq 1} \alpha_k \; P_{ij}(t) + i \sum_{k \neq 1} \alpha_k \; P_{i+k-1, j}\,(t) \qquad (K_1)$$

Il est possible de transformer cette expression, en introduisant la fonction génératrice de la variable j :

$$G_i(s,t) = \sum_{j=o}^{\infty} P_{ij}(t)\, s^j$$

multipliant les deux membres de (K_1) par s^j et sommant de $j = o$ à l'infini, on a pour $i \geqslant 1$.

$$(1) \qquad \frac{\partial G_i}{\partial t} = - i \sum_{k \neq 1} \alpha_k \; G_i + i \sum_{k \neq 1} \alpha_k \; G_{i+k-1}$$

Il suffit de traiter la question pour $i = 1$, car le processus étudié peut être considéré comme la somme de i processus aléatoires indépendants ayant au départ une seule bactérie. La fonction génératrice G_i relative au processus issu de $\underline{i}$ bactéries au départ est donc le produit de i fonctions génératrices $G_1 = G$ relatives à <u>une</u> bactérie au départ

(2) $$G_i = (G_1)^i = G^i$$

On notera que seul l'état $j = o$ est essentiel et absorbant.

L'équation (1) devient ainsi :

$$i\, G^{i-1} \frac{\partial G}{\partial t} = - i \sum_{k \neq 1} \alpha_k \; G^i + i \sum_{k \neq 1} \alpha_k \; G^{i+k-1}$$

soit

$$\frac{\partial G}{\partial t} = - \sum_{k \neq 1} \alpha_k \, G + \sum_{k \neq 1} \alpha_k \, G^k$$

Il peut être commode de désigner par $\varphi(s)$ la fonction :

(3) $$\boxed{\varphi(s) = \sum_{k \neq 1} \alpha_k \, s^k - s \sum_{k \neq 1} \alpha_k}$$

La première équation de Kolmogorov relative au processus à une bactérie au départ s'écrit tout simplement :

(4) $$\boxed{\frac{\partial G}{\partial t} = \varphi(G)} \qquad \underline{G \leqslant 1}$$

a) <u>FONCTIONS $\varphi(s)$</u> - Il est utile de connaître le comportement de la fonction $\varphi(s)$ pour $s \geqslant 0$

$\varphi''(s) = \sum_{k=2}^{m} k(k-1)\, \alpha_k \, s^{k-2}$ est toujours positive, la courbe $\varphi(s)$ tourne sa concavité vers le haut.

Pour $s = o$ $\qquad \varphi(0) = \alpha_o > 0 \qquad \varphi'(0) = - \sum_{k \neq 1} \alpha_k < 0$

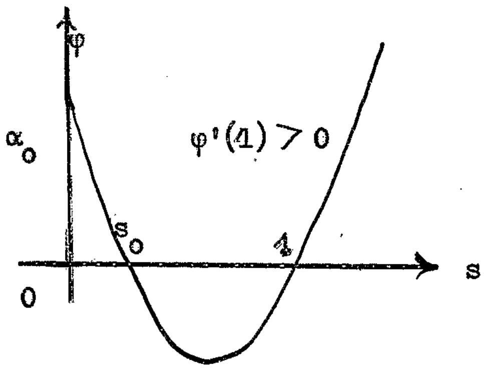
$s = 1$ $\qquad \varphi(1) = 0 \qquad \varphi'(1) = \sum_{k \neq 1} (k-1)\, \alpha_k$

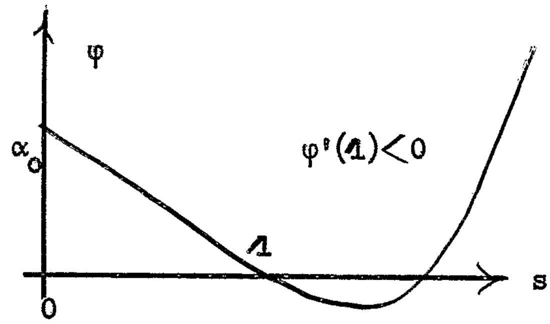
On en conclut que $\varphi(s) = 0$ a toujours deux racines positives et deux seulement.

Si $\varphi'(1) = \sum_{k \neq 1} (k-1)\alpha_k$ est positif — la racine autre que 1 est inférieure à 1

Si $\varphi'(1)$ est négatif — la racine autre que 1 est supérieure à 1.

Si $\varphi'(1)$ est nul, 1 est une racine double





On se rend compte dès à présent que le signe de $\varphi'(1) = \sum_{k \neq 1} (k-1)\alpha_k$ joue un rôle essentiel dans le comportement du processus. Lorsque $\varphi'(1)$ est positif, $\varphi(s)$ <u>s'annule</u> pour une valeur s_o comprise entre 0 et 1. Lorsque $\varphi'(1)$ est négatif $\varphi(s)$ ne s'annule pas entre $\overline{0}$ et 1.

b) <u>ESPERANCE MATHEMATIQUE $m(t)$ et VARIANCE $\sigma^2(t)$ DU NOMBRE DE BACTERIES PRESENTES AU TEMPS t, SACHANT QU'IL N'Y EN AVAIT QU'UNE AU TEMPS 0.</u>

Ce calcul peut se faire à l'aide de l'équation différentielle (4) sans avoir à l'intégrer.

(5) $$m(t) = \sum_{j=1}^{\infty} j\, P_{1j}(t) = \left(\frac{\partial G}{\partial s}\right)_{s=1}$$

$$m_2(t) - m(t) = \sum_{j=2}^{\infty} j(j-1)\, P_{1j}(t) = \left(\frac{\partial^2 G}{\partial s^2}\right)_{s=1} = U(t)$$

D'où

(6) $$\sigma^2(t) = \left(\frac{\partial^2 G}{\partial s^2}\right)_{s=1} + m(t) - m^2(t)$$

Ceci posé, dérivons par rapport à s l'équation différentielle :

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \varphi(G)$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial s \partial t} = \frac{d\varphi}{dG} \cdot \frac{\partial G}{\partial s}$$

faisant $s = 1$ $\left(G(t,1) = \sum_{j=0}^{\infty} P_{1j}(t) = 1 \right)$

$$\frac{dm}{dt} = m\, \varphi'(1)$$

pour $t = 0$, il y a certainement une bactérie, donc $m(0) = 1$, d'où :

(7) $$\boxed{m = e^{t\varphi'(1)}}$$

Pour calculer la variance, dérivons une seconde fois en s :

$$\frac{\partial^3 G}{\partial s^2 \partial t} = \frac{d\varphi}{dG} \frac{\partial^2 G}{\partial s^2} + \frac{d^2\varphi}{dG^2} \left(\frac{\partial G}{\partial s}\right)^2$$

faisant $s = 1$

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \varphi'(1) U = \varphi''(1)\, e^{2t\varphi'(1)}$$

La solution générale de l'équation sans second membre est :

$$U_1 = A\, e^{t\varphi'(1)}$$

Une solution particulière de l'équation avec second membre est :

$$\frac{\varphi''(1)}{\varphi'(1)} e^{2t\varphi'(1)}$$

Par ailleurs pour $t = 0$

$$U(0) = m_2(0) - m(0) = 1 - 1 = 0 \qquad \text{d'où}$$

(8) $$U(t) = \frac{\varphi''(1)}{\varphi'(1)} \left(e^{2t\varphi'(1)} - e^{t\varphi'(1)} \right)$$

(9) $$\boxed{\sigma^2(t) = \frac{\varphi''(1) - \varphi'(1)}{\varphi'(1)} \; e^{2t\varphi'(1)} - e^{t\varphi'(1)}}$$

<u>Remarque 1</u> - $\varphi(s)$ a une racine s_o entre 0 et 1, ou n'en a pas selon que $\varphi'(1)$ est positif ou négatif. Or ces conditions, sont d'après (7) absolument équivalentes à $m(t)$ supérieur ou inférieur à 1.

$\varphi(s) = 0$ racine s_o entre 0 et 1 si $\varphi'(1) > 0$ ou ce qui est équivalent $m(t) > 1$

$\varphi(s) = 0$ n'a pas de racine entre 0 et 1 si $\varphi'(1)$ 0 " " " $m(t) < 1$

<u>Remarque 2</u> - Si l'on avait à l'instant initial non plus une bactérie mais i bactéries, le processus engendré serait la somme de i processus indépendants engendrés par une bactérie. On a donc :

(7bis) $$m_i(t) = i\, m(t)$$

(9bis) $$\sigma_i^2(t) = i\, \sigma^2(t)$$

<u>Expression explicite de la fonction génératrice.</u>

L'expression différentielle (4) s'intègre :

$$dt = \frac{dG}{\varphi(G)}$$

$$t = \int_{C(s)}^{G(s,t)} \frac{dv}{\varphi(v)}$$

A l'instant initial, $t = 0$, $G(s,t)$ est identique à s

$$0 \equiv \int_{C(s)}^{s} \frac{dv}{\varphi(v)}$$

ce qui impose $C(s) \equiv s$

(10) $$\boxed{t = \int_{s}^{G} \frac{dv}{\varphi(v)}}$$

II.- SOLUTION A L'AIDE DE LA SECONDE EQUATION DE KOLMOGOROV.

L'inventaire des modifications possibles pendant un intervalle de temps petit voisin de l'état final conduit à la seconde équation de Kolmogorov :

$$\frac{d\,P_{ij}(t)}{dt} = -\,j \sum_{k \neq 1} \alpha_k \, P_{ij}(t) + \sum_{k \neq 1} \alpha_k (j-k+1)\, P_{i,\,j-k+1}(t) \qquad (K_2)$$

De même qu'il a été fait pour (K_1), on multiplie K_2 par s^j et on somme de $j = 0$ à l'infini :

$$\sum_{j=0}^{\infty} s^j \frac{d\,P_{ij}(t)}{dt} = -\,s \sum_{k \neq 1} \alpha_k \sum_{j=1}^{\infty} j\, P_{ij}(t) s^{j-1} + \sum_{k \neq 1} \alpha_k\, s^k \sum_{j=k}^{\infty} (j-k+1)\, P_{i,\,j-k+1}(t)\, s^{j-k}$$

La dernière sommation est faite à partir de $j = k$ car évidemment les passages de l'état i à un état d'indice négatif sont impossibles. En effectuant le changement de variable

$$j - k + 1 = j'$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} s^j \frac{d\,P_{ij}(t)}{dt} = -\,s \sum_{k \neq 1} \alpha_k \sum_{j=1}^{\infty} j\, P_{ij}(t)\, s^{j-1} + \sum_{k \neq 1} \alpha_k\, s^k \sum_{j'=1}^{\infty} j'\, P_{i,j'}(t) s^{j'-1}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} s^j \frac{d\,P_{ij}(t)}{dt} = \left\{ -\,s \sum_{k \neq 1} \alpha_k + \sum_{k \neq 1} \alpha_k\, s^k \right\} \sum_{j=1}^{\infty} j\, P_{ij}(t)\, s^{j-1}$$

En introduisant la fonction $\varphi(s)$ définie en (3) :

$$\boxed{\frac{\partial G_i}{\partial t} = \varphi(s) \frac{\partial G_i}{\partial s}} \qquad (11)$$

A la différence de l'équation (4) qui faisait intervenir la fonction G, (11) fait intervenir la fonction G_i.

ESPERANCE MATHEMATIQUE ET VARIANCE $m_i(t)$ et $\sigma_i^2(t)$

Même méthode que plus haut, on dérive (11) par rapport à s :

$$\frac{\partial^2 G_i}{\partial s \partial t} = \varphi'(s) \frac{\partial G_i}{\partial s} + \varphi(s) \frac{\partial^2 G_i}{\partial s^2} \tag{12}$$

faisant $s = 1$ $\qquad \varphi(1) = 0$ $\qquad$ comme il a été vu plus haut.

$$\frac{dm_i}{dt} = m_i \, \varphi'(1)$$

Comme

$$m_i(0) = i$$

$$\underline{m_i(t) = i \, e^{t \varphi'(1)}}$$

Dérivant une nouvelle fois (12) :

$$\frac{\partial^3 G_i}{\partial s^2 \partial t} = \varphi''(s) \frac{\partial G_i}{\partial s} + 2 \varphi'(s) \frac{\partial^2 G_i}{\partial s^2} + \varphi(s) \frac{\partial^3 G_i}{\partial s^3}$$

avec $s = 1$ et posant comme plus haut $\left(\frac{\partial^2 G_i}{\partial s^2}\right) = U_i(t)$

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} - 2 \varphi'(1) U_i = i \varphi''(1) \, e^{t\varphi'(1)}$$

$$U_i(t) = C \, e^{2t\varphi'(1)} - i \frac{\varphi''(1)}{\varphi'(1)} \, e^{t\varphi'(1)}$$

pour $t = 0$ $\quad U_i(0) = i^2 - i$ $\qquad$ d'où $\quad C = i^2 + i \dfrac{\varphi''(1) - \varphi'(1)}{\varphi'(1)}$

$$\sigma_i^2(t) = U_i(t) + m_i(t) - m_i^2(t)$$

$$\underline{\sigma_i^2(t) = i \frac{\varphi''(1) - \varphi'(1)}{\varphi'(1)} \left(e^{2t\varphi'(1)} - e^{t\varphi'(1)} \right)}$$

Les formules 7 bis et 9 bis ont été retrouvées.

EXPRESSION EXPLICITE DE LA FONCTION GENERATRICE.

A l'équation différentielle

$$\frac{\partial G_i}{\partial t} - \varphi(s)\frac{\partial G_i}{\partial s} = 0$$

correspond l'équation associée

(12) $$dt = -\frac{ds}{\varphi(s)}$$

La théorie des équations aux dérivées partielles linéaires sans second membre indique que l'intégrale générale de (11) est une fonction arbitraire de l'intégrale première de l'équation associée (12). En exprimant la propriété sous forme inverse, on peut écrire :

(13) $$F(G_i) = t + \int_0^s \frac{dv}{\varphi(v)}$$

D'après (2)

$$G_i = (G)^i \qquad (2)$$

Appliquant (13) au processus ne comptant qu'une bactérie à l'instant initial. La fonction G est, à l'origine identique à s :

$$t = 0 \qquad F(s) = \int_0^s \frac{dv}{\varphi(v)}$$

D'où la solution de (13) pour $i = 1$:

$$\int_0^G \frac{dv}{\varphi(v)} = t + \int_0^s \frac{dv}{\varphi(v)}$$

(10) $$\boxed{t = \int_s^G \frac{dv}{\varphi(v)}}$$

Ce qui avait déjà été établi à l'aide de la première équation de Kolmogorov.

III.- PRINCIPALES CARACTERISTIQUES DE L'EVOLUTION DES BACTERIES.

Les principales propriétés ressortent de l'intégrale (10) sans qu'il soit besoin de l'expliciter. On rappelle que le processus à 1 bactérie à l'instant initial a pour fonction génératrice :

$$G(s,t)$$

et le processus à i bactéries

$$G_i(s,t) = G^i$$

1°) Lorsque t tend vers l'infini, existe-t-il une limite ergodique ?

Si $\varphi'(1) > 0$ la fonction rationnelle écrite sous le signe d'intégration admet un pôle $s_o < 1$

$$t \longrightarrow \infty \qquad G \longrightarrow s_o \qquad G_i \longrightarrow (s_o)^i$$

Si $\varphi'(1) \leq 0$ la fonction rationnelle admet 1 pour pôle (ce pôle est double si $\varphi'(1) = 0$) et pas de pôle entre 0 et 1.

$$t \longrightarrow \infty \qquad G \longrightarrow \quad G_i \longrightarrow 1$$

G et par suite G_i ne tendent pas vers une loi. Les $P_{ij}(t)$ ne convergent pas en loi.

2°) Probabilité pour qu'il n'y ait plus de bactérie au temps t.

Notations analogues : $P_o(t)$ s'il n'y a qu'une bactérie à l'instant initial. $P_{io}(t)$ s'il y en a i.

$P_{io}(t)$ et $P_o(t)$ s'obtiennent en faisant $s = 0$ respectivement dans G_i et G.

donc :

(14) $$P_{io}(t) = \left[P_o(t) \right]^i$$

$P_o(t)$ est défini par

(15) $$t = \int_0^{P_o} \frac{dv}{\varphi(v)}$$

Par un raisonnement strictement identique à celui du 1°) on a les conclusions :

$$\text{Si}\ \begin{cases} \varphi'(1) > 0 & t \longrightarrow \infty \qquad P_o(t) \longrightarrow s_o < 1 \qquad P_{io}(t) \longrightarrow s_o^i < 1 \\ \varphi'(1) \leq 0 & t \longrightarrow \infty \qquad P_o(t) \longrightarrow P_{io}(t) \longrightarrow 1 \end{cases}$$

l'extinction finale est presque certaine.

3°) Etude de l'instant d'extinction T_i

Soit T_i la variable aléatoire représentant l'instant d'extinction lorsque $\varphi'(1) \leq 0$ (variable telle que pour $t \leq T_i$ il y ait un nombre non nul de bactéries et pour $t > T_i$ un nombre nul) et soit $F_i(t)$ sa fonction de répartition.

Par définition $\quad F_i(t) = \text{Prob}\left\{ T_i < t \right\}$

Or $\quad \text{Prob}\left\{ T_i < t \right\} = \text{Prob}\left\{ j(t) = 0 \right\} = P_{io}(t)$

Donc

(16) $$F_i(t) = P_{io}(t)$$

Bien entendu l'indice i indique le nombre de bactéries présentes à l'instant initial.

4°) Espérance mathématique de T_i $(\varphi'(1) \leq 0)$

On a par définition $\quad E(T_i) = \int_0^\infty t \, \frac{d\,P_{io}(t)}{dt}\, dt$

Par intégration par parties :

$$E(T_i) = \left\{ t\left[1 - P_{io}(t)\right]\right\}^{t \to \infty} + \int_0^\infty \left[1 - P_{io}(t)\right] dt$$

Or d'après (14) et (15) on peut prendre la représentation paramétrique :

$$t = \int_o^z \frac{dv}{\varphi(v)} \qquad P_{io}(t) = z^i \qquad dt = \frac{dz}{\varphi(z)}$$

(17) $$E(T_i) = \left\{ (1 - zi) \int \frac{dv}{\varphi(v)} \right\}_{z=o}^{z \to 1} + \int_o^{z \to 1} \frac{1 - z^i}{\varphi(z)}\, dz$$

Nous distinguons deux cas $\varphi'(1) < 0$ et $\varphi'(1) = 0$

a) <u>$\varphi'(1) < 0$</u> La fraction rationnelle admet 1 pour pôle simple, au voisinage de 1 elle est infinie et équivalente à :

$$v \longrightarrow 1 \qquad \frac{1}{\varphi(v)} \sim - \frac{1}{\varphi'(1)} \cdot \frac{1}{1-v}$$

D'où

$$z \longrightarrow 1 \qquad \int_0^z \frac{dv}{\varphi(v)} \sim - \frac{1}{\varphi'(1)} \operatorname{Log}(1-z)$$

Par ailleurs $1 - z^i$ est un infiniment petit équivalent à :

$$z \longrightarrow 1 \qquad 1 - z^i \sim i(1-z)$$

$$z \longrightarrow 1 \qquad (1 - z^i) \int_0^z \frac{dv}{\varphi(v)} \sim - \frac{i}{\varphi'(1)} (1-z) \operatorname{Log}(1-z) \longrightarrow 0$$

Quant à l'intégrale

$$\int_0^{z \to 1} \frac{1 - z^i}{\varphi(z)} dz$$

elle est convergente lorsque $z \longrightarrow 1$ car la quantité <u>sous le signe d'intégration reste finie</u> lorsque z tend vers 1 :

$$z \longrightarrow 1 \qquad 1 - z^i \sim i(1-z) \qquad\qquad \frac{1}{\varphi'(z)} \sim - \frac{1}{\varphi'(1)} \quad \frac{1}{1-z}$$

$$z \longrightarrow 1 \qquad \frac{1 - z^i}{\varphi(z)} \longrightarrow - \frac{i}{\varphi'(1)} \quad \text{quantité finie.}$$

On a donc finalement :

(18) $$\boxed{\varphi'(1) < 0 \qquad E(T_i) = \int_0^1 \frac{1 - z^i}{\varphi(z)} dz}$$

b) $\varphi'(1) = 0$ La fraction rationnelle admet 1 pour pôle double, au voisinage de 1, elle est infinie et équivalente à :

$$\frac{1}{\varphi(z)} \sim \frac{2}{\varphi''(1)} \; \frac{1}{(1-z)^2}$$

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{z=1} \frac{1-z^i}{\varphi(z)}\, dz$ diverge car

$$z \longrightarrow 1 \qquad \frac{1-z^i}{\varphi(z)} \sim \frac{i}{\varphi''(1)} \; \frac{1-z}{(1-z)^2} = \frac{i}{\varphi''(1)} \; \frac{1}{1-z}$$

<u>$E(T_i)$ n'existe pas lorsque $\varphi'(1) = 0$</u>

RECAPITULONS LES PRINCIPAUX RESULTATS.

I.- Le polynôme $\varphi(s) = \sum_{k \neq 1} \alpha_k s^k - s \sum_{k \neq 1} \alpha_k$

a une racine s_o comprise entre 0 et 1 si $\varphi'(1) > 0$, si $\varphi'(1) < 0$ il n'a pas de racine comprise entre 0 et 1.

II.- L'espérance mathématique et la variance du nombre de bactéries à l'instant t (i bactéries présentes à l'instant initial) :

$$\begin{cases} m_i(t) = i\, e^{t\,\varphi'(1)} \\ \sigma_i^2(t) = i\, \dfrac{\varphi''(1) - \varphi'(1)}{\varphi'(1)} \left(e^{2t\,\varphi'(1)} - e^{t\,\varphi'(1)} \right) \end{cases}$$

III.- La fonction génératrice $G_i(s,t)$ est définie ainsi (i bactéries présentes à l'instant t).

$$G_i = G_1^i = G \qquad \text{avec} \quad t = \int_s^G \frac{dv}{\varphi(v)}$$

IV.- Les $P_{ij}(t)$ ne convergent pas en loi. Si $\varphi'(1) > 0$ $G \longrightarrow s_o$, si $\varphi'(1) \leq 0$ $G \longrightarrow 1$ lorsque t tend vers l'infini.

V.- La probabilité pour qu'il n'y ait plus de bactérie à l'instant t : $P_{io}(t)$ est calculée par :

$$P_{io}(t) = \left[P_{10}(t) \right]^i = P_o^i \qquad \text{avec} \quad t = \int_o^{P_o} \frac{dv}{\varphi(v)}$$

Si $\varphi'(1) > 0$ $t \longrightarrow \infty$ $P_o(t) \longrightarrow s_o$

$\varphi'(1)$ $0 \leq t \longrightarrow \infty$ $P_o(t) \longrightarrow 1$: l'extinction finale est presque certaine.

VI.- Si $\varphi'(1) < 0$ l'espérance mathématique de l'instant d'extinction (i bactéries à l'instant initial) est donnée par :

$$E(T_i) = \int_o^1 \frac{1 - z^i}{\varphi(z)}\, dz$$

Si $\varphi'(1) = 0$ cette espérance mathématique n'existe pas.

APPLICATION - Di-Reproduction des bactéries : Pendant l'intervalle de temps t, $t+\Delta t$ chaque bactérie peut

- soit subsister sans changement avec la probabilité $1-(\alpha+\beta)\Delta t + o(\Delta t)$
- soit se diviser en deux " " $\alpha\Delta t + o(\Delta t)$
- soit périr " " $\beta\Delta t + o(\Delta t)$

La théorie précédente s'applique avec $\alpha_0 = \beta$ $\alpha_2 = \alpha$. Passons en revue les points mentionnés à l'instant.

I)
$$\varphi(s) = \alpha s^2 - (\alpha+\beta)s + \beta = (1-s)(\beta-\alpha s)$$

$$\varphi'(1) = \alpha - \beta \qquad s_0 = \frac{\beta}{\alpha} < 1 \quad \text{si} \quad \alpha > \beta$$

$$\varphi''(1) = 2\alpha$$

II)
$$\begin{cases} m_i(t) = i\, e^{(\alpha-\beta)t} \\ \sigma_i^2(t) = i\,\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\left(e^{2(\alpha-\beta)t} - e^{(\alpha-\beta)t}\right) \end{cases}$$

III)
$$t = \int_s^G \frac{dv}{\alpha v^2-(\alpha+\beta)v+\beta} = \int_s^G \frac{dv}{(1-v)(\beta-\alpha v)} = \frac{1}{\alpha-\beta}\int_s^G \frac{\alpha\, dv}{\beta-\alpha v} - \frac{dv}{1-v}$$

$$(\alpha-\beta)t = \left\{ \operatorname{Log}\frac{1-v}{\beta-\alpha v}\right\}_s^G = \operatorname{Log}\left(\frac{1-G}{\beta-\alpha G}\cdot\frac{\beta-\alpha s}{1-s}\right)$$

$$\frac{1-G}{\beta-\alpha G} = \frac{1-s}{\beta-\alpha s}\, e^{(\alpha-\beta)t} \qquad G(s,t) = \frac{1-e^{(\alpha-\beta)t} - s\left[\frac{\alpha}{\beta} - e^{(\alpha-\beta)t}\right]}{1-\frac{\alpha}{\beta}e^{(\alpha-\beta)t} - \frac{\alpha}{\beta}s\left[1-e^{(\alpha-\beta)t}\right]}$$

<u>Dans le cas particulier $\alpha = \beta$,</u> on a directement :

$$\alpha t = \int_s^G \frac{dv}{(1-v)^2} = \left[\frac{1}{1-v}\right]_s^G = \frac{G-s}{(1-s)(1-G)} \qquad G(s,t) = \frac{\alpha t + s(1-\alpha t)}{1+\alpha(1-s)t}$$

que l'on peut retrouver directement en faisant un passage à la limite sur l'expression générale.

IV.- Les $P_{ij}(t)$ ne convergent pas en loi. Si $\alpha > \beta$ pour $t \longrightarrow \infty$ $G \longrightarrow \frac{\beta}{\alpha}$

Si $\alpha \leq \beta$ " $G \longrightarrow 1$

V.- Si $\alpha > \beta$ $P_o(t) = \dfrac{1 - e^{(\alpha-\beta)t}}{1 - \frac{\alpha}{\beta} e^{(\alpha-\beta)t}}$ tend vers $\frac{\beta}{\alpha}$. Si $\alpha \leq \beta$, $P_o(t)$ tend vers 1: l'exécution finale est presque certaine.

VI.- On a l'expression explicitée de $P_o(t)$, en faisant $s = 0$ dans l'expression générale de $G(s,t)$:

$$P_o(t) = \frac{1 - e^{(\alpha-\beta)t}}{1 - \frac{\alpha}{\beta} e^{(\alpha-\beta)t}}.$$

On vérifie, lorsque t tend vers 0, sur cette expression les résultats généraux :

$$E(T_i) = \int_0^1 \frac{1 - z^i}{(1-z)\,(\beta - \alpha z)}\, dz \qquad \underline{\alpha < \beta}$$

Donnons les expressions pour

- <u>1 bactérie présente à l'instant initial : $i = 1$</u>

$$E(T_1) = \int_0^1 \frac{dz}{\beta - \alpha z} = \frac{1}{\alpha} \operatorname{Log}\left(\frac{\beta}{\beta - \alpha}\right)$$

- <u>2 bactéries présentes à l'instant initial : $i = 2$</u>

$$E(T_2) = \int_0^1 \frac{1 - z}{\beta - \alpha z}\, dz = \frac{\alpha + \beta}{\alpha} \int_0^1 \frac{dz}{\beta - \alpha z} - \frac{1}{\alpha} \int_0^1 dz = \frac{1}{\alpha} \left\{ \frac{\alpha + \beta}{\alpha} \operatorname{Log}\left(\frac{\beta}{\beta - \alpha}\right) - 1 \right\}$$

Ainsi que l'a montré la théorie générale, les deux espérances mathématiques n'existent pas pour $\alpha = \beta$.

On obtient explicitement la loi de probabilité $P_n(t)$ du nombre de particules présentes à l'instant t, en développant en s^n la fonction génératrice $G(s,t)$.

a) $\alpha = \beta$

$$G(s,t) = \frac{\alpha t + s(1 - \alpha t)}{1 + \alpha t - s\,\alpha t}$$

Pour alléger les notations, il est commode d'introduire la probabilité pour qu'il n'y ait plus de bactérie à l'instant t

$$P_o(t) = \frac{\alpha t}{1 + \alpha t} \qquad Q_o(t) = 1 - P_o(t) = \frac{1}{1 + \alpha t}$$

$$G(s,t) = \frac{\frac{\alpha t}{1+\alpha t} + \frac{1-\alpha t}{1+\alpha t}s}{1 - \frac{\alpha t}{1+\alpha t}s} = \frac{P_o + (Q_o - P_o)s}{1 - P_o s} = \left[P_o + (Q_o - P_o)s\right] \sum_{n=o}^{\infty} P_o^n \; s^n$$

$$G(s,t) = P_o + \sum_{n=1}^{\infty} P_o^{n-1}\left(P_o^2 + Q_o - P_o\right) s^n = P_o + \sum_{n=1}^{\infty} P_o^{n-1} (1 - P_o)^2 \; s^n$$

$$G(s,t) = P_o + Q_o^2 \sum_{n=1}^{\infty} P_o^{n-1} \; s^n$$

d'où

$$\boxed{P_n(t) = Q_o^2 \; P_o^{n-1} = \frac{(\alpha t)^{n-1}}{(1+\alpha t)^{n+1}}}$$

b) Cas général $\alpha \neq \beta$ La méthode est absolument analogue :

$$G(s,t) = \frac{\beta\left[1 - e^{(\alpha-\beta)t}\right] - s\left[\alpha - \beta e^{(\alpha-\beta)t}\right]}{\beta - \alpha e^{(\alpha-\beta)t} - \alpha s\left[1 - e^{(\alpha-\beta)t}\right]}$$

Désignant encore par $P_o(t)$ la probabilité pour qu'il n'y ait plus de bactéries à l'instant t :

$$P_o(t) = \frac{\beta\left[1 - e^{(\alpha-\beta)t}\right]}{\beta - \alpha e^{(\alpha-\beta)t}} \qquad Q_o(t) = 1 - P_o(t)$$

$$G(s,t) = \frac{P_o + \left[Q_o - \frac{\alpha}{\beta} P_o\right] s}{1 - \frac{\alpha}{\beta} P_o s} = \left[P_o + \left(Q_o - \frac{\alpha}{\beta} P_o\right) s\right] \sum_{n=o}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{\beta} P_o\right)^n s^n$$

$$G(s,t) = P_o + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha P_o}{\beta}\right)^{n-1} \left(\frac{\alpha}{\beta} P_o^2 + Q_o - \frac{\alpha}{\beta} P_o\right) s^n$$

$$G(s,t) = P_o + Q_o\left(1 - \frac{\alpha}{\beta} P_o\right) \sum_{n=1} \left(\frac{\alpha P_o}{\beta}\right)^{n-1} s^n$$

d'où

$$\boxed{P_n(t) = Q_o\left(1 - \frac{\alpha}{\beta} P_o\right)\left(\frac{\alpha P_o}{\beta}\right)^{n-1}}$$