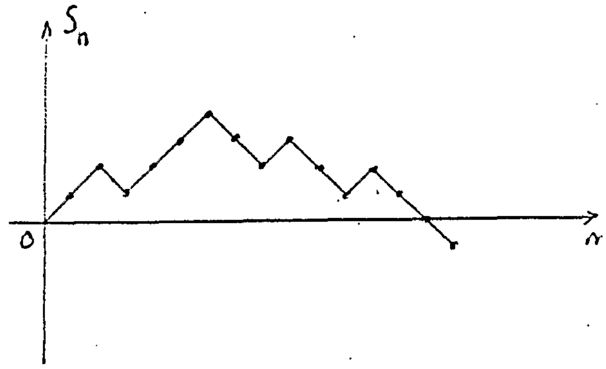
LE JEU DE PILE OU FACE.

1ère QUESTION : A chaque instant $t = 1, 2, \quad , N$, deux joueurs A et B jouent à pile ou face, chaque fois que A gagne, B lui donne 1, et vice-versa; on appelle S_n le gain de A (positif ou négatif) à l'instant $_n$: on peut représenter la marche du jeu par un "chemin" qui joint par des segments de droite les points $(_n, S_n)$ du plan.

a) sachant que les tirages sont indépendants et que les probabilités de tomber sur pile ou face sont 1/2, déterminer les évènements élémentaires et leurs probabilités. (relier les évènements élémentaires et les chemins).



b) calculer: $p_{n,k} = P\left(S_n = k\right)$ $\left(= \dfrac{C_n^{\frac{k+n}{2}}}{2^n}\right.$ si k et n sont de même parité, O sinon)

2è QUESTION : a) montrer que le nombre de chemins allant de (o,h) à (n,k) en rencontrant l'axe des (t) (h et k $>$ o) est égal au nombre de chemins allant de (o,-h) à (n,k).

b) montrer que la probabilité pour que S_p soit différen de o pour $1 \leqslant p \leqslant 2_n$ est égale à $u_{2n} = p_{2n,o}$

c) calculer f_{2n} = probabilité pour que le premier retou à l'origine se fasse à l'instant 2n $(S_{2n} = o,\ S_p \neq o \quad 1 \leqslant p \leqslant 2n - 1)$

$$\left(f_{2n} = \frac{1}{2n-1}\ u_{2n} \right)$$

.../

3ème QUESTION : a) calculer la probabilité $\varphi_{n,r}$ pour qu'on atteigne pour la 1ère fois r à l'instant n

$(S_p < r$ pour $1 \leq p \leq n-1,\quad S_n = r)$

$$\left(\varphi_{n,r} = \frac{1}{2}\left[p_{n-1,r-1} - p_{n-1,r+1}\right]\right)$$

b) montrer que la probabilité pour que le $r^{\text{ième}}$ retour à l'origine se fasse à l'instant $2n$ est $\varphi_{2n-r,r}$ (raisonner par récurrence sur r)

4ème QUESTION : a) montrer que si $\alpha_{2n,2k}$ est la probabilité pour que la dernière visite à 0 entre 0 et 2_n se passe à l'instant 2_k, on a $\alpha_{2n,2k} = u_{2n-2k}\, u_{2k}$

b) posons $x_k = \frac{k}{n}$; chercher la limite lorsque $n \to \infty$, x_k restant fixe, de $\alpha_{2n,2k}$, à l'aide de la formule de Stirling.

On trouve $\alpha_{2n,2k} \sim \frac{1}{n\pi} \frac{1}{\sqrt{x_k(1-x_k)}}$; déterminer l'aspect de cette courbe, et noter le caractère un peu surprenant du résultat.

c) on appelle $h_{2n,2k}$ la probabilité pour que entre 0 et 2n, le "chemin" soit au-dessus de l'axe des (t) pendant le temps 2k.

montrer que $h_{2n,2k} = h_{2n,2n-2k}$

et que $h_{2n,o} = u_{2n}$

d) montrer par récurrence sur n que $\underbrace{h_{2n,2k}}_{= \alpha_{2n,2k}}$ (dire qu'un premier retour à l'origine a lieu à l'instant 2_q, exprimer $h_{2n,2k}$ en fonction des $h_{2n-2q,2k}$ et $h_{2n-2q,2k-2q}$ et raisonner par récurrence sur n).

.../.

Remarquer le résultat obtenu pour n grand (à l'aide du §b) = il y a des probabilités assez grandes pour que l'un des joueurs soit gagnant pendant les 9/10 du temps, par exemple.

Les questions 3 et 4 sont indépendantes.

=:=:=:=:=:=:=:=:=:=