ECOLE NATIONALE SUPERIEURE
DES MINES DE PARIS

C-17

COURS DE PROCESSUS STOCHASTIQUES

EXAMEN ECRIT

- *Les élèves sont autorisés à faire usage du cours polycopié.*

-o-o-o-o-o-o-o-o-

Loi du temps de séjour dans l'état 1

-o-o-o-o-o-o-o-o-

On considère une chaîne de MARKOV homogène, à temps continu, à 2 états 0 et 1: par exemple, il s'agit d'une machine fonctionnant par intermittence, l'état 1 désignant l'état de marche et l'état 0 l'état d'arrêt. La probabilité de transition de l'état 0 à l'état 1 (remise en marche) est $\lambda \Delta t + O(\Delta t)$ pendant le temps Δt très petit. De même la probabilité de transition de 1 à 0 (arrêt de la machine) est de la forme $\mu \Delta t + O(\Delta t)$. La matrice de transition est alors :

(1)
$$P(t) = \begin{matrix} q + pe^{-\alpha t} & p - pe^{-\alpha t} \\ q - qe^{-\alpha t} & p + qe^{-\alpha t} \end{matrix}$$

avec

(2)
$$\begin{cases} \alpha = \lambda+\mu \\ p = \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu} \\ q = \dfrac{\mu}{\lambda+\mu} \end{cases}$$

N.B - On ne demande pas de démontrer les relations (1) et (2) qui ont fait l'objet d'un exercice antérieur.

...

On s'intéresse à la loi du temps de séjour du système dans l'état 1 (loi du temps de fonctionnement effectif de la machine). On peut étudier cette loi de deux points de vue bien différents :

- ou bien on se donne un temps de séjour θ dans l'état 1, et on étudie la variable aléatoire $T(\theta)$ représentant l'instant où la durée de fonctionnement effectif de la machine, comptée depuis l'origine $t = 0$, atteint la valeur numérique θ choisie à l'avance ; ici θ est un paramètre, $T(\theta)$ est aléatoire

- ou bien, au contraire, on se donne a priori un intervalle de temps $(0, t)$, et on étudie la variable aléatoire $\Theta(t)$ représentant le temps passé dans l'état 1 entre les instants 0 et t. Ici, donc, c'est le temps t réel qui est un paramètre, et la durée de fonctionnement effectif $\Theta(t)$ qui est aléatoire.

PREMIERE PARTIE : *Etude de $T(\theta)$*

Dans cette première partie, on se placera dans l'hypothèse où *le système est dans l'état 1* à l'instant initial. Les probabilités demandées sont des probabilités conditionnelles relatives à cet état initial

1°) Montrer que la variable aléatoire $T(\theta)$ constitue, relativement à son argument θ, un processus stochastique à accroissements indépendants et stationnaires (établir ce point sans calcul, par un raisonnement rigoureux)

2°) On pose $T(\theta) = \theta + \tau(\theta)$. La variable $\tau(\theta)$ représente le temps passé par le système dans l'état 0 entre l'instant initial $t = 0$ et l'instant aléatoire $T(\theta)$. $\tau(\theta)$ constitue également un processus à accroissements indépendants et stationnaires.

On utilisera un graphique en axes (θ,τ) représentant, sous la forme d'un "*escalier aléatoire*" la marche du système depuis $t = 0$:

Les paliers horizontaux représentent les séjours successifs dans l'état 1, et sont séparés par des paliers verticaux représentant les séjours dans l'état 0. L'échelle des temps réels est donnée par les droites d'équation $\theta+\tau = t$.

En projection sur l'axe des θ, les divers séjours dans l'état 0 se manifestent comme des points de discontinuité. Montrer que ces points de discontinuité dessinent, sur l'axe des θ, *un processus poissonien*.

3°) La variable $\tau(\theta)$ est l'ordonnée (aléatoire) du point où l'escalier aléatoire atteint l'abscisse (donnée) θ. Former la fonction caractéristique de $\tau(\theta)$. En déduire que $T(\theta) = \theta+\tau(\theta)$ admet la fonction caractéristique

$$\Phi(u\,;\theta) = \exp\left(i\,u\,\theta-\mu\,\theta+\frac{\mu\theta}{1-\frac{iu}{\lambda}}\right)$$

4°) Calculer l'espérance mathématique $m(\theta)$ et la variance $\sigma^2(\theta)$ de $T(\theta)$. En déduire que $\frac{T(\theta)}{\theta}$ converge en moyenne quadratique vers $1/p$ lorsque θ tend vers l'infini ($p = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$) est la probabilité ergodique de l'état 1)

DEUXIEME PARTIE : Etude de θ (t)

On désigne par $\theta(t)$ la durée (aléatoire) du séjour dans l'état 1 entre l'instant initial et l'instant t (donné). On désignera par :

$\Phi_o(u\ ;\ t)$ la fonction caractéristique de $\theta(t)$ prise conditionnellement lorsque l'état initial est l'état 0

$\Phi_1(u\ ;\ t)$ la fonction caractéristique de $\theta(t)$ lorsque l'état initial est l'état 1

$\Phi\ (u\ ;\ t) = q\ \Phi_o + p\ \Phi_1$ cette même fonction caractéristique lorsque l'état initial, aléatoire, est 1 ou 0 avec les probabilités $p = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$ et $q = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$

1°) Montrer que Φ_o et Φ_1 vérifient le système différentiel :

$$\frac{\partial\ \Phi_1}{\partial\ t} = -\ \mu\ \Phi_1 + \mu\ \Phi_o + i\ u\ \Phi_1$$

$$\frac{\partial\ \Phi_o}{\partial\ t} = -\ \lambda\Phi_o + \lambda\Phi_1$$

En déduire que Φ vérifie la relation

$$(3) \qquad \frac{\partial\ \Phi}{\partial\ t} = i\ u\ p\ \Phi_1$$

On ne demande pas d'intégrer ces équations différentielles. Pour les établir, on suggère de montrer que l'on a :

$$\Phi_1(u_1\ t) = (1 - \mu\Delta\ t)\ e^{iu\Delta t}\ \ \Phi_1(u_1 t - \Delta t) + \mu\Delta t\ \Phi_o\ (u_1\ t) + O(\Delta t)$$

et une relation analogue en Φ_o (on pourra s'inspirer de la démonstration de la première équation de Kolmogorov)

...

2°) Calculer les espérances mathématiques $m_1(t)$, $m_o(t)$ et $m(t)$ associée aux lois ϕ_1 , ϕ_o et ϕ.

3°) Calculer le moment d'ordre 2 associé à la loi Φ(on ne demande pas de calculer ceux des lois ϕ_1 et ϕ_o ; on suggère d'utiliser la relation (3) pour réduire les calculs au minimum)

En déduire la variance $\sigma^2(t)$ de $\theta(t)$, et montrer que la variable $\frac{1}{t}\,\theta(t)$ converge en moyenne quadratique vers $p = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$ lorsque t augmente indéfiniment.

-=-=-=-=-=-=-=-=-

MINISTÈRE DE L'INDUSTRIE

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE

DES

MINES

Paris, le

Boulevard Saint-Michel, 60 (VI^e)
Téléphone : Danton 63-60

Examen de processus stochastiques

Durée : 3 heures

Les élèves sont autorisés à faire usage des cours polycopiés.

Dans ce qui suit, on désigne par $X(t)$ l'abscisse au temps $t > 0$ d'une particule animée d'un mouvement brownien sur l'axe des x, avec la condition initiale $X(0) = 0$, par $f_t(x)$ la densité de probabilité de cette variable, par $F_t(x)$ sa fonction de répartition, et par $\Phi_t(u)$ sa fonction caractéristique. On suppose que $X(t)$ est le processus de Wiener-Lévy défini par :

$$f_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi c t}}\, e^{-\frac{x^2}{2ct}} \quad , \quad \Phi_t(u) = e^{-\frac{1}{2} c t u^2}$$

Enfin, on admettra que la fonction $t \to X(t)$ est (presque sûrement) une fonction continue.

Exercice 1/

Particule instable.

1) - On suppose que la particule donne lieu à un phénomène observable au temps aléatoire $S \geq 0$, et que la variable aléatoire S est indépendante des positions successives occupées par la particule, et admet la densité de probabilité $\lambda e^{-\lambda s}$ pour $s \geq 0$ (et 0 pour $s < 0$), λ étant une constante positive donnée. On désigne par $Z = X(S)$ l'abscisse de la particule au temps aléatoire S. Former la fonction caractéristique de cette variable aléatoire Z, et montrer que Z admet la densité de probabilité :

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\lambda}{c}}\; e^{-\sqrt{\frac{2\lambda}{c}}\,|z|}$$

2º - Soit $\varpi_a = \varpi_a(\lambda)$ la probabilité pour que la particule atteigne une abscisse a positive donnée avant l'instant aléatoire S.

Montrer que l'on a :

$$\varpi_a(\lambda) = 2\,P(Z \geqslant a) = e^{-a\sqrt{\frac{2\lambda}{c}}}$$

Ex. 2

Barrière absorbante, et loi du point d'impact.

1 3º - On place maintenant une barrière absorbante au point d'abscisse positive a , et on désigne par T_a l'instant (aléatoire) où la particule est absorbée en $x = a$, autrement dit, l'instant où la particule atteint pour la première fois l'abscisse a. On pose $G_a(t) = P(T_a < t)$, et on désigne par $g_a(t)$ la densité de la variable T_a (on ne demande pas d'expliciter ces fonctions G_a et g_a). Pour $\lambda \geqslant 0$, on pose

$$\Gamma_a(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\, g_a(t)\, dt$$

(transformation de Laplace). Montrer que l'on a :

$$\Gamma_a(\lambda) = \varpi_a(\lambda) = e^{-a\sqrt{\frac{2\lambda}{c}}}$$

Sachant que la transformation de Laplace (comme celle de Fourier) transforme un produit de convolution en un produit multiplicatif ordinaire, interpréter en termes probabilistes la relation $\Gamma_a(\lambda)\,\Gamma_b(\lambda) = \Gamma_{a+b}(\lambda)$

2 4º - On considère maintenant une particule animée d'un mouvement brownien dans le plan. Ses coordonnées X(t) et Y(t) constituent deux processus de Wiener-Lévy indépendants, admettant la même loi $\Phi_t(u) = e^{-\frac{1}{2}ctu^2}$

et vérifiant la condition initiale $X(0) = Y(0) = 0$. On désigne par T_a l'instant (aléatoire) où la particule rencontre pour la première fois la droite d'équation $x = a$. La valeur $Y(T_a)$ que prend $Y(t)$ au temps aléatoire T_a est l'ordonnée du point d'impact de la particule sur la droite $x = a$. Former la fonction caractéristique de la variable aléatoire $Y(T_a)$, et montrer que la loi du point d'impact est la loi de Cauchy de densité $\frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2+y^2}$

Ex. 3 Cas de deux barrières absorbantes.

5º - On considère le même processus $X(t)$, $Y(t)$ qu'au 4º , mais on place cette fois deux barrières absorbantes, qui sont les droites $x = a$ et $x = -b$ (a et b positifs donnés). On désigne par :

p_1 , la probabilité pour que la particule soit absorbée par la droite $x = a$ (pour que $X(t)$ atteigne la valeur a avant d'être passé par la valeur $- b$)

p_2, la probabilité pour que la particule soit absorbée par $x = - b$

$p_1 H_1(t)$ et $p_2 H_2(t)$ les probabilités pour que l'absorption ait lieu avant le temps t , en $x= a$ et en $x = - b$ respactivement. Etablir les équations :

$$\begin{cases} G_a(t) = p_1 H_1(t) + \int_0^t p_2 \, G_{a+b}(t-\tau) \, dH_2(\tau) \\ G_b(t) = p_2 H_2(t) + \int_0^t p_1 \, G_{a+b}(t-\tau) \, dH_1(\tau) \end{cases}$$

Montrer que les transformées de Laplace :

$$\begin{cases} \mathcal{D}_1(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \, dH_1(t) \\ \mathcal{D}_2(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \, dH_2(t) \end{cases}$$

sont données par

$$\begin{cases} p_1 D_1(\lambda) = \dfrac{\operatorname{sh} b\sqrt{\frac{2\lambda}{c}}}{\operatorname{sh}(a+b)\sqrt{\frac{2\lambda}{c}}} \\[2ex] p_2 D_2(\lambda) = \dfrac{\operatorname{sh} a\sqrt{\frac{2\lambda}{c}}}{\operatorname{sh}(a+b)\sqrt{\frac{2\lambda}{c}}} \end{cases}$$

En déduire les valeurs de p_1 et p_2.

6° – Montrer que, conditionnellement, dans l'hypothèse où l'absorption a lieu sur la droite $x = a$, l'ordonnée $Y(T_a)$ du point d'impact obéit à une loi dont la fonction caractéristique est :

$$\psi_1(u) = \frac{a+b}{b} \; \frac{\operatorname{sh} b|u|}{\operatorname{sh}(a+b)|u|}$$

Cette loi a-t-elle des moments ? Dans l'affirmative, calculer son espérance mathématique.

7°/ Poser $\frac{b}{a+b} = \alpha$. A l'aide du développement en série de Fourier valable pour $-1 < \alpha < +1$;

$$\operatorname{sh} \alpha\pi x = \frac{2 \operatorname{sh} \pi x}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n \sin n\pi\alpha}{n^2 + x^2}$$

montrer que la variable $Y(T_a)$ admet la densité :

$$f_1(y) = \frac{1}{\alpha(a+b)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin n\alpha\pi \, e^{-\frac{\pi n}{(a+b)}|x|}$$

$$= \frac{1}{\pi(a+b)} \; \frac{e^{\frac{\pi}{a+b}x} \sin \pi\alpha}{1 + 2\cos\pi\alpha \, e^{\frac{\pi}{a+b}x} + e^{\frac{2\pi}{a+b}x}}$$