

BIBLIOTHÈQUE

Fontainebleau CG

C-22

Exercices sur les lois stables et les processus
à accroissements indépendants

Georges MATHERON

Janvier 1969

EXERCICES SUR LES LOIS STABLES ET LES PROCESSUS
=====

A ACCROISSEMENTS INDEPENDANTS
=====

Table des Matières

Exercices sur la transformation de Laplace	1
Exercices sur le mouvement brownien	5
Exercices sur les lois stables et les processus associés	11
La loi stable de paramètre $\alpha = 1/2$	17
Processus subordonnés	20
Exercices sur les processus à accroissements indépendants, stationnaires et positifs	22

EXERCICES SUR LA TRANSFORMATION DE LAPLACE

=====

Dans ce qui suit, X est une variable positive
 $(P(X \leq 0) = 0)$, $F(dx)$ sa loi, $\Phi(\lambda) = E(e^{-\lambda X})$ sa transformée de Laplace.

EXERCICE 1 - Soit S une variable auxiliaire, indépendante de X , de densité e^{-s} ($s \geq 0$)

a/ La variable $\Lambda = \frac{S}{X}$ admet la fonction de répartition $1 - \Phi(\lambda)$

b/ Pour $-\infty < \beta < 1$, le moment d'ordre β (fini ou non) est:

$$E(X^\beta) = - \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^\infty \lambda^{-\beta} \Phi(d\lambda)$$

c/ D'autre part, $E(e^{iu \log S}) = \Gamma(1+iu)$. Dédurre de $\Lambda = \frac{S}{X}$ que $\log X$ admet la fonction caractéristique:

$$E[e^{iu \log X}] = - \frac{1}{\Gamma(1-iu)} \int_0^\infty e^{-iu \log \lambda} \Phi(d\lambda)$$

d/ Si S_n est une variable gamma indépendante de X et de densité $\frac{s^{n-1}}{(n-1)!} e^{-s}$ (n entier > 0), la variable $\Lambda = S_n/X$ admet la densité $(-1)^n \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \Phi(\lambda)$

En déduire que tout moment d'ordre $\beta < n$ (fini ou non) a pour valeur :

$$E[X^\beta] = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\beta)} \int_0^\infty \lambda^{n-1-\beta} \frac{d^n}{d\lambda^n} \Phi(\lambda) d\lambda$$

EXERCICE 2 - (Suite)

a/ Pour $0 < \beta < 1$, on a :

$$E (X^\beta e^{-\mu X}) = - \int_{\mu}^{\infty} \frac{(\lambda - \mu)^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)} \Phi(d\lambda)$$

(transformée de Laplace de $x^\beta dF(x)$)

b/ Soit S_β une variable gamma de densité $\frac{s^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} e^{-s}$ et indépendante de X . La variable $M = S_\beta/X$ admet la densité

$$\frac{\mu^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} E [X^\beta e^{-\mu X}] = - \mu^{\beta-1} \frac{\sin \pi\beta}{\pi} \int_{\mu}^{\infty} (\lambda - \mu)^{-\beta} \Phi(d\lambda)$$

Conclure $M \stackrel{\mathcal{L}}{\equiv} \bigwedge \gamma_\beta$ ($\bigwedge$ de loi $\Phi(d\lambda)$, γ_β de loi beta de densité $\frac{\sin \pi\beta}{\pi} x^{\beta-1}(1-x)^{-\beta}$ ($\sin 0 \leq x \leq 1$))

EXERCICE 3 - (Suite)

a/ Le résultat ci-dessus s'écrit $\frac{S_\beta}{X} \stackrel{\mathcal{L}}{\equiv} \frac{S}{X} \gamma_\beta$. Le retrouver en montrant directement l'équivalence

$$S_\beta \stackrel{\mathcal{L}}{\equiv} S \gamma_\beta$$

b/ Plus généralement, soit S_α , $S_{\alpha+\beta}$ des variables gamma de paramètres α et $\alpha+\beta$, $\gamma_{\alpha,\beta}$ la variable beta de densité

$$\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \quad (0 \leq x \leq 1). \text{ Montrer :}$$

$$E [e^{iu \gamma_{\alpha,\beta}}] = \frac{\Gamma(\alpha+iu)}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+iu)}$$

en déduire

$$S_{\alpha} \stackrel{\mathcal{P}}{=} S_{\alpha+\beta} Y_{\alpha,\beta}$$

et, par récurrence :

$$S_{\alpha_1} \stackrel{\mathcal{P}}{=} S_{\alpha_1+\dots+\alpha_n} Y_{\alpha_1+\dots+\alpha_{n-1}, \alpha_n} \dots Y_{\alpha_1+\dots+\alpha_{n-2}, \alpha_{n-1}} \dots Y_{\alpha_1, \alpha_2}$$

et des équivalences analogues entre les variables beta elles-mêmes.

EXERCICE 4

a/ Soient X et Y deux variables gamma indépendantes, de densités $b^{\alpha} \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-bx}$ et $b^{\beta} \frac{y^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} e^{-by}$ (les para-

mètres α et β peuvent être différents, mais le paramètre d'échelle b est le même). Montrer que $Z = X + Y$ et $\frac{X}{Z} = \frac{X}{X+Y}$ sont indépendantes (la première a une loi gamma de paramètre $\alpha + \beta$, la seconde une loi beta de paramètre α et β)

b/ Réciproque : Si X et Y sont deux variables indépendantes telles que $\frac{X}{X+Y}$ soit indépendante de $X + Y$, les variables X et Y obéissent à des lois gamma admettant le même paramètre d'échelle b.

[partir des relations

$$E \left[\frac{X}{X+Y} e^{-\lambda(X+Y)} \right] = E \left(\frac{X}{X+Y} \right) \Phi_1(\lambda) \Phi_2(\lambda)$$

$$E \left[\left(\frac{X}{X+Y} \right)^2 e^{-\lambda(X+Y)} \right] = E \left(\frac{X}{X+Y} \right)^2 \Phi_1(\lambda) \Phi_2(\lambda)$$

dériver en λ et faire $\lambda = 0$

EXERCICE 5

Si $\Phi(\lambda)$ est la transformée de Laplace d'une loi $F(dx)$,

$\frac{\Phi(\lambda+a)}{\Phi(a)}$, $a > 0$ est la transformée de la loi $\frac{e^{-ax} F(dx)}{\Phi(a)}$

Si $F = F_1 * F_2$, $e^{-ax} F = (e^{-ax} F_1) * (e^{-ax} F_2)$

EXERCICES SUR LE MOUVEMENT BROWNIEN

NOTATIONS - $X(t)$ désigne l'abscisse au temps $t > 0$ d'une particule animée d'un mouvement brownien le long de l'axe des x , avec la condition $X(0) = 0$.

On désigne par

$$f_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi ct}} e^{-\frac{x^2}{2ct}}, \quad \Phi_t(u) = e^{-\frac{1}{2} ct u^2}$$

la densité et la fonction caractéristique de $X(t)$, et par $F_t(x)$ sa fonction de répartition.

On désignera par $T_a = \inf \{t : X(t) \geq a\}$ le temps d'atteinte de l'ordonnée a , $G_a(t)$ sa fonction de répartition, $g_a(t)$ sa densité, et $\gamma_a(\lambda)$ sa transformée de Laplace.

On rappelle que la fonction $t \rightarrow X(t)$ est presque sûrement une fonction continue.

EXERCICE 1 - Montrer, par un raisonnement de symétrie, que l'on a :

$$G_a(t) = 2 [1 - F_t(a)]$$

En déduire

$$g_a(t) = -c \frac{\partial}{\partial a} f_t(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi c}} \frac{a}{t^{3/2}} e^{-\frac{a^2}{2ct}}$$

EXERCICE 2

a/ (résolvante) - Soit S un temps d'arrêt aléatoire, indépendant du processus $X(t)$, de densité $\lambda e^{-\lambda s}$ ($s \geq 0$). Soit $Z = X(S)$ l'abscisse de la particule au temps S . Former la

fonction caractéristique de Z , et montrer que Z admet la densité :

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\lambda}{c}} e^{-\sqrt{\frac{2\lambda}{c}} |z|}$$

b/ La probabilité $\varpi_a(\lambda)$ pour que la particule atteigne a avant l'instant aléatoire S est

$$\varpi_a(\lambda) = 2 P(Z \geq a) = e^{-a\sqrt{\frac{2\lambda}{c}}}$$

c/ Montrer que T_a est (par rapport à a) un processus à accroissements indépendants et stationnaires. Sa transformée de Laplace $\gamma_a(\lambda)$ vérifie :

$$\gamma_a(\lambda) = \varpi_a(\lambda) = e^{-\sqrt{\frac{2\lambda}{c}} a}$$

EXERCICE 3

Temps d'atteinte $T_{a,\beta}$ de la droite $y = a + \beta t$ (ou, temps d'atteinte $T_{a,\beta}$ de l'ordonnée a pour le mouvement brownien avec dérive $-\beta t$) -

a/ Montrer que la probabilité $g_a(\beta; t)dt$ de $T_{a,\beta} \in (t, t+dt)$ est l'unique solution de l'équation intégrale :

$$f_t(y + a + \beta t) = \int_0^t g_a(\beta; t-\tau) f_\tau(y + \beta \tau) d\tau \quad (y > 0)$$

b/ Compte tenu de l'identité

$$f_t(y + \beta t) = e^{-\frac{\beta}{c} y - \frac{\beta^2}{2c} t^2} f_t(y)$$

en déduire :

$$g_a(\beta; t) = e^{-\frac{\beta}{c} a - \frac{\beta^2}{2c} t} f_t(y)$$

c/ Compte tenu de l'exercice 5 sur les transformées de Laplace, montrer que

$$\gamma_a(\beta; \lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} g_a(\beta; t) dt \text{ est donné par :}$$

$$\gamma_a(\beta; \lambda) = e^{-\frac{\beta a}{c} - a \sqrt{\frac{2\lambda}{c} + \frac{\beta^2}{c^2}}}$$

d/ Pour $\beta \leq 0$, la particule atteint presque sûrement la droite $y = a + \beta t$. Pour $\beta > 0$, elle ne l'atteint qu'avec la probabilité $e^{-2\beta \frac{a}{c}}$.

EXERCICE 4

Soit $Y(t)$ un deuxième mouvement brownien indépendant de $X(t)$ et de même loi $f_t(x) = [X(t) \text{ et } Y(t) \text{ sont les coordonnées d'une particule animée d'un mouvement brownien dans le plan}]$ - La variable $Y(T_a)$ (ordonnée du point d'impact de la particule précédente sur la droite $x = a$) obéit à la loi de Cauchy de densité $\frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2 + x^2}$

EXERCICE 5

Soient $X(t)$ et $Y(t)$ comme dans l'exercice précédent, et les deux droites $x = a$, $x = -b$ ($a, b > 0$ donnés). On désigne par $p_1(a, b)$ la probabilité pour que la particule atteigne la droite $x = a$ sans avoir auparavant atteint $x = -b$, et par $H_1(dt)$, la loi conditionnelle de l'instant aléatoire $T_1(a, b)$ où ceci se produit. On définit de même p_2 et H_2 relativement à la droite $x = -b$.

a/ Démontrer les relations $G_a = p_1 H_1 + p_2 G_{a+b} * H_2$ et $G_b = p_2 H_2 + p_1 G_{a+b} * H_1$ - Soient $\eta_1(\lambda)$ et $\eta_2(\lambda)$ les transformées de H_1 et H_2 . Montrer :

$$\begin{cases} p_1 \eta_1(\lambda) = \frac{\text{Sh } b \sqrt{\frac{2\lambda}{c}}}{\text{Sh } (a+b) \sqrt{\frac{2\lambda}{c}}} \\ p_2 \eta_2(\lambda) = \frac{\text{Sh } a \sqrt{\frac{2\lambda}{c}}}{\text{Sh } (a+b) \sqrt{\frac{2\lambda}{c}}} \end{cases}$$

En déduire les valeurs de p_1 et p_2

EXERCICE 6 - (Suite)

a/ Conditionnellement dans l'hypothèse où la particule atteint $x = a$ avant $x = -b$, l'ordonnée $Y(T_1)$ du point d'impact obéit à une loi dont la fonction caractéristique est

$$\Psi_1(u) = \frac{a+b}{b} \frac{\text{Sh } bu}{\text{Sh } (a+b)u}$$

b/ Poser $\frac{b}{a+b} = \alpha$ - A l'aide du développement :

$$\text{Sh } \alpha \pi x = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n \sin n\pi \alpha}{n^2 + x^2}$$

$(-1 < \alpha < +1)$, montrer que $Y(T_1)$ admet la densité :

$$\begin{aligned} f_1(y) &= \frac{1}{\alpha(a+b)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin n\pi \alpha e^{-\frac{\pi n}{a+b} |y|} \\ &= \frac{1}{\pi(a+b)} \frac{e^{-\frac{\pi}{a+b} y} \sin \pi \alpha}{1 + 2 \cos \pi \alpha e^{\frac{\pi y}{a+b}} + e^{\frac{2\pi y}{a+b}}} \end{aligned}$$

EXERCICE 7

Loi de la dernière racine de $X(t) = 0$ antérieure à τ et de la première racine postérieure à τ .

a/ La première racine postérieure à τ admet la densité

$$2 \int_0^{\infty} f_{\tau}(x) g_x(t-\tau) dx = \frac{1}{\pi t} \sqrt{\frac{\tau}{t-\tau}} \quad (t > \tau)$$

b/ Calculer la probabilité pour qu'il n'y ait pas de racine entre t et τ . En déduire que la dernière racine antérieure à τ admet la densité $\frac{1}{\pi \sqrt{\tau(t-\tau)}}$

EXERCICE 8

Soit $M(t) = \sup \{ X(\tau) : 0 \leq \tau \leq t \}$ le maximum de $X(t)$ sur $(0, t)$.

a/ Montrer $P(M(t) \geq x) = 2 P(X(t) \geq x)$ et en déduire $M(t) \stackrel{L}{=} |X(t)|$

b/ loi simultanée de $X(t)$ et $M(t)$ - Montrer :

$$P(T_{\xi} \leq t \text{ et } x \leq X(t) \leq x+dx) = \begin{cases} f_t(x) dx & \text{si } x \geq \xi \\ f_t(2\xi-x) dx & \text{si } x \leq \xi \end{cases}$$

En déduire

$$P(M(t) \leq \xi, x \leq X(t) \leq x+dx) = f_t(x) - f_t(2\xi-x) \quad (x \leq \xi)$$

et montrer que la variable vectorielle $(X(t), Y(t))$, avec

$Y(t) = M(t) - X(t)$ admet la densité :

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi c}} \frac{x+y}{c t^{3/2}} e^{-\frac{(x+y)}{ct}} = \frac{2}{c} g_{x+y}(t)$$

EXERCICE 9 - (Suite)

a/ Soit θ_t l'instant aléatoire tel que $M(t) = X(\theta_t)$. La probabilité d'avoir $\xi \leq M(t) \leq \xi + d\xi$ et $\theta_t < \tau$ est :

$$\int_{-\infty}^{\xi} \frac{2}{c} g_{2\xi-x}(2\xi-x) [1 - G_{\xi-x}(t-\tau)] dx$$

En particulier

$$P(\theta_t < \tau) = 2 \int_0^{\infty} f_{\tau}(x) [1 - G_x(t-\tau)] dx$$

b/ Comparer avec Exercice 7, et conclure que les abscisses θ_t des maxima successifs obéissent à la même loi que les racines successives de $X(t) = 0$ [comparer les probabilités pour qu'il n'y ait pas de racine ou pas de maximum entre τ et $t > \tau$. - cf. Exercice 13 sur les lois stables et les processus associés.)

EXERCICES SUR LES LOIS STABLES ET LES PROCESSUS ASSOCIES

EXERCICE 1 - (Formule de Parseval)

a/ Soient X et Y deux variables indépendantes et positives, F_1 et F_2 leurs lois, Φ_1 et Φ_2 leurs transformées de Laplace. La variable $Z = XY$ admet la transformée :

$$E [e^{-\lambda XY}] = \int_0^{\infty} \Phi_1(\lambda y) F_2(dy) = \int_0^{\infty} \Phi_2(\lambda x) F_1(dx)$$

b/ En particulier, si Y est la variable de loi $\Phi_2(\lambda) = e^{-\lambda^\alpha}$ (loi stable de paramètre α), $\Phi_1(\lambda^\alpha)$ est la transformée de $Y (X)^{1/\alpha}$

c/ Si X et Y sont deux variables de lois stables $e^{-\lambda^\alpha}$ et $e^{-\lambda^\beta}$ $X Y^{1/\alpha}$ est la variable stable de paramètre $\alpha \beta$.

EXERCICE 2

a/ Soit S une variable de densité e^{-s} ($s \geq 0$), et X une variable positive indépendante de S et de loi $e^{-\lambda^\alpha}$. On a :

$$S^{1/\alpha} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \frac{S}{X}$$

($\stackrel{\mathcal{L}}{=}$, équivalent en loi).

b/ Soient X et Y deux variables stables indépendantes, de même loi $e^{-\lambda^\alpha}$, $\Phi(\lambda) = E [e^{-\lambda X/Y}]$ et $\gamma(\lambda) = E [e^{-\lambda/X^\alpha}]$ les lois de X/Y et de $1/X^\alpha$. Montrer que l'on a :

$$\Phi(\lambda) = \gamma(\lambda^\alpha)$$

[remarquer $\gamma(\lambda) = P(SX^\alpha > \lambda)$ et $\Phi(\lambda) = P(\frac{SY}{X} > \lambda)$ et utiliser a/ - ou encore, mettre X/Y sous la forme $X (\frac{1}{Y})^{1/\alpha}$ et utiliser exercice 1 -]

Les exercices suivants (3 à 7) donnent la caractérisation de toutes les variables positives de loi stable.

EXERCICE 3 - (Existence des lois stables) - On dit que la loi F

d'une variable X est stable (au sens strict) si pour tout entier n on peut trouver une constante C_n telle que $C_n X$ ait même loi que la somme de n variables indépendantes admettant la même loi F :

$$X_1 + \dots + X_n \stackrel{\mathcal{L}}{=} C_n X$$

On se limitera au cas d'une variable stable positive $X > 0$ (s'il en existe). Soit F et $\Phi(\lambda)$ la loi de X et sa transformée de Laplace.

a/ Montrer que X est nécessairement indéfiniment divisible, et que, pour $t > 0$ réel quelconque, $[\Phi(\lambda)]^t$ est la transformée d'une variable stable X_t vérifiant :

$$X_t \stackrel{\mathcal{L}}{=} C(t) X$$

avec une fonction $C(t)$ continue de la forme $t^{1/\alpha}$ (α constante).

[examiner d'abord $t = p/q$, p, q entiers > 0 . Montrer $[\Phi(\lambda)]^{p/q} = \Phi(\frac{C_p}{C_q} \lambda)$, d'où $C(t_1 t_2) = C(t_1) C(t_2)$ pour

t_1, t_2 rationnels. Utiliser le théorème limite pour étendre par continuité ces relations à $t > 0$ réel quelconque].

b/ Soit $H(dx)$ la mesure positive canonique telle que :

$$\Psi(\lambda) = - \log \Phi(\lambda) = \int_0^{\infty} \frac{1-e^{-\lambda x}}{x} H(dx)$$

Montrer que $\Psi(\lambda)$ est nécessairement de la forme $b\lambda^\alpha$ avec $b > 0$ et $0 < \alpha < 1$.

Inversement $e^{-b\lambda^\alpha}$, moyennant ces conditions, est effectivement la transformée d'une loi stable.

[écrire que $\Psi'(\lambda)$ est transformée de la mesure $H(dx)$. Pour $\alpha < 0$, la condition $\int_1^{\infty} \frac{H(dx)}{x} < \infty$ n'est pas vérifiée. Pour $\alpha > 1$, $\lambda^{\alpha-1}$ ne peut pas être la transformée d'une mesure positive] .

EXERCICE 4 -

a/ La variable X de loi stable $e^{-t\lambda^\alpha}$ n'a pas d'espérance finie.

b/ La "moyenne empirique" $\frac{1}{n} (X_1 + \dots + X_n)$ de n variables indépendantes de loi $e^{-t\lambda^\alpha}$ est plus dispersée que chacune d'elles : Montrer

$$\frac{1}{n} (X_1 + \dots + X_n) \not\leq n^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} X$$

c/ la variable $1/X$, par contre, admet des moments de tous les ordres. Montrer que $1/X^\alpha$ admet la transformée de Laplace:

$$E [e^{-\lambda/X^\alpha}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(1+n\alpha)} \left(\frac{\lambda}{t} \right)^n$$

(fonction de Mittag-Leffler)

[utiliser l'exercice 1/ sur la transformation de Laplace]

d/ Si X et Y sont indépendantes et admettent la même loi $e^{-\lambda^\alpha}$, la variable $Z = X/Y$ admet la transformée :

$$E [e^{-\lambda X/Y}] = E [e^{\lambda^\alpha/Y^\alpha}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(1+n\alpha)} \lambda^{n\alpha}$$

[cf. ex. 2/, b/]

EXERCICE 5 - Loi du rapport $X/Y = Z$ de deux variables indépendantes de même loi $e^{-\lambda^\alpha}$.

a/ Montrer que $\log X$ admet la fonction caractéristique

$$E (e^{iu \log X}) = \frac{\Gamma(1 - \frac{iu}{\alpha})}{\Gamma(1 - iu)}$$

En déduire que $\alpha \log Z$ admet la fonction caractéristique

$$E (e^{iu \alpha \log X/Y}) = \frac{1}{\alpha} \frac{\text{Sh } \alpha \pi u}{\text{Sh } \pi u}$$

[utiliser l'exercice 1 sur les transformations de Laplace, et la formule des compléments $\Gamma(x) \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$]

b/ En déduire que $U = \alpha \log Z$ admet la densité

$$\frac{1}{\alpha \pi} \frac{\sin \pi \alpha e^u}{1 + 2 e^u \cos \pi \alpha + e^{2u}} \quad \text{et que } Z = X/Y \text{ admet la densité :}$$

$$h(z) = \frac{1}{\pi} \frac{z^{\alpha-1} \sin \alpha \pi}{1 + 2 z^\alpha \cos \alpha \pi + z^{2\alpha}}$$

[utiliser l'exercice 5/ b/ sur le mouvement brownien]

c/ En déduire, compte tenu de l'exercice 4/, c/ et d/, la représentation intégrale suivante de la fonction de Mittag-Leffler $\gamma(\lambda)$:

$$\gamma(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(1+n\alpha)} \lambda^n = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\lambda y^{\alpha-1} e^{-y} dy}{1 + 2\lambda y^{\alpha} \cos \alpha\pi + \lambda^2 y^{2\alpha}}$$

EXERCICE 6 - (Suite)

a/ La fonction $\gamma(\lambda)$ de Ex. 5/, c/ est la transformée de Laplace de $1/X^{\alpha}$, où X admet la loi $e^{-\lambda^{\alpha}}$. Effectuer une intégration par partie sur la représentation intégrale ci-dessus et montrer :

$$-\frac{d}{d\lambda} \gamma(\lambda) = - \int_0^{\infty} \frac{1}{\alpha\pi} \frac{e^{-z} dz}{\lambda + z^{\alpha} e^{i\pi\alpha}}$$

b/ En déduire que $1/X^{\alpha}$ admet la densité :

$$\begin{aligned} g(y) &= - \int_0^{\infty} \frac{1}{\alpha\pi y} e^{-y z^{\alpha} e^{i\pi\alpha}} dz \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\Gamma(1+n\alpha)}{n!} \frac{\sin n\pi\alpha}{\alpha\pi} y^{n-1} \end{aligned}$$

c/ En déduire que la loi stable $e^{-\lambda^{\alpha}}$ admet la densité :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\Gamma(1+n\alpha)}{n!} \frac{\sin n\pi\alpha}{\pi} \frac{1}{x^{1+n\alpha}}$$

EXERCICE 7 - On dira qu'un processus $X(t)$ à accroissements indépendants et stationnaires est autohomothétique s'il existe une fonction $C(t)$ telle que :

$$(1) \quad X(t) \stackrel{\mathcal{L}}{\equiv} C(t) X(1)$$

Par exemple, si $X(t)$ est le mouvement brownien de caractéristique $e^{-\frac{1}{2}ct u^2}$, on a $X(t) \stackrel{\mathcal{L}}{\equiv} \sqrt{t} X(1)$. Dans ce qui suit,

on se limitera au cas où $X(t)$ est un processus croissant (à accroissements positifs). On désignera la transformée de Laplace de $X(t)$ par :

$$e^{-t\Psi(\lambda)} = E [e^{-\lambda X(t)}]$$

et par $H(dx)$ la mesure positive canonique vérifiant :

$$\Psi(\lambda) = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-\lambda x}}{x} H(dx) \quad , \quad \int_1^\infty \frac{H(dx)}{x} < \infty$$

a/ Si $X(t)$ est autohomothétique, la fonction $C(t)$ de (1) vérifie $C(t_1 t_2) = C(t_1) C(t_2)$. En déduire $C(t) = t^{1/\alpha}$ et $\Psi(\lambda) = b\lambda^\alpha$ avec $0 < \alpha < 1$ (cf. exercice 3/) - Ainsi, ces processus homothétiques sont les processus à loi stable $e^{-tb\lambda^\alpha}$. Dans ce qui suit on prendra $b = 1$ (simple changement de l'échelle des temps)

b/ Soit $X(t)$ le processus autohomothétique croissant de loi $e^{-t\lambda^\alpha}$. On désignera par

$$T_a = \inf \{ t : X(t) \geq a \}$$

le temps d'atteinte de l'ordonnée a , et par $G_a(t)$ sa fonction de répartition. Montrer

$$G_a(t) = P(T_a \geq t) = P(X(t) \leq a)$$

Compte tenu de $X(t) \stackrel{\mathcal{L}}{=} t^{1/\alpha} X(1)$, en déduire :

$$T_a \stackrel{\mathcal{L}}{=} \left(\frac{a}{X(1)} \right)^\alpha$$

En déduire (ex. 4/, c/) que T_a admet la transformée de Laplace

$$\gamma_a(\lambda) = E (e^{-\lambda T_a}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(1+n\alpha)} a^{\alpha n} \lambda^n$$

(fonction de Mittag-Leffler)

c/ Soit $Y(t)$ un deuxième processus auto-homothétique indépendant de $X(t)$ et admettant la même loi $e^{-t\lambda^\alpha}$. Soit $Y(T_a)$ la valeur de $Y(t)$ à l'instant T_a où $X(t)$ atteint pour la première fois l'abscisse a . Montrer que l'on a :

$$E [e^{-\lambda Y(T_a)}] = E [e^{-\lambda^\alpha T_a}] = \gamma_a (\lambda^\alpha)$$

En déduire

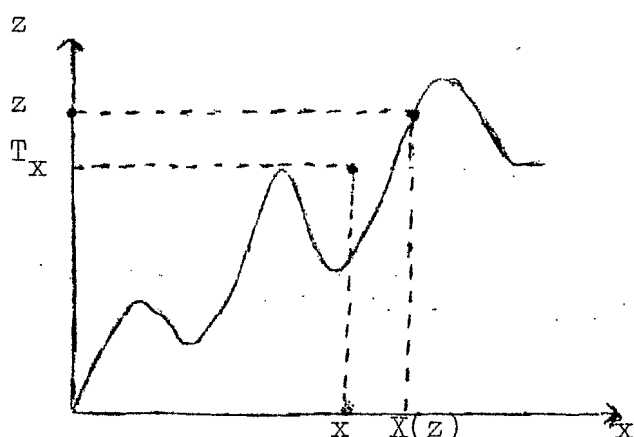
$$Y(T_a) \stackrel{\mathcal{L}}{=} a^\alpha Y(1) / X(1)$$

[utiliser Exercice 4/, d/ - On pourra aussi former les densités de T_a et de $Y(T_a)$ à l'aide d'Ex. 5/, b/ et Ex. 6/, b/]

La loi stable de paramètre 1/2

La variable X de loi $e^{-\sqrt{\lambda}}$ est équivalente à l'inverse d'une variable gamma de paramètre 1/2, ou à l'inverse du carré d'une variable de Gauss. On peut le vérifier analytiquement (à partir de la densité de $1/X^\alpha$, ex. 6/, c/, ou de la transformée de $1/X^\alpha$, ex. 4/, c/) en montrant que $1/\sqrt{X}$ équivaut en loi à $|Z|$ où Z est une variable de Gauss. Il est plus instructif de rattacher cette propriété inattendue à une particularité du mouvement brownien. On comparera ce mode d'exposition à celui que l'on a observé sur les Wiener-Lévy. Mais ces exercices sont indépendants les uns des autres.

EXERCICE 8



Soit $Z(x)$ le processus de Wiener-Lévy défini par sa fonction caractéristique

$$E [e^{iu Z(x)}] = e^{-\frac{1}{2} Cx u^2} \quad \text{et}$$

$$X(z) = \inf \{ x : Z(x) \geq z \}$$

le temps d'atteinte de l'ordonnée z .

a/ Sachant que la trajectoire de $Z(x)$ est presque sûrement continue, montrer que $X(z)$ est, en z , un processus à accroissements indépendants, stationnaires et positifs.

De $Z(x) \stackrel{\mathcal{L}}{\equiv} \sqrt{x} Z(1)$, déduire ensuite $X(z) \stackrel{\mathcal{L}}{\equiv} z^2 X(1)$. Conclure (compte tenu de Ex. 7/a/) que $X(z)$ est un processus auto-homothétique à loi stable de paramètre $1/2$. En particulier, on a :

$$E [e^{-\lambda X(z)}] = e^{-b z \sqrt{\lambda}}$$

avec une constante b que l'on déterminera ultérieurement.

b/ Soit $T_x = \inf \{ z : X(z) \geq x \}$ le temps d'atteinte de l'abscisse x pour le processus $X(z)$. Montrer que l'on a :

$$T_x = \sup \{ Z(y) : 0 \leq y \leq x \}$$

Etablir les relations :

$$P(T_x \geq t) = P(X(t) \leq x) = 2 P(Z(x) \geq t)$$

et en déduire :

$$T_x \stackrel{\mathcal{L}}{\equiv} |Z(x)|$$

(la densité de $T_x = \text{Sup} \{ Z(y) = 0 \leq y \leq x \}$ est donc une demi-courbe en cloche)

c/ Déduire de a/ et de Ex. 7/, b/, l'équivalence en loi :

$$X(1) \stackrel{\mathcal{L}}{\equiv} \left(\frac{x}{T_x} \right)^2$$

puis, compte tenu de b/, $X(1) \stackrel{\mathcal{L}}{\equiv} \frac{1}{(Z(1))^2}$, relation qui s'écrit dans le cas général :

$$X(y) \stackrel{\mathcal{L}}{\equiv} \frac{y^3}{(Z(y))^2}$$

En déduire que $U = 1/X(1)$ est la variable gamma de densité :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi c}} e^{-\frac{u}{2c}} u^{-1/2}$$

et que $X(a)$ admet la densité :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi c}} \frac{a}{x^{3/2}} e^{-\frac{a^2}{2cx}}$$

d/ Montrer que la transformée de Laplace de $X(a)$ est :

$$E [e^{-\lambda X(a)}] = e^{-a\sqrt{\frac{2\lambda}{c}}}$$

[on sait, d'après a/, qu'elle est de la forme $e^{-a b \sqrt{\lambda}}$.

Pour calculer la constante b, on calculera $E \frac{1}{X(a)} = E \left(\frac{(Z(a))^2}{a^3} \right)$ de deux manières différentes.

EXERCICE 9 - Processus Subordonnés.

Soit $X(t)$ un processus à accroissements indépendants et stationnaires de loi $E [e^{iuX(t)}] = e^{-t \Phi(u)}$, et $T(t)$ un processus auxiliaire à accroissements indépendants stationnaires et positifs, de loi $E [e^{-\lambda T(t)}] = e^{-t \Psi(\lambda)}$.

a/ Substituant le temps $T(t)$ au temps réel t , on obtient un nouveau processus $Z(t) = X[T(t)]$, [processus subordonné à $T(t)$]. Montrer que $Z(t)$ est encore à accroissements indépendants et stationnaires, et que l'on a :

$$E [e^{iu Z(t)}] = e^{-t \Psi[\Phi(u)]}$$

b/ Exemples : Si $X(t)$ est le Wiener-Lévy $e^{-\frac{1}{2} t}$ et u^2 , on a $E [e^{iu Z(t)}] = e^{-t \Psi(\frac{1}{2} cu^2)}$. En particulier si $Z(t)$ admet la loi stable $e^{-t \sqrt{\frac{2\lambda}{c}}}$, $Z(t)$ admet la loi de Cauchy $e^{-t(u)}$. [cf. ex. 4/ sur le mouvement brownien]

Plus généralement, si $T(t)$ admet la loi stable $e^{-t\lambda^\alpha}$, $Z(t)$ admet la loi $e^{-t [\Phi(u)]^\alpha}$.

c/ En particulier, si $X(t)$ et $T(t)$ sont deux processus homothétiques croissants de loi $e^{-t\lambda^\alpha}$ et $e^{-t\lambda^\beta}$, $Z(t) = X(T(t))$ est le processus homothétique croissant de loi $e^{-t\lambda^{\alpha\beta}}$. Dédurre de l'exercice 1 l'équivalence en loi :

$$Z(t) \stackrel{\mathcal{L}}{=} X(t) \cdot \left(\frac{T(t)}{t} \right)^{1/\alpha}$$

EXERCICE 10 - Formule de Kato.

Soit $X(t)$ un processus à accroissements indépendants et stationnaires, $F_t(dx)$ la loi de $X(t)$ et

$$R_{\lambda} (dx) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} F_t(dx) dt$$

la "résolvante" de $X(t)$. Nous considérerons plutôt :

$$Q_{\lambda} (dx) = \lambda R_{\lambda} (dx) = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} F_t (dx) dt$$

a/ $Q_{\lambda} (dx)$ est la loi de probabilité de $X\left(\frac{S}{\lambda}\right)$ où S désigne une variable aléatoire de densité e^{-s} ($s > 0$) indépendante de $X(t)$.

b/ Soit $T(t)$ le processus croissant homothétique de loi $e^{-t\lambda^{\alpha}}$, et $Y(t) = X[T(t)]$ le processus subordonné à $T(t)$, comme dans l'exercice précédent, et

$$Q_{\mu}^{\alpha}(dx) = \mu R_{\mu}^{\alpha}(dx)$$

la loi de $Y\left(\frac{S}{\mu}\right)$, où S est toujours une variable exponentielle réduite indépendante de $T(t)$ et $X(t)$ - R_{μ}^{α} désignant la résolvante du processus subordonné -

A partir des exercices 7/ et 2/, établir les équivalences en loi :

$$T\left(\frac{S}{\mu}\right) \stackrel{\mathcal{L}}{\equiv} \frac{S^{1/\alpha}}{\mu^{1/\alpha}} \quad Z \stackrel{\mathcal{L}}{\equiv} \frac{SZ}{\mu^{1/\alpha} Z'}$$

Z, Z', S désignant des variables indépendantes, les 2 premières de loi stable $e^{-\lambda^{\alpha}}$, S de loi exponentielle réduite.

En déduire :

$$Q_{\mu}^{\alpha} = E \left[Q \mu^{1/\alpha} \frac{Z'}{Z} \right]$$

et (compte tenu de Ex. 5, b/) :

$$R_{\mu}^{\alpha} = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{y^{\alpha} R_y}{\mu^2 + 2\mu y^{\alpha} \cos \alpha \pi + y^{2\alpha}} dy$$

(cette formule de Kato subsiste dans le cas où $X(t)$ est un processus markovien quelconque).

EXERCICES SUR LES PROCESSUS A ACCROISSEMENTS INDEPENDANTS

STATIONNAIRES ET POSITIFS

Les exercices qui suivent ont surtout pour but de souligner la signification de la mesure canonique $H(dx)$, qui exprime, en un certain sens, la granulométrie des sauts du processus. Les processus de ce type sont complètement discontinus. Ils varient uniquement par sauts positifs, mais en général sur un intervalle (t_0, t_1) fini le processus passe par une infinité (dénombrable) de sauts (la plupart infiniment petits). Les processus homothétiques à loi stable serviront d'exemples.

EXERCICE 11 - [N.B. : le d/ suppose des notions sur les processus de renouvellement].

On considère le processus $X(t)$ défini comme suit : $X(0) = 0$; $X(t)$ reste constant, sauf à des instants aléatoires successifs $T_1, T_2, \dots$, constituant un Processus de Poisson de paramètre a , où il effectue des sauts aléatoires (positifs), indépendants pour les différents T_i , et dont les amplitudes obéissent à une même loi $R(dy)$, avec $p(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda y} R(dy)$

a/ Montrer que $X(t)$ est un processus à accroissements indépendants stationnaires et positifs, et que sa transformée de Laplace est :

$$E [e^{-\lambda X(t)}] = e^{-at} [1-p(\lambda)]$$

b/ Soit $H(dx)$ la mesure canonique associée à $X(t)$

[définition : si $e^{-t\Psi(\lambda)}$ est la transformée de $X(t)$, on a :

$$\Psi(\lambda) = \int_0^{\infty} \frac{1-e^{-\lambda x}}{x} H(dx) , \quad \int_1^{\infty} \frac{H(dx)}{x} < \infty]$$

Montrer que l'on a :

$$H(dx) = a \times R(dx)$$

Dans un langage imagé : $R(dx) = \frac{1}{a} \frac{H(dx)}{x}$ représente la granulométrie en nombre de sauts, chaque saut étant compté pour un poids égal à 1 - Au contraire, à un facteur près, $H(dx)$, proportionnelle à $xR(dx)$, représente une granulométrie en longueur, où chaque saut est compté pour un poids proportionnel à sa longueur x .

On notera que cette "granulométrie en longueur" $H(dx)$ ne peut être normée à l'unité (et représenter une loi de probabilité au sens usuel) que si l'espérance de l'amplitude d'un saut donné :

$$\int_0^{\infty} x R(dx) = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} H(dx) < \infty$$

est finie.

c/ Inversement, tout processus $X(t)$ à accroissements positifs indépendants et stationnaires dont la mesure canonique $H(dx)$ vérifie

$$\int_0^{\infty} \frac{H(dx)}{x} = a < \infty$$

est un processus poissonisé de type ci-dessus, dont les sauts possèdent la granulométrie (en nombre) $R(dx) = \frac{1}{a} \frac{H(dx)}{x}$ et la densité poissonnienne a .

d/ En projection sur l'axe des x , les discontinuités de ce même processus $X(t)$ dessinent un processus de renouvellement : les longueurs séparant les points successifs sont des variables indépendantes, de même loi $R(dx)$ -

Ce processus de renouvellement est ergodique si, et seulement si les sauts ont une espérance finie, donc si, et seulement si $\int_0^\infty H(dx) < \infty$, c'est-à-dire si la granulométrie en longueur existe également.

EXERCICE 12 - Soit maintenant $X(t)$ un processus à accroissements indépendants stationnaires et positifs quelconque, $F_t(x)$ la loi de $X(t)$, $e^{-t\Psi(\lambda)}$ sa transformée de Laplace, $H(dx)$ sa mesure canonique. Ce qui précède suggère que $\frac{H(dx)}{x}$ doit encore représenter, en un certain sens, la loi des sauts. Toutefois, l'intégrale $\int_0^\infty \frac{H(dx)}{dx}$ peut être infinie, ce qui implique l'existence d'une infinité de sauts, la plupart très petits, sur tout intervalle fini. Par contre, $\int_z^\infty \frac{H(dx)}{x}$ est finie pour tout $z > 0$ et va représenter (à un facteur près) la granulométrie conditionnelle des sauts d'amplitude $\geq z$.

a/ Soit $G_a(t)$ la loi du temps d'atteinte T_a de l'ordonnée a , $\gamma_a(\lambda)$ sa transformée de Laplace. Montrer :

$$1 - G_a(t) = F_t(a)$$

Poser $\gamma_a(\lambda) = E [e^{-\lambda T_a}]$, $\tilde{\gamma}_u(\lambda) = \int_0^\infty e^{-ua} \gamma_a(\lambda) da$,

et montrer :

$$\tilde{\gamma}_u(\lambda) = \frac{1}{u} \frac{\Psi(u)}{\lambda + \Psi(u)}$$

b/ Montrer que $\frac{1}{u} \Psi(u)$ est la transformée (en a) de la fonction $\int_a^\infty \frac{H(dx)}{x}$, et $\frac{1}{\lambda + \Psi(u)}$ la transformée (en t et a) de $F_t(da)$. En déduire que $G_a(t)$ admet la densité :

$$g_a(t) = \int_0^a F_t(dx) \int_{a-x}^\infty \frac{H(dy)}{y}$$

c/ Interpréter : $dt g_a(t)$ est la probabilité de dépasser a entre t et t+dt, $F_t(dx)$ celle d'être en un $x < a$ au temps t, et $dt \int_{a-x}^\infty \frac{H(dy)}{y}$ celle d'effectuer, entre t, et t+dt, un saut d'amplitude supérieure à a-x.

Autrement dit, pour tout $b > 0$, l'expression

$$\frac{1}{\int_b^\infty \frac{H(dx)}{x}} \int_{a-x}^\infty \frac{H(dy)}{y} \quad (y \geq b)$$

représente la probabilité conditionnelle pour qu'un saut qui vient de se produire ait une amplitude $\in (y, y+dy)$ ($y \geq b$), sachant que cette amplitude est supérieure à b. Cette condition ne peut être levée que si $\int_0^\infty \frac{H(dx)}{x} = a < \infty$, auquel cas

$\frac{1}{a} \frac{H(dx)}{x} = R(dx)$ est la granulométrie en nombre "à priori" des sauts. Dans le cas général, seules existent les granulométries "conditionnelles" des sauts $\geq b$. Noter que l'intégrale $\int_b^\infty \frac{H}{x}$ donne aussi la densité poissonnienne des sauts d'amplitude $\geq b$.

d/ Exemple : processus homothétique de loi $e^{-t\lambda^\alpha}$. On a ici :

$$H(dx) = \frac{\alpha x^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$$

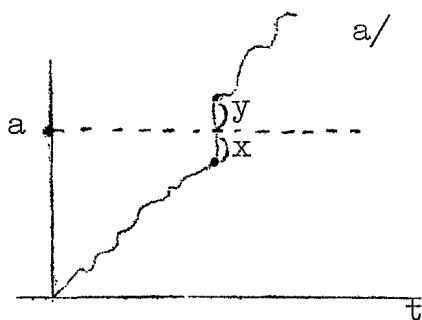
Il n'y a ni granulométrie en nombre, ni granulométrie en longueur [$\int_0^\infty \frac{H(dx)}{x} = \int_0^\infty H(dx) = \infty$ pour $0 < \alpha < 1$].

Autrement dit, ce processus comporte à la fois un nombre extrêmement grand de sauts très petits, et de temps à autre des sauts d'amplitude extraordinairement élevée. Par contre les granulométries conditionnelles (en nombre, celle des sauts d'amplitude $\geq b > 0$, en longueur, celle des sauts d'amplitude $\leq b$) existent toutes les deux.

EXERCICE 13 - (Suite)

N.B.: cet exercice nécessite des notions sur les processus de renouvellement.

En projection sur l'axe des x , les points de discontinuité du processus $X(t)$ précédent dessinent un processus qui diffère des processus de renouvellement classiques du fait qu'un intervalle peut contenir une infinité de points de discontinuité (du moins si la granulométrie a priori en nombre n'existe pas, soit $\int_0^\infty \frac{H(dx)}{x} = \infty$, ce que nous supposons). Néanmoins ce processus est parfaitement défini, et il y a lieu de s'interroger sur son ergodicité.



a/ Soit $a > 0$ une ordonnée. A l'instant T_a , le processus saute de $a-x$ à $a+y$ ($x, y > 0$) et on cherche à déterminer la loi des deux composantes (x, y) du saut.

Soit $G_a(dx, dy)$ cette loi. Montrer :

$$G_a(dx, dy) = \int_0^\infty d_x F_t(a-x) \frac{d_y H(x+y)}{x+y} dt$$

b/ Soit $\gamma_a(\lambda, \mu)$ la transformée $\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda x - \mu y} G_a(dx, dy)$

Montrer :

$$\gamma_a(\lambda, \mu) = \int_0^\infty dt \int_0^a e^{-(\lambda-\mu)(a-x)} F_t(dx) \int_{a-x}^\infty e^{-\mu z} \frac{H(dz)}{z}$$

Interpréter l'intégrand de dt comme le produit de convolution

$$e^{-(\lambda-\mu)a} \left[e^{-(\mu-\lambda)x} F_t(dx) * \int_x^\infty e^{-\mu z} \frac{H(dz)}{z} \right]$$

en déduire que la transformée en a de $\gamma_a(\lambda, \mu)$:

$$\tilde{\gamma}_u(\lambda, \mu) = \int_0^\infty e^{-au} \gamma_a(\lambda, \mu) da$$

est donnée par :

$$\tilde{\gamma}_u(\lambda, \mu) = \frac{\Psi(u+\lambda) - \Psi(\mu)}{(u+\lambda-\mu) \Psi(u)}$$

[N.B. : dans cet exercice de calcul, on notera tout d'abord

que :

$$\int_0^\infty e^{-ux} dx \int_x^\infty e^{-\mu z} \frac{H(dz)}{z} = \int_0^\infty e^{-\mu z} \frac{1-e^{-\mu z}}{u} \frac{H(dz)}{z} = \frac{1}{u} [\Psi(u+\mu) - \Psi(u)]$$

On multipliera par la transformée du 2ème facteur convolutif, qui est $e^{-t\Psi(u+\mu-\lambda)}$, on intégrera en t , et on remplacera partout u par $u+\lambda-\mu$ pour tenir compte du facteur multiplicatif $e^{-(\lambda-\mu)a}$.

c/ $\frac{1}{\Psi(u)}$ est la transformée du potentiel $U(dx)$ du processus $X(t)$ (voir exercice 14). On admettra (voir Ex. 14/, d/) que le théorème de renouvellement s'applique à ce potentiel U comme s'il s'agissait du potentiel d'un processus de renouvellement usuel, c'est-à-dire pourvu seulement que

$$\Psi'(0) = \int_0^{\infty} H(dx) < \infty$$

Moyennant cette condition, le théorème du renouvellement donne:

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow \infty} \gamma_a(\lambda, \mu) &= \lim_{u \rightarrow 0} u \tilde{\gamma}_u(\lambda, \mu) = \\ &= \frac{\Psi(\lambda) - \Psi(\mu)}{\lambda - \mu} \cdot \frac{1}{\Psi'(0)} \end{aligned}$$

d/ Pour interpréter cette relation, poser $Z = X + Y$ (saut total), d'où :

$$E[e^{-\lambda X - \mu Z}] = E[e^{-(\lambda+\mu)X - \mu Y}] = \frac{\Psi(\lambda+\mu) - \Psi(\mu)}{\Psi'(0) \lambda}$$

et montrer que cette expression est la transformée de la loi :

$$G_{\infty}(dx, dy) = \frac{1}{\Psi'(0)} H(dz) \frac{dx}{z} \quad (0 \leq x \leq z)$$

Interpréter : le processus est ergodique si, et seulement si

$$\Psi'(0) = \int_0^{\infty} H(dx) < \infty. \text{ La loi limite du saut total } Z \text{ auquel}$$

appartient l'ordonnée a est la granulométrie en longueur

$\frac{H(dz)}{\Psi'(0)}$ et, à $Z = z$ fixé, X est uniformément réparti sur $(0, Z)$:

tout se passe comme si le point a était implanté au hasard sur ce segment.

e/ La loi limite de $Y = Z - X$ est appelée granulométrie

résiduelle. Sa transformée de Laplace est $\frac{1}{\Psi'(0)} \frac{\Psi(\mu)}{\mu}$.

Elle admet donc la densité :

$$\frac{1}{\Psi'(0)} \int_y^\infty \frac{H(dx)}{x}$$

(cf. ex. 12/, b/)

f/ Dans le cas du processus à loi stable $e^{-t\lambda^\alpha}$, on a $\int_0^\infty H(dx) = \infty$ et il n'y a pas ergodicité. Plus le point a s'éloigne, plus il a de chances d'appartenir à un saut d'amplitude extraordinairement élevée.

EXERCICE 14

Le potentiel du processus à accroissements indépendants et stationnaires, $X(t)$, de loi $F(dx)$, de transformée de Laplace $e^{-t\Psi(\lambda)}$ et de mesure canonique $H(dx)$ est la mesure (si elle existe)

$$U(dx) = \int_0^\infty F_t(dx) dt$$

et sa résolvante (qui existe toujours pour $\lambda > 0$) est la mesure :

$$R_\lambda(dx) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} F_t(dx) dt$$

a/ Soit $R_\lambda(x) = \int_0^x R_\lambda(dy)$ la "fonction de répartition" associée à la résolvante. On a :

$$R_\lambda(x) = \frac{1 - \gamma_x(\lambda)}{\lambda}$$

$\gamma_x(\lambda) = E[e^{-\lambda T_x}]$ désignant la transformée de Laplace du temps d'atteinte T_x de x .

b/ Autre démonstration : $\lambda R_\lambda(dx)$ est la loi de $X(\frac{S}{\lambda})$, S variable exponentielle réduite. D'où :

$$1 - \lambda R_\lambda(x) = P[X(\frac{S}{\lambda}) \geq x] = P(T_x \leq \frac{S}{\lambda}) = \gamma_x(\lambda)$$

c/ La transformée de Laplace en x de $R_\lambda(x)$ est $\frac{1}{\lambda u} - \frac{\tilde{\gamma}_u(\lambda)}{\lambda}$
 $= \frac{1}{u(\lambda + \Psi(u))}$ (utiliser Ex. 12/, a/) et celle de la mesure

$R_\lambda(dx)$ est donc $\frac{1}{\lambda + \Psi(u)}$. Le potentiel $U(dx)$ admet la transformée $\frac{1}{\Psi(u)}$.

d/ $U(x) = \int_0^x U(dy)$ est l'espérance du temps d'atteinte T_x de x :
 $U(x) = \int_0^\infty [1 - G_x(t)] dt = E(T_x)$

Si $\Psi'(0) = \int_0^\infty H(dx) < \infty$, $U(x)$ est fini et équivalent à $\frac{x}{\Psi'(0)}$ pour $x \rightarrow \infty$ (théorèmes tauberiens), et $U(x+a) - U(x)$ tend vers $\frac{a}{\Psi'(0)}$ (théorème de renouvellement). [Considérer le processus discrétisé $Y_n = X(nh)$, qu'est un processus de renouvellement. Son potentiel $U_h(x)$ diffère au plus de h de $U(x)$, et vérifie le théorème de renouvellement].

e/ Lorsque $U(x) = E(T_x) < \infty$, la mesure $U(dx)$ prend, pour tout borelien A de la droite, la valeur $U(A)$ égale à l'espérance de la durée du séjour de $X(t)$ dans A .

f/ Cas des lois stables

Si $X(t)$ a pour loi $e^{-t\lambda^\alpha}$, le potentiel admet la densité

$$u(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$$

et la résolvante R_λ admet la densité :

$$r_\lambda(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{\alpha n} - 1}{\Gamma(\alpha n)} \lambda^{n-1}$$

(utiliser a/ et Ex. 7/, b/)

EXERCICE 15 - Potentiel d'un processus dans l'espace à deux dimensions - Soient $X(t)$ et $Y(t)$ deux processus à accroissements indépendants stationnaires et positifs, indépendants l'un de l'autre, et soit

$$E [e^{-\lambda X(t) - \mu Y(t)}] = e^{-t\Psi_1(\lambda) - t\Psi_2(\mu)}$$

leurs lois. Le potentiel $U(dx, dy)$ est défini, comme ci-dessus, comme l'intégrale

$$U(dx, dy) = \int_0^\infty F_t(dx) F_t'(dy) dt$$

(F_t, F_t' lois de $X(t)$ et $Y(t)$).

a/ Soit $U(a, b) = \int_0^a \int_0^b U(dx, dy)$. Montrer :

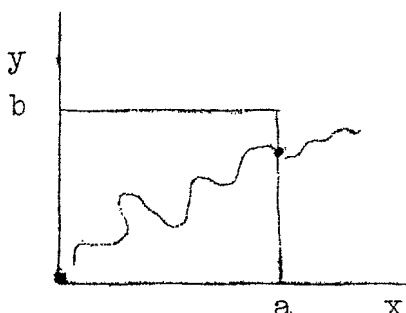
$$U(a, b) = \int_0^\infty [1 - G_a(t)] [1 - G_b'(t)] dt$$

(G_a, G_b' , lois des temps d'atteinte T_a de a et T_b' de b par $X(t)$ et $Y(t)$ respectivement.)

Si $T_{a,b}$ désigne l'instant où le point $[X(t), Y(t)]$ sort du rectangle $(0, a, b)$, on a :

$$P (T_{a,b} \geq t) = [1 - G_a(t)] [1 - G'_b(t)]$$

et par suite : $E (T_{a,b}) = U (a,b)$



Plus généralement, la valeur $U (A)$ de la mesure $U(dx)$ pour un borelien A du plan est l'espérance du temps de séjour dans A .

b/ On désignera par T_a le temps d'atteinte de a par $X(t)$, $Y (T_a)$ la valeur de $Y(t)$ en $t = T_a$, et T'_b le temps d'atteinte de b par $Y(t)$. Montrer que l'on a :

$$T'_b = T_{a,b} + T'_{b-Y(T_a)}$$

(à condition de poser $T'_{b-Y(T_a)} = 0$ pour $Y(T_a) > b$, c'est-à-dire pour $T'_b < T_a$). Passer aux espérances : en désignant par $H_a(dy)$ la loi de $Y(T_a)$, et par U' le potentiel de $Y(t)$, montrer :

$$U'(b) = U(a,b) + \int_0^b U'(b-y) H_a(dy)$$

c/ Cas où $X(t)$ et $Y(t)$ ont la même loi stable $e^{-t\lambda^\alpha - t\mu^\alpha}$. Le potentiel $U(dx,dy)$ a pour transformée de Laplace :

$$\frac{1}{\lambda^\alpha + \mu^\alpha}$$

Il admet la représentation intégrale :

$$U(a, b) = \frac{b^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} - \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \int_0^b \frac{(b-y)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \frac{a^\alpha y^{\alpha-1} dy}{y^{2\alpha} + 2a^\alpha y^\alpha \cos \alpha \pi + a^{2\alpha}}$$

[utiliser c/, déduire $U'(b)$ de ex. 14/, f/ et $H_a(dy)$ de Ex. 7/, c/ et Ex. 6/, b/].