C-24
Septembre 1969

CENTRE DE MORPHOLOGIE MATHEMATIQUE.

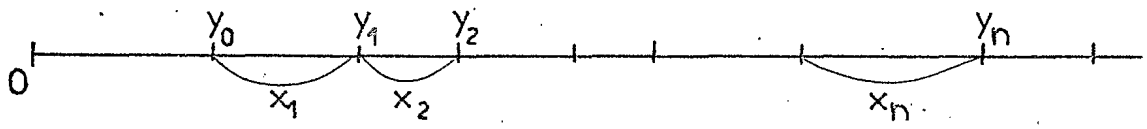
E C O L E D ' E T E 1 9 6 9

COURS DE PROCESSUS S T O C H A S T I Q U E .

G. MATHERON.

I - PROCESSUS DE RENOUVELLEMENT

Soit X une V.A. positive, F(x) sa fonction de répartition, nulle pour x négatif ; pour simplifier les notations, nous supposerons que F admet une densité de probabilité f(x) (nulle pour $x < 0$). Mais les résultats qui suivent ne sont pas liés à cette hypothèse. (Le lecteur qui connait la théorie de la mesure remplacera partout f(x) dx par F(dx) pour obtenir des énoncés généraux ; il faut cependant supposer que la loi F n'est pas concentrée sur les multiples entiers na d'un même nombre a, encore que la théorie se transpose sans peine à ce cas "arithmétique".)



Soient alors X_1, X_2, ... X_n,... une suite de V.A. indépendantes de même loi F, et, sur la demi-droite $(0, \infty)$, les points :

$$Y_1 = X_1$$

$$Y_2 = X_1 + X_2$$

... .

$$Y_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

.....

Ces points définissent une partition aléatoire de la demi-droite en segments dont les longueur X sont indépendantes et obéissent à la même loi F.

Plus généralement, au lieu de partir du point (fixe) 0, on peut partir d'une origine aléatoire Y_o, indépendante des X_i, et dont la loi F_o (de densité f_o) est différente de celle des X_i. On a alors :

$$Y_1 = Y_o + X_1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$Y_n = Y_o + X_1 + \ldots + X_n$$
$$\ldots\ldots . \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

La suite Y_1, Y_2 ... de ces points de discontinuités définit un processus de renouvellement. On s'interroge sur la possibilité de rejeter l'origine de ce processus à $-\infty$, de manière à obtenir une partition aléatoire stationnaire de la droite entière, en segments de longueurs indépendantes obéissant toujours à la même loi F. Précisons :

Soit B_o un évènement, dont la définition met en jeu un nombre (fini ou non) de points x_i de la demi-droite. Le translaté B_x par $x > 0$ de B_o est le même évènement rapporté à l'origine x (défini de la même manière que B_o, mais à partir des points $x + x_i$). $P(B_o)$ et $P(B_x)$ se calculent à partir des lois F et F_o, mais en général, ne coïncident pas. Pour que l'on puisse rejeter l'origine à $-\infty$, et définir une partition aléatoire stationnaire de la droite entière, il faut et il suffit que l'on puisse trouver une loi initiale $F_o = R_o$ telle que :

$$(1) \qquad \forall x > 0 \ , \quad \forall B_o \ , \quad P(B_o) = P(B_x)$$

Cette loi, si elle existe, est unique. Son existence est liée à la propriété suivante (ergodicité) : quelle que soit la loi initiale F_o, et pour tout évènement B_o, $P(B_x)$ tend vers une limite $P(B_\infty)$ pour $x \to \infty$ et cette limite est une probabilité vis à vis de B_o :

(2) $$\lim P(B_x) = P(B_\infty)$$

Cette propriété d'ergodicité ne dépend donc que de la loi F.

En particulier, considérons l'évènement B_o = "$Y_o < h$". On a $P(B_o) = F_o(h)$ par définition. B_x est l'évènement : "il y a un point de discontinuité au moins dans l'intervalle (x,x+h)" Nous poserons :

$$P(B_x) = R(h;x)$$

$R(h;x)$ est la fonction de répartition de $Y_N - x$, Y_N désignant le premier point de discontinuité postérieur à x. C'est la granulométrie résiduelle, en x, ou la loi du temps d'attente résiduel en ce point.

Si l'on connait $R(h;x)$, on peut transporter l'origine en x, et le processus à droite de cette origine se définit à partir de la loi initiale $R(h;x)$ exactement comme le processus rapporté à 0 se définissait à partir de F_o. Autrement dit, pour tout évènement B_o, on calcule $P(B_x)$ à partir de $R(h;x)$ de la même manière que $P(B_o)$ à partir de F_o. Ainsi, pour qu'il existe un processus stationnaire sur la droite entière il faut et il suffit que l'on puisse trouver une loi initiale R_o telle que l'on ait pour tout x

(1') $$R_o(h) = R(h;x)$$

De même, pour que le processus soit ergodique, il faut et il suffit que, quelle que soit la loi initiale F_o, la limite :

(2') $$\lim_{x\to\infty} R(h;x) = R(h;\infty)$$

existe, soit une fonction de répartition, et ne dépende pas de la loi initiale F_o.

Si le processus est à la fois ergodique (vérifie (2')) et stationnaire (vérifie (1') pour une loi $R_o(h)$) on a évidemment $R_o(h) = R(h;\infty)$. Inversement, nous verrons que, si le processus est ergodique, il est également stationnaire pour la loi $R_o(h) = R(h;\infty)$. La condition nécessaire et suffisante très simple pour que le processus possède ces deux propriétés est que la loi F admette une espérance finie $\mu = \int_0^\infty x\, f(x)\, dx$.

Le théorème de renouvellement :

Le premier point de discontinuité Y_o a pour loi F_o (densité f_o). Le second point $Y_1 = Y_o + X_1$, somme de deux variables indépendantes, admet la densité $f_o * f$ et la fonction de répartition $F_o * f$. De même, $Y_n = Y_o + X_1 + \ldots + X_n$ admet la densité =

$$f_o * f^{*(n)} = f_o * \underbrace{f * f * \ldots * f}_{n \text{ fois}}$$

et la fonction de répartition $F_o * f^{*(n)}$. La valeur en x de $F_o * f^{*(n)}$ est donc $P(Y_n < x)$. L'espérance mathématique du nombre aléatoire N_x des points de discontinuités tombés entre 0 et x est donc :

$$E(N_x) = F_o + \sum_{n=1}^{\infty} F_o * f^{(n)} \tag{3}$$

On voit que la fonction $g(x) = E(N_x)$ vérifie l'équation de convolution :

$$g = F_o + g*f \tag{4}$$

Plus généralement, considérons une fonction V(x) bornée et nulle pour x négatif, et l'équation de convolution :

$$g = V + g*f \tag{4'}$$

Appliquons la transformation de Laplace $g \to \gamma$, $V \to \Psi$, $f \to \Phi$ (4') se transforme en :

$$\gamma = \Psi + \gamma\,\Phi$$

d'où :

$$\gamma = \frac{\Psi}{1 - \Phi}$$

On démontre que cette fonction γ est effectivement la transformée de Laplace d'une solution g de (4'), et que g est l'unique solution de (4') nulle pour $x < 0$ et bornée sur tout intervalle fini.

Pourvu que la fonction V(x) vérifie certaines conditions assez larges de régularité (l'intégrale $\int_0^\infty V(x)\,dx$ doit être absolument convergente, et, de plus, V doit vérifier une condition exprimant que ses oscillations s'amortissent à l'infini) on a le théorème suivant :

Théorème du renouvellement. Lorsque x tend vers ∞, la solution g de (4') vérifie :

$$g(x) \to \frac{1}{\mu} \int_0^\infty V(x)\,dx$$

$\mu = \int_0^\infty x\,f(x)\,dx$ désignant l'espérance associée à la loi F de densité

(si $\mu = \infty$, $g(x) \to 0$).

Exemple. Prenons la fonction :

$$g_h(x) = \begin{cases} E[N_x] - E[N_{x-h}] & \text{pour } x \geqslant h \\ E[N_x] & \text{pour } x < h \end{cases}$$

représentant l'espérance du nombre des points de discontinuités tombant dans l'intervalle (x-h,x) (étant entendu qu'il n'y en a pas à gauche de 0 : pour $h > x$, il s'agit en réalité du nombre des points tombés dans (0,x)). Cette fonction vérifie :

$$g_h(x) = F_o(x) - F_o(x-h) + g_h * f$$

et la fonction $V(x) = F_o(x) - F_o(x-h)$ vérifie bien les conditions de régularité voulues. Le théorème donne donc :

$$g_h(x) \to \frac{1}{\mu} \int_o^\infty [F_o(x) - F_o(x-h)]dx = \frac{1}{\mu}\int_o^\infty [1-F_o(x) - 1 + F_o(x-h)]\, dx$$

On remarque que $F_o(x-h) = 0$ pour $x < h$, et

$$\int_o^\infty [1-F_o(x-h)]dx = h + \int_o^\infty [1-F_o(x-h)]\, dx = h + \int_o^\infty [1-F_o(x)]\, dx$$

D'où :

$$g_h(x) = E(N_x) - E(N_{x-h}) \to \frac{h}{\mu}$$

Le nombre moyen de points de discontinuité tombant dans un intervalle de longueur h assez éloigné de l'origine est h/μ ($\mu=E(X)$, longueur moyenne d'un segment de la partition). Autrement dit, le nombre spécifique est égal à l'inverse $1/\mu$ de cette longueur moyenne.

Existence d'une limite ergodique. Considérons la granulométrie résiduelle. $R(h;x)$ au point x comme une fonction $R_h(x)$ de x.

a/ Plaçons nous d'abord dans le cas $Y_o = 0$ (origine en 0). L'évènement "il y a un point de discontinuité entre x et x+h" se réalise de deux façons incompatibles :

- ou bien le premier point de discontinuité Y_1 tombe dans (x,x+h), ce qui a lieu avec la probabilité $F(x+h) - F(x)$:

- ou bien Y_1 tombe en $y < x$, et la probabilité conditionnelle de l'évènement qui nous intéresse est alors $R_h(x - y)$ (le processus recommence à zéro à partir de l'origine y). Par suite on a :

$$R_h(x) = F(x+h) - F(x) + \int_0^x R_h(x-y)\, f(y)\, dy$$

ou encore :

(5) $$R_h = V + R_h * f$$

avec $V(x) = F(x+h) - F(x)$. D'après le théorème, il vient :

$$\lim_{x\to\infty} R_h(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^\infty [F(x+h) - F(x)]\, dx =$$

$$\frac{1}{\mu} \int_0^\infty [1-F(x+h) - (1-F(x))]\, dx = \frac{1}{\mu} \int_0^h [1-F(x)]\, dx$$

Autrement dit :

$$R(h;\infty) = \frac{1}{\mu} \int_0^h [1-F(x)]\, dx$$

Comme $\int_0^\infty [1-F(x)]dx = \mu$, $R(h;\infty)$ est la fonction de répartition de la loi de probabilité de densité $\frac{1 - F(x)}{\mu}$ (pourvu seulement que $\mu < \infty$).

b/ Supposons maintenant que la loi initiale soit F_o, et désignons par $\overline{R}_h(x)$ la granulométrie résiduelle pour cet état initial. On a cette fois :

$$\overline{R}_h(x) = F_o(x+h) - F_o(x) + \int_0^x f_o(y)\, R_h(x-y)\, dy$$

R_h désignant toujours la granulométrie résiduelle du cas a/ ($Y_o = 0$).

Or $F_o(x+h) - F_o(x)$ tend vers 0, et la fonction $f_o * R_h$ vérifie (5) avec $f_o * V$ au lieu de V. On vérifie sans peine que V et $f_o * V$ ont même intégrale. On a donc :

$$\overline{R}_h(x) \to \frac{1}{\mu}\int_o^h [1-F(x)]\,dx$$

Ainsi, le processus est ergodique si, et seulement si, $\mu = E(X) < \infty$.

Existence du processus stationnaire. Prenons comme loi initiale la loi limite que nous avons obtenue ci-dessus :

$$(6) \qquad R_o(h) = \frac{1}{\mu}\int_o^h [1-F(x)]\,dx$$

et montrons qu'on a alors pour tout x : $R_o(h) = \overline{R}(h;x)$. D'après b/, on a :

$$\overline{R}(h;x) = R_o(x+h) - R_o(x) + \frac{1}{\mu}\int_o^x [1-F(y)]R_h(x-y)\,dy$$

Mais $(1 - F) * R_h$ est l'intégrale de $R_h - R_h * f$, et, d'après (5), cette fonction est $V(x) = F(x+h) - F(x)$. Par suite, il vient :

$$\overline{R}(h;x) = \frac{1}{\mu}\int_x^{x+h} [1-F(y)]\,dy + \frac{1}{\mu}\int_o^x [1-F(y) - 1 + F(y+h)]\,dy$$

$$= \frac{1}{\mu}\int_o^h [1-F(x)]\,dx = R_o(h)$$

Avec cette loi initiale, le processus est donc bien stationnaire.

Remarque. On pouvait prévoir à l'avance la forme de cette loi initiale R_o. S'il y a un régime stationnaire, en effet, un point x_o arbitraire appartient à un segment de longueur comprise entre y et y + dy avec la probabilité $dG(y) = \frac{1}{\mu}\, y\, f(y)\, dy$ (granulométries en longueurs). Il occupe

alors une position quelconque sur ce segment ; en particulier, il a la probabilité $\frac{y-h}{y}$ (pour $y > h$, et 0 autrement) d'être situé à une distance supérieure à h de son extrémité droite. On doit donc avoir :

$$1-R_o(h) = \int_h^\infty \frac{y\ f(y)}{\mu}\ \frac{y-h}{y}\ dy = \frac{1}{\mu}\int_h^\infty (y-h)\ f(y)\ dy$$

et en dérivant en h :

$$R'_o(h) = \int_h^\infty \frac{f(y)}{\mu}\ dy = \frac{1-F(h)}{\mu}$$

Application. Soit N_x le nombre des points de discontinuité tombés dans (0,x). Cherchons la loi de cette variable, et, en particulier, la valeur asymptotique pour x grand de son espérance et de sa variance.

On remarque que $N_x < n+1$ équivaut à $Y_n > x$, évènement de probabilité $f^{*(n)} * [1-F_o]$ (ou $1 - F_o(x)$ pour $n = 0$). Par suite, les probabilités $p_n(x) = P(N_x = n)$ sont données par :

$$\begin{cases} p_n(x) = P(N < n+1) - P(N < n) = F_o * (f^{*(n-1)} - f^{*(n)}) \\ p_o(x) = 1 - F_o(x) \end{cases}$$

Introduisons la fonction génératrice $G(s;x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x)\ s^n$ et sa transformée de Laplace en x :

$$\Gamma(s;\lambda) = \int_o^\infty G(s;x)\ e^{-\lambda x}\ dx$$

Il vient :

$$\Gamma(s;\lambda) = \frac{1-\Phi_o}{\lambda} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda}\ \Phi_o\ (\Phi^{n-1} - \Phi^n)\ s^n$$

soit :

$$\Gamma(s;\lambda) = \frac{1-\Phi_o}{\lambda} + \Phi_o \frac{1-\Phi}{\lambda} \frac{s}{1-s\Phi}$$

Les dérivées $G'_s(1;x)$ et $G''_{s2}(1;x)$ donnent les espérances $E(N_x)$ et $E[N_x(N_x-1)]$ qui sont des fonctions de x. les dérivées de Γ, soient :

$$\Gamma'_s(1;\lambda) = \frac{1}{\lambda} \frac{\Phi_o}{1-\Phi}$$

$$\Gamma''_{s2}(1;\lambda) = \frac{2}{\lambda} \frac{\Phi_o \Phi}{(1-\Phi)^2}$$

sont donc les transformées de Laplace de $E(N_x)$ et $E[N_x(N_x-1)]$. Evaluons, par exemple, $E(N_x)$. $\Gamma'(1;\lambda)$ vérifie l'équation :

$$\Gamma'(1;\lambda)\ [1 - \Phi(\lambda)] = \frac{1}{\lambda}\ \Phi_o(\lambda)$$

qui est la transformée d'une équation de renouvellement de type (4'). Au second membre, $\frac{1}{\lambda}\ \Phi_o(\lambda)$ est la transformée de Laplace de $F_o(x)$ qui n'est pas sommable. Pour appliquer le théorème de renouvellement, introduisons la fonction $\Gamma'(1;\lambda) - \frac{1}{\lambda^2\mu}$, transformée de $E(N_x) - x/\mu$. Elle vérifie :

$$\left[\Gamma'(1;\lambda) - \frac{1}{\lambda^2\mu}\right]\ [1-\Phi(\lambda)] = \frac{1}{\lambda}\ \left[\Phi_o(\lambda) - \frac{1-\Phi(\lambda)}{\lambda\mu}\right]$$

Le deuxième membre prend en $\lambda = 0$ la valeur finie : $\frac{1}{2}(\mu + \frac{\sigma^2}{\mu}) - m_o$ (m_o espérance de F_o) pourvu seulement que F admette une <u>variance</u> σ^2 finie. Le théorème de renouvellement donne alors :

$$E(N_x) - \frac{x}{\mu} \to \frac{1}{2}\ (1 + \frac{\sigma^2}{\mu^2}\ ) - \frac{m_o}{\mu}$$

<u>Remarque</u>. Si l'on prend pour F_o la loi stationnaire R_o dont la transformée est $\frac{1-\Phi}{\lambda\mu}$, on trouve :

$$\Gamma'(1;\lambda) = \frac{1}{\lambda^2\mu} \qquad \text{soit} \quad E(N_x) = \frac{x}{\mu}$$

et l'estimation asymptotique ci-dessus donne dans ce cas la valeur exacte. Le nombre spécifique $\nu = 1/\mu$ du processus stationnaire vérifie donc : $\nu = E(N_x)/x$.

Un raisonnement semblable sur $\Gamma''(1;\lambda)$ montre que la partie principale de $E\,[N_x(N_x-1)]$ est :

$$E[N_x(N_x-1)] \approx \frac{x^2}{\mu^2} + \frac{2x}{\mu}\left(\frac{\sigma^2}{\mu^2} - \frac{m_o}{\mu}\right)$$

d'où :

$$E[(N_x)^2] \approx \frac{x^2}{\mu^2} + \frac{2x}{\mu}\left(\frac{\sigma^2}{\mu^2} - \frac{m_o}{\mu}\right) + \frac{x}{\mu}$$

$$[E(N_x)]^2 \approx \frac{x^2}{\mu^2} + \frac{2x}{\mu}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{\sigma^2}{\mu^2} - \frac{m_o}{\mu}\right]$$

et par différence on obtient la variance :

$$D^2(N_x) = \frac{x}{\mu}\,\frac{\sigma^2}{\mu^2}$$

ou, sous forme de variance relative :

$$(7) \qquad \frac{D^2(N_x)}{[E(N_x)]^2} = \frac{1}{E(N_x)}\,\frac{\sigma^2}{\mu^2}$$

Cette formule permet de calculer la précision de l'estimation du nombre spécifique $\nu = 1/\mu$. On notera qu'elle s'applique quelle que soit la loi initiale F_o.

Remarque. Au lieu de compter le nombre N_x de points de discontinuité dans un segment de longueur donnée x, on peut aussi estimer ν en prenant le rapport n/Y_n pour n grand (dans le premier cas, on rapporte le nombre aléatoire N_x à la longueur donnée x ; dans le second, on rapporte le nombre donné n à la longueur aléatoire Y_n. Pour n assez grand, la variance relative de n/Y_n est $\frac{1}{n}\ \frac{\sigma^2}{\mu^2}$, ce qui signifie, d'après (7), que les deux procédés d'estimation sont asymptotiquement équivalents.

Démontrons le dans le cas $Y_o = 0$ (le cas général s'en déduit sans peine). La loi de Y_n admet la transformée $[\Phi(\lambda)]^n$, celle de Y_n/n : $[\Phi\ (\frac{\lambda}{n})\ ]^n$. Pour calculer les espérances de n/Y_n et de son carré, notons la règle :

$$E[\frac{1}{Z^k}] = \frac{1}{(k-1)} \int_o^\infty \lambda^{k-1}\ \Psi(\lambda)\ d\lambda$$

avec $\Psi(\lambda) = E(e^{-\lambda Z})$. Ici, on trouve :

$$E(\frac{n}{Y_n}) = \int_o^\infty [\Phi\ (\frac{\lambda}{n})\ ]^n\ d\lambda$$

Mais :

$$[\Phi(\frac{\lambda}{n})\ ]^n = e^{n \log \Phi\ (\frac{\lambda}{n})} = e^{-\lambda\mu + \frac{1}{2n}\ \sigma^2\ \lambda^2 + O(\frac{1}{n})}$$

En négligeant les termes d'ordre supérieur à 1 en 1/n, on aura donc :

$$E[\frac{n}{Y_n}] = \int_o^\infty e^{-\lambda\mu}\ [1 + \frac{1}{2n}\ \sigma^2\ \lambda^2] = \frac{1}{\mu} + \frac{1}{n}\ \frac{\sigma^2}{\mu^3}$$

De la même manière, on trouve :

$$E[(\frac{n}{Y_n})^2] = \int_o^\infty \lambda[\Phi\ (\frac{\lambda}{n})\ ]^n d\lambda = \frac{1}{\mu^2} + \frac{3}{n}\ \frac{\sigma^2}{\mu^4}$$

D'où la variance : $D^2(\frac{n}{Y_n}) = \frac{1}{n} \frac{\sigma^2}{\mu^2}$

et la variance relative annoncée $\frac{1}{n} \frac{\sigma^2}{\mu^2}$

Processus de poisson.

Le processus de Poisson correspond au cas particulier où la loi F est une loi exponentielle de densité a e^{-ax}. La loi initiale stationnaire R_o est alors identique à la loi F : en effet, on a ici :

$$1-F(x) = e^{-ax}, \quad \mu = \int_0^\infty a\ e^{-ax}\ x\ dx = \frac{1}{a}$$

et la densité $\frac{1-F}{\mu}$ de la loi R_o est $a\ e^{-ax} = f$.

Cette circonstance est liée à une propriété caractéristique de la loi exponentielle, qui est de représenter un phénomène exempt de vieillissement. Interprétons, en effet, la loi F(x) comme la loi de la durée de vie d'un certain phénomène. Sachant que ce phénomène a déjà duré le temps x, cherchons la loi de sa durée de vie résiduelle Y. On a :

$$P(Y > y) = P(X > x+y \mid X > x)$$

soit, d'après la définition des probabilités conditionnelles :

$$P(Y > y) = \frac{P(X > x+y \text{ et } X > x)}{P(X > x)} = \frac{P(X > x+y)}{P(X > x)}$$

Soit alors $F_x(y)$ la fonction de répartition de la durée de vie résiduelle. On a :

$$1 - F_x(y) = \frac{1 - F(x+y)}{1 - F(x)}$$

Pour $1 - F(x) = e^{-ax}$ (loi exponentielle), il vient :

$$1 - F_x(y) = \frac{e^{-a(x+y)}}{e^{-ax}} = e^{-ay} = 1 - F(y)$$

La durée de vie résiduelle obéit à la même loi F que la durée de vie totale. Inversement, on montre facilement que la loi exponentielle est la seule loi qui possède cette propriété.

Ainsi, dans le processus de Poisson, on peut prendre comme origine un point quelconque ou un point de discontinuité sans modifier la loi du processus. Plus précisément, x désignant un point quelconque, il y a indépendance entre tout évènement antérieur à x et tout évènement postérieur à x. Parmi les processus de renouvellement, le processus de Poisson est le seul qui vérifie cette propriété markovienne (puisque la loi exponentielle est la seule loi exempte de vieillissement).

Loi des points de discontinuité. Y_1, Y_2, .. Y_n : ce sont les itérées f, f_*f, $f^{*(n)}$ de la loi exponentielle, c'est à dire les lois gamma :

$$f^{*(n)}(x) = \frac{a^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-ax}$$

La transformée de Laplace de f est $\frac{a}{a+\lambda}$. Celle de $f^{*(n)}$ est donc :

$$[\Phi(\lambda)]^n = \left(\frac{a}{a+\lambda}\right)^n$$

Loi de N_x. On peut partir de la transformée de Laplace $\Gamma(s;\lambda)$ de la fonction génératrice $G(s,x)$ de N_x. On a vu que l'on a :

$$\Gamma(s;\lambda) = \frac{1 - \Phi_0}{\lambda} + \Phi_0 \frac{1-\Phi}{\lambda} \frac{s}{1-s\Phi}$$

Ici, $\Phi = \Phi_0 = \frac{a}{a+\lambda}$, et on trouve :

$$\Gamma(s;\lambda) = \frac{1-\Phi}{\lambda} \frac{1}{1-s\Phi} = \frac{1}{a(1-s) + \lambda}$$

D'où :

$$G(s;x) = e^{-ax(1-s)}$$

c'est à dire (loi de Poisson) : $p_n(x) = \frac{(ax)^n}{n!} e^{-ax}$

(On peut aussi faire un calcul direct : $p_o(x) = 1 - F(x) = e^{-ax}$, puis :

$$p_n(x) = \int_o^x [f^{*(n)}(y) - f^{*(n+1)}(y)]\, dy =$$

$$= \int_o^x [\frac{an}{(n-1)!} y^{n-1} - \frac{a^{n+1}}{n!} y^n] e^{-ay} dy = \int_o^x \frac{d}{dy}(\frac{(ay)^n}{n!} e^{-ay})\, dy =$$

$$= \frac{(ax)^n}{n!} e^{-ax}$$

On notera que les nombres N_x et $N_{x+h} - N_h$ ont la même loi, et que les nombres :

$N_b - N_a$ des points tombés dans (a,b), et

$N_{b'} - N_{a'}$ des points tombés dans (a',b')

sont indépendants dès que les intervalles (a,b) et (a',b') sont disjoints.

II - PROCESSUS CYCLIQUES A DEUX ETATS

Nous allons maintenant considérer un processus dans lequel chaque point $x > 0$ est susceptible d'appartenir à l'un ou l'autre des états e_0, e_1, e_2 ... (en nombre fini ou infini dénombrable)) : si x est interprété comme un temps, les e_i représentent les états par lesquels passe un système physique dans son évolution aléatoire. Si au contraire, on s'intéresse à un milieu à une dimension, les e_i sont les constituants de ce milieu. On a donc sur la demi-droite une succession de segments de longueurs aléatoires affectées, de manière également aléatoire, aux différents états. Mais ni ces longueurs ni ces états ne sont indépendants les uns des autres.

Nous dirons qu'un état e_o est récurrent si le processus repart à zéro chaque fois que le système entre dans l'état e_o : si Y_1, Y_2,... désignent les époques successives où le système entre dans e_o, ces époques constituent un processus de renouvellement, et, sur chacun des tronçons (Y_i, Y_{i+1}), l'évolution du système est indépendante de tout évènement antérieur à Y_i ou postérieur à Y_{i+1}, et cette évolution est régie par la même loi pour tous ces tronçons. On suppose $P(Y_1 < \infty) = 1)$.

En ce qui concerne le début du processus, on peut admettre que l'origine $0 = Y_o$ est elle-même le début d'un état e_o, et, dans ce cas, la loi d'évolution sur $(0,Y_1)$ est la même que sur les autres tronçons. On peut aussi supposer que l'on a un état initial et une loi d'évolution différente sur $(0,Y_1)$, pourvu seulement que $P(Y_1 < \infty) = 1$.

Désignons par $P_k(x)$ la probabilité pour que le point x appartienne à l'état e_k. On a le résultat fondamental suivant :

Théorème des états récurrents. Les limites $\lim_{x\to\infty} P_k(x) = p_k$ existent, vérifient $\sum_k p_k = 1$, et ne dépendent pas du choix de la loi d'évolution choisie sur le tronçon $(0,Y_1)$ initial, pourvu seulement que l'espérance μ de la durée du cycle soit finie.

a/ Supposons d'abord que 0 soit le début d'un état e_o. Considérons l'évènement "$Y_1 > x$ et x est dans l'état e_k". Soit $R_k(x)$ sa probabilité On a :

$$\sum_k R_k(x) = P\ (Y_1 > x) = 1 - F(x)$$

(F est la fonction de répartition des longueurs des tronçons successifs, c'est à dire la loi de la durée d'un cycle complet). L'évènement "$x \in e_k$" se réalise de deux manières incompatibles :

- ou bien $x \in e_k$ et $Y_1 > x$, avec la probabilité $R_k(x)$

- ou bien Y_1 a pris une valeur $y \leqslant x$: dans ce dernier cas, la probabilité conditionnelle de l'évènement qui nous intéresse est $P_k(y-x)$, puisque e_o est récurrent. D'où :

$$P_k(x) = R_k(x) + \int_o^x P_k(y-x)\ f(y)\ dy$$

Le théorème de renouvellement donne ensuite :

$$P_k(x) \to \frac{1}{\mu}\int_o^\infty R_k\ (x)\ dx = p_k$$

Enfin $\sum_k R_k(x) = 1 - F(x)$ entraine $\sum p_k = 1$.

b/ Si l'on a une loi d'évolution différente sur le premier tronçon, posons :

$$F_o(y) = P(Y_1 < y)\ ;\ \overline{R}_k(x) = P(Y_1 > y \text{ et } x \in p_k)$$

et $\overline{P}_k(x) = P(x \in e_k)$. On a cette fois :

$$\overline{P}_k(x) = \overline{R}_k(x) + \int_o^x P_k(x-y)\ f_o(y)\ dy$$

Mais $\overline{R}_k(x) \leqslant 1 - F_o(x)$ tend vers 0, et le produit de convolution $P_k * f_o$ a même limite à l'infini que P_k, d'où à nouveau :

$$\overline{P}_k(x) \to \frac{1}{\mu} \int_o^\infty R_k(x)\, dx = p_k$$

Ainsi, pourvu seulement que la loi F du temps de retour de l'état récurrent admette une espérance μ finie, le processus est ergodique, et, en particulier, on peut trouver une loi initiale pour laquelle il est stationnaire.

Exemples -

1/ Processus de renouvellement à deux états. On fait alterner sur la droite des segments de e_o et de e_1 dont les longueurs sont indépendantes et obéissent aux lois F_o et F_1. Chacun des deux états est récurrent. La loi F de la durée du cycle admet la densité $f_o * f_1$ (somme de deux longueurs indépendantes de lois f_o et f_1). On a ici : $R_o(x) = 1 - F_o(x)$, d'où :

$$p_o = \frac{1}{\mu} \int_o^\infty [1 - F_o(x)]\, dx$$

Soient m_o et m_1 les espérances des lois F_o et F_1. On a $m_o = \int_o^\infty [1 - F_o(x)]\, dx$ et $\mu = m_o + m_1$, d'où :

$$(8) \qquad p_o = \frac{m_o}{m_o + m_1} \quad , \quad p_1 = \frac{m_1}{m_o + m_1}$$

2/ Processus cyclique à deux états. Soit un processus à deux états e_o, e_1 tel que l'état e_o soit récurrent. La longueur d'un segment e_o est donc indépendante des évènements antérieurs à l'origine de ce segment. Par contre, la longueur d'un segment e_1 n'est plus indépendante de la longueur du segment e_o qui le précède. Nous désignerons par $F(x_o;x_1)$ la loi a deux variables des longueurs X_o et X_1 des deux segments e_o et e_1 d'un cycle. La granulométrie (en nombre) des segments

e_o est la loi marginale $F_o(x) = F(x,\infty)$, et celle des segments e_1 est $F_1(x) = F(\infty,x)$. La granulométrie conditionnelle $F_1(x|x_o)$ de la longueur d'un segment e_1 précédé d'un segment e_o de longueur x_o admet la densité :

$$f_1(x|x_o) = \frac{f(x_o,x)}{f(x_o)}$$

La durée L d'un cycle, somme des deux variables X_o et X_1 non indépendantes, admet la loi F(l) de densité :

$$f(l) = \int_o^l f(x,l-x)\,dx$$

Posons : $\Phi(\lambda,\mu) = \int_o^\infty\int_o^\infty e^{-\lambda x_o - \mu x_1} f(x_o,x_1)\,dx_o\,dx_1$

On a les transformées de Laplace suivantes :

$$(9) \qquad \begin{cases} f_o \to \Phi_o(\lambda) = \Phi(\lambda,0) \\ f_1 \to \Phi_1(\lambda) = \Phi(0,\lambda) \\ f \to \Psi(\lambda) = \Phi(\lambda,\lambda) \end{cases}$$

C'est à l'étude de ce processus cyclique que nous consacrons ce chapitre. Le processus de renouvellement à deux états de l'exemple 1/ en est un cas particulier (cas où $F(x_o,x_1) = F_1(x_1)\,F_o(x_o)$)

Les limites ergodiques p_o et p_1 sont encore :

$$(8) \qquad p_o = \frac{m_o}{m_o + m_1} \qquad p_1 = \frac{m_1}{m_o + m_1}$$

(même démonstration que dans l'exemple 1/ à partir du théorème sur les états récurrents). On formera sans difficulté la loi initiale pour laquelle le processus est stationnaire.

Nombre spécifique. Désignons par N_x le nombre de segments e_o rencontrés de 0 à x (plus précisément : le nombre des extrémités gauches de tels segments contenues dans (0,x)). Comme ces extrémités gauches constituent un processus de renouvellement de loi F, on peut appliquer les résultats du chapitre précédent. En particulier :

$$(10)\quad \begin{cases} \nu = \frac{1}{x}\, E(N_x) = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_o + m_1} \\ \frac{D^2(N_x)}{[E(N_x)]^2} = \frac{1}{E(N_x)}\,\frac{\sigma^2}{\mu^2} = \frac{1}{E(N_x)}\,\frac{\sigma_o^2 + \sigma_1^2 + 2\,\sigma_{o_1}}{(m_o + m_1)^2} \end{cases}$$

(μ et σ^2 moyenne et variance de la durée du cycle, σ_o^2, σ_1^2, σ_{o_1} variances et covariance des durées des deux constituants du cycle).

La Covariance :

Proposons nous de calculer les fonctions de covariance du processus cyclique stationnaire à deux états :

$$C_{ij}(h) = P(x \in e_i,\ x+h \in e_j)$$

Les relations :

$$\begin{cases} C_{11}(h) = p_1 - C_{10}(h) \\ C_{00}(h) = p_0 - C_{01}(h) \\ C_{10}(h) = C_{01}(h) \end{cases}$$

montrent qu'il suffit, par exemple, de calculer $C_{10}(h)$.

a/ Calculons d'abord la probabilité conditionnelle $H_o(h)$ d'avoir $x+h \in e_o$ sachant que x est l'origine d'un segment e_o. Cet évènement se réalise de deux façons : ou bien ce segment e_o a une longueur $\geqslant h$, ou bien le cycle inauguré en x s'achève en x+y, $y < h$, et la probabilité conditionnelle de l'évènement qui nous intéresse est alors $H_o(h-y)$. D'où :

$$H_o(h) = 1 - F_o(h) + \int_o^h f(y)\, H_o(h-y)\, dy$$

Appliquons la transformation de Laplace :

$$H_o \to \eta_o \ , \quad f_o \to \Phi_o, \quad f \to \Psi$$

Il vient :

$$\eta_o = \frac{1 - \Phi_o}{\lambda} + \eta_o \Psi$$

c'est-à-dire :

$$\eta_o = \frac{1}{\lambda} \frac{1 - \Phi_o}{1 - \Psi} \tag{11}$$

b/ Calculons maintenant $C_{10}(h)$, ou plutot sa transformée de Laplace χ_{10}. L'évènement "$x \in e_1$ et $x+h \in e_o$" se décompose comme suit : $x \in e_1$ (probabilité $p_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_o}$) ; le segment e_1 auquel appartient x s'arrête en x+y, $y \leqslant h$ (probabilité $\frac{1-F_1(y)}{m_1}\, dy$: granulométrie résiduelle du cas stationnaire) ; enfin, ce point x+y étant l'origine d'un

nouveau cycle indépendant du passé, on a alors $x+h \in e_o$ avec la probabilité conditionnelle $H_o(h-y)$, d'où :

$$C_{10}(h) = p_1 \int_o^h \frac{1-F_1(y)}{m_1} H_o(h-y)\, dy$$

Prenons la transformée de Laplace, en remarquant de plus que

$$\frac{p_1}{m_1} = \frac{1}{m_o + m_1} \qquad \chi_{10}(\lambda) = \frac{1}{m_o + m_1} \frac{1-\Phi_1}{\lambda} \eta_o$$

Compte tenu de (11), on trouve donc :

$$(12) \qquad \chi_{10}(\lambda) = \frac{1}{m_o + m_1} \frac{(1-\Phi_1)(1-\Phi_o)}{\lambda^2(1-\Psi)}$$

Cette formule capitale permet de calculer la covariance à partir des deux granulométries en nombre Φ_o et Φ_1 et de la loi Ψ du cycle : on n'oubliera pas qu'elle ne s'applique qu'aux processus cycliques.

Remarque. La formule(12) montre que la covariance $C_{10}(h)$ vérifie l'équation de convolution :

$$(12') \qquad C_{10}(h) = p_1 \frac{1-F_1}{m_1} * (1-F_o) + f * C_{10}$$

On peut obtenir directement (12') par le raisonnement plus subtil suivant : l'évènement "$0 \in e_1$ et $h \in e_o$" se réalise comme suit :

- ou bien le segment e_1 contenant 0 s'arrête en $y < h$, et le segment e_o suivant contient h : probabilité

$$p_1 \int_o^h \frac{1-F_1(y)}{m_1} [1-F_o(h-y)]\, dy = p_1 \frac{1-F_1}{m_1} * (1-F_o)$$

- ou bien un cycle complet (e_o, e_1) s'intercale entre 0 et h. Soient l la longueur de ce cycle ($l < h$), et a et a+l ses deux extrémités. La position a de son origine ne joue aucun rôle : comme a+l est l'origine d'un nouveau cycle indépendant de ce qui précède, tout se passe comme si l'on avait retranché la longueur l au segment (0,h) en recollant les deux extrémités a et a+l du cycle intermédiaire. La probabilité conditionnelle de notre évènement est donc $C_{10}(h-l)$ lorsque l est fixée, d'où :

$$C_{10}(h) = p_1 \int_o^h \frac{1-F_1(x)}{m_1} [1-F_o(h-x)]dx + \int_o^h f(l) C_{10}(h-l)dl$$

c'est-à-dire (12'). On notera que ce raisonnement direct ne s'appliquerait pas à $C_{01}(h)$, puisque e_o seul est récurrent. Mais $C_{01}(h) = C_{10}($ et, de fait, la formule (12) est symétrique en e_o, e_1.

Exemple 1/ Pseudo-périodicités. Considérons le processus de renouvellement à deux états, où les longueurs successives des segments e_o, e_1 sont indépendantes et obéissent à la même loi gamma de densité =

$$f_o(x) = f_1(x) = a^2 x\, e^{-ax}$$

On a :

$$\Phi_o = \Phi_1 = \left(\frac{a}{a+\lambda}\right)^2 \quad ; \quad \Psi = \Phi_o \Phi_1 = \left(\frac{a}{a+\lambda}\right)^4$$

et la formule (12) donne :

$$\chi_{10} = \frac{a}{4\lambda^2} \frac{1 - \left(\frac{a}{a+\lambda}\right)^2}{1 + \left(\frac{a}{a+\lambda}\right)^2} = \frac{a}{4\lambda^2} \frac{(\lambda+a)^2 - a^2}{(\lambda+a)^2 + a^2}$$

La fonction $C_{11}(h) - (p_1)^2 = p_1\ p_o - C_{10}(h) = \frac{1}{4} - C_{10}(h)$ admet donc la transformée :

$$\frac{1}{4\lambda} - \frac{a}{4\lambda^2}\ \frac{(\lambda+a)^2 - a^2}{(\lambda+a)^2 + a^2} = \frac{1}{4}\ \frac{a+\lambda}{(a+\lambda)^2 + a^2}$$

Or, l'exponentielle-cosinus $e^{-ax}\cos(bx)$ a pour transformée $\frac{a+\lambda}{(a+\lambda)^2 + b^2}$

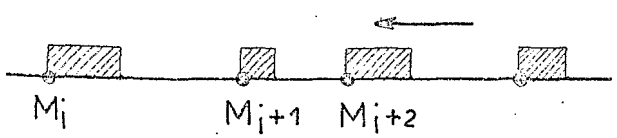
On a donc :

$$C_{11}(h) = C_{oo}(h) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\ e^{-ax}\cos ax$$

Bien qu'il s'agisse d'un pur processus de renouvellement, avec indépendance de l'avenir et du passé en tout point de changement d'état, le phénomène présente une périodicité apparente. L'origine de cette pseudo-périodicité vient du fait que les granulométries F_o et F_1 sont déjà assez resserrées autour de leurs modes : si la longueur du cycle varie peu autour de son mode, on observe une périodicité dont la période est de l'ordre de ce mode, et qui s'amortit d'autant plus lentement que la loi du cycle est plus concentrée autour de son mode.

Cet exemple doit mettre en garde contre une interprétation génétique trop hâtive des périodicités que l'on observe expérimentalement. Elles n'impliquent en aucune manière que le phénomène résulte de la déformation d'un réseau périodique parfait qui aurait préexisté à l'état actuel.

Exemple 2/ Schéma de migration. Soit un milieu à une dimension présentant une teneur initiale p_o constante en un certain élément migrant e_i. On met en place des germes aléatoires M_i



selon un processus de Poisson de paramètre a, et chaque germe M_i rassemble sur sa droite la totalité de la substance migrante présente entre M_i et M_{i+1} : si L est la distance intergermes, on observe les segments $p_o L$ et $p_1 L$ de e_o et e_1 ($p_o + p_1 = 1$). La longueur L du cycle obéit à la loi exponentielle $1 - F(l) = e^{-al}$. Les granulométries en nombre sont encore exponentielles, avec des paramètres modifiés :

$$1 - F_o(l) = e^{-\frac{a}{p_o} l} \quad ; \quad 1 - F_1(l) = e^{-\frac{a}{p_1} l}$$

On a donc :

$$\Psi = \frac{a}{a+\lambda} \ , \ \Phi_o = \frac{a}{a + p_o\lambda} \ , \ \Phi_1 = \frac{a}{a + p_1\lambda}$$

La formule (12) donne ensuite :

$$\chi_{10} = \frac{a\, p_o\, p_1}{\lambda} \ \frac{a + \lambda}{(a + p_o\lambda)\ (a + p_1\lambda)}$$

D'où :

$$\chi_{11} - \frac{p_1^{\,2}}{\lambda} = \frac{p_1\, p_o}{\lambda} - \chi_{10} = \frac{(p_o\, p_1)^2\, \lambda}{(a+p_o\lambda)(a+p_1\lambda)}$$

$$= \frac{(p_o\, p_1)^2}{p_1 - p_o} \left[\frac{1}{a + p_o\lambda} - \frac{1}{a + p_1\lambda} \right]$$

On en déduit :

$$C_{11}(h) - p_1^{\,2} = \frac{p_o\, p_1}{p_1 - p_o} \left[p_1\, e^{-\frac{a}{p_o} h} - p_o\, e^{-\frac{a}{p_1} h} \right]$$

La Portée :

Dans un processus stationnaire à deux états, on appelle portée le nombre :

$$a = \frac{2}{p_o\ p_1} \int_o^\infty [C_{11}(h) - p_1^{\,2}]\ dh = \frac{2}{p_o\ p_1} \int_o^\infty [C_{oo}(h) - p_o^{\,2}]\ dh$$

L'intérêt de cette notion est le suivant : sur l'intervalle $(0,\ell)$, la longueur cumulée $L_o(l)$ occupée par les segments e_o est une variable aléatoire d'espérance $p_o L$. Le rapport $\frac{L_o(l)}{l}$ (teneur moyenne en e_o du segment l) a pour espérance p_o et sa variance, pour l grand, a pour partie principale :

$$\frac{D^2[L_o(l)]}{l^2} = \frac{a}{l}\ p_o\ p_1 \qquad (13)$$

L'échantillon de longueur l est donc équivalent à un nombre $n = l/a$ de prélèvements ponctuels indépendants de variance $p_o\ p_1$. Ainsi, la portée donne une mesure de la dimension des structures du phénomène, et permet de plus de résoudre le problème de l'estimation de la teneur p_o en e_o à partir de la longueur $L_o(l)$ occupée sur un segment de longueur l.

Calculons la portée a dans le cas d'un cycle à deux états. Nous désignerons par m_o et m_1, σ_o^2, σ_1^2 et σ_{o1} les espérances, les variances et la covariance des longueurs des deux segments e_o, e_1 d'un cycle :

$$\Phi_o(\lambda) = 1 - \lambda\ m_o + \tfrac{1}{2}\ \lambda^2(m_o^{\,2} + \sigma_o) + \ldots$$

$$\Phi_1(\lambda) = 1 - \lambda\ m_1 + \tfrac{1}{2}\ \lambda^2(m_1^{\,2} + \sigma_1^2) + \ldots$$

$$\Psi\ (\lambda) = 1 - \lambda\ (m_o + m_1) + \tfrac{1}{2}\ \lambda^2[(m_o+m_1)^2+\sigma_o^2 +\sigma_1^2 + 2\sigma_{01}]+ \ldots$$

On a :

$$a = \frac{2}{p_1\ p_o} \int_o^\infty [p_1\ p_o - C_{o1}(h)]dh = \frac{2}{p_1\ p_o}\ \lim_{\lambda \to o}[\frac{p_1\ p_o}{\lambda} - \chi_{01}(\lambda)]$$

Or (12) conduit au développement limité :

$$\chi_{10}(\lambda) = \frac{m_o\ m_1}{(m_o\ m_1)^2}\ \frac{1 - \frac{\lambda}{2}\ (m_o + \frac{\sigma_o^2}{m_o} + m_1 + \frac{\sigma_1^2}{m_1})}{\lambda\ [1 - \frac{\lambda}{2}\ (m_o + m_1 + \frac{\sigma_o^2 + \sigma_1^2 + 2\ \sigma_{o1}}{m_o + m_1}}$$

$$= \frac{p_o\ p_1}{\lambda}\ [1 - \frac{\lambda}{2}\ (\frac{\sigma_o^2}{m_o} + \frac{\sigma_1^2}{m_1} - \frac{\sigma_o^2 + \sigma_1^2 + 2\ \sigma_{o1}}{m_o + m_1})\ ]$$

D'où :

$$a = \frac{\sigma_o^2}{m_o} + \frac{\sigma_1^2}{m_1} - \frac{\sigma_o^2 + \sigma_1^2 + 2\ \sigma_{o1}}{m_o + m_1} =$$

$$= \frac{1}{m_o\ m_1\ (m_o + m_1)}[m_1\ \sigma_o^2 + m_o\ \sigma_1^2 - 2\ m_1\ m_o\ \sigma_{o1}]$$

$$= \frac{m_o\ m_1}{m_o + m_1}\ [\frac{\sigma_o^2}{m_o^2} + \frac{\sigma_1^2}{m_1^2} - \frac{2\ \sigma_{o1}}{m_o\ m_1}]$$

L'expression entre crochets est la variance de $\frac{X_o}{m_o} - \frac{X_1}{m_1}$, X_o et X_1 désignant les longueurs des états e_o et e_1 d'un même cycle. On a donc :

(14) $$\boxed{a = p_o\ p_1\ (m_o + m_1)\ D^2\ [\frac{X_o}{m_o} - \frac{X_1}{m_1}]}$$

formule valable pour tout processus cyclique. Dans le cas d'un processus de renouvellement à deux états, on a $\sigma_{01} = 0$, et la formule se réduit à :

$$a = p_o\, p_1\, (m_o + m_1)\, \left[\frac{\sigma_o^2}{m_o^2} + \frac{\sigma_1^2}{m_1^2}\right]$$

soit :

$$a = p_1 \frac{\sigma_o^2}{m_o} + p_o \frac{\sigma_1^2}{m_1}$$

Remarque. On peut aussi estimer la teneur en $e_o(p_o)$ en prenant un nombre donné n de cycles entiers, en mesurant les longueurs totales $L_o(n)$ et $L_1(n)$ qui reviennent à chacun des deux états dans ces n cycles, et en prenant le rapport $\frac{L_o(n)}{L_o(n)+L_1(n)}$. On démontre que cet estimateur a une variance relative asymptotiquement égale à celle de l'estimateur précédent (rapport $L_o(1)/1$, où la longueur totale 1 est choisie d'avance.

Processus de Markov à deux états.

Considérons le cas particulier du processus de renouvellement à deux états dont les granulométries sont exponentielles :

$$1 - F_o(x) = e^{-a_o x}, \quad 1 - F_1(x) = e^{-a_1 x}$$

D'après la propriété caractéristique de la loi exponentielle, les granulométries résiduelles sont identiques aux granulométries en nombre F_o et F_1. Cela signifie que, si l'on sait, par exemple, que le point x appartient à l'état e_o le processus se déroule à droite de x comme si x était l'origine d'un segment e_o. Il y a donc indépendance conditionnelle entre tout évènement antérieur et tout évènement postérieur à x dès que l'on connaît l'état du point x. Nous dirons que le processus est markovien chaque fois que cette indépendance conditionnelle sera réalisée.

La covariance $C_{ij}(h)$ se calcule à partir de (12) avec :

$$\Phi_o = \frac{a_o}{a_o + \lambda} \ , \ \Phi_1 = \frac{a_1}{a_1 + \lambda} \ , \ \Psi = \frac{a_o\, a_1}{(a_o + \lambda)\ (a_1 + \lambda)}$$

On trouve :

$$\chi_{10}(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\ \frac{a_o\, a_1}{a_o+a_1}\ \frac{1}{a_o+a_1+\lambda}$$

D'où :

$$C_{10}(h) = \frac{a_o\, a_1}{a_o+a_1} \int_o^h e^{-(a_o+a_1)x}\, dx = \frac{a_o\, a_1}{(a_o+a_1)^2}\ [1 - e^{-(a_o+a_1)h}]$$

D'ailleurs :

$$m_o = \frac{1}{a_o} \ , \ m_1 = \frac{1}{a_1} \ , \ m_o + m_1 = \frac{a_o + a_1}{a_o\, a_1}$$

$$p_o = \frac{m_o}{m_o + m_1} = \frac{a_1}{a_o + a_1} \ , \ p_1 = \frac{m_1}{m_o + m_1} = \frac{a_o}{a_o + a_1}$$

D'où :

$$C_{10}(h) = p_o\, p_1\ [1 - e^{-(a_o + a_1)h}]$$

et par suite :

$$\begin{cases} C_{00}(h) = p_o\ [p_o + p_1\, e^{-(a_o + a_1)h}] \\ C_{11}(h) = p_1\ [p_1 + p_o\, e^{-(a_o + a_1)\, h}] \end{cases}$$

Probabilités de transition. D'après la propriété markovienne, le processus est défini par les probabilités de transition $P_{ij}(h) = \frac{1}{p_i}\, C_{ij}(h)$ (probabilité conditionnelle d'avoir $x+h \in e_j$ si $x \in e_i$).

Elles constituent la matrice de transition :

$$P(h) = \begin{pmatrix} p_o + p_1 e^{-ah} & p_1 - p_1 e^{-ah} \\ p_o + p_o e^{-ah} & p_1 - p_o e^{-ah} \end{pmatrix}$$

(avec $a = a_o + a_1$). Cette matrice vérifie la relation de Markov :

$$P(h + h') = P(h)\ P(h')$$

III CHAINES DE MARKOV (homogènes, à temps discret)

Nous considérons un système physique susceptible de prendre l'un ou l'autre des états e_1, e_2, ... en nombre fini ou infini dénombrable. Nous observons ce phénomène aux instants discrets t = 1, 2, 3, ... Nous supposons :

a/ (Homogénéité dans le temps) Les probabilités de transition sont stationnaires : autrement dit, la probabilité conditionnelle d'avoir l'état e_j au temps m+1 sachant qu'on avait l'état e_i au temps m ne dépend pas de l'instant considéré m. Nous désignerons cette probabilité de transition par Πij.

b/ (Propriété markovienne) Conditionnellement lorsque l'on connait l'état pris par le système à un instant m, il y a indépendance entre tout évènement antérieur et tout évènement postérieur à m : ou encore, lorsque le présent est connu, l'avenir ne dépend plus du passé.

Lorsque ces deux propriétés sont vérifiées, on dit que le processus est une chaine de Markov homogène (à temps discret).

Probabilités de transition d'ordre n. Sachant qu'on a e_i au temps m, la probabilité d'avoir e_j au temps m+2 est :

$$\Pi_{ij}^{(2)} = \sum_k \Pi_{ik} \Pi_{kj}$$

Cela résulte du fait que l'on doit passer par un état quelconque e_k au temps intermédiaire m+1, et que la probabilité conditionnelle d'avoir e_j au temps m+2 est alors Π_{kj} d'après la propriété de Markov.

Plus généralement, si $\pi_{ij}^{(n)}$ est la probabilité de transition de e_i au temps m à e_j au temps m+n, on a de la même façon :

$$(M) \qquad \pi_{ij}^{(m+n)} = \sum_k \pi_{ik}^{(m)} \pi_{kj}^{(n)}$$

(relation de Markov).

Sous forme matricielle, la relation de Markov exprime que la matrice de transition d'ordre n est la puissance $n^{ième}$ de la matrice π :

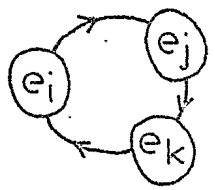
$$(M') \qquad \pi^{(n)} = \pi^n$$

Classification des états :

Etats essentiels et chaines irréductibles. Nous dirons qu'il existe un chemin de l'état e_i à l'état e_j (ou que e_i peut être atteint à partir de e_j) si une transition de e_i à e_j est possible avec une probabilité non nulle, c'est à dire s'il existe un entier $n > 0$ avec $\pi_{ij}^{(n)} > 0$.

Un état e_i est non essentiel s'il existe un état e_j accessible à partir de e_i sans chemin de retour de e_j à e_i. Un état e_i est essentiel si pour tout e_j accessible à partir de e_i il existe un chemin de retour de e_j à e_i.

A partir d'un état essentiel, on ne peut atteindre que des états essentiels. En effet, soit e_i un état essentiel et e_j un état accessible à partir de e_i. Montrons que e_j est essentiel. Si e_k est atteint à partir de e_j, il existe un chemin joignant e_i à e_k (puisque l'on va de e_i à e_j puis de e_j à e_k avec des probabilités non nulles). Comme e_i est essentiel, il existe un chemin de retour de e_k à e_i, et par suite on peut aller de e_k à e_j (en passant par e_i) : e_j est donc essentiel.

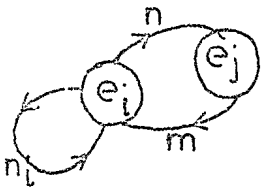


Entre états essentiels, la relation "il existe un chemin de e_i à e_j" est reflexive (on peut aller de e_i à e_i, puisque l'on peut revenir.

à e_i à partir de tout état que l'on a atteint en partant de e_i) ; elle est symétrique (s'il y a un chemin de e_i à e_j, il y a un chemin de retour de e_j à e_i d'après la définition des états essentiels) ; elle est transitive enfin (si on peut aller de e_i à e_j puis de e_j à e_k, on peut aussi aller de e_i à e_k avec une probabilité non nulle). Cette relation est donc une <u>équivalence</u>. <u>La classe</u> d'un état essentiel e_i selon cette équivalence est constituée de tous les états e_j (nécessairement essentiels) que l'on peut atteindre à partir de e_i. Si donc à un instant donné le système est dans un état essentiel e_i, il y a une probabilité unité pour qu'il ne prenne plus par la suite que des états appartenant à la classe de e_i.

Nous dirons qu'une chaine est <u>irréductible</u> si elle ne comporte que des états essentiels constituant une classe unique, autrement dit si tout état peut être atteint à partir de tout autre état. Nous ne considèrerons plus, dans ce qui suit, que des chaines irréductibles.

<u>Périodicité d'une chaine irréductible</u>. Soit e_i un état d'une chaine irréductible, N_i l'ensemble des entiers n tels que $\pi_{ii}^{(n)} > 0$ (longueurs des boucles d'origine e_i) et soit d_i le P.G.C.D. de N_i. On dit que d_i est la <u>période</u> de l'état e_i (en effet, toute boucle allant de e_i à e_i a une longueur multiple de d_i). Soit de même e_j un autre état, et d_j sa période, qui est le P.G.C.D. de N_j.

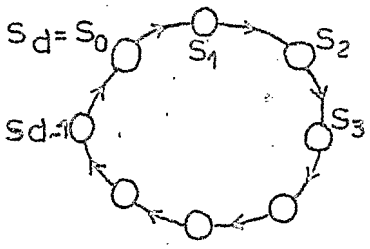


Montrons que l'on a $d_i = d_j$. Comme la chaine est irréductible, il y a un chemin $e_i \to e_j$ de longueur n, et un chemin $e_j \to e_i$ de longueur m. n+m, longueur de la boucle $e_i \to e_j \to e_i$, ou aussi bien $e_j \to e_i \to e_j$, appartient à la fois à N_i et à N_j. Si n_i est un entier de N_i, il existe une boucle $e_i \to e_i$ de longueur n_i, donc aussi un chemin $e_j \to e_i \to$(boucle $e_i \to e_i$) $\to e_j$ de longueur $n_i + n + m$. Donc $n_i + n + m \in N_j$. Comme d_j divise n+m et n_i+n+m, il divise n_i. Divisant

tout $n_i \in N_i$, d_j divise d_i, et par suite $d_j \leqslant d_i$. On montre de la même façon $d_i \leqslant d_j$, d'où l'égalité $d_i = d_j$:

Dans une chaine irréductible, tous les états ont la même période d. On dit que d est la période de la chaine. Si d = 1, on dit que la chaine est apériodique.

Remarque : Si l'on a un chemin $e_i \to e_j$ de longueur n et un chemin $e_j \to e_i$ de longueur m, n+m est un multiple de d : tout chemin joignant



e_i à e_j a donc une longueur congrue à -m modulo d, c'est-à-dire une longueur de la forme kd - m (m fixe, k entier). Il en résulte que la relation : "il existe un chemin de e_i à e_j dont la longueur est un multiple de d" (qui entraine que tout chemin joignant e_i et e_j a une longueur multiple de d) est une relation d'équivalence. Cette équivalence admet des classes S_o, S_1, ... S_{d-1} : Partant d'un état de S_o au temps 0, on passe forcément par un état de S_1 au temps S, puis par un état de S_2 au temps 2, ... par un état de S_{d-1} au temps d-1 et enfin par un état de $S_d = S_o$ au temps d. Après quoi, le cycle recommence. En particulier, si l'on se restreint aux seuls instants kd multiples entiers de la période d, on n'observera jamais que des états de la classe S_o de l'état initial, et, avec k comme temps, tout se passera comme si l'on avait affaire à une chaine apériodique (dont les états seraient ceux de S_o).

Etats transitoires, états persistants. Partant de e_i au temps t=0, le système retourne en e_i au temps n avec la probabilité $\pi_{ii}^{(n)}$. On dira que ce retour en e_i est un premier retour si les états que prend le système aux temps intermédiaires t = 1,2, ... n-1 sont tous différents de e_i. On désignera par $R_i(n)$ la probabilité pour que ce premier retour ait lieu au tempsn, et par :

$$R_i = \sum_{n=1}^{\infty} R_i(n)$$

la probabilité pour que le système repasse au moins une fois par l'état e_i. Si $R_i = 1$, on dit que l'état e_i est persistant (il y a une probabilité unité pour que le système repasse au moins une fois par e_i, donc aussi une probabilité unité pour qu'il repasse une infinité de fois par e_i). Si de plus le temps de retour moyen :

$$\mu_i = \sum_{n=1}^{\infty} n\, R_i(n)$$

est fini, e_i est un état persistant positif. Si e_i est persistant, mais de temps de retour moyen μ_i infini, on dit que e_i est un état nul. Enfin, si $R_i < 1$ on dit que l'état e_i est transitoire : il y a une probabilité non nulle pour que le système ne repasse plus jamais par e_i, donc aussi une probabilité unité pour que le système ne repasse par e_i qu'un nombre fini (aléatoire)de fois.

Remarque. Un état non essentiel est nécessairement transitoire. La réciproque est fausse en général (pour les chaines infinies, il peut y avoir des états essentiels transitoires) mais vraie cependant dans le cas des chaines finies (voir ci-dessus).

Voici deux théorèmes importants, que nous énonçons sans démonstration :

Th. 1. Un état e_i est transitoire ou persistant selon que la série $\sum_n \pi_{ii}^{(n)}$ converge ou diverge. C'est un état nul si l'on a $\lim_{n\to\infty} \pi_{ii}^{(n)} \to 0$.

Th. 2. Dans une chaine irréductible et apériodique, les limites :

(1). $$\lim_{n\to\infty} \pi_{ij}^{(n)} = \varpi_j$$

existent, et ne dépendent pas de l'état initial e_i mais seulement de

terminal e_j. Si cet état e_j est transitoire ou persistant et nul, on a $\varpi_j = 0$. Si e_j est persistant positif, cette limite est égale à l'inverse du temps de retour moyen : $\varpi_j = 1/\mu_i$, et les états sont tous positifs. Les ϖ_j constituent alors un système de probabilités stationnaires, nécessairement unique, vérifiant les relations :

$$(2) \qquad \begin{cases} \sum_j \varpi_j = 1 \\ \sum_j \varpi_j \ \Pi_{jk} = \varpi_k \end{cases}$$

Inversement, si l'on trouve une solution ϖ_j du système (2), les états du système sont tous persistants positifs, et l'on a : $\Pi_{ij}^{(n)} \to \varpi_j = \frac{1}{\mu_j}$

Le Th. 2 exprime les conditions d'ergodicité de la chaine irréductible. On peut le déduire d'une version discrète du théorème sur les états récurrents. On notera surtout que la limite (1) est indépendante de l'état initial : l'influence de ces conditions initiales s'estompe avec le temps, et finit par s'effacer complètement.

Dans les applications, c'est surtout la réciproque du Th. 2 qui est intéressante : si l'on peut trouver une solution ϖ_j du système (2), (ce qui est facile dans le cas fini : (2) est alors un système de n équations à n inconnues), ces ϖ_j coincident avec les limites des $\Pi_{ij}^{(n)}$ que l'on peut ainsi déterminer sans itérer explicitement la matrice et de plus l'inverse de ϖ_j est le temps de retour moyen de l'état e_j.

Notons quelques conséquences :

1/ Dans une chaine irréductible et apériodique, tous les états sont de même nature. En effet, si e_i est un état transitoire, montrons que tout état e_i est transitoire : soient m et m' des entiers avec $\Pi_{ij}^{(m)} > 0$ et $\Pi_{ji}^{(m')} > 0$. On a :

$$\pi_{ij}^{(m)} \pi_{jj}^{(n)} \pi_{ji}^{(m')} \leq \pi_{ii}^{(m+m'+n)}$$

et par suite la série $\sum_n \pi_{jj}^{(n)}$ converge si $\sum_i \pi_{ii}^{(n)} < \infty$

Si maintenant e_i est persistant tout e_j est persistant (sinon e_i serait transitoire d'après ce qui précède). Si de plus e_i est nul, $\mu_i = \infty$ entraine $\mu_j = \infty$ (car $\pi_{ii}^{(n)} \to 0$ entraine $\pi_{jj}^{(n)} \to 0$ d'après la même inégalité que ci-dessus). Enfin, si e_i est persistant et positif, il en est de même de tout e_j (si e_j était transitoire ou nul, il en serait de même de e_i).

2/ Dans une chaine irréductible finie, tous les états sont persistants et positifs. D'après 1/, en effet, tous les états sont de même nature. S'ils étaient tous transitoires, et puisque le nombre N des états est fini, il y aurait une probabilité non nulle pour que, partant d'un état donné, le système ne repasse plus jamais par aucun des états du système au delà d'un temps fini, ce qui est absurde. Si e_i était un état nul, tous les états seraient nuls, et on aurait $\pi_{ij}^{(n)} \to 0$ quelque soit j : mais on a toujours $\sum_{j=1}^{N} \pi_{ij}^{(n)} = 1$, et cette relation passe à la limite $n \to \infty$, puisque N est fini, et il n'est pas possible que tous les $\pi_{ij}^{(n)}$ tendent vers 0.

IV - PROCESSUS DE RENOUVELLEMENT A n ETATS

Nous appellerons processus de renouvellement à n états e_1, e_2,..e_n, le processus obtenu en faisant se succéder sur la droite des segments de longueurs aléatoires affectés à des états aléatoires (choisis parmi les e_i) et vérifiant les deux conditions suivantes :

1/ La succession des états le long de la droite est indépendante des longueurs qui leur sont affectées, et constitue une chaine de Markov à temps discret (homogène et irréductible). Nous désignerons par Π_{ij} la matrice de transition de cette chaine, et par ϖ_j le système de probabilités stationnaires (qui existe, d'après le ch. III) vérifiant :

$$\varpi_k = \sum_j \varpi_j \Pi_{jk}$$

2/ La longueur d'un segment affecté à un état e_i ($i = 1,2,..,n$) est indépendante des évènements antérieurs à son origine ou postérieurs à son extrémité, et obéit à une loi F_i (granulométrie en nombre de l'état e_i) qui ne dépend que de l'état e_i.

On notera que chacun des états e_i est récurrent, au sens de la définition du ch. II. Il ne s'agit cependant plus tout à fait d'un processus de renouvellement au sens ordinaire, car, si les longueurs des segments successifs restent indépendantes, il n'en est pas de même de leurs états, qui sont en dépendance markovienne.

Si l'on s'intéresse à un seul état e_{i_o}, on peut grouper dans un état unique $e'_1 = \bigcup_{i \neq i_o} \{e_i\}$ tous les autres états. On obtient ainsi un processus de renouvellement à deux états : $e'_o = e_{i_o}$ et e'_1, auquel on peut appliquer tous les résultats du ch. II (concernant, notamment,

le nombre spécifique ν_{i_o} de l'état e_{i_o}, et le calcul de la covariance $C_{i_o i_o}$ à partir de F_{i_o} et de la loi du cycle (e_{i_o}, e_{i_o}).

Pour $n > 2$, les covariances rectangles $C_{ij}(h)$ $(i \neq j)$ contiennent davantage d'information que les seules covariances directes C_{ii} (en particulier, ces covariances rectangles ne sont plus nécessairement symétriques, et permettent de déceler un <u>retard</u> d'un composante i sur une autre composante j). Il est donc bon de pouvoir les calculer.
A partir de $C_{ij}(h)$, on peut aussi former la <u>co-portée</u>

$$a_{ij} = -\frac{2}{p_i p_j} \int_0^\infty [C_{ij}(h) - p_i\, p_j]\, dh \qquad (i \neq j)$$

que l'on mettra sans peine en rapport avec la covariance des longueurs cumulées $L_i(l)$ et $L_j(l)$ occupées par e_i et e_j dans un segment de longueur l.

<u>Notations</u>. Nous désignerons par :

F_{ij} la loi de la longueur séparant l'origine d'un segment e_i de l'origine du premier segment e_j qui le suit. En particulier, F_{ii} est la loi d'un cycle complet, allant de l'origine d'un e_i à l'origine du premier e_i qui le suit.

μ_{ij} et σ_{ij}^2 l'espérance et la variance de la loi F_{ij}

F_i la granulométrie en nombre de l'état e_i, m_i son espérance et σ_i^2 sa variance.

$H_{ij}(h)$, la probabilité conditionnelle d'avoir $x+h \in e_j$ sachant que x est l'<u>origine</u> d'un état e_i.

p_i la probabilité (stationnaire) de "$x \in e_i$".

En ce qui concerne les transformées de Laplace, nous utiliserons les notations :

$$F_i \to \Phi_i \ , \ F_{ij} \to \Psi_{ij} \ , \ H_{ij} \to \eta_{ij} \ , \ C_{ij} \to \chi_{ij}$$

Nous allons examiner les relations liant ces différentes fonctions des raisonnements probabilistes simples vont nous conduire à des équations de convolution que nous transposerons directement sous forme d relations entre transformées de Laplace.

a/ Equation des Ψ_{ij}

La longueur séparant l'origine d'un e_i de l'origine du e_j qui le suit est la somme $X_i + Y$ de deux variables indépendantes : X_i de loi F_i est la longueur du segment e_i ; Y est nulle avec la probabilité π_{ij} (si un état e_j succède directement à e_i) ou obéit à la loi $F_k (k \neq j)$, conditionnellement si un e_k succède à e_i (probabilité π_{ik}). D'où :

$$(a) \qquad \Psi_{ij} = \Phi_i \left[\pi_{ij} + \sum_{k \neq j} \pi_{ik} \Psi_{kj} \right]$$

b/ Equation des covariances conditionnelles η_{ij}

Pour $i \neq j$, et lorsque l'on sait que 0 est l'origine d'un e_i, on a $h \in e_j$ si le segment dont 0 est l'origine se termine en un point $y < h$ avec la probabilité conditionnelle $\sum_k \pi_{ij} \ H_{kj} \ (h-y)$.
Si $i = j$, on doit tenir compte, en outre, de la probabilité $1 - F_i(h)$ pour que le segment e_i inauguré en 0 se prolonge jusqu'à h. Posant $\delta_{ij} = 0$ pour $i \neq j$ et $\delta_{ii} = 1$, on a donc :

$$(b) \qquad \eta_{ij} = \frac{1 - \Phi_i}{\lambda} \ \delta_{ij} + \Phi_i \ \sum_k \pi_{ik} \ \eta_{kj}$$

c/ Relations entre les Ψ_{ij} et les η_{ij}

Pour $i \neq j$, et sachant que 0 est l'origine d'un e_i, $h \in e_j$ implique que l'origine du premier état e_j situé à droite de 0 tombe en un point $y < h$, après quoi on a la probabilité conditionnelle $H_{jj}(h-y)$ d'avoir $h \in e_j$. D'où :

$$(c_1) \qquad \eta_{ij} = \Psi_{ij}\, \eta_{jj} \qquad (i \neq j)$$

Pour $i = j$, on note que l'on peut avoir $h \in e_j$ de deux manières différentes lorsque l'on sait que 0 est l'origine d'un e_j : ou bien le segment e_j commencé en 0 atteint h (probabilité $1 - F_j(h)$) ; ou bien le cycle (e_j, e_j) commencé en 0 s'achève en $y < h$, et l'on a alors la probabilité conditionnelle $H_{jj}(h-y)$ d'avoir $h \in e_j$. D'où :

$$\eta_{jj} = \frac{1 - \Phi_j}{\lambda} + \Psi_{jj}\, \eta_{jj}$$

et

$$(c_2) \qquad \eta_{jj} = \frac{1-\Phi_j}{\lambda(1-\Psi_{jj})}$$

d/ Equations des covariances χ_{ij}

Pour $i \neq j$, l'évènement "$h \in e_j$ et $0 \in e_i$" implique que le segment e_i auquel appartient 0 se termine en un point $y < h$ (probabilité conditionnelle $\frac{1 - Fi(y)}{m_i}\, dy$: granulométrie résiduelle), après quoi, on a $h \in e_j$ avec la probabilité conditionnelle $\sum_k \pi_{ik}\, H_{kj}(h-y)$. D'où :

$$(d_1) \qquad \chi_{ij} = p_i \frac{1-\Phi_i}{\lambda\, m_i} \sum_k \pi_{ik}\, \eta_{kj} \qquad (i \neq j)$$

ou encore, compte tenu de (b) :

$$(d'_1) \qquad \chi_{ij} = \frac{p_i}{\lambda\, m_i} \; \frac{1-\Phi_i}{\Phi_i} \; \eta_{ij} \qquad (i \neq j)$$

Pour i = j, on doit tenir compte en outre de la possibilité que le segment e_j auquel appartient 0 se prolonge jusqu'en h, d'où :

$$(d'_2) \qquad \chi_{jj} = \frac{p_j}{\lambda} \left[1 - \frac{1-\Phi_j}{\lambda\, m_j}\right] + p_j \frac{1-\Phi_j}{\lambda\, m_j} \sum_k \Pi_{jk} \; \eta_{jk}$$

ou encore, toujours compte tenu de (b) :

$$(d'_2) \qquad \chi_{jj} = \frac{p_j}{\lambda} \left[1 - \frac{1-\Phi_j}{\lambda\, m_j}\right] + p_j \frac{1-\Phi_j}{\lambda\, m_j\, \Phi_j} \left[\eta_{jj} - \frac{1-\Phi_j}{\lambda}\right]$$

Remarque. Les équations (a) déterminent les Ψ_{ij} et les équations (b) les η_{ij}. On peut donc montrer que les équations (c) résultent de (a) et de (b). Le nombre n des états étant fini, le calcul explicite des Ψ_{ij} et des η_{ij} est toujours possible. Les χ_{ij} se calculent ensuite à partir des η_{ij} et de (d). On peut aussi exprimer directement les χ_{ij} en fonction des Ψ_{ij}. Par exemple, (d'), (c_1) et (c_2) donnent :

$$(d''_1) \qquad \chi_{ij} = \frac{p_i}{\lambda^2} \; \frac{1-\Phi_i}{m_i\, \Phi_i} \; \Psi_{ij} \; \frac{1-\Phi_j}{1-\Psi_{jj}} \qquad (i \neq j)$$

c/ Calcul de la durée moyenne μ_{jj} d'un cycle (e_j, e_j)

Pour calculer μ_{ij} (durée moyenne séparant l'origine d'un e_i de l'origine du premier e_j qui le suit) on peut dériver (a) en λ et faire $\lambda = 0$, ou, aussi bien, faire un raisonnement direct qui donne :

$$(e_1) \qquad \mu_{ij} = m_i + \sum_{k \neq j} \Pi_{ik}\, \mu_{kj}$$

Ces équations permettent le calcul effectif de tous les μ_{ij}. Si l'on se contente des seuls μ_{jj} (durée moyenne des cycles complets $(e_j, e_j$

on peut parvenir directement au résultat sans résoudre le système précédent : multiplions le par ϖ_i (probabilités stationnaires) et sommons en i. Il vient :

$$\sum_i \varpi_i \mu_{ij} = \sum_i \varpi_i m_i + \sum_{k \neq j} \varpi_k \mu_{kj}$$

Par conséquent :

$$(e_2) \qquad \varpi_j \mu_{jj} = \sum_i \varpi_i m_i$$

f/ calcul des probabilités p

Comme e_j est un état récurrent, on a, d'après le ch. II, :

$$(f) \qquad p_j = \frac{m_j}{\mu_{jj}}$$

soit encore, compte tenu de (e_2)

$$(f') \qquad p_j = \frac{\varpi_j m_j}{\sum_i \varpi_i m_i}$$

On notera l'aspect très intuitif de ce résultat : dans le passage des probabilités "en nombre" ϖ_j aux probabilités "en longueurs" p_j, la probabilité ϖ_j de l'état e_j est pondérée par la longueur moyenne m_j de cet état.

g/ Calcul de la variance σ^2_{jj} d'un cycle (e_j, e_j)

En dérivant (a) deux fois en λ avant de faire $\lambda = 0$, on obtient :

$$\mu^2_{ij} + \sigma^2_{ij} = m_i^2 + \sigma_i^2 + 2 m_i \sum_{k \neq j} \pi_{ik} \mu_{kj} + \sum_{k \neq j} \pi_{ik} (\mu^2_{kj} + \sigma^2_{kj})$$

Compte tenu de (e_1), cette équation se simplifie un peu :

$$\mu_{ij}^2 + \sigma_{ij}^2 = m_i^2 + \sigma_i^2 + 2\, m_i\, (\mu_{ij} - m_i) + \sum_{k \neq j} \pi_{ik}\, (\mu_{kj}^2 + \sigma_{kj}^2)$$

soit :

$$(g_1) \qquad \mu_{ij}^2 + \sigma_{ij}^2 = \sigma_i^2 - m_i^2 + 2\, m_i\, \mu_{ij} + \sum_{k \neq j} \pi_{ik}\, (\mu_{kj}^2 + \sigma_{kj}^2)$$

Ce système permet de calculer effectivement, si on le désire, les $\mu_{ij}^2 + \sigma_{ij}^2$. Si l'on multiplie ϖ_i avant de sommer en i, compte tenu de $\varpi_i\, \pi_{ik} = \varpi_k$, on trouve :

$$(g_2) \qquad \varpi_j\, (\mu_{jj}^2 + \sigma_{jj}^2) = \sum_i \varpi_i\, [\sigma_i^2 - m_i^2 + 2\, m_i\, \mu_{ij}]$$

Ainsi, la variance σ_{jj}^2 du cycle (e_j, e_j) se déduit simplement des μ_{ij} (mais son calcul nécessite la résolution effective du système (e_1)). D'après le ch. II, on déduit directement de σ_{jj}^2 la valeur de la portée a_{jj}. On notera que le calcul effectif de la coportée a_{ij} nécessite, par contre, la résolution effective du système (g_1).

Processus de Markov à n états

Considérons le cas particulier d'un processus de renouvellement à n états dont toutes les granulométries en nombre sont exponentielles.

$$1 - F_i(x) = e^{-a_i x}$$

La propriété caractéristique de la loi exponentielle (d'être exempte de vieillissement) entraine les conséquences suivantes :

- les granulométries résiduelles de densité $\frac{1 - F_i(x)}{m_i}$ coïncident avec les granulométries en nombre

- il est donc indifférent de prendre comme origine des temps le début d'un état e_i, ou un point quelconque $x \in e_i$.

- par suite encore, il y a indépendance conditionnelle entre tout évènement antérieur à x et tout évènement postérieur à x dès que l'on connaît l'état auquel appartient le point x.

Il s'agit donc d'un processus markovien, et celui-ci est entièrement déterminé par la donnée des probabilités de transition $P_{ij}(h)$ (probabilité conditionnelle d'avoir $x+h \in e_j$ sachant que $x \in e_i$). On a, d'après la propriété markovienne :

$$P_{ij}(h) = H_{ij}(h) = \frac{1}{p_i} \; C_{ij}(h)$$

Les transformées de Laplace des P_{ij} vérifient donc (b), et on a, par suite, l'équation de convolution :

$$(B) \qquad P_{ij}(h) = e^{-a_i h} \, \delta_{ij} + \int_0^h a_i \, e^{-a_i y} \left[\sum_k \pi_{ik} \, P_{kj}(h-y) \right] dy$$

Exercice : Etablir directement l'équation (B), compte tenu de la propriété markovienne.

Mettons (B) sous la forme équivalente :

$$P_{ij}(h) = e^{-a_i h}\,\delta_{ij} + \sum_k \pi_{ik} \int_0^h a_i\, e^{-a_i(h-y)}\, P_{kj}(y)\, dy$$

Sous cette forme, on voit que la dérivée P' (h) existe, et on trouve :

$$P'_{ij}(h) = -a_i\, e^{-a_i h}\,\delta_{ij} - a_i \sum_k \pi_{ik} \int_0^h a_i\, e^{-a_i(h-y)}\, P_{kj}(y)\,dy$$

$$+a_i \sum_k \pi_{ik}\, P_{kj}(h)$$

Première équation de Kolmogorov. L'équation ci-dessus s'écrit aussi :

$$(K_1) \qquad P'_{ij}(h) = -\,a_i\, P_{ij}(h) + a_i \sum_k \pi_{ik}\, P_{kj}(h)$$

Pour $h = 0$, on a $P_{ij}(0) = -\,\delta_{ij}$, D'où

$$P'_{ij}(0) = -\,a_i\,\delta_{ij} + a_i\,\pi_{ij}$$

On peut donc mettre (K_1) sous la forme :

$$P'_{ij}(h) = \sum_k P'_{ik}(0)\, P_{kj}(h)$$

ou, sous forme matricielle :

$$(K'_1) \qquad P'(h) = P'(0)\, P(h)$$

Equation de Markov. L'équation de Kolmogorov (K_1') peut se déduire directement de la relation de Markov, en dérivant en h avant de faire h = 0 (variation de l'instant initial) :

$$(M) \qquad P(h+h') = P(h)\ P(h')$$

Sous forme explicite, (M) s'écrit :

$$P_{ij}(h+h') = \sum_k P_{ik}(h)\ P_{kj}(h')$$

Elle exprime simplement que le passage de e_i en x = 0 a e_j en x+h+h' implique le passage par un état e_k quelconque au temps intermédiaire x+h : la probabilité conditionnelle de $x+h+h' \in e_j$ est alors $Pk_j(h')$ d'après la propriété markovienne.

Deuxième équation de Kolmogorov. Si nous dérivons en h' l'équation de Markov (M) avant de faire h' = 0 (variation de l'instant terminal) il vient :

$$(K_2') \qquad P'(h) = P(h)\ P'(0)$$

ou, explicitement :

$$(K_2) \qquad P'_{ij}(h) = -\ P_{ij}(h)\ a_j + \sum_k P_{ik}(h)\ a_k \pi_{kj}$$

La dérivation (par rapport à l'instant terminal) qui conduit de (M) à (K_2) ou (K_2') est toujours légitime si le nombre n des états est fini, et (K_2) est toujours valable dans ce cas. (Il peut en être autrement s'il y a une infinité dénombrable d'états ; par contre, la première équation de Kolmogorov est valable dans tous les cas, n fini ou infini).

Remarque. 1/ Pour $h \to \infty$, on doit avoir $P_{ij}(h) \to p_j$ et $P'_{ij}(h) \to 0$. D'après (K_2), les probabilités p_j doivent vérifier :

$$a_j\, p_j = \sum_k p_k\, a_k\, \varpi_{kj}$$

comme $a_j = 1/m_j$, et $p_j = \dfrac{m_j}{\mu_{jj}}$, cette relation se réduit à :

$$\frac{1}{\mu_{jj}} = \sum_k \frac{1}{\mu_{kk}}\, \varpi_{kj}$$

Il résulte de (e_2) que cette relation est toujours identiquement vérifiée.

2/ On peut se demander s'il existe d'autres processus markoviens stationnaires à n états (ou à une infinité dénombrable d'états) que ceux que nous venons de décrire. Il n'en est rien. Désignons, en effet, par $Q_i(h)$ la probabilité conditionnelle pour que le segment $(x,x+h)$ soit contenu tout entier dans l'état e_i sachant que $x \in e_i$. D'après la propriété markovienne, on a :

$$Q_i(h + h') = Q_i(h)\; Q_i(h')$$

D'où résulte que $Q_i(h)$ est une exponentielle de la forme $e^{-a_i h}$, et que, par suite, la granulométrie F_i vérifie $1 - F_i(h) = e^{-a_i h}$. Ainsi, la description ci-dessus décrit la totalité des processus de Markov à n états.

3/ Remarquons, pour terminer, qu'un processus ne peut être markovien que si toutes les granulométries sont exponentielles. Cette condition nécessaire n'est d'ailleurs pas suffisante (exemple : le schéma de migration du ch.II présente des granulométries exponentielles, mais il n'est absolument pas markovien). Dans les applications expérimentales, c'est donc la première vérification à laquelle il convient de procéder. On s'aperçoit alors qu'il y a dans la nature beaucoup moins de phénomènes markoviens qu'on ne le croit généralement.

SCHÉMAS BOOLÉENS ET SCHÉMAS SEMI-MARKOVIENS

SOMMAIRE

Paragraphe 8. — *Définition des schémas booléens : on implante des germes dans l'espace avec une densité poissonienne* θ *constante, on laisse un grain primaire se développer à partir de chaque germe, et on prend la réunion de tous les grains primaires. Expression* (8,4) *du moment* Q(B). *Le nombre des grains primaires rencontrés par* B *obéit à une loi de Poisson. Si les grains primaires sont convexes, la granulométrie des traversées des pores est exponentielle.*

Paragraphe 9. — *Définition des schémas semi-markoviens : si* E_1 *et* E_2 *sont deux ensembles séparés par un ensemble* C, *indépendance conditionnelle des événements relatifs à* E_1 *et à* E_2 *lorsque* C *est dans les pores. Le schéma booléen à grains convexes est semi-markovien. Les granulométries des traversées des grains et des pores ne dépendent que de la covariance* C(h). *Celle des pores est exponentielle.*

Paragraphe 10. — *Calcul du moment* Q(B) *en schéma semi-markovien isotrope dans l'espace à 2 dimensions, lorsque* B *est convexe. Il ne dépend que de l'aire et du périmètre de* B *ainsi que du nombre et du périmètre spécifique du schéma* (10,2). *Dans le cas booléen les paramètres figurant dans* (10,2) *sont la densité de germe et le diamètre apparent des grains primaires. Loi du rayon vecteur joignant un point des pores au point des grains le plus proche.*

Paragraphe 11. — *Calcul de* Q(B) *en schéma semi-markovien isotrope dans l'espace à 3 dimensions, lorsque* B *est convexe. Il ne dépend que du volume, de la surface et de la courbure moyenne de* B, *ainsi que de la surface, de la longueur et du nombre spécifiques du schéma* (11,3) *Dans le cas booléen, les paramètres figurant dans* (11,3) *sont la densité de germe, le diamètre apparent moyen et le contour apparent moyen du grain primaire. Loi du rayon vecteur joignant un point des pores au point des grains le plus proche — Relations entre un schéma semi-markovien isotrope de l'espace à 3 dimensions et les schémas qu'il induit sur des plans ou des droites, et problème du passage inverse.*

8. — Les schémas booléens.

L'idée qui préside à la construction des schémas booléens consiste à meubler l'espace à l'aide de grains implantés au hasard, indépendamment les uns des autres et possédant les mêmes caractéristiques aléatoires (la même loi spatiale, à une translation près), et à prendre la réunion ensembliste de tous les grains ainsi obtenus. Explicitons cette démarche.

Soit tout d'abord A' un ensemble aleatoire non stationnaire, que nous appellerons *grain primaire,* et désignons par les lettres grecques ϖ et χ ses moments fonctionnels.

$$(8,1) \qquad \begin{cases} \varpi(B) = P(B \subset A') \\ \chi(B) = P(B \cap A' = \emptyset) \end{cases}$$

Pour abréger le langage, nous dirons que le grain aléatoire A' est un grain primaire *germé à l'origine* (sans que cela implique d'ailleurs que l'origine 0 appartienne nécessairement à A'). Si nous remplaçons A' par son translaté A'_ξ dans la translation ξ, nous obtenons un *grain aléatoire germé au point* ξ. Les moments fonctionnels de A'_ξ se déduisent immédiatement de ceux de A'. En effet, l'inclusion $B \subset A'_\xi$ est équivalente $B_{-\xi} \subset A'$, $B_{-\xi}$ étant le translaté de B dans la translation réciproque $-\xi$. Ainsi, les moments ϖ_ξ et χ_ξ de A'_ξ sont :

$$(8,2) \qquad \begin{cases} \varpi_\xi(B) = \varpi(B_{-\xi}) \\ \chi_\xi(B) = \chi(B_{-\xi}) \end{cases}$$

Implantons maintenant des germes dans tout l'espace selon un schéma poissonien de densité θ constante. Le nombre de germes présents dans un domaine V est une variable aléatoire obéissant à la loi de Poisson de paramètre $\theta \operatorname{Mes} V$, et, si V_1, V_2, etc... sont des ensembles disjoints, les nombres N_1, N_2 ... de germes tombés dans chacun d'eux sont des variables indépendantes.

Soient ξ_i les positions occupées par les différents germes obtenus selon ce schéma poissonien. A partir de chaque germe ξ_i, laissons se développer un grain aléatoire A'_{ξ_i} selon la loi spatiale écrite ci-dessus, étant bien entendu que ces différents grains se développent indépendamment les uns des autres (A'_{ξ_i} et A'_{ξ_j} sont indépendants pour $i \neq j$). Deux grains germés en des points différents peuvent, naturellement, se rencontrer : on admet ici que ces grains se rencontrent et, éventuellement, se traversent, sans que soit modifiée la loi de croissance de chacun d'eux. Désignons alors par A la réunion ensembliste de tous les grains A'_{ξ_i} ainsi obtenus. Nous dirons que l'ensemble aléatoire A s'obtient par passage en booléen à partir du grain primaire A' et de la densité poissonienne de germes θ.

La loi spatiale de A est évidemment stationnaire, puisque la densité de germe θ est constante dans tout l'espace. Explicitons l'expression du moment fonctionnel $Q(B)$ donnant la probabilité pour que l'ensemble B soit disjoint de l'ensemble aléatoire A, c'est-à-dire disjoint de chacun des grains primaires A'_{ξ_i}. Pour chaque élément de volume $\delta\xi$ centré en chacun des points ξ de l'espace, on doit écrire que :

— ou bien aucun grain primaire n'a germé dans $\delta\xi$, ce qui a lieu avec la probabilité $1 - \theta\,\delta\xi$;

— ou bien un grain primaire A'_ξ a germé dans cet élément de volume, mais il ne rencontre pas l'ensemble B. Ceci a lieu avec la probabilité $\theta\chi(B_{-\xi})\,\delta\xi$.

La somme des probabilités de ces deux événements incompatibles est équivalente à $\exp(-\theta[1-\chi(B_{-\xi})]\,\delta\xi)$. Comme les événements relatifs aux différents petits éléments de volumes $\delta\xi$ disjoints dont la réunion engendre l'espace entier sont indépendants les uns des autres, on obtient $Q(B)$ en faisant le produit de toutes ces exponentielles pour tous les éléments $\delta\xi$, d'où :

$$(8,3) \qquad Q(B) = \exp\Big[-\theta\int[1-\chi(B_{-\xi})]\,d\xi\Big]$$

Pour interpréter d'une manière plus géométrique cette expression (8,3), remarquons que $1-\chi(B_{-\xi})$ est, d'après (8,1), la probabilité pour que l'ensemble $B_{-\xi}$ rencontre le grain primaire A'. Si nous nous reportons à (1,4) et à la proposition 1 du premier chapitre, nous voyons que c'est aussi la probabilité pour que le point $-\xi$ appartienne à l'ensemble $A'\oplus\check{B}$:

$$1-\chi(B)_{-\xi} = P(-\xi \in A'\oplus\check{B})$$

Intégrons cette expression en ξ dans tout l'espace. L'intégrale de la probabilité pour qu'un point ξ appartienne à un ensemble aléatoire est égale à l'espérance mathématique de la mesure de cet ensemble :

$$\int[1-\chi(B_{-\xi})]\,d\xi = E\,[\mathrm{Mes}\,(A'\oplus\check{B})]$$

Ainsi (8,3) se met sous la forme plus géométrique :

$$(8,4) \qquad Q(B) = e^{-\theta E[\mathrm{Mes}(A'\oplus\check{B})]}$$

Il est commode d'introduire aussi la fonction $K(h)$

$$(8,5) \qquad K(h) = \int \varpi(x,\ x+h)\,dx = E\,[\mathrm{Mes}\,A'\cap A'_h]$$

qui représente l'espérance de la mesure de l'intersection du grain primaire A' et de son translaté A'_h. De (8,3), ou de (8,4) on déduit l'expression de la porosité q du milieu booléen A et du moment d'ordre 2, $Q(x,\ x+h)$, représentant la probabilité pour que deux points distants de h soient dans les pores :

$$(8,6) \qquad \begin{cases} q = e^{-\theta K(0)} \\ Q(x,\ x+h) = q^2 e^{\theta K(h)} = q e^{-\theta[K(0)-K(h)]} \end{cases}$$

Le deuxième moment d'ordre 2, $P(x,\ x+h) = C(h)$, ou covariance de A, donnant la probabilité pour que deux points distants de h soient dans les grains, se déduit de (8,6) et de la relation générale (4,4) :

$$(8,7) \qquad C(h) = 1 - 2q + q^2 e^{\theta K(h)}$$

Loi du nombre des grains primaires rencontrés par B. — Soit B un ensemble borné quelconque. On peut s'intéresser au nombre des grains

primaires A'_ξ qui rencontrent B. Ce nombre est une variable aléatoire obéissant à une loi de Poisson. En effet, si θ est la densité de germes du schéma booléen, on peut considérer l'ensemble aléatoire A comme la réunion de n ensembles aléatoires indépendants, obtenus en effectuant le passage en booléen avec les mêmes grains primaires A' et la densité de germes $\frac{\theta}{n}$. Le nombre de grains rencontrés par A est ainsi la somme de n variables indépendantes, représentant chacune le nombre des grains de chacun de ces schémas de densité $\frac{\theta}{n}$ qui rencontrent B. Lorsque n est très grand, chacun des schémas de densité $\frac{\theta}{n}$ fournit :

— soit 0 intersection, avec la probabilité $1 - \frac{\theta}{n} E[\text{Mes } A' \oplus \check{B}]$

— soit 1 intersection, avec la probabilité $\frac{\theta}{n} E[\text{Mes } A' \oplus \check{B}]$

$\left(\text{en négligeant les termes d'ordre supérieur en } \frac{1}{n}\right)$. Par suite *le nombre des intersections de* B *avec les grains primaires de* A *est une variable de Poisson de paramètre* $\theta E[\text{Mes } A' \oplus \check{B}]$. L'expression (8,4) de Q(B) est d'ailleurs égale à la probabilité pour qu'il n'y ait aucune intersection.

En particulier, q désignant la porosité, la probabilité pour qu'un point donné appartienne à n grains primaires distincts est $\frac{q}{n!}\left(\log \frac{1}{q}\right)^n$: c'est la loi de Poisson de paramètre $\log \frac{1}{q} = \theta K(0)$.

Schéma booléen à grains primaires convexes. — Nous allons maintenant supposer que le grain primaire aléatoire A' est convexe, et que sa loi spatiale vérifie, par conséquent, les propriétés énumérées au paragraphe 7. Alors *la granulométrie des traversées des pores, exprimée en nombre, obéit à une loi exponentielle.* C'est là une particularité assez caractéristique du schéma à grains convexes, et nous montrerons dans le paragraphe suivant qu'elle est liée à une propriété semi-markovienne. Le moment fonctionnel $Q(h)$, probabilité pour qu'un segment de longueur h et de direction α soit dans les pores, s'obtient ici en substituant (7,16) dans la formule générale (8,4), ce qui donne :

$$Q(h) = e^{-[K(0) - hK'_\alpha(0)]}$$

(α désigne la direction du segment de longueur h). Compte tenu de l'expression (8,6) de la porosité q, on a aussi :

$$Q(h) = q e^{\theta h K'_\alpha(0)} \tag{8,8}$$

Il suffit ensuite d'appliquer (6,10) pour obtenir la granulométrie $N_2(h)$ des traversées des pores (exprimées en nombre). On trouve :

$$1 - N_2(h) = e^{\theta h K'_\alpha(0)}$$

Selon (7,15) $K'_\chi(0)$, qui est négatif, est égal au signe près à *l'espérance mathématique* $E(S_\alpha)$ *de la mesure du contour apparent du grain convexe primaire* A'. Ainsi, la granulométrie des traversées des pores est :

$$(8,9) \qquad 1 - N_2(h) = e^{-\theta h E(S_\alpha)}$$

Elle obéit à une loi exponentielle de paramètre $\theta E(S_\alpha)$. On remarquera le caractère très géométrique de ce résultat. Il est en particulier notable que cette loi dépend uniquement de la densité de germe θ et de l'espérance $E(S_\alpha)$ du contour apparent du grain primaire.

Des relations (7,10) et (7,11) on déduira sans peine, par passage aux exponentielles, la probabilité $Q(B_r)$ pour qu'un cercle de rayon r (dans l'espace à 2 dimensions) ou une sphère de rayon r (dans l'espace à 3 dimensions) soit contenu dans les pores. Nous reviendrons plus longuement sur ces relations dans les paragraphes 10 et 11. De même, dans le cas isotrope, les relations (7,17) et (7,18) donnent, par exponentiation, la valeur de Q(B) pour un ensemble convexe B quelconque. C'est en établissant directement l'expression de Q(B) que nous retrouverons (7,17) et (7,18) dans les paragraphes (10) et (11).

9. — Les schémas semi-markoviens.

L'apparition de lois exponentielles pour les traversées des pores du schéma booléen à grains convexes est liée à une propriété semi-markovienne que nous allons maintenant définir.

Étant donnés 3 ensembles de points E_1, E_2 et C, nous dirons que C *sépare* E_1 et E_2 si tout segment de droite $[x, y]$ joignant un point x de E_1 et un point y de E_2 rencontre C en un point au moins (situé entre x et y). Nous dirons qu'*un ensemble aléatoire* A *est semi-markovien si, quels que soient les ensembles* E_1, E_2 *et* C *séparant* E_1 *et* E_2, *il y a indépendance conditionnelle entre tout événement intéressant* E_1 *et tout événement intéressant* E_2, *lorsque l'on sait que* C *est contenu dans les pores* A^c.

Montrons que *le schéma booléen à grains primaires convexes vérifie la propriété semi-markovienne.* Il suffit de le démontrer dans le cas où les ensembles E_1 et E_2 sont constitués d'un nombre fini de points : la proposition relative au cas général s'en déduit par passage à la limite (compte tenu de la séparabilité de A, voir Annexe II).

Soient donc E_1 et E_2 deux ensembles finis séparés par un ensemble C, et A'_ξ un grain convexe primaire germé au point ξ. L'événement $C \cap A'_\xi = \emptyset$ est somme des trois événements incompatibles suivants :

— ou bien $C \cup E_1 \cup E_2$ ne rencontre pas A'_ξ ;

— ou bien $C \cap A'_\xi = \emptyset$ et $E_1 \cap A'_\xi \neq \emptyset$ (et dans ce cas E_2 ne rencontre pas A'_ξ à cause de la convexité du grain primaire) ;

— ou bien $C \cap A'_\xi = \emptyset$ et $E_2 \cap A'_\xi \neq \emptyset$ (et dans ce cas E_1 ne rencontre pas A'_ξ à cause de la convexité). On a donc :

$$(9,1) \quad \chi_\xi(C) = \chi_\xi(C \cup E_1 \cup E_2) + P(E_1 \cap A'_\xi \neq \emptyset,\ C \cap A'_\xi = \emptyset) + P(E_2 \cap A'_\xi \neq \emptyset,\ C \cap A'_\xi = \emptyset)$$

La notation χ_ξ est celle qui est définie en (8,2). Mais on a également :

$$\begin{cases} \chi_\xi(C) = \chi_\xi(E_1 \cup C) + P(E_1 \cap A'_\xi \neq \emptyset,\ C \cap A_\xi = \emptyset) \\ \chi_\xi(C) = \chi_\xi(E_2 \cup C) + P(E_2 \cap A'_\xi \neq \emptyset,\ C \cap A_\xi = \emptyset) \end{cases}$$

Retranchons de (9,1) la somme membre à membre de ces deux dernières relations. Il vient :

$$(9,2) \qquad \chi_\xi(C \cup E_1 \cup E_2) + \chi_\xi(C) = \chi_\xi(E_1 \cup C) + \chi_\xi(E_2 \cup C)$$

Désignons par R_ξ la valeur commune des deux membres de (9,2), et effectuons l'opération $\exp\left[-\theta \int (2 - R_\xi)\, d_\xi\right]$. Compte tenu de (8,3) on fait apparaître à gauche le produit $Q(C \cup E_1 \cup E_2)Q(C)$ et à droite le produit $Q(E_1 \cup C)\, Q(E_2 \cup C)$, la lettre Q désignant les moments du schéma obtenu après passage en booléen. On a donc l'égalité :

$$(9,3) \qquad \frac{Q(C \cup E_1 \cup E_2)}{Q(C \cup E_1)} = \frac{Q(C \cup E_2)}{Q(C)}$$

Soient maintenant X et Y deux événements intéressant respectivement E_1 et E_2. Comme E_1 et E_2 sont constitués d'un nombre fini de points, X est nécessairement soit de la forme : « les points $x_1, x_2 \ldots x_k$ de E_1 (en nombre fini) sont dans A et les points $x'_1 \ldots x'_k$, de E_1 (en nombre fini) sont dans A^c », soit somme logique d'un nombre fini d'événements de ce type, et Y se présente sous le même aspect.

Par conséquent, la probabilité pour que Y se réalise et que C soit dans les pores, qui est $P(Y,\ C \cap A = \emptyset)$ se déduit de $Q(C \cup E_2)$ par des opérations finies de différence et de somme qui ne portent que sur les points de E_2. Ces mêmes opérations, appliquées à $Q(C \cup E_1 \cup E_2)$, conduisent à $P(Y,\ C \cap A = E_1 \cap A = \emptyset)$. Par suite, on tire de (9,3) :

$$\frac{P(Y,\ C \cap A = \emptyset)}{Q(C)} = \frac{P(Y,\ C \cap A = E_1 \cap A = \emptyset)}{Q(E_1 \cup C)}$$

ce qui s'écrit aussi :

$$(9,4) \qquad \frac{P(Y,\ C \cap A = E_1 \cap A = \emptyset)}{P(Y,\ C \cap A = \emptyset)} = \frac{Q(E_1 \cup C)}{Q(C)}$$

Le raisonnement se réitère : une même suite d'opérations portant uniquement sur les points de E_1 fait passer :

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{de} & Q(E_1 \cup C) & \text{à} \quad P(X,\ C \cap A = \emptyset) \\ \text{et de} & P(Y,\ C \cap A = E_1 \cap A = \emptyset) & \text{à} & P(X,\ Y,\ C \cap A = \emptyset) & \end{array}$$

Par conséquent, ces opérations, appliquées à (9,4) donnent :

$$(9,5) \qquad \frac{P(X,\ Y,\ C \cap A = \emptyset)}{P(Y,\ C \cap A = \emptyset)} = \frac{P(X,\ C \cap A = \emptyset)}{Q(C)}$$

La relation (9,5) exprime que le schéma booléen A à grains primaires convexes possède la propriété semi-markovienne.

Nous allons déduire de la propriété semi-markovienne certaines conséquences pour les granulométries des traversées des pores et des grains.

Granulométries des traversées des pores. — Montrons qu'elle est exponentielle. Soit $Q(h)$ la probabilité pour que le segment de longueur h et de direction α soit contenu dans les pores, c'est-à-dire dans le complémentaire de A, A étant un ensemble aléatoire semi-markovien. Plaçons-nous sur une droite de direction α. Prenons, sur cette droite, deux segments jointifs de longueurs h_1 et h_2 séparés par un point x. Lorsque x est dans les pores, ce qui a lieu avec la probabilité q, les événements : « h_1 est dans les pores » et « h_2 est dans les pores » sont indépendants, d'après la propriété semi-markovienne. La relation (9,5) se réduit ici à :

$$\frac{Q(h_1 + h_2)}{Q(h_2)} = \frac{Q(h_1)}{q}$$

c'est-à-dire à :

$$Q(h_1 + h_2) = \frac{1}{q} Q(h_1)\, Q(h_2)$$

Il en résulte, comme on sait, que le moment $Q(h)$ est de la forme

$$Q(h) = qe^{-\mu h} \tag{9,6}$$

Par suite, la granulométrie en nombre est donnée par l'exponentielle $e^{-\mu h}$ (il suffit, pour le voir, de reprendre le raisonnement qui nous a fait passer de (8,8) à (8,9) au paragraphe précédent). Lorsque le schéma est booléen à grains convexes, on a vu plus haut la signification du paramètre μ : c'est le produit $\theta E(S_2)$ de la densité de germe par l'espérance de la mesure du contour apparent du grain primaire. Dans le cas d'un schéma semi-markovien quelconque, on a simplement :

$$\mu = -\frac{Q'(0)}{q}$$

On remarque que $-Q'(0)\,\delta h$ est la probabilité pour que le segment, très petit, δh contienne un point frontière de A. Si $P(h)$ désigne la probabilité pour que le segment h soit contenu dans A, $-P'(0)\,\delta h$ représente également la probabilité pour δh contienne un point frontière. On a donc :

$$P'(0) = Q'(0)$$

Soit enfin $C(h)$ la covariance, ou probabilité pour que les points x et $x + h$ soient dans A. La probabilité pour que x soit dans A et $x + \delta h$ dans A^c, qui est $C(0) - C(\delta h)$, est équivalente à $-C'(0)\,\delta h$. On a donc aussi

$$P'(0) = Q'(0) = C'(0)$$

et par suite

$$\mu = -\frac{1}{q} C'(0) \tag{9,7}$$

Ainsi, le paramètre μ dépend uniquement de la dérivée en $h = 0$ de la covariance $C(h)$. D'après le paragraphe 5, il est donc lié étroitement à la surface spécifique σ du milieu poreux A.

Granulométries des traversées des grains. — La granulométrie des traversées des grains n'est pas exponentielle, en général, mais nous allons montrer qu'elle ne dépend, comme celle des pores, que de la covariance $C(h)$, pourvu que le schéma soit semi-markovien. En effet, sur une droite de direction parallèle à α, l'événement : « $x \in A$ et $x + l \in A$ », de probabilité $C(l)$, est somme logique des événements incompatibles :

— l'intervalle $[x, x + l]$ est contenu dans A,

— le point $x + l$ est dans A, l'intervalle $[x, x + h]$ est contenu dans $A(0 \leqslant h \leqslant l)$, et il y a un point frontière entre $x + h$ et $x + h + \delta h$.

A cause du caractère semi-markovien, et puisque $x + h + \delta h$ est dans les pores, un événement de la deuxième catégorie possède la probabilité

$$-P'(h)\,\delta h\,\frac{p - C(l-h)}{q}$$

On en déduit l'équation intégrale suivante, reliant le moment fonctionnel $P(l)$ et la covariance $C(l)$:

$$C(l) = P(l) - \int_0^l P'(h)\,\frac{p - C(l-h)}{q}\,dh \tag{9,8}$$

Pour simplifier cette équation, dérivons en l, en remarquant que $C(0) = p$. Il vient :

$$C'(l) = P'(l) + \frac{1}{q}\int_0^l P'(h)C'(l-h)\,dh \tag{9,9}$$

Cette équation intégrale (que l'on peut résoudre à l'aide d'une transformation de Laplace) montre que $P'(l)$, c'est-à-dire, à un facteur près, selon (6,10), la granulométrie en nombre des traversées des grains (dans la direction α) ne dépend que de la dérivée $C'_\alpha(l)$ (prise dans cette direction) de la covariance $C(h)$.

La valeur moyenne m_1 de la traversée des grains (relativement à la granulométrie en nombre) se déduit de (6,10) : faisant $l = 0$, on obtient :

$$m_1 = -\frac{p}{P'(0)} = -\frac{p}{C'(0)}$$

De son côté, la traversée moyenne m_2 des pores (relativement à la granulométrie en nombre $e^{-\mu h}$) est $\frac{1}{\mu}$, c'est-à-dire, d'après (9,7) :

$$m_2 = -\frac{q}{C'(0)}$$

On voit que les traversées moyennes des grains et des pores sont, comme il était prévisible, dans le même rapport que p et q.

Dans les deux paragraphes qui suivent, nous allons établir quelques propriétés des schémas semi-markoviens isotropes (à loi spatiale invariante par rotation) dans les espaces à 2 et à 3 dimensions. Le cas d'un schéma semi-markovien à une seule dimension est particulièrement simple. C'est un cas particulier de la théorie des processus de renouvellement. La propriété semi-markovienne et l'équation intégrale (9,9) montrent que ce schéma à une dimension est entièrement défini par la donnée de la covariance $C(h)$— ou, si l'on préfère, par celle du moment $P(h)$.

10. — Schéma semi-markovien isotrope (2 dimensions).

Soit A un ensemble aléatoire isotrope (à loi spatiale invariante par rotation) défini dans l'espace à 2 dimensions et possédant la propriété semi-markovienne. Nous nous proposons de calculer le moment fonctionnel $Q(S) = P(S \cap A = \emptyset)$ lorsque S est un ensemble convexe quelconque, et aussi la probabilité conditionnelle $\varphi(s)\, ds\, \delta h$ pour que l'élément d'aire $ds\, \delta h$, construit sur l'élément ds du contour C de S, rencontre A lorsque l'on sait que S est disjoint de A.

Comme l'arc ds sépare S et l'aire $ds\, \delta h$, la propriété semi-markovienne nous indique que cette probabilité conditionnelle $\varphi(s)\, ds\, \delta h$ ne peut dépendre que des caractéristiques de l'élément d'arc, c'est-à-dire de sa longueur ds et de son rayon de courbure $R = \frac{ds}{d\alpha}$ (α angle de la tangente orientée en s). Considérons d'abord les deux cas particuliers suivants :

1° $R = \infty$, $ds\, \delta h$ est un élément d'aire construit sur l'élément rectiligne ds d'une droite D. La probabilité conditionnelle pour que les grains A présentent, relativement à la direction de D, un point limite tombant dans $ds\, \delta h$, lorsque ds est dans les pores, est de la forme $\theta\, ds\, \delta h$, θ étant une constante indépendante de la direction de D, puisque le schéma est isotrope et stationnaire. Dans le cas particulier où A est un schéma booléen à grains convexes, θ coïncide avec la densité de germe (on peut, en effet, sans modifier le schéma final A obtenu par passage en booléen, imposer au grain convexe primaire A′ une translation aléatoire amenant l'un de ses points limites relatifs à la direction de D en coïncidence avec l'origine des coordonnées, qui est le germe de A′). Dans le cas général, la constante θ se relie *au nombre spécifique* ν' introduit au paragraphe 5, par la relation :

$$\theta = \frac{\nu'}{q}$$

2° Prenons maintenant un cercle de rayon δh très petit. Lorsque le centre est dans les pores, la probabilité conditionnelle pour que ce petit cercle rencontre A est de la forme $\beta\, \delta h$, β étant une constante. Plus

précisément, et en raison de l'isotropie, la probabilité pour que le point des grains A le plus proche du centre tombe dans un petit secteur $d\alpha$ de ce petit cercle est $\frac{\beta}{2\pi}\,\delta h\,d\alpha$. Ce paramètre β est lié au *périmètre spécifique* 2λ défini au paragraphe 5 par la relation :

$$\beta = \frac{2\lambda}{q}$$

Plaçons-nous maintenant dans le cas général. L'ensemble convexe S est limite de polygones convexes, et l'élément d'arc ds peut être remplacé par deux éléments rectilignes de longueur totale ds faisant entre eux l'angle $d\alpha = \frac{ds}{R}$, R désignant le rayon de courbure en ds. Lorsque ds est dans les pores, la probabilité pour que le point de A le plus proche de ds (du côté de l'extérieur) tombe dans l'un ou l'autre des deux petits rectangles de longueur δh construits sur les deux éléments rectilignes est $0\,ds\,\delta h$. La probabilité pour que le point le plus proche tombe dans le petit secteur circulaire d'angle $d\alpha$ et de rayon δh construit sur le sommet anguleux de ds est $\frac{\beta}{2\pi}\,d\alpha\,\delta h$. Ainsi, on a :

$$\varphi(s)\,ds\,\delta h = 0\,ds\,\delta h + \frac{\beta}{2\pi}\,d\alpha\,\delta h \qquad (10,1)$$

c'est-à-dire

$$\varphi(s) = 0 + \frac{\beta}{2\pi R}$$

Prenons pour δh une fonction quelconque $\delta h\,(s)$ de l'arc s, et désignons par S′ l'aire déduite de S par la dilatation $\delta h\,(s)$. La propriété semi-markovienne entraîne :

$$Q(S') = Q(S)\left[1 - \int_C \varphi(s)\,\delta h\,(s)\,ds\right]$$

l'intégrale étant étendue au contour C de S. Ainsi la variation de Q(S), est :

$$\delta Q(S) = Q(S') - Q(S) = -\,Q(S)\int_C \varphi(s)\,\delta h\,(s)\,ds$$

Évaluons cette intégrale en tenant compte de (10,1). On a :

$$\int_C \varphi(s)\,\delta h\,(s)\,ds = 0\,\delta S + \frac{\beta}{2\pi}\int_C \delta h\,(s)\,d\alpha$$

δS est la variation $S' - S$ de l'aire de S. D'autre part, si $2\mathfrak{L}$ désigne le périmètre de S, la variation $\delta 2\mathfrak{L}$ de ce périmètre est justement égale à $\int_C \delta h\,(s)\,d\alpha$. Par conséquent, on a :

$$-\,\delta Q = \left[0\delta S + \frac{\beta}{2\pi}\,\delta(2\mathfrak{L})\right] Q(S)$$

Ceci s'intègre immédiatement sous la forme

$$Q(S) = Ce^{-\theta S - \frac{\beta \mathcal{L}}{\pi}}$$

D'ailleurs $C = q$, comme on le voit en prenant une famille d'homothétiques de S de plus en plus petits. Finalement nous avons

$$Q(S) = qe^{-\theta S - \frac{\beta \mathcal{L}}{\pi}} \tag{10,2}$$

Signification des paramètres θ ***et*** β. — On notera le caractère très géométrique de ce résultat. Lorsque S est un ensemble convexe quelconque, le moment fonctionnel Q(S) *ne dépend que de l'aire et du périmètre de* S. Les deux paramètres θ et β sont liés, d'autre part, *à la porosité* q, *au nombre spécifique* ν' *et au périmètre spécifique* 2λ du milieu semi-markovien à 2 dimensions. On a, en effet :

$$\theta = \frac{\nu'}{q} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{2\lambda}{q} \tag{10,3}$$

Dans le cas d'un *schéma booléen à grains convexes*, cette interprétation de θ et de β peut encore se préciser comme suit. Tout d'abord, comme on l'a déjà vu, θ est *la densité des germes* des grains primaires. Pour interpréter β, remarquons que si on prend pour S un segment de droite de longueur l, ($S = 0$, et $2\mathcal{L} = 2l$), une comparaison de (10,2) avec (9,6) donne $\frac{\beta}{\pi} = -\frac{1}{q}C'(0)$, relation qui résulte aussi de (10,3) et de $2\lambda = -\pi C'(0)$. Mais, le schéma étant booléen à grains convexes, on a également, selon (8,8) :

$$\frac{\beta}{\pi} = -\theta K'(0) = \theta E(D_0)$$

Ainsi, *le paramètre* $\frac{\beta}{\pi}$ *est égal au produit de la densité de germes* θ *par l'espérance du diamètre apparent* D_0 *des grains convexes primaires.*

Remarquons encore ceci : la relation géométrique (7,6) reliant le diamètre apparent moyen et le périmètre d'un ensemble convexe nous donne $E(D_0) = E\left(\frac{2\mathcal{L}_{A'}}{\pi}\right)$, $2\mathcal{L}_{A'}$ désignant le périmètre du grain convexe primaire. Compte tenu de (10,3), on trouve immédiatement :

$$2\lambda = q\theta E(\mathcal{L}_{A'}) = \nu' E(\mathcal{L}_{A'})$$

Le périmètre spécifique du schéma booléen est le produit du périmètre moyen $E(\mathcal{L}_{A'})$ *des grains primaires par le nombre spécifique* ν' *du schéma.*

L'expression $\theta E(\mathcal{L}_{A'})$ représenterait le périmètre spécifique si les grains convexes primaires étaient disjoints les uns des autres. L'intervention de la porosité q provient de ce qu'un point appartenant au périmètre d'un grain

primaire donné a la probabilité q de n'être recouvert par aucun autre grain primaire, et donc d'appartenir au périmètre de la réunion A de tous les grains primaires.

Compte tenu de ces résultats, nous pouvons remplacer (10,2) par l'équation :

$$Q(S) = qe^{-\theta[S+\mathcal{L}_{E(D_0)}]} \tag{10,4}$$

Démonstration de (7,17). — De cette relation (10,4) nous allons maintenant déduire la formule (7,17) énoncée sans démonstration au paragraphe 7. En effet, tout d'abord, la porosité q, d'après (8,6) est :

$$q = e^{-\theta K(0)} = e^{-\theta E[\mathrm{Mes}\, A']}$$

Désignons par $S_{A'}$, et $2\mathcal{L}_{A'}$ l'aire et le périmètre (aléatoires) du grain convexe primaire A'. Selon (7,6), le périmètre $2\mathcal{L}_{A'}$ et le diamètre apparent moyen $E(D_0)$ vérifient

$$E(D_0) = \frac{E(2\mathcal{L}_{A'})}{\pi}$$

Soit B un ensemble convexe d'aire S_B et de périmètre $2\mathcal{L}_B$. Compte tenu de ce qui précède, (10,4) s'écrit :

$$Q(B) = \exp\left[-\theta\left(S_B + 2\mathcal{L}_B \frac{E(2\mathcal{L}_{A'})}{2\pi} + E(S_{A'})\right)\right]$$

Identifions cette expression à la formule générale (8,4). On peut d'ailleurs remplacer $\check{B}$ par B lui-même, puisque le schéma est invariant par rotation. Il vient :

$$E\,[\mathrm{Mes}\,(A' \oplus B)] = S_B + \frac{2\mathcal{L}_B E(2\mathcal{L}_{A'})}{2\pi} + E(S_{A'})$$

Ce n'est pas autre chose que la formule (7,17) qui se trouve ainsi démontrée.

Lorsque B est *le cercle* B_r de rayon r, on déduit directement de la relation (7,10), relation purement géométrique, exprimant une propriété classique des courbes parallèles, et de la formule générale (8,4) :

$$Q(B_r) = e^{-\theta[E(S_{A'})+rE(2\mathcal{L}_{A'})+\pi r^2]} \tag{10,5}$$

Cette relation s'applique à tous les schémas booléens à grains convexes, *isotropes ou non*, puisqu'elle se déduit de (7,10) et de (8,4).

Loi du premier point de contact. — Soit x un point situé dans les pores. Désignons par R la distance du point des grains le plus proche de x, c'est-à-dire, si l'on veut, la distance du premier point de rencontre avec les grains A d'une famille de cercles de rayons croissants centrés en x. Si A est booléen à grains convexes (*isotrope ou anisotrope*), la probabilité conditionnelle $F(r)$ pour que R soit inférieur à r lorsque x est dans

les pores, ou fonction de répartition de la variable aléatoire R peut être appelée loi du premier point de contact. D'après (10,5), on a :

$$(10,6) \qquad 1 - F(r) = P(R \geqslant r) = e^{-\theta[\pi r^2 + r E(2\mathcal{L}_{A'})]}$$

Ainsi la loi du premier point de contact est l'exponentielle d'une expression du second degré en r. Elle ne dépend que de deux paramètres seulement : la densité de germe θ et l'espérance $E(2\mathcal{L}_{A'})$ du périmètre du grain convexe primaire. On peut remplacer ce dernier périmètre par l'espérance $E(D_0)$ du diamètre apparent moyen D_0 du grain primaire, puisque l'on a toujours :

$$E[2\mathcal{L}_{A'}] = \pi E(D_0)$$

Dans un schéma semi-markovien isotrope (non booléen) de *périmètre spécifique* 2λ, *de nombre spécifique* ν' *et de porosité* q, cette loi du premier point de contact, d'après (10,2) et (10,3), s'écrit :

$$(10,6^{\,bis}) \qquad 1 - F(r) = e^{-\frac{1}{q}[\nu'\pi r^2 + 2\lambda r]}$$

Cette expression de la loi du premier point de contact s'applique, en fait, à un schéma semi-markovien quelconque (non isotrope). En effet, une rotation aléatoire appliquée à ce schéma ne modifie ni $F(r)$, ni les paramètres scalaires 2λ, ν' et q et nous restitue un schéma isotrope auquel $(10,6^{\,bis})$ est applicable.

11. — Schéma semi-markovien isotrope (3 dimensions).

Soit maintenant A un schéma semi-markovien isotrope de l'espace à 3 dimensions. Soit B un ensemble convexe, V son volume, S sa surface, et $\mathcal{C}$ l'intégrale de la courbure moyenne de B étendue à la surface limite S. Nous nous proposons de calculer la probabilité Q(B) pour que B soit contenu dans les pores, et aussi la probabilité conditionnelle $\varphi(x)\, dS\, \delta h$ pour que, B étant dans les pores, l'élément de volume $dS\, \delta h$ construit en un point x de la surface S de B rencontre les grains. Comme l'élément d'aire dS sépare B et le petit volume $dS\, \delta h$, et que le schéma vérifie la propriété semi-markovienne, cette probabilité conditionnelle ne peut dépendre que des propriétés de l'élément d'aire, c'est-à-dire de dS lui-même et des deux rayons de courbure R_1 et R_2 au point considéré. Considérons d'abord les 3 cas particuliers suivants :

1° dS est un élément d'aire plane appartenant à un plan P. La probabilité conditionnelle pour que, dS étant dans les pores, les grains A présentent, relativement à P, un point limite tombant dans $dS\, \delta h$ est de la forme $\theta\, dS\, \delta h$, θ étant une constante indépendante de la direction de P, puisque le schéma est isotrope et stationnaire. Dans le cas particulier où le schéma est booléen à grains convexes, on voit, comme au paragraphe précédent, que θ n'est autre que la densité de germes. Dans le cas

Exercices sur les processus stochastiques

Exercice 1. Soit un processus de Poisson de paramètre a. On se place conditionnellement dans l'hypothèse où le nombre N de points de discontinuités tombés dans $(0,\ell)$ est n : N = n.

a/ Montrer que le nombre $k \leq n$ des points tombant dans $(0,x)$ $x \leq \ell$ est alors une variable binomiale $(n,\ p = x/\ell)$

Ecrire la probabilité a priori d'avoir k points dans $(0,x)$ et n-k dans $(\ell - x,\ \ell)$:

$$\frac{(ax)^k}{k!} e^{-ax} \quad \frac{a^{n-k}(\ell-x)^{n-k}}{(n-k)!} e^{-a(\ell-x)} = \frac{a^n}{n!} C_n^k x^k (\ell-x)^{n-k} e^{-a\ell}$$

et la prob. a priori d'avoir n points dans $(0,\ell)$: $\frac{(a\ell)^n}{n!} e^{-a\ell}$

Faire le rapport.

b/ Plus généralement montrer que tout se passe comme si ces n points avaient été implantés au hasard dans $(0,\ell)$ indépendamment les unes des autres avec une densité de probabilité uniforme.

La probabilité a priori d'avoir n points exactement sur $(0,\ell)$ vérifiant

$Y_i \in (y_i + dy_i)$ $(0 \leq y_1 \leq y_2 \leq \ldots \leq y_n < \ell)$ est

$$e^{-ay_1} a dy_1 e^{-a(y_2-y_1)} a dy_2 \ldots e^{-a(y_n-y_{n-1})} a dy_n e^{-a(\ell-y_n)}$$

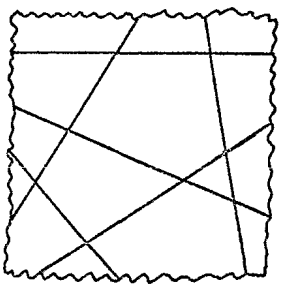
$$= a^n e^{-al} dy_1 dy_2 \ldots dy^n$$

la probabilité a priori de N=n est d'autre part $\frac{(a\ell)^n}{n!} e^{-a\ell}$. D'où la densité conditionnelle à n variables :

$$\frac{n!}{\ell^n} dy_1\, dy_2 \ldots dy_n \qquad (0 \leq y_1 \leq y_2 \leq \ldots \leq y_n \leq \ell)$$

Si $X_1, X_2 \ldots X_n$ sont n points implantés au hasard et indépendamment sur le segment, classer ces variables par ordre croissant $X_{i_1} \leq X_{i_2} \leq \ldots \leq X_{i_n}$ et poser $Y_k = X_{i_k}$. Montrer que ces variables Y_k ont la même densité que les n points du processus (la nécessité de ranger les points par ordre croissant résulte de ce que l'on n'a aucun autre moyen d'individualiser les points d'un processus de Poisson que de les prendre dans leur ordre d'arrivée).

Exercice 2. Droites poissoniennes dans le plan. On définit un système aléatoire de droites dans le plan de la manière suivante : les droites de direction $\in (\alpha, \alpha + d\alpha)$ induisent sur une droite perpendiculaire à leur direction un processus de Poisson de paramètre infiniment petit $\lambda d\alpha$ (λ constante ne dépendant pas de α). On obtient ainsi une partition aléatoire du plan en polygones convexes. (Pourquoi convexes ?) Comme λ ne dépend pas de α, ce schéma est isotrope.



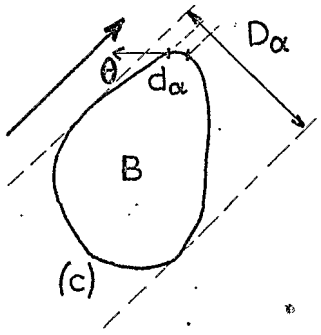
a/ ce schéma induit sur une droite quelconque un processus de Poisson de densité 2λ.

[Les droites de direction $\in (\alpha, \alpha + d\alpha)$ induisent un petit Poisson de de densité $\lambda \sin \alpha\, d\alpha$, d'où un Poisson résultant de paramètre

$$\int_0^\pi \lambda \sin \alpha\, d\alpha = 2\lambda]$$

b/ Sachant que l'axe des x rencontre une droite du schéma entre x et x+dx, quelle est la probabilité pour que cette droite ait une direction $\in (\alpha, \alpha + d\alpha)$ $\quad (0 \leq \alpha \leq \pi)$

[On doit diviser la probabilité a priori dx λ sin α dα par la probabilité 2 λ dx pour qu'une droite rencontre le segment (X,X+dx), d'où la densité conditionnelle $\frac{\sin \alpha}{2}$ dα ($0 \leq \alpha \leq \pi$). Noter que ces directions ne sont pas uniformément réparties sur l'intervalle $(0,\pi)$]

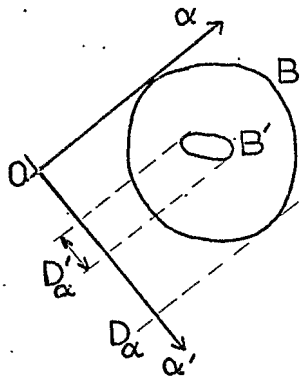


c/ (Théorème de Minkowski) Soit B un ensemble convexe, C son contour, $2\mathscr{L}$ son périmètre, D_α son diamètre apparent dans la direction α. On a : $\int_0^\pi D_\alpha \, d\alpha = 2\mathscr{L}$

[Si θ est la direction de la tangente au point courant, on a $D_\alpha = \frac{1}{2}\int |\sin(\theta-\alpha)| \, ds$ - Intégres d'abord en α]

d/ Le nombre N des droites du schéma rencontrant cet ensemble convexe B est une variable de Poisson de paramètre $2\lambda\mathscr{L}$. On a : $P_n(B) = \frac{(2\lambda\mathscr{L})^n}{n!} e^{-2\lambda\mathscr{L}}$. En particulier, la probabilité pour que B ne soit rencontré par aucune des droites du schéma est $P_o(B) = e^{-2\lambda\mathscr{L}}$

[le nombre des droites de direction $\in (\alpha, \alpha + d\alpha)$ rencontrant B est un petit Poisson de paramètre $2\lambda D_\alpha \, d\alpha$. Appliquer c/]



e/ Soit $B' \subset B$ un autre ensemble convexe, C' son contour, $2\mathscr{L}'$ son périmètre. Lorsque l'on sait qu'une droite et une seule rencontre B, la probabilité conditionnelle pour que cette droite rencontre également B' est égale au rapport des périmètres : $P(N'_B = 1 \mid N_B = 1) = 2\mathscr{L}'/2\mathscr{L}$

[Associer à toute direction α un axe O α' comme sur la figure. La probabilité conditionnelle pour que la droite du schéma rencontrant B ait une direction $\in (d, \alpha + d\alpha)$ et rencontre (O, α') en un point $\in (x,x+dx)$ est

$$\frac{\lambda d\alpha \, dx \, e^{-2\lambda\mathscr{L}}}{\lambda 2\mathscr{L} \cdot e^{-2\lambda\mathscr{L}}} = \frac{d\alpha dx}{2\mathscr{L}} \qquad (0 \leq x \leq D_\alpha, \; 0 \leq \alpha \leq \pi)$$

Cette droite a donc la prob. conditionnelle $(\frac{D_\alpha}{2\mathcal{L}} d\alpha)$ d'avoir une direction $\in (\alpha, \alpha+d\alpha)$, et son pied sur $O\alpha'$ est uniformément réparti sur le segment $(0,D_\alpha)$. La probabilité pour que cette droite rencontre aussi B' est alors $\frac{D'\alpha}{D_\alpha}$. La probabilité conditionnelle cherchée est donc :

$$\int_0^\pi \frac{D'_\alpha}{D_\alpha} \frac{D_\alpha}{2\mathcal{L}} d\alpha = \frac{2\mathcal{L}'}{2\mathcal{L}}$$

f/ Traversée moyenne. Sachant qu'une droite du schéma rencontre l'ensemble convexe B d'aire S, l'espérance conditionnelle de la longueur de la corde interceptée est $\pi S/2\mathcal{L}$

Si cette droite a une direction $\in (\alpha, \alpha+d\alpha)$, l'espérance conditionnelle est S/D_α. D'où $E(L|N=1) =$

$$\int_0^\pi \frac{S}{D_\alpha} \frac{D_\alpha}{2\mathcal{L}} d\alpha = \pi \frac{S}{2\mathcal{L}}$$

g/ Nombre moyen θ de sommets ou de polygones par unité de surface
Les polygones étant convexes, les nombres spécifiques de convexité et de connexité coïncident. Ce nombre est $\theta = \pi\lambda^2$.

[Prendre une sphère de rayon R. Se placer conditionnellement dans l'hypothèse où cette sphère rencontre deux droites du schéma (prob. a priori $\frac{(2\lambda\mathcal{L})^2}{2} e^{-2\lambda\mathcal{L}}$). Montrer qu'il y a alors une chance sur deux pour que ces deux droites se coupent à l'intérieur de la sphère : si la corde interceptée par la première droite est de longueur L, la seconde la coupe avec la prob. $\frac{2L}{2\pi R}$ d'après e/. Mais l'espérance conditionnelle de L est $\frac{1}{2}\pi R$ d'après f/. On voit ensuite qu'une petite sphère de rayon δR contient un sommet avec la probabilité $\frac{1}{2} \frac{(2\pi\lambda\delta R)^2}{2} = \pi^2 \lambda^2 \delta R^2$ d'où $\theta = \pi\lambda^2$-]

h/ De $\theta = \pi\lambda^2$ résulte que la valeur moyenne en nombre de la surface S d'un polygone est $E(S) = \frac{1}{\pi\lambda^2}$. Montrer que la valeur moyenne en surface est $\mathfrak{M}(S) = \frac{\pi}{2\lambda^2}$. Ainsi : $\mathfrak{M}(S)/E(S) = 1 + D^2(S)/[E(S)]^2 = \frac{\pi^2}{2}$

On notera ausi la valeur très élevée de la variance relative

$$\frac{D^2(S)}{[E(S)]^2} = \frac{\pi^2}{2} - 1.$$

[La probabilité pour que deux points du plan distants de r soient dans le même polygone est $P(r) = e^{-2\lambda r}$. La valeur moyenne en surface s'en déduit : $\mathfrak{M}(S) = \int_0^\infty 2\pi\, r\, dr\, e^{-2\lambda r} = \frac{\pi}{2\lambda^2}$]

Exercice 3. (processus de renouvellement à deux états obtenu à partir d'un processus de renouvellement). Soit un processus de renouvellement, et F la loi de la distance entre points de discontinuités successifs. (moyenne m, variance σ^2, transformée de Laplace Φ). On tire au sort, indépendamment les uns des autres, l'appartenance des segments (Y_i, Y_{i+1}) à l'un ou l'autre des deux états e_1 (prob. p) et e_o. (prob. $q = 1-p$).

a/ Montrer que l'on obtient ainsi un processus de renouvellement à deux états. Les granulométries en nombre ont les transformées de Laplace :

$$\Phi_1 = \frac{q\,\Phi}{1-p\Phi} \quad , \quad \Phi_o = \frac{p\,\Phi}{1-q\Phi}$$

[Partir de $f_1 = q\, f + q\, p\, f_* f + \ldots + q\, p^{n-1}\, f^{*(n)} + \ldots$]

b/ Calculer la moyenne et la variance de ces granulométries en nombre ($m_1 = \frac{m}{q}$ $\sigma_1^2 = \frac{p}{q^2} m^2 + \frac{1}{q} \sigma^2$; Vérifier $p = p_1 = \frac{m_1}{m_o + m_1}$

[Dériver deux fois le logarithme de $\Phi_1 = \frac{q\,\Phi}{1-p\,\phi}$]

c/ Montrer que la covariance est : $C_{10}(h) = \frac{pq}{m} \int_o^h [1-F(x)]dx$

On peut utiliser la formule générale $\chi_{10} = \frac{1}{m_o + m_1} \frac{(1-\Phi_o)(1-\Phi_1)}{\lambda^2(1-\Phi_o\Phi_1)}$

qui donne ici : $\chi_{10} = pq \frac{1-\Phi}{m\lambda^2}$

On peut aussi faire un raisonnement direct : Pour avoir $0 \in e_1$ et $h \in e_o$ écrire que 0 appartient à e_1 avec la prob. p, que le segment du processus de renouvellement dans lequel 0 est tombé s'arrête avant h avec la prob. $\int_o^h \frac{1-F(x)}{m} dx$ (granulométrie résiduelle), et qu'on a ensuite $h \in e_o$ avec la prob. q).

d/ Calculer la portée ($a = m + \frac{\sigma^2}{m}$)

[la formule (14) donne $a = pq\,(m_o + m_1)\,(\frac{\sigma_o^2}{m_o^2} + \frac{\sigma_1^2}{m_1^2}) = m\,(p+q\frac{\sigma^2}{m^2} + q + p\,\frac{\sigma^2}{m^2})$]

On peut aussi faire la calcul direct :

$$a = -\frac{2}{pq} \int_o^\infty [C_{10}(h)-pq]dh = -\frac{2}{m} \int_o^\infty dh \left[\int_o^h [1-F(x)]\,dx - m\right] =$$

$$= \frac{2}{m} \int_o^\infty dh \int_o^\infty [1-F(x)]dx = \frac{2}{m} \int_o^\infty [1-F(x)]dx \int_o^x dh = \frac{2}{m} \int_o^\infty x[1-F(x)]dx = \frac{1}{m}(\sigma^2+m^2)$$

Exercice 4. Reprendre l'exercice précédent dans le cas $F(x) = 1 - e^{-bx}$ (processus de Poisson), et montrer que l'on obtient ainsi le Markov à deux états dont la matrice de transition est :

$$P(h) \begin{pmatrix} q + p\,e^{-bh} & , & q - q\,e^{-bh} \\ p - p\,e^{-bh} & , & p + q\,e^{-bh} \end{pmatrix}$$

on peut appliquer directement Ex. 4 : $\Phi_1 = \frac{q\Phi}{1-p\Phi} = \frac{qb}{qb+\lambda}$

D'où : $1-F_1(x) = e^{-bqx}$ $C_{10}(h) = \frac{pq}{m}\int_0^h e^{-bx}\,dx = pq\,[1-e^{-bh}]$; $a = \frac{m^2+\sigma^2}{m} = \frac{2}{b}$

On peut aussi faire un raisonnement direct : conditionnellement si $x \in e_1$ il y a indépendance entre les évènements antérieurs et postérieurs à x, à cause de la propriété caractéristique des lois exponentielles. Si n points de discontinuité séparent x et x+h (prob. $\frac{(bh)^n}{n!}e^{-bh}$), la prob. conditionnelle pour que le segment (x,x+h) soit contenu dans e_1 est p^n, d'où :

$P[(x,x+h) \subset e_1] = p \sum_n p^n \frac{(bh)^n}{n!} e^{-bh} = p\,e^{-bqh}$ et la granulométrie $1-F_1 = e^{-bqh}$. S'il n'y a pas de discontinuité entre x et x+h, $P(x+h \in e_1 \mid x \in e_1) = 1$; s'il y a des discontinuités, cette probabilité est p. D'où :

$$P_{11}(h) = e^{-bh} + p(1 - e^{-bh}) = p + q\,e^{-bh}$$

Exercice 5. Covariance conditionnelles. Soit un cycle à deux états, dans lequel l'état e_o seul est récurrent. Il y a une dissymétrie entre les deux états, qui n'apparait pas sur l'expression de la covariance. Pour la prendre en charge, on introduit la covariance conditionnelle $H_o(h)$, donnant la probabilité conditionnelle de $x+h \in e_o$ sachant que x est l'origine d'un segment e_o, et on définit de même $H_1(h)$.

a/ Montrer $\eta_o = \frac{1}{\lambda}\,\frac{1-\Phi_o}{1-\Psi}$ et $\eta_1 \frac{1}{\lambda} - \Phi_1\,\eta_o = \frac{1}{\lambda}\left[1 - \frac{\Phi_1(1-\Phi_o)}{1-\Psi}\right]$

La première formule est établie dans le cours, pour la seconde établir l'équation de convolution :

$$1 - H_1(x) = \int_0^x f_1(y)\, H_0(x-y)\, dy$$

b/ Appliquer au schéma de migration $\Phi_0 = \frac{a}{a+\lambda q}$, $\Phi_1 = \frac{a}{a+\lambda p}$, $\Psi = \frac{a}{a+\lambda}$

$$\eta_0 = \frac{q}{\lambda} + \frac{pq}{a+q\lambda}$$

$$\eta_1 = \frac{1}{\lambda} - \frac{a}{a+p\lambda}\left[\frac{q}{\lambda} + \frac{pq}{a+q\lambda}\right] = \frac{p}{\lambda} + \frac{pq^2}{p-q}\left[\frac{1}{a+q\lambda} - \frac{1}{a+p\lambda}\right]$$

D'où $H_0(h) = q + p\, e^{-\frac{a}{q}h}$ (comme dans un Markov à deux états, mais :

$$H_1(h) = p + \frac{pq}{p-q}\, e^{-\frac{a}{q}h} - \frac{q^2}{p-q}\, e^{-\frac{a}{p}h}$$

c/ Déduire de a/ la relation $C_{01}(h) = \frac{1}{m_0 + m_1}\int_0^h [H_0(x)+H_1(x)-1]\, dx$

(Remarque : on peut montrer que cette relation entre covariance et covariances conditionnelles est valable pour tout processus à deux états, cycliques ou non).

Pour démontrer la formule dans le cas général, introduire les moments d'ordre 3 : $J_1(x,y,z) = P(x \in e_1,\ y \in e_1,\ z \in e_1)$ et J_0.

Etablir la relation $J_0 + J_1 = 1 - 3p_1 + C_{11}(x-y) + C_{11}(y-z) + C_{11}(z-x)$

(passer par l'espérance de $[1-k(x)][1-k(y)][1-k(z)]$, $k(x)$ désignant l'indicatrice de e_1) et exprimer H_0 et H_1 à l'aide des dérivées à gauche $\frac{\partial -}{\partial a} J_0(a,o,h)|a=0$, $\frac{\partial -}{\partial a} J_1(a,o,h)|\ a=0$

Exercice 6. On considère la partition aléatoire du plan en polygones convexes de l'exercice2. On attribue à chacun de ces polygones (indépendamment des autres) l'état e_1 ou e_0 avec les prob. p et q resp. Montrer que ce schéma induit sur toute droite du plan un Markov à deux états (utiliser Ex.,a/ et ex.4). Le nombre spécifique de convexité des grains est $q^2 p \pi \lambda^2$ (utiliser ex. 2, g/)

Exercice 7. Formule de Gy pour l'échantillonnage des minerais. Soit un lot de minerai dont les fragments sont caractérisés par un poids $Z = X+Y$, X et Y désignant le poids de métal et le poids de stérile contenu dans ce fragment. On tire au sort, indépendamment les uns des autres, des fragments de poids Z_1, Z_2, ... jusqu'à un nombre (aléatoire) N tel que :

$$\sum_1^N Z_n \leqslant \varpi < \sum_1^{N+1} Z_n$$

(échantillon de poids ϖ donné) Calculer la variance d'échantillonnage (variance de $T = \frac{1}{\varpi} \sum_1^N X_n$) montrer que, sous forme de variance relative, on a :

$$\frac{D^2(T)}{[E(T)]^2} = \frac{1}{E(N)} \; D^2 \left[\frac{Z}{m_Z} - \frac{X}{m_X}\right]$$

[Assimiler ϖ à un temps ou une longueur ; les segments successifs X_n, Y_n donnent un renouvellement à deux états. La variance de la teneur T de l'échantillon de longueur ϖ est :

$$\frac{a}{\varpi} pq = p^2 q^2 \frac{E(Z)}{\varpi} D^2 \left(\frac{X}{m_X} - \frac{Y}{m_Y}\right).$$

Noter ensuite $\frac{Z}{m_x + m_y} - \frac{X}{m_x} = \frac{m_y}{m_x + m_y}\left(\frac{Y}{m_y} - \frac{X}{m_x}\right) = q\left(\frac{Y}{m_y} - \frac{X}{m_x}\right)$]

Exercice 8. Schéma booléen à une dimension. On considère des grains convexes primaires (qui sont des segments), et on désigne par F leur granulométrie en nombre. Soit F_1 la granulométrie en nombre des grains obtenus après passage en booléen (densité de germes θ), et F_0 celle des pores.

a/ Rapport entre F et K(h) : $1 - F(h) = -K'(h)$

(On a ici $K'(o) = -1$. Directement : un grain primaire A de longueur L et son translaté A_h dans la translation $h \leqslant L$ ont une intersection de longueur L-h, d'où $K(h) = \int_h^\infty (L-h)\, f(h)\, dh$, et $-K'(h) = \int_h^\infty f(h)dh = 1-F(h)$

b/ Poser $U(h) = \int_0^h [1 - F(x)]\, dx = K(0) - K(h)$. Montrer par un raisonnement direct $P(x+h \in e_0 \mid x \in e_0) = e^{-\theta U(h)}$

(Si l'on a n extrémités gauches de grains primaires sur (0,h) - prob. $\frac{(\theta h)^n}{n!} e^{-\theta h}$ - celles-ci sont réparties au hasard sur (0,h) (Ex.1).

La probabilité pour que l'un, donné, de ces grains primaires ne contienne pas le point h est $\frac{1}{h}\int_0^h F(y)dy$. D'où :

$$P(x+h \in e_0 \mid x \in e_0) = \sum_n \frac{(\theta h)^n}{n!} e^{-\theta h} \left[\frac{1}{h}\int_0^h F(y)dy\right]^n = e^{-\theta U(h)} \quad)$$

c/ Montrer que $P(h \in e_1 | 0 \in e_o) = 1 - e^{-\theta U(h)}$ vérifie :

$$1 - e^{-\theta U(h)} = \int_o^h \theta\, e^{-\theta U(h-x)} [1-F_1(x)]\, dx$$

(l'origine du grain primaire contenant h doit tomber en un point h-x entre 0 et h)

d/ Soit Φ_1 la transformée de Laplace de f_1 et R celle de $e^{-\theta U(h)}$

On a : $\frac{1}{\lambda} - R = \theta \frac{(1-\Phi 1)}{\lambda} R$

Si $m = U(\infty)$ est l'espérance du grain primaire, celle du grain booléen est $m_1 = \frac{1}{\theta}(e^{\theta m}-1)$.

(la partie principale de $R(\lambda)$ en $\frac{1}{\lambda}$ est $\frac{e^{-\theta m}}{\lambda}$ pour $\lambda \to 0$|

e/ <u>Calcul de la portée</u>. Montrer a : $\theta \frac{q^2}{p}(m_1^2 + \sigma_1^2)$

(On a $m_o = \frac{1}{\theta}$, $m_1 = \frac{e^{\theta m}-1}{\theta}$ d'où $q = e^{-\theta m} = \frac{1}{1 + \theta m_1}$

$C_{OO}(h) = q\, e^{-\theta U}$ et :

$$a = \frac{2}{pq} \int_o^\infty [C_{OO}(h) - q^2]\, dh = \frac{2}{p} \int_o^\infty [e^{-\theta U(h)} - e^{-\theta m}]\, dh$$

Evaluer l'intégrale par $\lim_{\lambda \to 0} [R(\lambda) - \frac{e^{-\theta m}}{\lambda}] = \frac{1}{2}\theta (m_1^2 + \sigma_1^2) e^{-2\theta m}$

D'où $a = \theta \frac{q^2}{p}(m_1^2 + \sigma_1^2)$

En intégrant, on en déduit à la fois $\nu_r = \int_0^\infty \frac{f_o(r)dr}{r+m_o}$ et $\nu_r(m_r + m_o)=1$

soit, puisque $\nu = \frac{1}{m} = \frac{2}{m_o}$: $p_r + 2\,\varpi_r = 1$)

b/ Montrer que la granulométrie des traversées en creux vérifie :

$$\nu_c\, f_c(h) = 2\,\frac{K(h)}{(h + m_o)^3}$$

(Ecrire qu'un grain primaire a couvert h au temps -t (prob. a dt K(h)) que le segment h n'a plus ensuite été rencontré par aucun grain ($e^{-at(m_o+h)}$) mais que de -t à 0 une extrémité droite est tombée en $(-dh_1,0)$ et une extrémité gauche dans $(h,h+dh_2)$ $(a^2t^2\, dh_1\, dh_2)$. D'où :

$$\nu_c\, f_c(h) = a^3\, K(h) \int_0^\infty \epsilon^2\, e^{-at(m_o+h)}\, dt = \frac{2\,K(h)}{(m_o+h)^3}$$

c/ <u>Il y a autant de traversées en creux que de traversées en relief</u>.

(Intégrer par parties les expression a/ et b/ de $\nu_c\, f_c$ et de $\nu_r\, f_r$

On trouve :

$$\nu_c = \nu_r = \frac{1}{2m} + \int_0^\infty \frac{K'(h)}{(h+m_o)^2}\, dh \quad)$$

f/ Trouver une granulométrie primaire F telle que le schéma booléen soit un processus de Markov à deux états. On notera le coté paradoxal de ce problème, qui consiste à simuler l'absence de mémoire, caractéristique des phénomènes markoviens, en effectuant un passage en booléen à partir d'une granulométrie primaire F non exponentielle (et ne vérifiant donc pas cette propriété markovienne). Il n'est pas évident au départ que ce problème comporte une solution : en fait, nous allons montrer qu'il en existe effectivement une, qui est la vieille loi "logistique", aujourd'hui bien démodée, après avoir connu la faveur de la mode il y a une trentaine d'années.

(On cherche à avoir $\Phi_1 = \frac{a}{a+\lambda}$. D'après c/, il faut $R = \frac{a+\lambda}{\lambda} \frac{1}{a+\theta+\lambda}$

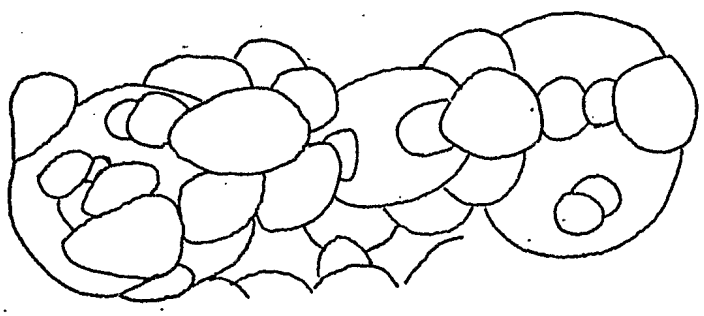
d'où $e^{-\theta U(h)} = \frac{a}{a+\theta} + \frac{\theta}{a+\theta} e^{-(a+\theta)h}$

Passer aux log, dériver. On trouve :

$$1 - F(h) = \frac{(a+\theta) e^{-(a+\theta)h}}{a + \theta e^{-(a+\theta)h}}$$

(loi logistique). Le problème est donc effectivement soluble.

Exercice 9. (partition aléatoire obtenue en recouvrant le plan avec des jetons aléatoires mis en place depuis l'origine des temps jusqu'à aujourd'hui). Soit A un grain primaire aléatoire dans l'espace à deux dimensions. Depuis l'origine des temps, rejetée à $-\infty$, on met en place des microschémas booléens de densité poissonienne a dt dx, et de même grain primaire A. Les grains A tombés entre -t et -t+dt cachent les portions des grains antérieurs qu'ils recouvrent. L'origine des temps étant rejetée à $-\infty$, le plan entier est couvert, et on a une partition aléatoire (constituée des portions visibles des derniers grains tombés) ;



a/ Si B est un ensemble quelconque, soit R_B l'évènement : "B est contenu dans une seule classe de la partition aléatoire", c'est à dire "B n'est coupé par aucune des frontières visibles". Montrer que l'on a $P(R_B) =$

$$\frac{E[\text{Mes } (A \ominus \check{B})]}{E[\text{Mes } (A \oplus \check{B})]}$$

(Démonstration directe : écrire qu'au temps -t un grain primaire a recouvert B (prob. $adt \int \varpi(B_{-\xi})\, d\xi = adt\ E[A \ominus \check{B}]$ et que de -t à 0 aucun grain primaire n'a plus recoupé B (prob. $e^{-at\ E[\text{Mes } A \oplus \check{B}]}$ comme dans le schéma booléen de densité $\theta = at$). Intégrer ensuite en t.

Démonstration "par récurrence" : on note que R_B se réalise de deux manières : ou bien R_B est déjà réalisé au temps $-\delta t$, et B n'est pas rencontré par les grains tombant entre $-\delta t$, et 0 ; ou bien, de $-\delta t$ à 0, un grain primaire recouvre B. D'où :

$$P(R_B) = P(R_B)\ [1-a\delta t\ E(\text{Mes } (A \oplus \check{B}))] + a\delta t\ E(\text{Mes}(A \ominus \check{B}))]$$

b/ En déduire la granulométrie linéaire (en nombre) F des composantes connexes des classes de cette partition. On se ramènera au cas à une dimension avec $K(h) = \int_0^h [1 - F_0(x)]dx$ (F_0, granulométrie linéaire originelle des grains primaires A, exprimée en nombre). Montrer que la traversée moyenne de ces composantes est égale à <u>la moitié</u> de la traversée moyenne des grains primaires. $m = \frac{1}{2}\, m_0$-

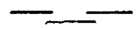
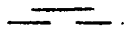
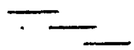
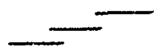
(Partir de $1 - F(h) = \frac{P'(h)}{P'(0)}$ avec $P(h) = K(h)/(h + m_0)$. Pour $h = 0$, on trouve $P'(0) = 1/m = -2/m_0$ et, avec $\nu = 1/m$ (nombre spécifique) :

$$\nu[1 - F(h)] = \frac{K(h)}{(h+m_0)^2} - \frac{K'(h)}{h+m_0}$$

c/ Traiter le cas où la granulométrie originelle F_o est la loi gamma de paramètre 2, de densité : $a^2\, h\, e^{-ah}$ $(m_o = 2/a)$: la loi F est alors <u>exponentielle</u>.

(Calculer d'abord $K(h) = \int_h^\infty dx \int_x^\infty a^2\, y\, e^{-ay}\, dy = (h + \frac{2}{a})e^{-ah} = (h+m_o)e^{-ah}$

D'où $P(h) = e^{-ah}$ et $1 - F(h) = e^{-ah}$

<u>Exercice 10</u>. <u>Traversées en relief, en creux et en escalier</u>. On considère le même schéma que dans l'exercice précédent, mais on suppose que l'on peut distinguer les traversée en creux : 
en relief :  et en escalier  ou 

Soient ν_c, ν_r, ν_e, f_c, f_r, f_e les nombres spécifiques et les densités des granulométries en nombre de ces différentes espèces de traversées. On désignera aussi par $p_i = P_i\, m_i$ (probabilité en mesure) la probabilité pour qu'un point donné x appartienne à une traversée d'espèce i (i = r,c ou e), et par $\varpi_i = \frac{\nu_i}{\nu}$ la probabilité en nombre (probabilité pour qu'une traversée donnée soit d'espèce i).

a/ Montrer $\nu_r\, f_r(h) = \frac{f_o(h)}{h+m_o} = \frac{K''(h)}{h+m_o}$. Remarquer le biais.

En déduire la relation : $p_r + 2\,\varpi_r = 1$ (si les traversées de type r occupent beaucoup de place sur la droite, elles sont moins nombreuses que les traversées des deux autres espèces).

(On a une traversée en relief dont l'origine $\in (0,dh_1)$ et l'extrémité $\in (h,h+dh_2)$ si ce dispositif était déjà réalisé au temps $-\delta t$ et n'a pas été dérangé de $-\delta t$ à 0 ; ou bien si un grain primaire de longueur h s'est mis en place dans cette position entre $-\delta t$ et 0. D'où :

$$\nu_r\, f_r(h) = \nu_r\, f_r(h)\, [1-a\delta t\, (h+m_o)] + a\delta_t\, f_o(r)$$

d/ La granulométrie des traversées en escalier est

$$\nu_e f_e = - \frac{2 K'(h)}{(h+m_o)^2}$$

(on peut faire un raisonnement direct, ou remarquer $\nu_r f_r + \nu_e f_e + \nu_c f_c = \nu f$ avec $\nu = \frac{1}{m} = \frac{2}{m_o}$ et f déduit de l'ex. 9,b/.

Noter qu'on obtient νf en dérivant deux fois P(h) :

$$\nu f = P''(h) = \frac{d^2}{dh^2} \frac{K(h)}{h+m_o} = \frac{K''(h)}{h+m_o} - \frac{2 K'(h)}{(h+m_o)^2} + \frac{2 K(h)}{(h+m_o)^3}$$

Les trois termes qui apparaissent correspondent à $\nu_r f_r$, $\nu_e f_e$ et $\nu_c f_c$.

e/ Relation $p_r = \varpi_e$

[On a $p_r + 2 \varpi_r = 1$, d'après a/, et $\varpi_e + 2 \varpi_r = 1$ puisque $\varpi_r = \varpi_c$ (c/)]

Exercice 11. On suppose que le grain primaire de l'exercice 9 est un cercle, dont le rayon R est une variable aléatoire de loi $F_o(r)$ (granulométrie originelle en nombre). On s'intéresse à la granulométrie F des cercles intacts (qui n'ont été rencontrés par aucun des cercles qui leur sont postérieurs) N.B. : les traversées en relief de Ex. 10 ne coïncident pas avec les traversées de ces cercles intacts.

a/ La granulométrie F et le nombre spécifique ν des cercles intacts vérifient :

$$\nu f(r) = \frac{f_o(r)}{(m_2 + 2\, m_1\, r + r^2)} \qquad \left(m_n = \int_o^\infty r^n\, f_o(r)\, dr \right)$$

(Ecrire qu'en -t un cercle de rayon R $\in$ (r,r+dr) a germé en x $\in$ dx et n'a pas été rencontré par les grains ultérieurs : prob. : $a\,dt\,dx\,f_o(r)\,dr\,e^{-at\pi(m_2 + 2\, m_1\, r + r^2)}$. Intégrer en t

b/ Le nombre spécifique ν est $\nu = \frac{1}{\pi}\int_o^\infty \frac{f_o(r)\,dr}{m_2 + 2\, m_1\, r + r^2}$

les moments m_n de la loi des cercles intacts se déduisent des moment m_n de la loi des cercles originels par les relations :

$$m_n = \pi\nu\,(m_2 + m'_n + 2\, m_1\, m'_{n+1} + m'_{n+2})$$

Inversement, ces relations permettent de déterminer m_1 et m_2 à partir de ν et de f(r), puis de reconstituer la loi originelle :

$$f_o(r) = \pi\nu\,(m_2 + 2\, m_1\, r + r^2)\, f(r)$$

TABLE DES MATIERES

I - PROCESSUS DE RENOUVELLEMENT 1

Le théorème de renouvellement 4
Existence d'une limite ergodique 6
Existence du processus stationnaire 8
Application 9
Processus de Poisson 13

II - PROCESSUS CYCLIQUES A DEUX ETATS 16

Théorème des états récurrents 16
La Covariance 20
La Portée 26
Processus de Markov à deux états 28

III - CHAINES DE MARKOV (homogènes, à temps discrets) 31

Classification des états 32
Théorèmes ergodiques 35

IV - PROCESSUS DE RENOUVELLEMENT à n ETATS 38

Processus de Markov à n états 45

V - SCHEMAS BOOLEENS ET SCHEMAS SEMI-MARKOVIENS 49

Les schémas booléens 49
Schéma booléen à grains primaires convexes 52
Les schémas semi-markoviens 53
Granulométrie des traversées des pores 55
Granulométrie des traversées des grains 56
Schéma semi-markovien isotrope (2 dimensions) 57

EXERCICES 62