C-37

E. N. S M. P.

Cours de processus stochastiques

M. MATHERON

1969

CHAPITRE O

FONCTIONS ALEATOIRES ET PROCESSUS STOCHASTIQUES

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. On a introduit, dans le cours de probabilité, la notion de variable aléatoire X : c'est une fonction $X(\omega) : \Omega \to \mathbb{R}$ mesurable pour la σ-algèbre $\mathcal{A}$. On a introduit ensuite la notion de variable aléatoire vectorielle $X = (X_1, X_2, .. X_n)$ possédant un nombre fini n de composantes : ce n'est pas autre chose qu'un ensemble de n fonctions $X_i(\omega)$ $(i = 1, 2, .. n)$ mesurables pour $\mathcal{A}$. On peut se demander ce qui se passe lorsque n devient infini : soit T un ensemble d'indices t, et $(X_t)_{t \in T}$ une famille infinie de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$- On voit que X_t est une fonction de $t \in T$, dont les valeurs (au lieu d'être des nombres réels) sont des variables aléatoires. D'où la définition :

Définition 1 : On appelle fonction aléatoire une famille infinie $(X_t)_{t \in T}$ de variables aléatoires X_t, l'indice T parcourant un ensemble infini T.

Au lieu de X_t, on peut écrire $X(t)$ (fonction aléatoire de $t \in T$). Lorsque T est un intervalle (fini ou non) de la droite réelle, et que $t \in T$ est interprété comme un temps , on parle de processus stochastique plutôt que de fonction aléatoire :

$X(t)$ représente alors, en effet, l'évolution aléatoire d'un phénomène au cours du temps.

Pour chaque valeur de $t \in T$, X_t, en tant que variable aléatoire, est une fonction mesurable $X_t(\omega)$ définie sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$. On voit ainsi que la fonction aléatoire $X(t)$ définie ci-dessus est, en réalité, une fonction $X(\omega, t)$ des <u>deux variables</u> $\omega \in \Omega$ et $t \in T$.

A $\omega \in \Omega$ fixé, $X(\omega, t)$ est une fonction déterminée de $t \in T$, soit $X_\omega(t)$ - fonction d'allure en général très irrégulière. On dit que cette fonction est une <u>réalisation</u> de la fonction aléatoire $X(t)$. Si $t \in T$ est interprété comme un temps, on dit aussi que $X_\omega(t)$, à ω fixé, est une <u>trajectoire</u> du processus stochastique $X(t)$.

Entre une fonction aléatoire $X(t)$ et une de ses réalisations $X_\omega(t)$, il y a le même rapport qu'entre une variable aléatoire ordinaire X et une valeur numérique particulière x obtenue à l'issue d'un tirage au sort effectué selon la loi de X - tirage au sort dont l'effet est justement de fixer $\omega \in \Omega$, donc aussi la valeur numérique de $X(\omega)$.

On peut donc envisager la fonction aléatoire $X_\omega(t)$ d'une deuxième manière : on se donne un espace de fonctions $X_\omega(t)$: $T \to \mathbb{R}$ indexées par $\omega \in \Omega$, et on tire au sort $\omega \in \Omega$ selon une loi de probabilité P, définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$. La fonction $X_\omega(t)$ obtenue à l'issue de ce tirage au sort est une <u>réalisation</u> de la fonction aléatoire X(t). Ce deuxième point de vue consiste donc simplement à tirer au sort une fonction appartenant à un ensemble (ou espace) de fonctions:

Définition 2 : Soit Ω un espace de fonctions, $\mathcal{A}$ une σ-algèbre sur Ω et P une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$. On dit alors que $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est une fonction aléatoire.

Cette seconde définition est plus satisfaisante que la première, du point de vue axiomatique. Elle est aussi beaucoup plus abstraite. D'autre part, la construction d'une probabilité (vérifiant l'axiome de σ-additivité) sur un espace fonctionnel pose, en général, des problèmes assez difficiles. C'est pourquoi nous adopterons plutôt, en général, le point de vue de la première définition.

LOI TEMPORELLE D'UN PROCESSUS.

Pour chaque valeur de $t \in T$, $X_t(\omega)$ est, par définition, une variable aléatoire, et possède, par conséquent, une fonction de répartition $F_t(x)$, qui,dépend en général de l'instant t considéré. Plus généralement, considérons n instants t_1, t_2,..tn. Les variables aléatoires X_{t_1}, $X_{t_2}\ldots X_{t_n}$ constituent une variable vectorielle à n composantes. Il leur correspond donc une fonction de répartition à n variables :

$$F_{t_1,t_2..t_n}(x_1,x_2,..x_n) = P(X_{t_1} < x_1,\ldots X_{t_n} < X_n)$$

qui dépend évidemment du choix des n instants t_1, t_2,..t_n.

On appelle loi temporelle du processus X(t) l'ensemble de toutes ces fonctions de répartition $F_{t_1,t_2,..t_n}$ pour tous les entiers $n > o$ et tous les choix possibles des instants $(t_1,..t_n)$. La loi temporelle ne suffit pas toujours, à elle seule, à définir complètement un processus stochastique. En effet, la σ-algèbre engendrée par les évènements de la forme :

$$\{ X_{t_1} < x_1, \ldots , X_{t_n} < x_n \}$$

ne contient pas, en général, des évènements très concrets tels que :

$$\{ \forall t \in [o, t_o], \ X(t) < a \}$$

qui dépendent d'une infinité non dénombrable d'instants t appartenant à l'intervalle $[o, t_o]$ - Cependant, dans beaucoup d'applications, la connaissance de la loi temporelle est suffisante. Nous nous limiterons dans ce cours aux propriétés qui se rattachent à la loi temporelle, et, d'une manière générale, nous adopterons un point de vue plutôt intuitif, sans insister sur ce genre de difficultés axiomatiques. On note que le point de vue de la loi temporelle est le plus simple possible. En effet, ce point de vue implique que l'on n'aura jamais affaire qu'à un nombre n <u>fini</u> (ou, à la limite, infini dénombrable) de variables aléatoires $X_{t_1}, \ldots X_{t_n}$ choisies dans la famille infinie $(X_t)_{t \in T}$

CHAPITRE I

LOIS INDEFINIMENT DIVISIBLES ET PROCESSUS A ACCROISSEMENTS INDEPENDANTS

Les lois indéfiniment divisibles se situent, en quelque sorte, à la charnière entre l'outil probabiliste classique, tel qu'il a été présenté dans la première partie de ce cours, et la théorie des processus stochastiques, qui constitue la partie la plus vivante, aujourd'hui encore en pleine évolution, et aussi la plus féconde en applications futures, du calcul des probabilités.

Jusque vers les années 30, les recherches en probabilités avaient comme objectif principal de déterminer sous quelles conditions (aussi générales que possible) des sommes de variables indépendantes ou faiblement corrélées convergent en loi vers une loi de Gauss ou une autre loi limite. Le théorème fondamental de P. LEVY, qui donne la forme générale de toutes les lois indéfiniment divisibles à variance finie, et que nous établirons ci-dessous a permis à Kolmogorov, parmi d'autres, d'énoncer sous forme à peu près définitive des conditions nécessaires et suffisantes de convergence vers une loi limite, gaussienne ou non. Malgré le très grand intérêt de ces résultats, nous n'insisterons pas sur cet aspect des lois indéfiniment divisibles. Le centre d'intérêt, en effet, aussi bien pour les recherches théoriques que pour les applications, s'est déplacé en direction des processus stochastiques et des fonctions aléatoires. Le même théorème de P. LEVY, qui marquait la fin d'une période de l'histoire des probabilités, ouvre la voie à la période suivante, en tant qu'il permet de caractériser complètement la classe très importante des processus à accroissements indépendants. Ce deuxième aspect des lois indéfiniment divisibles sera seul abordé ici, et constituera une transition naturelle entre les deux parties de ce cours (1).

I - LES LOIS INDEFINIMENT DIVISIBLES.

On sait que toutes les sommes de variables indépendantes ne convergent pas nécessairement en loi vers une variable normale. Par exemple, dans certaines conditions définies, la loi binomiale converge vers la loi de Poisson. Mais alors on peut se demander, inversement, si n'importe quelle loi peut jouer ce rôle de loi limite. En fait, il n'en est rien. Moyennant des hypothèses assez générales, on montre que toute loi limite, obtenue à partir d'une somme de variables indépendantes, est une sorte de mélange de lois de Poisson et de lois normales, cette sorte de mélange portant le nom de loi indéfiniment divisible.

---

(1) - La théorie des lois indéfiniment divisibles et de la convergence en loi des sommes de variables aléatoires est traitée dans Gnedenko " Théorie des Probabilités", Moscou 1961 - Traduction française chez Dunod, Paris , et dans W. Feller, "An introduction to Probability Theory and its applications", J. Wiley and Sons, New York, 1966.

De là provient l'importance des lois de Gauss et de Poisson, comme prototypes de la classe beaucoup plus vaste de ces lois limites. Par ailleurs, ces lois indéfiniment divisibles jouent, nous le verrons, un rôle fondamental dans la théorie des processus stochastiques à accroissements indépendants, dont les deux types fondamentaux seront l'un à loi gaussienne (processus de Wiener-Lévy), l'autre à loi de Poisson (processus poissoniens).

Définition : Loi indéfiniment divisible. Une fonction de répartition $F(x)$ est dite indéfiniment divisible si, quel que soit l'entier n positif, il existe une fonction de répartition $F_n(x)$ telle que la somme

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

de n variables indépendantes de même loi $F_n(x)$ obéisse à la loi $F(x)$.

D'après les propriétés élémentaires des fonctions caractéristiques, on voit qu'une loi $F(x)$ est indéfiniment divisible si, et seulement si, quel que soit n, sa fonction caractéristique $\Phi(u)$ peut se mettre sous la forme

$$\Phi(u) = \left[\Phi_n(u) \right]^n$$

$\Phi_n(u)$ étant une fonction caractéristique.

Exemples : la loi normale $\Phi(u) = e^{ium - \frac{\sigma^2}{2} u^2}$, la loi de Poisson $\Phi(u) = e^{\theta(e^{iu}-1)}$, la loi Gamma $\Phi(u) = \frac{1}{(1-i\frac{u}{b})^{\alpha}}$

sont des lois indéfiniment divisibles : de plus, on remarque que, dans chacun de ces trois exemples, $\left[\Phi(u)\right]^{1/n}$ est du même type que $\Phi(u)$ avec des paramètres différents.

En ce qui concerne la loi de Poisson, il sera utile d'en élargir un peu la définition. Etant données deux constantes a et b quelconques, une variable X susceptible de prendre les valeurs discrètes $a\,n + b$ (n entier positif) avec les probabilités :

$$P(X = a\,n + b) = \frac{\theta^n}{n!} e^{-\theta}$$

sera dite variable poissonienne (au sens large). Sa fonction caractéristique est :

$$\Phi(u) = e^{\theta(e^{iau}-1) + i\,b\,u}$$

Elle est manifestement du type indéfiniment divisible.

Lemme - La fonction caractéristique d'une loi indéfiniment divisible ne s'annule jamais.

Ce lemme légitime l'emploi systématique de la caractéristique seconde $\log \Phi(u)$ d'une loi indéfiniment divisible. En particulier, $\log \Phi(u)$ sera une fonction continue.

Pour démontrer le lemme, on remarque que $|\Phi(u)|^2$ est elle-même la fonction caractéristique d'une variable indéfiniment divisible (de la forme $X_1 - X_2$, X_1, X_2 indépendantes et de même loi Φ). On peut donc supposer que Φ est une fonction <u>réelle</u> $\geqslant$ o.

Pour tout n > o, $\Phi_n(u) = |\Phi(u)|^{1/n} \geqslant o$ est alors, elle aussi, une fonction caractéristique. Posons $\Psi(u) = \lim_{n \to \infty} \Phi_n(u)$. On a :

$$\Psi(u) = \begin{cases} o & \text{si } \Phi(u) = o \\ 1 & \text{si } \Phi(u) \neq o \end{cases}$$

De plus, $\Phi(o) = 1$, et $\Phi(u)$ étant continue, est strictement positive sur un voisinage de o, d'où $\Psi(u) = 1$ sur ce même voisinage. Le théorème limite montre donc que Ψ est la fonction caractéristique d'une variable Z. Comme $\Psi'(u)$ et $\Psi''(u)$ existent et sont égales à o en u = o, on a $E(Z) = E(Z^2) = o$, d'où $Z = o$ presque sûrement, et par suite $\Psi(u) = 1$ pour tout u. Mais celà signifie justement $\Phi(u) \neq o$.

<u>Propriété 1</u> - <u>Si X et Y sont deux variables indépendantes, à lois indéfiniment divisibles leur somme X + Y a une loi</u> indéfiniment divisible.

En effet, si Φ et Ψ sont les fonctions caractéristiques de X et Y, on a

$$\Phi = \left[\Phi_n\right]^n$$

$$\Psi = \left[\Psi_n\right]^n$$

Φ_n et Ψ_n étant, quel que soit n, des fonctions caractéristiques. On a donc aussi :

$$\Phi\ \Psi = \left[\Phi_n\ \Psi_n\right]^n$$

et, comme $\Phi_n\ \Psi_n$ est une fonction caractéristique, la propriété est établie.

<u>Propriété 2</u> - <u>Toute limite</u> (<u>au sens de la convergence en loi</u>) <u>de lois indéfiniment divisibles est indéfiniment divisible</u>.

En effet, soient $\Phi_k(u)$ les fonctions caractéristiques d'une suite de lois indéfiniment divisibles, avec, pour tout n :

$$\Phi_k = \left[\Phi_{k,n}\right]^n$$

Φ_{kn} étant une fonction caractéristique. Par hypothèse, les $\Phi_k(u)$ pour $k \to \infty$ convergent vers la fonction continue $\Phi(u)$. Alors, les $\Phi_{k,n}(u)$ convergent vers la fonction $\Phi_n = (\Phi)^{\frac{1}{n}}$, et Φ_n est continue, donc est une fonction caractéristique, d'après le théorème limite. Comme on a

$$\Phi = (\Phi_n)^n$$

Φ est bien la fonction caractéristique d'une loi indéfiniment divisible.

<u>Théorème Fondamental (P. Lévy)</u> - <u>Pour qu'une loi F(x) possédant une variance finie σ^2 et une espérance mathématique m soit indéfiniment divisible, il faut et il suffit que sa caractéristique seconde se mette sous la forme</u> :

$$(1) \qquad \log \Phi(u) = i\, m\, u + \sigma^2 \int \frac{e^{iux} - 1 - iux}{x^2}\, d\, G(x)$$

<u>où G(x) est une fonction de répartition</u>.

a/ <u>La condition est suffisante</u>.

En effet, l'intégrale de Stieltjes qui figure au deuxième membre de (1) est somme de trois termes :

$$(2) \qquad \begin{cases} \log \Phi_0 = -\sigma^2 \left[G(+o) - G(-o) \right] \dfrac{u^2}{2} \\ \log \Phi_1 = \sigma^2 \displaystyle\int_{+o}^{+\infty} \frac{e^{iux} - 1 - iux}{x^2}\, d\, G(x) \\ \log \Phi_2 = \sigma^2 \displaystyle\int_{-\infty}^{-o} \frac{e^{iux} - 1 - iux}{x^2}\, d\, G(x) \end{cases}$$

$\log \Phi_0$ est la caractéristique seconde d'une variable normale, donc d'une variable X_0 à loi indéfiniment divisible.

$\log \Phi_1$ est limite, pour $\varepsilon \to o$, de

$$\sigma^2 \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{e^{iux} - 1 - iux}{x^2}\, d\, G(x)$$

Cette dernière intégrale est elle-même limite de sommes du type

$$\sigma^2 \sum_k \frac{e^{iu\xi_k} - 1 - iu\,\xi_k}{\xi_k^2} \left[G(x_{k+1}) - G(x_k)\right]$$

($\varepsilon \leqslant x_k \leqslant \xi_k \leqslant x_{k+1} \leqslant \frac{1}{\varepsilon}$). Chacun des termes d'une telle somme est la caractéristique seconde d'une loi poissonienne (indéfiniment divisible). Cette somme, caractéristique seconde d'une somme de variables poissoniennes, représente elle-même une loi indéfiniment divisible d'après la propriété 1. Alors, la propriété 2 montre que l'intégrale étendue de ε à $\frac{1}{\varepsilon}$ représente aussi la caractéristique seconde d'une loi indéfiniment divisible. Toujours d'après la propriété 2, il en est de même de $\log \Phi_1$, comme on le voit en faisant tendre ε vers o.

Le même raisonnement s'applique à $\log \Phi_2$. Finalement, la somme $\log \Phi_o + \log \Phi_1 + \log \Phi_2$, caractéristique seconde de la somme de trois variables à lois indéfiniment divisibles, est bien la caractéristique seconde d'une loi indéfiniment divisible.

b/ <u>La condition est nécessaire.</u>

Soient F une loi indéfiniment divisible et Φ sa fonction caractéristique. On a, pour tout n,

$$\log \Phi = n \log \Phi_n$$

où Φ_n est une fonction caractéristique. Comme $\Phi(u) \neq 0$, on voit que $\Phi_n(u)$ tend vers 1, pour $n \to \infty$, en tout point u.

Alors, on peut écrire, pour n assez grand :

$$\log \Phi(u) = n \log \left[1-(1-\Phi_n)\right] = -n\left[1-\Phi_n(u)\right] - n\,\theta(1-\Phi_n)^2$$

$$(0 \leqslant |\theta| \leqslant 1)$$

et, à la limite

$$\log \Phi(u) = \lim_{n\to\infty} n\left[\Phi_n(u) - 1\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\int(e^{iux}-1)\,d\,F_n(x)$$

$F_n(x)$ étant la fonction de répartition associée à $\Phi_n(u)$. Par ailleurs, l'espérance mathématique m est égale à :

$$m = \int x\,d\,F(x) = n\int x\,d\,F_n(x)$$

Par suite

$$\log \Phi = ium + \lim_{n\to\infty} n\int(e^{iux}-1-iux)\,d\,F_n(x)$$

On fait ensuite le changement de variables :

$$G_n(x) = \frac{n}{\sigma^2+\frac{m^2}{n}}\int_{-\infty}^{x-0} y^2\,d\,F_n(y)$$

ce qui est légitime, puisque F_n admet un moment d'ordre 2.
$G_n(x)$ est une fonction non décroissante, continue à gauche, et on a $G_n(-\infty) = 0$ et $G_n(+\infty) = 1$: c'est une fonction de

répartition. Avec ce changement de variable, on obtient :

$$\log \Phi(u) = i\,u\,m + \lim_{n \to \infty} \left(\sigma^2 + \frac{m^2}{n}\right) \int \frac{e^{iux} - 1 - iux}{x^2}\, d\, G_n(x)$$

Afin de passer à la limite sous le signe d'intégration, montrons que les G_n convergent en loi vers une fonction de répartition $G(x)$. Pour celà, considérons la transformée de Fourier de G_n :

$$\int e^{iux}\, d\, G_n(x) = \frac{n}{\sigma^2 + \frac{m^2}{n}} \int x^2\, e^{iux}\, d\, F_n(x) = - \frac{n}{\sigma^2 + \frac{m^2}{n}}\, \Phi_n''(u)$$

cherchons la limite de $n\,\Phi_n''(u)$. De :

$$\log \Phi(u) = n \;\log \Phi_n(u)$$

on tire (puisque Φ et Φ_n ne s'annulent jamais)

$$\frac{n\,\Phi_n'}{\Phi_n} = \frac{d}{du} \log \Phi$$

En dérivant une deuxième fois :

$$\frac{n\,\Phi_n''}{(\Phi_n)^2} - n\,\frac{(\Phi_n')^2}{(\Phi_n)^2} = \frac{d^2}{du^2} \log \Phi$$

Comme $\dfrac{n\,\Phi_n'}{\Phi_n} = \dfrac{d}{du} \log \Phi$, le deuxième terme du premier membre tend vers o pour $n \to \infty$, et $(\Phi_n)^2 \to 1$, de sorte que l'on a :

$$\lim_{n \to \infty} n \, \Phi''_n(u) = \frac{d^2}{du^2} \log \Phi(u)$$

Cette limite existe, et c'est une fonction continue (puisque le moment d'ordre 2 existe). Alors, la transformée de Fourier des G_n admettant une limite continue, les G_n convergent en loi, vers une fonction de répartition $G(x)$.

Comme $\left| \frac{e^{iux} - 1 - iux}{x^2} \right| \leqslant \frac{u^2}{2}$, le théorème énoncé dans le cours de Probabilité (Ch. II, paragraphe 6), donne :

$$\lim_{n \to \infty} \int \frac{e^{iux} - 1 - iux}{x^2} \, d \, G_n(x) = \int \frac{e^{iux} - 1 - iux}{x^2} \, d \, G(x)$$

Il en résulte immédiatement :

$$\log \Phi(u) = i \, u \, m + \sigma^2 \int \frac{e^{iux} - 1 - iux}{x^2} \, d \, G(x)$$

<u>Remarque</u>

La signification profonde du théorème fondamental est mise en évidence par la décomposition (2). Toute variable X à loi indéfiniment divisible se met sous la forme d'une somme

$$X = X_0 + X_1 + X_2$$

de trois variables indépendantes, dont la première X_0 est gaussienne, la deuxième X_1 limite d'une somme de variables poissonniennes à valeurs positives, la troisième X_2 limite d'une somme de variables poissonniennes à valeurs négatives. Ainsi la loi normale et la loi de Poisson sont les deux prototypes à partir desquels sont constituées toutes les lois indéfiniment divisibles à variance finies.

Exemple 1 - Avec $G(x) = \theta(x)$

$$\theta = \begin{cases} o & \text{pour } x \leqslant o \\ 1 & \text{pour } x > o \end{cases}$$

la formule (1) représente la loi normale de moyenne m et de variance σ^2.

Exemple 2 - Avec $G(x) = \theta(x - a)$, il vient :

$$\log \Phi(u) = i\, m\, u + \frac{\sigma^2}{a^2}\,(e^{iua} - 1 - iua) = iu(m - \frac{\sigma^2}{a^2}) + \frac{\sigma^2}{a^2}\,(e^{iua} - 1)$$

On reconnaît la loi de Poisson définie par :

$$P(X = m - \frac{\sigma^2}{a} + ak) = \frac{1}{k!}\,(\frac{\sigma^2}{a^2})^k\, e^{-\frac{\sigma^2}{a^2}}$$

Généralisation - Le théorème précédent suppose l'existence des moments d'ordre 1 et 2. On démontre,,plus généralement, qu'une variable X est indéfiniment divisible si et seulement si sa fonction caractéristique $\Phi(u)$ est de la forme

$$\Phi(u) = e^{\,ibu + \Psi(u)}$$

avec :

$$\Psi(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iux} - 1 - iu \sin x}{x^2} \, M(dx)$$

où M(dx) est une mesure positive vérifiant la condition :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + x^2} \, M(dx) < \infty$$

(mais on peut très bien avoir $\int_{-\infty}^{+\infty} M(dx) = \infty$

Cas des variables positives - Dans le cas où X est une variable positive (P (X <o) = o), le théorème général prend la forme suivante :

Théorème - Une variable $X \geqslant o$ est indéfiniment divisible si et seulement si sa transformée de Laplace est de la forme $e^{-\Psi(\lambda)}$ avec :

$$\Psi(\lambda) = \int_{o}^{\infty} \frac{1 - e^{-\lambda x}}{x} \, H(dx)$$

pour une mesure H positive vérifiant la condition

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x} \, H(dx) < \infty$$

Remarques - 1/ Comme $e^{-a(\frac{1-e^{-\lambda x}}{x})}$ est la transformée de Laplace d'une loi poissonnienne, le théorème précédent exprime que toute variable positive indéfiniment divisible est limite de sommes de variables poissonniennes positives. (Il n'y a ni composantes gaussiennes, ni composantes poissonniennes négatives).

2/ Dans le cas général, $\int_0^\infty \frac{H(dx)}{x}$ n'est pas nécessairement fini. Si l'on a de plus :

$$\int_0^\infty \frac{1}{x} H(dx) = \theta < \infty$$

on pose $G(dx) = \frac{1}{\theta x} H(dx)$: G est une loi de probabilité. Si $\gamma(\lambda)$ est sa transformée, on a :

$$E(e^{-\lambda X}) = e^{-\theta[1-\gamma(\lambda)]}$$

et la loi de X se déduit donc de G par poissonisation

II - PROCESSUS A ACCROISSEMENTS INDEPENDANTS ET STATIONNAIRES.

On a vu, dans le Chapitre O, qu'un processus stochastique est une famille X(t) de variables aléatoires (non indépendantes) indexées par un ensemble T d'indices t. Dans ce qui suit, T sera l'intervalle $[o, \infty]$ de la droite réelle et t sera interprété comme un temps.

Définitions - Un processus X(t) est à accroissements indépendants si pour toute famille finie (t_i, t'_i), $i = 1,2 .. k$

d'intervalles disjoints (ou tels que deux d'entre eux possèdent au plus un point commun), les variables $X(t'_i) - X(t_i)$ sont mutuellement indépendantes. Il est à accroissements stationnaires si pour tout $t_o > 0$, $t_i > 0$, $i = 1,2.. k$ les variables :

$$X(t_1) - X(o) \ , \quad X(t_2) - X(o) \ , \ \ldots \ X(t_k) - X(o)$$

ont la même loi de probabilité que les variables :

$$X(t_o+t_1) - X(t_o) \ , \quad X(t_o+t_2) - X(t_o), \ \ldots \ X(t_o+t_k) - X(t_o)$$

On voit qu'un processus à accroissements indépendants et stationnaires est homogène et sans mémoire au sens suivant :

homogène : les $X(t+t_o) - X(t_o)$ sont régis par les mêmes lois de probabilité que les $X(t) - X(o)$

sans mémoire : les $X(t+t_o) - X(t_o)$ sont indépendants de tous les $X(\tau) - X(o)$ pour $\tau \leq t_o$

Comme exemple simple, citons le processus de Poisson (ici $X(t) = N(t)$ représente le nombre des manifestations d'un phénomène entre les instants o et t), ou le mouvement brownien (ici $X(t)$ est l'abscisse au temps t d'une particule en mouvement).

Comme un tel processus s'étudie toujours à partir de ses accroissements, nous poserons toujours (conventionnellement)

$$X(o) = 0$$

Le processus $X(t)$ est alors entièrement défini par la donnée pour tout $t > o$ de la fonction de répartition à une seule variable :

$$F_t(x) = P\left(X(t) < x\right)$$

En effet, soient $o < t_1 \dots < t_n$ des instants quelconques. On pose $Y_1 = X(t_1)$, $Y_k = X(t_k) - X(t_{k-1})$. Les Y_k sont des variables indépendantes, admettant les lois respectives $F_{t_k - t_{k-1}}$, (homogènéité et absence de mémoire). On connaît donc la loi (à n variables) de $(Y_1, Y_2, \dots Y_n)$, et, par changement de variables, on en déduit celle de $\left(X(t_1), \dots X(t_n)\right)$. Autrement dit, on peut reconstituer la loi temporelle du processus à partir de $F_t(x)$.

Théorème 1 - La loi $F_t(x)$ d'un processus $X(t)$ à accroissements indépendants et stationnaires est indéfiniment divisible pour tout $t > o$.

En effet, considérons les instants $o < \frac{t}{n} < \frac{2t}{n} < \dots < t$. On a :

$$X(t) = \sum_{k=1}^{n} \left[X(\tfrac{k}{n} t) - X(\tfrac{k-1}{n} t) \right]$$

et les variables $X(\frac{k}{n} t) - X(\frac{k-1}{n} t)$ sont, par définition, indépendantes et admettent la même loi $F_{\frac{t}{n}}(x)$.

Equation des demi-groupes. La loi $F_t(x)$, et sa fonction caractéristiques $\Phi_t(u)$ vérifient les relations :

$$\begin{cases} F_{t_1+t_2} = F_{t_1} * F_{t_2} \\ \Phi_{t_1+t_2} = \Phi_{t_1} \Phi_{t_2} \end{cases}$$

(relation des demi-groupes).

En effet, il suffit d'écrire

$$X(t_1+t_2) - X(o) = [X(t_1+t_2) - X(t_1)] + [X(t_1) - X(o)]$$

et d'utiliser l'indépendance et la stationnarité des accroissements.

Continuité en probabilité. On dira que le processus $X(t)$ est continu en probabilité si $P[|X(t) - X(t_o)| > \alpha] \to 0$ pour $t \to t_o$. On vérifie aussitôt que cette condition est vérifiée en tout $t_o > 0$ dès qu'elle est vérifiée en $t_o = 0$ pour t tendant vers 0 par valeurs positives. Mais la condition :

$$\lim_{t \to +0} P\left(|X(t)| > \alpha\right) = 0$$

est équivalente à la convergence en loi de $X(t)$ vers la variable presque sûrement égale à 0, c'est-à-dire (d'après le théorème limite), à la condition :

$$\lim_{t \to +0} \Phi_t(u) = 1$$

Lorsque cette condition est réalisée, l'équation des demi-groupes montre que $\Phi_t(u)$ est une fonction continue à droite de la variable t. Comme, de plus, $\Phi_t(u)$ ne s'annule jamais (lemme du paragraphe I), il suffit d'écrire :

$$\Phi_{t-\delta t} = \frac{\Phi_t}{\Phi_{\delta t}}$$

pour voir que Φ_t est également continue à gauche. En résumé :

Un processus X(t) à accroissements indépendants et stationnaires est continu en probabilité si et seulement si sa fonction caractéristique $\Phi_t(u)$ est une fonction continue de t.

Tous les processus que nous étudierons possèdent cette propriété.

Théorème 2 - La fonction caractéristique $\Phi_t(u)$ d'un processus X(t) continu en probabilité et à accroissements indépendants et stationnaires est de la forme

$$\log \Phi_t(u) = i\, u\, b\, t + t \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iux} - 1 - iu \sin x}{x^2} \, M(dx)$$

pour une mesure positive M vérifiant

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} \, M(dx) < \infty$$

<u>Si, de plus, $X(t)$ admet une variance finie, on a aussi la représentation</u> :

$$\log \Phi_t(u) = i\ u\ b\ t + \alpha t \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iux} - 1 - iux}{x^2}\ G(dx)$$

<u>pour une mesure positive G de somme unité</u> $\int_{-\infty}^{+\infty} G(dx) = 1$

En effet, Φ_t est une fonction continue de t, et on sait que la seule solution <u>continue</u> de l'équation fonctionnelle $f(t_1+t_2) = f(t_1)\ f(t_2)$ est de la forme $f(t) = e^{\beta t}$. La relation des demi-groupes entraine donc

$$\Phi_t(u) = [\Phi_1(u)]^t$$

et il suffit de remarquer que $\Phi_1(u)$ admet la représentation donnée dans le théorème 1 (s'il y a une variance), ou dans l'énoncé plus général qui le suit.

<u>Remarque</u> - L'équation $f(t_1+t_2) = f(t_1)\ f(t_2)$ admet des solutions non continues (obligatoirement non mesurables), différentes de la fonction exponentielle, de sorte que l'hypothèse de continuité en probabilité n'est pas superflue. Mais nous allons voir que ce n'est pas une hypothèse très forte. Limitons-nous, pour simplifier, au cas où $X(t)$ admet une moyenne $m(t)$ et une variance $\sigma^2(t)$, mais sans supposer que ce processus soit continu en probabilité. De :

$$X(t_1+t_2) = X(t_1+t_2) - X(t_1) + X(t_1) - X(o)$$

résulte aussitôt :

$$\begin{cases} m(t_1+t_2) = m(t_1) + m(t_2) \\ \sigma^2(t_1+t_2) = \sigma^2(t_1) + \sigma^2(t_2) \end{cases}$$

On sait que l'équation fonctionnelle $f(t_1+t_2) = f(t_1) + f(t_2)$ n'admet pas d'autres solutions bornées sur un intervalle fini que $f(t) = C\,t$ (C constante). La variance $\sigma^2(t)$ étant positive et croissante est donc nécessairement de la forme :

$$\sigma^2(t) = a t \qquad (a > o)$$

Par suite $X(t) - m(t)$ est continu en moyenne quadratique, et à fortiori continu en probabilité : $e^{-i\,u\,m(t)}\,\Phi_t(u)$ est donc une fonction continue de t, et on peut lui appliquer le théorème précédent. On obtient ainsi une représentation de la forme :

$$\Phi_t(u) = i\,u\,m(t) + a t \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iux} - 1 - iux}{x^2}\, G(dx)$$

Moyennant une hypothèse plausible sur $m(t)$ [$m(t)$ bornée sur un intervalle fini, ou même simplement $m(t)$ mesurable] on aura de plus $m(t) = b\,t$ avec une constante b.

Le théorème 2 et le théorème de P. Lévy montrent que tous les processus X(t) du type ci-dessus sont limite de sommes de processus à lois gaussiennes ou poissoniennes : ils découlent donc de deux processus typiques, l'un à loi gaussienne (le processus de Wiener-Lévy, ou mouvement brownien), l'autre à loi poissonienne (le processus de Poisson) que nous allons maintenant étudier.

III - LE MOUVEMENT BROWNIEN (OU PROCESSUS DE WIENER-LEVY).

Si la mesure G(dx) qui figure dans l'énoncé du théorème 2 est la mesure de Dirac, X(t) se réduit à sa seule composante gaussienne :

$$\log \Phi_t(u) = i\,u\,b\,t + \frac{1}{2}\,\alpha t\,u^2$$

Quitte à remplacer X(t) par X(t) - b t, nous prendrons b = 0, et :

$$\Phi_t(u) = e^{-\frac{1}{2}\alpha t\,u^2}$$

X(t) est donc une variable de Gauss : c'est le processus de Wiener-Lévy, ou mouvement brownien. La propriété essentielle de ce processus est la suivante : la fonction $t \to X(t)$ (c'est-à-dire la réalisation, ou trajectoire du processus) est presque sûrement une fonction continue. C'est même là une propriété caractéristique :

<u>Théorème</u> (de Wiener-Lévy) - <u>Le processus de Wiener-Lévy est le seul processus à accroissements indépendants et stationnaires dont la trajectoire soit presque sûrement continue</u>.

Nous ne démontrerons pas ce théorème, mais nous donnerons les quelques indications suivantes :

Considérons l'intervalle $(o,1)$, et les points $s_k = \frac{k}{n}$ $(k = o,1, \dots n)$. On a $P[X(s_k) - X(s_{k-1}) \geqslant x] = 1 - F_{\frac{1}{n}}(x)$, de sorte que $n\,[1 - F_{\frac{1}{n}}(x)]$ est l'espérance du nombre des intervalles (s_{k-1}, s_k) pour lesquels l'accroissement est $\geqslant x$ $(x > o)$. Si l'on se reporte à la démonstration du théorème de P. Lévy, on voit que :

$$n\,[1 - F_{\frac{1}{n}}(x)] = \left(\sigma^2 + \frac{m^2}{n}\right)\int_{x-o}^{\infty} \frac{G_n\,(dy)}{y^2}$$

$(\sigma^2 = a,\ m = b)$ a pour limite $a\int_{x-o}^{\infty} \frac{1}{y^2}\,G\,(dy)$, où G est la mesure canonique associée au processus (dans le cas où il n'y a pas de variance, on trouve un résultat analogue avec la mesure M). Mais on conçoit (intuitivement) que cette limite représente l'espérance du nombre des points où le processus effectue un saut d'amplitude positive $\geqslant x$.

Ainsi, il n'y a presque sûrement pas de sauts positifs si et seulement si $\int_{x}^{\infty} \frac{G(dy)}{y^2} = o$ pour tout $x > o$. De même, il n'y a presque sûrement pas de sauts $\geqslant 0$ si et seulement si $\int_{-\infty}^{x} \frac{G(dy)}{y^2} = o$ pour tout $x < o$. Autrement dit $X(t)$ a presque sûrement une trajectoire continue si et seulement si $G(dx)$ est la mesure de Dirac, autrement dit, comme nous l'avons vu, si et seulement si F_t est une loi de Gauss.

Cette continuité du mouvement brownien ne doit pas faire illusion. Si petit que soit t, on montre que $X(\tau)$ admet presque sûrement une infinité de maxima, de minima et de racines $X(\tau) = o$ sur l'intervalle (o, t). En particulier :

Le processus de Wiener-Lévy n'a pas de dérivée.

Montrons, en effet, que $Y_h = \frac{X(t+h) - X(t)}{h}$ n'a pas de limite pour $h \to o$ au sens de la plus faible des convergences possibles, qui est la convergence en loi : la fonction caractéristique de $X(t+h) - X(t)$ étant $\exp\left[- \frac{ah\, u^2}{2}\right]$, celle de y_h est $\exp\left(- \frac{au^2}{2h}\right)$, et :

$$\lim_{h \to o} e^{-\frac{au^2}{2h}} = \begin{cases} 1 & \text{si } u = o \\ o & \text{si } u \neq o \end{cases}$$

de sorte qu'il n'y a pas convergence en loi.

IV - LE PROCESSUS DE POISSON

Le processus de Poisson, contrairement au Wiener-Lévy, va présenter une trajectoire complètement discontinue (variant par sauts). Prenons comme mesure canonique G dans le théorème 2, la mesure de Dirac placée en $x = 1$: on obtient la loi poissonienne :

$$\log \Phi_t(u) = i\, u\, (b-a)\, t + a\, t\, (e^{iu} - 1)$$

quitte à remplacer $X(t)$ par $X(t) - (b-a)\, t$, on peut supposer $b = a$. On voit alors que $X(t)$ obéit à la <u>loi de Poisson</u> de paramètre a t:

$$\log \Phi_t(u) = a\, t\, (e^{iu} - 1)$$

$$p_n(t) = P\left(X(t) = n\right) = \frac{(at)^n}{n!} e^{-at}$$

En particulier, la probabilité pour qu'il ne se produise <u>aucun</u> saut dans l'intervalle (o,t) est

$$p_o(t) = e^{-at}$$

On retrouve la loi exponentielle, caractéristique des phénomènes exempts de vieillissement.

Ce processus ayant été étudié dans le cours de probabilité, nous nous contentons ici de rappeler ses principales propriétés.

1/ <u>Le processus de Poisson est le seul processus à accroissements indépendants et stationnaires variant par sauts d'amplitudes entières positives et vérifiant la propriété</u> :

$$P\left(X(\delta t) > 1\right) = o\,(\delta t)$$

($o(\delta t)$, infiniment petit d'ordre supérieur à 1 en δt)

2/ Loi des temps d'attente : Si l'on désigne par T_n l'instant (aléatoire) où le processus effectue son $n^{\text{ème}}$ saut, T_n est une variable gamma de densité :

$$f_n(t) = \frac{a^n\, t^{n-1}}{(n-1)!}\, e^{-at}$$

et les intervalles de temps $S_n = T_n - T_{n-1}$ séparant les sauts successifs sont des variables aléatoires indépendantes obéissant à la même loi exponentielle de densité $a\,e^{-at}$. Cette dernière propriété est caractéristique :

3/ Si S_1, S_2,... sont des variables indépendantes admettant la même loi exponentielle de densité $a\,e^{-at}$, les points $T_1 = S_1$, $T_2 = S_1 + S_2$,... dessinent sur la droite un processus de Poisson de paramètre a ($X(t)$ est ici le nombre de points T_n tels que $T_n \leq t$)

C'est d'ailleurs cette dernière propriété qui nous avait servi de définition dans le cours de probabilité. Les processus de renouvellement que nous allons étudier dans le prochain chapitre constituent une généralisation naturelle de cette propriété les points T_1, T_2,... sont définis comme ci-dessus, avec des variables S_1, S_2 indépendantes obéissant encore à une même loi F, mais cette loi F ne sera plus exponentielle. Comme la loi exponentielle est la seule loi sans mémoire, les processus de renouvellement seront homogènes, mais non totalement dépourvus de mémoire.

CHAPITRE II

LES PROCESSUS DE RENOUVELLEMENT

I - NOTATIONS

Dans ce qui suit, nous considèrerons presque exclusivement des variables $\geqslant 0$. Si X, par exemple, est une telle variable, sa fonction de répartition F vérifie $F(o) = 0$. Pour éviter des complications inutiles, nous supposerons même $X > 0$, soit $F(+0) = 0$.

Si X et Y sont deux variables indépendantes de lois F et G, nous désignerons par $F \circledast G$ la loi de la somme $X + Y$, c'est-à-dire la mesure obtenue en faisant le produit de convolution des deux mesures $F(dx)$ et $G(dx)$. Le signe $*$ désignera la convolution (ordinaire) de deux fonctions. Ainsi, si les lois F et G admettent des densités f et g, la loi $F \circledast G$ admet la densité $f * g$ et la fonction de répartition $f * G = F * g$. Explicitement :

$$(f * g)\ (x) = \int_0^x f(\xi)\ g(x-\xi)\ d\xi$$

$$(F \circledast G)(x) = \int_0^x (F \circledast G)(dy) = \int_0^x G(x-\xi)\ F(d\xi) = \int_0^x F(x-\xi)\ G(d\xi)$$

Nous introduirons aussi des mesures positives $U(dx)$

toujours concentrées sur $[0,\infty[$, mais non sommables

$$\left(\int_0^\infty U(dx) = \infty\right)$$

Nous leur associerons souvent leurs fonctions de répartition :

$$U(x) = \int_0^{x-} U(dy)$$

de sorte que si I est un intervalle $[a, b[$, on aura :

$$U\,(I) = U\,(b) - U\,(a)$$

Plutôt que la fonction de répartition $F(x)$, on introduira systématiquement $1 - F(x) = P(X \geqslant x)$. Comme nous ne nous intéressons qu'à ce qui se passe pour $x \geqslant o$, nous remplacerons le plus souvent la constante 1 par la fonction $\theta(x)$ ($=1$ pour $x > o$, o pour $x \leqslant o$) dont la <u>transformée de Laplace</u> est $\frac{1}{\lambda}$. Si $\Phi(\lambda)$ est la transformée de la <u>loi</u> (de la <u>mesure</u>) $F(dx)$:

$$\Phi(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} F(dx)$$

les <u>fonctions</u> $F(x)$ et $1 - F(x)$ admettront les transformées :

$$\frac{1}{\lambda}\,\Phi(\lambda) \qquad \text{et} \qquad \frac{1 - \Phi(\lambda)}{\lambda}$$

<u>Lois arithmétiques et non arithmétiques</u> :

Enfin, il sera important de distinguer deux types de lois, ou de variables, arithmétiques et non arithmétiques :

Une variable X, ou sa loi F est <u>arithmétique</u> (ou <u>latticielle</u>) si X ne prend (presque sûrement) que les valeurs n a (n entier) multiples d'un même nombre réel(positif) a - ou encore si la fonction de répartition F(x) reste constante sur tout intervalle disjoint de l'ensemble $\{n\ a\}$. Le plus grand nombre a vérifiant cette propriété s'appelle la <u>maille</u> de la loi ou de la variable arithmétique.

<u>Exemple</u> : La loi définie par $P(X=\frac{1}{\sqrt{2}}) = P(X=\sqrt{2}) = \frac{1}{2}$ est arithmétique avec la maille $\frac{1}{\sqrt{2}}$. La loi $P(X=\sqrt{2}) = P(X=2) = \frac{1}{2}$, au contraire, n'est pas arithmétique.

II - <u>DEFINITION DES PROCESSUS DE RENOUVELLEMENT</u>

Soit X une variable $\geqslant 0$, et F sa loi ($F(0) = 0$), et X_1, X_2, ... une suite de variables indépendantes admettant la même loi F. On pose :

$$\begin{aligned} T_1 &= X_1 \\ T_2 &= X_1 + X_2 \\ &- - - - - - - - \\ T_n &= X_1 + \dots + X_n \\ &- - - - - - - - - - - - \end{aligned}$$

et l'on dit alors que les T_1, T_2... constituent un processus de <u>renouvellement</u> (<u>pur</u>)- Si l'on interprète T_n comme l'instant de la $n^{\text{ième}}$ manifestation d'un certain phénomène, on voit que le processus de renouvellement est caractérisé par le fait que les intervalles de temps séparant deux manifestations successives sont des variables aléatoires indépendantes admettant la même loi F. Il est clair que T_1 obéit à la loi $F \circledast F$, et T_n à la loi :

$$F^{\circledast(n)} = \underbrace{F \circledast F \quad \ldots\ldots \circledast F}_{n \text{ facteurs}}$$

[Conventionnellement, $F^{\circledast(1)} = F$, et $F^{\circledast(o)}$ représente la loi de la variable presque sûrement nulle (mesure de Dirac)].

Plus généralement, on peut attribuer à la première manifestation (que nous appellerons T_o) une loi F_o différente de F : tout se passe comme si le processus précédent ne commençait qu'à partir de l'instant aléatoire T_o. On dit alors qu'il s'agit d'un processus de renouvellement différé. Ce processus est défini par:

$$\begin{array}{l} T_o \\ T_1 = T_o + X_1 \\ - - - - - - - \\ T_n = T_o + X_1 + \ldots + X_n \\ - - - - - - - - - - - - - \end{array}$$

Si F_o est la loi de T_o, celle de T_n est $F_o \circledast F^{\circledast n}$ -

Ergodicité et Stationnarité.

Les deux premières questions que l'on peut se poser au sujet d'un processus de ce genre concernent son comportement à l'infini, (ergodicité) et la possibilité de choisir une loi initiale F_o rendant le processus <u>stationnaire</u>. Précisons :

Soit B un évènement (appartenant à une certaine σ-algèbre $\mathscr{B}$ qu'il n'est pas utile de préciser ici), dont la définition fait intervenir des temps $t_i \geqslant o$ (en nombre fini ou non), et les éléments constitutifs du processus, c'est-à-dire les T_n. Soit $t_o > 0$ un temps donné, T'_1, T'_2, ... la suite des T_n <u>postérieurs</u> à t_o. Nous appellerons B_{t_o} (évènement <u>translaté</u> de B par la translation t_o) l'évènement défini de la même manière que B mais à partir des instants $t_i + t_o$ (au lieu de t_i) et des T'_1, T'_2,... (au lieu des T_1, T_2,...) -

Les probabilités $P(B)$ et $P(B_t)$ se calculent à partir de la loi F et de la loi initiale F_o (dans le cas du processus différé). Nous dirons que le processus est <u>stationnaire pour une loi initiale F_o</u> si, pour cette loi, on a $P(B) = P(B_t)$ pour tout $B \in \mathscr{B}$ et tout $t > o$ - autrement dit si la probabilité définie sur $\mathscr{B}$ est <u>invariante par translation</u>.

Nous dirons que le processus est <u>ergodique</u> si (quelle que soit cette fois la loi initiale F_o),

$$\lim_{t \to \infty} P(B_t) = P(B_\infty)$$

existe et constitue une probabilité sur $\mathscr{B}$. Alors que la <u>stationnarité</u> est liée au choix d'une loi F_o particulière, l'<u>ergodicité</u>

est une propriété indépendante de la loi F_o, et liée uniquement à la loi F - Néanmoins, ces deux propriétés sont liées étroitement, et nous verrons qu'elles sont équivalentes : elles sont réalisées si et seulement si la loi F admet une espérance finie.

Loi du temps d'attente résiduel.

Les définitions de l'ergodicité et de la stationnarité que nous venons de donner font intervenir une σ-algèbre $\mathcal{B}$ qui, au fond, ne joue aucun rôle. En effet, considérons l'évènement particulier $B = \{T_o < h\}$, dont la probabilité est :

$$P(B) = F_o(h)$$

Le translaté B_t est : {il y a un point T_n au moins dans l'intervalle $(t, t+h)$}. Posons :

$$P(B_t) = R_t(h)$$

$R_t(h)$ est donc la fonction de répartition de $Y_N - t$, Y_N désignant le premier Y_n postérieur à t : $Y_N - t$ est le temps d'attente résiduel en t de la première manifestation du phénomène postérieure à t.

Si l'on connaît $R_{t_o}(h)$, on peut transporter l'origine des temps en t_o, et le processus à droite de cette nouvelle origine t_o se définit à l'aide de la loi R_{t_o} exactement comme le processus rapporté à l'origine 0 se définissait à l'aide de la loi initiale F_o. En particulier, pour tout $B \in \mathcal{B}$, on calcule $P(B_{t_o})$ à partir de R_{t_o} de la même manière que $P(B)$ à partir de F_o.

Par suite, le processus sera stationnaire pour une loi initiale $F_o = R_o$ si, et seulement si, pour cette loi initiale, on a pour tout t :

(1) $$R_t(h) = R_o(h)$$

De même, le processus sera ergodique si, et seulement si, quelle que soit la loi initiale F_o, la limite :

(2) $$\lim_{t \to \infty} R_t(h) = R_\infty(h)$$

existe, est une fonction de répartition, et ne dépend pas de la loi initiale F_o. On voit que tout le problème va se ramener à l'étude de cette loi $R_t(h)$ du temps d'attente résiduel. Notons encore ceci : si le processus est à la fois ergodique (vérifie (2)) et stationnaire pour une loi initiale R_o (vérifie (1)), on a nécessairement : $R_o(h) = R_\infty(h)$.

Pour aller plus loin, nous aurons besoin d'un théorème très puissant, qui est le théorème de renouvellement.

III - LE THEOREME DE RENOUVELLEMENT.

Potentiel d'un Processus - Plaçons-nous, pour commencer, dans le cas du processus de renouvellement pur ($T_o = 0$), et convenons de considérer $T_o = 0$ comme la toute première manifestation du phénomène dont on étudie les retours successifs. Exactement comme dans le cas d'un processus de Poisson, on peut définir une variable $N(t)$ representant le nombre (aléatoire) des manifestations strictement antérieures à t. On a :

$$(3) \qquad E[N(t)] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P(T_n < t) = \sum_{n=o}^{\infty} F^{\circledast(n)}(t)$$

(avec, conventionnellement, $F^{\circledast(o)}(t) = 1$, la loi $F^{\circledast(o)}$ désignant, par définition, la mesure de Dirac) - Pour établir cette relation, il suffit de mettre $N(t)$ sous la forme $1 + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n$, Y_n désignant la variable égale à 1 pour $T_n < t$ et à 0 pour $T_n \geqslant t$.

Cette espérance est <u>finie</u> (si la loi F ne se réduit pas à la mesure de Dirac). En effet, soit $x_o > 0$ avec $1-F(x_o) = \varepsilon > 0$. Quitte à diminuer x_o, on peut même supposer $t/x_o = k$ entier. Or l'évènement $T_n < t$ implique que $k = \frac{t}{x_o}$ au plus parmi les n variables indépendantes $T_1-T_o, \ldots T_n-T_{n-1}$ sont supérieures à x_o. On a donc la majoration :

$$P(T_n < t) \leqslant \sum_{p=o}^{k} C_n^p \; \varepsilon^p (1-\varepsilon)^{n-p}$$

Comme k est fixe et $1-\varepsilon < 1$, on en déduit que la série $\sum P(T_n < t)$ est toujours convergente.

La fonction $U(t) = E[N(t)]$ est donc définie et non décroissante. Elle constitue la fonction de répartition d'une <u>mesure</u> $U(dt)$, (de somme $\int_0^\infty U(dt) = \infty$) que l'on appelle <u>potentiel</u> de la loi F, ou du processus. Pour tout intervalle $[a, b[$, l'espérance du nombre des points T_n tombant dans cet intervalle est :

$$E[N(b) - N(a)] = U(b) - U(a)$$

D'après (3), cette mesure-potentiel est définie par :

(4) $$U = \sum_{n=0}^{\infty} F^{\circledast(n)}$$

Si $\Phi(\lambda)$ est la <u>transformée de Laplace de la loi</u> F, la <u>mesure</u> U admet la transformée

$$\tilde{U}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} \, U(dx) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi^n(\lambda)$$

qui est finie pour $\lambda > 0$ (car alors $\Phi(\lambda) < 1$) et vérifie donc :

(5) $$\tilde{U}(\lambda) = \frac{1}{1-\Phi(\lambda)}$$

<u>L'équation de renouvellement</u> - Soit $h(t)$ une fonction (nulle pour $t < 0$) admettant une transformée de Laplace $\eta(\lambda)$ définie pour $\lambda > 0$. L'équation suivante, dite équation de renouvellement, va jouer un rôle capital dans la théorie (et dans les applications) :

(6) $$g = h + g \circledast F$$

ou explicitement :

$$g(t) = h(t) + \int_0^t g(t-\tau)\ F(d\tau)$$

Si cette équation admet comme solution une fonction $g(t)$,,nulle pour $t < o$ et possédant une transformée γ, on a :

$$\gamma = \eta + \gamma\Phi$$

d'où nécessairement :

$$\gamma = \frac{\eta}{1 - \Phi}$$

Comme η et $\frac{1}{1-\Phi}$ sont les transformées de h et $U(dx)$, γ est effectivement la transformée d'une fonction g (unique) défini par :

(6') $$g = h \circledast U$$

ou explicitement :

$$g(t) = \int_0^t h(t-\tau)\ U(d\tau)$$

Cette fonction g vérifie bien (6) puisque, par construction, on a : $\gamma = \eta + \gamma\Phi$. On a ainsi montré <u>l'existence et l'unicité de la solution (6') de l'équation de renouvellement (6)</u>.

L'importance de la mesure-potentiel U provient du théorème suivant :

<u>Théorème de renouvellement</u> - 1/ Soit $\mu = \int_0^\infty xF(dx)$ l'espérance (finie ou non) attachée à la loi F.

a/ Si la loi F <u>n'est pas arithmétique</u>, la fonction $U(x)$ vérifie pour tout $b > o$:

$$\lim_{x \to \infty} [U(x+b) - U(x)] = \frac{b}{\mu}$$

b/ Si la loi F <u>est arithmétique</u> de maille a, la mesure U est concentrée sur les points de la forme $k\,a$, et la masse $U(\{k\,a\})$ attribuée au point $k\,a$ vérifie :

$$\lim_{k \to \infty} U(\{k\,a\}) = \frac{a}{\mu} \qquad \text{(k entier)}$$

<u>Pour $\mu = \infty$, ces limites sont nulles</u>.

(On trouvera la démonstration de ce théorème, par exemple, dans le traité déjà cité de Feller). Ce théorème signifie que l'espérance du nombre des T_n tombant dans le segment $(x,x+b)$ lorsque ce segment s'éloigne indéfiniment, admet la limite $\frac{b}{\mu}$: autrement dit, le <u>nombre moyen des T_n rencontrés</u> par unité de <u>longueur est égal, à la limite, à l'inverse de la longueur moyenne</u> μ <u>d'un segment (T_n, T_{n+1})</u> - Dans le cas arithmétique, la signification est analogue, compte tenu du fait que les T_n sont obligatoirement de la forme $k\,a$: la probabilité pour qu'un T_n tombe en $k\,a$ est à la limite égale à $\frac{a}{\mu}$ -

Ce théorème capital admet un deuxième énoncé équivalent au précédent :

<u>Théorème de renouvellement</u> - 2/ Soit $h(t)$ une fonction nulle pour $t < o$, vérifiant $\int_o^\infty |h(t)| < \infty$ et certaines conditions supplémentaires de régularité à l'infini, et soit $g = h \circledast U$ l'unique solution (6') de l'équation de renouvellement (6), $g = h + g \circledast F$.

a/ Si F n'est pas arithmétique, la fonction $g(x)$ vérifie :

$$\lim_{x \to \infty} g(x) = \frac{1}{\mu} \int_o^\infty h(x)dx$$

b/ Si F est arithmétique de maille a, $g(x)$ vérifie :

$$\lim_{x \to \infty} g(x+na) = \frac{a}{\mu} \sum_k h(x+ka)$$

Ici encore ces limites sont nulles pour $\mu = \infty$.

Il est commode d'appliquer ce théorème aux <u>transformées de Laplace</u> η et Φ de h et F : si la transformée de g est :

$$\gamma = \frac{\eta}{1 - \Phi}$$

on a (<u>si F n'est pas arithmétique</u>) :

(7) $$\lim_{x \to \infty} g(x) = - \frac{\eta(o)}{\Phi'(o)} = \lim_{\lambda \to o} \lambda\, \gamma(\lambda)$$

<u>Remarque</u> : On peut retrouver ce résultat (7), et par suite le théorème de renouvellement lui-même, à partir du raisonnement (non rigoureux) suivant : Si une fonction $g(x)$ admet une limite A pour $x \to \infty$, et si de plus l'intégrale $\int_o^\infty [g(x)-A]\, dx$ est absolument convergente, $[\gamma(\lambda) - \frac{A}{\lambda}]$ admet une limite finie pour $\lambda \to o$,

et, par suite, $\lambda\gamma(\lambda) \to A$ pour $\lambda \to o$.

IV - ERGODICITE ET STATIONNARITE

Le théorème du renouvellement permet de répondre aux deux questions fondamentales posées en II. Nous traiterons explicitement le cas ou la loi F n'est pas arithmétique, et nous nous contenterons de citer les résultats du cas arithmétique, qui s'obtiennent de manière analogue.

Existence d'une limite ergodique.

Nous considérerons la loi $R_x(h)$ du temps d'attente résiduel du point x comme une fonction de x, que nous écrirons R_x ou même simplement R.

a/ Plaçons-nous d'abord dans le cas du processus de renouvellement pur ($T_o = 0$). L'évènement : "il y a un T_n entre x et $x+h$" se réalise de deux manières incompatibles :

- ou bien T_1 tombe entre x et $x+h$, avec la probabilité $F(x+h) - F(x)$,
- ou bien T_1 tombe en $y < x$, et la probabilité de l'évènement qui nous intéresse est alors $R_{x-y}(h)$, puisque le processus repart à 0 à partir de la nouvelle origine y.

On a donc :

$$R_x(h) = F(x+h) - F(x) + \int_o^x R_{x-y}(h)\ F(dy)$$

On reconnaît l'équation de renouvellement :

(8) $$R = V + R \circledast F$$

avec $V(x) = F(x+h) - F(x)$. Le théorème du renouvellement donne donc :

$$\lim_{x\to\infty} R_x(h) = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty [F(x+h) - F(x)]\, dx$$

$$= \frac{1}{\mu}\int_0^\infty [1 - F(x)]\, dx - \frac{1}{\mu}\int_0^\infty [1 - F(x+h)]\, dx$$

c'est-à-dire :

(9) $$R_\infty(h) = \lim_{x\to\infty} R_x(h) = \frac{1}{\mu}\int_0^h [1 - F(x)]\, dx$$

Comme $\int_0^\infty [1-F(x)]\, dx = \mu$, cette limite existe et constitue une fonction de répartition si, et seulement si, l'espérance de la loi F est <u>finie</u>.

On note de plus sur (9) que cette loi limite admet la <u>densité</u> :

$$\frac{1 - F(x)}{\mu}$$

b/ Considérons maintenant le processus de renouvellement <u>différé</u> avec une loi initiale F_0, et désignons par $\bar{R}_x(h)$ la loi du temps d'attente résiduel de ce processus différé (la notation $R_x(h)$ se rapportant toujours au processus pur). On obtient cette fois :

$$(10) \qquad \bar{R}_x(h) = F_o(x+h) - F_o(x) + \int_o^x R_{x-y}(h)\ F_o(dy)$$

(Si T_o tombe en $y < x$, le processus rapporté à cette nouvelle origine y est le processus de renouvellement pur du cas a/).

Or, $F_o(x+h) - F_o(x) \to 0$ pour $x \to \infty$, et la fonction $R \circledast F_o$ vérifie, d'après (8) :

$$R \circledast F_o = V \circledast F_o + (R \circledast F_o) \circledast F$$

On vérifie sans peine que $V \circledast F_o$ a même intégrale que V [si $\tilde{V}$ et Φ_o sont les transformées de V et de $F_o(dx)$, la transformée de $V \circledast F_o$ est $\tilde{V}(\lambda)\ \Phi_o(\lambda)$, et prend en $\lambda = o$ la valeur $\tilde{V}(o)$].

On a donc encore d'après le théorème de renouvellement :

$$\lim_{x \to \infty} \bar{R}_x(h) = \frac{1}{\mu} \int_o^h [1 - F(x)]\ dx$$

Ainsi :

Proposition : le processus est ergodique si, et seulement si l'espérance $\mu = \int_o^\infty x\ F(dx)$ est finie, et la loi limite du temps d'attente résiduel admet alors la densité $\dfrac{1 - F(x)}{\mu}$.

Cas arithmétique : Si F est arithmétique, de maille $a = 1$, et attribue le poids p_n à l'entier $n > o$, (et $p_o = 0$) on désignera par $r_k(n)$ la probabilité pour que le temps d'attente résiduel en k soit $n > o$. Dans le cas pur, on trouve :

$$r_k(n) = p_{k+n} + \sum_{m=1}^{k} p_m \, r_{k-m}(n)$$

et le théorème du renouvellement donne

$$\lim_{k \to \infty} r_k(n) = \frac{1}{\mu} \Sigma \, p_m = \frac{1}{\mu}$$

On montre ensuite que ce résultat subsiste dans le cas différé. Ce résultat nous sera très utile lors de l'étude du comportement ergodique des chaînes de Markov.

Existence du processus stationnaire.

Supposons qu'il existe une loi initiale $F_o(dx)$ rendant le processus stationnaire, c'est-à-dire; vérifiant :

$$\overline{R}_x(h) = F_o(h) \qquad , \forall x > o$$

Ceci implique, d'après ce qui précède :

$$F_o(h) = \lim_{x \to \infty} \overline{R}_x(h) = \lim_{x \to \infty} R_x(h) = \frac{1}{\mu} \int_o^h [1 - F(x)] \, dx$$

Par conséquent, on a nécessairement $\mu < \infty$, et F_o est la loi de densité $\dfrac{1 - F(x)}{\mu}$, ce qui montre l'unicité de cette loi initiale F_o rendant le processus stationnaire.

Inversement, si $\mu < \infty$, prenons la loi initiale :

$$F_o(h) = \frac{1}{\mu} \int_o^h [1 - F(x)]\, dx$$

La relation (10) donne alors :

$$(11) \qquad \bar{R}_x(h) = \frac{1}{\mu} \int_x^{x+h} [1 - F(y)]\, dy + \frac{1}{\mu} \int_o^x [1 - F(y)]\, R_{x-y}(h)\, dy$$

Soient alors $\rho(\lambda)$, $\Phi(\lambda)$ les transformées de R_x et $F(dx)$: le produit de convolution $[1 - F] * R$ a pour transformée :

$$\frac{1 - \Phi}{\lambda} \rho(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \tilde{V}(\lambda)$$

$\tilde{V}$ désignant la transformée de la fonction $V(x) = F(x+h) - F(x)$ qui vérifie l'équation (8). Cela signifie que l'on a :

$$\int_o^x [1 - F(y)]\, R_{x-y}(h)\, dy = \int_o^x [F(y+h) - F(y)]\, dy$$

Il en résulte que le second membre de (11) est dérivable en x, donc aussi le premier, et on trouve :

$$\frac{\partial}{\partial x} \bar{R}_x(h) = \frac{1}{\mu} [1 - F(x+h) - 1 + F(x)] + \frac{F(x+h) - F(x)}{\mu} = 0$$

$\bar{R}_x(h)$ est donc indépendant de x, et coïncide par suite avec la limite ergodique $\frac{1}{\mu} \int_o^h [1 - F(y)]\, dy = F_o(h)$, de sorte que le processus est bien stationnaire pour cette loi initiale.

Ainsi :

Proposition 2 : le processus est ergodique, et admet une loi initiale (nécessairement unique) qui le rend stationnaire si et seulement si l'espérance $\mu = \int_0^\infty x \; F(dx)$ est finie. Cette loi initiale pour laquelle le processus est stationnaire coïncide avec la limite de la loi du temps d'attente résiduel. Elle admet la densité $\frac{1 - F(x)}{\mu}$.

Remarque : On pouvait prévoir à priori la forme de cette loi initiale du processus stationnaire. En effet, si le processus est rendu stationnaire grâce au choix d'une telle loi, on peut rejeter à $-\infty$ l'origine des temps. Un point t_0 arbitraire doit alors appartenir à un segment (T_n, T_{n+1}) de longueur $\in (y, y+dy)$ avec une probabilité $\frac{y \; F(dy)}{\mu}$ (car on a davantage de chances de tomber dans un grand segment que dans un petit). Tout doit ensuite se passer comme si ce point t_0 était implanté au hasard, avec une densité de probabilité uniforme, sur ce segment de longueur y : à y fixé, la loi $R(h)$ du temps d'attente résiduel doit donc vérifier : $1 - R(h|y) = \frac{y - h}{y}$ $(h \leq y)$ à y fixé, d'où, en déconditionnalisant :

$$1 - R(h) = \int_h^\infty \frac{y-h}{y} \; \frac{y}{\mu} \; F(dy) = \frac{1}{\mu} \int_h^\infty (y-h) \; F(dy)$$

D'où, en dérivant en h :

$$\frac{d \; R(h)}{dh} = \frac{1 - F(h)}{\mu}$$

V - LE THEOREME DES ETATS RECURRENTS

Le théorème de renouvellement permet d'obtenir des résultats généraux concernant le comportement à l'infini de certains types de processus. Considérons, en effet, un système susceptible de se trouver à chaque instant $t > o$ dans l'un ou l'autre des <u>états</u> e_o, e_1, e_2, ... (en nombre fini, ou dénombrable). L'évolution aléatoire de ce système se traduit donc, sur l'axe des temps, par une succession de segments de longueurs aléatoires affectés, de manière également aléatoire, à ces différents états. En général, ni ces longueurs ni ces états ne sont indépendants les uns des autres.

Nous dirons qu'un état e_o est <u>recurrent</u> si le processus repart à 0, en oubliant son passé, chaque fois que le système entre dans l'état e_o : si T_1, T_2,... désignent les époques successives où le système entre dans e_o, ces époques constituent un processus de renouvellement, sur chacun des tronçons (T_i, T_{i+1}), l'évolution du système est indépendante des évènements antérieurs à T_i ou postérieurs à T_{i+1}, et cette évolution est régie par les mêmes lois de probabilité sur les différents tronçons. En ce qui concerne la première apparition de e_o, on suppose seulement $P(T_1 < \infty) = 1$, l'évolution du système entre 0 et T_1 pouvant être régie par d'autres lois que sur les (T_i, T_{i+1}).

Nous désignerons par $F(dx)$ la loi de la <u>durée</u> $X = T_{i+1} - T_i$ <u>d'un cycle</u> (intervalle de temps séparant deux entrées successives du système dans l'état e_o), et par $P_k(t)$ la probabilité pour que le système soit dans l'état e_k au temps t. On a alors le résultat suivant :

Théorème des états récurrents (cas non arithmétique).

Soit e_o un état récurrent, et F la loi (non arithmétique) de la durée d'un cycle $T_{i+1} - T_i$. Les limites $\lim_{x \to \infty} P_k(x) = p_k$ existent, vérifient $\Sigma\, p_k = 1$ et ne dépendent pas de la loi initiale adoptée sur le premier tronçon $(0, T_1)$ si, et seulement si, l'espérance $\mu = \int_0^\infty x\, F(dx)$ de la durée d'un cycle est finie.

a/ Supposons d'abord que 0 soit le début d'un état e_o, et que la loi d'évolution soit la même de 0 à T_1 que pour les autres cycles. Désignons par $Q_k(x)$ la probabilité de l'évènement : $\{T_1 \geqslant x$, et le système est dans l'état e_k au temps $x\}$. On a évidemment :

$$\sum_k Q_k(x) = P(T_1 \geqslant x) = 1 - F(x)$$

Or $\{ x \in e_k\}$ se réalise de deux manières différentes :

~ ou bien $x \in e_k$ et $T_1 \geqslant x$ [probabilité $Q_k(x)$]

~ ou bien T_1 prend une valeur $y < x$, et la probabilité conditionnelle de $\{x \in e_k\}$ est alors $P_k(y-x)$, puisque e_o est récurrent. Par suite :

$$P_k(x) = Q_k(x) + \int_0^x P_k(x-y)\, F(dy)$$

Le théorème du renouvellement donne alors :

(12) $$\lim_{x\to\infty} P_k(x) = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty Q_k(x)\,dx = p_k$$

De plus, $\sum_k Q_k(x) = 1 - F(x)$ entraîne :

$$\sum_k p_k = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty [1 - F(x)]\,dx = 1$$

(pourvu seulement que μ soit fini)

b/ Supposons maintenant que l'on ait une loi d'évolution différente sur le premier tronçon. Posons :

$F_0(y) = P(T_1 < y)$; $\bar{Q}_k(x) = P(T_1 \geqslant y$ et le système est en e_k au temps x) et soit $\bar{P}_k(x) = P$ (le système est en e_k au temps x), la notation $P_k(x)$ désignant la probabilité de ce même évènement dans le cas a/ ci-dessus (premier tronçon identique aux autres). On a cette fois :

$$\bar{P}_k(x) = \bar{Q}_k(x) + \int_0^x P_k(x-y)\,F_0(dy)$$

Mais $\bar{Q}_k(x) \leqslant 1 - F_0(x)$ tend vers 0, et $P_k \circledast F_0$ a même limite à l'infini que $P_k(x)$, d'où, à nouveau :

$$\bar{P}_k(x) \longrightarrow \frac{1}{\mu}\int_0^\infty Q_k(x)\,dx = p_k$$

<u>Remarque</u> : Ce théorème établit l'<u>existence</u> des limites p_k et donne un moyen de les calculer. <u>Dans le cas arithmétique</u>, soit a

la maille de la loi F et μ son espérance. **Lorsque 0 est le** début d'un cycle identique aux autres, le raisonnement fait en a/ donne cette fois :

$$\lim_{n\to\infty} P_k(x + n\, a) = \frac{a}{\mu} \sum_m Q_k(x + m\, a)$$

Si le premier cycle a une loi F_o différente de F, on pourra obtenir divers résultats selon que F_o a ou non la même maille que F.

Exemple : Cycle à deux états. Soit un processus ne prenant que deux états e_o et e_1. On a $Q_o(x) = P(X > x)$, X désignant la durée d'un état e_o. Donc $\int_o^\infty Q_o(x)\, dx = m_o$ (m_o et m_1, durées moyennes des séjours continus dans e_o et e_1). Comme de plus $\mu = m_o + m_1$, (12) donne :

(13) $$p_o = \frac{m_o}{m_o + m_1} \quad , \quad p_1 = \frac{m_1}{m_o + m_1}$$

CHAPITRE III

CHAINES DE MARKOV (HOMOGENES, A TEMPS DISCRET)

I - DEFINITIONS

Nous considérons un système susceptible de prendre l'un ou l'autre des états en e_1, e_2,... en nombre fini ou dénombrable, et nous observons l'évolution aléatoire de ce système aux instants discrets $t = 1, 2, 3....$ Nous dirons que ce processus est une <u>chaîne de Markov</u> homogène à temps discret s'il vérifie les deux conditions suivantes :

a/ <u>Homogénéité dans le temps</u>. <u>Les probabilités de transition sont stationnaires</u> : autrement dit, la probabilité conditionnelle d'avoir l'état e_j au temps $m + 1$ sachant que l'on avait e_i au temps m ne dépend pas de l'instant m considéré. Nous la désignerons par P_{ij}. On a, évidemment :

$$0 \leq P_{ij} \leq 1 \quad , \quad \sum_j P_{ij} = 1$$

b/ <u>Propriété de Markov</u>. Conditionnellement, lorsque l'on connaît l'état pris par le système au temps m, il y a indépendance entre tout évènement antérieur et tout évènement postérieur à m : lorsque le présent est connu, l'avenir ne dépend plus du passé.

Equation de Markov. Nous désignerons par $P_{ij}^{(n)}$ la probabilité d'avoir e_j au temps $m + n$ sachant que l'on avait e_i au temps m (probabilité de transition d'ordre n). Il résulte de la condition a/ que ces probabilités ne dépendent pas de l'instant particulier m où l'on se place. La condition b/ montre qu'elles vérifient la relation de Markov :

(1) $$P_{ij}^{(n+n')} = \sum_k P_{ik}^{(n)} P_{kj}^{(n')}$$

En effet, l'on doit passer par un état e_k au temps $m + n$, et la probabilité conditionnelle d'avoir ensuite e_j au temps $m + n + n'$ est alors $P_{kj}^{(n')}$ d'après la propriété de Markov.

Sous forme matricielle, on a $P^{(2)} = P^2$ et, par recurrence $P^{(n)} = P^n$: la matrice de transition d'ordre n est la puissance $n^{\text{ième}}$ de la matrice P. On notera que l'on a pour tout n :

$$0 \leqslant P_{ij}^{(n)} \leqslant 1 \quad , \quad \sum_j P_{ij}^{(n)} = 1$$

II - CLASSIFICATION DES ETATS

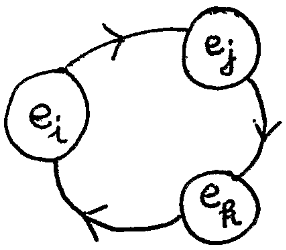
II - A - Etats essentiels et non essentiels

Etats essentiels et chaînes irréductibles. Nous dirons qu'il existe un chemin de l'état e_i à l'état e_j (ou que e_j

peut être atteint à partir de e_i) si une transition de e_i à e_j est possible avec une probabilité non nulle, c'est-à-dire s'il existe un entier $n > 0$ avec $P_{ij}^{(n)} > 0$

Un état e_i est <u>non essentiel</u> s'il existe un état e_j accessible à partir de e_i sans chemin de retour de e_j à e_i. Un état e_i est <u>essentiel</u> si pour tout e_j accessible à partir de e_i il existe un chemin de retour de e_j à e_i.

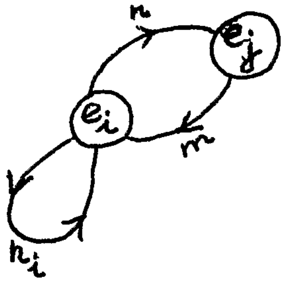
<u>A partir d'un état essentiel, on ne peut atteindre que des états essentiels</u>. En effet, soit e_i un état essentiel et e_j un état accessible à partir de e_i. Montrons que e_j est essentiel. Si e_k est atteint à partir de e_j, il existe un chemin joignant e_i à e_k (puisque l'on va de e_i à e_j puis de e_j à e_k avec des probabilités non nulles). Comme e_i est essentiel, il existe un chemin de retour de e_k à e_i, et par suite on peut aller de e_k à e_j (en passant par e_i) : e_j est donc essentiel.



Entre états essentiels, la relation "il existe un chemin de e_i à e_j" est réflexive (on peut aller de e_i à e_i, puisque l'on peut revenir à e_i à partir de tout état que l'on a atteint en partant de e_i) ; elle est symétrique (s'il y a un chemin de e_i à e_j, il y a un chemin de retour de e_j à e_i d'après la définition des états essentiels) ; elle est transitive enfin (si on peut aller de e_i à e_j, puis de e_j à e_k, on peut aussi aller de e_i à e_k avec une probabilité non nulle). Cette relation est donc une <u>équivalence</u>. La <u>classe</u> d'un état essentiel e_i selon cette équivalence est constituée de tous les états e_j(nécessairement essentiels) que l'on peut atteindre à partir de e_i. Si donc à un instant donné le système est dans un état essentiel e_i, il y a une probabilité unité pour qu'il ne prenne plus par la suite que des états appartenant à la classe de e_i.

Nous dirons qu'une chaîne est <u>irréductible</u> si elle ne comporte que des états essentiels constituant une classe unique, autrement dit si tout état peut être atteint à partir de tout autre état. Nous ne considérerons plus, dans ce qui suit, que des chaînes irréductibles.

<u>Périodicité d'une chaîne irréductible</u>. Soit e_i un état d'une chaîne irréductible, N_i l'ensemble des entiers n tels que $P_{ii}^{(n)} > 0$ (longueurs des boucles d'origine e_i) et soit d_i le P.G.C.D. de N_i. On dit que d_i est la période de l'état e_i (en effet, toute boucle allant de e_i à e_i a une longueur multiple de d_i). Soit de même e_j un autre état, et d_j sa période, qui est le P.G.C.D. de N_j.

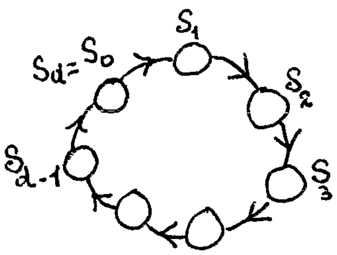


Montrons que l'on a $d_i = d_j$. Comme la chaîne est irréductible, il y a un chemin $e_i \to e_j$ de longueur n, et un chemin $e_j \to e_i$ de longueur m. n + m, longueur de la boucle

$e_i \to e_j \to e_i$, ou aussi bien de $e_j \to e_i \to e_j$, appartient à la fois à N_i et à N_j. Si n_i est un entier de N_i, il existe une boucle $e_i \to e_i$ de longueur n_i, donc aussi un chemin $e_j \to e_i \to$ (boucle $e_i \to e_i$) $\to e_j$ de longueur $n_i + n + m$. Donc $n_i + n + m \in N_j$. Comme d_j divise $n + m$ et $n_i + n + m$, il divise n_i. Divisant tout $n_i \in N_i$, d_j divise d_i, et par suite $d_j \leq d_i$. On montre de la même façon $d_i \leq d_j$, d'où l'égalité $d_i = d_j$:

<u>Dans une chaîne irréductible, tous les états ont la même période</u> <u>d</u>. On dit que d est la période de la chaîne. Si $d = 1$, on dit que la chaîne est <u>apériodique</u>.

<u>Remarque</u>: Si l'on a un chemin $e_i \to e_j$ de longueur n et un chemin $e_j \to e_i$ de longueur m, $n + m$ est un multiple de d : tout chemin joignant e_i à e_j a donc une longueur congrue à $-m$ module d, c'est-à-dire une longueur de la forme $kd - m$ (m fixe, k entier). Il en résulte que la



relation : "il existe un chemin de e_i à e_j dont la longueur est un multiple de d" (qui entraîne que <u>tout</u> chemin joignant e_i et e_j à une longueur multiple de d) est une relation d'<u>équivalence</u>. Cette équivalence admet des classes S_0, S_1,... S_{d-1} : partant d'un état de S_0 au temps 0, on passe forcément par un état de S_1 au temps 1, puis par un état de S_2 au temps 2,... par un état de S_{d-1} au temps d-1 et enfin par un état de $S_d = S_0$ au temps d. Après quoi, le cycle recommence. En particulier, si l'on se restreint aux seuls instants kd multiples entiers de la période d, on n'observera jamais que des états de la classe S_0 de l'état initial, et, avec k comme temps, tout se passera comme si l'on avait affaire à une chaîne apériodique (dont les états seraient ceux de S_0).

II - B - Etats transitoires, états persistants.

Partant de e_i au temps $t = 0$, le système retourne en e_i au temps n avec la probabilité $P_{ii}^{(n)}$. On dira que ce retour en e_i est un premier retour si les états que prend le système aux temps intermédiaires $t = 1, 2 \dots n - 1$ sont tous différents de e_i. On désignera per $R_i(n)$ la probabilité pour que ce premier retour ait lieu au temps n, et par :

$$R_i = \sum_{n=1}^{\infty} R_i(n)$$

la probabilité pour que le système repasse au moins une fois par l'état e_i. Si $R_i = 1$, on dit que l'état e_i est persistant (il y a une probabilité unité pour que le système repasse au moins une fois par e_i. Si de plus le temps de retour moyen :

$$\mu_i = \sum_{n=1}^{\infty} n \, R_i(n)$$

est fini, e_i est un état persistant positif. Si e_i est persistant, mais de temps de retour moyen μ_i infini, on dit que e_i est un état nul. Enfin, si $R_i < 1$ on dit que l'état e_i est transitoire : il y a une probabilité non nulle pour que le système ne repasse plus jamais par e_i.

Remarque 1 - Si e_i est persistant, le système repasse presque sûrement une infinité de fois par l'état e_i ; si e_i est transitoire, le système repasse presque sûrement un nombre fini (aléatoire) seulement de fois par l'état e_i, d'où la terminologie (persistant, transitoire).

En effet, $(R_i)^n(1-R_i)$ est la probabilité pour que le système repasse n fois exactement par l'état e_i. Si $R_i = 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} (R_i)^n(1-R_i) = 0$. Si au contraire $R_i < 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} (R_i)^n(1-R_i) = 1$.

Remarque 2 - Un état non essentiel est toujours transitoire. La réciproque est fausse en général (dans le cas d'une chaîne infinie, un état essentiel peut être transitoire), mais vraie cependant dans le cas des chaînes finies (voir ci-dessous).

Critère - Un état e_i est transitoire ou persistant selon que la série $\sum_n P_{ii}^{(n)}$ converge ou diverge. Il est persistant et nul si et seulement si $P_{ii}^{(n)} \to 0$ et $\sum_n P_{ii}^{(n)} = \infty$. De plus, si e_i est un état persistant positif, d_i sa période et μ_i son temps de retour moyen, on a

$$P_{ii}^{(kd_i)} \to \frac{d_i}{\mu_i} \quad \text{pour } k \to \infty$$

En effet, si $\sum_n P_{ii}^{(n)} < \infty$, le critère de Borel-Cantelli montre qu'il n'y a presque sûrement qu'un nombre fini de retour à l'état i, donc $R_i < 1$ et e_i est transitoire.

Inversement, si $R_i < 1$, l'espérance du nombre N de retours à e_i est :

$$E(N) = \sum_n n(R_i)^n(1-R_i) = \frac{1}{1-R_i} < \infty$$

Mais on a aussi $E(N) = \sum_n P_{ii}^{(n)}$, et cette série est donc convergente.

Supposons maintenant que e_i soit un état persistant (donc essentiel) et soit d_i sa période : d_i est également la maille de la loi <u>arithmétique</u> $R_i(n)$ qui régit le temps de retour de e_i Mais les retours successifs de e_i constituent un processus de renouvellement, dont le potentiel U est la mesure discrète (concentrée sur les multiples de la période d) attribuant à chaque entier n le poids $P_{ii}^{(n)}$. Le théorème de renouvellement donne donc ici :

$$(2) \qquad \lim_{k \to \infty} P_{ii}^{(kd)} = \frac{d_i}{\mu_i} \qquad (\text{et } P_{ii}^{(n)} = 0 \text{ pour } n \neq kd)$$

Ainsi cet état persistant est nul ($\mu = \infty$) si et seulement si $P_{ii}^{(n)}$ tend vers 0 pour n infini.

Relation entre les $R_i(n)$ et les $P_{ii}^{(n)}$. Un retour en e_i au temps n peut être un premier retour, ou avoir été précédé d'un premier retour au temps k ($o < k < n$). Compte tenu de la propriété de Markov, on en déduit :

$$P_{ii}^{(n)} = R_i(n) + \sum_{k=1}^{n-1} R_i(k)\, P_{ii}^{(n-k)} = \sum_{k=1}^{n} R_i(k)\, P_{ii}^{(n-k)}$$

(avec conventionnellement $P_{ii}^{(o)} = 1$, et $R_i(o) = 0$. Posons

$$\rho_i(s) = \sum_n R_i(n)\, s^n \quad ; \quad \varpi_i(s) = \sum P_{ii}^{(n)}\, s^n$$

Multiplions par s^n les deux membres de l'égalité précédente, et sommons de $n = 1$ à l'infini. A gauche, il vient $\varpi_i(s) - 1$. A droite, on trouve :

$$\sum_{n=1}^{\infty} s^n \sum_{k=1}^{n} P_{ii}^{(n-k)}\, R_i(k) = \sum_{k=1}^{\infty} R_i(k)\, s^k \sum_{n=k}^{\infty} P_{ii}^{(n-k)}\, s^{n-k}$$

On obtient ainsi :

$$\varpi_i(s) - 1 = \rho_i(s)\, \varpi_i(s)$$

ou encore :

(3) $$\varpi_i(s) = \frac{1}{1 - \rho_i(s)}$$

Conséquences - 1/ Dans une chaîne irréductible tous les états sont de même nature : Ils sont tous transitoires, ou tous persistants et nuls, ou tous persistants positifs.

En effet, soit e_i un état transitoire et e_j un autre état de la chaîne. Comme la chaîne est irréductible, on peut trouver des entiers m et m' avec $P_{ij}^{(m)}$ et $P_{ij}^{(m')} > 0$. L'inégalité:

$$P_{ij}^{(m)} \quad P_{jj}^{(n)} \quad P_{ji}^{(m')} \leqslant P_{ii}^{(m+m'+n)}$$

montre que la série $\sum P_{jj}^{(n)}$ est convergente dès que $\sum P_{ii}^{(n)} < \infty$. D'après le critère, e_j est donc transitoire.

Si maintenant e_i est persistant, il en est de même de e_j : car si e_j était transitoire, e_i serait transitoire d'après ce qui précède.

Supposons maintenant e_i persistant, et $P_{ij}^{(m)} > 0$, $P_{ji}^{(m')} > 0$. On a :

$$P_{ii}^{(m+m'+kd)} \geqslant P_{ij}^{(m)} \quad P_{jj}^{(kd)} \quad P_{ji}^{(m')}$$

(d, période de la chaîne). Faisons $k \to \infty$, et appliquons (2) : Il vient :

$$\frac{1}{\mu_i} \geqslant P_{ij}^{(m)} \quad P_{ji}^{(m')} \quad \frac{1}{\mu_j}$$

Si e_i est un état nul, on a $\frac{1}{\mu_i} = 0$, donc aussi $\frac{1}{\mu_j} = 0$, et e_j est un état nul.

Dans le cas d'une chaîne quelconque, le résultat s'applique évidemment aux états appartenant à une même classe d'états essentiels.

2/ Dans une chaîne irréductible finie, tous les états sont persistants et positifs.

Soit N le nombre des états de la chaîne. D'après 1, ces états sont demême nature. S'ils étaient tous transitoires, N étant fini il y aurait une probabilité non nulle pour que le système ne repasse plus jamais par aucun des états du système à partir d'un temps fini, ce qui est absurde. Si les états étaient tous persistants et nuls, on aurait $P_{ij}^{(n)} \to 0$ pour tout j. (En effet, il suffit de prendre m avec $P_{ji}^{(m)} > 0$, d'écrire l' inégalité : $P_{ij}^{(n)} \; P_{ji}^{(m)} \leqslant P_{ii}^{(n+m)}$ et de remarquer que $P_{ii}^{(n+m)} \to 0$). Mais on a toujours $\sum_{j=1}^{N} P_{ij}^{(n)} = 1$, et cette égalité passe à la limite, puisque N est fini, et celà contredit $P_{ij}^{(n)} \to 0 \; \forall j$.

III - PROPRIETES ERGODIQUES DES CHAINES IRREDUCTIBLES.

Le mot ergodique est utilisé dans des sens assez différents (bien qu'apparentés). Ainsi, en mécanique statistique, la "propriété ergodique" signifie, en général, que la moyenne temporelle $\frac{1}{T} \int_0^T X(t)\, dt$ converge vers l'espérance $E[X(t)]$. Nous réservons ici le mot ergodique pour décrire le comportement des $P_{ij}^{(n)}$ pour $n \to \infty$.

Les probabilités de transition d'une chaîne de Markov sont des probabilités conditionnelles. Pour décrire complètement, en termes probabilistes, l'évolution d'un système markovien, on doit donc se donner une <u>loi de probabilité initiale</u> (p_k), p_k désignant la probabilité pour que le système soit dans l'état e_k à l'instant initial $t = 0$. Il est clair que ces probabilités deviennent

$$p^{(n)}_{k} = \sum_{i} p_i \, P^{(n)}_{ik}$$

au temps n (sous forme matricielle, $p^{(n)} = p \, P^{(n)}$). On dit alors que les p_k constituent un <u>système de probabilités stationnaires</u> si $p_k^{(n)} = p_k$ quel que soit n. Il faut et il suffit pour celà que l'on ait $p = p \, P$, soit :

(4) $$p_k = \sum_{i} p_i \, P_{ik}$$

c'est-à-dire que p soit vecteur propre à gauche pour la valeur propre 1.

De même, nous dirons que le processus est <u>ergodique</u> si, quelle que soit la loi initiale p_k, les $p_k^{(n)}$ admettent des limites ϖ_k indépendantes de cette loi initiale et vérifiant $\sum \varpi_k = 1$. En termes physiques, l'influence des conditions initiales s'estompe avec le temps, et le système est, à la limite, soumis à une loi de probabilité qui ne dépend plus du temps ni des conditions initiales.

II*^@^@^@^O^@þ^@^D^@^A^@^@^@^@^@^@^@^@^A^D^@^A^@^@^@M−^Q ^@^@^A^A^D^@^A^@
^@^@M−^F

^@^@^B^A^C^@^A^@^@^@^A^@^@^@^C^A^C^@^A^@^@^@^D^@^@^@^F^A^C^@^A^@^@^@^@^@^@^@
^A^C^@^A^@^@^@^A^@^@^@^Q^A^D^@^A^@^@^@M−^E^A^@^@^U^A^C^@^A^@^@^@^A^@^@^@^V^A^C^@
^A^@^@^@M−^F

^@^@^W^A^D^@^A^@^@^@®M-^B^@^@^Z^A^E^@^A^@^@^@Â^@^@^@^[^A^E^@^A^@^@^@Ê^@^@^@(^A^C
^@^A^@^@^@^B^@^@^@1^A^B^@C^@^@^@Ò^@^@^@^@^@^@^@,^A^@^@^A^@^@^@,^A^@^@^A^@^@^@Sca
nFix(TM) Enhanced Pixel Translations Inc., PIXTIFF Version 1.125^@^@^@^@^@^@^@^@
^@
^@
^@ÿÿÿÿÿÿÿÿÿÿÿÿÿÿÿÿÿÿÿÿù]U^PM-^\^S
^KÖ«KªXIV^HM-^Nš$êºKÕ$µÒM-^B#®m’C£M-^K è‘M-^Aí^H=ÝVM-^IaCŽE^\ðæKFG*^PÜ!èH:»Ðz^Oœ
²M-$œwM-^P0Qþ^Uÿ^?ïý]M-^Qâ¿ê,¡¿{ÆÕµ«

%M−$EV^ZL5^Xm^B#ñ^DGV"M−^[ŽÔ®M−$Ã
$ºM−^Oÿÿÿÿÿÿÿÿÿÿÿÿÿÿÿÿÿò^B)BuÁ^QÕ<":§ªËe

®,}A^FW:HM−^V³!.[Â5¢ù\|ì4\M−^IM−^H²^TøAM−^Bá4^NM−^DC2^RM−^B

^P°M−^YM−^QaM−^RÀM−^EÑ&r^Q~i ÒÓÚ÷¬ZvšM−^NÃéW4^R²M−^Gÿiéë^H>¯ÅM−^D’M−^_M−^]§~ArãÁ
M−^]êM−^PoK^?ûÓB^_^]WzªýM−^FM−^T4õý; M−^Hé¯øâÓÿÜ^Q^]X6^X\úœÆÝµ^ÔM−^U^G;^WÈ3©×MË
M−^QÝ¢^RÊ|Ù©OM−^X#"^E7^Z#EÁ^QÑPFFM−^GM−^PT{ÎùM−^WÍM−^U6BM−^Y^XDj(^PM−^]^RÀô^T".J
^BM−^PÁ?^V^?%M−^BM−^B"M−^F

M−^IDú ¿M−^K+Yu¡džM−$O^H=^QG|‘¥

ïM−^YC#³Ù^GM−^Qò^Y^_ M−^CRR @ô−^GäH@M−^C^H2A^_^P)Á^SJÂ^FŠÐA§{l")C   M−^DÉ^A
^N^DCÍ‘M−^DM−^B^H[šLM−^QM−^Qòñá^Pâ÷^H83ã%^B^B^FM−^EM−^DB^F!Š^Phq
M−^YÜCøM−^FM−^C°M−^]-M−^]Ó^D M−^HéSëÏ^TâÐv«ØNÕÂ^N"Âjß§iÄ8M−^F^Pv^SVÇœí^G|_ºi%^W
^?ÏM−^Zr¬M−^Im^Qö.M−^MFM−^CßfrM−^^M−^IcÖjY!×HM−^V0Ã_   úlI^OM−^SM−^K)ÈM−^CŒìæf~
Î=7ÙcÙoD^PTÎwK^?B^PÄÐPñiè6È0óM−$èM−^KM−^MÝÄxA¶xÉÃL<¯úA°bMìš"ó(TEv
^GK^VM−^AºM−^FÚâÈý¢Ç*^N=£B^VBM−^O^SÌM−^KM−^AM−^FM−^GÂ²1ÏÌ^_t:^Etæ¡=àM−^[’‘þM−^S
M−^K^RM−^G^KŠÇúØA±iÚ^O^D^NÁ^QÓt^ONv"ºs•Íäq

o»â àíSjM-^Xçv&M-^[‘ÊM-^EàM-^HëZTM-^Q!ÂKU~×ÞM-^R÷Ÿéž":ëA*MÞM-^SíM-^S@.õa^HM-^K¯µ
¿ªë^KM-^E
7M-^WM-^TÞM-^[ûÒI^Eõé7jßþÚ^_Ý{×õ¯ÿ¥íöÁ^Q×úw¥ÿÿZþM-^B¥W×MAM-^XÒýz÷zM-^EÂ÷Šÿ~Õßý^O
Ã5M-^Ss^N
×
?{8ª÷

^P.ÒýkTM−^Q:^KŒEnÖõÖ¯ßÿëïé^?ô^ZqÅªWmúM^DÚêÄ^UÅŸM−^_þ"¡^Kê5×»AM−^DM−^Gÿí=giò?ÿÝm
^OM−^N•M−^F»úTôf^K×Û^Kë÷¯ºtº^^œüïEøM−^OïµþŠ^WµM{ÿÓ^DA^_ÑM−^_ãúÉ^NT^U^Gu@ÈM−^Gÿ÷õ
úø¯œ:þ¿©sÒ¬kM−^Núº"^?ÓÿŸ^HDG;NM−^DÑé%O¿uÿïö¿÷ù)Â^Qä ö²^]ÿÞ ŸÿýŸÈ^Q ßÛI$ŸM−$É÷üí:
ï;|â.M−^LFû_^?û^HCÓ^Óõ¯|ãM−^DµîÞ^S®ôáÝ^?ªI$¿}äÌÈñ^\1D^YxB"−µŸý^?íX8ktÖýS^?üééid7
ß§úœ-ŽM−^RI}^]Z^QéÚ-Á^Q×þ¿V«^?ÿî^HM−^Oëzú^?í®M−^_ý¯ÿdM−^Kì$º^OŽîM−^HM−^CÛ»@M−^Hé
×^M−^C"é"Ü;Ú

#^XZëÝ¡ZeïÓm^?ným_°M−^WévM−^_Á-M−^DM−^RûµMÛ^EŽ;IþØ":^T$0|¡õ^WôÎ^Eê^Zè}ûijM−^^é|3
*Øk÷öM−^W°Ó.-t^U−¥eh£µµµû\zbXèÌ^KËqÃ0žM0-M−^EáM−$h^[^[0» M−^YäpŠ !µøM−^LÏ
^H3q^UDp¬PE^OV^X\ÞØU^DËŠ"á¥EU^EJ7^VA^GQR^TpDu^R^XrÞc!~M−^Rz îM−^^)= Í¥M−^HQM−^\
^NGM−^XÕM−^HŠ$Ç! Hlâ
è!fßQ^W^R^[
!^K^DPáM−^QÔQàaM−^J^DA^\[qŽ?^EMÓ^QÄD4^_Ó±íwâD^V,tÈ;M−$.ºiý¢@gëVM−^P4"Ò¶M−^Wy1Ðwy
Ç)ÓAM−^DM−^Kt^Ztô^HM−^N© ì&¹o«8M−^^ðÂh>^]M−^PM−^A^BŠM−^]M−^PM−^VSÃ^Kv~^Dî^XM¬±Õµ
Ð2P©¡ûf^CGa}M−^C^H5!\M−^D}éM−^FPæ^CÈ¯M−^QG M−^BšM−^I
µB

^Pk

^PÓ   ¢M-^\d|DE&M-^DY4Ž! ø0M-^Y^SĐa3M-^N]
^F^Pæy.M-^Z¬IqŽ4%F
^C   M-^_Òèã¡^W~M-^PAM-^DÈM-^NoQ’XM-^K/^O^A^HM-^PxM-^HM-^FahM-^HM-^N"""#M-^I@
#@÷^OÄDYJ^?^ZM-^Klò^Q^QM-^JM-^HM-^HM-^J $M-^BC ^D^PŽM-^D"<JM-^U$^K×^?Vý M-^A$í5
Òup©M-^W@ÊM-^Jd~(wM-^D2lM&GkM-^Y^K^F^C>R%‘žM-^G20^KžDM-^G^K^Z^Qi^Vá^P"^^CQµOX">E
:H^_U^W|^Q^]o±\aM-^EwŠ^Q^]vÁl&^PĐÄ5!^GB>8M-^Fij^TDv±^^?¿Wýú¯ïýå®^Z#M-^Fr¹5Đ°OM-$
M-^_{\ËM-^TÞ5õ×þGKb<^Q^]C^\5-³SM-^F^T^?ÿÿù7^CtäÚM-^Já4øAÖô^W§oªèª®[M-^\gFNM-^S=
^PM-^L^Q^KQ^K¡ZM-^\¹^T^Fª^B^FM-^C^H^Y

^T^[^HlPM−^AÃM−^Qø0M−^C*gAÚ^OŽ
nÂa^FM−^C¢,6SÓâíÛM^Q]-^DâÅ²^_M−^S4^P£ŽHr¹M−^FhÎ8žAÓÓr?M−^TðM−^M^.8²^Ré7á=¶µïÓÂw¥
uÝ;ßNM−^SÿM−^B#¯M−^B#ŠµëÿM−^[Áo«{1M−^EzóøM¬G÷Ó¡õÄmzú^V5¥Š^U/¬/œ
M−^P³_g-^Pxÿ&ç^A«Rì!þø/ú^]   :÷VM−^Q2?¹Ó!OiÿðM−^Hëœm4^^××»VŸÖí¯^?ê^þÕ;kí¯§-ì5
ò^Ptµ^PDu^FaDgM−^Q^_
]^Xþë±Faö8•B"/^DÈó^ŪÚ°M−^HPÑðÏåÁÐÃ\4êêÈ.?ö^SV^H§^ZŽÐ2&&^SM^ZM−^UDC6È^DÂ

gØM-^RM-^HM-^HM-^HÿM-^VM-^Q# M-^U;-éM-^GIûtaÕíêÞM-^^•ÞM-^WÛþ®¥<]^Y¿¡a^FþÓôÅÙm
\^Y^K}{MéSM-^Su»_]FñOø":ÿ{úU¿ÿú^?WûþM-^WþZ^EŠÿ§Ý¥[M-^Gõ;M-^Cs¯'M-^Hpõ^H;BÖš Ÿéxn
Ó)Ìá-PmM-^HM-^Hú»   RV^Z×º¥'íÒéž~M-^Rû^M-^UŠ^U(":ÄtM-^_-(KøA^BTŽ^WóµŒÂª¥^PÈá
= M-^HèM-^Fâ^_ÔPr¬;ébËM-^[ôM-^A^Q×A÷§[~)÷ÚM-^Cþè{Ý_nM-^NM-^BM-^QÙ.g^OË}Qñ}FH
M-^EµM-^Vø^Yv^]*^WtM-^]ëM-^PîLr¡ëîM-^ItqM-^ZM-^M¿Išu^_ÕALM-^L³^Hœ"M-^N]6ëM-$ž£%0
0ÐûIµiêë•M-^T_ðUM-^_Û»I¥¯.FM-^IS÷-ÿ²æVçŸÿŸ®#¯õ^?u¯»ª¯ÿÛúÿ+M-^_?Ýþ×iü®k^WÐM-^RK
M-^DÂM-^QM-^Ké?îL^Y^Bq^[¡A^Gì%Þúi¬iøM-^B#¯Óý§ýÞ¹Øá~BM-^N}M-^\M-^DŽúhèM-^A3M-^UÚ
^FM-^Hg^PM-^\E jªàM-^Di¡^?M-^CBýÔ^VM-^YnM-^DDxd£\M-^O^A^K)4NM-^DY!M-^F^\!^Q#Y^H3
h®ŽPM-^PM-^HM-^]©M-^B!¢^HÙ¯Nÿ»ÒdQå"#M-^Xg^_ÅÅÄ^_^ô¿ûw-zô¿o¯¿××ÿ~¿ë_í^?Ÿ©M-^^_¢¹h
7:,®²ŸM-^X'M-^D^O×zýM-^PãM-^DœÝÄ}^?\M-^Xÿ×M-^G¯øÿV×Á¥^OÛ^[^UÚdWRÜgaŠ^]H,áM-^D[
M-^NéÝM-^F^T^U$Û^QM-$ý[oMðM-^BëD^\GOuBËM-^HÛê/ºÿA#]¿âM-^S}6ú_~M-^[^?^?WÿNú²èÚ[ñ
^PÛ^?^OýÿM-^S÷Ýè7ý§ëM-^Kë¿ý×õÿ×]-êŸŸÿ[JM-^RÚ¯uM-$•KÜ%K² "Ì:ž%ÓVÁ$£ÃM-^D«vMÂ¯M-^H
¯^OUzâÖw1cÞ¡ù^EF^Rø>ßŸÈ£¯M-^Fûd"6^SžM-^GÛ
öß¶^_Ø}ž^?
œÛ÷
-M-^CcwÛvÃÝíß^Ooé]*M-^DºE¹ZøOi]þÚ¯¥ø"M-^Gô£ÞM-^]ÒÿõõþM-^NÓM-^FUpM-^RaM-^]ßVÅë_ªs
±'ÇP²;3M-^U^Hì^H

~šEÿôÿI%?õÕtì^YM−^C^Kõï ¯KÚM−^Hõ¢’÷úH’M−^W^HM−^YØ^Z0M−^I^_éŠíPM−^QM−^N^OM−$£^WDf
GA^Oüh_é".ß¯ÂM-M−^Xr¶^EªìM−^DzM−^H¿IZ

’ôžM-^FQ5ô¬C_\z¥M-^]M-^XF’ôça^A^ZÕM-^WîÇÄ^Y^YM-^XM-^L+û^Q^Q³g¶/ŠŸÈßñýM-^C,sM-^NC
M-^NY^KÈ}©/ ºõðûö^]Ûá³²ÿ—^E^@M-^A>Z^KEO¿ïîÓ_;+ûl$^]ñN¹ÝoŸw0u^°Duÿ^^¡Ý.vM-^]ß{
M-^O»_kJ^XPM-^U^Oëõ×_œ/ÿ¯úGz^?OÒ
jŸ©ÿÖŒ*^ M-^Bñö»]®?^?ßtµ^?^F^T^?ÿÿÿÿÿÿü¶oM-^VÀÊ^]4êúºMÒoAºôM-^[ý_WÞM-^UÒKM-^Q
M-^Y9>M-^MB’û   Ý$+ìM-^F^GuÉpM-^GM-^_WÿWùÜ/ýWãÿÚÛªÊåhM-^OK4l¯Ý^K¯ÚôM-^I¹©M-^[^_ú
M-^Y
FEt•8M-^FÑÜeâ<[M-^A"6ÊÚ$Öw^BM-^UÃ¢Cêÿ2M-^XZ[M-^B^N^Y-4"^\M-^D^FÂ
^FM-^UM-^Qã– M-^\?ª*µ¢ÇI®,èjŸM-^_Q}²^Vß^?z×Ñ,M-^Díîý)’ùÙc»§þ^PNü ×³ûM-^UúôM-^Eï¢
M-^Fú¥³Ý6ºOm
^NÕtôöùÐ0^Kâõ   ôý^^ZkIö»œ^P@×Ž?zkÆ^W   vœý|S;^PM-^I&_>»ïYQM-^N=M-^Oí:^vM-^^*2
M-^QM-^]M-^LÈM-^@¥Td4xÍ¢VM-^I^GM-^^È¢"¢¡^FM-^_ÿ;^DóM-$_[s°WM-^RLM-^A^^ì1!úM-^U^D
CdH²U^WGÑ^H "^PA^H0M-^I^FÐM-^Hæ9^DÖk^XAM-^D-^RÒM-^H^Y^^2@7 ‘M-^GM-^D   M-^Z^D<Q
íÜÔ^UÉTc.M-^N
J^CM-^RR:^YJ"
ñ^VT^Q¬)NM-^HáM-^\ê5 ÌM-^RgM-^L¡^B^FM-^Y^\ShöfÉÁ^A^FkDqëM-^JM-^Pš^Q^B^P^N

Ó^DðM−^EM−^B"T^Z

^S^H‘M−^EM−^D^]M−^BM−^^^U4!M−^D^Za5PM−^XAÁ^DÁpþøM−^KM−^C@ÈPT

ðM−^D1M−^X @Â^GàM−^CA¡a^CÊpä©M−^B^FM−^Z^PÎM−^@Ý^K0^U0M−^XBýŽM−^P°M−^C°M−^Hš^ZŠ
M−^CA ÖIëŠM−^C Út^SjGM−^M^Xså^Qaá^YÃ[{ªœŠM−^CL&^PŽÂìM−^Pô^[i^Bx@Á^HM−^T9NÐk§Š
M−^Cö^ZŽM−^H®Û «^VM−^HòM−^Hí¢$4Ez52SaM−^UM−^V4GÌ^Y^\^RŒM−^MØe^N$-²°M−^Q@â4®B
M−^N^P7’àM−^HýM−^PM−^J−îÉ^OM−^SM−^[¶ªM−^Há¢v9_DvÙ8LM−^BzM−^Rç«!ÇI\M−^WY^XäÇ
±’^PÊú%Í>M−^[ŠMÈÝP86M−^\M−^JöqÝ7O^D^^^H=œ^G^W"^CM−^X8M»ž@M−^CbÓM−^KD^PPÉM−^Ql e×
^D

pÈ ÉPv

&!(y?l«^RpÑ< M−^[H8è&Ç!

R~KØ5}^C²¹   8K^]+M−^Q\ãœ|‘M−^E^V8VÆM−^K^\^SM−^K"cA:VM−^VM−^PtM−^]~M−^Uzú^O_
ŽLpM−^^^]ÁÜ2M−^G^O}à«IÆºdÇÁ^QÐnM−^^Ò¿Šú^NÕ{M−^OJþM−^K^\!nEM−^EÂñnDÎ=>ÝtÝ>ÿÂZ~
M−^SIž":÷íÚ÷M−^IÁý7ß•]4^Z¶ÿM−^E•I?ðM−^_¿M−^Eè^Q^]^<aÚÕéÕë§]~÷tø]7×÷÷ÓÂ¬Âxn¿¯K‘
M−^Héw^UtM−^_UKŠÿ÷®ºïÞM−^C^H{zotŽ¯]‘Ý•^N¿©é^ÿÿ«#åäþ!Ô7÷{AiîŸM−^[ÿÿÿë^G^E÷×HM−^N®
^Pös]ißM−^Q^\žÁ^Q÷M−^K‘ê

M−^O

#á:j#÷³^AëÝb#ŠM−^XM−^E−ó^?-D^VÌf^WOÿ»Uþl^Stÿ^Tú^^ª!M−^EM−^WeHM−^LG_×^Q¡MTBbD §O
M−^Oü{öM−^RÐÝ6ÚÝè^V"/^__õiŸ<^[0^Sòt'?ûQã¯ÿô8vÁ^BCÚªÿóû}l=žýä¬^XëV¿Z^T¯ÐëÁ
ºñþ«ô¹!Ï^E:©^Ka^C

×M−^QÄBBC^AM−^B^[õK§ìM−^Cºåqß{Óu^HM−^D^\ïM−^PaÂáªþïÔM−^F −^?D^]ÞýWÈàŒTþý^HM−^CW&
VÍ18HM−^KOÌ9NQzòDÿ}L^G M−^HoÿÒ
¹72Œ4^HM−^N¿ûo>åìÄ"^Hûù^[M−^UÚ?%ònT^]ÕçÛ^HGUÿ^[ÊMŽÁà•ã^_á^?¶•{î¿åM−^QM−^D8BM−^Ro
ïI^?ÐOú^Hk•ÛÄEïúµNM−^]É^NÉ^Rußk»õi÷Çd:M−^SýûjM−^WèÐÿI6éüM−^I×#;þ^W^?çTékM−^]^]ï
^?d5Ü4îí|Âüé^?M−^Pîýôýö¿^U«gUØj×ß:MÞÙ^O@ê   }júû   Ù^O¿m^?§ì’M−^YM−$M−^_ŸÕ$
M−^SŸÂ×ØV«éµ[í¯ÿa>M−^GØ}_þ^S   ºKþŠ?¿Û ÿ^OÝµöîï~Ö÷[ÕŽŸßŸÒÙ^W^S°×kï¢^TU¯•Z~^U/oµ
z1{Ú_þ jE^_íM−$ýŠœM−^B(tÜv•ZØO8ÈÿÃ^Kw¶œÞö^WM−^O^F^WéÓM−^FŒ^YÍµu:#^Zm®M−^ZV^R^Ó_
ðPM−^[~BJÚ¶M−^TAM−^QÓu

žM−^FkžM−^CíM−^FM−^FÁM−$ÅHxÈwV^PšM−^L¹^^[^T^HZ^N(ø +^]1^DGFruBM−^H¶M−^Y³6^X?öoVÒ
’ö$M−^CiZ!è"^N^ZE^@ç&ÖÈúäM−$X=^OÓm>Õ0B^YíM−^Q^GMM−^B¡^N6(&M−$t-M−^Q0ÀD−^E1µ^U^TÄ
^Q^_M−^K^Hg^SªmCDÇ#

’°M−^DM−^G©i^HâÃ±^[^Fš;7Èh9^H=M−^IM−^Gr
è^XJ8 ÄW^PÌ(Ðh^X@â6(ð^Q^\TUŽ^XQ^VM−^HWqaŠ^S
^T•AM−^PH^UÅM−^F^Tm+^V^Z ik5¥êAá1 ^H»

Pii1R^H;
5ÅŽ^Hxd^R:šiŠ¶¬(d+©^GyÐl ÂfM−^DĐj^S M−^QÚØ&[M−^^Í^Dê^DÂ

ðM−^ZpÁ<Ö
,*frïM−^F^SAM−^E¢Ü£¶M−^Z‘M−^AM−^\M−^K
M−^O&M−^C^DóåM−^PHì&^S -M−^PM−^CM−^YÐh0M−^Ij.M−^OÁ Â^GÚjMÍÈM−^LAM−^B^XB""2M−^G(
M−^D""!M−^DSâÐâÉÜC9ž M−^FbÀM−^H¬¢ ÓÐM−^CM−^FXè^XB−^HM−^H0CM−^K*pÂiM−^Q^FM−^A^CBÐ
3¥^D"!M−^\°ãª

ûÂKM−^X^HDhDb!q#^YílDD\e’)šd•B>ÐM−^HÒ¯k-¯ V^ZKœÈùÁ^R±LE%Š»@ÕC   M−^Q^W^SPhaD^?ÿÿ
ÿÿÿüŠB²¿¹lM−^T$É+%Æv"NMÌM−^QM−^PM−^R4È^^v!M−^]ÖM−^NÕÅg;^Q^]M−^Täq^NÊA^BzpkÓ$§^XL
M−^RM−^_"n•z^WiëýV
4ûôþû~íÛÿû²1áM−^\r£ôL^?ó°Šÿ+®žžM−^Kµ¿°œ}Xëïøa’M−^M_
?ï]M−^N>IÇ‘M−^GÚÄ}×œ2J²#ÍaÎÓá^PžS*²n^F±t-t×$ÑKM−^J¡^UC*Æ@³ ("M−^@M−^Db/á3 M−$
M−^X7LM−^CM−^MFP0D"qrÜÔfM−^DNM−^L"6)Ù^B)³;9M−^U^K#"ã%óÙ,^D#M−^JkM−^\M−^L^TM−^P.h
¬Ÿ^;^\ò8M−^GVT

Üä!M−^PM−^BM−^[šÖ^HDãM−^BM−^D^X dvM−^HX>M−^LM−^P(îÂ^Pè ìûŒ^Ph^ZpÖM−^CAM−^D,ðÁ2.
FÙÃ4^EÎM−^@ ØM−^GM−^Y 9^F^T^Q^QV^PÊ^X Ôè^^2^XM−^D^TtM−^C³M−^Qš6^Q‘nH^PM−^S8M−^L
Â^OÂ

^PüM−^W^Z
KM−^B^]B^D0M−^EM−^EPM−^_¡ xAM−$è2ýá5ýŠM−^CM−^FM−^Ziè0@í0M−^_¡^PiŠ^Pa<’¢)^TM−^B

Ðh5 ¡ÐA-Ú^WØOM−^Rz^GŠÎç^\M−^_\"PÑM−^G<^FØA²ND

ÙBý^Q»áÃžM^Q]Ä\M−^OM−^]D^^M−^IC^H?M−^PÐ8nÈ"r#M−^G^Z"»gxNM−^Y
ç©§lM−^SM−^Vá",^FM−^I_DAÜM−^N−21òcÏM−^D8ÂhM−^WPNM−^Hñ•b.^Zgì^Q^]:a²M−^@åÌeM−^SÉ
^OvSÒ^FåáOM−^CM−^CM−^T^D0i6^Y

ãžN^YCM−^UeèLr^UòWA^C
^QãÁM−^UM−^Pdn¹^[ÊM−^G^D^[EÛ@M−^[^WF^\§e<V!D±»M−^M
’á M−^AîiM−^FM−^B^GÈ4è òCM−^EÉcM−^D^O@è&ÁM−^IyÄ{^NM−^SŽÛÚ^H9!M−^NM−^A^QÓŠ ßðÜ Øi
Õ±^Z^V¬tŽZ^^.ÓAÙùéZAš ñI^C^?AÊ^YCÒnM−^[Ó
ÓiM−^NM−^PeŸM−^RÒ
«áëiûWŠé×IþÛ^?õ M−^^J^WzÂÿ•ôM−^^Çè#M−^OVÓŽÿI¿Ò^?ªéý&M−^F7@M−^Hé¿Û«¯ª÷M−^S^\/÷O
M−^EÙ^_^?Á^Q×¶M−^S»_^M−^U¯ÿŸ£×Mµý?Ý7Ÿ®ß^M−^]−»•êôM−^_ïO^?ï_qŸ»zúõoÓÕŠýªþ^S{Ijë÷ÿ
¶÷Ÿî¿]r%^T^[ïOõç−^EœoèlM−^G^\¡ÊeHýyŒÀM−^Oâ^UiªŠµÿ^?ÞM−^[ÞM−^WÒ^?ë±®àÚ¿ÖôØbÃ^ZëÿB
−ÿ®M−^]Š#ÿÄt¹@;á§ÚSh^Uÿþ

M−^N^Oÿ[û×¢^XM−^G êy^GM−^LM−^F^U.û\M−^G^^È0VC^Gßýµ×õß°ÿJ¿M−^_^F:^_^XM−^Oÿø÷ýþ®þ0
Áñ°uVM−^VñMM−^P M−^[ÒUû_M−^Y-}R^D]¿ÓÖøD^\^?¯KÿN~I^?-oþM−^Lü×M−^QÅðoïüM−^HFÆJ^S^O
û³÷§/ÒêM−^CïÖFç^\¡ÎéJ^Hê.ÿd+M−^\pœa7Gïä^^^A^?÷|M−^C^E?•ó5M−^^¿îä_Byò~M−^I3û^H^Q
^]|M−^EàM−^I^PM−^FÓ$^V•÷ý
í ÿXM−^HÝM−^Eêü²_¢3ûßM−^W³_þ¶ËUÿú^N¯ÿåM−^X6M−^^M−^DM−^]¶¶M−^EüŽM−^MÓ
Ýý¯öÿÿ«M−^I¢Þê¿ÿ^EÿûÿÿûÞ^?ë}¯ê÷wïxK^÷úúý^?¯^?œ6õéþtŸõ¿Œë•ÿÿgEiôœÿ¥¯wýÚú%^G^\$»
M−^Gß^?þûdM−^I/û]l−÷×¶ÓŸM−^WÿµÎM−^_ÿþM−^[¥®»îöëÖtïÜè¶ŸM−^D_l¡ýŸM−^Uoö¶•§Û§tÚÃÖú-
M−^QÒÿM−$c×§M°M−^_ÿêÚýÕúëi^?°Óa×M−^DÛÚêßOáíÿ^F¶ÚÚýæM−^Moøa‘éö•Lik¶M−^]ëö^RëÿÛí[V
×vûVÒÖ×ÓA^QÕ0k

/¶m^XuOPiZNc^KñM−^QC^H2çvÈM−^QºmN^BärŽM−^[^EM−^JM−^OØ.ö^U¯°BîŸ
&GM−^U³ÊÿÕM−^Q#}¥_LWÚº¶°Ðìâ#ÖM−^R^F©M−^Zò<M−^H>^HM−^QfS°M−^]®\H0XM−^H":@Á^TäMTGh
M−^B^\Qð M−^N<Å^U^VÅÆ^
WbAM−^G‘M−^Jv]E^BÝÚ±ÙM−^DkÂeÉM−^Jl$KE)Áº
^GM−^YM−^M^PzM−^ZLT0M−^YM−^DÈM−^CÌÄ•^KM¥§^TÈ£šÈš^W‘Ö(M−^JM−^F

^R^Ql0M−^DM−^I^D^_^H®M−^XšŠ0A¡mlLíM−$^Z^QµŽÈw^[RÝy
â^Z^Ql$^ZhDM−^LuM−^\^B^B^Qaš¢R^Eâ!§^W^[±,qlB@Ì LM−^NM−^Xªcbg"hM−^Xá$^XªM−^K©^WþÄ
*M−^Wh4»M−$^Zh^X^^XLM−^E{"F¬4Ð0M−^ZM−^FM−^Cj^ZCD$^BiM−^Eì&M−^VAžè t^X&^SN^XW^Qm
^F^S
M−^] Âg°¶M−^YM−^\^SÈ8é^SÔ= ÔØM−^Za^F^VÐ3M−^U^PcD%>É^O a^ZM−^S.¥aM−^D^Z^Fc^A5

&FäÇ¹ ÞM−^XM^F^UPM−^C   ŠXåVEàžBF
M−^DÌM−^\ã¢]»^H^Za5M−^HhAM−^_c^B^Sù[^QM−^V
l«0ØB#12¡27^HDDD^XB"!M−^EM−^C^H4"^XQ^Q‘M−^Yösº

£^A^K>^T^Pœ-^^^N•3ÄDDYì!^P‘M−^C^HHR^PÁ^HM−^M6""""#M−^HM−^LDDDDDDDDDDRI−yuµ,M−^VÐœ
M−^B^DGDÜjB^YYÊG‘Èè&R#

ÉMM−^\^Na^Q$HFM−^FB

M−^NFŠ\M−^MhöGG^QM−^@Ì89^BM−^AÈ59 ¡Ùüà<M−^[*£,FDÙM−^L¯ª+M−^ZçaH»$¹|Œ^.FÅ1^QÙ!^R3
^HÆG6!M−^DM−^Há®F"ñ©^WFÁs<Àg’^H‘!£#²8!^\5M−^NM−^YM−^@V#M−^FM−^Qp0\PB""â""8DAM−^D
ÜÃM−^YÎ9,8Â
vzæM−^Q ÈàÁ>|!¬!³(#<M−^N^ZM−$T3KæM−$q^QÄ Èš"9M−^XÌ^FY^VÈìŸ]M−^WDtPÈã8

^Z#fU£Æ\2Ì
m^YÇÑM−^LÀ0GdM−^HM−^NF"ñ^\3M−^\F2A^WEã^C#M−^A¹^\^[XM−^E^Q^Q^Q^Q^Q^Q^Q^Q^Q^XdGâ""
"""¨",M−^N

åâàx5^W"à\Œ\^YM−^KM−^AànG

M−^FGM−^Hà°]^W^CÁM−^X5câ"""""#(_Ç÷!M−^R^ZÃM−^PÈ^EW;M−^PHÈ^^−ò^F ÖäAÎ9^Xä^O^FÈ x!
È^^
ãM−^ZÈ^^d^PX^\ÎM−^Y^OM−^E9ÎAM−^V
M−^B^^^He9^CÅr^V²
M−^UM−^]ÈqÍBŽ"¹cM−^]ËrCM−^V9ÜM−^H9ì¢ÔÈ&M−^D0M−^Q^Tà\ÁÙ^FÉM−^]ÈfqŒè;M−^PVM−^BM−^F
^PÆ^Pmr^Z£M−^YÉ’ ÊåYS!M−^]Ï¡^SR^[&[¡^Q8M−^OM−^CrìÆ{#£¡M−^WËM−^Q0) ^W5ÅÑ&3A^HáÊFt
^Yt&f|M−^MM−^CM−^QM−^YP)|ÌM−^L^G#Â,¡²   ^G¡N^è{*Ì9H/
^G^\êD.^XŽËM−^Z^V9^[/M−^Sd³^S6"’M−^BM−^HM−^]^Y^TÍ2ù^]^HÊM−^YxPå^BM−^\Èîv±^A

DDDDDDDGÿÿÿÿÿÿÿÿÿÿÿÿÿÿÿþ[^YÂ

²M−^E)7^P)ÇM−^Sa±^Bgau9^NÍ^G2TÓ!$ï¶dM−$eq^Y6%L4ôï²M−^]M−^CFEÃÈUÃ

ÈÈ<7Ù¢M−^_ÅÙM−$-ŠM−^Zá»^WþM−^[ìþ÷Vÿ^?ót}^^}ºÚ
’M−^V>ÅÝ¡•ßÅ-7û_kbdtNM−^I^YM−^JÎÍ}ÿM−^M(4ešÎ,È©ÑSEa^DB;^HC;N3 9ŒM−^OM−^R°M−^I
M−^]J÷öMM−^L,«M−^JÃ>M−^H!^^J%F~)ÙX‘M−^Zy$EÙ$"\@O5£Ð fóùM−^LM−^_#ÈM−^H^T−0M−^C
M−^H°M−^F^P3HŸh>ù-^TèM−^PM−^H1M¢PM−^L^OÈAM−^R^E9^QÑ^HÎÄ2!^_M−^H4hdÐM−^HØM−^Y.^P
^P5>fŽ^HãM−^CLÐ9M−^AM−^]#V^P5DE"^Q8y<M−^Y^\D ÈbM−^SŽÎ4^XC!M−^C Ö,! ý^G© a^KOù

! M−^A^Qu^NÂ^Pú^D^NÂ^XD$^\¬ØHrÐ^N,M−^P^T ÉI^[Ó’0M−^]M−^D^Z^Z!9¬š^\dâ^SM−^Bè0M−^C
A¢P0M−^Dh4Á;   §á^K»^H4N,M−^SŽÞNðïíá^G¶M−^G^OÓ M−^H&M−^C"@M−^HXA«a0OÂh=^R¶M−^I_
TÃè^\J^\§
^QM−^NÓM−^B’’NÂa^WM−^CM^Xr³¢WwM#1M−^KŠj^H] Dt
"−ŸÿŠáÑ}DšûLM−^P^PM−^NM−^HæM−^IãZDpÙcM−^\|I»DM−^\=ô_•H7^D^\M−^]M−^Fm^PsY£^NV9Ü
M−^N^^M−^Pa¢ù«rnHrM−^\$KÛ=M−^IpáhM−^_»peM−^O§^GM−^Tù8*8}^QõM−^S
mÐmÉËú’M−^LM−^]¶M−^P7MüM−^_:^[¢ra^FL3^N^Pn^H\38\&,M−^PÝ_M−^DêÛÚAžA6Æ©á^FÒ^F÷^V
M−^Di±M−^B#«Aº^DGAŽM−^\A÷gÒ^V÷á=oNhuÛèM−^]ïœþM−^Px":^GÜM−^K0Â#M−$ÃM−^N>M−^P|^^
M−^CzWOÖý6þM−^Bu^?M−$ ïŠhÆûzOŸýÒMöÚ^E^?ïÿÿêM−^Cmûº^ZMô»ú_œúÿOUÓþþÛISM−^OïuþÞí×
ô¯Ùðœ́ôM−^[ü;ý¯_õ_   éþM−^[ÖíïmôM−^]/[®^Xk^^Wëik¿ü2<×fÒÜM−^H9n¬Í}"^F
ûŸM−^_÷uú×Ýµ_j¿×þ^[œC^^-ûœ+d^\^_#£5ïðDuþŸš=M−^I^PE^Hºb*#ûÿÛÔ^XM−^H^•-²è~M−^[ö^Vÿ
^FGM−^L
²^Qì2<^P^È‘F×ªM−^P¹³

M−^N#^GÅM−^QÅÒ

.ïú¯ão¬7úíõ×d^W)+^Wë[^R)k¯Ò^Tºâ)âM−^XM−^Nö^_^^ß^\F

>#Æëý¿ß^F^^ø7[ÿ}ýM−^F^S^Dÿþ
µ×ÿþM−^CnM−^P0ÿï¢ [Š-÷þÿ¢JZçÙ^WÁM−^UM−^N^V¿m^?°gw^R,^?üÖ^O×ïÿ$hM−$à-Ûò^F;¯äÜî
M−^Y71siÏòàM−^HëM−^PM−^CM−^BKÿkùv^Q*M−^CìM−^SM−^YÎ
šL]M−^P®U[^?^_øM−^_$^Kýû!^Q^\í_ÿŸ^W^HI&Ý©«^GÏó^Sý^HM−$*ÚIâ:^Qÿÿ-M−^JwÐM−^FQ}ï−Ê
WŽÿÑF^O8à¿÷Éñ
¿ÿ^?þM−^^ôM−^_§ý}«^?¥jÞ•ûŸä ñ/ûö%^^M−^Q^XM−^Hákë-ÝÿþM−^_ý{Ö¯mïÿÿ]çMþÛÑt]júëM−^Pû
ôí>¯Óñ^_møNôœœz¿«úÓû!ýM−^Pæ÷ŠÞ»ïwNÿr^[Ò^Vûéý[Ný]~Õ¿ÿ¥÷êcöÿ÷]{ý[Om=^?_r^]^?

M−^QZÃ_¿õuíu»M−^FM−^Q^OJá¥w
[^K¬M−^[M−^L^H÷ÚWÚ®ºöÃ[ïöÖÖúM−^FM−^U-ðÒÒ»ýM−^F^UÒM−^CK[]M−^C#M−^NÒ°»k-¥d|)ðC5²^T
{¥^F   FØ\M−^CÝÒÕŽ¬!}ZKV¬U¥-®-M−^D¶^ZÁ«^Z!rÞØKøiYt^V*éM−^F^RâBM−^PÕM−^I^NM−^^}C
[M°XM−^JM−^Mb-cj,M−^O×m[TÁ^B#ŠÒöÂ¢$ð×l^Umµl,RqQU^Uò,xa^T;p¬E+jÅ^ZA6
M−^M³0PÄ±ìHcÅT=â©šM−^G~^XJ!M−^QÔ[^Zfhñ^DPíM−^J^DÌ+M−^JØÉ^@ ÛD^P±¬HcÑ*Â!^G.M−^@
M−^Rê
X B"EñM2Ü(Š¢CM−^FEÇ   M−^PM−^OÚä^Pv^Z-Új[M−^E^KM−^KLlM−^D^\§^PéM−^PwGÁDDM−^C
M−^]q"bi-^Kbh²^UØj"ÁŠ[§gÀM−^XŠ^RM−^FM−^XTÁ4^ZNcM−^]Øh0M−^IýM−^Eml&|^D^YyÁM−^DÓ@Á
^F^S!c^V^PhvxAM−^D^X^ÂM−^EÍaS
°ÖîtTÁ èèšAM−^]"
HH’eº:^QT1^VM−^XN¢^[‘M−^Dd1M−^A^FTì ÓM#iÙ‘A‘M−^A3M−^N^T0M−^C   ÄX!dnS©¹^FLo@ÎI
^F^Q/M−^XL!Ã3M−^DÂ^PÏ2¶,ña^RèDDEM−^B^R\MÁM−^Bg*M−^HM−^HM−^KM−^HM−^HaºZ^S¢^Y[^V6ê
B"

-ôDDW^Q^Q¬F±M-^HM-^HM-^Hö•Ü^Q^]^M-^Võ0®«ZM-^]M-^KM-^F^Wf^UlM-^EíòÓÔ0ÚLU%«ÃR,M-^D
ÖEŽ^X Â^ZM-^HŽMÜÚM-^C^D#^_ÿÿÿÿÿò^B^V,9lêÓM-^DþM-$++N[ÀM-^EÑd®&êQ-^]M-^O$vC+Y1
M-^YT©^F@Í3ºìYM-^V±Ùxí;5
2³M-^VéÅ*M-^M^G&9ÀËPëL&^PsÂL^P5ºéŠM-^H>ÔÚŠM-^Añ^FM-^^M-^Bûµ^H!ÂzÛµíWŸ^_ Duë¡ò1ßË
t^W{;Ý•$¯ewï}Rx#M§M-^Gë^SÅYn^Rè_ÒÕ®©-M-^Eÿw¯qvºöM-^Z
4§M-^F=$¡B¡I M-^RBM-^R $M-^DR^TM-^R^_M-^K_ÒšùOM-^]M-^RM-^P Éaí^^#^Q^HM-^Jª1u*d9
UeO=M-^Ud¥s2ìšFM-^K Ž^YVM-^JšŠãBD0^K.M-^O«=M-^B^FR"ªD°Í^YÙ<^PdM-^Xä^P#^X³š9Ò’$$Q
ÈŠÿM-^U^YtAçM-^YšBc:M-^CM-^\Â

æSçz^DÂ

M−^T(M−^F^S9M−^SÖ‘Î¬M−^UM−^Q)M−^HÈªçØAå W=Ä<Ö^] ^EÐ
^KM−^K4^HSM−^BM−^D,M−^H^HH^Tâ#²M−^B>A3š!ÐËçM−^E^H80M−^C;^\9M−^@@M−$á^B^O5^F}^C^H
M−^IM−^A¡|^PM−^C4‘M−^AM−^D^Z^FPA^QP!¡M−^SM−^B^DôÈaMM−^EMHúÄX áM−^TfM−^C^D^XD)XjH
Dtc>4^^lapAúz^F^UB{ Ô!

&^H4G^AèXL âÂ|M−^V4−Ó»Â^?M^HŽÓ ŒM−^]œtF8;]^SñM−$^PmM−^D^^š^^M−^CB−4NÜZ^OMM−^Q»ö
Cœ^Q]¢8²^YÎ^NM−^[MŽÞÐ"wqhM−^JíM−^U^OÒa¹8M−^TèM−^Hø¶M×NCD4FïPÏ^DÇHãM−^DûèÃM−^Bn
M−^Y*M−^Ot^KdM−^\ÉÈ°^Y*iá^Xr¡¢CÃ)Ä÷l&M−^A^QÐnÑ:8M−^F4ìÿ*#>qÊ^\ ŮÇM−^ZM−^\¹åyeÏy+

3º/);$öÑcM−^B
M−^LM−^IaÕSr^D^NÈgFŽ‘á^YM−^P2   qdÍêÑ,‘Èáh^Q¡²M−^\KÆ−
M−^G^FUÁM−^Z:l6qÐh}ÇM−^B
ùDM−^RMÂ31Š^N[Ñ;ŠÜ:y^VÞ£âM−^X•M−^GÒlqÐAÙ!Ê^\«M−^C DtíØ¹^X^PÀÓ¶^HM−^NM−^\ìÔ‘Ì^Zm
M−^UM−^A;M−^Pf/n^X_á6ÕtØÓÝM−^G^W^WéÄ?îénH¢ôM−^[‘M−^Hé±M−^HW^DGO#êõ•ëA÷÷}[±v)/öº{
mÓ¬iwÚÝþ^R^O»«¿ï^?M¶Ÿ^[NM−^[^M−^^M−^[•kMàM−^Hé÷M−^DÿêßÂ^?ü’î?øNM−^S¥¿M−^G¯®ºÿOU×_
ôŸí_DuïX}ajÿ¯vÛiíxõÛ]¿«uÂvM−^Wëm¯óîö«ÝRë÷_o^ÈM−^^¿LÂwŸÇA^?ûÓtÒûmu¯÷Øí/ýuM−^Iñ:|ž
×{šŽ¶-TN^D¯ùM−^Oþ

M−^Nø":üÂ^_âNÛ^U²^]G.•þ^OúkzÄ^RÛÿM−^C8# M−^@â^Wû¯²@=c^QîêM−^EÐ÷M−^]P+]øM−^OøM−^K
»Ã^ReïÚÖÈ.3vGÈá~žÿ^_ó JïwM−^N^O*Â}?TŠaË¿ÿªkô5ÿÿUådOâß
ñ^Qï]ÓÖµM−^B"?éõÉ‘>gM−^T^C¯ÿÔ*º¯µM−^PM−^^M−^U]ÂÿëùBWî¿&çuä^H[¯ùx¿§óá^?õæ¡ÒÞM−^X"
^UùM−^]õß¢güM−^C©UöX^Wù^DM−^Oç¯&9cM−^Z^Bï¡ë?M−^Q|M−^P^?ÐM−^FŒ×M−^]^^y¢k_óO÷ý^QÓ÷
öyâA6ï^DBv×îµÂ
þZVÿõTBOú~M−^DG_«ÓWÿ!éößŸ¿M−^Mþ• W{ïöM−^[÷$M−^Kû-ÿÿ}i{üM−^Y^]uM−$»÷×Ûy^HWâM−^L;×
ïÿí{]kÿþïô _   {îœúÿ:~Çd;ÿ¯ûº M−^RS¢ÿ¿AÖÚH§}ÿÿ•ý÷×tºêÑ×}ëôœ^?º_uML^K¶ºý/ÿÈzöáU$
¿o]³¢¶ûú²^_¯ä:ÿïÔÇ«ûœ§zÿý¯õæ×ÚôM−^^ÙŽ   þöM−^YM−^MÞúºoÕ§Wi*éýM−^E@M−^Héœµ}Ó×Û]w¯
ÕOëþ^Z^DGW•ÒM−^X¯Ý/•°©ý«k°Du^QNF^]¹^Q®^Pµí}M−^D^HM−^N«ÛKÝaM−$M−^BIûM6ÓÒÕŸ×ízí−,/
jM−^_Ú¶^SM−^F   C^Kkùû¿û°«íM−^[K^Ov6M−^TÅ^R^O£^HH%M−^Q^GàM−^HR<•psÕ¡ÞM−^X‘Â[ß

$ºFŽì^Z^P^Yä+í+ :,^?°ÂWá²è+}M−^Dê^ZE

^QCM−^PzM−$GM−^_Û   ^FEu^[^[a5t¢A&^Z^DGGÔ^[è^\IM−^N3ÑtM−^YM−^G±^U^TÎúhÐ^X³Í2
9ŠÅ^X^NM−^[^UBØM−$Â
^FÅZ"ëJ(M−^\[#M−^O%a°"+M−^PrM−^Y^])é0M−^H| _Ä+Ø«K>²ùœ^Q)J^HM−^Nz^Fm1^U
&

^Q^UÇ^U^QM−^_^ZM−^ZM−^@ŒlT(L28gbM−^Sm8³‘\Ø!pwM−^HM−^K6^D5CáM−$Ü!^^È;ÓZí^B^QM−^F
M−^M^A

^B1^DGLð¢/X¶"^R^ZK3M−^DÅ5a)^Tq^\[^UM−^FE8Ø$)M−^JM−^EVM−^D3^FÐh54 ÔHM−^CŠM−^Z

zx‘M−^C]M−^F^T’hM−^XM−^L$«d^H@O»VM−^XR^[^G^D^ZÔ1M−^Ió§¬^X^È®qÊM−^E
L^H^Pa1_@Ö^YÇšiM−^YÓMM
bc a0š^Z

áM−^D^Z
^C õ^DÕ39C¡
U^C2¡p^Râ9®#ô^YI^B

&M−^Y^T‘RßB0M−^AM−^E!0!gÕ^FwL&
Aq^Y^O^@M−^Jr8M−^Høg^\&^HM−^NM−^DDXB Ô iŠMÐÂÄZ^QM−^D"ì!"@â""!M−^B

!^V^HY−á‘È}Õ^]Ù^HŠW^TËA^Q^Q^Q^Q^Q^\DDDDDF^PM−^HM−^J³íÐM−^HM−^HM−^HM−^HùÀvM−^DFÐÐ
M−^Ošÿ¶©~^Y&pJË3P¥æª¥M−^RÃ^QjM−^U+«KT

¡í.M-^DGA_šÚâ÷^HM-^T-^B*^^îþM-^_•ÛŠM-^C/Êo@á^K§é«"M-^NM-^C<^TÎZ"#ÿÿÿÿ-ëM-^H’N^]+
-M-^VM-^Mr¿œ6
M-^].òÈ|•&M-^J3°UI²¹ÒTM-^C2(‘M-^Ys@ÎÐÈM-^@ŒM-^An^S+M-$eÑ^UÊÔM-^RDØ^\M-^^M-^DXO
M-$M-^[fEM-^Vd4*^VM-^YÔ^Q2^S£²ÞM-^LM-^EÎÿþ-ßjªM-^]M-$M-^Z ?×z[÷ºmýkõ~R]^?v
qîõ Du ¿¿KoÌM-^EXM-^Gh«n©ôøká}?ªÚÆÚv^T,jF9¡^G¿ßøí^N#î^[a~M-^Rs#-?ÉM-^O;RY\HÊù©ÙP
!Út_;F^Q^EËHÆ^Q+ØM-^^"M-^HM-^Ce8B ò!^W«0üìŽ@AM-$NM-^OŽAM-^MÁÊÏ©M-^G8M-^IM-^^S
M-^IM-^\3¬^?Ês ©P2ª@M-^HM-^@Ù|M-^UdPd^Y^Pc%Ñ^_*Ì"^V¢e^EÖH^Yž±M-^Fšš(äÃ^R^X^U8B?
%M-$M-^WÍy^^4^Yš!R^X!‘M-^C^H4.^X&k^H^S: M-^C M-^D>¯M-^RL Â!õ-ÆM-^FP!,#3’ L!y±B!
M-^Ma^G^WÆt+.5^D^XLÆf
Á^C>ÂM-^QÐAM-^D^Z^R,^\2^UÍ<M-^B^FBs^D^Y Á^FM-^X hC^DìM-^M

Ð¬ ðM-^H°^?^PÓ M-^B^OAŠžL^Pw^Wa^GþÂ^FM-^Z^N5@áM-^BhM-^EM-^@h^^^S   ÐAÿ^Qh^Q
È Ðõ@Ñ>a0M-^C   ª$8äæ^]ØAŠM-^DXAÚm&M-^]M-^DÙ’M-^DïÐ‘M-^\$íÚ# M-^]º^Zz-ÓM-^Q]¢1Ý0
M-^Q^UÛ^W^Z$9Cž¹gÅû3Ü ÌÈá¢]d^]Ó‘M-^Z8êÑ(
^R•’M-^C^H^P: ÙQb\0M-^I‘lM-^J9PEM-^FM-^I^N^Y Ñ;e<üIC^WCÝ^Q]ÃgÂnQi^R(M-^O^[>MaË
M-^\M-^W20Ñ^^PtM-^WÕ^Xr¿0á^_&aÊ^\M-^ZM-^BÆ^B
M-^RÀ¥ÍM-^\r   n^H^R^PÃŽM-^^E»7<OD@ÏpM-^]^WG   ÍLHž!sI^DÚ^H^[F^\ Ú^H=^G[^S9M-^^
^HÇOAÉÍ-^D|M-^ZA>BM-^MM-^T< #ó^NUÊ^X:^D^]^Qó^Z^X&Ð":l^^KI•M-^B#®MÊ¿   (KI+I â/
h+M-^BlAM-^B#-0ÜM-^KM-^N^]ÓM-^OáÅ^DGN¯ŸÓÙPDtôM-^P}é¿±bM-^S@M-^Héœ-’cí¡y*tßx">ðDt
ú^DGWI}h^UöøM-^Fü^Q^]nM-^Romþõ•Ðn^HM-^NM-^_}¿W¶Òœ•M-^EÓ9ÆM-^Zmíïw×M-^Ku]7_œßO÷iŸ
M-^F©•îªŽé?ºôM-^BA^DM-^WIpDtúý¶ëOï¯¿-:éuï{Oúÿi<ÎŸý®M-^_Òz^O×_^M-^Vº_KÞ¿ÏiíàM-^Hé
ªºÇ¯×§¯~µœ}¿iÁzþ¿áþŽM-^Z«úõ}^?×ïùŒ¿õúKM-^PM-^S~M-^BU»i_rM-^\ZoÿY^VM-^Y þ¯<M-^U
^B#§²:6œÛ^Q_k0M-^MéõÕ×_TÿöGeÂ)Šœ5¿^õŒD_ýö£û0ÈòŽM-^R^HRë!M-^B^?¿^\lM-^B@OìG^[Q^Q°
eáM-^Pzý5^Q^_Ön.^R»ß^?^?M-^Hâ?^?þM-^CWõÒðÖ5ñ^Q×é%M-^YM-^E0ÿÿPÇÂª¡Ã^PÃ^FN^T»ª^Zû
M-^H®úëÿéó?
o×M-^Jÿ¿Ç$^?M-^YªßÛô©$M-^RþC^Nš2M-^G4WÑ0M-^TBM-^NgLM-^CÔ^XA5ð»ëó?ý^?ê-qÓ×ÿ®M-^Wã
’M-^G²M-^AÌÖ^SM-^SÂ¹^?ý"GþM-^RYM-^ZM-^VH\^T^Pä^GM-^Y¯keM-^T^TìÑ^]Z&Cùa¯Ñ^KeWõÿÿä
àþ
LJM-^_öÿ}ÉÁÍÔŸë¡^\’ô#ýÖš^Wÿ M-^B šUÜ’ýÑ1^K§p¿¡Ÿ¥M-^A}WÓõø!^_Ó:«ÿ¿JM-^FèHJåWlè¯ÿ×
Óúïë¿I]^?þÛ•ÖûêŸëì/ÿ«^Oü’¥Zä6Ó}ûÑ^Ym7ïó¢OÞ¯^×mm[³§^OI/ÎM-^^t¬é_ëÿýÿëŽïálé9^OöÓ
M-^GÿkëdM-^G¿ONÉ^_ÚÛoÿ-^?ï}M-^R^[ŠûzIatÛýœ¥öÈvœM-^Påýÿí~ÂéþM-^S_ÿ¶M-^[iðÒö-§Óí®»
kuaM«K]VÖûþûK^H$M-^A%ïÔÇø_Ý_¿O×íXjÚÞðD^?¯Û_ú¹^[»nM-^XjþºÝmöžTõßkm+JÒø]ÕM-$Ã0M-^B
^DGXA(A(_Û-öÖ¿ëÉÑvM-^[jý¬0-¥^G^[^Y9&G^[Œ^XHM-^\M-^TôÚ°f5ÛÒ°iXJÖÒaª^Oá¥{j¶M-$M-^I
rM-^] ÈèœíM-^BL0X2ÿkì5oM-^HM-^NÖÐ"?
 §M-^M^DM-^T^YM-^AtêêóM-^IM-^F^P":µí^HM-^G®^Q^GñLS^PD}M-^JM-$"ËM-^D# ®M-^R^VG^[
^VÄUúâM-^XÛV6)°M-^A^QÖábM-^XM-^V8âM-^B^R   S=ÄEÚLS^P¢="(—M-^F*Á^V:j
bM-^PLLâ»0YÊ!^_^H^HA²+ÏM-^G^D8M-^MM-^CAM-^[^Nl^^ADÄãâ[ÚšŠM-^_BÂ

M−^O13ãM−^Pnu»ZiM−^E^UMEM−^_^B^Xª§M−$Î^A}M−^M§Š)Hð"^Tá^F−M−^E,qVÓQ^V‘3M−^GBÐM−^B
PM−^SQ&8µm²;Ûiªa^F©žØ{!^^ÕÕ\^Z^FM−^ZpÂM−^YÒµ−áM−^D^Zf^*äM−^\«8DÁ^F^S<&¢Ó^VM−^AŠ
M−^ZM−^ZÐ0M5°M−$(æs:kh2ËBè3^N^?µM−^F¬0AM−^D^Zh0UXiM−^PÃM−^T@ Â

−êàÎL&^P0AM−^EM−^F^V

’h^YÈ(4^ZdM−^G#pR^OêPº^PÁ B

’ØB!M−^B^Q^Q:F3Ü!dÅK^F}š ^Q\Œ^HDZ

,0M−^Yí^C^D^Z^PÁ^C^H^YÒ^B#£M−$

œM−^L^E~M−^XB""¢CÈœ^H0B""#;s£<Â^Q^Q^Q^Q^Q^Q^Q^TM−^DDDDDDGzM−^KM−^HM−^HM−^HM−^HûÒ
ûoý±K−AUM−^Wý^Vê^DB.íHašczºM−^HM−^FxM−^FPå4 DGÿÿÿÿÿÿåŽš¡KM−^BøM−^C2^S3"ÊMÆDv^;(
M−^H¬VÑ’M−^UÅB^PM−^NÓ;ðB¬È^QM−^DÎÅM−^Câ9^GPÂiÚržM−^]^_v^PvM−^^ûOŒZýB^O|M−^J=œwðÞ
ÈÇ÷O^\ì−þW+?Ú^_EóÎÁ]-§÷ÛiÚKkªAÚÝ¯^\5šÿ^Qñüv¹oþU^V^R+M−^F²lTM−^I×FCM−^YìÐM−^Hï5"u
NfÎDAåFR

ß−à!%" yPÂ!,áS[9^PVU¢8h$#h«^Tâ!DwPM−^FŽG²^Xr_"M−^HÆFe@ŠðM−^H°EM−^Wó@¥^FR @Ö!M−^R
ÑM−^[^_^VjX#ºM−^K^HM−^G^B&^U^HM−^H]^C’a^C^D^O^H^Z
>,M−^H3e!ë^VM−^EM−^D
2V^TM−^PÌGM−^HÖ3f^PhAöM−^Hô# Á^C^H<ì^]^WªiM−^YM−^J¥Ñ@Ðò!M−^^5MðM−^EM−^E^]2M−^@
M−^@M−^Aá^F^VM−^\M−^GM−^B F^SÂ
^OÊ^H&M−^]è^Z^XAÅ ÂaBM−^BÒ ÌvM−^XA¡dÐ2Š^]êM−^]Ú^Rx^XDqM−^Q»4^XM8µžœPŒ&°M−^I[ODpä
wÂ"»M−^Wïâ%^NS°ÜM−^BXHM−^J84O(M−^H;Âa^KDM−^G*^Z^UA^S^\]ºrò¢ÈíêM−^Icg^^ö³^]M−^KÄL
<M−^P)Ç²1áÙ]OÓDWèM−^\Ã)Õ"ÎÐ&øAŒ5ÊM−^^B:I³[!^X MÐ<M−^_žM−^VôO°M−^EÑnSÊM−^I^D

)PM−^A M−^IûHM−^\ø":
é$^[^VÊ^X1&í7á6Ó{?Y ±Ì¯$å‘lM−^A^NôEÇ^Dh[qM−^D^Y$m&ôd=Ü\êm%OÂ
«i;=Û©1ÒMØM−^FýÇÐ":l$M−^W^[qTßM−^]^D÷£¡M−^\=^B#¯^\htM−^FÎM−^A>^P7¿vM−^CTõöôÿMþ
M−^Pz}±¥I Òø~M−^[ûëM−^PO^HìqM−^PêxUÿÓßöÿ}?õÕý×õÒ{o]oÿz
Õö4Þc}]ýœÙ−(CøJÿJïõíÿÓÁ.M−^SïioIºw«¿ëÿ^?KM−^DûîM−^Wý−M−$íºMM−$M−^Byc^Wì’M−^GÕ^?õ
èM−^Dý5ü7M−^Jéj¿gœßúþ^[l2:^\Í%Õi>?¿_

sÛ²nŽœºøLM−^Dsºßÿ¿böž¶AÝK|dq^_M−^MuB9

^N¿œtCö$B¡^W^Hzüæý[ö\^A÷tñ‘ªÿß^XM−^N×Úÿü}M−^JM−^VãM−^A^W«AM−^EçPûþül?uû^_ÿM−^HÃ
^G]Ê%zA$M−^Uh?úÿýutAßÓX»WÿûM−^F^_Ú^HM−^NM−^_¯•_^F^_šÿúM−$vj?ÿÿDïô

ÃèM−^Jà¶ÖM[ä@g
ÿëM−^_rÜ±äfpäH+×

=ÿ[äÜÎSÊ•Ýy^D÷^M−^T©@é}þ¿M−^C</M−^P¥Ï£Á^OõòÉ¶×ÿ¿^Q(Å¹cT+_ëîM−^DYAM−^V^[Öü^P:õûÕ$
M−^RI−ÿ^QíM−^VMœ^EëÿŸ¿ÿŠþ^R~×úK^[ÿ;M−^HM−^_.®M−^SýÕï^?íRK¶ú«¿•¶tÛ!µîß_ÿŸôIÁ^?{~¯
œŠM−^QM−^H¬M−^Hs^H^Š^GßZÿ•÷êM−^R
ŸÈnýnM−^VM−^]ýM−^R&ÿ^?^?aûM−^PûM−^D:¿ëÞüFM−^Hª¢.ôï¿ûÿïëìM−^Q^D»
þÔÇ^]«®ÚëoÿkM−^R+í7Š^_iwá+!ö¯}÷ Û]{_ý−ûM−^C   ºá(kl*tÚWO}-^?íM−$ÚÚ¶^S«4VM−^U®Ú
_a8jÈW^DGLãÃ3M−^DÚ^DGOM−^]ðgŽµØ0Šq^]−}¯~ÙpM−^]ÞM−^C^D^V

M−^O®ò^T{g^EVÕ^F^U4ÿ3žØkiHM−^P®$M−^CM−^D^HM−^NM−^[^Kg»MM−^F-M−^D¡M−^D¶1q

ÄM−^AM−^B^Y£œ²8VÂfkB¢.þÂVmM−^_^U^Ppä¹"^Oâ©292 ê<DtÅ1^HM−^T^B^YŠËM−^K

$EL^Q^F<M-^FÎŠM-^AÁ©rv^X,li°Ø¶$^^bÛ^K^RÇÆM-^F^Z^FM-^\fq]lA^QÖM-^Aš]3^]Ü^\gÀŒfÚ
M-^XÐ•’^P¹M-^RM-^P0ÅT2^N:ØAM-$,1   M-^JM-^K°BÓB.M-^XšL^Q8^Q!\:œM-^IojBz¡^]Z
ºM-^Pq
M-^I7^N$^P°^TC^D,^UM-^Y×ÄI^^^Z^D=ªŽ^ZÃUmO^ATM-^CM-^O÷

```
&¥º
Z$C
2^P~^ZéÃLÎ^KÁM−^Bw^V©îl^DÈüoM−^C^EŽìM−^BãM−^\pM−^A¥iM−^E−ÂM−^VôÚpa2Ü fä^X!gM−^C
M−^V^Px^DËrM−^CÁ^H2Ç3M−^Vá^FP@M−^XFd^X\^Q^]^CaM−^B^Ny²^\"Ú^N^Y!Â£÷M−^JM^]M−^E^Xh
£¡^Qe9M−^\M−^F^GL-b^Yð§)9Ç;M−^Xb^Q^Vmb
```

&^Q¢M−^HŽ""^Yä^DVÅA^HM−^K!^\^U¶,!e^UDDDlÔŒD0B^Z^Qd‘q^Q^Q^VVÆ^Q1^HM−^M¡^Q^QK^Qó
M−^@M−^]M−^^^N"8M−^HÇü.á~M−^WŸm_^Nßxd¶$− É@DÚz!^Y¥0Á#²M−^@Ç^E{^DGC^WcœwC[
µdv^Q^]a&¬&i^ZhDjM−^FYª£^ZK@M−^Hê:Ú{ãÅù^XûÓr1ßá^EnÕãu|>ßœ^òÖ*TýÓ¶DÚÆÈîM−^D^X&
M−^D]Ö»LM−^B:²M−^G%−PÄGÿÿÿÿM−^Võ²ÕS:fD^ZÕ}*TšM−^[M−^B2±^UrM−^UDUB^U^NM−^B
^S~^D
^K¢Ç^H^PvM−^]^DGUÝ-®»JÿK

«ô M−^HéM−^U;Õ$âïªHvM−^^éúÓn−UV^XQ^U^\G^Yn^^dªM−^Já^VRvW^VYÙiKz
PM−^H°M−^DM−^AM−^Q±HM−^C Â&M^F|M−^IvI^Y−^Y^S21^Sä‘¹¬^PM−^GM−^P8ÆGÊrSÑÐe&KM−^Jv^Q
^U Š¬M−^A
n;M−^LM−^O^^2M−^\dŸI£M−^YP!^PyÑ^Qâ9^RìM−^I

,•ÀÂ"ñ^]MO
M−^XD=C°M−^C:M−^E(D1M−^PÐ f$Ï°@Í^D^H^Z^F_í^Fs>q^Pâ, ÉÅ^H^X Ëäš!^O1M−^DFXÁ^Pã^CÈ¶
G^NM−^EM−^D^Z!Î^Y±^B^PÐd<’HFk^Ht^QBtGnÂa6Ó^H4Âá0M−^XD_hE¹M−^M^F^Sì"7^Wø@Óôôäà‘
M−^AÅÝ ÐÐ»DÇ¢v^Z^PÕ^G^WÞm$¡^GM−^DØm4OÙ
M−^DMá^Qa¢väû^RQM−^QÀkÉåM−^U^N! ÝàM−^AÝM−^[ÄN>Fò

gŽOM−^^M−^Z@÷è¹Žäç¶w^PM−^Ca^D^[vÑ8¢P9^Tz$âý^QÃM−$àÄž{qAàM−^C Dt
Ðs»^RÐNï@ÐÄM−^SŽNrM−^F^NM−^P|vF:mM−^_á¡H6HhM−^[ºm^PM−^NÙOe=[M−^Vw Ñ3±'M−^H
éœÁM−^Ud+³«@M−^IÎM−^\x":^NÎòM−^CM−^XpM−^C÷h:O¶M−^Sv^[ôðM−^CfM−^LM−^PððM−^^M−^[Û
§øOM−^OH+M−^H@ÞèM−^Lì\tŽÝo
ÝÐl'M−^[ÓtM−^Cœž»ŠÝ^D^[§M−^DÜM−^Páii>Ý:»õpZïÿM−$Óÿý=^?ß{úMÂõéž^®©S^?]{õÿÖ^HM−^N¿
ßz^?ÿi/éº}ßÞM−^Wð÷Mjð«_miý/|/¿M−$÷¶ M−^Hë»ûj^HM−^NœŸM−^[^?ªýv»wýv»wÿº§ïwþàÌ&ù
M−^LÀ¯ï^ÔM−^EìM−^E^\û£zuÛ^[éÖäQÍM−^_ßýÒÙ^ZM−^U~M−^\UM−^PM−^SM−^CAUÔÙM−^BïÓõÓ¶ñ&ü
GZ]tñlC-wä(RÖþ Çÿÿ®C^EiWÚ
È.§ö#Å}^?Ž»òÇÖýxàÁëþÈ.UÿÎ¡ÿþÿÃ

O^D^?a^R^X−M−^RM−^Dp+Ú×Wú¿ÆS«M−^__ï§/Â#^C×þ^[ÿðfpþÿêüM−^W^TM−^K^F^?Ä!Dd\D$cþMÊIú
{ßý^QŽM−^_^_Ÿú¡gÏúå^Y ¿ü¡^H7ÿôg]yV×ôA^]M−^Pñ>h+ú^_œ~öÖNM−^Tÿÿ}M−^Rp¿ßê^OÿÒoœ^?i¿
äûr^^úèM−^Pæú¶M−^HŽÿÿÿÒä8.ÿêM−^[ÖÍkÝ]nÿIí?ÿúÿOF^\ÇªÜãM−^D=Œ*ÿï^?Õw^[ä;ß_:mM−^PûP
@÷õ÷ö×^Evõí×ÿ[é^Eëd>ÿM−^BŽé³§úÚöº÷m~Ò^?NÓ};ïÕ¿ÿ[þýûµÝôÿm?µûWOôM−^_ß~É^O¶¿¯m«|:_µ
l−¯ß^?þM−^RýZýþc×^K©M−^Ný#M−^IÖÕöû¯KI¿¶ŸÃ@M−^Héjê^ZV•îM−^V¿ýW^F¿úÚºOÚ¶¶û
p©Ýj^VàM−^HéM−^FM−^N:÷Û^K•z°×±GM−^WÚfv^V^X DtÃ^H^Q^]AM−^Dµ»Ká DtDä°ÚØ"cš‘M−^VF9
^Dë|6Ö×áM−^BXUM−^F^UM−^FM−^A^QÖ_J ÂÚ|0ŒM−^HâM−^W°M−^U Èù>§¶^ZÚ&îA^GÖ^RM−^BgÆa1Ä
M−^KmM−^K

\y^V^D8^]ŽM−^[^HM−^Pó^Z

^PÐ²ëaM−^DM−^Xkf^TdUg^Z^Y{Ó<
:aM−^BJG»IÓí^S^\M−^H,.−5M−^JÁ^N#bM−^LÀM−^Cš(‘Á^S^]6^PŽ"í^V=M−^JM−^Q|SÞ$+M−^Kjä?Š
¡w±QQq
,ÚM−^QÌTS^W.1^WÅª^ObM−^AM−^Lø "^W5^Q±[ž!Ó^RC©M−^]^F^T=M−^KbN;^UêÓRÜM−^C|0M−^Y
M−^\¡ÕM−^FM−^JM−^CM−^_M−^BwM−^B#Š«^FT&â^[¥hÌ|M−^MÊÔ0M−^]Ô&^HM−^NµeP^Pd^]Ó
NJÈŸ^XM−^QM−^NŠÀAM−^B|3M−^NqM−^@Œ4Ó;ª
m‘ÕEŠM−^DDC;¢^^";)Í^A^HM−^C^D^XL±ÐM−^I−^ZM−^F^H0M−^X!^Y^Pr−©DÊ^]lM−$^\M−$"^R^VaÊ
°¥º^QjM−^Zfß^BhEM−^DÂÄEM−^B#ìM−^E^\â^B^FRM−^B0%°M−^Z)Ø2M−^GQ^Q^Qq^Q^VRâ§M−^RZ^V
^H^XAM−^D!M−^D"8M−^HM−^HM−^HM−^N^X!^Q^[B""#ãÿWÔ³Lôó}(M−^P«Ì_^M−^UVM−^C:åÎ9M−^ZjÚ
^Q^]GÿË^E=}ãÿÿÿÿÿÿÿÿÿÿÿÿÿÿÿÿåpM−^]2M−^ZH{−rM−^GtÎÜM−^NÒ²ÈXÕfEÕ]M−^YPD^YM−^RR)Ñ}R
*HªM−^K2š)tM−^L:mBM−^[ËpÚM−^]M−^V M−^HM−^H^Vde$j^Hv^TÉ^BM−^Y^CXA È5BG^DbÉ^Dú$áÙ
^De\ ÜM−^IŒM−$LÎ^]YÝRvB^B^DÑcM−^Dº$ÈDM−^MÚÒNŽ|iÝ§gsË©ÝCT¶ïœ;dÇwM−^BÝ6Â _º^Oáû
jM−^A^QÓ=×^?_òÞy«iúÑ\y4Wýs»ºH_ÍMM−^\s?KþçM−^_MûŸÚM−^O¿í’õM−^H¿UŸ¿^V×v¯OÿÃIn^X_‘
Ð5µýßÜuM−^R¿M−^M^N−xý^Híuò(Çßz^F»1øýdÂÊM−^Z&L-¢M−$xM−^]M−^H?ê^H20SºM−^QM−^\SÄ}o!
É^^gnM−^H¶]fM−^V^Z4DxM−^IŒM−^W−s^^DM−^QÞM−^Q³*¹^Cd¹ÙTM−^JvM−$‘[.²^PePÑ

^K^Q^AM−^ZfN

M−^A^Q8r

h7!M−^E!^Hè0@þîpi É^Y|M−^OM−^_^YÖ:0AM−^D^Z^PòšØn^HM−^EÔM−^BW^E$²#Â4ã*¡^TØC_M−^P
áM−^K>aHXð@÷[(^Y-^[³¬P^PM−^\)äGÌQdiM−^YM−^E3a^F^Py:/^Z^P"^P1!M−^Oq^GM−^D^X"^\
M−^FM−^AM−^]E0 @ÉÂ^DÓ^DÂ^Z
3^VN0M−^_~Ð‘M−^Ic ÄXLM−^\"^QjU^QvM−^CaM−^J^NÔ"M−^^DM−^E ªa^C^DÝ0B
l&^H^ZxO^?>^XBÏM−^O<^HM−^ZM−^D"ó M−^^ Â^TM−^E Ð^? àá4ô^\\M−^LvM−^Z^OA®^Pì*^?Œ
, Ú%nÓA²
Ç‘M−^A^QØé°Èú{l¡f^VÓ^HM−^V^Gz$ðM−^]º^FM−^Hà44E^?ôM−^ZeÃÚ õM−^QM−^OL"v^]^QðM−^XDv
^\M−^\7Â$=©cM−^\|=^F^SÑ70áÈ‘vM−^B
Ç äòÈÇ¢1íá^Q]õªM−^S¶M−^A^QÖM−^SaM−^IoDùM−^C#M−^@M−^^ •ØŽKM−^[%^R¡M−^KM−^CM−^T
HãM−^UÍ^E¢cM−^^^^M−^A:"Ãgé®F^\ñA\»Â^F^^M−^_r^?böqË^]"þÎàM−^Z^WÖÅ3M−^HŽaÁ6¡Ü:^HÍ
M−^]r9M−^H»z%ôEM−^FÉÁ2Ž æ¡^[§

ÎBÅM−^_ò]K^Vá9!M−^GM−^BM−^]öM−^[ºA=•^D^\Ô&M−^StÖ^Q3µM−^DG@ÁÁ8œ^P¶ñIxm^B^DM−^D7^P
Dtè^Q;^Wé^EpM−^AŽM−^C£^N^S^?Z^H6k
G^^4)^FÅÁM−^V§M−^UÂqÂQdHtM−^SsM−^N^SM−^CM−^C¥b×,s»àM−^^^Pq«n   ŽM−^CbÕM−^NM−^L8
MÓºAÜ^]Ež×^UkŠÝ]7×~M−^EM−^C
0ßœ[i6M−^RNM−^[ÕñI:¶M−^SÛïöì'i*~±m5ÓtÚúý
^OŠÚ^DõnÐzzU¶÷ö×§ü^Q^]tÝ7^DGZO_Mø={÷ôö^UîþM−^Rë-/¿úÔ*•^?U]7Ýê«ÐoÞÛ]ÖÒm^B#ª×Iô¿ïµ
^_évõ×i^áµµ¿-mzÿœ'þÛÿÐ^M−^U[¯^DGOZºÿWÿývÒþm]ïÿïõñ®^Yq?ªÛzªú;BzôŸ»0ºýÕàM−^HëÏ«WÖ¿
 ¿i&•ñµM}?Öý>M−^Y^]^W
§5Å]â^^ÐkVÿ¯Ó.^XõQ^_âM−^Yô¿È.?i6÷ïëM−^I;ï\%[â^_ñÛû]5Á^Q×ûÐÂ|»#M−^DúÕ-êøM−^N"ò^W
M−^X^HM−^W^]^O_®ÿ^_ù^G~õ^Q¯ÇM−^F^VêÿõÇµâ|_ãßÿ^Sy^\Lm=ú_^O^Q×ûZ»ÿM−^D?¥¯÷ÿ¯\°M−^_
ß÷^[ßýþN4>t^Gêª¿Ž°CØºÛ]*^^ûñÌÿýª^KòO^?ÿÿÉ^?^?ZõüM−^[M−^Qº_ÿ?é_Dãë^DC¿ù9ý^R^\îx8á
^?M−^B!ßWOîíÈG9^_ûMÓöLsÁùUM−^^hM−^Pÿ f^Q¿ÿûM−^Q¹æM−^MbëŸýM−^ZÊ/^M−^D0¿Õûÿ±¿^H/í¡
öM−^DDxŸEûÉ?Û¯åM−^DõÿÿB"M−^IAÒ^G M−^LÑM−^Gô?þ•ü!Óý_ô?žíß«úuÿÈéïœ<è¶ŽY^]n×Uê¿Vÿÿ¡
í¡ïoÝuÝuû÷{¯výåP-}×œwÎœª,?ýÿú^DG^Óý¥ýë~u_ßçDçTê¶ÒçOî¡¯þÚiúÛ!ÿçUÞçTéßÕý+ùÓm?®ëÎ
M−^IÖÙÊ?^?MºO¿o~¶M−^^œ¯iÚi}BÛ_ö÷ýnÿí-×iÕv^SþM−^[_U_m;öM−^UkÝ;Û õêoO»ãú²^]ik¯î»

’aoÔÚDsV¿®_ûôµþö
ëëþªš^ZZTôÿMúÖÒM−^Xûí=&^XUïUª^?köÕŽõ×Õk÷VªÕ=‘Âûa./ÕÕM−^FM−^UÌM−^SM−^Uû^PDtÃKm{¶
^Z_^F^PDtÚöºü^Z^DGM DuwjM−^_NÃVûM−^YÐBÈâ(Uu¶Âûö¬9
M−^G¶M−^WV\ï¶ÂÃKØ8Ø5m,M−^DÈú"!M−^QýM−^I^EæE^^Ø[V

^Uè]M−^_òé¶^X$OíM−$M−^Z

q÷–Äp‘M–$M–^LÆM–^AM–^WpÕ°M–^Mlà%°Èè!°ÒTB9^DM–^JyöM–^HaêÈM–^NM–^[LŒÆ¡^Pî¢Â^]M–^B
({°h’ ¡M–^LM–^Hh828M–^Qyt^Q1ðiFf
^Xk

æÅ1QÈqñLVG B$^_ÄS¡"^NiM−^N$^_Åy

ðA^\D0Á^QÔTH}^D M−^D[WÓLTD[^U^W^V\^QM−^Hš³Àü3^H!A^NCá^Oâ¢6+iM−^[^N8ÍM−^CM−^WHH
M−^VBøªM−^PQg^\îËžË¶)â*EM−^X§âM−^LÀ»^DÓLU^G3

öìM−^D|[!^ÈXm5
Þ"^ZÚD6^NLt^Zñ^FM−^ZÈM−^Gøh5Ó^Q&?°¡ŠB<5B"ÔCM_â"Ð°Âd[»
ªÑ¡Xh4ÈÇ^H:.^B^F   −ŠM−^C(4ý‘Â©M−^Q0ŽÂ
;LM−^J$MÕ4

ªÂŠ^S
K^Nå8Y«

&DPM−^ZM−^P"^BgM−^DËM−^D

§^D^XBk&PÑ^Oku

^S³9ìãM−$°Á^C^D,^V^XM2ÆÕ3M−^N   Š2XÈù²ÁM−^B
;/M−^JäÁ^FpM−^Dí^F--M−^S&Š@hDY^PsžB"=Rö¬!^Q^PÏ’^Q^YBÁ‘M−^FCŒè+82M−^@¢",±Ì9P^S9Ð
M−^HhM−^GM−^] ÎJŠM−^YÇ>Õ^PM−^Hk^QdE£l
Â

áADD\^XB"""""""4""""""ÐM−^HM−^Hâ8M−^HÚ^Q^Vê?Í¢œ4^Y^_M−^Y^Q^\ÎËQL
äh^W^HD^Y^EìHM−^[^V#r^X^S ‘ÌM−^HAM−^ZÊd8ål^HÖQM−^BÉM−^ZM−^E¹
M−^A^Y@ÈäCÈM−^Hº#¢²g3^HÂ.!M−^LÆM−^H^W¬M−^CQ±b \L±È:B^51^^dh$YM−^W¢,EC<g^AÊ©^Z^Y8
¥DF"!^[Ì#^AM−^Câ^U@r^Z?^W":#ÇDfM−^H!^W^Y^\fh©¢ñ029^WÊ^YM−^DJs1HätM−^HÒ.M−^L">]
M−^\Ìdto3

£Æ@²>c.ÈèM−^NeÂM−^ZM−^E.M−^J@M−^E9^QÑM−^Lº0^YM−^DM−^LèÈàxM−^DvG
^F^QM−^X^T^XEò8èÌ^O
ÈàAŽGeòäG^Bs^Y|M−^N^GM−^CVÍ¢<G^B"C=•1M−^^

BBE³g;T^CÑ^\^YÎM−^AM−^P^E^Dtb>
Èàx^X.ËM−^AñM−^Z8Èàx^P\^X#M−^Y|ž^XB"Ë¢æ\
M−^A»Q^Q^Q^Q^Qå"M−^D_ÉM−^NaÍE^XÆM−^TÜ¢""""""""#^[M−^I^Y4^YŽ¢
Åä 6H^Qa^Hõ^RM−^D"2øþ^H¬

Gâ""M−^H^^
M−^CM−^PÉ^Tr%M−^P5^BÈ yÅM−^PX^\M−^Aã¡SÙ
qÌä°¡Ër
$Èk^NqÉM−^NV^R

M−^CyM−^P.9ÜöAžåÌM−^RM−^B
ª^H£M−^QM−^NAüM−^FPä3^G4^UÄu^P09^BúM−^PmÂ^G^^t^^eaM−^\ãM−^PÐ9°M−^EA^FãM−^\L¬!
M−^UÄàá ¹UM−^P^?=M−^UgâV~!Æ^Xç^\M−^C#M−^XM−^B^DAÎAøŒ žäX!M−^K(åÐ¡Ñ^[E^B^W^YM−^E"
jSM−^P'^PãM−^YÏdcM−^]È?^UB^EÜš"

Ë*ŠGb"""""Df^PM−^IM−${^QM−^PÆM−^Ex!^Q^SèÑ^HM−^IVFÐ³áÖ^HÜç−hM−^Xæ^K?M−^B^Q

M−^K±M−^El\M−^_^[b

ʻÐSs3¹Fá

M−^C
v±^\M−^HM−^R4M−^N

M−^Z^HOM−^HM−^HM−^H²M−^S%²^K¹1BŽ1Pâ3M−^HM−^BžM−^C^\YÖ=M−^QÔHžCM−^NBüM−^Dz ždáðgæ
‘^KñÉM−^NB9ÇFÀŒÖ\^U5 ^Æñ(^WM−^Q(M−^RM−^TO^HDAÚ5(ËsM−^C)!M−^VH0Zt&g(^DË°M−^DDDDcÿ
å®^O œ4^]}7^Kz
Õº^M−^[M−$þé7þúé?)ûè2:>_M−^K ¿M−^Xz^?^WM−^SM−^GøM−^T8O~M−^Rº¬z~^VþM−^_ŸµI^E
)g9ÿ×ÓZM−^SsLžÈîÿ,Ý^T•t^#M−^E+M−^Yi!^R)_òËñYDM−^^^H:^QfF4^Y©^WF"LÊºM−^JÆw\eTUðßè
ì*;HËura^Gw£%^BM−^U1t"îÒ Ú^N^Y&æ³Qþ¶M−^Yn^Xa4ísár^[Ý§õêéM−^N÷þ¯ÿ^WÖM−^C8ÿ
@M−^Héëü;××þüÈZf~’M−^_Šû_ßý¹n¡¿×qpÓµ×m+ýM−^]^D
»[L,?ŒT5×M−^O[Œ^XD^PM−^ECŽ^ZÇþ8õM−^O÷×M−^H©M−^QgÎÈU¿M−^PM−^K$š¥¢M−$³°M−^S«o]M−^U
hió²Ã<M−^NëMM−^ZÈº+QNÔôjf^^TèÉ^KM−^PbÙ3ËÙèM−^H^UJ°LÕ^HM−^YM−^AM−^R^E!gM−^QM−^FUR
!^@Ê

M−^G^K!,ô!^G*±M−^YÇÆR3 ÁWl×M−^QæP9ÙRLM−^O^QØDj¬Ö)ØaS*y@§^E#^KB

Ë¢<fM−^H‘M−^HEM−^B^FvjM−^Bh0@øAÈ°Fr^SM−^HÈ^Pì^P0A¹²û5^BM−^@M−^A xD9‘M−^PÇ^Q<^Z

¢’ M−^CXžä8M−^B^Pí^Gö")^U1"#^H2M−^Pz

M−^^#ÆbM−^YM−^Y^_342(HM−^OÚM−^]^A*ÐM−^M^GŠ^Pd\2» ô^[ðM−^XAéM−^Dè ÿÑ^Xí
=BhM−^_Ð4å¹N7{^H;DÇz¶M−^PD0YAM−^Z
=4.ÐM−^F^P5
M−^^M−^]ï
=M−$ÂŸ^Sá^S£ ¢M−^QÇ£^N^\±Ì;BÑhzr©Ã+ò^_Â@M−^A°M−^IE^RM−^@Ù¬ŒØM^D^[°M−^IM−^NÒ^SÇ/
^Y^HÌ^T®ÉÛ$4M−^Cnº§ @é^SrM−^]§²§^HM−^U¿pM−^\ºoM−^Xq.Ú#M−^@ùy

^Q^\^QÊM−^C6Ñ^\<^YY5M−^E._mM−^Dg3ÛSM−^FM−^B
!¹^W^^ÜK¶><¯BM−^B
Â^NM−^A^QÑM−^[^\fq’ol2M−^G M−^Cî;M−^HM−^GH7M−$êM−^S^NM−^Q^PvTM−^XM−$−¶ãM−$Û;ÙÞÊ
M−^A’^TM−^]¶qâÖM−^B^OM−^N^XRPÍnM−^G^FÜn^Sîµ±M−^OM−$M−^C
M−^B#§ŸM−^_ñœÒnM−^RŒC¯M−^K¥{^? M−^^!\WÉM−^_T^[’dM−^GÂ
M−^KM−^N2(á_M−^CBðDtÜ^SkÓoz,M−^LM−^C^Pœýôô©œ•õ^?é}[tÁ^?^TõÖûm==mÚïé?ŽM−^Rá•é*W}
^?ïdµðDuëß¯ÿàM−^Hè?þôé=Á^Q×-vÿ×\M−^J8&M−^CWûÿ÷Ý6ÿv¿Ô^Q^]uÕ÷WM−^YM−^FÎCÚZnºéÚ[ÿzM
_}:h/»_«¯.BM−^_Šöýºë¶¯þýï}L−#ûè^Q^]a^Gu^TœŠ¶û^P^ÿìÎOì»ëhOk\2>^^_ë¯u÷ý^?ù

^U®ŒŸGÂß÷|G¯m÷Ü#^N^Q^]~?X/þšE|dq:^PC-M−^HM−^Cÿëétœ.¿ Âaýq^Qÿµ_ßýõ<^Xië÷^DëÿjM−^]
^OÁ^P¯ðÃ¿ïÜN^Dÿ{ÿÅM−^GÿÿßÖ•Uÿ^HM−^Ez{ÕyM−^XCo^?ù^^^TYNGM−^_^DBv² «ÿó"M−^@_ÿÿ¬
M−^X28ÿëõû?È0:ïÿú"ýmmú^HM−^NM−^_ÿ3àM−^GØE^^h¹d|M−^_^Oëÿ®gÿîßy^Q^H7ÿ&çJÿ]^EM−^SÓ_
~ÖôM^_Õ=8&M−^^¿ÓïÆÓt¿¶üýý®^HM−^BFÓu×Ò]«^?ü~ÿnèuÈÏò^E×M−^EºJßz_¿ýë^?ÿ¯}ÿ^M−^Hñußÿ
ºÿ-õôú¯gEišOññ]þœRŠM−^ZoþHMù^Oíi}¿¿µÝH^TFÕ^OÿkÚõßõÙ^NÿM¿m8M−^Nõî¹µ{œ_÷ÒM−^FM−^^
M−^_#÷°ÿéL^?^?ïÖ®M−^XM^Eõk¯ú}úzº×õýŠë•ëTÿýpœzpM−^Zk«[N×Õ~Õ®•ÝôÓ¥1ZwÒ»iav^X]−àÓÿ÷
IŽ•ëŠ«Ú[
nµ7ÃTÌ/M−^CN

!ŒšN^UëM−^F^P¿Ž^HM−^N¯ûKÈšgýUðÃM−^B#-{[TáM−^Qõ×Û®Î~é^Ø,/0‘Œ•^\

^QÌ^SXkÚPÕµ[HM−^P^YÈéMRfÝM−^Ec^FM−^X!<M−^CÎ>Ö^HM−^N-~

^PóêÔÍM−^Qý¢>¶gÿéöM−^Sa^NõŽ^HM−^NŽ\^"-A^T<^UµÊp.M−^_fM−^PLM−^N.±AM−^QG*Õ^R°P^Pa
^PŠý±^Pµ<³^S
(áM−^X^Y^^\ M−^Hé^K8^O^QÆÂ^HG^GPM−^XI^_qg65ž£@PÅE¢^^M−^BÒ3^DX:ií^N<^RM−^F
bØ»Y^V^K}6M−^IM−^O#M−^A ±D\M−^A^\vG^U^Ha^T;PM−^D[^[MM−^Fua*
r^KŸAâM−^K^\B^HEÇ3Š(1ÅÜ^Y{i-M−^HnM−^J^\^Q^_LàM−^LM−^G°M−^A^PžBñM−^\−âØ¥M−^HlM−^B
+TÁM−^QÀM−^FM−^XâIÅM−^YŒ4Ç¡!C−ÔS^\M−^BxQ^Qq^VM−^HHŽÂ °M−^M:ÙÄ ÓT^ZÃ
 M−^XPŠM−^DÉAàšQÈ.á^FM−^AM−^D^Y^RÐa7WM−^ZñMa^ZlM−^J9^*gM−^K   ŠÄEM−^L0M−^C
®ö©Sh^XOÌ<^ZÙ
M−^AÂh^Z^R−²^W[$:M−^HM−^F^HvM−^Z

M−^XÄ^XC+E^HDZ#^D^Q^Q^Fq$ØÆ;=M−^T:^Q^Q^R^N^VqÌ\!:ìM−^CÂ

^P0M−^ZM−$ÕM−^DÓM^Hµ%çÄ−^F   M−^PBÒ M−^E^\&F(}M−^U1#2èF8Í³0M−^DDFAvëGVo>Å^A4,
^P0AM−^\M−^EM−^H0BÎéM−^D"""’òøM−^Hâ<DKu@ñge^XM−^HM−^Nâ""?O^X_êë,ŒäÙB²ÍÕ^[eZ8ì/+¥
#µ
$VáE2   !v(ú;SM−^LM−^CD
^PM−^AÊM−^^fM−^HÄGÈã0M−^KM−^LÚÊŠa^W
tG^NM−^AM−^Tù^SdtfM−^KM−^BðÈ»#æóVB

-Æ£)DAM−^Hm^[GM−^D$¢M−^XÌgXM−^_"šM−^IM−^LÄ\0VB^^DM−^DG3M−^HM−^LÊšChM−^N!M−^Da^Q
M−$ôv°FÙxM−^OM−^Y³®\^[M−^T"M−^Q^XÈþ^S8eÂM−^UqqHù^XÎ^YpÊ#Ä ^SM−^AM−^CM−^A
M−^V\ÍM−^CrM−^Læ‘^UM−^MQM−^HM−^NdxM−^N^F

^FÞDM−^AM−^_^R^X^\M−^W^HM−^MÍ^Clàe^QÃ^EÙ^\!M−^YM−^[2>\5M−^KM−^A^Dæ‘Ràx‘M−^OM−^Tñ
M−^LM−^OM−^QÃLM−^N^YdM−^@<^Z

ÙM−^Hž^PG^EM−^S‘‘ø^^G#àéçi^F\ÍM−^AàÖn.^YM−^MDDDDFx^VÁS\FuÐM−^HM−^HM−^HM−^HM−^H
M−^HM−^HM−^HM−^HM−^HM−^HM−^HM−^H-8M−^HM−^L0£þ8I&AEM−^S¬M−^FqÈ^X^\«³ž_[ÝÑC98ÍìF#÷
jC 5ßª$8M−^HM−^I^Nç{õ+M−^Z^Bäs0
ÌM−^FSM−^P°C¹^B^C »M−^PÊÃù^O©^Gâ^ZXAR²
£M−^V9ìM−^EòvSM−^Pw"Y

yCM−^PÙf^\ÃM−^PAM−^D
ìM−^Lr
pC0r
^CM−^Q‘M−^Baá{^R^ZM−^S!M−^\riÊ © È"^H^X¡1Èg^\M−^F^R^Pj^\ÐTÉM−^C&9^TM−^B^YàþAqÌ9Ü
M−^Xæ^\àeA

ÑM−^E^PXæ²^DAPS-M−^P!Ï^Gs^Nw!M−^\Ý^B2ö\µ¢M−^R^S^PXåA[³ùM−^\²dkeAVTÈ&ÊM−^Ià!^Q
M−^Q ªM−^KØM−^Bµ=^N98^D"$àÁåŒM−^C^BEyÒÊÚY{A¶M−^\ŽM−^G^\-¹ä©

öP^QFæ^DDDDDDDDDDDDDEM−^SÝÔDDDDG^Q^X§ÿîÿß_¿M−^V°$M−^Yr:,³‘ÂPM−^Dauœ^DôüM−^Bö¿X
M−^J{*,¡×ÄDn¥M−^Z9^\<^SÚí[^±V)-0¡Ã
^XC^F^T^?ÿÿåžTMÔòÌ   Bh0M−^Y7)©Yd4%O^DGI^VDœ^C1L<ì4v^S2[M−^L8D|®QË^?^HM−^RE{
Giã^VWŽvSM−^\D} M−^G(wM−^Z²^HM−^HèM−^NM−^L+%àM−^YÝANü:hEM−^Uòëgeb&M−^EM−^]ÍM−^Q3
F^\"^O+,¬A2®)$"èCxN"$öK»ÓŽÓöM−^U÷ M−^J^]®M−^Z}§±ÚitêéžÙÞ²oÙoí}{L2O@M−^]]|íDçe^Oâ
^NM−^PŸ−JM−^BÇz^Kîü_òHámáM−^_:^?¥ŒEþöª¿wëñkNý^?õí=µ[ÂëIo¿M−^OßM−^OM−^Hã{cû^?É¹Ç
M−^Y^U*ý{ÿ¿•«M−^RþvM−^^#ù^C^Wyá^PA
M−^PM−^FòM−^^:

^PdM−^K3Rß   È3:åóìM−^CESÍA^S4Gw~KM−^JjÁ^\y.0E^O;   ÑOM−^Q¿$šM−^N-ò
^WÉ1MàM−^AM−^]^R!M−^D^]Ê^P[M−^P\å9M−^U^H¯^HM−^JI)ÁÂ^PófGÎM−^@ñ^UM−^Yæ^Qò^H4ìM−^F
%M−^DÐM−^HpM−^^^H4,^Pf¡I^C3 M−^H±^H2@Ïe8l$^E^H^^F^KÒ
^HÌ

ø9Ô^T^Q‘M−$1M−^D^Y

^PÔJc#¶NÊNË¬^PM−^FÁM−^IÀL!#N0M−^\YàèZ^R$^\ a^CÔ ô−4^X¡a^FM−^Z^XAª}5^H;A ì^SG^]ºi
M−^DD" ÃÂ^OÂ^N5í0Añ^Qq
^H< Ã^GºiM−^B"ÀxAÕÚ&==4ô^Z}¢CŽG
Sm7¢CM−^M^Sç*ÄÖÂ^NÓH7ÌwIÂM−^Q]M−^D(÷M−^^M−^MÑ?mz’^Od0éM−^\zzr^]
SM−^SŒÃM−^BzM−^FÍM−^FÂM−^\)!ÆM−^B^NM−^Háò^?D¹èM−^TdçdoÒtM−^[D}Dvçq’s¢#M−^F0M−^AÐ
&Æ^HM−^NM−^CÉã$9xì^XÒs¥løZpM−^ChÞäxßL6k2ñM−^EAÊM−^IM−^WsS§gùPÅ^DÙ’NM−^KæÃ^F|è
M−^XçÆM−^B^NM−^PM−^FÈÊaÍÑÄQ©WA^GÒ
M−$ñ8éŽM−^[^\Ö%Ì8O   Ð’^ZlYfÊÒ}Ûm&âM−^^M−^Cß@M−^Iti^B^OM−^GF^\^SzíŽ"-ãÅ8í
M−^[§ÒlÈâ^OÐM−^FÒ^G•Ó
ö^^žOïWH&-ýÓ^ONM−^Pn^HM−^N¿º•Z@þº»^U^?kŠêé?þÁ^QÕû_áÃúŸõ^?Þ^]&Õ¿Ž»ÿM−^B#®®Ûí¿×Oœ6
Ë^\+íŸœ’ÞM−^_Kÿôý{oVÌM−^MQÐú§í]oI¿zý/ï^M−^RþÞM−^_ú¿÷]êÕ*OÕý[Ý7º¯^DGUÝëÖM−^[÷öõ{ý
•º®àM−^J~µM^Eíð-×Á^QÕœ^DM−^WÓ÷UN!~ßIÓé«/-°M−^B~ÝïŽœ{ü^ZmM−^L3=\M−^LJì>M−^R²8cpCI
êÄØ^Ž9

"Úzú^HRI"^WõîD^D¯Cû.M−^Hø*ÔGM−^JOÂ#¯JM−^D^W³òÛ^?^[åM−^B5^SM−^B[!^G*^VñáM−^F»^P
^Kõì?ªûÕèRJM−^Vj^HG«¯â#lW%Ã÷^?y^P^_M−^HÞéöAM−^BM−^NS¢àM−^[^V=ú^^^Z¬−ëAM−^Gÿ×M−^S
ã^HÿZD0ŽM−^WÈ.ÿölY¬!M−^Iu-ìè

```
^?zË^^^[M-^Ssúsø!çðG°kÖ^Q^D~>¿É^NqÏM-^A^UM-^A^?Œý{¡«M-^RM-^D¿¢Gé$g"u/M-^PîRÂÇ^H
^Sæ^?ßÒ!oÈžgWý^FGÒM-^QÂ^Q»ôÕ»äM-^\§:Å^QG^E^?¢^Sµí^HM-^I+M-^Aÿ®þýB^_í^B¿ÖM-^E*
M-^W•~g¢p•œýOÚ#§M-^W*µ}M-^HM-^TmÝZ!ïéM-^Z"çô# M-^F³ªôI^[þß_µëß¿}^?}º×éÐ÷×ÿ _DÒýô
þùcM-^Bûl[m\¡p•MŸ¿ì ïÿý-M-^];V×uúûs§êM-^Vj_Zýû÷]gT^H^]§ýœëBÿÿÁúÚ^?K_e×ý}÷Ý^?ýRSk
þÖöÎM-^UX*I^DM-^B^?×ýRÝM-^DÏnÐ~-M-^PÿrCýoýnúLœjM-^W©M-^Oö0¶-«ÿµµÒlM-^QœÞú^?ïv¶»}
- Ž¿µ×S^Wz
;^D^HM-^NŸ^Zm§ªz©M-^OáíðÿTõ^?M?éa÷ÿá--ðÓéêÂ¯œZÚ¶•köŠýRI-×ÿl*Œ±Ø!Žî^V^XVÖéÕ;«ì+
{M-^MŸEý¡Ãö*^Zº^DGJ¶¶Ðl4¡¥
}M-^FM-^]M-^DM-^B(^?Ú°‘--®Ã     <^Q^]8Tô^HM-^NŸM-^RI’°«Ú¿Å^ooŽ^HM-^NM-^Y^XéûCl-
M-$ÅÇ!^G>0X0M-^Q°MM-^QbpaO$ÔÇQVlM-^R3^D
cc± è^U^[dqS#æÕÃ
^‘Á^B^D" M-^N ¡M-^DC^T!GD\ö84ìØzm^NÏfÕÙ^_<HM-^BT^ZFM-^D^RP©^\2â0ÂUm4|^[M-^Q00Ä":
BØšì,A^QÔM-^B=M-^PØpM-^I@^WbM-^C^PM-^TÀ$q^V^H^XBÚŠ#T.^HM-^N»
Xá1M-^_^O^R&    cM-^MM-^JhØ%M-^WM^FM-^C^[^PŽ^YM-^C
```

&!^QÓ^R7^\Q^V^E^HH°.−M−^JM−^K.M−^KìKqQ!M−^BM−^Q ñ^NM−^^Â^Za^QÓLlqLM−^E^^ÖÈ;Šµd^]
Öª

*anÇdHAM−^EM^F-ZÚk6^] Âd#ÚM−^H°a[Šµ÷M−^H¶^UAM−^F^P M−^NÂ2éª^O&á^FM−^EŠ
M−^XLÐM−^C^D^N^ZéØO°M−^COM−^F^P‘M−^Yž^PjM−^AŠ^T4^YPM−^G

M−^JM−^Y^Xè^XL§B=M−^F^P0M−^AM−^B^SšÝM−^B
^F^SM−^CM4ÊšM−^LM−^@M−^C ŠM−^CAM−^Y^PÁ8M−^M^FFM−^@M−^XL Â^PÂ

M−^EM−^D^XBÂ^Z^VA^\ã ‘M−^AM−^DB±g^S
pÓ^D""Â^RCaDFÄ^XB#B"Â^Q^Q!y^_#ÄxŒ Â^Q^PÍ²BM−^B^Xµ &M−^ZM−^]r°M^H0M−^DDDDDD
DGM−^HM−^HM−^HM−^HM−^HM−^HM−^IÙ«NM−^DDu^V^X_^]³æ[¥^F^EË@)M−^UÍbè¥eò
M−^XGM−^QM−^LM−^NÎ2OM−^UÒÕM−^YM−^YYDM−^S2®*Y^^;Ä]^]¥#žYØ²0M−^HhM−^T¢ªEâšM−^Jva
M−^T¬M−$DdG^NBÌM−^OM−^QÈÁM−^\2;/^Yå@R¡^QÂ^XM−^KM−^FÂ^"^CaM−^[#M−^FQ²8EâB1M−^[F‘ª
fM−^OM−^F±M−^@f=^QðNM−^H$^Pð^^UeM−^Ng#tM−^Hk9ŒM−^FÊÈi*^Sr°M−^[M−^QG"^NMÊr¬M−^B^N
F<ŸCEÁ°Œk

²8h6EÃ^F£0M−^K²ùthM−^Mäá®@£M−^HM−^\^X.M−^O
l^\×^XF#ViM−^^ÈáM−^V]^QÓM−^]M−^I^CM−^WM−^B#rŠUM−^]Íä6^Nx »M−^HfÅ#£M−^Yüø^^^[M−^[
G28l#M−^Y^\^VO#^@x,^[^Fr8^^

ÄpÉ^FøM−^HM−^HM−^NB^N^S^Q^R

M−^CM−^U^B""""",Â#M−^FJ6Ï^F@3M−^WM−^Há³B"""""""""""øM−^LDM−^Aèr^[^FÍ^B""?ñ â
M−^L
C_M−^P<5_â^X’ÇiM−^PÈ^Fh−ÄM−^B¥M−^PUM−^BPT^PM−^NqÈ^^^[M−^N@M−^S
M−^BM−^G Pä2^O» x2M−^NA^\M−^AážäG žä^O
+3M−^\r^G• x*y°M−^Lr^EM−^CM−^PjrÜ¡È^WM−^B^YcM−^Vä «>M−$^U\ðx$9^B,M−^C^N{Vk=d2±^Q
!HáM−^Zc Â^WD|M−^N2ñN^\ð7#£èM−^LÄ^Y^Od

9ª!\áM−^YAnw#t""L2<]M−^^ËáM−^U^D+M−^^²M−^IM−^Pm²M−^F^Ss¹A

æM−^CážM−^CV^^
^Z œM−^\M−^VÎr
z^PØ.h _C«(rÇ8eY^DVDAnqÊ^C*Èe^T^S^\M−^\Ê9

AU^Q^G7^YÎTCH^PÊ

9;*gs^Ng<^]‘M-^ZsÁÕM-^\¹ÉM-^Q0(M-^HM-^HM-^FEÂlM-^ADÛM-^Q^R M-^DAM-^Tæ64)M-^\lDq
^Q^_]^?-bÆ^Pg:^Q^?^EM-^PM-^MM-^P!ÿÿÿÿüM-^@Ñ¡Ë?eM-^[Z^H9nxËXÈ•AM-^VñM-^VãÅf;^Y&vR
^HM-^^ó-dÕ4^_~M-^CöM-^Zÿ÷hM-^D^]ý_ÿÞN^?ÿÿGjm+ÿM-^FM-^]ÿè>^U4£Âû¥¿M-^F©GûúýØ(£~K-
,ì^PÈ^^BÇO-Ç
^FŽGÎM-^HÆh3V]^U()^RM-^Hc^H2ñA¢^Kêdä^PM-^T²äN>Ã0^Q ¢^XÚÉàü}ÔKM-^OBns^GM-^YIÙqB"
^E^R^^B^Hb*yNÑ^EÔM-^N^YÅM-$"#ÇðM-^AM-^T0M-^C^D^ZŸ^X!^F^Pµ^HI9M-^EèM-^BøDÀÁ3¡^Y
M-^PCD-l^P6ÍH^Q^KP³¹M-^D(%%   BM-^AM-^]^QÐ)M-^N-^QM-^H’©VsM-^V^Y^N=^H0DKdàÜ^P2FG
M-^OM-^N$0qM-^RÑ^PÈM-^P¡^F^PfM-^CÈÀEA¢$^F^P2,^Y}ôûOM-^M5AŠ   ¢XM-^R^H M-^Aà
M-^HN)ÉM-^PÔ&M-^]á^FM-^YM-^XÓ»^H0D9Ä^YM-^A^PÛ^H5JXá¡a;D²^PzM-^D^ZiŒkvM-^Z^?M-^We
ÎM-^CwM-^QG^[)Ö^SEÐ=^Rw^H<ÐÙ^Oè*IM-^D!§-Êz%^O¶N^KpM-^Q^[M-^Fë$8åXM-^V==^RpÑ^?:eÜ
M-^]M-^MM-^SM-^BôFM-^EÜ»PM-^]^FÍ^DË^XDM-^^úšDQÜI;M-^R^\ùëM-^KM-^J-ÎòM-^FHhºDó
M-^Z^DŒi8<ãM-^Dé^G^W*!D¹M-^Q^N0M-^Iu!>H l¡M-^R^XÐ M-^CM-^T9M-^GÂ>1M-^B^DM-^OH
M-^Jì3>^UÐl]^D^\jÃ³»Dâ,ºÐtGM-^L\M-^E^]6O^GåM-^N{ M-^AÉ^A]!wþM-^PM-^Fßß^V^Q^]{‘ÚI
^Ø}^B#§rM-^\^PžÐM¥IC^?A6âé^Gqm^B^N,WºšoÛ^]^DÝnM-^K^\ ß^RM-^G   ð~Áº
ÂýM-^P twbM-^W[}Cý?I-ñI?÷màÖM-^U¶è*TM-^W^?§í^XM-^G^DGJM-^P~M-^_ø-vé/i/ú}¶¿eM-^NV
M-^Rf^F5-^?môM-^RýöÿO×÷ì?Õ?ý=¶ßßûõ¿Û|^?û¥t¯Š÷oê×¿M-$M-^^œX?-µM-^B#®M-^CÅkëTM-^T$
M-^R¿ìì=µ»ì$•ÛtM-^_¯øw^DG^ôM-^]^_WÿWöÚã^N×NÈ8NM-^Vö×»íþM-^WíÒOý2(^VÞÄ’^DG_"¹Á^Võ
wíµ^]xM-^[AU?ÿßÙ|z^Q<^R¶^_ÿM!² ¿ÿí¿^F:M-$M-^R ©^DQM-^QG,$M-^HAoØM-^QEÇ×üM-^Bo
^UÖJ^PB»Ã+@ŽŸïM-^F$@®KM-^F<2Ç^?ëCM-^FC^[M-^OœîždÂ^\³ÅâÃIM-^HduF°bœ•^«Ã!M-^MM-^Oë
^H^?M-^IOëÿÁœM-$DrM-^GÖ^Z<ZÿÑF
þ¹M-^Zÿ

:êM−^AM−^G±šD^]ßäHŒýWî^[ÞŽA^_§M−^KüúõÊ0f~f°M−^I£å^XM−^C{M−^Yßò^V
©M−^R
»ÚO§Ê0g~þEM−^^U¢>]^QÞ~Dð^RI$Šxy Å^CÿêF&ôï@¿ïðýû^PÞ^SÐ_Šýßû,M−^\?Òÿþ ÝòÆM−$^Z
å>"−×CëAOÜ±MÿéM−^ZeÎÒù#ÿ;#ŒÔ_tµOõKþÿýVòM−^_ÿ×OTßý=SíP":ëûÐJM−^RúðÅÎ§úÂðLM−^O©3^E
Èâé^D^^×UVÛß¥û×_ý»   ß®•ª¶÷_w_÷Ûëk~M−^RI á^G^N^Q^]zYM−^N"21¡o÷ï×ÿ]n÷ëÝÜé^M−^C
mmoÒÖýsM−$ÿÛÿ¿÷Ã(^?ôM−^RI{ÚŸ¶éö©ÿÛ[Ýmÿm.îÒû^KtM−^^M−^U~é7ýíªÃŠÿôŸÿÓÒo×M−^FM−^P]
^?MivÐ":þÚX]ok^E1=Zý6ŸÚúÚÚ3ï¿NÖÖ÷¿µ×Swû^NM−^_úkIÿM−$©⊕²àM−^MÔ4×jÚë
/í^?M−^C^E4[jÚE^X)ÏM−^FM−^R!à¡ûua/I×[[V^Z¬0M−^QM−^Y¥i0ÕM−^RàÖ•Ðki6M−^Wé fû^DM−^J
M−^WH^\S!−b3^UM−^Nìv^P":bMÈLkj{LÅdt   ªª^\M−^SãŸ"é°XM−^IC-ŽM−^X E=µŽ^HM−^NM−^[
DÇÃJ^ZPa^B#«M−^N^Z ó^FG^R)M−^F^P×0-(È±cL^TŒÙ^]"cM−^Q \VÅ^_^D^Dô^P‘M−^Z^X]Š/â
M−^XM−$"ØM−^I^Xã0^\^Q^OM−^EºBA+LUM−^\vÄ&øÛžŠ.^Z
DÂÇ^\Ð)M−^K4^F*.)Š$á^W^D6^]M−^JM−^DÄ&M−^H Bâ*ïÚTÙ

:%8Đw°M0M−^ZM−^Z^SJ^X IM−$Ô4};^H4È#ĐM−^P©ÔÖ°ÂjE−M1nÂ«v¹-<±Ê^\ Â

.÷gÀM4Ž×SX[^E» ¡^XPDu^PÐa^H°M−^X*^FYÓAM−^V:^Q*ÁÈMM−^D’M−^U°M−^EM−^EM−^F^S
Ã^D^Zk^VF8,^X":ab’S.M−^KŠM−^DC^H§M−^AªŠ^PM−^H0M−^HÒdQÐg©4ÉM−^Ng8æ× ÁÜ3t^X!;
ü0W−Êq^Qdj¥m,ÀšEÁM−^T/^Qa^HM−^N"FS¹Ü¥ÓM−^B^Q^Q^PÂ^F^HDDAM−^BÄDE2ã^V¢"%LPâJÐâ"""−
E°¢ÐŽk^^ª^[®^T<$[§Ñ
È¶Xç^RE:(GfšM−^AäM−^Dq^^eó¹ÒlèM−^\B±M−^[ÉtTfB^QÚ©^[D~^HM−^NM−^NíM−^XÍ£M−^YtM0E^N
3%M−^\M−^NM−^KM−^YKDŽ!SG^QpåÆUr:.2\S^HØl0M−^Hþf
Æ#ÌM−^OM−^^M−^KM−^B^WGPW#^Nåu°Ë("ìM−^OM−^[^ER^Xm^^dpm9^WM−^I^QÌM−^QM−^W

³M−^FG^YF\ÌÈM−^N^H]M−^XD|ÆG
"<G"\0x

^W^GI"M−^F\M−^NFf_.^[eÑ^C^Y^^.^EËçÑM−^@‘£0^X5¢:<M−^L#4G^C^DP3K³^HÓ.^YÉòù^\M−^HB#
åÙ|M−^N
Ì#M−^Q¢.ÌÌº.^YË£q^\^[

ã4]^_^CÈM−^NM−^KM−^C^Dp.G^Fbñ|ãM−^B#šM−^HM−^HM−^HM−^KèDDDDDDDDDDDDDDM−^BãM−^H»B""
""""2à{0!pÈ^E¢àx)M−^QÃ$6_ãÐM−^HM−^HÚM−^P7^_ö¶^TWqh^? x]H^^^Z®aËr^E^NC M−^P@¬u xW
!M−^P^G^NHrÇ?^P<^ZG xM−^CM−^R^\øB^NAM−^]Èej]M−^P>rM−^PC@ä^O^B^G8æsÁoM−^P<3Á^FÑ
M−^_"M−^N[M−^TM−^B^\¹¬ÀÈM−^CM−^PhM−^C öSM−^WCAÜÀÈ^!M−^UYDÈ7^\±Èª^H|(M−^\^PÒ³
M−^\M−^E²ÜŒLM−^GM−^Y!È/Bü¢ä6^NN^HÜÃ^Nä(BV_^U^GM−^BM−^G/^OÄ$^TPC?^U2(åM−^FC^DÉaD
^Q^G=E)^PÎç^\ÁM−^U^EyM−^G+M−^L*VM−^D^PrÜáM−^T^FPM−^CA^]M−^T¬¡Í2M−^KOM−^D<&F9È"
M−^NUM−^U¡^EÄ^P«^DA×^Q^Q^Q^Q^Q^Q^Q^Q^Q^Q^Q^Q^QgM−^Uf²M−^KM−^U SíT-M−^L)M−^Q'-Þ""
"#ÿÿM−^P^PYŒ&žwOþM−^W^»ÖÖÅ^ÕM−^E^_ÿÿùMM−^A¢?^Hgf^Ð9dHi'−ÑiY$Ëäx-("^RÊ^%M−^U−M−^V
ïM−^Se©Nìn^PM−^K)^R^G^DÓ:²^H4^HM−^NM−^HÈ¬FAhÈ^PÊ-M−^]©JR2LÈ^Q]HpPÓ^DÓÞM−^\M−^BmQ
ÚŠM−^]Ý í0@ô^T0ú
hM−^_^Nî»ëûôýM−^\{²Ç;íðM−^CìÏ]ûÿªDAÝM−$'M−^MM−^F"ÿÃÐ²M−^^M−^WõûWÍ7Ó¿µ_^WM−^Eöÿ»º
~ÂÃ®^ZÓ²M−^R-~;áê^KŽ-§ÇxõõÕ
M−^NåuAêGðE?Êµ^?^^M−^H² §êvT³*+5£5M^R^E0ÌM−^RÅ M−^[DM−^D   M−^QÑ^\Â^PÈ(M−^X
B
hÖ^\M−^PM−^HìÑíÏM−^GÈ1IqM−^\M−^IlGIM−^X"^YM−^QM−^FM−^Y.^VÁ^Pîe2ô$ófv^KM−^RÀå[<
M−^M5=M−^R^Q^UÎ M−^Eò^N=M−^RÓŽËæ2(M−^M£4GÈM−^B%Â^XÌÂM−^QM−^@¢!â^Hg'¢M−^EM0M−^DD4
^Y^XG^X xMÝb^XNßxAM−^D^O^D È'\Ì^]

^\hgQ
^F^H8M−^Hd£8M−^HìM−^W^Hf^P f¡
«#^C§^Q^F^Q^N^Y.^G^R2^Hwa^Pº^HM−^KM−^K^HC! AM−^DÖ^]ÙÐ6)Ú@ËA¡á^Qža0M−^Z^O@ý;^H<7ð
M−^XCAº&9CM−^]Ý§'M−^PM−^Ziž([éM−^D^Zèz
0M−^Ca¡M−^Dô−^KM−^OM−^QGOr;ŠM−^\M−^^t\á^K]5ÝM−^KM−^FE«ÉÞKšM−^^8H^PM−^KlÏM−^Sì t
^[0ùÇ*^\«!KE0Ñ+^N,"x.NèM−^_Ù^Né^V9M−^Gz&ì§dpM−^R8¢(îPéM−^Xr^R^\M−^MÚ/òúÂM−^VM−^_
H³é^Qã ØfM−^BsJÚÈû¢^\w».3M−^NáM−^Pº^^öM−^A^Ctô
Êòzñ

±M−^A^C«¢}^WI â

µ$^[H6P^D^XT^N/NÊÄ)   Æt M−^Héè^ZEÒM−^K^\^P6’Ø°DtÚ^D
M−$^\q¢M−^Q³^NT^SÅ¶é^B*^ZžÐï’M−^ZoM−^Qº^?^W^VB^^\^M−^VÒ^NM−^PljßW-^B
ÅœA^QÐtaÂy
;]ôM−^\{oI’±ÞÃtÒNM−^S{kžM−^N>ÈH;M−^Tê^HM−^N»§t^HM−^NM−^[Ý_±
ûÕË}KÕöýû÷Û¢:n^HM−^NŸÛ¶àM−^X-÷oÞ)’÷KÓœ÷ï÷M−^V9ZÔG¿•H3:w-ßäÇ^KM−^C^Oè;õÿÛÛŠÝßœpDu
tþûôM−^WÓtÝ»Ó{•õowM−^GÝscZÇNÚ^H¡ÿ§M−^_

^\¡¿ïz}ýöÿªŸÕî^Vü7Úïï_§ø}wÈ_J^?äAÏM−^MM−^Q\¬ñ^^°DtM−^VÂC_ô!ïìæ^UM−^Q¹ËYÅxM−^B\^Y
M−^Ld>«ú^?éŠ^Yt=µM−^O^ÛV‘^?þÙìzöC^NµxM−^N,[¿hMM−^EÄÀ?[]Ë{ßâ8M−^CM−^Hð]M−^I^Yi

^^õéyM−^XM−^[QM−^W¶AÄ"‘^?R^HSCÒ×bÿØôï

M−^CM−^LÕìãðW
/û^?Ù^F^E¹.^PM−^OaM−^FBÄ«×Þ6¡1^G°vSÀµÛ^G^_ß°wù&^Oß•È"w¡àžûÿø@òúŠM−^H^P&ðË^]M−^RW
ôÿÒM−^Hg^\¡ÃPÛ¡$?ðÃ-úl3»ìÍy.M−^HeZÈ# G8yõ−%$AÇò^H?Ò_^?Ë #Št:^W   M−^RÏÆM−^[^HøÈŸ
ßþgú&b"}æŽC%3Ñ^S¿M−^Q¡dM−^\Îu^SÏŠòt&M−^Fº~M−^[úÉ §Š
Ò^OM−^F^U^PœÒuû^?^?M−^L7oÑ4]TAíÛûï•ÈM•L>š•^KüÏ4ÎM−^N^PM−^OÿM−^DÝ-:í³RŽüGûÈ@"^W¢−
>û(5ë]ïø+^õµúŸý;ûŸè^?Ó•^?¿ßîŸðM−^AÚ^[ßîtê\/KwèGk¶ÙÑ[÷¯öí»¥úºYÕjßnÞM−^WþM−^_gOÿ
_^?ß§^]M−^Pëw[ÂQ^^W÷áëéýM−^]=^?œuœn»Û•n•-/ûûÓÖÕûÿøzm^QM−^GM−^Bß{
)a^V]Ÿ^QCÌ^?ü/Ø[Û_ÔÇ¥}ú¿^?ëWöººM−^XÿÛó^KÞûï¯^^ZWÜ>ý)^H÷°M−^GØCU<M−^WœM−^Eºµ°°ÂWØ
I6øa&^ZO]?
&×µáÿ-û¬4M−^XÒ^?@M−^HéµM−^C^öÞ^X−²^H=[àÈè−ìvpXaLýŽ,M−^I^FM−^BTvG#^Kèj‘öÒM−^GL5×O
Ÿ^XT;þ^ZÚ¶   \<M−^QŠrL−-M−^E_Ö^X+-Ö8ØiC^D^HM−^NM−^OM−^Ké^Y¢>^H5M−^MC M−^E±Q^T
Å5^PØÍM−^M28±HM−^AM−^AA^W
4B^[õ^_^BäL¬äÄ$(:LS

Ÿ^WŽ¢ M-^HéM-^F^P":@Î^E#šM-^B#©Ý Du"^NM-^N‘M-^H>¬$h
^X4aÓ^\^XC^E3ìŸÝEEQ^\XM-^B#ŠÂÄq M-^UM-^N"C^\qÏ^D^Q^A8a^KM-^F•

$^N¢7Ö!M−^DìÖžM−^KiŠ*M−^XM−^I8^TÇSC‘Á30HÛØ¶*8®g^WLIM−^NM−^B M−^P"ã Ó^\±ÜTÎ¶-^Hë
^Zj\(A«

M−^F^_ÓÕñ^FV*ÁŠx^H©M−^MM−^DÁS³XM^YìUB
Xh5s@UAŠM−^C^H=S^DGS8AM−^DÂŠM−^X":Ø’^F^SÛ?M−^BÝŠM−^AM−^B

M−^L6Âh3<2^VÑ−E^S!M−^D ÔEM−^VHqÊr78ðg^C^DÎ^DM−^AM−^\pM0M−^DDZ

M−^YH−M−^DUÌ*3‘Î*^Pa^CL("B
Ž|M−^CM‘Âa^KBAM−^Y^]^K9^VM−^DCB"

ÂM−^DØ0M−^DHhM−^B&M−^DFw>M−^E^[M−^F""""""""

œM−^BÄDDDXB"
^HM−^Hâ""".vTM−^Dk^Q^Q^Q^XM−$"M−^RA^Py^RM−$¿WÿWÖ¶M−^SL4M−$Øb&ë‘M−^DÜ\^]NÉ"UM−^Z#
Lì^[3M−^L^BAM−^QØR¡^W)òñM−^C/M−^S¢^EM−^ZÑó.28SfUæ¬žM−^D‘IoÈÖM−^H^PC^AM−^\¬2:#¢^/
M−^_F2;&lÕM−^]M−^M#hÄG
v8RM−^^LM−^T2âM−^XM−^HèíòM−^S#£±M−^Qèì^U&hËÅLÍ².^NCDl0\^X/Ñ^[M−^Q nG^Fæ^Q<m^W
"8M−^EÌM−^N)|M−^N^[lE^W^ERà²GÎ^Aâ^QÀðy](2M−^B!M−^]ÊM−^A!M−^Y^Fr M−^C^CM−^Xq^V\^Y
M−^I^@NG

^ZM−^CLÃ#M−^A¹P

M−$p‘ör0vN^FåZ>

^W

^QÁšÆb#M−^A^Fhº#²9M−^W^FÃ^YH^F^Hã0fŒž!¶o8ÌòM−^A4$^Wâ

9M−^G^PËM−^C9p<è ^Z-^P‘q^Q^Q^Q^Q^\ B"#¡^Q^Q^Q^Q^Q^Q^Q^Q^QgDM−^DDDDDDF\2^CHŸGQ^Q!
Ç^QÕñM−^FM−^Y

M−^P8^_Å ^CÀÃM−^PgQzüÐ£¬M−^AM−^X^P|l/Ç»^5µ!M−^P^Zc¬M−^Aâ9àª^PS^\M−^CCM−^P
Á^D^H^\M−^C]^H°sM−^PS^\M−^SM−^YÈm M−^CqÈeYÎaÏdÇ!GR^EÇ;M−^R^\ÃM−^[È^SM−^NEr^D^N@ð
Õ^\¹M−^P(M−^B^D^D4 Ì9^Cø!M−^TM−^\ÐA^G ¥RM−^P}M−^Aä^O^S^N9PChs¹E$2¬M−^FM−^Xçsù^Xä
QÉñ

È3M−^]ÊPChru^PqÈM−^V¬ãM−^TåVD^\ÎRQÜ-   «=M−^Rš M−^EAÃ;M−^U¹M−^UM−^E9U^TM−^PM−^Z
Q3OM−^DÑ²ÜàM−^D^H²ès^Da^NäM−^UM−^R¬ RnA*3M−^\aFd^X³M−^UM−^WBnA^G(°ãM−^\(§!¢£-^U²
«;M−^^ÊM−^YpJ¢M−^\Îbd æ^\«+pB^NP^QR9M−^G0ÃM−^X9žM−^PM−^HM−^HM−^HM−^HM−^HM−^HM−^H
M−^HM−^HM−^HM−^HM−^HM−^HM−^HM−^HM−^HM−^HM−^FT^TÈg^Q^Q^Q^Q^Q^Q^Q^Q^Q^XM−^OÿþòM−^Y
^W]^Rí4÷ÿ^^Uinž«Ù^TuM−^JM−^F^T^?ÿÿòÙ(:rÒOÔM−^[ª£ŽM−^UM−^SzIQ^KºæEA2Ýd$M−^EHX^T
M−^HM−^JÍ¿í^FM−^Z]ß»ÛŽM−^Urºò»M−^Væl^YCÓ-ãâÖâzÐ_ÿïï¿uý5Zû÷uäÜM−^QYÜÒM−^]M−^E^K©
M−^RÚõ^D^HTæGÓ3ÉaË}^Y^X3 §Å:M−^YP0@øM−^C.gzàM−^YM−^LM−^UM−^VA³ºÅ:M−^CM−^QÑYGe
M−^CD^^
,(M−^B@ŠÎÐD&M−^B,Ð)^Y©q^BecM−^UÒM−^A^AL M−^CAM−^DÁ^Fo^D^XMM^EM−^K(^T¡^WFÈØÍ^F^H
^ZjŽS AM−^RÁOM−^Zq

M−^NÈc(^T",È³#^[.£êôÌÑ Y^]Á^GM−^ZÂÖM−^^^P‘M−^Da^FM−^CÚ^PÂ^OL!i¡ÙM−^XðAM−^D−5P
M−^\M−^_

v^PM−^F^S@Â
M−^L ïAM−^DÐf^X ÐmE Õ4ôïF^\¡Ã¥I^F^SÓ¢XâN27§/.^V^?4^DM−^CM−^HŸHw^H<hÃM−^ZÞ
¢PqÃet ý   Çq^V^Q^VÙ
žAÌ>\0M−^I;Óß^SÆÈM−^BzM−^RâM−^GlM−^CM−^E^Q]§−Ç0zmM−^^^Sh^P:%M−^M^B#§:6Ç^TGM−^M
M−^T9^UÉ^NTI^CutqÊìB
M−^RÐæ
!leàRòÊM−^ICpäHdr#¢îaÁ^^Y!èM−^T^Tìm&è1¢XúA^QÓbÕ^Kd»Dü?Rd^DâÒïAŽÝÊ^_0á8M−^FM−^[}Ÿ
ì<&ØZOM−^J^D^[^_gœÍÉ’CmÃCBìSM−$èÎM−^A¿M¿~»œSl^Q^]−^GIëÛÓo~^HM−^NM−^[§]’M−^B#¥
M−^Eé•žü6øOi$^[M−^Béìzéûõ
ûU{ïÍŠ÷ÿz-•ŸM−^_o^^M−^[÷Ÿ^W_¶ß_×÷ïuû¿ééÝ×^?ë§¯íM−^QÒ¿Á^QÒ¯Õ¿
ºÒï¯ÕÒoŒÂöM−^WS^[Õë’WM−^F^Q^]YµÂ^Ußüâÿ-M−^PBM−^Tè>ÃYuêõÓÿï-ÿÿÅM−^QàM−^_@M−^_^Pî•
¡^]^H±

aM−^W^GKÿ@ÓÝ÷^?ËM−^Cã^QõûM−^Oýég^C×OM−^Xdq6¢5^SM−^AøÚÝVÈbM−^Cÿâ=oS ^?M−^OýûKÞ•ãÿ
M−^Hñ§)ÁM−^Oa_öëZîœW Ïä ÇU^Kõí ¯•µ ¯ŸM−^ZM−^WM−^DÇYø^Q^DM−^EM−^Z,zÉM−^Nx)D^Q^äM−^G0
êõóÎIÎ9áoùûöM−^AM−^T±M−^SÂM−^L^?ªO_ÖBM−^NgUú"9à^RÓ^D:r$Þ^SM−^RàM−^HZêÐM−^NM−^Y

é¡û_M−^D"7þM−^XoŒz^\ýúoÿORÒwäöjñ]^RFü{^?ÛãúÿÿýÐuío×{œoîýû~^Wú^GêÎM−^WùÓ^?ÿÿÝÞ²
^_ß®º¯ÿÁ^Q×UkM−^]^UgE^?ûdM−^LM−^Dh;^]®ÞÚvºûM−^Pí*º¿îéÓ-×Ýj-xÛ!ß÷{iõKúi§Šþý[ÿ[OïÛ
[WOa-œÖM−^WûìzûÛ§°×õ1jë^?µýŽ-6Ö÷^ûI^CÛÛ«ÂNŸÚÛý¥¶¿kk¶^V×UoµÖíM−^Džaa-M−^DõhM−^Nª
^Z_PÂÅZmM−^D»0M−^WÛKDÇþíM−^DM−^Za¥{

+i^RM−^M8a&M−^A^TöÁ{   2^P}zM−^J3

èA^QÓ^TÄ^]¬jÁM−^B_qTÄîE80ª^XM−^JcM−^F-¥"M−^^¶M−^[kV
^H¡ÈM−^PâÄ(

$M−^EM−^[6*"^HM−^NM−^XM−^JM−^MM−^Jwža\m2^R^[^N[M−^Q^KE1@M−^X!M−^WLÏM−^Z^SXbM−^I@
!vÓM−^FÈâÅYp *a^CbM−^]M−^J^Hr^\LM−^E|TX4ÜM−^CœŠM−^X_za^F^Piâ¬5HEì!’D}á0Q°M−^Zb
M−^_T^Z^VÖ^X[µ@Ó²f^BaSA§«E ÚgãžAM−^D"^] Â

)
^Pwçñ^Pa^Hk!6^S M−^B

÷îFè^Yu^WÐÂg^\î^S,t^Z^V^PgÃÂ^Q:ät^Z

^QUjÕÄDDNëšD3š^K^Q^R²ÄM-^I¢_^FM-^DY^VÁ2±3M-^B:^Q^Q^Q^Q^QM-^TžM-^QÇ=¶^TDDq^Q^Q^Q
^QÔb!M-^N×õM-$þ²n¶á^PM-^FâÕ&öM-^^[M-^OM-^_DK8)xÆ\9ÄUbM-^Q^XÌ#^HÛ;thM-^O"|¥M-^Bæ
M-^HÏ0M-^L#¿fÑØ":#ŒD   ^TM-^JÒ;^CM-^HâM-^]£9^QÑ^]^UDhM-^JtF"áI Bà¹M-^KM-^UÒM-^A
AÀ<ÈM-^@Ô0eÑ^\4M-^KM-^C^D3.
M-$p\§^F E=^HM-^I’"M-^S0ç²7;M-^Læ\^W#^Qp\M-^NM-^NM-^Hú0M-^KÆ^C(M-^T^YpM-$pC^AHà¹
ô_.^D^QM-^Da^WÏ^AM-^B^FM-^NdpË<^[gM-^B^YäùpÛ/^QÙäc6M-^L^Y°.l^VM-^LÁM-^]hDDDDD[Q
Àâ""""""$^Z^G;M-^HM-^HM-^HM-^HM-^HM-^I^DM-^Dj^C0f~1^QaM-^\e~?ÿ²^GM-^D²š@ r^OÄ3^\
M-^Aà@åM-^OM-^P_È^^M-^\M-^Jä^K0M-^CD^R³jAM-^[M-^H^XM-^@M-$2^CXrn@ðÕM-^B öSM-^PÐ9
^B@þMÍÇsM-^N@M-^A^GH|/Êsá^QÊ^HQs9àªÈx!ÜM-^F&P±Ç0äM-^C!,-,ðQ2M-^G"9\n;M-^\L«9ÊÂ^V
)*Ê-,r^KêQM-^B^TsM-^L!4.È1^D çrM-^K^H‘rÜ¬"êCD^^ÏM-^EM-^NDrM-^H ø^?%fPR^HÜM-^F^F
M-^J^\•<^\lM-^PåLM-^T^PÅEA[Š""}^HM-^HM-^HM-^HM-^HM-^HM-^Iô""""""""""""""""!M-^Tç
Ùs^W3r\DDG•ÿÔŠ+]^Gué¯ÿü^WµÚV*ö^UM-^E^_ÿÿÿÿÿÿM-^VžRÁ×Öµ§é^?M-^Vý\^M-^VýëÿÕ¿ëÿþþ
M-^WM-^F¥š

Ê|h_¹Ùgs°&‘C~EBB,îŽldxÜx&Xá:M−^U¢#äp7ŠìM−^D^_^Qèú±>_O^_ßõÙ^E]WîC‘åAM−^G;‘gçi3^"#
Ó/M−$M−^H^P8;¡^Y^Xl{Uì{%^GÅñ^Q²^Q×
^F^SV^PM−^LrÔ[^D2^CM−^J−ªêîÉGâßÕßýœéwî¯þ¯ÿ×-oÈGKPM−^]üÅwo^¶M−^G^)úÔµ^VÎÚ^Oœ^PLMÔ
^QÇ³BhM−^GM−^WÂðøM−^J^Q÷ü−<M−^Oi^Gcè^Q^]sÂM−^BÁ¡â+bŸÖo
k^Wâßÿê[^HIïÿš/
^[¥íjºôû^M−^V;^^Zµ^F
?ÿÿÿÿÿÿÿÿþ@‘+M−^VÒM−^T^S k²l^QrºVGM−^KÅòl^T^PM−^[FVQÚM−$W^VóµVGM−^LM−^L
TÆDã\\dM−^YM−^U^RGaÔ" î^YW^Dû
¡jM−^Z^N!ÚË^\/pz
ÓßþD^^¶M−^R\2ÜŒ^FÉ^Oõ«mM−^Z^_ñý$M−^\h6!ÿ}±Ã)äM−^UåAµ§ÿK^?o^Vß^?¯a¿A%íõµµþM−^[}¯Ú
üxTÑXUß¡P¥z{NA¿8}ùT^RÊM−^OäLË£2;ÑM−^Pl-ä^XÔM−^R
o2M−^Do%M−^HM−^Fe8M−^FôÊEfÙžïü¹^]ëM−^UB9M−^\M−^LdhC^RBFfÌÞT"ŠyN^T¬2M−^A

ò^QfÆSM−^^^SÍ@M−^GSD^W!ŠbD^WM−^Y^Nn^WmM−^PÇ^V^S5^Hc^D

"^QLM−^E^NGD@M−^F÷$â>^H4ÐM−^FKM−^M^Qx4^Zf‘ ú.!Ô^THM−^CDT^Qó:M−^Crd)ÁH P¡

øPM−^Ff^H‘d1M−^R^F^PhM−^OPa=2R(Ô"(d(u^DAõh2@’qM−^D

!M−^Z^BM−^D^_Í^C^XL&M−^Z
^FM−^XB^Z
<^PM−^FM−^E^P@]^F^P;   ¢cM−^JŽ?4Â^NÁ^Gd

SAÚ
^N

(I^K^H^\EM−^B

&¡8ŽÁ4^\Zqkú^NDzIü&èM−^Mèa4ÓM−^QM−^NghxM^Ré^S

ÄIÚzh#ã®C^N-^QH}Ý®M−^Z#M−^K;ôaÊí^DÑ^K^DÇ(whM−^PãD¬¡Ý±whM−^\ò#ß~EM−^@Ñ9ôD^]÷M−^QÜ
èá:’Ù.hM−^]ŽOÚC¢WTá^GI^B4hM−^HìM−^G"8àÛ$9:ÈÞ^Yì!eEQ,e
^SM−^G7^VçŽîÊw’xFM−^F2ÇLM−^LM−^F^]M−^^
^\M−^Pé^RÆNTM−^SA^Qc@ô!É‘M−$qI^AËM−^PDväHpM−^]ŠÙM−^G;òMM−^Pf^?EM−^_»&äæ M−^LÏW^H
^[M−^HW^DG@èÃM−^E Dt^[@M−^Hé°
ÐwM−^S÷¿¶M−^IÍÄ^U«M−^KCbÐ» DtÛ^PM−^[^Z^Q"M−^LM−^Q^K^RM−^G^KM−^EžM−^CÐq^VM−^E’íÑ1
Â
M−^D
M−^BKGÛ^KM−^D^^M−^[[A8M−^Kþ;t^\\UœêðDuÛšÝM−^GM−$œÐ@ú^DGMÓlM−^H9M−^\ÃM−$M−^[§§¯ü¡
âÞêöÒZœÖÞM−^Su§I=< ó^N^R DuM−$Ý7
é¿ú{ÿÿvû^?M−^FÓMÿÓ{Ú^Q^GÕ&×ßÿWM−^B#-þï}^DGWðM−^_-$¯×C|BIR ^?ÿ×mµzû¿þ©^?ûkM
áëÖ¶»Ÿ¿§•×IŠöãßÛþÛWÍ^U×œ^Ô M−^R
¿öä åg¥(Ï£^Q^\ÿ¥KaM−$Œâ}ØFM−^H−îM−^S°ÇnŸáS

^?¯ëßM−^DG]ŸM−^S

M−^NM−^_^œ^?M−^HöàM−^HêM−^W¬WÒKäH<b^^âpD"!ÝX@M−^]pcµ^VM−^]PM−^\HmM−^_CÙM−^LÇÈ‘]
^_ÿßÙ

ùM−^OÿïM−^Péû^R^PuÙûö¬Ÿ^Zÿ±§¬ÖM−^VM−^]tM−^PHFÅ&
M−^_Ä.ìM−^F
o^ZM−^G^D6!öM−^DX'ôßkþ^_zº^Q×ÿ²

^QŠ:M−^HÿM−^HM−^O}¯ý²M−^M   Çß¿tÖj^B>å^AM−^JØxj±3^B øÍAývŸ°ßÛ¯ÿÖA^Aï^Fïû¯
M−^Pã÷ÿÂÁ}¿çù’EPh M−^H ë®   {3Œe¹M−^_¢^R^N;^FöM−^J•Wãþ^H-9M−^^¹M−^_ŒM−^F^G^D
G_ÿeJ#M−^[©^Z<ÍWýòvM−^E^?ü(þ«éÂ3È$Þ} M−^]^EÒ^HM−^CM−^NüM^_M−^LîrŒM−^Z^Q.M−^L^O
M−^WM−^E9ê6M−^NûýtßVµŸNÎ"¹÷þJ!
ùÖ}^G%^G^PþJ
^EBöM−^E×¿ÑM−^G^K×÷ŒaM−^C¶^VEM−^]«èM−^I=äó}^H¶uI9"^Sì§]^H§ê•ýÝÿIM−$-
ýëéÝÕ•|!KèDu³¢ýûïÿý»¿DÑ

®9ºM−^MfÓª•M−^];ÖM−^VÛ^H^^¯}ÿÚß¯të{ÿéo-úýï|5_×ëœý5²EœuM−^Hï_ßm6îápé>þÁ^FM−^Q^QY
^Oºkÿ¿ÖÈiÿŽ»ö+ë³M−$õÃ(nº
ºþôM−^W¯áýßo¥Òó^K{®ìM−^Qkyµéîtî¢4Ý=w^?ÿ¿M{}7ïï^?]ú¿m‘×n°M−^WM−^X¡¯þÃXkúM−^XµZßÚÚ
MM−^EuµMM−^UV~í§^O{m&ÿM−^G¿VººýÖM−^Ví¥ÚÝ6ºíö°×ým^DGZð×sEÖéC.M−^W^KŠM−^_^KM−$M−^^
š=³   &ÕM−^F^R°U²úÿk

Â   H é[ô^HM-^Nœ^C^KkpÿM-^FM-^W¶^WOXjðÁom%M-^G°Ìa&Ób°M-^VØX4;ü"Ç^HM-^G ËM-^Z
M-^\#3M-^F\ÙM-^B#šâ+[^D9](6^QÓa<ŸM-^Y^_0-M-^B(|XJ^N¡ Du^Q¡#^^M-^EM-^RM-$svÂQ^TÐj
M-^X'M-^J^]6M-^Fx^\À±   ÒM-^P¬Á±¶¬^X)äM-^Y^_1ñÞ^?Ñ^H()šŠÕM-^Qa^D-^FÄS^R^]^XÎ^B^X
áÔS'M-^NàM-^HâÄa^H³À\^PM-^N#kbM-^X÷'M-^FM-^Dr^_M-^CBM-^XÃ^[^VñO^VM-^Y^\FÂ^DGRÇL&
upÄlVM-^H=š£0oNM-^[^TM-^D\HºÜ^Q8^Q#M-^Gð£bM-^P•mM-^PáJ-M-^Jj,ZM-^VéUÚ
2nºÔ}Ìâ^Pa4ÓUÄl]^Fâ
S^ÏM-^A5M-^F¢qÊ^\M-^I5ÛQwÌásXMr^Yß   M-^Q!^CS:êgAªiM-^EÕ4^XB^YÇŽ^Y^D}M-^^
Bd0è2Ç>M-^Z
^F^H3M-^N^P0M-^C"^NU©¬*eÚhM^PM-^K$8&^SAM-^W^Q^F M-^EAM-^B
¶^X&M-^Z

^U4ÉM−^NaÂ ‘M−^J*h£ ‘M−^YM−^\-^Ba^F^Q¢^\^XM^F^SAM−^B^FeR^UÍ^A27<^UQ
9M−^T&^HYDÂa^F^HM−^N¢"^X Â^Q#^PM−^Ha

^QZB"!M−^V^R3áÄ^SpM−^DD0M−^DDDEª^QdM−^\ ÐaK^\ûVñ^PÂ

^PM−^HM−^C^HG^R"# Â^Q^Q^Q^Q^Q^Q^Q^F^PM−^HËq<4""!ÄDNÊã^YM−^La^FT!^Q^Q^Tñ^QÄDb/^Qb
#¥Á−/Ð;ASå}o^DA×.VÔÌŽS è^Q^]^Y^N¬M−^[¬é^B(pDtkGeâ^\GM−^LÑ%Ê±^KM−^C^Fh«IM−^Y²8
M−^FhžR^O+^Y

!^Tf¬M−^N^TM−^FdpBM−^\0u#@Ó0M−^NeXg#¢8ËÒºÞV^C,Ú$M−$T^YM−^LÆGGs^F
ÉP9^DÌGÑM−^HM−^N^Hc3eüM−^IM−^E)òMM−^^^F

Ñ®#FBe^HÚ6M−^L^F
¢’Í

Â?^[M−^HùM−^HÍ^XEâùHM−^L^YM−^Fc.^X=M−^Zâ3#M−^FpD2ÜM−^A^AM−^XsacM−^V8M−^HdpBF‘5

eÀàÎ#M−^B$^PM−^HM−^FGM−^O28e^_M−^L^F^Háš]M−^W
\^O
^DpÈ^F¬M−^FÌ^Pf^QÌM−^N
äpf#£q°n\^U^Kæâ<\−^PÀ¬M−^O^YM−^Y^\^O^RM−^Q
^N"##M−^CaM−^LM−^N^G^E

ÀÈá®a!^Q^Q^Q^Q"M−^N""2ùp8M−^HM−^HM−^HM−^HM−^HM−^HM−^MšM−^HM−^HM−^HM−^HM−^NM−^DDD
DDDGHD|DDDDH7sA
^\"$6ÝcöŸ Ï#   M−^YAª!M−^\v}/ÇâÐÎ¢ÁM−^QÑÀÊ#M−^BÀò^Y^F?¿^Q^Q^Q £¬M−^AàØ9XAM−^Yì
M−^Aâ¹PC6Ï^F^FC’^\ï²

9

š<ÈM−^CM−^VA^Ew:^H6Á^BÁÈM−^CM−^Q‘×M−^P/d<^P=M−^Nw’^D8åM−^O¹
9
’ £B

9T!M−^V9
qÉ’*d^YÜM−^AM−^H#^\M−^Aáj^R^Z^G8^Y^EÐAw Ð,k/^H^Pä=d^R² õM−^T:

è%2(ä^H^\M−^Ue^N{&ªAàîn;M−^\^HM−^Ds¹NT^]Ï^D(ær^Pr^Hç^\M−^CáððB îAM−^V
M−^ZM−^LÎaËZ M−^AFM−^BM−^F^T‘îV^YÊ²M−^NbB
^\ÃŠMÎM−$AM−^@ËrM−^@M−^KÝÅM−^_^H^P9PM−^DDM−^G^P!M−^WÄd^Ps^NXäM−^BM−^JM−^CM−^H(r)
rCM−^YTš*^H4lM−^Cèx;M−^U^FM−^Q!ö\û+(sì,¥M−^R M−^D^_M−^N9øÎQ¹M−^PM−^HM−^HM−^H
M−^HM−^HM−^H³®e^Q^Q^Q^Q^Q^Q^Q^Q^Q^Q^Q^Q^Q^Q^Q^Qe2
M−^N?ûùfM−^Lú~úkúúì/kËM−$¬Gj^XPÁGÿÿÿòÜùHéŠdCÞ^Sÿ-»õV^WÄ0\eŒY^Y^W2^PC±aa^K.0M−^D0
M−^Y&M−^K¢r>3šM−^R^^²M−^G(lM−^H^CUÅè3AM−^D!Š^S^D^]M−^D!M−^QÑM−^Y^DÊ£ÖM−^Hâ©éM−^D
J^]¡

&M−^C   Ës³M−^Jn @Þ^UM−^TôJ)^Z0ÊûŠM−^IANÓÐM−^KÓe^R’M−^QbqÂnM−^\vaè»pM−^E¿º[pM−^[
¿ñ

U¥ßûBž":ÿÖM−^[úÿßÞÕ+ÿ§ÿi]^E×^DG[ÕºZÄ^WÚLŒcV?ü’¬è^_Æ"6µûõM−^YM−^G1tí~×ïIzHyûÿù^\ë
ÉM−^@Ñ[¿ëô ¯híÕw^?ïJþÂwûÓë¥ï:iÿt¿üÇuŠ»Ö^ZºþM−^RÖÚÝÒlöØ%¿ØO3NðtM−^^30PÅ^?
M−^B*^XUDpÏ−M−^Jí+M−^YÈ^YÀ0\^R#B!M−^[v^ŽþÁ!iÛ M−^VžM−^Pµ®Ó^D

^VÓM−^FM−^XLM−^[¬4ÕM−^D

¥C:fsñÅ^A^HM−^N<DDDDM−^R
ÔCQòÜÕ^X^Y^N5^CY^TM−^N"ùä‘e^Y:6^HuM−^K¢+M−^W3e+-^FHl6dpÛ¡^_ÿ Q^D8d^YM−^\M−^F û,s
^Nh)È å^Ne2

q°Öa^F^\§0Ñàç=M-^P£M-^^^H^Q^EA@5XM-^HM-^HM-^HM-^HM-^HM-^HM-^HM-^HM-^HM-^HM-^Oÿÿÿ
ÿÿÿÿÿÿÿÿÿÿÿÿÿÿÿÿÿÿÿÿÿÿÿÿÿÿÿÿÿÿÿÿÿÿÿù^AjºÛŒ^?ÿÿÿÿÿÿÿÿÿÿÿþl^XÈ3^@æM-$ž^^^ZÓ•^CÔí(^O^Re
^@xfÊö^G©\l^O
ioM-^@zM-^Sn^CÖ@ðÕ^A!roàzM-^SrÀ<^Z%M-^R‘xM-^RË@=K-‘xjËAÀõ-^D x7M-^Vt^AàÄ³^H^CÔ³

^Aá«,ĐÀõ−!Àðyih^GM−^AM−^Iiê^G©iM−^T^Aá«−JM−^@õ−R^@òM−^V-‘x5ËY8^^¥¬Š^GM−^FM−^TµÆ
^Aî[^B^@õ^F@ðÖk^H−M−^RàzM−^VÉM−^P^^^YRÚ^F^GM−^GM−^VØ@=KlL^O
iL(^CÔŠf^GM−^A^RM−^YV^GM−^FM−^IM^S^CÔŠM−^A^@ðÖM−^V^R^AêSc^@ðM−^RM−^[0^GM−^FdM−^@
M−^@ =H^HY^CÃZ@‘^X^^M−$^FM−^AM−^AýM−^P<5
ô $6^G©^A8^CÁŠ@LH^O^V@PLqò^CM−^CKÇü^@@^D

$$(7) \qquad \begin{cases} \varpi_j = \sum_i \varpi_i \, p_{ij} \\ \sum_j \varpi_j = 1 \end{cases}$$

<u>et, quelle que soit la loi de probabilité initiale p_k, les probabilités au temps n vérifient</u> :

$$(8) \qquad \ell\text{im} \; p_k^{(n)} = \varpi_k = \frac{1}{\mu_k}$$

a/ Si les états sont transitoires ou persistants et nuls, on a pour tout i : $P_{ii}^{(n)} \to 0$ d'après le critère du paragraphe précédent. Il suffit ensuite de prendre $m > 0$ avec $P_{ji}^{(m)} > 0$ pour déduire $P_{ij}^{(n)} \to 0$ de l'inégalité $P_{ij}^{(n)} \; P_{ji}^{(m)} \leq P_{ii}^{(n+m)}$.

b/ Supposons maintenant les états persistants et positifs, et soit $\mu_i < \infty$ le temps de retour moyen de l'état e_i. Les retours successifs de e_i constituent un processus de renouvellement dont la loi est arithmétique et de maille (= à la période) égale à 1. Le potentiel U de ce processus est la mesure attribuant le poids $P_{ii}^{(n)}$ à l'entier n. Ce processus de renouvellement est ergodique ($\mu_i < \infty$), et les résultats du chapitre II (cas arithmétique) montrent alors que l'on a :

$$\ell\text{im}_{n \to \infty} \; p_i^{(n)} = \frac{1}{\mu_i} = \varpi_i$$

quelle que soit la loi initiale p_k, et, en particulier, $P_{ki}^{(n)} \to \frac{1}{\mu_i}$ (on se souvient, en effet, que la loi de probabilité ergodique d'un processus de renouvellement différé est indépendante de la loi initiale).

c/ Il reste à vérifier les relations (7). Remarquons d'abord que :

$$\sum_{j=1}^{N} P_{ij}^{(n)} \leq 1$$

entraîne (en faisant d'abord $n \to \infty$, puis $N \to \infty$) :

$$\sum_{j=1}^{\infty} \varpi_j \leq 1$$

Ensuite, dans l'inégalité évidente

$$P_{ki}^{(n+1)} \geqslant \sum_{j=1}^{N} P_{kj}^{(n)} \quad P_{ji}$$

faisons de même $n \to \infty$, puis $N \to \infty$: Il vient :

$$\varpi_i \geqslant \sum_j \varpi_j \quad P_{ji}$$

Mais l'inégalité stricte est impossible : en sommant en i, elle donnerait $\sum_i \varpi_i > \sum_j \varpi_j$. Par suite, la première relation (7) est vérifiée. Elle s'écrit $\varpi = \varpi P$.

Comme les ϖ_i sont > 0, on peut prendre comme loi initiale $p_i = \frac{\varpi_i}{\sum \varpi_i}$, et on a alors $p = p\,P$. Ainsi p est une probabilité stationnaire : $p_i = p_i^{(n)}$. Mais $p_i^{(n)}$ tend vers ϖ_i, d'après b/ d'où $\varpi_i = p_i$, c'est-à-dire :

$$\sum_i \varpi_i = 1$$

Corollaire : S'il existe un système p_i de probabilités stationnaires ($p = p\,P$ et $\sum p_i = 1$), ce système est unique, les états de la chaîne irréductible sont persistants et positifs, et on a :

$$p_k = \frac{1}{\mu_k} = \lim_{n\to\infty} P_{ik}^{(n)}$$

En effet, si les états étaient nuls ou transitoires, on aurait :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{N} P_{ik}^{(n)} = \sum_{k=1}^{N} p_k = 0$$

quel que soit N, ce qui contredirait $\sum p_k = 1$. Les états étant persistants et positifs, le théorème donne $p_k^{(n)} \to \frac{1}{\mu_k}$, d'où $p_k = \frac{1}{\mu_k}$, puisque p est stationnaire.

Remarque:

Ce corollaire est très utile dans les applications : il n'est pas toujours facile, en effet, de chercher directement la limite des itérées $P^{(n)}$. Si l'on peut trouver une solution ϖ_k du système (7), on est certain que $P_{ik}^{(n)} \to \varpi_k$, et que le temps de retour moyen est $\mu_k = \frac{1}{\varpi_k}$, sans qu'il soit nécessaire de calculer explicitement les $P_{ik}^{(n)}$. En particulier, dans le cas d'une chaîne finie, irréductible et apériodique, ce système (7) se résoud de manière élémentaire (N équations linéaires à N inconnues). On est d'ailleurs certain à priori que cette solution existe, et qu'elle est unique, puisque dans le cas d'une chaîne finie les états sont tous persistants et positifs.

IV - ETATS TRANSITOIRES ET PROBABILITES D'ABSORPTION

Nous allons maintenant étudier le comportement de $P_{ij}^{(n)}$ pour $n \to \infty$, lorsque l'état initial e_i est quelconque. Si e_i est un état essentiel, le théorème 1 apporte la réponse. Supposons donc e_i non essentiel - donc aussi transitoire - Si l'état terminal e_j est lui-même transitoire, ou persistant et nul, on sait déjà que $P_{ij}^{(n)} \to 0$ (critère du paragraphe II - B) Etudions donc le cas suivant : e_i est transitoire (non essentiel) et e_j est persistant positif. Nous désignerons par C la classe d'équivalence de l'état e_j, et par $a_i = a_i(C)$ la probabilité pour que, partant de e_i, le système passe au moins une fois par un état de la classe C. On sait qu'une fois entré dans C, le système n'en sort plus jamais, et $a_i(C)$ est la probabilité d'absorption dans la classe C (lorsque l'on part de e_i). Pour simplifier les énoncés, nous supposerons la classe C apériodique.

Théorème 2 : Soit $e_i \notin C$ un état transitoire, C une classe d'états persistants positifs et apériodiques, $e_j \in C$ un état de C, μ_j son temps de retour moyen, et $a_i(c)$ la probabilité d'absorption dans C à partir de e_i. On a :

$$\lim_{n \to \infty} P_{ij}^{(n)} = a_i(C) \frac{1}{\mu_j}$$

a/ Soit $b_{ij}^{(n)} = b^{(n)}$ la probabilité pour que (partant de e_i) le système entre pour la première fois en e_j au temps n (loi du temps d'atteinte de e_j), et $b_{ij} = b = \sum_{n=1}^{\infty} b^{(n)} \leq 1$ la probabilité d'un passage au moins par e_j. On a clairement :

$$P_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} b_{ij}^{(n)} \quad P_{jj}^{(n-k)}$$

(avec, comme toujours, $P_{jj}^{(o)} = 1$). Les $P_{jj}^{(n)}$ représentent la loi (arithmétique) du processus de renouvellement constitué par les retours successifs de e_j. Si $b \neq 0$, adoptons pour ce processus la loi initiale $b^{(n)}/b$ (probabilité pour que le premier e_j apparaisse au temps n). Avec cette loi initiale, $\frac{1}{b} P_{ij}^{(n)}$ représente la probabilité d'un passage de ce processus en e_j au temps n. On a donc (théorème de renouvellement et ergodicité du processus) :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{b} P_{ij}^{(n)} = \frac{1}{\mu_j}$$

Donc $P_{ij}^{(n)} \to b_{ij}/\mu_j$ - (si b = 0, on a $P_{ij}^{(n)} = 0$, et le résultat subsiste)

b/ On a $b_{ij} \leq a_i(C)$ - Inversement, si le système atteint en un temps n un état e_k de la classe C, la probabilité conditionnelle pour qu'il atteigne ensuite e_j est 1. On a donc $a_i(C) \leq b_{ij}$, d'où l'égalité.

<u>Calcul de la probabilité d'absorption $a_i(C)$</u> Proposons-nous de calculer la probabilité a_i pour que le système, partant de l'état initial non essentiel e_i, soit absorbé par une classe C donnée d'états essentiels, et, corrélativement, la probabilité h_i pour que le système ne soit absorbé par aucune classe C, c'est-à-dire pour que le système ne prenne jamais que des états transitoires non essentiels.

Désignons par A_n l'évènement conditionnel : "le système entre pour la première fois dans un état de la classe C au temps t = n" et par $a_i^{(n)}$ sa probabilité. On a :

(9) $$a_i = \sum_{n=1}^{\infty} a_i^{(n)}$$

Soit T l'ensemble des états non essentiels. Pour que l'absorption ait lieu pour la première fois au temps t = n+1 il faut qu'au temps t = 1 le système ait pris un état non essentiel quelconque de T. On en déduit :

$$(10) \qquad a_i^{(n+1)} = \sum_{k \in T} P_{ik} \; a_k^{(n)}$$

Par ailleurs, pour n = 1, on a manifestement :

$$(11) \qquad a_i^{(1)} = \sum_{j \in C} P_{ij}$$

Les équations (10) et (11) permettent de calculer, par récurrence, tous les $a_i^{(n)}$, et l'équation (9) donne la probabilité d'absorption a_i.

Sommant (10) de n = 1 à l'infini, on voit aussi que les a_i sont solution du système d'équations :

$$(12) \qquad a_i - \sum_{k \in T} P_{ik} \, a_k = a_i^{(1)}$$

Inversement, on peut se demander si le système (12) possède une solution unique, et permet ainsi de caractériser complètement les probabilités d'absorption a_i. Ce problème est lié étroitement au suivant : partant d'un état non essentiel e_i quelconque, est-il presque certain que le système sera finalement absorbé (dans une classe quelconque), autrement dit a-t-on $h_i = 0$?

En effet, désignons par $h_i^{(n)}$ la probabilité pour que le système (partant de l'état e_i) soit dans un état non essentiel au temps $t = n$. On a immédiatement :

$$(13) \qquad \begin{cases} h_i^{(1)} = \sum_{k \in T} P_{ik} \\ h_i^{(n+1)} = \sum_{k \in T} P_{ik}\, h_k^{(n)} \end{cases}$$

On en déduit : $h_i^{(1)} \leq 1$, et, par récurrence, $h_i^{(n+1)} \leq h_i^{(n)}$. Suite décroissante, les $h_i^{(n)}$ possèdent une limite, qui n'est autre que la probabilité h_i pour que le système ne soit jamais absorbé :

$$\lim_{n \to \infty} h_i^{(n)} = h_i$$

Passant à la limite $n \to \infty$ dans (13), on voit que h_i est solution du système (12) <u>sans second membre</u>, soit :

$$(14) \qquad h_i = \sum_{k \in T} P_{ik}\, h_k$$

Plus précisément, les h_i peuvent être caractérisés comme la <u>solution maximale</u> du système (14) vérifiant $|h_i| \leq 1$. En effet, soient x_i des quantités vérifiant :

$$(15) \qquad x_i = \sum_{k \in T} P_{ik}\, x_k \qquad\qquad |x_i| \leq 1$$

On a manifestement :

$$|x_i| \leqslant \sum_{k \in T} p_{ik} = h_i^{(1)}$$

et, par récurrence, les équations (13) donnent $|x_i| \leqslant h_i^{(n)}$ quel que soit n, par suite aussi

$$|x_i| \leqslant h_i$$

Les h_i sont donc bien la solution maximale de (15) pour $|x_i| \leqslant 1$.

Par suite, si tous les h_i sont nuls, le système (15) n'admet pas d'autres solutions bornées que la solution zéro. Dans ce cas, le système (12) avec second membre possède une solution unique et caractérise complètement les probabilités d'absorption a_i. Au contraire, si l'un au moins des h_i est non nul, le système (12) admet d'autres solutions que les a_i. Ainsi :

Théorème 3 : Les probabilités h_i pour que le système ne sorte jamais de l'ensemble T des états non essentiels sont la solution maximale du système (15). Les probabilités d'absorption a_i sont solution du système (12). Pour que la solution du système (12) soit unique, et caractérise ainsi complètement les a_i, il faut et il suffit que les h_i soient toutes nulles.

Dans une chaîne finie, cette condition $h_i = 0$ est toujours vérifiée. En effet, on a toujours :

$$h_i^{(n)} = \sum_{k \in T} P_{ik}^{(n)}$$

Mais il n'y a qu'un nombre fini d'états non essentiels e_k dans T, et, pour chacun d'eux, on a $P_{ik}^{(n)} \to 0$. Donc :

$$h_i = \lim_{n \to \infty} h_i^{(n)} = \lim_{n \to \infty} \sum_{k \in T} P_{ik}^{(n)} = 0$$

D'où :

Corollaire - Dans une chaîne finie, il est presque impossible que le système ne sorte jamais de l'ensemble T : l'absorption finale est presque certaine, et les probabilités d'absorption a_i constituent la solution unique du système (12).

C H A P I T R E   IV

CHAINES DE MARKOV HOMOGENES A TEMPS CONTINU

I - DEFINITIONS

Nous considérons, comme dans le chapitre III, un système susceptible de prendre au cours du temps les états e_1, e_2,... (en nombre fini ou dénombrable), mais nous observons cette fois l'évolution aléatoire de ce système à n'importe quels instants $t \geq 0$ $(t \in [0, \infty[)$ - Nous dirons que ce processus est une chaîne de Markov homogène à temps continu s'il vérifie les deux conditions suivantes :

a/ Homogénéité : la probabilité d'avoir un état e_j au temps $t + \tau$ sachant que l'on avait e_i au temps t ne dépend pas de t mais seulement de τ. Nous désignerons par $P_{ij}(\tau)$ cette probabilité de transition stationnaire, et par $P(\tau)$ la matrice correspondante.

b/ Propriété de Markov : Conditionnellement lorsque l'on connaît l'état du système au temps t, il y a indépendance entre tout évènement antérieur et tout évènement postérieur à t.

Equation de Markov - En écrivant que le passage de e_i au temps t à e_j au temps $t + \tau + \tau'$ implique le passage par un état e_k

au temps intermédiaire $t + \tau$, on déduit de a/ et b/ la relation de Markov :

(1) $$P_{ij}(\tau+\tau') = \sum_k P_{ik}(\tau) P_{kj}(\tau')$$

ou, sous forme matricielle :

(1') $$P(\tau + \tau') = P(\tau) P(\tau')$$

C'est la relation des demi-groupes.

Elements constitutifs du processus - Nous désignerons par $Q_i(t)$ la probabilité conditionnelle pour que, partant de l'état e_i à l'instant initial, le système reste constamment dans l'état e_i sur tout l'intervalle de temps $[0, t[$. (Remarquons que la définition de cet évènement fait intervenir une infinité non dénombrable d'instants $\tau \in [0, t[$, et celà soulève quelques difficultés axiomatiques sur lesquelles nous n'insisterons pas : nous admettons que la σ-algèbre sur laquelle nous travaillons implicitement est suffisamment riche pour contenir des évènements tels que le précédent, dont la signification concrète est bien évidente).

Proposition 1 - La probabilité $Q_i(t)$ est de la forme $Q_i(t) = e^{-a_i t}$ avec une constante de temps $a_i \geq 0$ (qui dépend en général de l'état e_i)

Le cas $a_i = 0$ correspond au cas où e_i est un état absorbant dont le système ne sort plus une fois qu'il y est entré. Nous supposerons en général $a_i > 0$.

En effet, évaluons $Q_i(t+t')$, en écrivant que le processus doit rester en e_i de 0 à t (probabilité $Q(t)$), puis de t à t+t', ce qui a lieu, d'après la propriété de Markov, avec la probabilité conditionnelle $Q(t')$, d'où :

$$Q_i(t+t') = Q_i(t)\ Q_i(t')$$

Comme $Q_i(t)$ est une fonction non croissante de t, celà entraîne bien que $Q_i(t)$ est de la forme $e^{-a_i t}$ avec $a_i \geq 0$.

Corollaire : L'état initial étant e_i, l'instant aléatoire T_1 du premier changement d'état obéit à la loi exponentielle de densité $a_i\, e^{-a_i t}$ (si $a_i > 0$, et $T_1 = \infty$ presque sûrement si $a_i = 0$).

En effet, on a $P(T_1 \geq t) = Q(t)$

On pouvait d'ailleurs prévoir ce résultat : la propriété de Markov implique en effet que la loi de la "durée de vie" résiduelle d'un séjour dans l'état e_i est identique à la loi de T_1, propriété caractéristique de la loi exponentielle.

Les probabilités de transition conditionnelle.

Soit ϖ_{ij} la probabilité conditionnelle pour qu'un changement d'état, se produisant à un instant t ou le système est en e_i, conduise à l'état e_j. L'homogénéité du processus entraîne manifestement que ϖ_{ij} ne dépend pas de t. Par définition : $\varpi_{ii} = 0$.

Partant de l'état e_i, soient T_1, T_2,... les instants (aléatoires) successifs ou le système change d'états. Le premier changement d'état (en T_1) mène, par définition, à e_j avec la probabilité ϖ_{ij}. D'après la propriété de Markov, le deuxième (en T_2) mène à e_k avec la probabilité $\sum_j \varpi_{ij}\, \varpi_{jk}$. D'une manière générale, la matrice ϖ^n donne la probabilité pour que le $n^{ième}$ changement d'état conduise à e_j.

Ainsi, si l'on observe le système aux instants T_1, T_2,... de ses changements d'états successifs on obtient une chaîne de Markov homogène à temps discret dont la matrice de transition est justement ϖ.

L'intervalle de temps $T_n - T_{n-1}$ est conditionnellement indépendant de tous les évènements antérieurs à T_{n-1} dès que l'on connaît l'état e_i immédiatement postérieur à T_{n-1}, et obéit à la loi exponentielle de densité $e^{-a_i t}$.

Ces deux données : les a_i et les ϖ_{ij}; doivent donc permettre de reconstruire la matrice des $P_{ij}(\tau)$. Nous verrons qu'il en est bien ainsi si T_n tend presque sûrement vers l'infini pour $n \to \infty$. Mais, si $P(\lim_{n\to\infty} T_n < \infty)$ n'est pas nul, il se produit des anomalies dues à un effet de fuite : il y a alors une probabilité non nulle pour qu'il se produise une infinité de changements d'états sur un intervalle de temps fini : en pareil cas, il existe un point T_∞ d'accumulation de changements d'états, où l'état du système n'est pas défini, et notre processus de reconstruction de proche en proche des $P_{ij}(\tau)$ à partir des a_i et des ϖ_{ij} s'interrompt en T_∞. Pour poursuivre, il faut se donner une nouvelle loi initiale en T_∞ , qui peut être choisie arbitrairement, et permet de prolonger la chaîne jusqu'au point d'accumulation suivant T'_∞, et ainsi de suite. Autrement dit, il apparaîtra nécessairement des indéterminations dans la reconstruction de la chaîne. Si au contraire $T_\infty = \infty$ presque sûrement, la reconstruction de la chaîne ne sera possible que d'une seule façon.

II - LES EQUATIONS DE FELLER ET DE KOLMOGOROV

Si l'on dérive formellement en τ l'équation (1') des demi-groupes avant de faire $\tau = 0$, on trouve :

$$(K_1) \qquad P'(\tau) = P'(0)\, P(\tau) \quad .$$

C'est la première équation de Kolmogorov, celle que l'on obtient en faisant varier l'état initial. Si, au contraire, on dérive en τ' avant de faire $\tau' = 0$, on trouve :

$$(K_2) \qquad P'(\tau) = P(\tau)\, P'(o)$$

C'est la deuxième équation de Kolmogorov, celle que l'on obtient en faisant varier l'état terminal.

Il se trouve que ces dérivations sont légitimes dans le cas des chaînes finies. Mais des difficultés apparaissent, s'il y a une infinité d'états, liées à la possibilité d'un effet de fuite et d'un point d'accumulation de changements d'états. Nous verrons que (K_1) est toujours vérifiée, mais que (K_2) ne l'est que si $T_\infty = \infty$ presque sûrement. Cette dissymétrie provient du fait que la loi du premier changement postérieur à $t = 0$ est toujours définie sans ambiguïté, tandis que l'on n'a le droit de parler du dernier changement d'état antérieur à $t > 0$ que si l'on est sûr que ce n'est pas en fait un point d'accumulation de changements d'états qui précède immédiatement t.

La première équation de Feller - Supposons le système en e_i au temps $t = 0$, et soit e_j un état de la chaîne - Si $e_i \neq e_j$, le système ne peut être en e_j au temps t que si un premier changement d'état a eu lieu entre τ et $\tau + d\tau$ pour un $\tau < t$, ce qui a lieu avec la probabilité $a_i\, e^{-a_i \tau}\, d\tau$. Ce changement conduit à un état e_k avec la probabilité ϖ_{ik}, et la probabilité conditionnelle d'avoir e_j au temps t est alors $P_{kj}(t-\tau)$, d'après la propriété de Markov et l'homogénéité. On a donc :

$$P_{ij}(t) = \int_0^t a_i\, e^{-a_i\tau} \left(\sum_k \varpi_{ik}\, P_{kj}\,(t-\tau)\right) d\tau \qquad (i \neq j)$$

Si i = j, on doit tenir compte, de plus, de la probabilité pour que le système reste constamment dans l'état e_i de 0 à t, d'où :

$$P_{ii}(t) = e^{-a_i t} + \int_0^t a_i\, e^{-a_i\tau} \left(\sum_k \varpi_{ik}\, P_{kj}\,(t-\tau)\right) d\tau$$

Condensons en une seule ces deux équations en introduisant les symboles habituels de Kronecker ($\delta ij = 0$ pour $i \neq j$, $\delta_{ii} = 1$), et changeons t en t-τ dans l'argument de l'intégrale. Il vient:

$$(F_1) \qquad P_{ij}(t) = \delta_{ij}\, e^{-a_i t} + \int_0^t a_i\, e^{-a_i(t-\tau)} \left(\sum_k \varpi_{ik}\, P_{kj}(\tau)\right) d\tau$$

<u>La première équation de Kolmogorov</u> - On constate que le deuxième membre de (F_1) est <u>dérivable</u> par rapport à t, donc aussi le premier, et on trouve :

$$\frac{d}{dt}\, P_{ij}(t) = -a_i\, \delta_{ij}\, e^{-a_i t} - a_i \int_0^t a_i\, e^{-a_i(t-\tau)} \left(\sum_k \varpi_{ik}\, P_{kj}(\tau)\right) d\tau$$

$$+\, a_i \sum_k \varpi_{ik}\, P_{kj}\,(t)$$

Mais celà s'écrit :

$$(K_1) \qquad \frac{d}{dt}\, P_{ij}(t) = -\, a_i\, P_{ij}(t) + a_i \sum_k \varpi_{ik}\, P_{kj}\,(t)$$

(on rappelle que les termes diagonaux ϖ_{ii} sont nuls). C'est la première équation de Kolmogorov. En effet, pour $t = 0$, cette équation donne :

$$P'_{ij}(o) = - a_i \delta_{ij} + a_i \sum_k \varpi_{ik} \delta_{kj} = - a_i \delta_{ij} + a_i \varpi_{ij}$$

et (K_1) s'écrit bien :

$$P'_{ij}(t) = \sum_k P'_{ik}(o) P_{kj}(t)$$

Dans la théorie des demi-groupes, la matrice P'(o), de composantes : $- a_i \delta_{ij} + a_i \varpi_{ij}$ s'appelle générateur infinitésimal du demi-groupe P(t)

La deuxième équation de Feller - Si nous supposons qu'il n'y a presque sûrement pas de points d'accumulation de changements d'états $\left(P(T_\infty < \infty) = 0\right)$, on peut appliquer le raisonnement précédent au dernier changement d'état antérieur à $t > 0$ - On écrit qu'en un temps $\tau < t$ le système est dans un état e_k, qu'un changement d'état conduisant à e_j se produit entre τ et $\tau + d\tau$, et qu'il n'y a plus de changement d'état jusqu'au temps t. Dans le cas $i = j$, il faut de plus tenir compte de la possibilité pour le système de rester en $e_i = e_j$ de 0 ā t. On trouve ainsi :

$$(F_2) \quad P_{ij}(t) = \delta_{ij}\, e^{-a_j t} + \int_0^\infty \left(\sum_{k \neq j} P_{ik}(\tau)\, a_k\, \varpi_{kj} \right) e^{-a_j (t-\tau)}\, d\tau$$

Contrairement à ce qui se passait pour (F_1), la constante de temps a_k figure sous le signe de sommation. On constate encore que le second membre de (F_2) est dérivable, et on en déduit <u>la seconde équation de Kolmogorov</u> :

$$(K_2) \qquad \frac{d}{dt} P_{ij}(t) = - P_{ij} a_j + \sum_{k \neq j} P_{ik} a_k \varpi_{kj}$$

Pour $t = 0$, on trouve comme plus haut (avec $P_{ij}(o) = \delta_{ij}$)

$$P'_{ij}(o) = - \delta_{ij} a_j + a_i \varpi_{ij}$$

d'où l'on tire

$$P'_{ij}(t) = \sum_k P_{ik}(t) P'_{kj}(o)$$

<u>Remarque</u> : Dans les <u>applications</u>, (K_2) est souvent d'un emploi plus commode que (K_1), du fait que l'indice i initial des P_{ij} est le même pour tous les termes. Celà permet, en effet, de travailler avec l'indice i fixé, donc de ne manipuler qu'un moins grand nombre d'équations à la fois. Mais on n'oubliera pas que la condition $P(T_\infty < \infty) = 0$ doit être vérifiée.

III - INTEGRATION DES EQUATIONS (F) et (K), ET CONSTRUCTION DU PROCESSUS

[N.B.: Ce paragraphe, plus difficile que le reste du chapitre, peut être omis en première lecture. Il a pour but de préparer le lecteur à la théorie moderne des probabilités et du potentiel].

Etant donnés une matrice de transition ϖ_{ij} et des nombres $a_i > 0$, proposons-nous d'examiner si ces éléments permettent de construire une chaîne à temps continu, si la matrice P(t) de cette chaîne vérifie les équations (F) et (K), et si cette solution est unique.

Dans cette reconstruction, nous pouvons procéder de proche en proche. Nous attribuons l'état e_i à un premier segment $(0, T_1)$, dont la longueur T_1 obéit à la loi de densité $a_i e^{-a_i t}$. En T_1, nous tirons au sort un deuxième état e_j selon la loi ϖ_{ij}, et nous lui affectons l'intervalle (T_1, T_2), dont la longueur $T_2 - T_1$, indépendante de T_1, obéit à la loi $a_j\, e^{-a_j t}$, et ainsi de suite. Le fait de n'utiliser que des lois exponentielles nous garantit que ce processus possèdera la propriété de Markov. Par contre, nous ne sommes pas du tout certains que T_n tende presque sûrement vers l'infini, et notre construction pourrait très bien ne pas dépasser un premier point $T_\infty < \infty$ d'accumulation de changements d'état.

a/ La matrice $\overline{P}(t)$

Posons $P_{ij}^{(o)}(t) = e^{-a_i t}\, \delta_{ij}$ et, par recurrence :

$$(2) \qquad P_{ij}^{(n+1)}(t) = P_{ij}^{(o)}(t) + \int_0^t a_i\, e^{-a_i(t-\tau)} \Big(\sum_k \varpi_{ik}\, P_{kj}^{(n)}(\tau) \Big) d\tau$$

$P_{ij}^{(n)}(t)$ est donc la probabilité pour que notre construction de proche en proche atteigne le temps t dans l'état e_j après au plus n changements d'états. Par suite $P_{ij}^{(n)}(t)$ est positif ou nul, non décroissant en n et vérifie :

$$(3) \qquad \sum_j P_{ij}^{(n)}(t) \leqslant 1$$

La limite

$$\bar{P}_{ij}(t) = \lim_{n \to \infty} P_{ij}^{(n)}(t)$$

existe donc, est $\geqslant 0$, et vérifie, d'après (3) :

$$(4) \qquad \sum_j \bar{P}_{ij}(t) \leqslant 1$$

$\bar{P}_{ij}(t)$donne la probabilité pour que notre construction atteigne le temps t dans l'état e_j après un nombre <u>fini</u> (quelconque) de changements d'états. <u>Cette matrice $\bar{P}(t)$ vérifie les équations (F_1) et (F_2)</u>, et aussi (K_1) et (K_2) qui en découlent : il suffit pour le voir de reprendre mot pour mot la démonstration probabiliste du paragraphe précédent. En ce qui concerne (K_2), en effet, cette démonstration est valable, puisque par hypothèse $\bar{P}_{ij}(t)$ est la probabilité d'atteindre t en e_j <u>avant</u> T_∞. $\bar{P}(t)$ vérifie aussi <u>l'équation des demi-groupes</u>. En effet, pour atteindre $t + t'$ en e_j avant T_∞, il faut d'abord atteindre un e_k en t avant T_∞. La construction repart alors à 0 à partir de ce nouvel état initial e_k (puisque la durée de cet état est régie par une loi exponentielle). On a donc :

$$\bar{P}_{ij}(t+t') = \sum_k \bar{P}_{ik}(t) \quad \bar{P}_{kj}(t')$$

c'est-à-dire $\bar{P}(t+t') = \bar{P}(t) \quad \bar{P}(t')$.

La seule question qui se pose est celle-ci : a-t-on $\sum_j \bar{P}_{ij}(t) = 1$, ou, en notations matricielles, 1 désignant le vecteur de composantes (1, 1,...) a-t-on :

$$(5) \qquad \bar{P} \; 1 = 1$$

Nous allons voir que cette condition (5) équivaut à $P(T_\infty < \infty) = 0$, et aussi à l'unicité de la solution des équations (F).

b/ Résolvante d'un processus.

Nous désignerons par $R(\lambda)$ la transformée de Laplace de la matrice $P(t)$, c'est-à-dire la matrice de composantes :

$$R_{ij}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \; P_{ij}(t) \; dt \qquad (\lambda > 0)$$

Si $P(t)$ est la matrice d'une chaîne de Markov, on dit que $R(\lambda)$ est la résolvante de cette chaîne. La condition (5) équivaut à :

$$(5') \qquad R \; 1 = \frac{1}{\lambda}$$

L'équation des demi-groupes <u>équivaut</u> à :

$$R(\lambda)\ R(\mu) = -\ \frac{R(\lambda) - R(\mu)}{\lambda - \mu} \qquad (\lambda,\mu > 0)$$

Dans le langage de la théorie des demi-groupes, cette équation s'appelle <u>équation résolvante</u> : on pourra l'établir à titre d'exercice, mais nous ne l'utiliserons pas dans ce qui suit.

<u>Interprétation de $\lambda R(\lambda)$</u> - <u>La matrice $\lambda\ R_{ij}(\lambda)$ est la matrice de transition d'une chaîne à temps discret</u>. En effet, considérons un temps S <u>aléatoire</u>, indépendant du processus, et admettant la loi exponentielle de densité $\lambda\ e^{-\lambda s}$ $(s \geqslant 0)$. La probabilité d'avoir le système dans l'état e_j au temps aléatoire S (sachant qu'il était dans l'état e_i au temps 0) est :

$$\int_0^\infty \lambda\ e^{-\lambda t}\ P_{ij}(t)\ dt = \lambda\ R_{ij}(\lambda)$$

(on dit que S est un <u>temps d'arrêt</u>).

<u>Equation (F_1')</u> - D'après l'équation (F_1), interprétée comme une équation de convolution, la résolvante vérifie l'équation équivalente à (F_1) :

$$R_{ij}(\lambda) = \frac{\delta_{ij}}{a_i + \lambda} + \frac{a_i}{a_i + \lambda} \sum_k \varpi_{ik}\ R_{kj}\ (\lambda)$$

Pour obtenir une écriture condensée, nous introduirons les matrices D et χ de composantes :

$$(6) \qquad \begin{cases} D_{ij}(\lambda) = \dfrac{\delta_{ij}}{a_i + \lambda} \\ \\ \chi_{ij}(\lambda) = \dfrac{a_i}{a_i + \lambda} \quad \varpi_{ij} \end{cases}$$

L'équation de Feller s'écrit alors sous forme matricielle :

$$(F_1') \qquad R = D + \chi R$$

c/ <u>Loi du premier point d'accumulation</u>.

Lorsque l'on part de e_i dans la construction de proche en proche, la probabilité pour que le premier changement d'état se produise à un instant T_1 antérieur à S et conduise à l'état e_j est :

$$P(S \geqslant T_1)\, \varpi_{ij} = E[e^{-\lambda T_1}]\, \varpi_{ij} = \frac{a_i}{a_i + \lambda}\, \varpi_{ij} = \chi_{ij}(\lambda)$$

Lorsque cet évènement est réalisé, la probabilité conditionnelle d'avoir $T_2 < S$ et l'état e_k succédant à e_j en T_2 est à nouveau $\chi_{jk}(\lambda)$, à cause de la loi exponentielle de S. on voit ainsi que la matrice χ^2, de composantes

$$\chi_{ik}^{(2)} = \sum_k \chi_{ij}\, \chi_{jk}$$

donne la probabilité pour que le deuxième changement d'état ait lieu avant S et donne e_k. Plus généralement, la composante $\chi_{ij}^{(n)}$ de la matrice χ^n est la probabilité pour que le $n^{\text{ième}}$ changement d'état ait lieu en $T_n < S$ et donne l'état e_j. On a donc :

$$\chi^n 1 = P(T_n \leqslant S) = E(e^{-\lambda T_n}) \leqslant 1$$

et les $\chi^n 1$, transformées de Laplace des T_n, constituent une suite décroissante. Ils admettent donc une limite :

$$\lim_n \chi^n 1 = \chi^\infty 1$$

Cette limite est la probabilité de l'évènement $\bigcap_{n>0} \{T_n \leqslant S\}$ c'est-à-dire de $\{T_\infty \leqslant S\}$. Ainsi :

$$\chi^\infty 1 = E[e^{-\lambda T_\infty}] \tag{7}$$

et la condition $\chi^\infty 1 = 0$ est équivalente à $P(T_\infty < \infty) = 0$, qui est la condition pour que notre construction de proche en proche couvre l'axe des $t > 0$ en entier.

Remarquons que la matrice χ^∞ existe effectivement: en effet, on a $\chi_{ij} = \frac{a_i}{a_i + \lambda} \varpi_{ij} \leqslant 1$, d'où, par recurrence :

$$\chi_{ij}^{(n+1)} = \sum_k \chi_{ik}\, \chi_{kj}^{(n)} \leqslant \sum_k \chi_{ik}\, \chi_{kj}^{(n-1)} = \chi_{ij}^{(n)}$$

et cette suite décroissante admet une limite χ_{ij}^∞. Il est clair que les conditions $\chi^\infty = 0$ et $\chi^\infty 1 = 0$ sont équivalentes, (et équivalentes à $P(T_\infty < \infty) = 0$)

d/ <u>La solution minimale $\bar{R}$ de (F'_1)</u>

Si l'équation (F'_1) a une solution R, on voit par recurrence que R vérifie :

(8) $$R = R^{(n)} + \chi^{n+1} R$$

avec

(8') $$R^{(n)} = \sum_{r=o} \chi^r D = D + \chi R^{(n-1)}$$

La relation de recurrence (8'), comparée à (2), montre que $R^{(n)}(\lambda)$ est <u>la transformée de Laplace de $P^{(n)}(t)$</u>. On a donc :

$$R^{(n)} 1 \leqslant \frac{1}{\lambda}$$

et la suite croissante des $R^{(n)}_{ij}$ admet une limite $\bar{R}_{ij}$, qui est d'ailleurs <u>la transformée de $\bar{P}_{ij}(t)$</u> (à cause de la continuité de la transformée de Laplace). La matrice $\bar{R}$ (λ) vérifie :

(9) $$\bar{R} \; 1 \leqslant \frac{1}{\lambda}$$

et, d'après (8'), constitue une solution de (F'_1) : c'est même <u>la solution minimale</u>. Toute autre solution R (avec $R_{ij} > 0$), en effet, vérifie la relation que l'on obtient en passant à la limite dans (8), soit :

(10) $$R = \bar{R} + \chi^{\infty} R \geqslant \bar{R}$$

(noter aussi $\chi^{\infty} \bar{R} = 0$)

e/ Unicité de la solution $\bar{\bar{R}}$

Il résulte déjà de (10) que la condition $\chi^{\infty} = 0$ entraîne que la solution minimale $\bar{\bar{R}}$ est la seule solution bornée de l'équation (F_1'). Montrons la réciproque, et pour celà, considérons la suite décroissante des vecteurs $h^{(n)}$:

$$\begin{cases} h^{(o)} & = \chi \, 1 \\ h^{(n)} & = \chi^{(n+1)} \, 1 \end{cases}$$

Comme $\chi = (I - \lambda D)\, \varpi$, on a $h^{(o)} = 1 - \lambda \, R^{(o)} \, 1$ (puisque $\varpi \, 1 = 1$) et, par recurrence :

$$\chi^{n+1} \, 1 = \chi^{n}(I - \lambda D) \, \varpi \, 1 = 1 - \lambda(R^{(n)} + \chi^{n} \, D) \, 1$$

d'où, d'après (8') :

$$h^{(n)} = \chi^{n+1} \, 1 = 1 - \lambda R^{(n+1)} \, 1$$

En passant à la limite, nous trouvons :

(11) $$\chi^{\infty} \, 1 = 1 - \lambda \, \bar{\bar{R}} \, 1$$

Ainsi, les conditions $\chi^{\infty} = 0$ et $\bar{\bar{R}} \, 1 = 1/\lambda$ sont équivalentes. Or la matrice positive :

$$R = \bar{\bar{R}} + \frac{1}{\lambda} \, \chi^{\infty}$$

vérifie toujours (F_1'), car :

$$D + \chi R = D + \chi \bar{R} + \frac{1}{\lambda} \chi \chi^{\infty} = \bar{R} + \frac{1}{\lambda} \chi^{\infty} = R$$

et de plus, d'après (11), on a $R1 = \frac{1}{\lambda}$, de sorte que R est une solution admissible. Par suite, si la solution $\bar{R}$ est unique, on a nécessairement $\chi^{\infty} 1 = 0$, et il en résulte alors $\bar{R}\, 1 = \frac{1}{\lambda}$, c'est-à-dire $\sum_j \bar{P}_{ij}(t) = 1$.

En résumé :

Théorème : Soient a un vecteur de composantes $\geqslant 0$, ϖ la matrice de transition d'une chaîne de Markov à temps discret, et D et χ les matrices définies par les relations (6). L'équation

$$(F_1') \qquad R = D + \chi R$$

admet la solution minimale $\bar{R} = \sum_{n=o}^{\infty} \chi^n D$ - $\bar{R}$ est la transformée de Laplace de la matrice $\bar{P}(t)$ que l'on obtient en construisant de proche en proche le processus à l'aide de a et ϖ. La matrice $\bar{P}(t)$ vérifie (F_1), (F_2), (K_1) et (K_2), la relation des demi-groupes $\bar{P}(t+t') = \bar{P}(t)\, \bar{P}(t')$ et l'inégalité

$$\bar{P}(t)\, 1 \leqslant 1$$

Cette solution $\bar{P}(t)$ de (F_1) (ou $\bar{R}$ de F_1') est l'unique solution bornée ($\bar{P}\, 1 \leqslant 1$, ou $\bar{R}\, 1 < 1/\lambda$) de ces équations si et seulement si l'une des 4 conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

a/ $\bar{P}(t)\, 1 = 1$

b/ $\lambda \bar{R}(\lambda) 1 = 1 \quad (\lambda > 0)$

c/ $\chi^{\infty} = \lim\limits_{n\to\infty} \chi^{n} = 0$ (ou $\chi^{\infty} 1 = 0$)

d/ Dans la construction de proche en proche, il n'y a presque sûrement pas de point d'accumulation de changement d'état : $P(T_{\infty} < \infty) = 0$

IV - LIMITE ERGODIQUE DES $P_{ij}(t)$

Remarquons, tout d'abord, que les états essentiels sont les mêmes dans la chaîne discrète dont la matrice de transition est ϖ_{ij} et dans le processus $P(t)$ lui-même (si un chemin de e_i à e_j a une longueur n et une probabilité >0 pour la chaîne discrète, la somme des longueurs de ces n segments (somme des n variables indépendantes de loi exponentielle) est presque sûrement finie).

Notons aussi que tout état essentiel est apériodique pour $P(t)$, puisque les lois des durées de séjours successifs dans les différents états sont exponentielles (donc non arithmétiques) : on le voit aussi en remarquant que $P_{ii}(t) \geq e^{-a_i t}$ ne s'annule jamais.

Critère : Un état e_i est transitoire ou persistant selon que l'intégrale $\int_0^{\infty} P_{ii}(t)\, dt$ converge ou diverge. Il est persistant et nul si l'intégrale diverge et si $P_{ii}(t) \to 0$ pour t infini.

En effet, désignons par $F_{ij}(d\tau)$ la probabilité pour que le système, partant de e_i, entre pour la première fois dans l'état e_j, entre les instants τ et $\tau+d\tau$, et par $F_{ii}(d\tau)$ la loi de la durée d'un cycle complet (probabilité pour que le système, étant parti de e_i et ayant quitté cet état, le système entre à nouveau pour la première fois en e_i entre τ et $\tau+ d\tau$). Ces mesures vérifient $\int_0^\infty F_{ij}(d\tau) \leqslant 1$ et $\int_0^\infty F_{ii}(d\tau) \leqslant 1$. On trouve, à l'aide des raisonnements habituels :

$$(16) \qquad \begin{cases} P_{ii}(t) = e^{-a_i t} + \int_0^t F_{ii}(d\tau)\, P_{ii}(t-\tau) \\ P_{ij}(t) = \int_0^t F_{ij}(d\tau)\, P_{jj}(t-\tau) \qquad (i \neq j) \end{cases}$$

Soient Φ_{ii} et Φ_{ij} les transformées des lois F_{ii} et F_{ij}, $R_{ij}(\lambda)$ celle de la fonction $P_{ij}(t)$. Les relations (16) équivalent à :

$$(16') \qquad \begin{cases} R_{ii}(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda + a_i} + \Phi_{ii}(\lambda)\, R_{ii}(\lambda) \\ R_{ij}(\lambda) = \Phi_{ij}(\lambda)\, R_{jj}(\lambda) \end{cases} \qquad (\lambda > 0)$$

On en tire :

$$(17) \qquad \begin{aligned} R_{ii}(\lambda) &= \frac{1}{\lambda + a_i} \, \frac{1}{1 - \Phi_{ii}(\lambda)} \\ R_{ij}(\lambda) &= \frac{1}{\lambda + a_j} \, \frac{\Phi_{ij}(\lambda)}{1 - \Phi_{jj}(\lambda)} \end{aligned}$$

La relation (17) montre que :

$$\Phi_{ii}(o) = \int_o^\infty F_{ii}(d\tau)$$

est égal à 1 si et seulement si $R_{ii}(\lambda) \to \infty$ pour $\lambda \to 0$, c'est-à-dire si l'intégrale $\int_o^\infty P_{ii}(t)\,dt = \infty$. Celà démontre la première partie du critère. Si maintenant e_i est un état persistant, ses retours successifs constituent un processus de renouvellement, dont la loi F_{ii} est non-arithmétique. Le théorème du renouvellement (2ème énoncé) appliqué à (16) montre alors :

$$\lim_{t \to \infty} P_{ii}(t) = \frac{1}{\mu_{ii}} \int_o^\infty e^{-a_i t}\,dt = \frac{1}{a_i\,\mu_{ii}}$$

avec $\mu_{ii} = \int_o^\infty x\,F_{ii}(dx)$ (durée moyenne d'un cycle e_i, e_i)

On note que $m_i = 1/a_i$ est aussi l'espérance de la durée d'un séjour continu dans l'état e_i, d'où le résultat intéressant :

$$\lim_{t \to \infty} P_{ii}(t) = \frac{m_i}{\mu_{ii}} \tag{18}$$

qui achève de démontrer le critère.

Remarque: L'intégrale $\int_o^\infty P_{ii}(t)\,dt$ (lorsqu'elle est finie) représente l'espérance du temps passé dans l'état e_i. On le voit intuitivement en remarquant que la probabilité pour que le système séjourne dans l'état e_i pendant l'intervalle de temps $(t, t + \delta t)$ est de la forme $P_{ii}(t) + O(\delta t)$, et en intégrant en t.

Plus généralement, la résolvante :

$$R(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_{ii}(t)\, dt$$

représente l'espérance du temps passé par le système dans l'état e_i antérieurement au temps d'arrêt S.

Comportement ergodique de la chaîne. D'après un raisonnement déjà fait plusieurs fois la seconde relation (16) montre $P_{ij}(t) \to 0$ si e_j est transitoire ou persistant et nul, puis, compte tenu aussi de (18),

$$\lim_{t \to \infty} P_{ij}(t) = b_{ij} \frac{m_i}{\mu_{ii}}$$

avec $b_{ij} = \int_0^\infty F_{ij}(d\tau) =$ probabilité d'atteindre e_j à partir de e_i. En particulier, si e_i et e_j sont deux états persistants positifs appartenant à une même classe, cette limite est $\frac{m_i}{\mu_{ii}}$. On note d'ailleurs que les états de la chaîne continue $P_{ij}(t)$ sont de même nature que ceux de la chaîne discrète dont la matrice de transition est $P_{ij}(\alpha)$ ($\alpha > 0$ quelconque). Il suffit pour le voir de remarquer que l'on a $P^n(\alpha) = P(n\alpha)$, et de comparer le critère ci-dessus à celui des chaînes discrètes. On en déduit aussitôt :

Proposition 1 _ Si les états de la chaîne P(t) constituent une seule classe d'états persistants, on a $\lim_{t\to\infty} P(t) = 0$ si ces états sont persistants et nuls, et :

$$(19) \qquad p_i = \lim_{t\to\infty} P_{ki}(t) = \frac{m_i}{\mu_{ii}}$$

s'ils sont persistants positifs (m_i, durée moyenne d'un séjour continu dans l'état e_i, μ_{ii} temps de retour moyen de l'état e_i) Dans ce cas, les p_i constituent un système de probabilités stationnaires :

$$(20) \qquad \sum_i p_i = 1 \quad , \quad \sum_i p_i P_{ij}(t) = p_j \qquad (\forall t > 0)$$

Inversement, si l'on peut trouver des $t_i \geqslant 0$ vérifiant (20), les états sont persistants positifs, et ces t_i vérifient (19).

Soient p_i des nombres $\geqslant 0$ avec $\sum_i p_i \leqslant 1$. Considérons la fonction $p_j(t) = \sum_i p_i P_{ij}(t)$, qui représente la probabilité de e_j au temps t. En multipliant (F_1) par p_i et en sommant en i, avant de dériver en t, on trouve :

$$\frac{d}{dt} p_j(t) = -\sum_i a_i p_i P_{ij}(t) + \sum_{i,k} a_i p_i \varpi_{ik} P_{kj}(t)$$

et, en faisant t = 0 ($P_{ij}(o) = \delta_{ij}$) :

$$p'_j(o) = -a_j p_j + \sum_i a_i p_i \varpi_{ij}$$

a/ Si donc la condition (20) est remplie, on a $p_j'(o) = 0$ et :

$$a_j\ p_j = \sum_i a_i\ p_i\ \varpi_{ij}$$

Comme les p_i ne sont pas tous nuls, il en résulte que la matrice ϖ_{ij} admet le vecteur propre $a_i p_i$ à gauche avec la valeur propre 1. Donc <u>les états de la chaîne discrète sont tous persistants positifs</u>, il existe un vecteur unique Π_i avec $\sum \Pi_i = 1$, $\sum_i \Pi_i\ \varpi_{ij} = \Pi_j$, et on a par suite :

$$\Pi_i = \frac{a_i\ p_i}{\sum_i a_i p_i}$$

ou, ce qui revient au même (avec $m_i = 1/a_i$) :

(21) $$p_i = \frac{m_i\ \Pi_i}{\sum_j m_j\ \Pi_j}$$

En comparant avec (19), on en déduit encore :

(22) $$\Pi_i\ \mu_{ii} = \sum_j m_j\ \Pi_j < \infty$$

b/ Inversement, supposons que les états de la chaîne discrète soient tous persistants positifs, et soit Π_i le système de probabilités stationnaires de ϖ_{ij}. Si de:plus $\sum_j m_j \Pi_j < \infty$ $(m_j = 1/a_j)$, les p_i définies en (21) vérifient

$a_j\ p_j = \sum_i a_i\ p_i\ \varpi_{ij}$, c'est-à-dire

$$p_i'(o) = \sum_j p_j\ P_{ji}'(o) = 0$$

Il suffit de multiplier par P(t) et d'utiliser (K_1) pour en déduire $p_i(t)$ = constante = p_i, donc la chaîne P(t) admet les limites ergodiques p_i.

Par contre, si $\sum m_j\ \Pi_j = \infty$, $P(t) \to 0$ pour $t \to \infty$ (car s'il existait une limite ergodique, elle vérifierait (21).

Enonçons :

Proposition 2 <u>Lorsque les états de la chaîne $P_{ij}(t)$ constituent une seule classe d'états persistants, ces états sont tous positifs si et seulement si ils sont positifs pour la chaîne discrète ϖ_{ij} et que les probabilités stationnaires Π_j de ϖ_{ij} vérifient la condition</u>

$$\sum_j m_j\ \Pi_j < \infty \qquad (m_j = \frac{1}{a_j})$$

<u>Les relations suivantes sont alors vérifiées</u> :

$$\Pi_i = \frac{a_i\ p_i}{\sum_j a_j\ p_j} \quad , \quad p_i = \lim_{t\to\infty} P_{ji}(t) = \frac{m_i\ \Pi_i}{\sum_j m_j\ \Pi_j}$$

<u>et le temps de retour moyen μ_{ii} d'un état e_i vérifie</u> :

$$\pi_i \, \mu_{ii} = \sum_j m_j \pi_j \quad , \quad p_i = \frac{m_i}{\mu_{ii}}$$

En particulier, si la chaîne est finie la condition $\sum_j m_j \pi_j < \infty$ est toujours vérifiée, et la proposition s'applique.

CHAPITRE V

LES FONCTIONS ALEATOIRES STATIONNAIRES D'ORDRE 2

I - PROCESSUS STATIONNAIRES D'ORDRE DEUX

On a vu, au chapitre 0, la définition générale d'une fonction aléatoire. La théorie que nous allons exposer s'applique aussi bien aux fonctions aléatoires (définies sur l'espace euclidien à n dimensions) qu'aux processus stochastiques (définis sur la droite réelle $T = (-\infty, +\infty)$, interprétée comme un axe des temps). C'est uniquement pour simplifier les notations que nous adoptons la terminologie (unidimensionnelle) des processus stochastiques.

Soit donc $X(t)$ un processus stochastique, $t_1, t_2 \ldots t_k$ des instants quelconques, et :

$$F(x_1, x_2, \ldots x_k; t_1, t_2, \ldots t_k) = P[X(t_1) < x_1, \ldots X(t_k) < x_k]$$

la fonction de répartition des variables aléatoires $X(t_1) \ldots X(t_k)$. Il est évident que l'ordre dans lequel on a rangé les instants d'appui ne joue aucun rôle ici. Autrement dit, pour toute permutation $(i_1, \ldots i_k)$ de $(1, \ldots k)$, on doit avoir :

$$(1) \qquad F(x_{i_1}, \ldots x_{i_k}; t_{i_1}, \ldots t_{i_k}) = F(x_1, \ldots x_k; t_1, \ldots t_k)$$

La condition (1) est une condition de symétrie que la loi temporelle soit nécessairement respecter.

Moments de la loi temporelle.

Il n'y a aucune difficulté à définir le moment $M_{\alpha_1 .. \alpha_k}(t_1, ... t_k)$ d'ordre $(\alpha_1 .. \alpha_k)$, dépendant des instants $t_1, ... t_k$, comme l'espérance mathématique, si elle existe, du produit $\left[X(t_1)\right]^{\alpha_1} \left[X(t_2)\right]^{\alpha_2} ...$. $M_{\alpha_1 ... \alpha_k}(t_1, t_2 ... t_k)$ ne dépend que de la fonction de répartition $F(x_1, ... x_k ; t_1, ... t_k)$, c'est-à-dire uniquement de la loi temporelle.

En particulier, soit $m(t)$ le moment d'ordre 1 (s'il existe):

$$M_1(t) = m(t) = E\left[X(t)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \; F(dx;\; t)$$

C'est une fonction de la seule variable t. Comme on peut toujours remplacer $X(t)$ par $X(t) - m(t)$, nous la supposerons dans la suite identiquement nulle :

$$m(t) \equiv 0 \qquad (2)$$

De même, le moment d'ordre (1,1)

$$M_{1,1}(t_1, t_2) = E\left[X(t_1)\; X(t_2)\right]$$

ne dépend que des deux instants t_1 et t_2. Comme $m(t)$ est supposée nulle, ce moment est égal à la <u>covariance</u> de $X(t_1)$ et $X(t_2)$. Nous écrirons $K(t_1, t_2)$ au lieu de $M_{1,1}(t_1, t_2)$.

$$(3) \qquad K(t_1,t_2) = E\left[X(t_1)\ X(t_2)\right]$$

En particulier, prenant $t_1 = t_2 = t$, on obtient la variance $\sigma^2(t)$ de $X(t)$:

$$(4) \qquad \sigma^2(t) = K(t,t)$$

Processus Stationnaire.

Un processus stochastique $X(t)$ est dit stationnaire lorsque sa loi temporelle est homogène dans le temps, c'est-à-dire lorsque l'on a :

$$(5) \qquad F(X_1,\dots x_k;\ t_1,\dots t_k) = F(x_1,\dots x_k;\ t_1 + h,\dots t_k + h)$$

quels que soient les instants $t_1 \dots t_k$ et la translation h.

Les moments d'un processus stationnaire possèdent la même propriété d'homogénéité dans le temps. En particulier :

$$\begin{cases} m(t) = m(t + h) \\ K(t_1,t_2) = K(t_1 + h;\ t_2 + h) \end{cases}$$

Il en résulte que $m(t)$ est une constante, que nous supposons d'ailleurs nulle conformément à (2), et que la covariance $K(t_1,t_2)$ ne dépend que de la différence $t_1 - t_2$, et non de t_1 et t_2 séparément (pour le voir, il suffit de prendre $h = -t_2$ dans la relation ci-dessus) :

$$(6) \qquad \begin{cases} m(t) = 0 \\ K(t_1, t_2) = K(t_1 - t_2) \end{cases}$$

Inversement, si un processus stochastique vérifie les relations (6) on dit qu'il est <u>stationnaire au sens large</u> ou <u>stationnaire d'ordre deux</u>.

On notera qu'un processus stationnaire au sens large peut très bien ne pas être stationnaire au sens strict, car (5) n'est nullement une conséquence de (6). Dans beaucoup d'applications, cependant, on n'utilise que des propriétés liées aux moments des deux premiers ordres, de sorte qu'il n'y a pas lieu de distinguer entre processus stationnaires sensu lato ou sensu stricto. En particulier, les propriétés de la covariance restent les mêmes.

<u>La covariance K(h)</u>.

Soit X(t) un processus <u>stationnaire</u>. D'après les relations (6), la fonction

$$(7) \qquad K(h) = E\left[X(t)\ X(t+h)\right]$$

ne dépend pas de t, et représente la covariance (stationnaire) des valeurs prises par X(t) en deux instants quelconques distants de h. N'importe quelle fonction ne peut pas jouer le rôle d'une covariance K(h). Le théorème de Bochner donne une condition nécessaire et suffisante que doit vérifier une fonction pour être la covariance K(h) d'un processus stationnaire d'ordre deux.

Définition - Fonctions de type positif. Une fonction $g(h)$, à valeurs réelles ou complexes est de type positif, si pour tout système $(h_1, \dots h_k)$ de nombres réels et $(\lambda_1, \dots \lambda_k)$ de nombres complexes, on a :

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \lambda_i \bar{\lambda}_j \, g(h_j - h_i) \geqslant 0$$

Ces fonctions jouent un grand rôle en physique (où elles ont, en général, une signification énergétique), et aussi en calcul de probabilités, comme il résulte du théorème fondamental suivant, et des propositions qui en découlent:

Théorème de Bochner - Pour qu'une fonction continue à valeurs complexes $\Phi(u)$ soit fonction caractéristique d'une loi de probabilité $F(dx)$, il faut et il suffit que $\Phi(o) = 1$ et que $\Phi(u)$ soit de type positif.

On voit facilement que la condition est nécessaire : si l'on a :

$$\Phi(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux} \, F(dx)$$

il en résulte $\Phi(o) = 1$, et :

$$\sum_{j,k} \lambda_j \bar{\lambda}_k \, \Phi(u_j - u_k) = \sum_{j,k} \lambda_j \bar{\lambda}_k \int e^{i(u_j - u_k)x} \, F(dx)$$

$$= \int \Big| \sum_j \lambda_j \, e^{iu_j x} \Big|^2 \, F(dx) \geqslant 0$$

La démonstration de la réciproque est un peu plus longue, et nous ne la reproduirons pas.

Proposition 1 - Pour qu'une fonction réelle K(h) soit covariance d'un processus stochastique stationnaire d'ordre 2, il faut et il suffit qu'elle soit de type positif

En effet, si K(h) est la covariance d'un processus stationnaire d'ordre 2 X(t), soient $t_1, t_2, \ldots t_k$ des temps et $\lambda_1, \ldots \lambda_k$ des nombres complexes. La variable aléatoire :

$$Y = \left| \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \, X(t_i) \right|^2 = \sum_{i,j} \lambda_i \, \bar{\lambda}_j \, X(t_i) \, X(t_j) \geqslant 0$$

vérifie $E(Y) \geqslant 0$, donc, d'après (7)

$$E\,(Y) = \sum_{i,j} \lambda_i \, \bar{\lambda}_j K(t_j - t_i) \geqslant 0$$

Par suite K(h) est de type positif.

Inversement, si,une fonction réelle K(h) est de type positif, on montre qu'il existe un processus stationnaire à loi temporelle gaussienne dont K(h) est la covariance : les processus à loi gaussienne ont, en effet, ce grand avantage que leur loi temporelle est déterminée dès que l'on connaît l'espérance $E[X(t)]$ et la covariance $K(t_1, t_2)$.

Conséquence. Comme toute fonction réelle de type positif, la covariance K(h) d'un processus stationnaire d'ordre 2 vérifie les relations :

$$(8) \qquad \left| \begin{array}{ll} K(o) \geqslant 0 & \\ K(-h) = K(h) & \\ |K(h)| \leqslant K(o) & \text{(Inégalité de Schwarz)} \end{array} \right.$$

Les relations (8) sont du reste évidentes : K(o) est la variance de X(t) et K(h) la covariance de X(t) et X(t+h), donc aussi de X(t-h) et X(t) puisque le processus est stationnaire.

Proposition 2 - Pour qu'un processus stationnaire (de variance finie) X(t) soit continu en moyenne quadratique, il faut et il suffit que sa covariance K(h) soit continue en h = 0.

Par définition (Cours de Probabilité, ch. IV, parag. 3) X(t) est continu en moyenne quadratique si l'on a :

$$\lim_{h \to o} E\left[[X(t+h) - X(t)]^2\right] = 0$$

Or, on a :

$$E\left[[X(t+h) - X(t)]^2\right] = 2\,[K(o) - K(h)]$$

d'où la proposition 2.

Remarque - On démontre que toute fonction K(h) de type positif est continue en tout point h si elle est continue en h = 0 :

ainsi <u>la continuité en moyenne quadratique de X(t) est équivalente à la continuité ordinaire de sa covariance K(h)</u>.

<u>Proposition 3</u> - Pour qu'une fonction K(h) soit la covariance d'un processus continu en moyenne quadratique, et de variance finie, il faut et il suffit qu'il existe une fonction de répartition G(x) telle que l'on ait

$$K(h) = K(o)\int_{-\infty}^{+\infty} \cos hx \, d\, G(x) \tag{9}$$

La condition est nécessaire : K(h), covariance d'un processus continu en moyenne quadratique, est continue en h = o (propriété 2) et de type positif (propriété 1). Donc, d'après le théorème de Bochner, il existe une fonction de répartition G(x) telle que :

$$K(h) = K(o)\int e^{ihx} \, d\, G(x)$$

Comme K(h) est réelle, la répartition définie par G(x) est symétrique [on a G(x) = 1 - G(-x + o)] et (9) en résulte.

Réciproquement, si K(h) est de la forme (9), elle est continue, et le théorème de Bochner montre qu'elle est de type positif. On démontre qu'il existe alors un processus stationnaire à loi temporelle gaussienne admettant K(h) comme covariance (donc continu en moyenne quadratique d'après la proposition 2).

Ainsi la classe des fonctions de covariance des processus continus en moyenne quadratique et de variance finie s'identifie à la classe des fonctions de type (9) et aussi à la classe des fonctions de type positif réelles et continues. Nous verrons, au paragraphe 4, que la relation (1) possède une signification physique très riche. Elle représente, en effet, la <u>décomposition spectrale de l'énergie</u>.

II - DERIVATION STOCHASTIQUE

Bien que les notions d'intégration et de dérivation en moyenne quadratique soient surtout utiles dans le cas des processus stationnaires, il est préférable de les introduire dans leur généralité. Dans ce qui suit, $X(t)$ désignera un processus non stationnaire de <u>variance finie</u>, de moyenne $m(t) \equiv 0$ et de covariance $K(t_1,t_2)$. Les énoncés se particulariseront sans difficulté au cas où $X(t)$ est stationnaire (sensu stricto ou sensu lato) en prenant $K(t_1,t_2) = K(t_1-t_2)$.

<u>Définition</u> - <u>On dit qu'un processus $X'(t)$ est la dérivée en moyenne quadratique du processus $X(t)$ si $\frac{X(t+h)-X(t)}{h}$ converge en moyenne quadratique vers $X'(t)$ lorsque h tend vers 0, c'est-à-dire si l'on a</u> :

$$(10) \qquad \lim_{h \to 0} E \left\{ \left[\frac{X(t+h) - X(t)}{h} - X'(t) \right]^2 \right\} = 0$$

Pour trouver une condition nécessaire et suffisante de dérivabilité, nous utiliserons le critère de Cauchy (Cours de Probabilité, ch. IV, parag. 3) sous la forme suivante :

Lemme - Soit $X_\lambda(t)$ un processus admettant une variance finie et dépendant d'un paramètre réel λ. Pour que $X_\lambda(t)$ converge en moyenne quadratique vers un processus $X(t)$ lorsque $\lambda \to 0$, il faut et il suffit que pour tout t la limite :

$$\lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ \lambda' \to 0}} E\left[X_\lambda(t)\, X_{\lambda'}(t)\right]$$

existe (et soit la même quelle que soit la manière dont λ et λ' tendent vers 0). La covariance $K(t,t')$ de la limite $X(t)$ est alors donnée par :

$$K(t,t') = \lim_{\lambda \to 0} E\left[X_\lambda(t)\, X_\lambda(t')\right] \tag{11}$$

a/ D'après le critère de Cauchy, $X_\lambda(t)$ converge en moyenne quadratique si, et seulement si :

$$\lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ \lambda' \to 0}} E\left|[X_\lambda(t) - X_{\lambda'}(t)]^2\right| =$$

(12)

$$= \lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ \lambda' \to 0}} \left\{ E\left|X_\lambda(t)^2\right| + E\left|X_{\lambda'}(t)^2\right| - 2\, E\left|X_\lambda(t)\, X_{\lambda'}(t)\right| \right\} = 0$$

On voit immédiatement que la condition de l'énoncé entraîne l'égalité ci-dessus, donc aussi la convergence en moyenne quadratique.

b/ Inversement, supposons que $X_\lambda(t)$ converge en moyenne quadratique vers $X(t)$. L'inégalité de Schwarz peut s'écrire

$$E\left[[X_\lambda(t) - X(t)]^2\right] = E\left[X_\lambda(t)^2\right] + E\left[X(t)^2\right] - 2\,E\left[X(t)\;X_\lambda(t)\right]$$

$$\geqslant \left|\sqrt{E[X_\lambda(t)^2]} - \sqrt{E[X(t)^2]}\right|^2$$

et donne

$$\lim_{\lambda \to 0} E\left[X_\lambda(t)^2\right] = E\left[X(t)^2\right]$$

Le critère (12) de Cauchy montre alors :

$$\lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ \lambda' \to 0}} E\left[X_\lambda(t)\;X_{\lambda'}(t)\right] = E\left[X(t)^2\right] \tag{13}$$

et la condition de l'énoncé est vérifiée.

c/ La relation (13) s'identifie avec (11) lorsque l'on prend $t = t'$.

Pour $t \neq t'$, la relation (11) se déduit facilement de l'inégalité de Schwarz. On a :

$$E\left[\left(X_\lambda(t)-X(t)+X_\lambda(t')-X(t')\right)^2\right] \leqslant \left\{\sqrt{E\left[X_\lambda(t)-X(t)\right]^2} + \sqrt{E\left[X_\lambda(t')-X(t')\right]^2}\right\}^2$$

d'où l'on déduit que $X_\lambda(t) + X_\lambda(t')$ converge en moyenne quadratique vers $X(t) + X(t')$, ce qui entraîne, d'après (13) :

$$\lim_{\lambda \to 0} \left\{ E\left[X_\lambda(t)^2\right] + E\left[X_\lambda(t')^2\right] + 2\,E\left[X_\lambda(t)\;X_\lambda(t')\right] \right\}$$

$$= E\left[X(t)^2\right] + E\left[X(t')^2\right] + 2\,E\left[X(t)\;X(t')\right]$$

Comme :

$$\lim_{\lambda \to 0} E\left[X_\lambda(t)^2\right] = E\left[X(t)^2\right]$$

$$\lim_{\lambda \to 0} E\left[X_\lambda(t')^2\right] = E\left[X(t')^2\right]$$

Il vient bien :

$$\lim_{\lambda \to 0} E\left[X_\lambda(t)\;X_\lambda(t')\right] = E\left[X(t)\;X(t')\right]$$

c'est-à-dire (11) :

Théorème 1 - Pour qu'un processus de variance finie X(t) soit dérivable en moyenne quadratique, il faut et il suffit qu'en tout t la limite :

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ \ell \to 0}} \frac{K(t+h,t+\ell)-K(t+h,t)-K(t,t+\ell)+K(t,t)}{h\,\ell} = \left[\frac{\partial^2 K(t_1,t_2)}{\partial t_1\;\partial t_2}\right]_{t_1=t_2=t}$$

existe quelle que soit la manière dont h et ℓ tendent vers 0. Dans ces conditions, la dérivée seconde $\dfrac{\partial^2 K(t_1,t_2)}{\partial t_1\;\partial t_2}$ existe aussi pour $t_1 \neq t_2$ et coïncide avec la covariance de la dérivée de X(t).

C'est une simple application du Lemme : X(t) est dérivable si, et seulement si

$$\lim_{\substack{h \to o \\ \ell \to o}} E\left[\left(\frac{X(t+h) - X(t)}{h}\right)\left(\frac{X(t+\ell) - X(t)}{\ell}\right)\right]$$

$$= \lim_{\substack{h \to o \\ \ell \to o}} \frac{K(t+h,t+\ell) - K(t+h,t) - K(t,t+\ell) + K(t,t)}{h\,\ell}$$

existe. Cette limite, qui est la dérivée seconde $\dfrac{\partial^2 K(t_1,t_2)}{\partial t_1\, \partial t_2}$ en $t_1 = t_2 = t$ est alors égale, d'après (13), à $E\,[X'(t)^2]$. La covariance de X'(t) est alors donnée par (11)

$$\lim_{h \to o} E\left(\frac{X(t+h) - X(t)}{h} \cdot \frac{X(t'+h) - X(t')}{h}\right)$$

$$= \lim_{h \to o} \frac{K(t+h,t'+h) - K(t,t'+h) - K(t+h,t') + K(t,t')}{h^2}$$

$$= \frac{\partial^2 K(t,t')}{\partial t\, \partial t'}$$

On notera que l'existence de la dérivée seconde de $K(t_1,t_2)$ sur la bissectrice $t_1 = t_2 = t$ <u>entraîne son existence en tout point</u> (t_1,t_2)

<u>Corollaire</u> - <u>Pour qu'un processus stationnaire au sens large soit dérivable en moyenne quadratique il faut et il suffit que sa covariance K(h) soit deux fois dérivable en h = 0. Le processus</u>

dérivé est alors stationnaire au sens large et admet comme covariance stationnaire la dérivée seconde de $K(h)$ changée de signe, soit $- K''(h)$.

Il suffit d'appliquer le théorème précédent avec $K(t_1,t_2) = K(t_1 - t_2)$.

Généralisation - Les résultats précédents s'étendent d'eux-mêmes aux dérivées successives d'un processus $X(t)$. Ainsi, pour que la dérivée $X^{(k)}(t)$ d'un processus stationnaire (au sens large) existe, il faut et il suffit que $K(h)$ soit 2k fois dérivable en $h = 0$. Elle est alors, comme on sait 2k fois dérivable en tout point. La dérivée $X^{(k)}(t)$ est également stationnaire (au sens large) et admet la covariance :

$$(-1)^k \frac{d^{2k} K(h)}{d h^k}$$

III - INTEGRATION EN MOYENNE QUADRATIQUE

Soit $X(t)$ un processus(non stationnaire) de variance finie et de covariance $K(t_1,t_2)$. Soit aussi $p(t)$ une fonction numérique (réelle) non aléatoire. Nous cherchons à donner un sens à l'intégrale

$$I = \int_a^b X(t)\, p(t)\, dt$$

Une telle intégrale, qui dépend de la fonction aléatoire $X(t)$, ne peut définir qu'une variable aléatoire : la variable aléatoire I (lorsqu'elle aura reçu une définition précise) sera appelée <u>intégrale stochastique</u>.

Pour définir I, on procédera exactement comme dans le cas d'une intégrale ordinaire. Divisons l'intervalle (a,b) par des points :

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

et formons la somme :

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} X(t_i)\, p(t_i)\, (t_i - t_{i-1}) \tag{14}$$

I_n est une variable aléatoire (ordinaire) parfaitement définie.

Faisons tendre n vers l'infini, de telle manière que les intervalles (t_{i-1}, t_i) convergent uniformément vers 0 :

$$\sup_{1 \leqslant i \leqslant n} (t_i - t_{i-1}) \to 0$$

S'il existe une variable aléatoire I telle que I_n converge en moyenne quadratique vers I, on posera (conventionnellement) :

$$I = \int_a^b X(t)\, p(t)\, dt$$

et on dira que I est <u>l'intégrale (en moyenne quadratique)</u> de $p(t)\ X(t)$ sur le segment (a,b).

Si $a = -\infty$, ou $b = +\infty$, on définira l'intégrale comme la limite en moyenne quadratique (si elle existe) des intégrales correspondantes pour $a \to -\infty$ ou $b \to +\infty$.

<u>Théorème 2</u> _ <u>Soit $X(t)$ un processus de variance finie, de covariance $K(t_1, t_2)$.</u>

<u>Pour que l'intégrale en moyenne quadratique</u> :

$$I = \int_a^b X(t)\ p(t)\ dt \tag{15}$$

<u>existe, il faut et il suffit que l'intégrale double ordinaire</u> :

$$S^2 = \int_a^b \int_a^b K(t,t')\ p(t)\ p(t')\ dt\ dt' \tag{16}$$

<u>existe</u> : <u>dans ce cas, on a de plus</u>

$$S^2 = E\left[I^2\right] \tag{17}$$

Considérons les sommes de Riemann définies en (14). D'après le critère de Cauchy, l'intégrale I existe si, et seulement si :

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ m \to \infty}} E\left[(I_n - I_m)^2\right] = 0$$

Le lemme du paragraphe précédent montre (moyennant des changements de notations évidents) qu'il en est ainsi si, et seulement si la limite :

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ m \to \infty}} E(I_n \, I_m) = A$$

existe, et que l'on a alors $A = E(I^2)$.

Soient t_i et s_j les points de subdivisions utilisés dans la définition de I_n et I_m. On a :

$$I_n \, I_m = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} X(t_i) \, X(s_j) \, p(t_i) \, p(s_j) \, \Delta t_i \, \Delta s_j$$

et

$$E(I_n \, I_m) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} K(t_i, s_j) \, p(t_i) \, p(s_j) \, \Delta t_i \, \Delta s_j$$

Par suite la limite A existe si, et seulement si, l'intégrale (16) existe et on a alors $A = S^2$, donc $S^2 = E(I^2)$.

Par passage à la limite, on voit facilement que le théorème subsiste si a, ou b (ou les deux) deviennent infinis.

Corollaire 1 - Si $X(t)$ est un processus stationnaire au sens large, de covariance $K(h)$, l'intégrale (15) existe si, et seulement si l'intégrale :

$$(18) \qquad S^2 = \int_a^b \int_a^b K(t - t')\, p(t)\, p(t')\, dt\, dt'$$

existe. Dans ce cas, on a $S^2 = E(I^2)$.

Corollaire 2 - Si l'intégrale (à limite variable)

$$(19) \qquad Y(t) = \int_a^t X(s)\, p(s)\, ds$$

existe, la dérivée $Y'(t)$ du processus $Y(t)$ ainsi défini existe aussi et coïncide (presque certainement) avec $X(t)$

$$Y'(t) = X(t)$$

En effet, puisque $Y(t)$ existe, l'intégrale

$$S^2(t) = E\left[Y(t)^2\right] = \int_a^t \int_a^t K(s,s')\, p(s)\, p(s')\, ds\, ds'$$

existe aussi, et $Y(t)$ a une variance finie, donc aussi une covariance $Q(t,t')$ définie par :

$$Q(t,t') = E\left[Y(t)\, Y(t')\right]$$

Appliquons la relation (11) du lemme du paragraphe précédent. On a :

$$Q(t,t') = \lim_{n \to \infty} E\left(Y_n(t)\, Y_n(t')\right)$$

où $Y_n(t)$ et $Y_n(t')$ désignent des sommes de Riemann approchant $Y(t)$ et $Y(t')$. Soit, par exemple, $t < t' = t_n$ (et $t_k = t$ un point de subdivision coïncidant avec t) : on a

$$E\left(Y_n(t)\ Y_n(t')\right) = \sum_{i=i}^{k} \sum_{j=1}^{n} K(t_i,t_j)\ p(t_i)\ p(t_j)\ \Delta t_i\ \Delta t_j$$

d'où l'on déduit :

$$(20) \qquad Q(t,t') = \int_a^t ds \int_a^t K(s,s')\ p(s)\ p(s')\ ds'$$

Comme Q est dérivable en t et t', la dérivée $Y'(t)$ existe en moyenne quadratique.

Enfin, par des passages à la limite très analogues, on montre que l'on a :

$$E\left[\left(Y'(t) - X(t)\right)^2\right] = 0$$

d'où résulte la dernière affirmation.

Remarque 1 - Si l'espérance mathématique de X(t) n'est pas identiquement nulle, on voit facilement que l'on a :

$$E\left[\int_a^b X(t)\ p(t)\ dt\right] = \int_a^b E\,[X(t)]\ p(t)\ dt$$

sous réserve que l'intégrale stochastique existe en moyenne quadratique. De même, d'ailleurs, pour la dérivation

$$E\left[\frac{d}{dt}X(t)\right] = \frac{d}{dt}\,E\left[X(t)\right]$$

Ainsi le symbole E (espérance mathématique) peut être permuté avec les symboles d'intégration et de dérivation (sous réserve que l'intégrale ou la dérivée stochastiques existent en moyenne quadratique).

Remarque 2 - Supposons que, dans l'intégrale (19) à limite variable $X(t)$ soit stationnaire au sens large. Il n'en résulte pas du tout que $Y(t)$ soit également stationnaire, car la covariance $Q(t,t')$ définie en (20) n'est nullement de la forme $Q(t-t')$, lorsque $K(s,s')$ est de la forme $K(s-s')$. Celà tient à ce que la borne inférieure d'intégration a reste fixe lorsque t varie. Pour obtenir une intégrale stationnaire, on doit faire varier simultanément les deux bornes. Ceci nous conduit à définir une opération de convolution stochastique, très utilisée notamment en éléctronique.

Si $f_1(t)$ et $f_2(t)$ sont deux fonctions (ordinaires) on définit leur produit de convolution :

$$g = f_1 * f_2$$

par l'intégrale :

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t-s)\, f_2(s)\, ds = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(s)\, f_2(t-s)\, ds$$

Dans le cas particulier (très important en physique) où

$$f_1(t) = f_2(t) = 0 \qquad \text{pour } t < 0$$

la convolution prend la forme :

$$\begin{cases} g(t) = \displaystyle\int_0^t f_1(t-s)\, f_2(s) & (t \geqslant 0) \\ g(t) \equiv 0 & (t < 0) \end{cases}$$

<u>Convolution Stochastique</u> - Soit X(t) un processus stationnaire au sens large et p(t) une fonction (dite souvent fonction de <u>pondération</u>). Si l'intégrale stochastique :

$$(21) \qquad Y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t-s)\, p(s)\, ds = \int_{-\infty}^{+\infty} X(s)\, p(t-s)\, ds$$

existe en moyenne quadratique, on pose :

$$Y = p * X$$

et on dit que Y(t) est le convolué de X(t) par p(t).

Les intégrales à limite fixe (a,b) peuvent toujours s'obtenir comme cas particulier de (21) : il suffit de prendre $t = 0$, et d'annuler p(t) en dehors d'un intervalle convenablement choisi.

Soit K(h) la covariance stationnaire de X(t). La convolution (21) est définie si l'intégrale

$$E\left[Y(t)^2\right] = \iint K(s - s')\ p(s)\ p(s')\ ds\ ds'$$

est définie. La covariance de Y(t) existe aussi, dans ce cas, et se présente sous la forme :

$$Q(t,t') = \iint K(t - t' - s + s')\ p(s)\ p(s')\ ds\ ds'$$

Elle est de la forme (t-t'). Ainsi <u>la convolution Y(t) définie en (21) conserve le caractère stationnaire</u> au sens large. La covariance stationnaire Q(h) est donnée par :

$$(22) \qquad Q(h) = \iint K(h - s + s')\ p(s)\ p(s')\ ds\ ds'$$

Soit $\check{p}(s) = p(-s)$ <u>la transposée</u> de p(s) et

$$P = p * \check{p}$$

ou, explicitement

$$P(u) = \int p(v)\ p(u+v)\ dv$$

le produit de convolution de p par sa transposée. Posons s' = s + u et calculons (22) en variables s et u : il vient :

$$Q(h) = \int K(h + u)\ du \int p(s)\ p(s + u)\ ds = \int K(h + u)\ P(u) du$$

Comme K(h) = K(-h) et Q(h) = Q(-h) (en fait, on a également P(u) = P(-u)), la covariance Q(h) de la convoluée se met sous la forme d'un produit de convolution :

$$Q = K * P = K * p * \check{p} \tag{23}$$

<u>Cas particulier</u> - Dans beaucoup d'applications, Y(t) ne doit dépendre que des valeurs prises par le processus antérieurement à l'instant présent t. La fonction de pondération qui figure dans (21) doit alors vérifier :

$$p(t) \equiv 0 \qquad \text{pour } t < 0$$

et les formules précédentes s'écrivent :

$$\left|\begin{array}{ll} Y(t) = \int_0^{+\infty} X(t-s)\ p(s)\ ds & \\ P(u) = \int_0^{\infty} p(v)\ p(u+v)\ dv & (u \geqslant 0) \\ P(-u) = P(u) & \\ Q(h) = K * P = \int_{-\infty}^{+\infty} K(h+u)\ P(u)\ du & \end{array}\right.$$

Mentionnons encore le théorème suivant, dit parfois théorème ergodique, dont l'importance est grande en pratique. Il sert, en effet, de fondement à l'inférence statistique en permettant l'estimation de la valeur probable $E[X(t)]$ d'un processus stochastique par la *moyenne* temporelle (calculée sur une seule réalisation de X(t).

Théorème ergodique - Si X(t) est un processus stationnaire (au sens strict) continu en moyenne quadratique et de variance finie, l'intégrale stochastique

$$\frac{1}{T}\int_{0}^{T} X(t)\, d\, t$$

converge presque sûrement vers $E|X(t)|$ lorsque T tend vers l'infini.

IV - ANALYSE HARMONIQUE D'UN PROCESSUS STATIONNAIRE (AU SENS LARGE)

Avant d'énoncer le théorème général donnant la décomposition harmonique d'un processus stationnaire, examinons quelques exemples simples qui nous prépareront à en comprendre la signification et la très grande importance, notamment, pour les applications physiques.

Exemple 1 - Processus monochromatique. Soit Y et Z deux variables aléatoires ordinaires d'espérances mathématiques nulles, possédant une même variance finie σ^2, et indépendantes (il suffit, en réalité, de supposer que Y et Z ont une corrélation nulle). Soit λ un nombre réel constant. Posons :

$$X(t) = Y \cos \lambda\, t + Z \sin \lambda\, t$$

Le processus X(t) ainsi défini est caractérisé par la propriété suivante : toute réalisation de X(t) est une fonction sinusoïdale de période (non aléatoire) $\frac{2\pi}{\lambda}$. Seules la phase et l'amplitude de X(t) apparaissent comme aléatoires, sa longueur d'onde est déterminée.

Calculons la covariance :

$$E\left[X(t+h)\ X(t)\right] = E\left\{Y^2 \left[\cos \lambda(t+h) \cos \lambda\ t\right] + Y\ Z \left[\cos(\lambda t+h) \sin \lambda t + \sin(\lambda t+h) \cos \lambda\ t\right] + Z^2 \left[\sin \lambda(t+h) \sin \lambda\ t\right]\right\}$$

$$= \sigma^2 \left[\cos \lambda(t+h) \cos \lambda t + \sin \lambda(t+h) \sin \lambda t\right] = \sigma^2 \cos \lambda\ h$$

Ainsi X(t) est stationnaire au sens large et possède la covariance :

$$K(h) = \sigma^2 \cos \lambda\ h$$

Appliquons la propriété 3 du paragraphe 2 : on trouve immédiatement :

$$K(h) = \sigma^2 \int e^{ih\nu}\ d\ G(\nu)$$

avec

$$G(\nu) \left| \begin{array}{ll} 0 & \text{si } \nu \leqslant -\lambda \\ \frac{1}{2} & \text{si } -\lambda < \nu \leqslant \lambda \\ 1 & \text{si } \nu > \lambda \end{array} \right.$$

$G(\nu)$ est la fonction de répartition associée à la distribution discrète comportant une masse $\frac{1}{2}$ aux points $\nu = \lambda$ et $\nu = -\lambda$. En physique, K(h), liée au carré de l'amplitude, possède toujours une signification énergétique. Le résultat obtenu signifie que l'énergie du phénomène X(t) est localisable sur la fréquence $\nu = \lambda$ (les fréquences $-\lambda$ et $+\lambda$ ne sont pas réellement distinctes). Ainsi un phénomène stationnaire monochromatique possède une énergie monochromatique.

La fonction $G(\nu)$ est souvent appelée fonction de répartition spectrale de l'énergie. Elle donne, en effet, dans le cas d'un processus stationnaire la décomposition de l'énergie selon les bandes de fréquence. Ici X(t) est caractérisé par son spectre monochromatique.

Il faut bien voir que la possibilité d'une telle décomposition spectrale est liée à l'indépendance (absence de corrélation) entre les composantes aléatoires Y et Z. Supposons, en effet, que Y et Z aient une covariance non nulle

$$\beta = E(Y\,Z) \neq 0$$

On obtient alors :

$$E\left[X(t+h)\ X(t)\right] = \sigma^2 \cos \lambda\, h + \beta \sin \lambda(2t + h)$$

X(t) n'est plus stationnaire au sens large, puisque la covariance dépend de t. La variance (énergie) s'écrit :

$$E\left(X(t)^2\right) = \sigma^2 + \beta \sin 2\,\lambda\, t$$

Elle est fluctuante. Il y a là une circonstance qui est de la même nature que le principe d'incertitude de Heisenberg en mécanique quantique. L'énergie n'est parfaitement déterminée (indépendante du temps) que lorsque le phénomène est stationnaire (de position totalement indéterminée dans le temps).

Exemple 2 - Soient maintenant Y_k et Z_k deux suites de variables indépendantes et d'espérances mathématiques nulles. Posons :

$$E(Y_i\ Y_j) = E(Z_i\ Z_j) = 0 \qquad (i \neq j)$$

$$E(Y_i\ Z_j) = 0 \qquad (\forall i \text{ et } j)$$

$$E(Y_k{}^2) = E(Z_k{}^2) = \sigma_k^2$$

On suppose la série $\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2 = \sigma^2$ convergente. Soit aussi λ_k une suite de nombres. Le processus :

$$X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (Y_k \cos \lambda_k\ t + Z_k \sin \lambda_k\ t)$$

existe (la série converge en moyenne quadratique) et possède la variance finie σ^2. On vérifiera facilement que X(t) est stationnaire au sens large et possède la covariance :

$$K(h) = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2 \cos \lambda_k\ h$$

La décomposition spectrale de K(h) fait apparaître un spectre discret où chacune des fréquences λ_k est porteuse de l'énergie σ_k^2. Ici encore cette affectation de quantités d'énergie déterminées à chacune des fréquences cesse d'être possible lorsque les Y_k et les Z_k ne sont plus indépendantes, en même temps que X(t) cesse d'être stationnaire.

Il n'y a aucune raison pour qu'une telle propriété soit particulière aux spectres discrets. Le théorème fondamental que nous énoncerons dans un instant montre qu'elle est générale. Il nous faut auparavant introduire deux notions : intégrales de Stieltjes stochastiques, et processus à accroissements indépendants, qui sont de simples généralisations de notions déjà rencontrées.

Intégrales stochastiques de Stieltjes.

Soit $X(t)$ un processus de variance finie et de covariance $K(t_1,t_2)$. L'intégrale stochastique de Stieltjes :

$$I = \int_a^b p(t)\ d\ X(t) \tag{24}$$

se définit comme la limite en moyenne quadratique (lorsqu'elle existe) des sommes finies :

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} p(t_i) \left[X(t_i) - X(t_{i-1})\right]$$

On montre, comme pour l'intégrale stochastique de Riemann, que I existe si et seulement si l'intégrale double de Stieltjes :

$$S^2 = \int_a^b \int_a^b p(t)\ p(t')\ K(dt,\ dt')$$

existe, et on a dans ce cas :

$$S^2 = E(I^2)$$

Processus à accroissements indépendants. Il s'agit d'une généralisation évidente des processus à accroissements indépendants et stationnaires étudiés au chapitre V. $X(t)$ est dit à accroissements indépendants si, quels que soient les intervalles (t_i, t'_i) disjoints (ou présentant au plus un point commun), les $X(t'_i) - X(t_i)$ sont mutuellement indépendants. Si l'on suppose simplement que les $X(t'_i) - X(t_i)$ ont des corrélations nulles :

$$(t_i, t'_i) \cap (t_j, t'_j) = \emptyset \Rightarrow E\left[X(t'_i) - X(t_i)\right]\left[X(t'_j) - X(t_j)\right] = 0$$

on dira que le processus est à accroissements sans corrélation.

Nous supposons que $X(t) - X(0)$ a une variance finie $\sigma^2(t)$ et une espérance mathématique nulle :

$$E\left[X(t) - X(0)\right] = 0$$

$$E\left[\left(X(t) - X(0)\right)^2\right] = \sigma^2(t)$$

On établit que $\sigma^2(t)$ est une fonction croissante (mais non nécessairement bornée ni continue) et que l'on a pour $0 < t_0 < t$

$$E\left[\left(X(t) - X(t_0)\right)^2\right] = \sigma^2(t) - \sigma^2(t_0)$$

Désignons par $K(t,t')$ la covariance de $X(t) - X(0)$ et $X(t') - X(0)$. L'intégrale stochastique :

$$X(t) - X(0) = \int_0^t d\,X(t)$$

existe toujours (il suffit de considérer les sommes finies I_n pour le voir), et on a :

$$\sigma^2(t) = \int_0^t \int_0^t K(dt,dt')$$

Calculons $K(t,t')$ avec, par exemple, $t < t'$:

$$\begin{aligned} K(t,t') &= E\left[\Big(X(t)-X(0)\Big)\Big(X(t')-X(t) + X(t) - X(0)\Big)\right] \\ &= E\left[\Big(X(t)-X(0)\Big)^2\right] + E\left[\Big(X(t)-X(0)\Big)\Big(X(t')-X(t)\Big)\right] \\ &= \sigma^2(t) \end{aligned}$$

Une intégrale stochastique du type (24) admet de même la <u>variance</u> :

$$\begin{aligned} S^2 &= \int_a^b \int_a^b p(t)\ p(t')\ K(dt,\ dt') \\ &= \lim_{n \to \infty} \sum_{i,j} p(t_i)\ p(t_j)\ E\left[X(t_i)-X(t_{i-1})\right]\left[X(t_j)-X(t_{j-1})\right] \\ &= \lim_{n \to \infty} \sum_i \left[p(t_i)\right]^2 \left[\sigma^2(t_i) - \sigma^2(t_{i-1})\right] \\ &= \int_a^b \left[p(t)\right]^2 d\ \sigma^2(t) \end{aligned}$$

Introduisant la fonction de répartition θ de la mesure de Dirac. $\Big(\theta(t) = 0$ pour $t \leqslant 0$ et $\theta(t) = 1$ pour $t > 1\Big)$, le résultat obtenu montre que l'on peut écrire :

(25) $$K(dt,dt') = d\ \theta(t'-t)\ d\ \sigma^2(t)$$

et cette relation caractérise parfaitement les processus à accroissements sans corrélation.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le théorème fondamental de la décomposition spectrale.

Théorème fondamental - Tout processus stationnaire au sens large $X(t)$ de variance finie et de covariance $K(h)$ peut être mis sous la forme :

$$(26) \qquad X(t) = \int_0^\infty \cos \lambda t \, d\, \xi_1(\lambda) + \int_0^\infty \sin \lambda t \, d\, \xi_2(\lambda)$$

où $\xi_1(\lambda)$ et $\xi_2(\lambda)$ sont deux processus à accroissements sans corrélation tels que, de plus, quels que soient λ_1, λ'_1, λ_2, et λ'_2 :

$$E\left[\left(\xi_1(\lambda'_1) - \xi_1(\lambda_1)\right)\left(\xi_2(\lambda'_2) - \xi_2(\lambda_2)\right)\right] = 0$$

$\xi_1(\lambda)$ et $\xi_2(\lambda)$ ont la même variance $\sigma^2(\lambda)$, bornée et vérifiant

$$(27) \qquad K(h) = \int_0^\infty \cos \lambda h \, d\, \sigma^2(\lambda)$$

et sont donnés par les relations :

$$(28) \qquad \left|\begin{array}{l} \xi_1(\lambda) = \lim\limits_{T \to \infty} \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-T}^{T} \dfrac{\sin \lambda t}{t} X(t)\, dt \\[2ex] \xi_2(\lambda) = \lim\limits_{T \to \infty} \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-T}^{T} \dfrac{1 - \cos \lambda t}{t} X(t)\, dt \end{array}\right.$$

Ainsi la transformation de Fourier échange les processus stationnaires au sens large et les processus à accroissements sans corrélation. A chaque bande de fréquence $(\lambda, \lambda + \Delta\lambda)$ de la décomposition (26) est affectée une énergie bien déterminée $\Delta\sigma^2(\lambda) = \sigma^2(\lambda + \Delta\lambda) - \sigma^2(\lambda)$ mise en évidence par le spectre de K(h) qui apparaît en (27).

Nous ne démontrerons pas le théorème fondamental. Nous nous contenterons de la vérification suivante : soit $\xi_1(\lambda)$ et $\xi_2(\lambda)$ deux processus à accroissements sans corrélation et sans corrélation mutuelle, possédant la même variance bornée $\sigma^2(\lambda)$. Alors la relation (26) définit bien un processus stationnaire au sens large, dont la covariance est donnée par (27).

En effet, en premier lieu, X(t) existe, car l'intégrale :

$$E\left[X(t)^2\right] = \int_0^\infty (\cos^2 \lambda t + \sin^2 \lambda t)\, d\, \sigma^2(\lambda) = \int_0^\infty d\, \sigma^2(\lambda)$$

existe puisque $\sigma^2(\lambda)$ est bornée.

En deuxième lieu, calculons la covariance de X(t) :

$$E\left[X(t+h)\, X(t)\right] = \int_0^\infty\int_0^\infty \cos \lambda\, (t+h) \cos \lambda' t\, d\theta(\lambda'-\lambda) d\, \sigma^2(\lambda)$$

$$+ \int_0^\infty\int_0^\infty \sin \lambda(t+h) \sin \lambda' t\, d\, \theta(\lambda'-\lambda)\, d\, \sigma^2(\lambda)$$

$$E\left|X(t+h)\ X(t)\right| =$$

$$= \int_0^\infty \cos\lambda(t+h)\cos\lambda t\, d\,\sigma^2(\lambda) + \int_0^\infty \sin\lambda(t+h)\sin\lambda t\, d\,\sigma^2(\lambda)$$

$$= \int_0^\infty \cos\lambda h\, d\,\sigma^2(\lambda)$$

Elle ne dépend pas de t. X(t) est bien stationnaire au sens large, et sa covariance est bien donnée par (27).

COURS DE PROCESSUS STOCHASTIQUES

Table des Matières