

THEORIE DES VARIABLES REGIONALISEES

Cours professés par Mr. MATHERON au Centre de
Morphologie Mathématique de Fontainebleau.

Ecole d'été, Septembre 1969

Rédigé par Mr. MONGET
BUREAU GRAVIMETRIQUE INTERNATIONAL

TABLE des MATIERES

. Chapitre premier	
- Introduction	p. 2.
. Chapitre second	
- Le covariogramme transitif	p. 6.
. Chapitre troisième	
- Régularisation et montée des variables régionalisées	p. 12.
. Chapitre quatrième	
- Estimation des variables régionalisées	p. 21.
. Chapitre cinquième	
- Application à l'estimation des surfaces	p. 32.
. Chapitre sixième	
- Fonctions aléatoires stationnaires et fonctions aléatoires intrinsèques : covariance et covariogramme	p. 39.
. Chapitre septième	
- Continuité et intégration en M.Q : régularisation et montée ..	p. 50.
. Chapitre huitième	
- Variances d'extension et d'estimation	p. 61.
. Chapitre neuvième	
- Variances d'extension et d'estimation (suite) méthodes d'approximation	p. 73.
. Chapitre dixième	
- Effet de pépite et phénomènes de transition	p. 80.
. Chapitre onzième	
- Schémas et abaques : schéma de De Wijs	p. 86.
. Chapitre douzième	
- Krigeage simple	p. 94
. Chapitre treizième	
- Estimation optimale de la dérive	p.103.
. Chapitre quatorzième	
- Estimation et fluctuation du variogramme	p.117.
. Chapitre quinzième	
- Krigeage universel	p.128
. Chapitre seizième	
- Exemple de l'utilisation de la géostatistique	p.140

Les références des exercices corrigés indiquées dans le texte correspondent à celles du cours de géostatistique (Cahier du Centre de Morphologie Mathématique - Fontainebleau).

CHAPITRE PREMIER - INTRODUCTION

I - GÉOSTATISTIQUE ET THÉORIE DES VARIABLES RÉGIONALISÉES

Un phénomène est dit régionalisé s'il se déplace dans un espace E et y manifeste une certaine structure (nombreux exemples dans les Sciences de la Terre). $f(x)$ est une variable régionalisée (V.R) si elle désigne la valeur au point $x \in E$ d'une caractéristique f de ce phénomène.

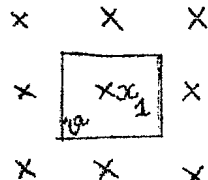
Exemple : $E = \mathbb{R}^2$ Δg = anomalie du champ de la pesanteur à la surface du globe
 $\Delta g(\varphi, \lambda)$ = variable régionalisée représentative de l'anomalie

La théorie des variables régionalisées n'introduisant aucune hypothèse probabiliste dès l'entrée se propose donc de rendre compte des deux aspects contradictoires de tout phénomène de ce type :

- aspect aléatoire
- aspect structural

I-1- Aspect aléatoire

Lorsque $f(x)$ présente un haut degré d'irrégularité (ex: anomalie à l'air libre), les méthodes traditionnelles d'estimation sont insuffisantes. Par exemple :

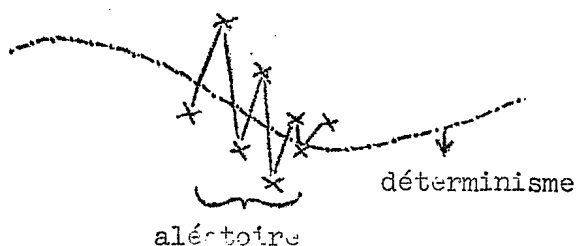
- 

Moyenne dans $w = \overline{\Delta g_w} \approx \Delta g(x_1)$

- l'extension de la valeur en un point à toute une zone conduit à un bon estimateur de la valeur moyenne dans cette zone mais ne permet pas d'avoir connaissance de la précision de cette estimation.
 - Les méthodes d'interpolation à l'aide de fonctions sont peu adaptées car elles conduisent à surestimer le degré de continuité du phénomène dans l'espace.

I-2- Aspect structural

La statistique classique qui n'utilise que des variables indépendantes est incapable de rendre compte d'une structure dans l'espace.



Considérer que le phénomène peut être pris comme la résultante :

- d'une composante continue de type déterministe
 - d'une composante aléatoire plaquée sur la première et indépendante de celle-ci
- est un point de vue qu'il faut écarter car il appauvrit trop la réalité.

Cependant, une inférence statistique est possible tout en conservant ces deux aspects complémentaires grâce à la théorie des fonctions aléatoires.

II - HYPOTHESE DE STATIONNARITE

Le caractère stationnaire entraîne l'homogénéité du phénomène dans l'espace. En termes probabilistes, une fonction aléatoire est dite stationnaire si la loi de probabilité des valeurs prises par cette fonction en k points arbitraires est invariante pour toute translation d'ensemble de ces points.

Cette hypothèse est trop restrictive en général. Examinons l'emploi qui en sera fait :

II-1- Méthodes transitives

On n'utilise pas d'hypothèses probabilistes, un raisonnement purement géométrique conduisant à des variances d'estimation. En fait, après analyse des conditions effectives de mise en oeuvre, on s'aperçoit que des notions probabilistes sous forme camouflée se sont introduites, mais l'avantage est qu'en aucun cas l'on utilise l'hypothèse de stationnarité.

II-2- Théorie intrinsèque

Hypothèse probabiliste avec stationnarité.

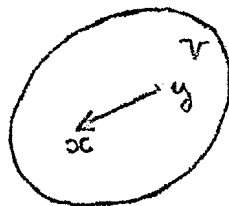
II-3- Krigeage universel

Dans cette théorie des estimateurs optimaux, on s'affranchit de cette hypothèse restrictive tout en utilisant des fonctions aléatoires.

III - PRODUIT DE CONVOLUTION

Par convention on notera :

$$\int_{R^m} f(x) dx = \int f(x) dx \quad \begin{array}{l} x \in R^m \\ dx = \text{élément de volume} \end{array}$$



Soit dans R^3 une fonction :

$$g(x) = g(x_1, x_2, x_3)$$

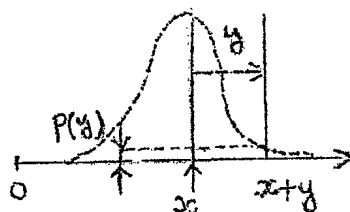
On considère la valeur moyenne de $g(x)$ dans V

$$\bar{g}(V) = \frac{1}{V} \int_V dx \int_V g(x-y) dy$$

C'est une intégrale sextuple dans $R^3 \times R^3$. On essaie de simplifier de telles notations en utilisant les produits de convolution.

$$g(y) = \int f_1(x) f_2(y-x) dx \Leftrightarrow g = f_1 * f_2 \quad (\text{convolé à})$$

Cette notation est à rattacher à la notion de moyenne mobile.



$$f(x) = \int f(x+y) p(y) dy$$

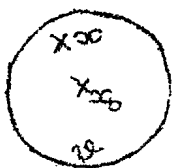
On note :

$f(x)$ = régularisée de f par la fonction de pondération p

si $\tilde{p}(x) = p(-x)$ = transposée de $p(x)$

$$f_p = f * \tilde{p}$$

III-1- Exemple 1 - Teneur moyenne d'un échantillon v implanté au point x

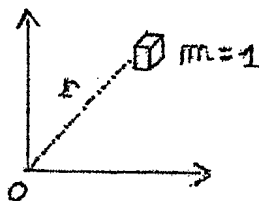


Si $k(x)$ est l'indicatrice du volume v

$$k(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in v \\ 0 & \text{si } x \notin v \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \bar{f}_v &= \frac{1}{v} \int f(x_0 + x) k(x) dx = \frac{1}{v} f_k(x_0) \\ \bar{f}_v &= \frac{1}{v} f * \tilde{k} \end{aligned}$$

III-2- Exemple 2 - Radioactivité

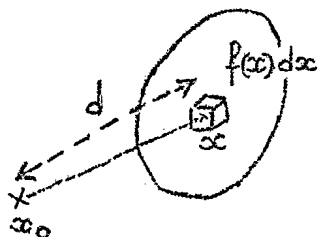


En O, à la distance r d'un échantillon de masse unité, on observe une radioactivité

$$A = \frac{e^{-\lambda r}}{r}$$

Si $f(x)$ est la teneur de cette substance radioactive en un point x_0 , on observera une radioactivité :

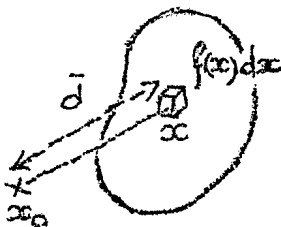
$$A = f * \tilde{p} \quad \text{avec} \quad p(x) = \frac{e^{-\lambda d}}{d} \\ d = |x_0 - x|$$



III-3- Exemple 3 - Attraction newtonienne

L'attraction exercée sur une masse unité par une masse dm placée à une distance r de celle-ci est :

$$A = \frac{dm}{r^2}$$

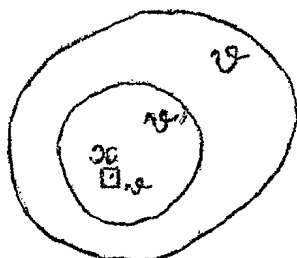


Si $f(x)$ est la densité d'un corps en un certain point x , en un point x_0 , on observera une attraction totale

$$A = f * \tilde{p} \quad \text{avec} \quad p(x) = \frac{1}{d^2} \\ d = |x_0 - x|$$

IV - CHAMP ET SUPPORT D'UNE VARIABLE REGIONALISEE

Champ $\mathcal{V}$ d'une V.R = domaine où celle-ci est $\neq 0$
 Panneau $\mathcal{V}'$ = sous ensemble de $\mathcal{V}$



Le volume v est le support de la V.R f_v ,
 c'est-à-dire valeur moyenne $f_v(x)$ de $f(x)$
 dans l'échantillon v prélevé en x .

$f_v(x)$ a un comportement plus régulier que $f(x)$.
 C'est pour cela que l'on pose :

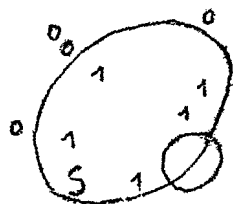
$f_v(x)$ = régularisée de f sur v

CHAPITRE SECOND -- LE COVARIOGRAMME TRANSITIF

I - EXEMPLE INTRODUCTIF

I-1- Le covariogramme géométrique

Soit une formation géologique S d'extension limitée. Un sondage la rencontre ou ne la rencontre pas. On pose :



$$k(x) \begin{cases} = 0 & \text{si } x \notin S \\ = 1 & \text{si } x \in S \end{cases}$$

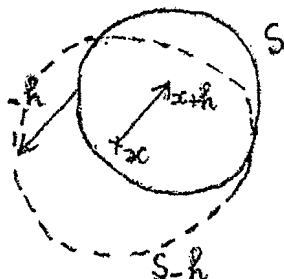
Ce n'est qu'à la frontière de S que k varie. Toute l'attention se concentre donc sur cette zone de transition, d'où le nom de phénomène transitif représenté par k .

On peut représenter l'aire de la surface à l'aide de la fonction k

$$S = \int k(x) dx$$

Mais la valeur de cette surface n'est pas un renseignement assez riche vis-à-vis de la structure de la surface S .

Si l'on définit la structure d'un ensemble comme le système des relations existant entre les éléments ou les parties de cet ensemble, il nous faut faire intervenir au moins 2 points à la fois.



$k(x)$, $k(x+h)$ est l'indicatrice de $S \cap S-h$

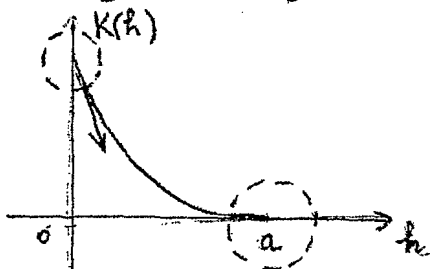
On appelle covariogramme géométrique associé à S la fonction :

$$K(h) = \int k(x) k(x+h) dx$$

Sa connaissance suffit à déterminer la variance d'estimation de la surface S à partir d'une reconnaissance quelconque.

I-2- Propriétés de $K(h)$

$$\int K(h) dh = \int k(x) dx \int k(x+h) dh = S^2$$



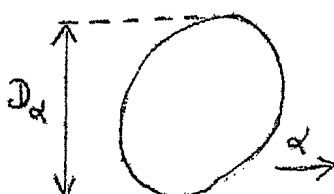
Les deux comportements intéressants de $K(h)$ sont ceux observés à l'origine des h et à l'annulation de la fonction.

- portée = $a(\alpha)$ α = direction de $\vec{h}$
Les $a(\alpha)$ donnent une représentation de l'anisotropie du support géométrique de S .
- pente à l'origine

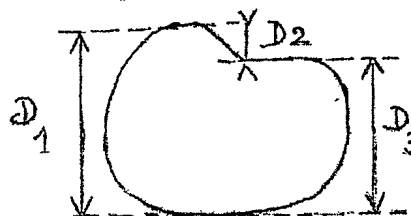
On démontre que dans une direction α donnée :

$$D'_\alpha = - K'_\alpha(0)$$

avec D_α = variation diamétrale ou diamètre apparent de S dans la direction



Surface convexe



Surface concave

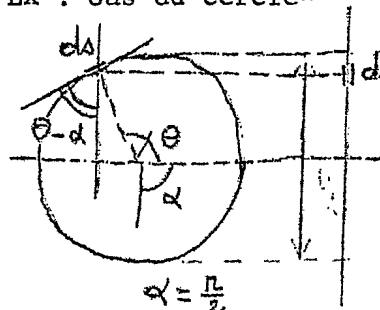
2 $D_\alpha = D_1 + D_2 + D_3$ variation diamétrale pour la surface concave

D_α = diamètre apparent pour la surface convexe

A partir de la connaissance des différentes dérivées à l'origine de $K(h)$ pour toutes les directions de $\vec{h}$, on peut d'ailleurs reconstituer le périmètre de P de la surface S .

$$P = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi D_\alpha d\alpha$$

Ex : Cas du cercle-



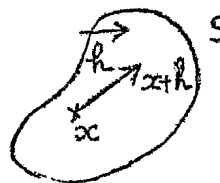
$$D_\alpha = \frac{1}{\pi} \int_C ds |\cos(\theta - \alpha)|$$

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi d\alpha \int_C ds |\cos(\theta - \alpha)| = \int_C ds = 2\pi R$$

On pourrait ainsi aussi bien reconstituer un volume.

II - LE COVARIOGRAMME TRANSITIF

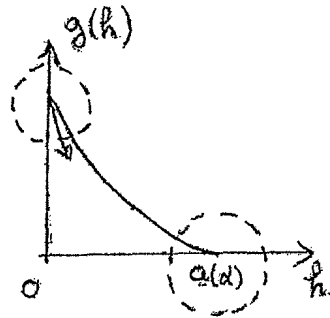
C'est la fonction $g(h) = \int f(x) f(x+h) dh$



II-I- Propriétés de $g(h)$

Si $Q = \int f(x) dx$ = quantité de métal

$$Q^2 = \int g(h) dh$$



On observe de même que pour $K(h)$, le comportement :

- au voisinage de $g(h) = 0$
Ceci nous donne la portée $a(d)$ qui est d'ailleurs une propriété du champ S plutôt que de g ou de f .
- au voisinage de $h = 0$

Le degré de régularité du covariogramme au voisinage de l'origine donne une mesure du degré de continuité de la V.R

dans ses variations spécifiques. Cela résulte de :

$$g(0) - g(h) = \frac{I}{2} \int [f(x+h) - f(x)]^2 dx$$

En particulier, si f est continue :

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} g(0) - g(h) &= \frac{I}{2} \int \lim_{h \rightarrow 0} [f(x+h) - f(x)]^2 dx \\ &= \frac{I}{2} \int [h f'(x)]^2 dx \\ &= \frac{h}{2} \int f'(x)^2 dx \end{aligned}$$

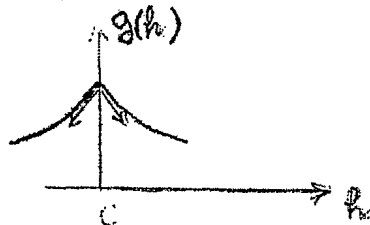
$g(h)$ a un comportement parabolique à l'origine.



$\Leftrightarrow f(x)$ dérivable

On observe d'autres variantes :

- comportement linéaire à l'origine



Dans ce cas, la V.R est continue par morceaux. C'est le cas où les discontinuités ne sont pas trop nombreuses, comme pour le covariogramme géométrique où elles sont localisées à la surface du volume $\mathcal{V}$ caractérisé.

- comportement plus irrégulier que la linéarité, Dans ce cas, il y a encore plus de discontinuités que dans les cas précédents.

II-2- cas isotrope

$g(h) = g(r)$ avec $r = |h|$

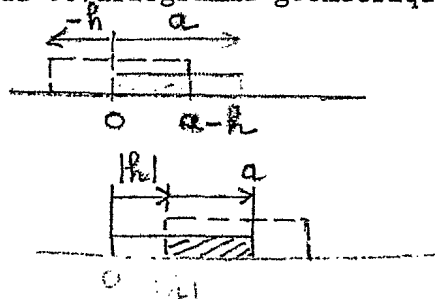
Dans ce cas, on peut expliciter simplement le développement de $g(r)$ au voisinage de l'origine.

$$g(r) = g(0) + \underbrace{\sum_{n \geq 0} A_n r^{2n}}_{\text{Partie régulière}} + \underbrace{\sum_{\lambda} B_{\lambda} r^{\lambda}}_{\substack{\text{termes entiers} \\ \text{tiers pairs}}} + \underbrace{C_{2n} r^{2n} \log r}_{\substack{\text{termes entiers} \\ \text{impairs}}} \quad \text{Partie irrégulière}$$

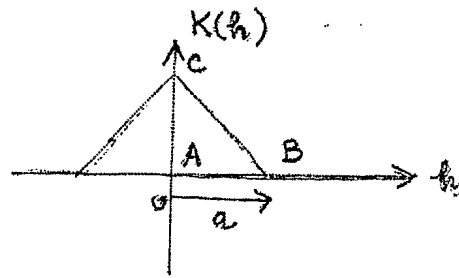
Le terme irrégulier de plus bas degré caractérise le degré d'irrégularité de la variable régionalisée dans l'espace.

III - EXERCICES

a) Calcul du covariogramme géométrique d'un segment de longueur a



$$\begin{aligned}
 - h > 0 \quad h &= |h| \\
 K(h) &= \int_{a-h}^a k(x) k(x+h) dx \\
 &= \int_0^a dx = a - h = a - |h| \\
 - h < 0 \quad h &= -|h| \\
 K(h) &= \int_{|h|}^a dx = a - |h|
 \end{aligned}$$

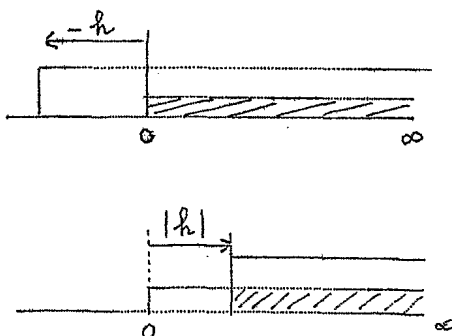
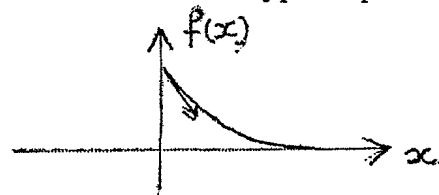


- On remarque le comportement linéaire à l'origine

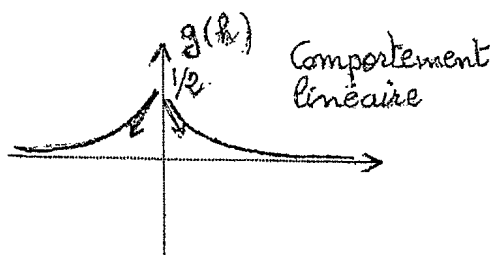
$$\begin{aligned}
 K(h) dh &= \int_{-a}^a (a - |h|) dh \\
 &= 2 \text{ aire ABC} = a^2
 \end{aligned}$$

b) Etude du covariogramme transitif d'une fonction de type exponentiel

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$



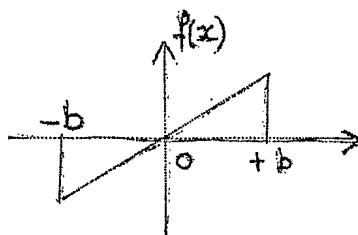
$$\begin{aligned}
 - h > 0 \quad h &= |h| \\
 g(h) &= \int_{a-h}^a f(x) f(x+h) dx \\
 &= \int_0^a e^{-x} e^{-(x+h)} dx \\
 &= e^{-h} \left[-\frac{e^{-2x}}{2} \right]_0^a = \frac{e^{-h}}{2} = \frac{e^{-|h|}}{2} \\
 - h < 0 \quad h &= -|h| \\
 g(h) &= e^{-h} \left[-\frac{e^{-2x}}{2} \right]_{|h|}^a = e^{-h} \frac{e^{-2|h|}}{2} \\
 &= e^{|h|} \frac{e^{-2|h|}}{2} = \frac{e^{-|h|}}{2}
 \end{aligned}$$



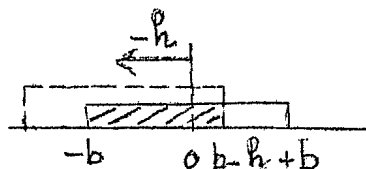
$$Q = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1$$

$$Q = 2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-h}}{2} dh = 1$$

c) Etude du covariogramme transitif d'une fonction linéaire à support borné



$$f(x) \begin{cases} = x & \text{sur } [-b, +b] \\ = 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



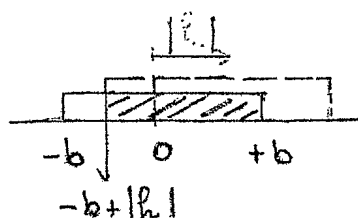
$$-h > 0 \quad h = |h|$$

$$g(h) = \int_{-b}^{b-h} f(x) f(x+h) dx$$

$$= \int_{-b}^{b-h} x(x+h) dx$$

$$g(h) = \left[\frac{x^3}{3} + h \frac{x^2}{2} \right]_{-b}^{b-h} = \frac{(b-h)^3}{3} + \frac{b^3}{3} + \frac{h(b-h)^2}{2} - \frac{h b^2}{2}$$

$$g(h) = \frac{2b^3}{3} - b^2 h + \frac{h^3}{6}$$



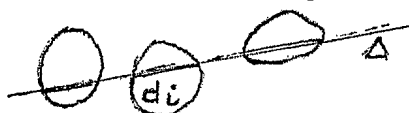
$$-h < 0 \quad h = -|h|$$

$$g(h) = \int_{-b+|h|}^b x(x+h) dx$$

$$= -\frac{(|h|-b)^3}{3} + \frac{b^3}{3} + \frac{h b^2}{2} - \frac{h(b-|h|)^2}{2}$$

$$g(h) = \frac{2b^3}{3} - b^2 |h| + \frac{|h|^3}{6}$$

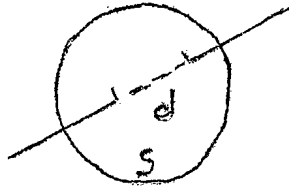
d) Granulométrie des sphères



La granulométrie des traversées Δ d'une formation est représentée par :

$$1 - F(h) = \Pr\{d_i \leq h\}$$

On applique des notions de morphologie mathématique au calcul de la granulométrie des traversées de la sphère.

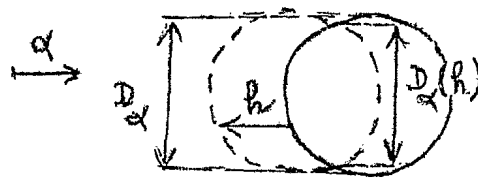


$$I - F(h) = P_n \{ d \leq h \}$$

avec $0 \leq h \leq D$

D = diamètre de la sphère

On a les formules suivantes :



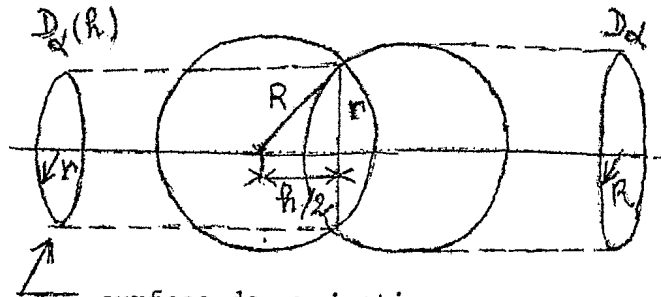
Déplacement h dans la direction α

$$I - D(h) = -K'_\alpha(h)$$

2 - Le nombre de traversées de longueur $L \geq h$ dans la direction α est :

$$I - F(h) = \frac{D_\alpha(h)}{D_\alpha} = \frac{K'_\alpha(h)}{K'_\alpha(0)}$$

- Application à la sphère :



$$r^2 = R^2 - \frac{h^2}{4}$$

$$\begin{aligned} D_\alpha(h) &= \pi r^2 \\ &= \frac{\pi}{4} (4R^2 - h^2) \\ &= \frac{\pi}{4} (D^2 - h^2) \end{aligned}$$

surface de projection de l'intersection

$$K'(h) = \frac{\pi}{4} (h^2 - D^2) \quad \text{d'où} \quad K(h) = \frac{\pi}{4} \left[\frac{h^3}{3} - D^2 h \right] + A$$

avec $A = K(0) = V = \frac{4}{3} \pi R^3$

$$K(h) = \frac{\pi}{4} \frac{h^3}{3} - \pi R^2 h + \frac{4\pi R^3}{3}$$



La granulométrie des traversées de la sphère est alors obtenue par :

$$I - F(h) = \frac{D_\alpha(h)}{D_\alpha(0)} = \frac{\pi}{4} \frac{D^2 - h^2}{\pi D^2} = 1 - \frac{h^2}{D^2}$$

$$f(h) = \frac{2h}{D^2} \quad (0 \leq h \leq D)$$

CHAPITRE TROISIEME

REGULARISATION ET MONTEE DES VARIABLES REGIONALISEES

I - REGULARISATION

On a déjà vu un cas particulier de régularisation lorsque à la V.R $f(x)$ on a associé son covariogramme : $g(h) = \int f(x) f(x+h) dx$

$g = f * \check{f}$ est dite autorégularisée de $\check{f}$

On dit que l'on a effectué une régularisation par la fonction de pondération p , si à f on associe :

$$f_p = f * \check{p}$$

Ex : Dans le cas de la régularisation de f sur un échantillon $\check{p}$, p est l'indicatrice de cet échantillon.

f_p a un comportement plus régulier que f . En effet, d'après une propriété du produit de convolution :

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ non continue} \\ p \text{ continue} \end{array} \right\} f_p \text{ continue}$$

$f_p(x)$ est une nouvelle V.R dont le covariogramme : $g_p = f_p * \check{f}_p$ représentera les propriétés de régularité de celle-ci

$$g_p = f_p * \check{f}_p = f * \check{p} * \check{f} * p = f * \check{f} * p * \check{p}$$

en utilisant les propriétés de commutativité et d'associativité du produit de convolution.

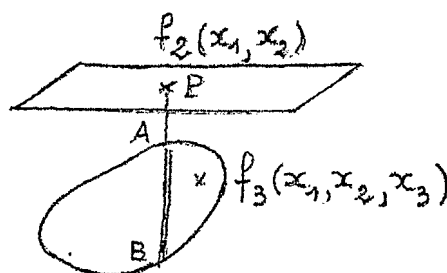
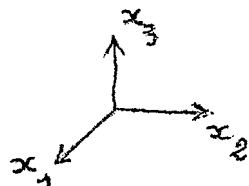
d'où $g_p = g * P$ avec $P = p * \check{p}$

= covariogramme associé à la fonction de pondération p

II - CAS PARTICULIER DE LA MONTEE

C'est un cas limite de la régularisation. Donnons-en quelques exemples.

II-I- Exemples de montée

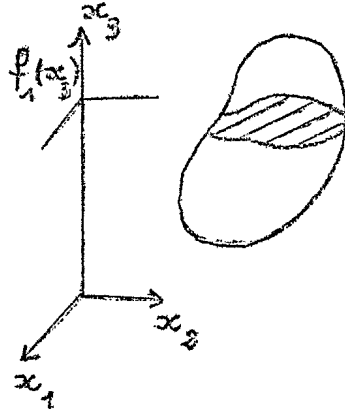


A propos d'un sondage minier, on peut chercher la quantité de métal/m³ associée à ce sondage implanté en P le long de AB.

On introduira la V.R obtenue par montée d'ordre I :

$$f_2(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_3(x_1, x_2, x_3) dx_3$$

On peut d'ailleurs aussi vouloir étudier la quantité de métal par mètre d'approfondissement.



On utilisera la V.R obtenue par montée d'ordre 2 :

$$f_1(x_3) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_3(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2$$

Les covariogrammes correspondant à ces V.R seront :

$$g_3 = \overset{(3)}{f_3} * \overset{(3)}{f_3} \quad (\text{produit de convolution dans espace à 3 dimensions})$$

$$g_2 = \overset{(2)}{f_2} * \overset{(2)}{f_2}$$

$$g_1 = \overset{(1)}{f_1} * \overset{(1)}{f_1}$$

II-2- Comportement du covariogramme dans les opérations de montée

Propriété Fondamentale : On a le droit d'effectuer directement la montée sur les covariogrammes

Pour effectuer une démonstration de cette propriété, on utilise la transformée de Fourier. Rappelons-en les principales propriétés :

$$\mathcal{F}f = \varphi \quad \text{telle que} \quad \varphi(u_1, \dots, u_n) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n) \exp[-2i\pi(u_1 x_1 + \dots + u_n x_n)] dx_1 \dots dx_n$$

$$\text{en abrégé : } \varphi(u) = \int f(x) e^{-2i\pi u \cdot x} dx$$

Elle est inversible et la transformation réciproque s'obtient en remplaçant $e^{-2i\pi}$ par $e^{2i\pi}$. Vis-à-vis du produit de convolution, elle a un comportement particulier très important :

$$\mathcal{F}(f * g) = (\mathcal{F}f)(\mathcal{F}g)$$

si $\mathcal{F}f = \varphi$ alors $\mathcal{F}\bar{f} = \bar{\varphi}$ (conjuguée de φ)

Etudions les transformées de Fourier des variogrammes :

$$- g_3 \text{ de } f_3$$

$$- g_2 \text{ de } f_2 \text{ obtenue par montée d'ordre I de } f_3$$

$$\text{Si } g = f * f \quad \text{alors} \quad G = \mathcal{F}g = \varphi \bar{\varphi} = |\varphi|^2$$

donc $G_3 = |\varphi_3|^2$ et $G_2 = |\varphi_2|^2$ définies pour les normes correspondant aux espaces R^3 et R^2

$$\varphi_3(u_1, u_2, u_3) = \int_{R^3} f_3(x_1, x_2, x_3) e^{-2i\pi(u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3)} dx_1 dx_2 dx_3$$

Pour $u_3 = 0$, nous avons :

$$\begin{aligned} \varphi_3(u_1, u_2, 0) &= \int_{R^2} e^{-2i\pi(u_1x_1 + u_2x_2)} \int_{-\infty}^{+\infty} f_3(x_1, x_2, x_3) dx_3 dx_1 dx_2 \\ &= \int_{R^2} e^{-2i\pi(u_1x_1 + u_2x_2)} f_2(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \mathcal{F} f_2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\varphi_3(u_1, u_2, 0) = \varphi_2(u_1, u_2)} \quad (I)$$

D'où :

$$G_2 = |\varphi_2|^2 = |\varphi_3(u_1, u_2, 0)|^2 = G_3(u_1, u_2, 0)$$

En utilisant l'équivalence (I) dans son énoncé réciproque, on en déduit que :

$$\boxed{g_2(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_3(x_1, x_2, x_3) dx_3}$$

Du point de vue purement mathématique, on a la même quantité d'information en utilisant g ou G . Mais, à la lumière des enseignements nous venant de la pratique de l'analyse harmonique, nous savons que la transformation de Fourier échange les propriétés à l'origine et à l'infini ("petites longueurs d'onde, grandes fréquences"). Or, les propriétés importantes d'une V.R sont liées au comportement de son covariogramme à l'origine. Dans ce cas, on les enverra à l'infini. Ce qui provoque, hélas, une perte d'information.

III - MONTEE DANS LE CAS ISOTROPE

Dans le cas isotrope, nous avons :

$$g(h) = g(r) \quad \text{avec } r = |h|$$

Nous savons, en ce qui concerne la régularité du phénomène, que seul le comportement à l'origine importe.

$$g(r) = g(0) + \sum_{\lambda} c_{\lambda} r^{\lambda} + c_{2n} r^{2n} \log r + \sum_n a_n r^{2n}$$

A la montée, la partie irrégulière se comporte bien. La montée d'ordre I, par exemple, augmente d'une unité de degré du terme irrégulier. Ce qui souligne l'aspect régularisant de cette opération. Mais ce principe de correspondance n'est défini qu'à une série entière à termes pairs près.

$$r^\lambda \rightarrow A_\lambda r^{\lambda+1} + \sum_m B_{2m} r^{2m}$$

Il faut tout de même considérer à part le comportement d'un terme de degré entier impair.

$$r^{2n-1} \rightarrow r^{2n} \log r + \text{Série ou fonction paire}$$

III-1- Principe de correspondance terme à terme le plus courant

$$\begin{aligned} \log r &\rightarrow \pi r \\ r &\rightarrow -r^2 \log r \\ r^2 \log r &\rightarrow A r^3 \end{aligned}$$

Cette séquence alternante singulière est la plus fréquemment rencontrée dans les applications.

III-2- Principe de démonstration de la règle de correspondance

La démonstration rigoureuse fait intervenir la théorie des distributions sinon dans la pratique on peut se borner à observer le comportement des fonctions spéciales (Bessel,.....)

Cependant, il existe une manière symbolique de se faire une idée de ce principe.

Dans la transformation de Fourier :

$$\rho = |u| \quad \text{module du rayon vecteur de l'espace dual associé à l'espace initial}$$

La transformée de Fourier :

$$G = \mathcal{F} g \quad \text{est une fonction } G(\rho) \text{ de ce module}$$

$$\begin{aligned} \text{On a : - dans } R_3^* & \quad \rho_3 = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \\ \text{- dans } R_2^* & \quad \rho_2 = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \end{aligned}$$

$$\rho_3(u_1, u_2, 0) = \rho_2(u_1, u_2)$$

On en déduit que :

$$G_2(\rho_2) \xLeftrightarrow[\text{fonction identique}]{\text{d'après l'équivalence (I)}} G_3(\rho_3)$$

$$G_2 = G_3 = \mathcal{F}_3 g_3$$

Dans le cas isotrope, la transformée inverse est identique à la transformée directe de Fourier, d'où :

$$g_2 = \mathcal{F}_2^{-1} G_2 = \mathcal{F}_2^{-1} \mathcal{F}_3 g_3$$

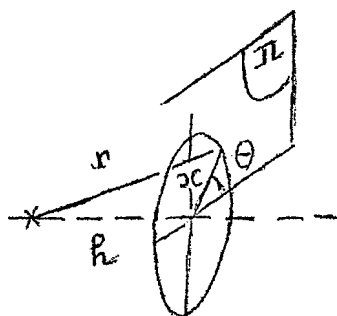
On montre dans la théorie des distributions que :

$$\mathcal{F}_m z^\lambda = A_\lambda \rho^{-\lambda-m} \quad \text{où } A_\lambda = \text{facteur constant}$$

Observons le comportement d'un terme en z^λ dans g_3 , nous aurons :

$$\mathcal{F}_2 \mathcal{F}_3 (z^\lambda) = \mathcal{F}_2 (A_\lambda \rho^{-\lambda-3}) = B_\lambda z^{(\lambda+3)-2} = B_\lambda z^{\lambda+1}$$

III-3- Relations entre les covariogrammes g_3, g_2, g_1 obtenus par montées successives



$$r = \sqrt{x^2 + h^2}$$

On prend des coordonnées polaires (x, θ) dans le plan $\mathcal{R}$

$$\begin{aligned} g_1(h) &= \int_0^\infty g_2(\sqrt{h^2 + x^2}) dx \\ &= 2\pi \int_0^\infty g_3(\sqrt{h^2 + x^2}) x dx \end{aligned}$$

Intégration du terme en θ pour tout le cercle

$$\begin{aligned} \text{On pose : } u &= \sqrt{h^2 + x^2} \\ u^2 &= h^2 + x^2 \quad u du = x dx \end{aligned}$$

$$d'où : \quad g_1(h) = \int_h^\infty g_2(u) \frac{u du}{\sqrt{u^2 - h^2}} = 2\pi \int_h^\infty g_3(u) u du$$

On observe la facilité de formulation de la montée d'ordre 2 qui

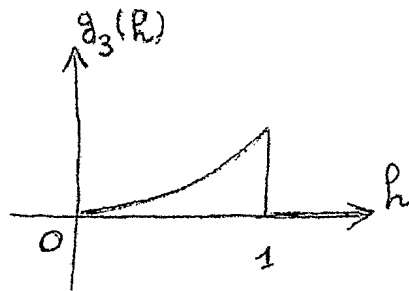
est d'inversion particulièrement aisée.

$$-g_1'(h) = 2\pi h g_3(h)$$

$$g_3(h) = -\frac{1}{2\pi h} g_1'(h)$$

IV - EXERCICES

a) Mécanisme de la montée pour les termes en z^λ



On suppose que :

$$g_3(h) = \begin{cases} z^\lambda & \text{sur } [0, 1] \\ = 0 & \text{ailleurs (portée unit)} \end{cases}$$

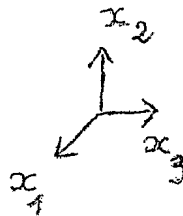
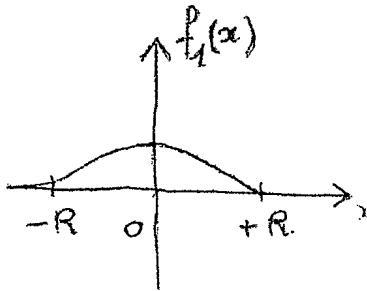
$$\begin{aligned} g_1(h) &= 2\pi \int_h^1 u^{\lambda+1} du = 2\pi \int_h^1 g_3(u) u du \\ &= 2\pi \left[\frac{u^{\lambda+2}}{\lambda+2} \right]_h^1 \end{aligned}$$

$$g_1(h) = 2 \frac{\pi}{\lambda+2} - \frac{2\pi}{\lambda+2} h^{\lambda+2}$$

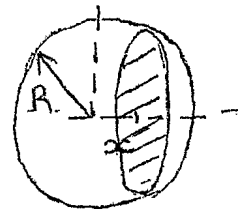
premier terme d'une série paire

b) Calcul d'un covariogramme par montée

On cherche le covariogramme de : $f_1(x) = \pi (R - x)^2$ ($-R \leq x \leq +R$)



C'est l'expression de l'aire de la section d'une sphère :



On obtient l'aire de cette section de sphère par montée d'ordre 2 de l'indicatrice de cette sphère :

$$f_1(x_3) = \iint_{\text{indicatrice de la sphère}} f_3(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2$$

Nous avons vu (ex: chap. 2 - III-d) que le covariogramme de l'indicatrice de la sphère de rayon $\frac{D}{2}$ est :

$$g_3(r) = \frac{\pi D^3}{6} \left[1 - \frac{3}{2} \frac{r}{D} + \frac{1}{2} \frac{r^3}{D^3} \right] \quad (\text{portée : } D)$$

d'où :

$$g_1(h) = 2\pi \int_h^{\frac{D}{2}} \frac{\pi D^3}{6} \left[1 - \frac{3}{2} \frac{u}{D} + \frac{1}{2} \frac{u^3}{D^3} \right] u du$$

Dans le cas particulier où $D = 1$:

$$f_1(x) = \pi \left(\frac{1}{4} - x^2 \right)$$

On a :

$$g_1(h) = \frac{2\pi^2}{6} \left[\frac{u^2}{2} - \frac{3}{2} \frac{u^3}{3} + \frac{1}{2} \frac{u^5}{5} \right]_h^1$$

$$g_1(h) = \frac{\pi^2}{6} \left[\frac{1}{5} - h^2 + h^3 - \frac{h^5}{5} \right]$$

On remarque l'absence de terme linéaire; le terme irrégulier de plus bas degré étant en h^3 ; cela vient du fait que $f_1(x)$ est continue (mais non dérivable en R et $-R$)

c) Descente dans la granulométrie des sphères

On a :

$$g_1(h) = 2 \int_0^{\infty} g_2(u) \frac{u du}{\sqrt{u^2 - h^2}} = 2\pi \int_h^{\infty} g_3(u) u du \quad (A)$$

Equation intégrale d'Abel

On obtient une solution de celle-ci à l'aide du système :

$$\begin{cases} g_3(h) = -\frac{1}{2\pi h} g_1'(h) \\ g_2(h) = \int_h^{\infty} g_3(u) \frac{u du}{\sqrt{u^2 - h^2}} = -\frac{1}{\pi} \int_h^{\infty} g_1'(u) \frac{du}{\sqrt{u^2 - h^2}} \end{cases}$$

(montée d'ordre 1)

- Dans un cube de volume unité, on a :

N_3 sphères

$F_3(D)$ est la fonction de répartition en granulométrie (rapportée à l'unité de volume) des sphères de diamètre $\leq D$.

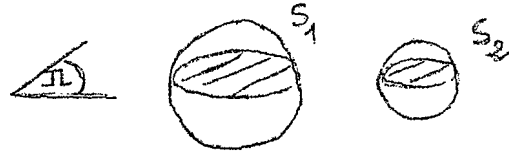
$N_3 F_3(D)$ = nombre de sphères de diamètre $\leq D$

- Si on observe la granulométrie des cercles de section par un plan, on a :

N_2 cercles

(par carré unité)

$F_2(D)$ est la fonction de répartition rapportée à l'unité de surface

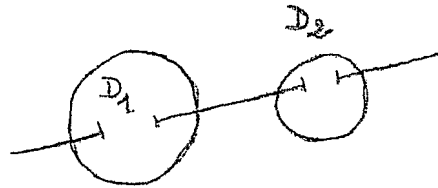


$N_2 F_2(D)$ = nombre de cercles de section de diamètre $\leq D$

- Si on observe la granulométrie des traversées, on aura :

N_1 sections

(par unité de longueur)

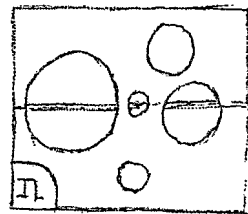


$F_1(D)$ est la fonction de répartition rapportée à l'unité de longueur

$N_1 F_1(D)$ = nombre de segments de longueur $\leq D$

On cherche à exprimer le nombre :

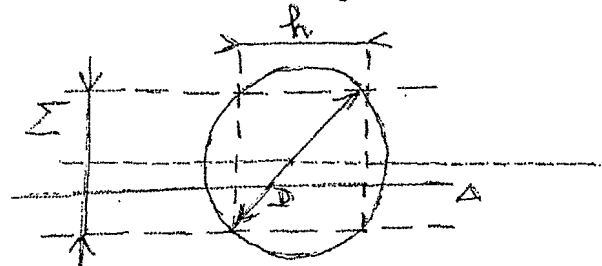
$N_1 (1 - F_1(h))$ de traversées $> h$



Pour avoir une traversée $> h$, il faut :

a - $D \geq h$

b - La droite traverse Σ tel que :



$$\Sigma = \sqrt{D^2 - h^2}$$

Il y a $N_2 F_2(D)$ cercles de diamètre $> h$, il y en a :

$$N_2 \int_h^D \frac{F_2(dD)}{\sqrt{D^2 - h^2}} \quad \text{qui répondent à la question}$$

normée à 1'unité

$$\begin{aligned} N_1 (I - F_1(h)) &= N_2 \int_h^\infty \frac{F_2(dD)}{\sqrt{D^2 - h^2}} \\ &= N_3 \frac{\pi}{4} \int_h^\infty \frac{F_3(dD)}{\sqrt{D^2 - h^2}} \quad (\text{même raisonnement}) \end{aligned}$$

On montre en intégrant par partie que l'on revient à l'expression (A)

$$\begin{aligned} N_1 (I - F_1(h)) &= \left[\sqrt{D^2 - h^2} (1 - F_2(D)) \right]_h^\infty + N_2 \int_h^\infty (1 - F_2(D)) \frac{D dD}{\sqrt{D^2 - h^2}} \\ &= N_3 \frac{\pi}{2} \int_h^\infty (I - F_3(D)) D dD \quad (\text{même forme que (A)}) \end{aligned}$$

On sait donc résoudre ces équations intégrales pour inverser le phénomène et exprimer F_2 et F_3 à partir de F_1 .

$$N_2 (I - F_2(D)) = \frac{2N_1}{\pi} \int_D^\infty \frac{f_1(u) du}{\sqrt{u^2 - D^2}} \quad f_1 = \text{densité correspondant à } F_1$$

$$\boxed{N_3 (I - F_3(D)) = \frac{2N_1}{\pi} \frac{f_1(D)}{D}} \quad (I)$$

Formule particulièrement simple.

On peut aussi reconstituer les nombres N_2 et N_3 à partir de la connaissance de N_1 et $f_1(D)$. On fait $D = 0$

$$\text{alors : } I - F_2(0) = I - F_3(0) = 0$$

$$N_2 = \frac{2N_1}{\pi} \int_0^\infty \frac{f_1(u)}{u} du = \frac{2N_1}{\pi} E \left\{ \frac{1}{u} \right\} \quad (\text{espérance mathématique})$$

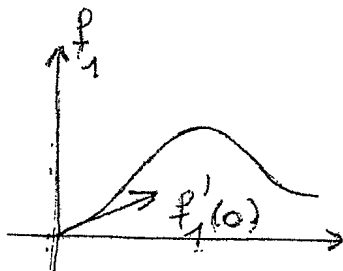
Pour (I) on a :

$$\lim_{D \rightarrow 0} \frac{f_1(D)}{D} = f_1'(0)$$

$$\text{et } N_3 \neq 0 \Rightarrow f_1(0) \neq 0 \quad (\text{sens physique})$$

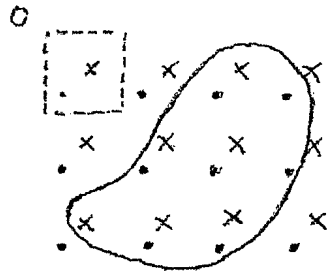
La densité doit s'annuler à l'origine

$$\boxed{N_3 = \frac{2N_1}{\pi} f_1'(0)}$$



CHAPITRE QUATRIEME

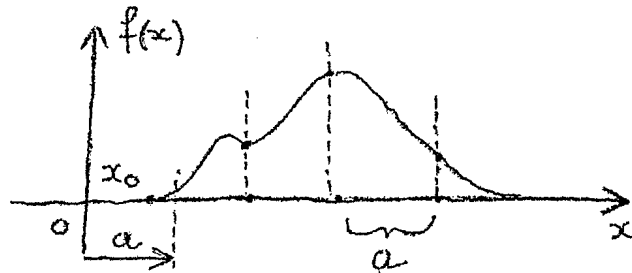
ESTIMATION DES VARIABLES REGIONALISEES

I - VARIANCE D'ESTIMATION A L'AIDE D'UNE MAILLE DE RECONNAISSANCE REGULIERE

On reste dans un cas non probabiliste vis-à-vis de la V.R.
On probabilise seulement l'implantation initiale de l'origine de la maille de reconnaissance dans le carreau de base et non la V.R elle-même.

Ex : Deux mailles d'implantations différentes

Pour plus de simplicité, on n'explicitera les calculs que dans le cas à une dimension.



On reconnaît la V.R à l'aide d'une maille régulière a d'origine x_0

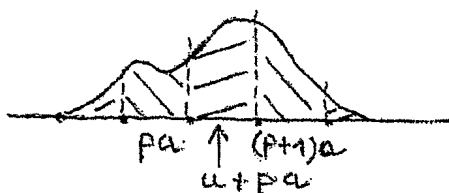
On estime la quantité de métal $Q = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$

par $Q^*(x_0) = a \sum_{-\infty}^{+\infty} f(x_0 + pa)$

C'est une fonction périodique de x_0 , de période a , le réseau se superposant à lui-même par translation a . Pour en faire une variable aléatoire, il suffit de supposer que x_0 est choisi au hasard avec une densité de probabilité uniforme $\frac{dx_0}{a}$ sur le segment $[0, a]$.

$$E(Q^*) = \int_0^a \frac{dx_0}{a} a \sum_{-\infty}^{+\infty} f(x_0 + pa) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_0^a f(u + pa) du$$

On fusionne les morceaux d'intégration sur les segments de longueur a et on obtient :



$$E(Q^*) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

$$E(Q^*) = Q \quad (\text{estimateur sans biais})$$

$$D^2(Q^*) = E(Q^{*2}) - Q^2$$

$$\text{On a : } Q^{*2}(x_0) = a^2 \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} f(x_0 + pa) f(x_0 + qa)$$

On pose : $q = p + k$, d'où :

$$Q^{*2}(x_0) = a^2 \sum_p \sum_q f(x_0 + pa) f[(x_0 + pa) + ka]$$

On en prend l'espérance mathématique :

$$\begin{aligned} E(Q^{*2}) &= \int_0^a \frac{dx_0}{a} a^2 \sum_p \sum_q f(x_0 + pa) f[(x_0 + pa) + ka] \\ &= a \sum_k \left(\sum_p \int_0^a f(x_0 + pa) f[(x_0 + pa) + ka] dx_0 \right) \end{aligned}$$

On fusionne les morceaux en employant le même artifice de calcul que précédemment.

$$\begin{aligned} E(Q^{*2}) &= a \sum_k \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) f(x + ka) dx \\ &= a \sum_k g(ka) \end{aligned}$$

$$\text{Or : } Q^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} g(h) dh \quad (\text{propriété de la quantité de métal})$$

$$\text{D'où la variance d'estimation } D^2(Q^*) = \nabla^2(a)$$

$$\boxed{\nabla^2(a) = a \sum_k g(ka) - \int_{-\infty}^{+\infty} g(h) dh} \quad (2)$$

On obtient la différence entre une intégrale et son expression numérique approchée.

On déduit de cette formule que $\nabla^2(a)$ sera d'autant plus petite que :

- la maille est plus petite
- g est plus régulière (I)

Ce sont deux propriétés déduites du comportement du calcul approché

des intégrales.

La propriété (I) est importante. Les statisticiens classiques qui considèrent les V.R comme des variables aléatoires indépendantes auraient trouvé une variance d'estimation indépendante de la régularité du phénomène.

Apparemment, nous n'avons fait aucune hypothèse probabiliste sur la V.R, mais en pratique :

- Si on ne connaît pas $g(h)$, il faut l'estimer par g^*

Ex :

$$g^*(ka) = a \sum_{p=-\infty}^{+\infty} f(x_0 + pa) f(x_0 + pa + ka)$$

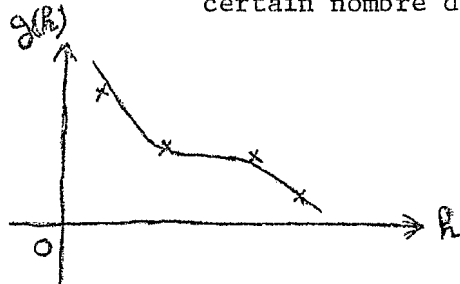
Approximation de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) f(x + ka) dx$ par somme

discrète, mais alors : $\nabla^2(a) = 0$
apparent

On a, en fait, dans ce cas, estimé Q^* par Q^* . Il n'est donc pas possible à partir d'un même ensemble d'information d'obtenir une estimation et la précision de celle-ci.

- On est donc obligé d'introduire des hypothèses

Par exemple : $g(h)$, fonction de type connu, dépendant d'un certain nombre de paramètres, $g(h; \lambda, \mu)$



On ajustera les λ et μ pour approcher mieux la discrétisation disponible.

Remarquons qu'il en est exactement de même lorsqu'en statistique classique. On se rapproche au mieux du modèle d'indépendance des échantillons qui constitue une hypothèse très forte. Mais alors on obtient :

- une estimation m
- une variance d'estimation $\frac{\sigma^2}{n}$

Si on connaissait $g(h)$ dans sa structure fine, on pourrait reconstituer f par :

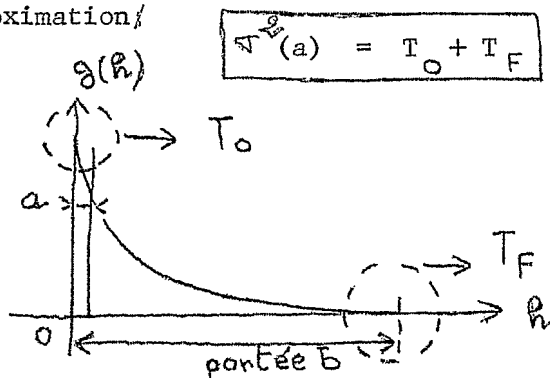
$$g = f \overset{\vee}{*} f$$

Mais à cause de nos hypothèses, nous n'avons à notre disposition qu'un lissage de $g(h)$. C'est un passage implicite du réel à l'espérance mathématique. Nous avons introduit une hypothèse probabiliste.

Cependant, nous n'avons pas introduit d'hypothèse de stationnarité car, par construction, $f(x)$ n'est manifestement pas stationnaire, n'étant $\neq 0$ que dans un champ borné.

II - FORMULES D'APPROXIMATION DANS L'ESPACE A UNE DIMENSION

Si la maille a est petite vis-à-vis de la portée, la formule (2) comporte un grand nombre de termes, on est conduit à chercher des formules d'approximation/



II-1- Terme régulier T_0

On fait correspondre terme à terme le développement au voisinage de a de $T^{\lambda}(a)$ avec les termes irréguliers du $g(h)$ à l'origine.

$$h^{\lambda} \Rightarrow T_0 = A_{\lambda} a^{1+\lambda}$$

II-2- Terme fluctuant T_F

Au voisinage de la portée b de $g(h)$, on peut mettre son développement en correspondance avec le terme fluctuant de $\Psi^{\lambda}(a)$

$$(b-h)^{\lambda} \Rightarrow T_F = B_{\lambda} a^{1+\lambda} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin(2np\epsilon - \frac{\lambda\pi}{2})}{p^{1+\lambda}} \quad \text{(Série de Fourier)}$$

avec ϵ tel que $b = a(m + \epsilon)$

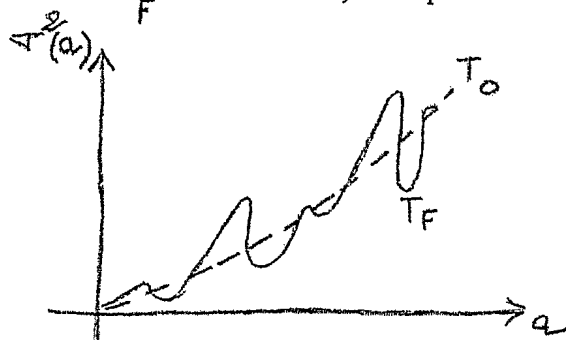
$$0 \leq \epsilon \leq 1$$

La variation de ϵ de 0 à 1 selon l'implantation initiale fera fluctuer ce terme, en particulier :

$$\int_0^1 T_F(\epsilon) d\epsilon = 0 \quad (3)$$

Dans les applications expérimentales, on ne peut fixer ϵ , On fait donc l'hypothèse que ϵ est une variable aléatoire (V.A) uniformément répartie sur $[0, 1]$. Alors d'après (3), l'espérance mathé-

matique de T_F est nulle; ce qui conduira à le négliger.



$$\gamma^2(a) = T_0 + T_F$$

et

$$E\{\gamma^2(a)\} = T_0$$

- Remarques

- On peut exprimer $\gamma^2(a)$ à l'aide de la transformée de Fourier du covariogramme :

$$\gamma^2(a) = \sum_{k=1}^{\infty} G\left(\frac{k}{a}\right) - G(0)$$

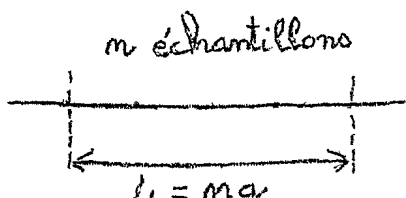
- Proposons une justification symbolique de la correspondance des développements. On sait que :

$$|h|^\lambda = \frac{1}{|u|^{1+\lambda}}$$

d'où :

$$2 \sum_{k=1}^{\infty} G\left(\frac{k}{a}\right) = B_\lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^{1+\lambda}}{k^{1+\lambda}} = C_\lambda a^{1+\lambda}$$

- Comparaison avec la statistique classique



$$\gamma^2_{\text{stat}} = C \times \frac{1}{m}$$

$$\gamma^2_{\text{trans}} A a^{1+\lambda} = A L \times \frac{1}{m^{1+\lambda}}$$

Pour $\lambda = 0$, on retrouve la statistique classique. Le covariogramme est alors dégénéré.

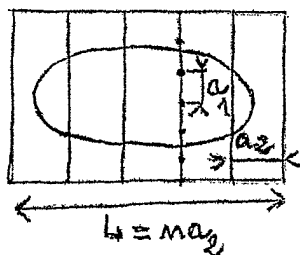
Mais, dans la pratique, par exemple pour un covariogramme linéaire, on a un terme en $\frac{1}{m^2}$ beaucoup plus convergent qu'un terme

en $\frac{1}{m}$.

III - FORMULE D'APPROXIMATION DANS L'ESPACE A DEUX DIMENSIONS

Abstraction faite d'un Zitterbewegung, on a :

$$\gamma^\lambda \Rightarrow \gamma^2(a_1, a_2) = B_\lambda a_2^{2+\lambda} + C_\lambda a_1^{1+\lambda} a_2 \text{ avec } a_1 \leq a_2$$



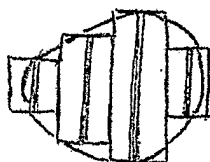
On peut en donner une interprétation probabiliste, en disant que "tout se passe comme si l'erreur totale était égale à la somme de deux erreurs indépendantes :

- erreur des lignes



Approximation des lignes par les points

- erreur des tranches



Approximation des tranches par les lignes

III-1- Terme de tranche

On connaît les lignes dans leur intégrité, donc $a_1 = 0$
On effectue donc une montée sur les lignes :

$$r^\lambda \xrightarrow{\text{montée}} r^{1+\lambda} \xrightarrow{\text{variance}} a_2^{(1+\lambda)+1} = a_2^{2+\lambda}$$

III-2- Terme de ligne

On a une V.R à une dimension. Son covariogramme est en moyenne en relation avec le covariogramme total, par :

$$g_1(h) = \frac{1}{L} g(h)$$

avec L = longueur balayée par les lignes

$$\frac{1}{L} r^\lambda \xrightarrow{\text{variance}} \frac{1}{L} a_1^{1+\lambda} \quad a_1 = \text{maille de ligne}$$

Pour n lignes, nous obtiendrons :

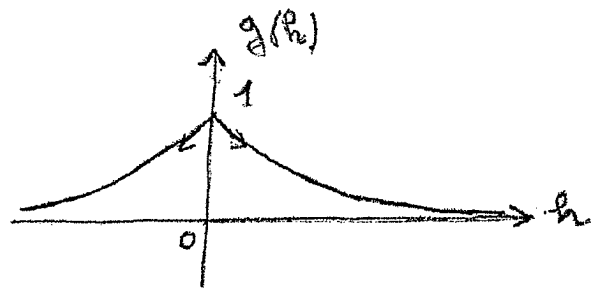
$$\frac{n}{L} a_1^{1+\lambda} = \frac{1}{a_2} a_1^{1+\lambda}$$

Comme on estime des tranches d'épaisseur a_2 , la variance de l'estimation sera multipliée par a_2^2

$$\left(\frac{1}{a_2} a_1^{1+\lambda} \right) a_2^2 = a_1^{1+\lambda} \times a_2$$

IV - EXERCICES

a) Variance d'estimation d'un covariogramme exponentiel (N° I - Pg 67)



$$g(h) = e^{-\lambda|h|}$$

$$\sigma^2(a) = a \sum_{k=1}^{\infty} g(ka) - \int_0^{\infty} g(h) dh$$

$$= -a g(0) + 2a \sum_{k=1}^{\infty} g(ka) - 2 \int_0^{\infty} g(h) dh \quad (\text{symétrie})$$

$$\sigma^2(a) = -a + 2a \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{e^{\lambda ka}} - 2 \int_0^{\infty} e^{-\lambda h} dh$$

termes d'une progression
géométrique de raison : $q = e^{-\lambda a}$

$$= -a + \frac{2a}{1 - e^{-\lambda a}} - 2 \left[\frac{e^{-\lambda h}}{-\lambda} \right]_0^{+\infty}$$

$$\sigma^2(a) = a \left[\frac{2}{1 - e^{-\lambda a}} - 1 - \frac{2}{\lambda a} \right]$$

On cherche la partie principale de la variance d'estimation :

$$1 - e^{-\lambda a} = \lambda a - \frac{\lambda^2 a^2}{2} + \frac{\lambda^3 a^3}{6} + \epsilon(\lambda a)$$

$$\frac{2}{1 - e^{-\lambda a}} = \frac{2}{\lambda a} \frac{1}{1 - \left[\frac{\lambda a}{2} - \frac{\lambda^2 a^2}{6} \right]}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \varepsilon(x)$$

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{1-e^{-\lambda a}} &= \frac{x^2}{\lambda a} \left[1 + \frac{\lambda a}{2} - \frac{\lambda^2 a^2}{6} + \left(\frac{\lambda a}{2} - \frac{\lambda^2 a^2}{6} \right) x \right] \\ &= \frac{x^2}{\lambda a} \left[1 + \frac{\lambda a}{2} + \frac{\lambda^2 a^2}{12} \right] \end{aligned}$$

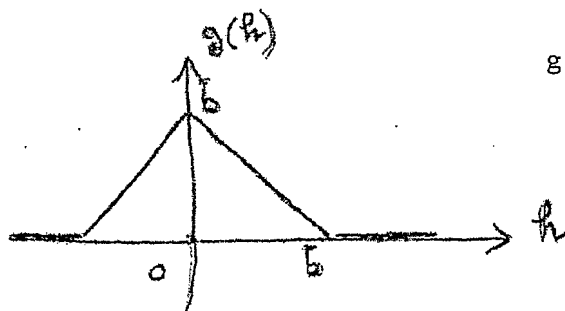
d'où :

$$\sigma^2(a) = a \left[\frac{x^2}{\lambda a} + 1 + \frac{\lambda a}{6} - 1 - \frac{x^2}{\lambda a} \right]$$

$$\boxed{\sigma^2(a) \approx \frac{\lambda a^2}{6}}$$

le terme fluctuant
nous échappe

b) Variance d'estimation par la formule d'approximation (N° 2- Pg 67)



$$g(h) = b - |h|$$

- Si l'on utilise la méthode d'approximation précédente, on trouve :

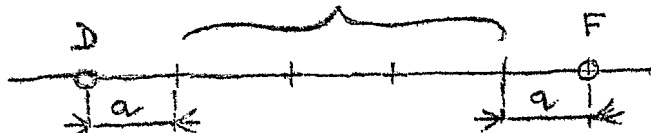
$$\boxed{\sigma^2(a) \approx \frac{a^2}{6}}$$

- On propose une autre solution :

Pour une maille a donnée, $b = (n-1)a + \varepsilon(a)$

⊖ négatif } sondages
+ positif }

n sondages +

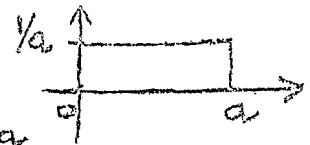


On suppose que :

- l'extrémité de début du segment de longueur $\bar{b}$ tombe dans D avec une probabilité uniforme sur ce segment.
- l'extrémité de fin de $\bar{b}$ tombe dans F avec une probabilité uniforme.

$$\bar{b} = d + (n-1)a + f$$

d, f : deux V.A indépendantes de loi uniforme



$$E(d) = E(f) = \int_0^a \frac{x}{a} dx = \left[\frac{x^2}{2a} \right]_0^a = \frac{a}{2}$$

$$E(d^2) = E(f^2) = \int_0^a \frac{x^2}{a} dx = \left[\frac{x^3}{3a} \right]_0^a = \frac{a^2}{3}$$

On a :

$$E(b) = E(d) + (n-1)a + E(f)$$

$$= \frac{a}{2} + (n-1)a + \frac{a}{2}$$

$E(b) = na$

$$\sigma^2(b) = \underbrace{\sigma^2(d) + \sigma^2(f)}_{\text{V.A indépendantes}} + 0$$

V.A indépendantes

$$\sigma^2(d) = E(d^2) - [E(d)]^2 = \frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{12}$$

$\sigma^2(b) = \frac{a^2}{6}$

On recouvre la même valeur. Ce qui veut dire que dans la méthode d'approximation de $\sigma^2(a)$, on a introduit des hypothèses probabilistes qui sont celles de l'implantation aléatoire indépendante de l'origine et de l'extrémité de la maille. On n'a pas atteint le terme fluctuant.

- c) Calcul de la valeur exacte de la variance d'estimation, dans le cas de l'exercice précédent

On prend comme seule hypothèse probabiliste, l'implantation uniforme de l'origine de la maille dans le segment $[0, a]$

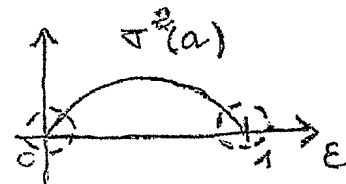
On a :

$$\bar{b} = a(n + \varepsilon) \quad 0 \leq \varepsilon < 1$$

Si $\varepsilon = 0$ (par hasard) $\bar{b} = na \Rightarrow$ variance nulle

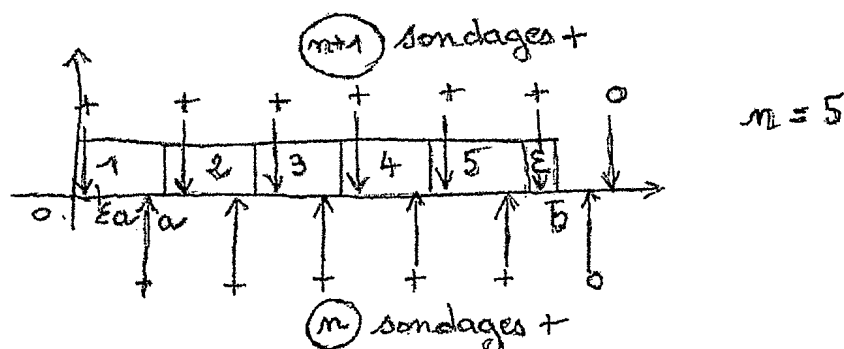
de même, si $\varepsilon = 1$ $\bar{b} = (n + 1)a \nearrow$

Il faut donc (en fonction de ε) une variance d'estimation de l'allure ci-contre



On cherche les probabilités

- tomber sur n sondages +
 - tomber sur $(n + 1)$ sondages +
- } en implantant l'origine de la maille dans $[0, a]$



Si N = nombre de sondages +

$$P(N=n) = (1 - \varepsilon) \frac{a}{a} \quad (q)$$

$$P(N=n+1) = \varepsilon \frac{a}{a} \quad (p)$$

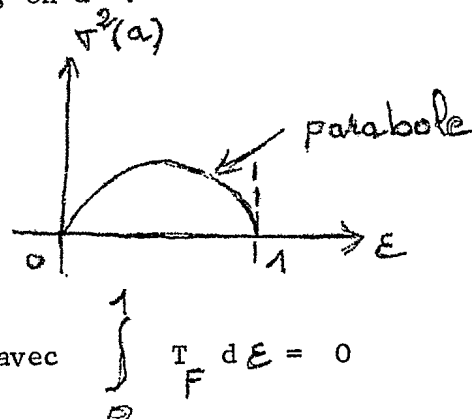
Loi binomiale

d'où :

$$D^2(N) = pq = \varepsilon(1 - \varepsilon)$$

L'estimateur de $\bar{b}$ étant : $\bar{b}^* = Na$, on a :

$$\boxed{V^2(a) = \varepsilon(1 - \varepsilon) a^2}$$



On sait que l'on doit avoir :

$$V^2(a) = \frac{a^2}{6} + T_F$$

avec $\int_0^1 T_F d\varepsilon = 0$

$$\text{donc} = \int_0^1 \frac{a^2}{6} d\varepsilon = \frac{a^2}{6}$$

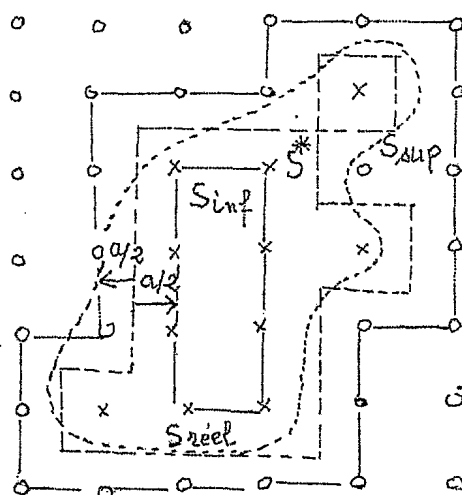
$$\text{Ce qui est vérifié car : } a \int_0^1 \varepsilon (1 - \varepsilon) d\varepsilon = \frac{a^2}{6}$$

Donc, en utilisant la formule d'approximation précédente, on voit que l'on a moyenné la variance d'estimation $\%$ à un ε régulièrement réparti sur $[0, 1]$

CHAPITRE CINQUIEME - APPLICATION A L'ESTIMATION DES SURFACES

I - EXEMPLE INTRODUCTIF

L'estimation des surfaces est le seul cas où, dans la pratique, on utilise les méthodes transitives.



x = sondage positif

a = sondage négatif

Une surface minéralisée a été reconnue à l'aide de II sondages positifs comme l'indique la figure. On peut prendre une estimation moyenne :

$$S^* = II \ a^2$$

Mais, en éliminant les points isolés, on peut donner une borne inférieure de cette estimation :

$$S_{inf} = 3 \ a^2$$

On peut aussi en prendre une borne supérieure : $S_{sup} = 22 \ a^2$

Nous voyons que les valeurs que nous pouvons obtenir subissent des fluctuations importantes. Celles-ci sont liées au périmètre $2p$ de l'estimation moyenne.

Pour S_{inf} (ou S_{sup}), nous avons une minoration (ou majoration) de :

$$\Delta S = 2 \ p \times \frac{a}{2} - 4 \ \frac{a^2}{4} \quad (+ \text{ dans l'autre cas})$$

(le nombre des angles saillants dépassant de 4 le nombre de angles rentrants, figure connexe)

$$S_{inf}^p = (n + 1) a^2 \dots p^2$$

$$S^* = n a^2$$

$$S_{sup} = (n + 1) a^2 + p a$$

On se propose d'utiliser l'outil beaucoup plus puissant que sont les méthodes transitives.

II - ESTIMATION DANS LE CAS ISOTROPE

Nous savons que dans le cas de l'indicatrice :

$$F(h) = K(0) - |h| D_\alpha$$

$$= S - |h| D_\alpha$$

avec D_α = demi-variation diamétrale de S dans la direction α du vecteur h (pour une figure convexe, il s'agit plus simplement du diamètre apparent)

Dans le cas isotrope, D_α ne dépend pas de la direction α :

$$K(r) = S - Dr$$

Examinons la contribution dans la variance d'estimation à l'aide d'une grille d'un terme en r^λ

$$r^\lambda \Rightarrow \nabla^2(a_1, a_2) = A a_2^{2+\lambda} + B a_1^{1+\lambda} a_2 \quad \text{avec } a_1 \leq a_2$$

Ici $\lambda = 1$, d'où :

$$\nabla_S^2 = \nabla^2(a_1, a_2) = D \left[0,06 a_2^3 + \frac{1}{6} a_1^2 a_2 \right]$$

(Le coefficient $1/6$ que nous avons déjà rencontré dans les exercices est dû à la présence d'un covariogramme linéaire)

On ne tient évidemment pas compte dans cette formule de la présence d'un terme fluctuant. On peut utiliser l'expression précédente sous plusieurs formes.

On a : $n = \frac{S}{a_1 a_2} \approx$ nombres de sondages positifs dans le cas d'une grille suffisamment fine

$$\frac{a_1}{a_2} = \lambda \quad \text{rapport de maille } (\leq 1)$$

$$a_1 = \sqrt{\frac{\lambda S}{n}} \quad a_2 = \sqrt{\frac{S}{\lambda n}}$$

d'où :

$$\boxed{\frac{\nabla_S^2}{S^2} = \frac{1}{n^{3/2}} \frac{D}{\sqrt{S}} \left(\frac{1}{6} \sqrt{\lambda} + 0,06 \frac{1}{\lambda^{3/2}} \right)}$$

$$\frac{D}{\sqrt{S}} = \text{coefficient de nature purement géométrique}$$

L'expression précédente est inversement proportionnelle à la puissance $3/2$ du nombre des sondages, d'où une convergence assez rapide quand le nombre de ceux-ci croît.

Si l'on estime D comme diamètre d'une surface correspondant à l'estimation moyenne du paragraphe précédent :

$$D = N_1 a_1 = N_2 a_2$$

N_1 éléments parallèles à a_1 et N_2 éléments parallèles à a_2 constituant le périmètre.

$$\frac{\sqrt{S}^2}{S^2} = \frac{D}{n^2 (a_1 a_2)^2} (0,06 a_2^3 + \frac{1}{6} a_1^2 a_2) \quad a_1 \leq a_2$$

$$= \frac{D}{n^2} (0,06 \frac{a_2}{a_1^2} + \frac{1}{6} \frac{1}{a_1^2})$$

Or :

$$N_2 = \frac{D}{a_2} \quad N_1 = \frac{D}{a_1}$$

$$D \frac{a_2}{a_1^2} = N_1 \frac{a_2}{a_1} = \frac{(N_1)^2}{N_2}$$

On obtient une formule commode dans les applications pratiques :

$$\boxed{\frac{\sqrt{S}^2}{S^2} = \frac{1}{n^2} \left[\frac{1}{6} N_2 + 0,06 \frac{(N_1)^2}{N_2} \right]} \quad (I)$$

III - ESTIMATION DANS LE CAS ANISOTROPE

Si le contour présente une direction principale d'allongement, on placera la maille de façon à ce que le côté a_1 soit parallèle à cette direction d'allongement. Si on effectue alors une affinité selon l'axe perpendiculaire ou se ramène au cas isotrope et où :

$$\frac{\sqrt{S}^2}{S^2}, \text{ ni } N_1, \text{ ni } N_2 \text{ ne varient}$$

la formule (I) est donc valable dans le cas anisotrope

Remarque :

$$\text{Si } S = n a_1 a_2$$

n = nombre obtenu par comptage de sondages positifs

Alors :
$$\frac{\sigma_S^2}{S^2} = \frac{\sigma_n^2}{n^2}$$

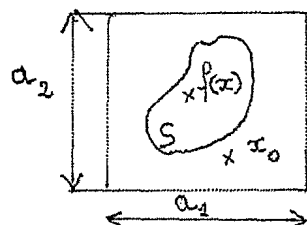
avec :
$$\frac{\sigma_n^2}{n^2} = \frac{D}{\sqrt{S}} \left(\frac{1}{6} \sqrt{\lambda} + 0,06 \frac{1}{\lambda^{3/2}} \right)$$

Constante théorique indépendante de la maille. En fait, dans la réalité, le terme fluctuant T_F , fera varier $\frac{\sigma_n^2}{n^2}$ expérimental autour de la valeur trouvée précédemment.

IV - EXERCICES

a) Variance d'estimation dans le cas aléatoire (N° 3- Pg 67)

On se met dans le cas grandes mailles $\%$ à la portée. On ne peut plus alors prétendre à des développements limités.



On considère une V.R $f(x)$ de covariogramme $g(h)$ et de support S . On prend un point x_0 au hasard (répartition uniforme) dans la maille rectangulaire $a_1 \times a_2$.

On estime la quantité de métal par :

$$Q^*(x_0) = a_1 a_2 f(x_0)$$

avec :
$$f(x_0) = \begin{cases} f(x_0) & \text{si } x_0 \in S \\ 0 & \text{si } x_0 \notin S \end{cases}$$

On cherche l'espérance mathématique et la variance de cet estimateur

$$\begin{aligned} E [Q^*(x_0)] &= a_1 a_2 E [f(x_0)] \\ &= a_1 a_2 \left[0 + \int_S f(x) \frac{dx}{a_1 a_2} \right] \\ &= \int_S f(x) dx = Q \end{aligned}$$

répartition uniforme
sur le rectangle
 $a_1 \times a_2$

on en fait ici un élément
d'aire, $x \in \mathbb{R}^2$

$$\boxed{E \left[Q^*(x_0) \right] = Q} \quad \text{estimateur sans biais}$$

$$V^2 \left[Q^*(x_0) \right] = E \left[Q^{*2}(x_0) \right] - Q^2$$

$$E \left[Q^{*2}(x_0) \right] = a_1^2 a_2^2 \int_S f(x) \frac{dx}{a_1 a_2} = a_1 a_2 g(0)$$

$$\begin{aligned} V^2 \left[Q^*(x_0) \right] &= a_1 a_2 g(0) - Q^2 \\ &= a_1 a_2 g(0) - \int g(h) dh \end{aligned} \quad (I)$$

En utilisant la formule d'approximation :

$$\begin{aligned} V^2(a) &= a \sum_p g(pa) - \int g(h) dh \\ &= a_1 a_2 \sum_{p,q} g(pa_1, qa_2) - \int g(h) dh \end{aligned}$$

formule d'approximation

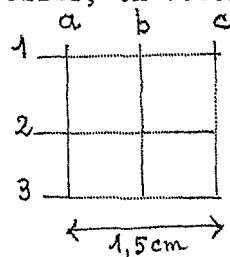
La portée étant $\leq a_1$ et a_2 , la seule valeur prise en compte sera donc :

$$\begin{cases} p = 0 \\ q = 0 \end{cases} \Rightarrow g(0) \quad \text{on retrouve la formule (I)}$$

b) Exercice pratique d'estimation de surface

On prend une maille carrée : $a = 1,5 \text{ cm}$

On implante l'origine de la maille en $I = 9$ positions. Pour chacune d'elles, on détermine le nombre n de sondages positifs



a_1	61	b_1	65	c_1	64
a_2	67	b_2	64	c_2	65
a_3	63	b_3	61	c_3	63

$n_i = \text{nbre de sondages} +$

$$N = \bar{n} = 63,667 = \frac{\sum n_i}{I}$$

$$\Delta n^2_{\text{exp}} = 30,01$$

Si $s_i^* = n_i a^2$, on a $s^*_{\text{(moyen)}} = \frac{\sum s_i^*}{I} = N a^2$

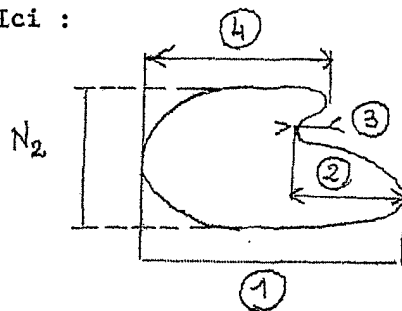
On calcule aussi les $\frac{\Delta n^{*2}}{N^2}$ exp et $\frac{\Delta n^{*2}}{\sqrt{N}}$

Pour calculer à l'aide des formules théoriques d'approximation, on détermine N_1 et N_2

avec $D_1 = N_1 a_1$ = diamètre apparent dans la direction prépondérante

$$D_2 = N_2 a_2$$

Ici :



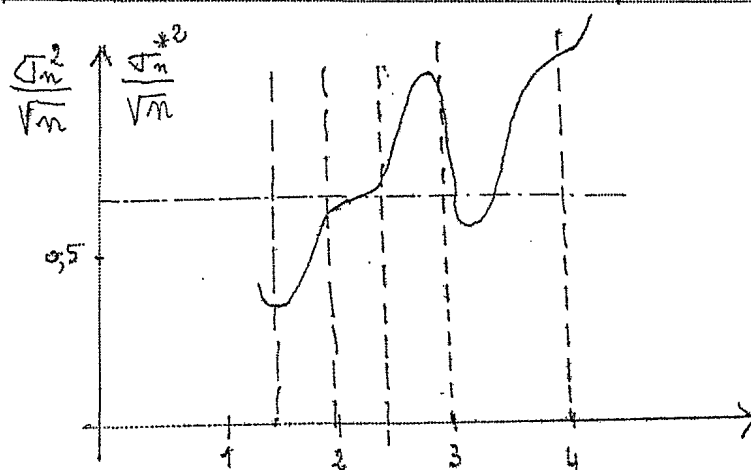
$$D_1 = \left(\frac{(1) + (2) + (3) + (4)}{2} \right) a_1$$

$$\left. \begin{array}{l} N_1 = 2I \\ N_2 = 8 \end{array} \right\} \text{ en moyenne sur les 9 positions de la maille}$$

Le travail a été recommencé de façon identique pour 5 mailles.

a	1,5	2	2,5	3	4
$N = \frac{\sum n_i}{I}$	63,67	34,6	22,80	15,4	9
S^*_{moyen}	143,26	138,5	143,00	138,6	144
$g^*_{\frac{1}{2}}$	3,33	3,24	2,81	4	3,44
$\frac{\sigma_n^{*2}}{N^2}$	0,0008	0,003	0,00534	0,0165	0,042
$\frac{g_n^{*2}}{\sqrt{N}}$	0,417	0,57	0,60	1,01	1,15
$\frac{\sigma_n^{2+\text{thé}}}{\sqrt{n}}$	0,57	0,57	0,56	0,56	0,57

la croissance apparente est purement fortuite, ce n'est pas une manifestation systématique.



On a mis en évidence le "Zitterbewegung"

CHAPITRE SIXIEME

FONCTIONS ALEATOIRES STATIONNAIRES ET FONCTIONS
ALEATOIRES INTRINSEQUES : COVARIANCE ET VARIOGRAMME

I - FONCTIONS ALEATOIRES

I-I- Définition

Précédemment en transitif, on n'avait jamais introduit d'hypothèse de stationnaire puisque, au contraire, le champ était toujours borné. On va maintenant introduire de façon explicite des hypothèses probabilistes concernant les V.R.

Une variable aléatoire (V.A) scalaire $\mathcal{Y}$ est une application de Ω , espace probabilisable dans $\mathbb{R}$. On peut considérer des V.A vectorielles, à l'aide d'une famille de n V.A, en général, non indépendantes $\mathcal{Y} = (\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2, \dots, \mathcal{Y}_n)$

On envisage alors des familles infinies de V.A. En particulier, si $x \in \mathbb{R}_n$, on peut définir une suite $(\mathcal{Y}_x)_{x \in \mathbb{R}^n}$. En tout point x_0 de $\mathbb{R}_n$ correspond une variable aléatoire ordinaire $\mathcal{Y}_{x_0}$ que l'on peut noter $\mathcal{Y}(x_0)$. On dit que $\mathcal{Y}(x)$ est une fonction aléatoire (F.A)

I-2- Réalisation d'une F.A.

Si ω_0 est tiré au hasard dans Ω , selon la loi à une infinité de variables $\mathcal{Y}(x)$, on obtient une fonction numérique particulière :

$$\mathcal{Y}(\omega_0, x) = y(x)$$

On ne dira jamais que "la variable régionalisée $y(x)$ est une F.A" mais une réalisation unique, aucune inférence statistique ne pouvant se justifier à priori. C'est là qu'intervient la stationnarité.

I-3- F.A stationnaire

L'outil statistique ne devient efficace que si le phénomène est statistiquement homogène dans l'espace. L'hypothèse stationnaire se justifie alors en considérant que "la loi de la F.A est invariante par translation"

$$(\mathcal{Y}(x_1), \mathcal{Y}(x_2), \dots, \mathcal{Y}(x_n)) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (\mathcal{Y}(x_1+h), \dots, \mathcal{Y}(x_n+h))$$

I- 4- Espérance mathématique

Si en x_0 , la V.A ordinaire $Y(x_0)$ admet une espérance mathématique nous avons :

$$m(x_0) = E[Y(x_0)]$$

Mais par suite de la stationnarité :

$$m(x_0) = m(x_0 + h) = m \quad \forall h \in \mathbb{R}^n$$

On note conventionnellement : $m = E[Y(x)]$

On supposera dans la suite $m = 0$, quitte à remplacer $Y(x)$ par $Y(x) - m$

I-5- La covariance $K(h)$

En deux points d'appui x_0 et $x_0 + h$, si $Y(x_0)$ et $Y(x_0 + h)$ admettent une covariance :

$$E[Y(x_0) Y(x_0 + h)] = K(x_0, h)$$

Du fait de la stationnarité :

$$K(x_0 + a, h) = K(x_0, h) = K(h)$$

On écrira donc : $K(h) = E[Y(x) Y(x + h)]$

C'est une intégrale étendue à l'espace abstrait Ω et non calculée dans l'espace Euclidien. D'ailleurs, celle-ci serait divergente dans le cas de la stationnarité, puisque le domaine est ∞ .
Pour $h = 0$

$$E[Y(x)]^2 = K(0) = \sigma^2$$

σ^2 = variance de la V.A $Y(x_0)$, toujours indépendante de x_0 dans le cadre de la stationnarité

On peut démontrer que :

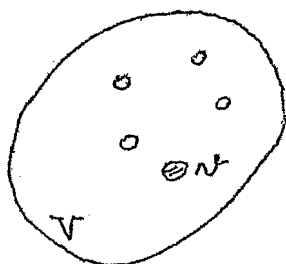
$$\exists K(h) \Leftrightarrow \sigma^2 \exists \quad \text{et} \quad K(0) < \infty$$

I-6.- Variance à priori finie

$$K(0) < \infty$$

C'est une hypothèse assez forte. Il existe des phénomènes qu'il n'est pas possible de représenter par des fonctions aléatoires si on leur attribue une variance à priori finie :

Ex : Variance d'un échantillon de taille N dans un champ Y



Pour n échantillons n , on obtient une variance finie γ^2 . Mais en réalité cette variance dépend de la géométrie du champ et de l'échantillon

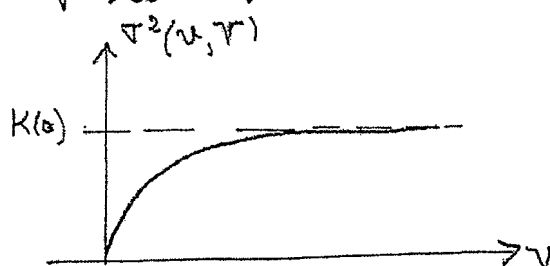
$$\gamma^2 (n, V)$$

n = taille de l'échantillon

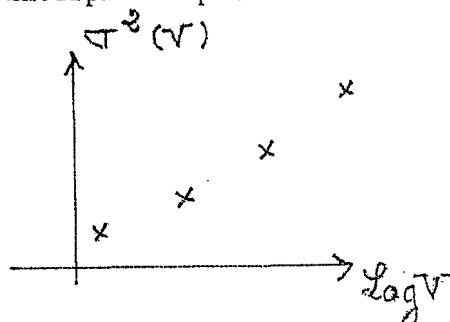
V = fonction croissante du champ

Si $K(0) \exists$, un palier apparaît dans la variation de γ^2

$$\lim_{V \rightarrow \infty} \gamma^2 (n, V) = K(0)$$



En fait, ce phénomène ne se produit pas toujours. Pour l'exemple important du gisement d'or d'Afrique du Sud, à l'aide d'un nombre très important d'échantillons, on a tracé une courbe. On observe une croissance jusqu'au gisement entier qu'il n'est pas possible d'interpréter par une variance à priori finie.



$$\gamma^2 (n, V) = \gamma^2 \log \frac{V}{V_0}$$

(Formule de De Vries)

II - HYPOTHESE INTRINSEQUE

II-I- Définition

On suppose que la variabilité est la même dans tout le champ et non la variation globale qui peut fluctuer.

Hyp $\gamma(x+h) - \gamma(x)$ F.A stationnaire à variance finie

Alors existent :

$$\begin{cases} E(\gamma(x+h) - \gamma(x)) = m(h) \\ \frac{1}{2} D^2 [\gamma(x+h) - \gamma(x)] = \gamma(h) \end{cases}$$

On pose : $m(h) =$ dérive linéaire

$2\gamma(h) =$ variogramme

(c'est la fonction appelée Δ variance dans les études de Mandelbröcht)

Pour ne pas alourdir la suite de l'exposé, on suppose :

$$m(h) = 0$$

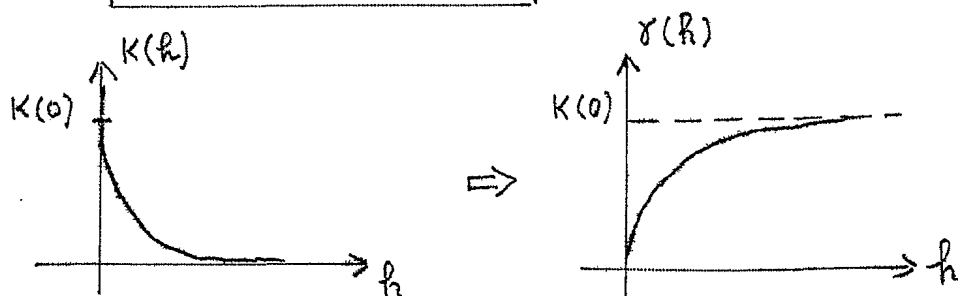
quitte à remplacer $\gamma(x)$ par $\gamma(x) - m(x)$

II-2- Rapports entre la covariance $K(h)$ et le demi-variogramme $\gamma(h)$

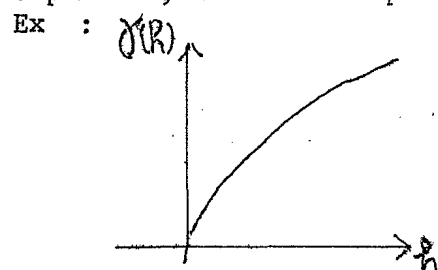
Si $K(0) < \infty$, alors :

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} [\gamma^2(x+h) - 2\gamma(x)\gamma(x+h) + \gamma^2(x)]$$

$$\gamma(h) = K(0) - K(h)$$



Inversement, $K(h) \exists$ si et seulement le variogramme est borné. Cependant, il n'en est pas ainsi dans bien des cas



$$\gamma(h) = a \log r$$

ou $b r^\lambda \quad (\lambda < 2)$

Postuler l'existence d'une covariance n'a plus alors de sens

L'hypothèse intrinsèque est plus puissante que l'hypothèse de stationnarité.

III- PROPRIETES DE $\gamma(h)$ et $K(h)$

III-1- Inégalités

$$|K(h)| \leq K(0) \quad (\text{Inégalité de Schwarz})$$

$$\gamma(h) \geq 0 \quad \text{et} \quad \gamma(0) = 0$$

III-2- Classe des fonctions $K(h)$

$K(h)$ doit être une fonction de type positif. Si on sort de cette classe, on risque de faire apparaître des variances négatives. Considérons la F.A :

$$Y = \sum_{i=1}^k \lambda_i Y(x_i) \quad \text{avec} \quad \sum \lambda_i = 0 \quad (\text{cas stationnaire})$$

$$E(Y^2) = \sum_{i,j} E\{Y(x_i)Y(x_j)\}$$

$$= \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j K(x_i - x_j) \quad \text{doit être} \geq 0 \quad \forall \lambda_i \text{ et } \lambda_j$$

C'est une propriété caractéristique des fonctions de type positif.

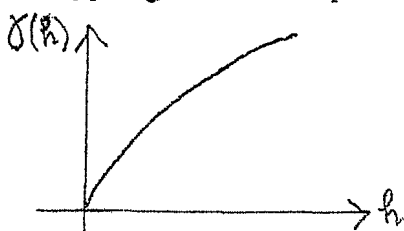
III-3- Classe des fonctions $\gamma(h)$

$\gamma(h)$ est de type positif conditionnel

On doit se limiter dans ce cas, aux combinaisons linéaires

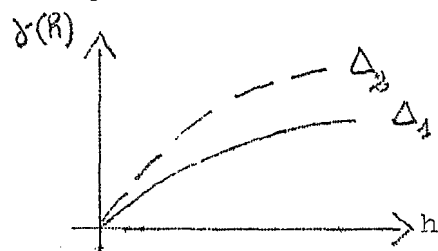
$$\sum_{i=1}^k \lambda_i = 0$$

On obtient alors des restrictions, par exemple, pour des fonctions du type γ^λ . On ne pourra avoir un variogramme que pour $\lambda < 2$



$\gamma(h)$, valeur moyenne quadratique des écarts entre deux échantillons distants de h , sera une fonction croissante.

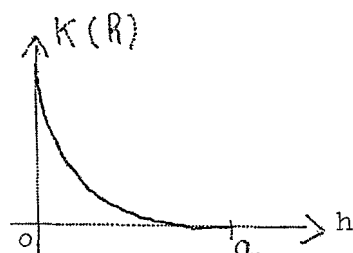
III-4- Anisotropie



Exemple d'anisotropie selon deux directions Δ_1 et Δ_2 de h .

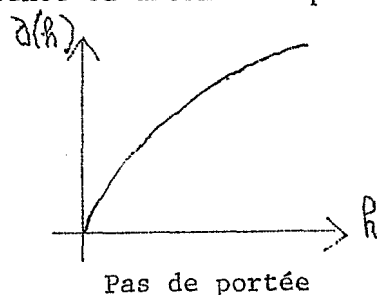
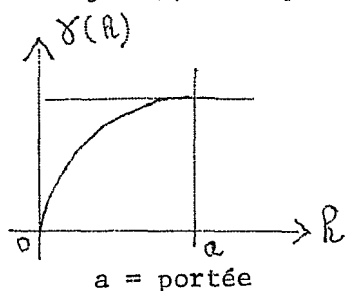
III-5- Portée

Dans le cas où $\exists K(h)$

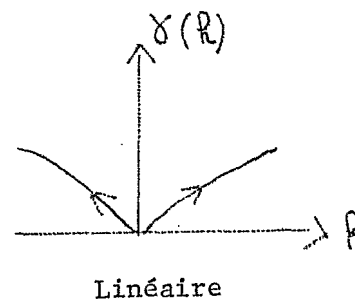
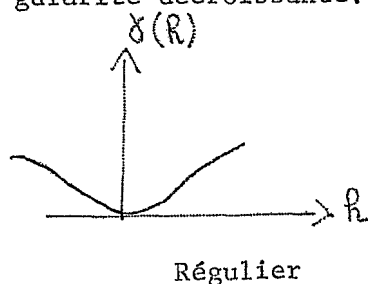


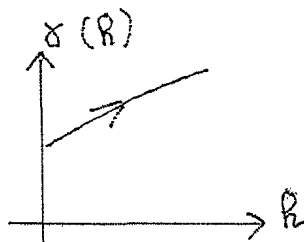
a = portée = distance à partir de laquelle $K(h)$ devient négligeable. Les corrélations entre les échantillons s'éteignent.

Pour $\gamma(h)$, nous pourrions avoir présence ou absence de portée.

III-6-Comportement de $\gamma(h)$ au voisinage de l'origine

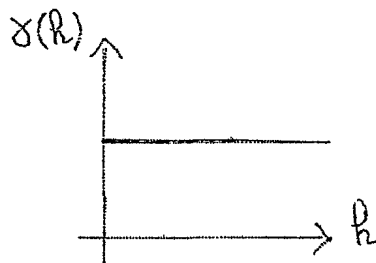
La continuité et la régularité dans l'espace de la F.A $\gamma(x)$ s'expriment par le comportement du $\gamma(h)$ au voisinage de l'origine. Nous pouvons construire une typologie des $\gamma(h)$ par ordre de régularité décroissante.





Effet de pépité

Sur le plan local, l'aspect est chaotique mais à plus grande échelle, on observe un certain phénomène structural.



Effet de pépité pur

On observe un bruit de fond à l'état pur. $\gamma(x)$ et $\gamma(x+h)$ sont indépendants $\forall h$.

IV - CONTINUITÉ ET DERIVATION EN MOYENNE QUADRATIQUE (m.q)

Ce sont les concepts qui permettent d'expliquer les phénomènes précédents.

IV -I- Convergence en m.q

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{m.q} X \iff E \left\{ (X_n - X)^2 \right\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

IV-2- Continuité en m.q

$$\gamma \text{ continue en m.q en } x \iff E \left\{ \left[\gamma(x+h) - \gamma(x) \right]^2 \right\} \xrightarrow[|h| \rightarrow 0]{} 0$$

Il en est ainsi si et seulement si : $\gamma(h)$ continue en $h=0$

donc Pas d'effet de pépité

IV-3- Dérivation en m.q

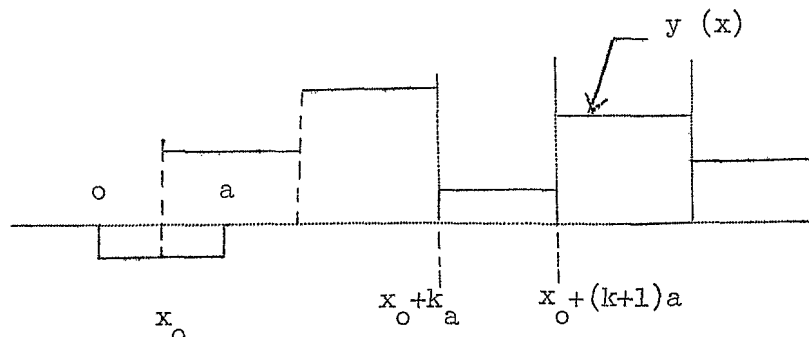
$$\gamma'(x) \text{ dérivée en m.q de } \gamma(x) \text{ en } x \iff E \left\{ \left[\frac{\gamma(x+h) - \gamma(x)}{h} - \gamma'(x) \right]^2 \right\} \xrightarrow[|h| \rightarrow 0]{} 0$$

On démontre (notion topologique) qu'il est alors nécessaire et suffisant que $\exists \gamma''(h)$

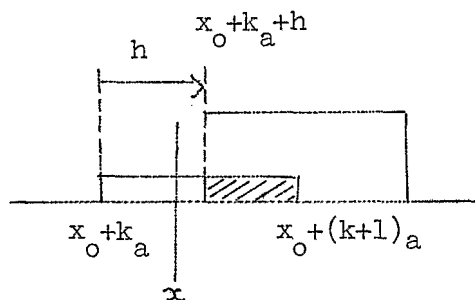
En particulier, il suffit que $\exists \gamma''(0)$ (comportement parabolique au voisinage de l'origine)

V - EXERCICES

a) Calcul du variogramme d'une réalisation d'une fonction aléatoire (N°I-Pg68)



$y(x)$ = valeur constante aléatoire obtenue par tirages indépendants pour chaque maille sur une loi $\mathcal{L}(m, \sigma^2)$
 Implantation de l'origine de la maille au hasard dans $[0, a]$
 Ceci assure la stationnarité du phénomène; si x_0 était donné fixe, il n'y aurait plus stationnarité mais périodicité ($T = a$)
 On cherche la probabilité pour que deux points x et $x + h$ appartiennent au même segment a .



$$h \geq 0$$

La probabilité est :

$$P = \frac{a - h}{a} = 1 - \frac{h}{a}$$

$$h < 0$$

La probabilité est :

$$P = \frac{a - h}{a} = 1 - \frac{h}{a}$$

$$P \left\{ x, x + h \in \text{même segment } a \right\} = 1 - \frac{|h|}{a} \quad \text{pour } |h| \leq a$$

$$= 0 \quad \text{pour } |h| > a$$

On calcule le demi-variogramme de $y(x)$

$$2 \gamma(h) = E \left\{ \left[y(x+h) - y(x) \right]^2 \right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[y(x+h) - y(x) \right]^2 dx$$

-I) Cas $|h| \leq a$

$$\begin{aligned}
 K(h) &= E \left[y(x+h) y(x) \right] \\
 &= \underbrace{p_1 E \left[y(x)^2 \right]}_{\substack{\text{les points tombent} \\ \text{dans le même} \\ \text{segment}}} + \underbrace{p_2 E \left[y(x+h) y(x) \right]}_{\substack{\text{les points tombent dans deux} \\ \text{segments } \neq y(x+h) \text{ et } y(x) \\ \text{sont des V.A indépendantes de} \\ \text{même loi}}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K(h) &= \left(1 - \frac{|h|}{a} \right) (m^2 + \sigma^2) + \frac{|h|}{a} m^2 \\
 &= \left(1 - \frac{|h|}{a} \right) \sigma^2 + m^2
 \end{aligned}$$

Il s'agit ici de la covariance non centrée, $K_c(h)$ s'exprime par :

$$K_c(h) = K(h) - m^2 = \sigma^2 \left(1 - \frac{|h|}{a} \right)$$

On en déduit le variogramme :

$$\gamma(h) = K(0) - K(h) = \sigma^2 - \left(1 - \frac{|h|}{a} \right) \sigma^2$$

$$\boxed{\gamma(h) = \frac{|h|}{a} \sigma^2} \quad \text{pour } |h| \leq a$$

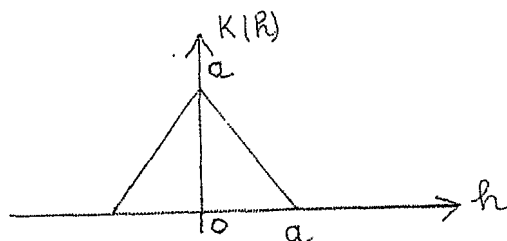
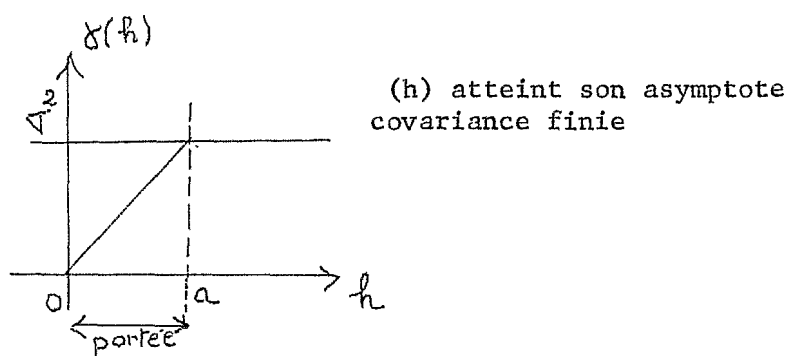
-2) Cas $|h| > a$

$$K(h) = E \left[y(x+h) y(x) \right] = \left(E | y(x) | \right)^2 = m^2$$

$$K_c(h) = K(h) - m^2 = 0$$

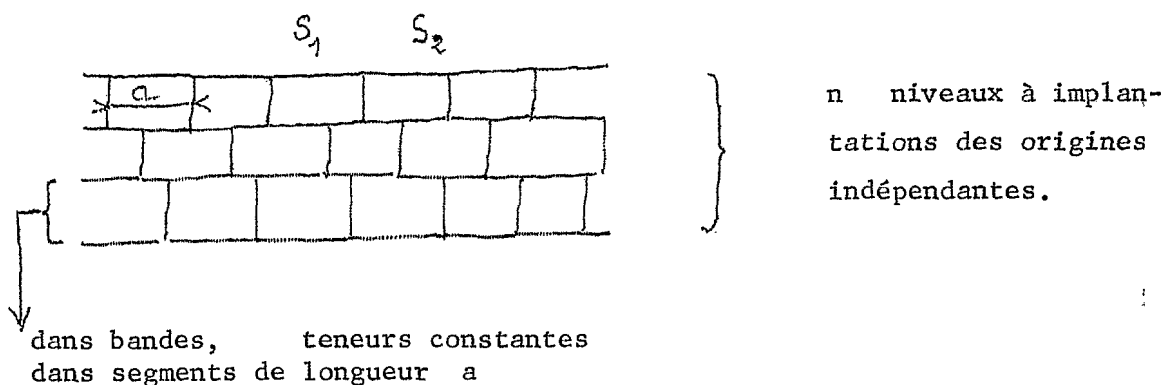
$$\begin{aligned}
 2 \gamma(h) &= E \left\{ \left[y(x+h) - y(x) \right]^2 \right\} \\
 &= E \left\{ y^2(x+h) \right\} + E \left\{ y^2(x) \right\} - E \left\{ y(x+h) E y(x) \right\} \\
 &= m^2 + \sigma^2 + m^2 + \sigma^2 - 2 m^2
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\gamma(h) = \sigma^2} \quad \text{pour } |h| > a$$



C'est le covariogramme géométrique du segment de longueur a ; ce qui est bien naturel puisque l'on a tiré au hasard les valeurs de $\gamma(x)$ pour chaque segment

b) Généralisation au cas de stratifications recouvertes



On ne connaît que les teneurs moyennes correspondant à des sondages tels que S_1 ou S_2 . On calcule la fonction de covariance des teneurs moyennes des sondages.

$$\bar{t} = \frac{1}{n} \sum \gamma_i \quad \text{somme de V.A indépendantes}$$

$$\begin{aligned}
2 \gamma_t(h) &= E \left\{ \left[t(x+h) - t(x) \right]^2 \right\} = \frac{1}{n^2} E \left\{ \left[\sum y_i(x+h) - \sum y_i \right]^2 \right\} \\
&= \frac{1}{n^2} E \left\{ \left[\sum_i (y_i(x+h) - y_i(x)) \right]^2 \right\}
\end{aligned}$$

Les accroissements sont indépendants
d'un niveau à un autre

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n^2} \sum_i E \left\{ \left[y_i(x+h) - y_i(x) \right]^2 \right\} \\
\gamma_t(h) &= \frac{1}{n^2} n \frac{|h|}{a} \sigma^2 = \frac{1}{n} \frac{|h|}{a} \sigma^2 \quad |h| \leq a \\
&= \frac{1}{n^2} n \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n} \quad |h| > a
\end{aligned}$$

La variance de la moyenne de n V.A indépendantes est égale
à la variance de la V.A divisée par n

$$K(h) - K(0) = \frac{1}{n} \frac{|h|}{a} \sigma^2$$

$$\text{Pour } h = a \text{ (portée)} : 0 - K(0) = \frac{1}{n} \sigma^2$$

$$\boxed{K(h) = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{|h|}{a} \right) \sigma^2}$$

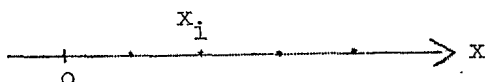
Il a la même forme que précédemment. Il met, en particulier, en
valeur la structure du phénomène. Il a agi comme un filtre qui
lève le brouillage.

CHAPITRE SEPTIEME - CONTINUITE ET INTEGRATION EN M.Q :

REGULARISATION ET MONTEE

I - RECONSTRUCTION DE LA LOI DE PROBABILITE D'UNE F.A A L'AIDE D'UNE REALISATION UNIQUE

I-1- Réalité expérimentale



On a une V.R $y(x)$ représentant le phénomène que l'on ne connaît, en fait, que sur un certain support.

Par exemple : $y(x_1)$

I-2- V.R comme réalisation d'une F.A

Si : $x \in \mathbb{R}^n$

$w \in \Omega$ (espace probabilisé)

On considère une F.A $\mathcal{Y}$, telle que :

$$\Omega \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{y(x, w)} \mathbb{R}$$

Tout se passe comme si on avait tiré un w_0 particulier dans $(\Omega, \mathcal{G}, P)$ et que l'on observait précisément une réalisation particulière de la F.A

$$y(x) = \mathcal{Y}(x, w_0)$$

I-3- Hypothèse de stationnarité

Cette hypothèse très forte consiste à considérer que deux réalisations translatées de h dans l'espace ont même loi de probabilité. Il faut alors savoir si disposant d'une réalisation, on peut en inférer quelque chose concernant la loi de probabilité P .

On peut considérer les équations :

$$- E [\mathcal{Y}(x)] = m(x)$$

y figurent autant de paramètres à estimer que de données expérimentales

$$- E [\mathcal{Y}(x) \mathcal{Y}(x+h)] = K(x, x+h)$$

Le nombre beaucoup plus grand de paramètres rend le problème inextricable

Mais dans le cas stationnaire la simplification est très grande :

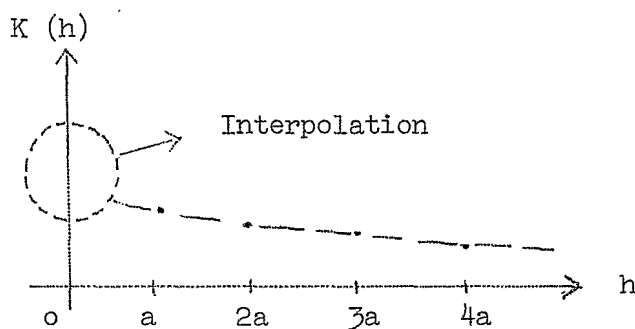
$$m(x) = m$$

$$K(x, x+h) = K(h)$$

Si la maille de reconnaissance est par exemple régulière, on peut avoir une infinité de couples de points permettant d'obtenir une estimation de $K(h)$.

$$\left. \begin{array}{l} y(x_0) \quad y(x_0 + a) \\ y(x_0 + a) \quad y(x_0 + 2a) \\ \dots\dots\dots \\ y(x_0 + ka) \quad (x_0 + (k+1) \cdot a) \end{array} \right\} K^*(a) = \frac{1}{n} \sum_k y(x_0 + ka) \quad xy \left[x_0 + (k+1)a \right]$$

On recommence pour $2a, 3a, \dots, na$, d'où des estimations $K^*(2a), K^*(3a), \dots, K^*(na)$



La maille étant $a \neq 0$, il est nécessaire d'extrapoler en $h = 0$. On a juste donc un modèle de fonction de covariance dont le choix est fait en fonction du phénomène étudié. L'expérience de celui-ci joue ici un grand rôle.

Il est alors nécessaire d'effectuer une critique statistique de l'estimation $K^*(a)$ de $K(a)$, par l'étude de :

$$E \left[K^*(a) \right] = K(a) \quad (\text{sans biais})$$

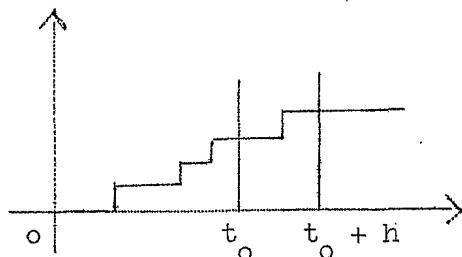
$$D^2 \left[K^*(a) \right] = \text{variance d'estimation de } K(a) \text{ par } K^*(a)$$

Cette variance est relativement faible tant que l'on reste près de l'origine (petites valeurs de h) mais si h croît, la croissance de D^2 devient très forte. Mais ce phénomène est de peu d'importance car c'est, en fait, le comportement à l'origine qui intervient dans l'estimation de la V.R.

I-4- Hypothèse intrinsèque

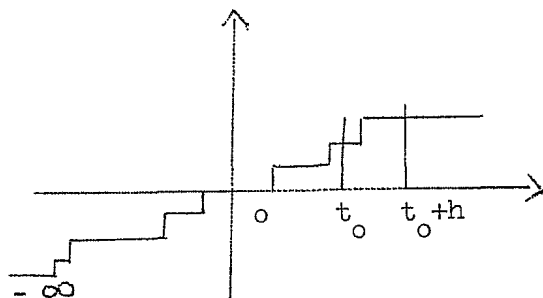
Ce n'est plus la fonction elle-même mais ses accroissements qui sont

stationnaires. Cette hypothèse est un peu moins forte que la précédente. Il n'est pas fait mention de la covariance de la F.A. L'exemple le plus simple d'un tel phénomène est donné par le processus de Poisson.



$N(t_0)$ = nombre d'occurrences entre 0 et t_0 qui suit une loi de Poisson de paramètre $\Theta = at_0$

$N(t)$ n'est pas stationnaire car il croît sans arrêt. Cela vient du fait que l'on a supposé qu'à $t = 0$ il y avait zéro réalisation précédant la première à $t \gg 0$



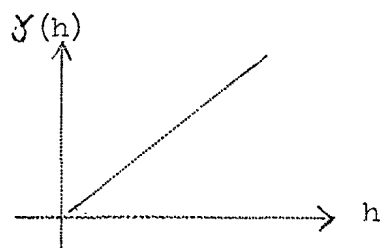
En fait, il pouvait déjà y en avoir une infinité pour $t < 0$

Si on étudie les accroissements :

$$N(t_0 + h) - N(t_0)$$

Ils suivent une loi de Poisson de paramètre ah donc indépendant de t_0 , il y a stationnarité.

D'ailleurs, pour cette F.A, nous avons :



$$m(h) = ah$$

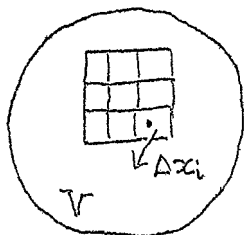
$$\gamma(h) = 1/2 ah$$

Le $\gamma(h)$ est non borné. On vérifie qu'il n'y a pas de covariance. L'étude de cette F.A échappe donc à la théorie des F.A stationnaires d'ordre 2.

II - INTEGRATION EN MOYENNE QUADRATIQUE

On introduit la notion d'intégrale stochastique notée :

$$I = \int_V \gamma(x) p(x) dx$$



On la définit par analogie avec la formule d'approximation de l'intégrale de Riemann comme limite en moyenne quadratique de :

$$I_n = \sum_{i=1}^n \gamma(x_i) p(x_i) \Delta x_i$$

C'est une V.A. comme combinaison linéaire finie de V.A. On suppose que l'on se place dans le cas de la stationnarité :

$$m = 0, \quad \exists K(h)$$

Alors :

$$I_n^2 = \sum_i \sum_j \gamma(x_i) \gamma(x_j) p(x_i) p(x_j) \Delta x_i \Delta x_j$$

$$D^2(I_n) = E(I_n^2) \quad \text{car } m = 0$$

$$= \sum_{i,j} K(x_i - x_j) p(x_i) p(x_j) \Delta x_i \Delta x_j$$

Le problème est de savoir si de telles expressions approchées admettent une limite en m.q.

Si : $\lim I_n \exists \iff$ La variance $E(I_n^2)$ admet elle-même une limite $\exists I$, intégrale stochastique

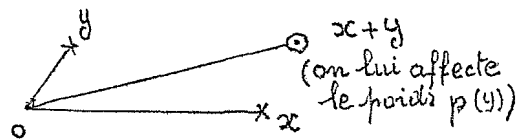
$$\iff \exists D^2(I) = \int_V \int_V K(x - y) p(x) p(y) dx dy$$

et alors effectivement $D^2(I) = \text{variance de } I$

III - REGULARISATION OU CONVOLUTION STOCHASTIQUE

On considère la F.A. : $\gamma_p = \gamma * p$

$$\gamma_p(x) = \int \gamma(x + y) p(y) dy$$



On obtient une telle transformation par lissage d'une V.R, par exemple; la nouvelle F.A peut être plus régulière que la précédente, par modification ou régularisation de la fonction de covariance.

On étudie la condition d'existence d'une telle expression.
On se place dans le cas d'un domaine infini. On peut d'ailleurs se ramener à un domaine fini à l'aide des artifices suivants :

- $p(y) = 0$ en dehors du domaine fini
- ou - $p(y)$ présente une décroissance de type exponentiel aux limites du domaine fini.

On étudie :

$$D^2(I) = E \left\{ \iint \mathcal{Y}(x+y) p(y) \mathcal{Y}(x+y') p(y') dy dy' \right\}$$

On démontre que l'on peut intervertir espérance et signe $\int$, d'où :

$$D^2(I) = \iint K(y-y') p(y) p(y') dy dy'$$

On peut remarquer que la F.A $\mathcal{Y}_p(x)$ n'apparaît plus dans cette intégrale.
 $\mathcal{Y}(x)$ stationnaire $\Rightarrow \mathcal{Y}_p(x)$ stationnaire

On cherche l'expression de la nouvelle fonction de covariance $K_p(h)$

$$K_p(h) = E \left\{ \mathcal{Y}_p(x_0) \mathcal{Y}_p(x_0+h) \right\}$$

$$\begin{aligned} K_p(h) &= E \left\{ \iint \mathcal{Y}(x_0+y) p(y) \mathcal{Y}(x_0+h+y') p(y') dy dy' \right\} \\ &= \iint K(h+y'-y) p(y) p(y') dy dy' \end{aligned}$$

On pose : $y' - y = x$, d'où :

$$\begin{aligned} K_p(h) &= \iint K(h+x) p(y) p(x+y) dx dy \\ &= \int K(h+x) dx \int \underbrace{p(y) p(x+y) dy}_{\text{covariogramme transitif } P \text{ associé à la fonction de pondération } p} \end{aligned}$$

$$P = P * \overset{V}{P}$$
 donc :
$$K_P(h) = \int K(h+x) P(x) dx = K * \overset{V}{P}$$
 Mais comme P est une fonction symétrique : $P = \overset{V}{P}$
 On obtient le même résultat que dans le cas transitif :

$$\boxed{K_P = K * P}$$

IV - CONVOLUTION STOCHASTIQUE DANS LE CAS DE L'HYPOTHESE INTRINSEQUE

$\mathcal{Y}(x)$ n'ayant ni espérance ni variance finie, toute combinaison linéaire :

$$\sum_i \lambda_i \mathcal{Y}(x_i) \quad \text{a la même propriété}$$

Cela n'a donc pas de sens de chercher la convergence en m.q d'une expression de ce type vers une intégrale stochastique. D'où la nécessité de prendre des combinaisons singulières telles que :

$$(I) \quad \boxed{\sum_i \lambda_i = 0} \quad \text{par exemple}$$

Dans ce cas :

$$\sum_i \lambda_i \mathcal{Y}(x_i) = \sum_i \lambda_i [\mathcal{Y}(x_i) - \mathcal{Y}(x_0)]$$

Combinaison linéaire d'accroissements où $\mathcal{Y}(x_0)$ n'a pas d'autre rôle réel que d'introduire de tels accroissements pour lesquels existent espérance et une variance.

En transposant la relation (I) au cas d'une fonction de pondération, on pourra passer à la limite stochastique, à condition que :

$$\int p(x) dx = 0$$

Pour la convolution, l'expression :

$$\mathcal{Y}_P(x) = \int \mathcal{Y}(x+y) p(y) dy$$

est à priori non définie, mais on peut espérer qu'en régularisant par ce procédé une F.A intrinsèque, on obtiendra encore une F.A intrinsèque que l'on pourra étudier par ses accroissements.

$$\mathcal{Y}_P(x+h) - \mathcal{Y}_P(x) = \int [\mathcal{Y}(x+h+y) - \mathcal{Y}(x+y)] p(y) dy$$

L'accroissement sommé ayant une variance finie, l'expression a un sens en m.q.

On cherche son variogramme, pour cela on propose un raisonnement rapide par analogie, mais non rigoureux.

$$K_P = K * P$$

Comme : $\gamma(h) = K(0) - K(h)$

on a : $K(h) = B - \gamma(h)$ $B = \text{constante}$

d'où : $K_P(h) = C - \gamma_P(h)$

On en déduit : $\gamma_P(h) = \gamma * P - A$

La constante A est définie par :

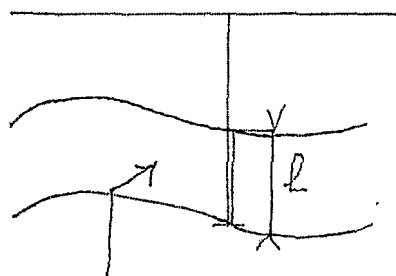
$$A = (\gamma * P)_{h=0}$$

$$= \int \gamma(y) P(y) dy$$

$$\gamma_P(h) = \int \gamma(h+x) P(x) dx - \int \gamma(x) P(x) dx$$

V - CAS PARTICULIER DE LA MONTEE

On intégrera le long d'un segment de longueur finie car les intégrales sont divergentes pour des longueurs infinies.



Formation

On effectue une montée sous puissance constante ℓ

Teneur moyenne du sondage le long du prélèvement =

$$\frac{1}{\ell} \int_0^{\ell} y(x+\lambda) d\lambda$$

Au voisinage de l'origine :

$$\gamma(r) = \sum C_{\lambda} r^{\lambda} + \sum A_m r^{2m}$$

On observe la même règle de correspondance dans les développements limités que dans le cas transitif :

$$r^{\lambda} \Rightarrow A_{\lambda} \frac{r^{1+\lambda}}{\ell}$$

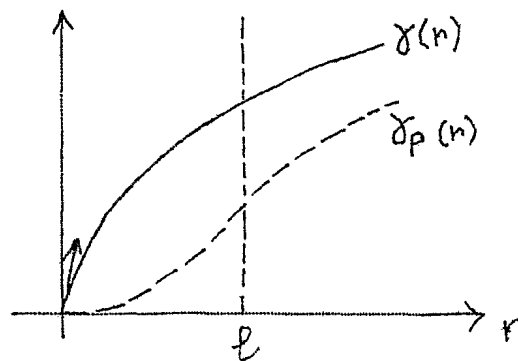
(division par ℓ pour raison de dimension)

Ceci peut faire penser que l'hypothèse de stationnarité n'aurait aucun rôle à jouer dans ce principe de correspondance.

On observe de même :

$$\begin{aligned} \log r &\Rightarrow \frac{r}{\lambda} \\ r &\Rightarrow -r^2 \log r \end{aligned}$$

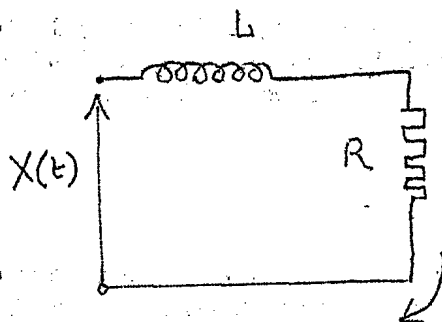
Cette règle n'est valable que si $r \ll \ell$. Pour $r > \ell$; $\gamma_p(r)$ est alors équivalent au variogramme non régularisé.



La régularisation ne fait ... sentir son effet qu'à des distances inférieures à ℓ

VI - EXERCICES

a) L'intégration stochastique



Equation diff. de ce montage

$$L \frac{di}{dt} + Ri = X(t)$$

donc du type :

$$\underbrace{\frac{dY(t)}{dt} + a Y(t)}_{\text{Réaction du montage}} = \underbrace{X(t)}_{\text{Extérieur}}$$

On résout cette équation différentielle par la méthode de variation de la constante.

Sans second membre

$$\begin{aligned} \frac{dY}{dt} &= -a Y & dt &= -\frac{1}{a} \frac{dY}{Y} \\ -\frac{1}{a} d \log Y &= dt + A \end{aligned}$$

$$Y(t) = K e^{-at}$$

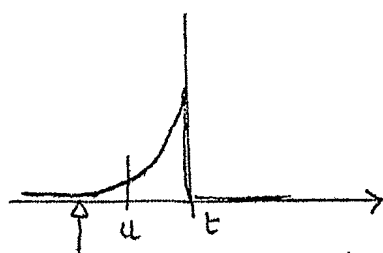
Variation de la constante $K' e^{-at} - a K e^{-at} + a K e^{-at} = X(t)$

$$K = \int_{-\infty}^t X(u) e^{au} du$$

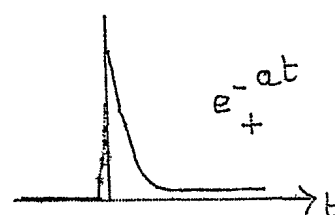
Il n'y a aucune raison pour que le phénomène commence à $t = 0$. Si l'on veut faire apparaître la stationnarité du phénomène, il faut au contraire commencer à $t = -\infty$

$$\begin{aligned} Y(t) &= e^{-at} \int_{-\infty}^t X(u) e^{au} du \\ &= \int_{-\infty}^t X(u) e^{-a(t-u)} du \end{aligned}$$

$$Y = X * e^{-at}_+$$



fonction de pondération e^{-at}_+



On est obligé de ne conserver que la partie positive de l'exponentielle. Ceci revient à ne pondérer que ce qui précède t . En effet, si :

$$X * f = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-u) X(u) du$$

avec : $f(x) = \begin{cases} f(x) & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$ On a bien $t-u > 0$ donc $\underline{u \leq t}$

Hyp $X(t)$ F.A stationnaire d'ordre 2 avec :

$$E(X(t)) = m = 0 \quad \text{et} \quad K(h) = E[X(t) X(t+h)]$$

on regarde le comportement de la fonction de covariance de $Y(t)$

qui est la régularisée de X par e_{+}^{-at}

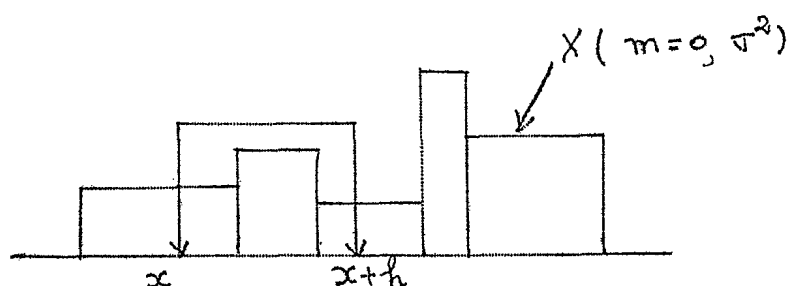
$$Y = X * e_{+}^{-at}$$

$$K_Y = K * (e_{+}^{-at} * e_{-}^{-at}) \quad e_{-}^{-at} = e_{+}^{a-t}$$

$$e_{+}^{-at} * e_{-}^{-at} = \frac{1}{2a} e^{-a|t|}$$

On régularise le covariogramme par l'exponentielle bilataire déjà rencontrée dans un autre exercice.

b) Régularisation d'une F.A stationnaire (N° 2 -Pg 68)



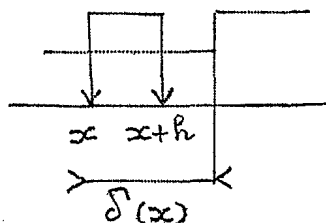
Les longueurs des segments sont aléatoires, indépendantes les unes des autres et obéissent à une loi de Poisson :

$$e^{-\lambda h} dh$$

$$K(h) \begin{cases} = T^2 & \text{si } x \text{ et } x+h \in 2 \text{ segments différents} \\ = 0 & \text{si } x \text{ et } x+h \in \text{même segment} \end{cases}$$

$$\Pr \{x, x+h \in \text{même segment}\} = \frac{e^{-\lambda h}}{1 - e^{-\lambda h}} \Big|_0^{T^2}$$

La durée résiduelle $\delta(x)$ obéit à une loi de Poisson en $e^{-\lambda h}$



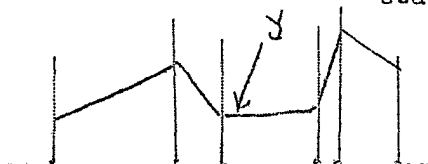
$$K(h) = T^2 e^{-\lambda|h|}$$

Pour $h = 2$ cas : $h \geq 0$
 $h < 0$

On régularise X en considérant :

$$Y(t) = \int_t^{\cdot} X(u) du$$

pas de borne inf, pour se plier à la stationnarité



On se rend compte que par rapport au cas précédent, la réalisation du processus est continue. Le phénomène est beaucoup plus régulier.

- stationnarité d'ordre 2 et hypothèse intrinsèque

$$Y(t+h) - Y(t) = \int_t^{t+h} X(u) du = \int_0^h X(\tau-t) dt$$

- Variogramme

On doit s'attendre à obtenir un variogramme plus régulier que l'exponentielle précédente qui a un comportement linéaire à l'origine.

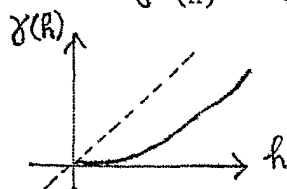
$$K(h) = \gamma''(h)$$

$$\begin{aligned} \gamma(0) = 0 &\Rightarrow \gamma'(h) = \sigma^2 \int_0^h e^{-\lambda h} dh = \sigma^2 \frac{1 - e^{-\lambda h}}{\lambda} \\ \gamma(h) &= \sigma^2 \int_0^h \frac{1 - e^{-\lambda h}}{\lambda} = \sigma^2 \left[\frac{h}{\lambda} - \frac{1 - e^{-\lambda h}}{\lambda^2} \right] \\ &= \sigma^2 \left[\frac{e^{-\lambda h} - 1 + \lambda h}{\lambda^2} \right] \end{aligned}$$

Dans tous les cas ($h \geq 0$ et $h < 0$), nous aurons :

$$\gamma(h) = \sigma^2 \left[\frac{e^{-\lambda|h|} - 1 + \lambda|h|}{\lambda^2} \right]$$

$$\gamma(h) = \frac{\sigma^2}{\lambda^2} \left[\frac{1}{2} \lambda^2 h^2 - \frac{1}{6} \lambda^3 h^3 + \dots \right]$$



Comportement parabolique au voisinage de l'origine. Pas borné,
 $h \nearrow \Rightarrow$ comportement linéaire

CHAPITRE HUITIEME - VARIANCES D'EXTENSION ET D'ESTIMATION -

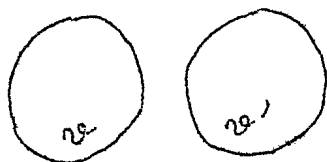
I - VARIANCE D'EXTENSION

Pour faciliter l'exposé, on établit des formules dans le cas stationnaire d'ordre 2 puis on passe au $\gamma(h)$ à l'aide de :

$$K(h) = K(0) - \gamma(h)$$

Dans tous les cas, le $K(0)$ disparaîtra. Ce qui peut faire penser que la validité de telles formules ne dépend que de l'existence de $\gamma(h)$.

On désigne par $Z(v)$ et $Z(v')$ les teneurs moyennes de deux domaines v et v' .



$$Z(v) = \frac{1}{v} \int_v (x) dx$$

$$Z(v') = \frac{1}{v'} \int_{v'} (x) dx$$

Hypothèse - On connaît $Z(v')$ et on estime alors $Z(v)$ en étendant la teneur moyenne de v' à v .

On caractérise cette erreur d'extension par :

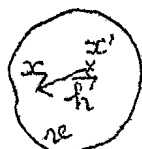
$$D^2 [Z(v) - Z(v')] \quad (\text{Formule parfaitement symétrique})$$

On suppose que $m = 0$. La variance D^2 existe car on a supposé $K(0)$ fini.

$$D^2 [Z(v) - Z(v')] = E [Z^2(v)] + E [Z^2(v')] - 2E [Z(v) Z(v')]$$

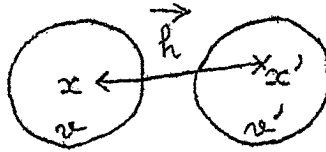
$$Z^2(v) = \frac{1}{v^2} \int_v \int_v y(x) y(x') dx dx'$$

$$E [Z^2(v)] = \frac{1}{v^2} \int_v \int_v K(x - x') dx dx'$$



= valeur moyenne de $K(h)$ lorsque les deux extrémités du vecteur $\vec{h}$ décrivent v

$$E [Z(v) Z(v')] = \frac{1}{vv'} \int_v \int_{v'} K(x - x') dx dx'$$



$E [Z(v) Z(v')] =$ valeur moyenne de $K(h)$ lorsque les deux extrémités du vecteur $\vec{h}$ décrivent respectivement v et v' .

$$D^2 = \frac{1}{v^2} \iint_{v,v} K(x-x') dx dx' + \frac{1}{v'^2} \iint_{v',v'} K - \frac{2}{vv'} \iint_{v,v'} K$$

On passe au variogramme

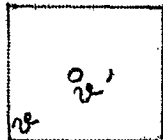
$$= K(0) + K(0) - 2 K(0) - \frac{1}{v^2} \iint_{v,v} \gamma(x-x') dx dx' - \frac{1}{v'^2} \iint_{v',v'} \gamma + \frac{2}{vv'} \iint_{v,v'} \gamma$$

d'où :

$$(I) \quad \sigma_E^2 = \frac{2}{vv'} \int_v dx \int_{v'} \gamma(x-x') dx' - \frac{1}{v^2} \int_v dx \int_v \gamma(x-x') dx' - \frac{1}{v'^2} \int_{v'} dx \int_{v'} \gamma(x-x') dx'$$

On peut montrer que formule $\exists$ encore lorsqu'il n'y a pas de covariance.

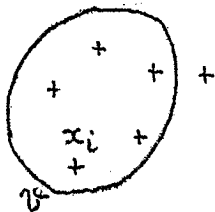
Exemple d'extension.



Si le sondage v' est au milieu de sa zone d'influence v , la notion d'extension équivaut dans ce cas à la notion d'estimation. Ceci est d'autant plus vrai si v' se réduit à un point.

On aura d'ailleurs dans ce cas des intégrales simples.

II - VARIANCE D'ESTIMATION



On suppose ici que $Z(v')$ est remplacé par une teneur moyenne de N prélèvements en des points x_i

$$z' = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n y(x_i)$$

La formule (I) se conserve en remplaçant $\int_v$ par $\sum$
et $\frac{1}{v}$ par $\frac{1}{N}$

$$\begin{aligned} \sigma_N^2 = \frac{2}{Nv} \int_v \sum_i \gamma(x-x_i) dx - \frac{1}{v^2} \int_v dx \int_v \gamma(x-x') dx' \\ - \frac{1}{N^2} \sum_{i,j} \gamma(x_i-x_j) \end{aligned}$$

C'est la formule générale de la variance d'estimation ponctuelle. On obtient un résultat comparable à celui des méthodes transitives

$$\sigma^2(a) = a \sum_k g(ka) - \int g(h) dh$$

Cependant, nous avons ici une approximation plus fine de l'intégrale. Cette variance est d'autant plus petite que :

- la V.R. est plus régulière
- l'implantation des points x_i est d'une configuration géométrique plus proche de v

Pour les calculs pratiques où N est grand, $\gamma(x_i-x_j)$ n'est pas facile à calculer. On aura donc des formules d'approximation liées au comportement à l'origine de $\gamma(h)$,

III. VARIANCE DE v DANS V

On peut partir du fait que le variogramme est la variance d'extension d'un point à un autre point.



Mais expérimentalement s'introduit une autre notion de variance lorsque l'on utilise des échantillons de taille v .

Par construction d'un histogramme, on obtiendra :

$$\sigma^2(v/V)$$

Nous avons déjà vu qu'elle dépend de v et de V . Elle décroît lorsque v croît et croît avec V .

S'il existe une variance a priori :

$$\sigma^2 = K(0)$$

Si l'on fait des prélèvements ponctuels et que $v \rightarrow \infty$ alors :

$$\sigma^2(v/V) \rightarrow \sigma^2 = K(0)$$

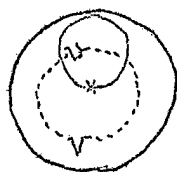
Par contre, si $K(0)$ n'existe pas, alors :

$$\nabla^2(v/V) \nearrow \infty \quad (\text{gisement d'or du Rand})$$

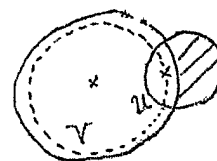
Il faut donc mieux se rattacher pour la définir au variogramme et à la notion de variance d'extension.

La notion de variance de v dans V est d'ailleurs une notion faussement claire; surtout dans le cas où v et V sont incompatibles vis-à-vis d'un recouvrement disjoint.

Prenons l'exemple où v et V sont constitués de deux cercles :



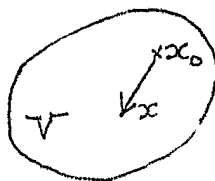
Centre trop représenté



L'échantillon est trop en dehors, les données extérieures interviennent

Il n'existe que deux cas où le concept est clair.

III-1- Echantillon ponctuel



$$\nabla^2 \text{ extension de } x_0 \text{ à } V = - \frac{1}{V^2} \int_V dx \int_V \gamma(x-x') dx' + \frac{2}{V} \int_V \gamma(x-x_0) dx$$

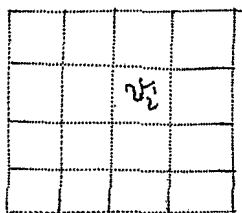
La variance d'un échantillon ponctuel dans V est la moyenne de cette expression quand x_0 balaye V

$$\boxed{\nabla^2(0/V) = \frac{1}{V^2} \int_V \int_V \gamma(x-x') dx dx'}$$

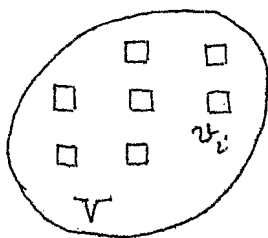
Si $K(0)$ n'existe pas alors $\nabla^2(0/V) \xrightarrow{V \rightarrow \infty} \infty$

III-2- Réunion de N volumes v_i disjoints

Un cas particulier en est le recouvrement par une grille.



on a N carreaux disjoints



Dans ce cas de figure, la variance expérimentale des N échantillons n'est pas leur variance dans V mais dans :

$$V' = \bigcup_{i=1}^N v_i$$

$$\text{On a : } \sigma^2(v/V) = \frac{1}{N} \sum_i E \left\{ (z_i - Z(V))^2 \right\}$$

avec : z_i = teneur du carreau v_i

$Z(V)$ = teneur moyenne à estimer

$$\sigma^2(v/V) = \frac{1}{N} \left[\sum_i E(z_i^2) + N E(Z(V)^2) - 2 \sum_i E(z_i \times Z(V)) \right]$$

$$\sum_i E(z_i \times Z(V)) = E(Z^2(V)) \quad \text{car} \quad \bigcup_{i=1}^N v_i = V$$

d'où :

$$\sigma^2(v/V) = \frac{1}{V^2} \int_V dx \int_V \gamma(x-x') dx' - \frac{1}{V^2} \int_V dx \int_V \gamma(x-x') dx'$$

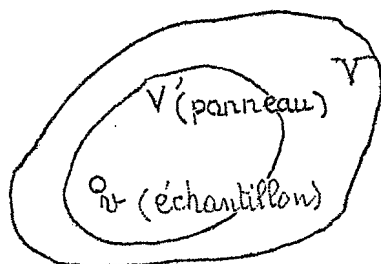
Pour raison de commodité, on utilise cette formule même dans le cas où le recouvrement ne s'effectue pas exactement. Mais c'est alors un simple artifice de calcul et on risque d'obtenir des variances négatives. D'ailleurs :

$$\sigma^2(V/v) = - \sigma^2(v/V)$$

III-3- Relation d'additivité

On introduit la fonctionnelle du volume :

$$F(V) = \frac{1}{V^2} \int_V \int_V \gamma(x-x') dx dx'$$

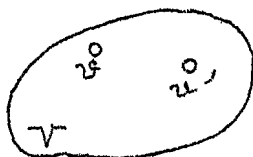


$$\nabla^2(v/V) = F(V) - F(v)$$

Dans le cas de plusieurs approximations successives :

$$\begin{aligned}\nabla^2(v/V) &= F(V) - F(V') + F(V') - F(v) \\ &= \nabla^2(V'/V) + \nabla^2(v/V')\end{aligned}$$

III-4- Covariance de v et v' dans V

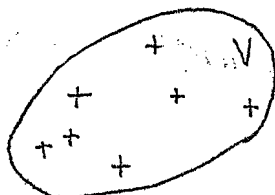


On peut définir de la même manière que précédemment la covariance de deux échantillons v et v' dans V lorsque ceux-ci occupent toutes les positions possibles dans V

$$\nabla(v, v'/V) = \frac{1}{V^2} \int_V dx \int_V \delta(x-x') dx' - \frac{1}{v-v'} \int_V dx \int_V \delta(x-x') dx'$$

IV - APPLICATION : MAILLES ALEATOIRES ET MAILLES ALEATOIRES STRATIFIEES

IV-1- Maille aléatoire pure



La position de l'échantillon dans V est une V.A uniformément répartie. Ce cas est rarement applicable aux mailles irrégulières de la pratique.

On suppose que les réalisations $y(x_i)$ de γ sont des V.A indépendantes

$$\nabla^2(0/V) = \frac{1}{V^2} \int_V \int_V \delta(x-x') dx dx'$$

d'où :

$$\boxed{\nabla_N^2 = \frac{1}{N} \nabla^2(0/V)}$$

Résultat de la statistique classique

IV-2- Maille aléatoire stratifiée

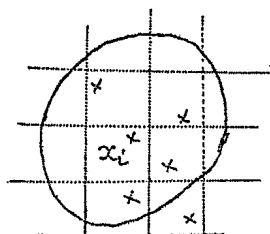
Implantation aléatoire de x_i dans v_i

C'est le cas souvent mieux adapté dans la pratique, la densité étant

plus uniforme.

$$Z(v_i) - Y(x_i) = \text{erreur sur une zone d'influence } v_i$$

$$Z(V) = \frac{1}{N} \sum_i Z(v_i)$$



On l'estime par :

$$Y^* = \frac{1}{N} \sum_i Y(x_i)$$

L'erreur d'estimation globale est de :

$$Z(V) - Y^* = \frac{1}{N} \sum_i (Z(v_i) - Y(x_i))$$

On suppose que ces erreurs correspondant aux différents carreaux sont indépendantes les unes des autres.

$$D(Z(V) - Y^*) = \frac{1}{N} \sigma^2(o/v)$$

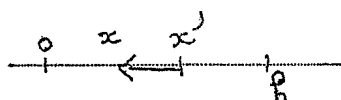
$\sigma^2(o/v)$ = variance d'un prélèvement dans sa zone d'influence

$$\frac{1}{N} \sigma^2(o/v) < \frac{1}{N} \sigma^2(o/V)$$

La maille aléatoire pure est toujours moins bonne que la maille aléatoire stratifiée.

V - CALCUL DES VARIANCES D'ESTIMATION DANS L'ESPACE A UNE DIMENSION

V-I- Fonctions intrinsèques auxiliaires



$$\gamma(h) = \frac{1}{h} \int_0^h \gamma(x) dx$$

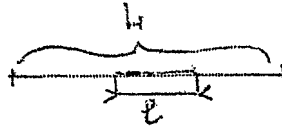
$$F(h) = \frac{1}{h^2} \int_0^h dh \int_0^h \gamma(x-x') dx'$$

On a :

$$\frac{d}{dh} h^2 F(h) = 2h \chi(h)$$

d'où :

$$F(h) = \frac{2}{h^2} \int_0^h (h-x) \gamma(x) dx = \frac{2}{h^2} \int_0^h x \chi(x) dx$$



En particulier, la variance d'un segment \$l\$ dans un segment \$L\$ s'exprime par :

$$\nabla^2(l/L) = F(L) - F(l)$$

V-2- Variance d'extension élémentaire

- Système ouvert



$$\begin{aligned} \nabla_E^2 = & -\frac{1}{h^2} \int_0^h \int_0^h \gamma(x-x') dx dx' \\ & + \frac{2}{h} \int_0^h \gamma(x-x_0) dx \end{aligned}$$

Si l'on place l'origine en \$x_0\$ et comme \$\gamma\$ est une fonction paire :

$$\int_0^h \gamma(x-x_0) dx = 2 \int_0^{h/2} \gamma(x) dx = 2 \frac{h}{2} \chi\left(\frac{h}{2}\right)$$

d'où :

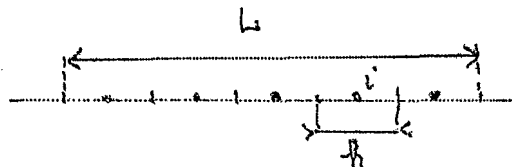
$$\boxed{\nabla_E^2 = 2 \chi\left(\frac{h}{2}\right) - F(h)}$$

- Système fermé



$$\nabla_E^2 = 2 \chi(h) - F(h) - \frac{1}{2} \gamma(h)$$

V-3- Principe de composition des variances d'extension élémentaires



On introduit n échantillons. On peut admettre que les erreurs sur les différentes zones d'influence sont indépendantes pourvu que la maille h soit inférieure à la portée.

Alors :

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{n} \sigma_E^2$$

La statistique classique nous donnait :

$$\frac{1}{n} \sigma^2(O/L) = \frac{1}{n} F(L)$$

formule d'ailleurs correcte dans le cas de la maille aléatoire pure.

Pour la maille aléatoire stratifiée, nous avons $\frac{1}{n} F(h)$.

Dans le cas présent de la maille régulière, nous aurons encore un meilleur résultat :

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{n} \left(2 \chi\left(\frac{h}{2}\right) - F(h) \right)$$

VI - EXERCICES

a) Variances d'extension à une dimension (N° 3 -Pg 68)

$$\chi(h) = h^\lambda \quad (0 < \lambda < 2)$$

Si on fait les calculs pour $\lambda \gg 2$, on trouve des variances négatives (ce qui justifie les précautions concernant λ)

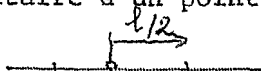
Mais, par ex : $h^2 \log h$ est acceptable (type positif conditionnel)

$$\chi(h) = \frac{1}{h} \int_0^h x^\lambda dx = \frac{1}{h} \left[\frac{h^{\lambda+1}}{\lambda+1} \right] = \frac{h^\lambda}{\lambda+1}$$

$$h^2 F(h) = 2 \int_0^h x \chi(x) dx = 2 \int_0^h \frac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1} dx = 2 \frac{h^{\lambda+2}}{(\lambda+1)(\lambda+2)}$$

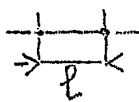
$$F(h) = \frac{2 h^\lambda}{(\lambda+1)(\lambda+2)}$$

- Extension élémentaire d'un point central à sa zone d'influence

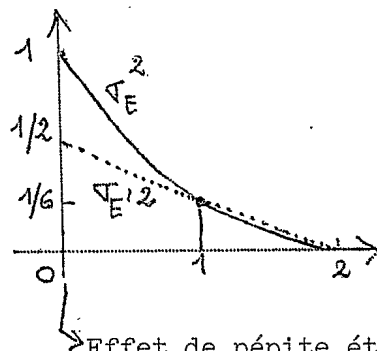


$$\begin{aligned} \sigma_E^2 &= -\frac{2l}{(\lambda+1)(\lambda+2)} + 2 \frac{(l/2)^\lambda}{\lambda+1} \\ &= \frac{2l^\lambda}{\lambda+1} \left[\frac{1}{2^\lambda} - \frac{1}{\lambda+2} \right] \end{aligned}$$

Extension au segment d'influence de ses 2 extrémités :



$$\begin{aligned} \sigma_{E'}^2 &= \frac{2l^\lambda}{\lambda+1} - \frac{2l^\lambda}{(\lambda+1)(\lambda+2)} - \frac{l^\lambda}{2} \\ &= \left(\frac{2}{\lambda+2} - \frac{1}{2} \right) l^\lambda \end{aligned}$$



pour $\lambda < 2$ fonction de type + conditionnelle
 $\lambda = 2$ variance = 0
 $\lambda > 2$ s'expose aux variances neg

Effet de pépité état pur
 statistique classique applicable

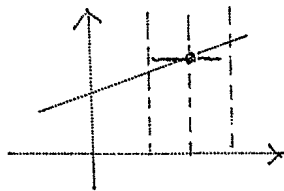
On peut donner une interprétation du résultat de la variance nulle pour $\lambda = 2$.

$$-\lambda = 2$$

$$-\gamma(h) = h^2$$

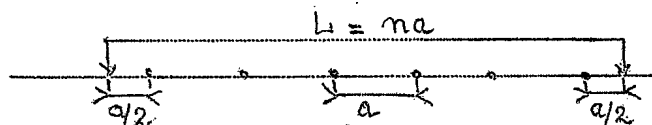
$$f(x) = x + b \quad (f(x+h) - f(x))^2 = h^2$$

linéaire



Dans ce cas est affectée au centre x_0
 exactement $1/2 \int []$

- b) Variance d'estimation du segment $L = na$ par n échantillons ponctuels
 Exercice pratique (n° 4, page 69).



$$\begin{aligned} \gamma_{\text{reg}}^2 &= \frac{1}{n} \left(2 \frac{(a/2)^\lambda}{\lambda+1} - 2 \frac{a^\lambda}{(\lambda+1)(\lambda+2)} \right) \\ &= \frac{1}{n} \frac{2}{\lambda+1} \left[\frac{1}{2^\lambda} - \frac{1}{\lambda+2} \right] a^\lambda \quad (1) \\ \gamma_{\text{aléat strat}}^2 &= \frac{1}{n} \frac{2a^\lambda}{(\lambda+1)(\lambda+2)} \quad (2) \\ \gamma_{\text{aléat pure}}^2 &= \frac{1}{n} \frac{2}{(\lambda+1)(\lambda+2)} L^\lambda \quad (3) \end{aligned}$$

Pour $\lambda = 0$ on a le $\gamma^2 = \frac{1}{n}$ de la statistique classique.

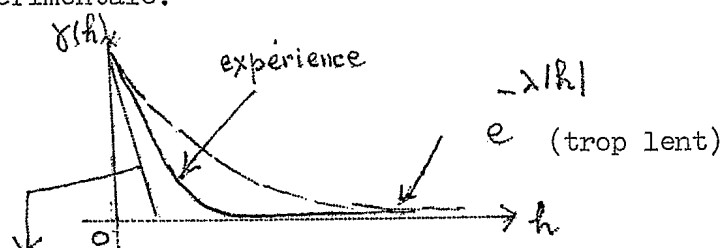
Pour $\lambda = 1$:

$$\left. \begin{aligned} (1) \quad \frac{1}{n} \frac{1}{6} a &= \frac{1}{6} \frac{L^2}{n^2} \\ (2) \quad \frac{1}{n} \frac{1}{3} a &= \frac{1}{3} \frac{L^2}{n^2} \\ (3) \quad \frac{1}{n} \frac{L}{3} &= \frac{a}{3} = \frac{1}{3} \frac{L}{n} \text{ (beaucoup plus grand)} \end{aligned} \right\} \text{ même ordre de grandeur}$$

c) Schéma sphérique à une dimension

Exercice pratique (n° 10, page 70).

On cherche un type de variogramme s'accordant mieux avec la réalité expérimentale.



a - |h| à une dimension acceptable mais par dans sa forme (a-r) (triangle) à plusieurs dimensions.

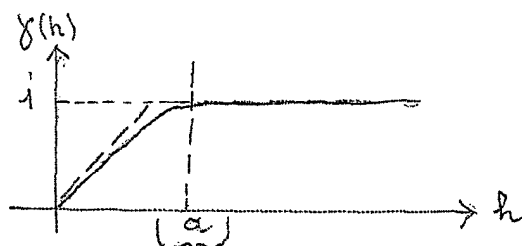
On part du covariogramme géométrique de la sphère, qui est forcément une fonction de type positif.

$$g(h) = A \left(1 - \frac{3}{2} \frac{h}{a} + \frac{1}{2} \frac{h^3}{a^3} \right)$$

on prend :

$$K(h) = 1 - \frac{3}{2} \frac{h}{a} + \frac{1}{2} \frac{h^3}{a^3}$$

$$\gamma(h) = \begin{cases} \frac{3}{2} \frac{h}{a} - \frac{1}{2} \frac{h^3}{a^3} & h \leq a \\ 1 & h > a \end{cases}$$



changement de nature analytique

1 - $h \leq a$

$$X(h) = \frac{1}{h} \int_0^h \left[\frac{3}{2} \frac{x}{a} - \frac{1}{2} \frac{x^3}{a^3} \right] dx = \frac{3}{4} \frac{h}{a} - \frac{1}{8} \frac{h^3}{a^3}$$

$$h^2 F(h) = 2 \int_0^h \left(\frac{3}{4} \frac{x^2}{a} - \frac{1}{8} \frac{x^4}{a^3} \right) dx$$

$$F(h) = \frac{1}{2} \frac{h}{a} - \frac{1}{20} \frac{h^3}{a^3}$$

2 - $h > a$

$$X(h) = \frac{1}{h} \left[\frac{3}{2} \frac{h^2}{2a} - \frac{1}{2} \frac{h^4}{4a^3} \right]_0^a + \frac{1}{h} \int_a^h dx$$

$$X(h) = 1 - \frac{3a}{8h}$$

$$h^2 F(h) = 2 \left[\frac{3}{4} \frac{h^3}{3a} - \frac{1}{8} \frac{h^5}{5a^3} \right]_0^a + 2 \int_0^h \left[1 - \frac{3a}{8x} \right] x dx$$

$$F(h) = 1 - \frac{3}{4} \frac{a}{h} + \frac{1}{5} \frac{a^2}{h^2}$$

CHAPITRE NEUVIEME - VARIANCES D'EXTENSION ET D'ESTIMATION (suite)
METHODES D'APPROXIMATION

I - RELATION ENTRE LE CAS TRANSITIF ET LE CAS INTRINSEQUE

On compare les résultats obtenus.

Dans le cas transitif on a estimé :

$$Q = \int f(x) dx \quad (\text{intégrale})$$

avec une variance d'estimation

$$\nabla^2(a) = a \sum_k g(ka) - \int g(h) dh$$

Pour les formules d'approximation nous avons le principe de correspondance suivant, entre le covariogramme et la variance :

$$|h|^\lambda \rightarrow A_\lambda a^{1+\lambda}$$

Dans le cas intrinsèque on estime :

$$Z(V) = \frac{1}{V} \int y(x) dx \quad (\text{teneur moyenne})$$

Ce qui explique la présence dans toutes les formules d'un coefficient dimensionnel.

Avec une variance d'estimation :

$$\nabla_{\text{Est}}^2 = \frac{2}{NV} \sum_i \int_V \gamma(x - x_i) dx - \frac{1}{N^2} \sum_{i,j} \gamma(x_i - x_j) \quad (1)$$

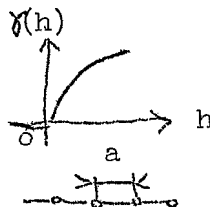
$$- \frac{1}{V^2} \int_V dx \int_V \gamma(x-y) dy$$

Dans le cas unidimensionnel nous avons un principe de correspondance analogue entre le covariogramme et la variance.

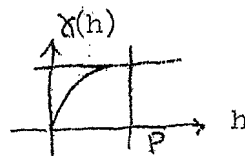
$$|h|^\lambda \rightarrow \frac{1}{n} A_\lambda a^\lambda = \frac{A_\lambda}{L} a^{1+\lambda}$$

Cette formule d'approximation est obtenue en utilisant le principe d'indépendance des erreurs d'estimation :

- bon s'il n'y a pas de portée



- mauvais si a est supérieure à p



Mais en fait ce principe d'approximation aboutit à obtenir des formules que l'on peut obtenir de façon analytique.

Tout se passe comme si les erreurs d'extension étaient négligeables.

L'important est l'équivalence que l'on peut mettre en évidence :

- cas transitif $A_\lambda a^{1+\lambda}$
- cas intrinsèque $(A_\lambda / L) x a^{1+\lambda}$

On obtient le même coefficient, ce qui porte à penser que l'hypothèse de stationnarité n'a pas été réellement utilisée.

En fait, si l'on renonce à cette hypothèse en utilisant les F.A., on obtient la même formule théorique que (1) à cela près que l'on doit remplacer :

$$\begin{aligned} \gamma(x-y) &\text{ par } \gamma(x; y) \\ K(h) &\text{ par } K(x; x+h) \end{aligned}$$

= Mais la possibilité d'une inférence statistique, nous avait obligé, à première vue, à introduire l'hypothèse de stationnarité.

II - ESTIMATION DU COMPORTEMENT A L'ORIGINE DU VARIOGRAMME

Il apparaît que dans les deux cas les formules d'approximation sont liées au comportement à l'origine de $\gamma(h)$ (ou $g(h)$)

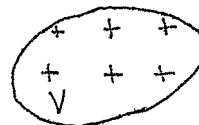
Le problème est de savoir si l'on peut faire une estimation correcte de celui-ci à partir d'une seule réalisation

Si $y(x)$ est une réalisation de $Y(x)$ on s'intéresse pour estimer la teneur moyenne dans la formation à :

$$f(x) = y(x) \times k(x) \quad k(x) = \text{indicateur de } V$$

à réalisation fixée, $y(x)$ on associe :
un covariogramme transitif

$$g(h) = \int f(x) f(x+h) dx$$



et une variance d'estimation à l'aide d'une maille régulière :

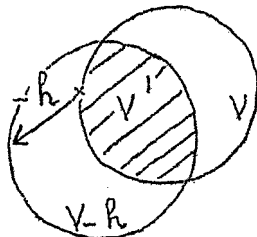
$$S^2(a) = a \sum_k g(ka) - \int g(h) dh.$$

On peut considérer en fait $f(x)$ comme la réalisation de la F.A. $Y(x)$ relative au volume V , donc comme la réalisation de la F.A.

$$F(x) = Y(x) \times \underbrace{k(x)}_{\text{fonction scalaire}}$$

Dans ce cas $g(h)$ devient une F.A. obtenue par intégration stochastique.
On a alors :

$$\frac{1}{V'} E[g(h)] = \frac{1}{V'} \int k(x) k(x+h) E[y(x) y(x+h)] dx$$



$$\frac{1}{V'} = \text{coefficient dimensionnel relatif à l'estimation d'une teneur.}$$

$$= \frac{1}{V'} \int k(x) k(x+h) K(x, x+h) dx$$

$$\frac{1}{V'} E[g(h)] = \overline{K_{V'}(h)} \text{ valeur moyenne de la covariance dans } V'$$

$$E[g(h)] = V' \overline{K_{V'}(h)} \quad (2)$$

On voit ainsi apparaître une fonction qui joue, dans les formules, le même rôle que la covariance dans le cas stationnaire.

D'où :

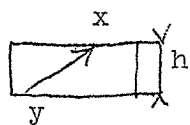
$$\sigma^2(a) = E[S^2(a)] = a \sum_k \bar{K}(ka) - \int \bar{K}(h) dh$$

Il s'agit de savoir si $g(h)$ (seule réalité expérimentale calculable) peut, vis-à-vis de son comportement à l'origine, constituer un estimateur valable de $\bar{K}(h)$.

On démontre qu'il en est ainsi dans le cas quasi stationnaire. Plus généralement on pourrait chercher les conditions qui régissent la classe des fonctions vérifiant (2), tant il est vrai que nombreux sont les phénomènes non stationnaires.

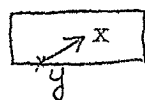
III - CALCUL DES VARIANCES D'ESTIMATION DANS L'ESPACE A 2 DIMENSIONS

1) Les fonctions auxiliaires.



$$\gamma_b(h) = \bar{\gamma}(x-y)$$

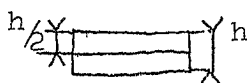
= montée sans puissance constante d'épaisseur b



$$\chi_b(h) = \frac{1}{h} \int_0^h \gamma_b(x) dx$$

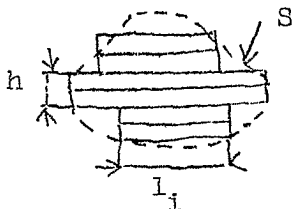
$$F_b(h) = F(h, b)$$

2) Extension d'un segment médian dans son rectangle d'influence.



$$\sigma_E^2 = 2 \chi_b\left(\frac{h}{2}\right) - F(h, b) - \gamma_b(0)$$

3) Estimation de S par des traçages parallèles équidistants.



On calcule la variance d'estimation de la teneur moyenne sur la réunion des rectangles à partir de la teneur moyenne réelle sur les sondages linéaires.

γ = teneur moyenne réelle sur ligne i

ζ = teneur à estimer dans rectangle i

Pour la réunion des rectangles :

$$Z = \frac{\sum_i l_i \gamma_i}{\sum_i l_i}$$

On l'estime par : $Z^* = \frac{\sum_i l_i y_i}{\sum_i l_i}$

d'où l'erreur d'estimation : $\varepsilon = \frac{\sum l_i \varepsilon_i}{\sum l_i}$

avec ε_i = erreur d'extension relative au ième rectangle.

On suppose que tous les ε_i sont indépendants, d'où :

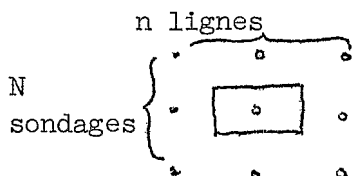
$$\sigma_E^2 = \sum l_i^2 \sigma_{E_i}^2 / (\sum l_i)^2$$

Si tous les l_i sont égaux on retrouve le résultat de la statistique classique

$$\sigma_E^2 = \frac{1}{n} \sigma_E^2 \quad n = \text{nombre de lignes.}$$

Dans la pratique on utilise des abaques.

4) Estimation de S par galeries échantillonnées.



Dans ce cas on ne peut considérer qu'il y ait indépendance des variances d'extension à la zone d'influence sauf pour le cas de la maille carrée. On regroupe les sondages par lignes et on considère deux erreurs :

- erreur sur estimation de la teneur moyenne des lignes à partir d'éléments ponctuels

$$\frac{1}{N} \sigma_E^2$$

- erreur sur extension de la teneur réelle d'une ligne à sa tranche d'influence

$$\frac{1}{n} \sigma_{E'}^2$$

Par analogie avec le cas transitif :

$$\sigma^2(a_1, a_2) = B_{\lambda} a_2^{2+\lambda} + C_{\lambda} a_2 a_1^{1+\lambda}$$

tranche ligne

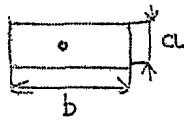
On considère que l'on peut faire comme si ces deux erreurs étaient indépendantes, d'où :

$$\sigma_{\text{total}}^2 = \frac{1}{N} \sigma_E^2 + \frac{1}{n} \sigma_{E'}^2$$

Cette formule peut d'ailleurs être établie rigoureusement de façon analytique.

5) Cas particulier de la maille carrée.

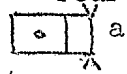
On ne remarque pas la décomposition précédente car les lignes ont même densité d'information, qu'elles soient verticales ou horizontales.



$$\gamma_{Ext}^2 = 2 Q \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right) - F(a, b)$$

77.

Pour une maille carrée nous aurions :

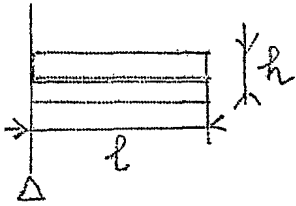


$$\gamma_E^2 = \frac{1}{N} \left[2 Q \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2} \right) - F(a, a) \right]$$

Dans la pratique on utilise des abaques.

IV - EXERCICES

- a) Utilisation des formules d'approximation dans l'espace à 2 dimensions
Exercice pratique (n° 5, page 69).



$$\gamma(r) = r^\lambda \quad (0 < \lambda < 2)$$

Le long de la verticale, on observe l'évolution des teneurs moyennes en effectuant une montée sous puissance constante ℓ

$$\gamma(h) = h^\lambda$$

$$\gamma_E^2 = 2 \gamma \left(\frac{h}{2} \right) - F(h)$$

Le variogramme monté est : $\gamma(h, l) = A \frac{h^{\lambda+1}}{l}$

$$\gamma_E'^2 = 2 \gamma \left(\frac{h}{2}, l \right) - F(h, l)$$

On a : $\gamma_E'^2 = \gamma_E^2$

$h^\lambda \xrightarrow{\text{montée}} A \frac{h^{\lambda+1}}{l}$

Important pour des raisons dimensions réelles l est au dénominateur.

- 1 - Variance d'extension du traçage dans son rectangle.

$$\gamma(r) = A \frac{r^{\lambda+1}}{1} = A r^{\lambda+1}$$

$$\gamma(r) = (A/1) (r^{\lambda+1} / \lambda+2)$$

$$F(r) = (A/1) (2 r^{\lambda+1} / (\lambda+2)(\lambda+3))$$

$$\begin{aligned} \gamma_E^2 &= -F(h) + 2 \gamma(h/2) \\ &= -\frac{A}{1} \frac{2h^{\lambda+1}}{(\lambda+2)(\lambda+3)} + 2 \frac{A}{1} \frac{(h/2)^{\lambda+1}}{\lambda+2} \\ &= (2A / (\lambda+2)) \left[1/2^{\lambda+1} - 1/(\lambda+3) \right] (h^{\lambda+1} / 1) \end{aligned}$$

$$\boxed{\gamma_E^2 = B h^{\lambda+1} / 1}$$

- 2 - Variance d'estimation



$$L = \sum l_i$$

$$S = L h$$

$$\gamma_{Est}^2 = \sum l_i^2 \gamma_{Ext}^2(i) / (\sum l_i)^2 = B^2 h^{1+\lambda} / L$$

mais $h = S/L$

$$\nabla_{\text{est}}^2 = B^2 \frac{L \frac{S^{1+\lambda}}{L^{1+\lambda}}}{L^2}$$

$$\boxed{\nabla_{\text{est}}^2 = B^2 \frac{S^{1+\lambda}}{L^{2+\lambda}}}$$

3 - Cas de "Wijsien"

$$\gamma(r) = 3 \propto \log r$$

En effectuant une montée on obtient:

$$\gamma_m(r) = 3 \propto \pi h / \ell$$

$$\chi_m(r) = 3 \propto \frac{\pi}{\ell} \frac{r^2}{2}$$

$$r^2 F_m(r) = \frac{3}{2} \propto \frac{\pi}{\ell} \int_0^r x^3 dx = \frac{3}{2} \propto \frac{\pi}{\ell} \frac{r^4}{4} \quad F_m(r) = \frac{3}{8} \propto \frac{\pi}{\ell} r^2$$

$$\nabla_{\text{Ext, montée}}^2 = 2 \times 3 \propto \frac{\pi}{\ell} \frac{(h/2)^2}{2} - \frac{3}{8} \propto \frac{\pi}{\ell} h^2$$

$$\nabla_{\text{Ext}}^2 = \boxed{\frac{\pi}{6}} \frac{h}{\ell}$$

Retrouve coefficient 1/6 de la linéarité

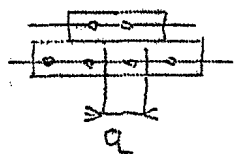
$$\nabla_{\text{Ext}}^2 = \frac{\pi}{6} \frac{h}{L} = \frac{\pi}{6} \boxed{\frac{S}{L^2}}$$

quantité sans dimension, simplement un coefficient géométrique.

b) Optimisation économique

Exercice pratique (n° 6, page 69).

1 - Calcul du terme de ligne



Dans ce cas on n'effectue plus de montée, mais on travaille sur la variable ponctuelle elle-même :

$$\gamma(r) = r^\lambda$$

$$\chi(r) = r / \lambda + 1$$

$$F(r) = \frac{2 r^\lambda}{(\lambda+1)(\lambda+2)}$$

$$\nabla_{\text{extension d'un sondage à son segment d'influence}}^2 = (2 (a/2)^\lambda / \lambda + 1) - 2 a^\lambda / (\lambda+1)(\lambda+2)$$

$$= \frac{2}{\lambda+1} \left[\frac{1}{2^\lambda} - \frac{1}{\lambda+2} \right] a^\lambda$$

$$L = na$$

Si nous supposons les n sondages indépendants (statistique classique)

$$\nabla_{\text{Est}}^2 = \frac{1}{n} \nabla_{\text{Ext}}^2 = \frac{1}{n} \frac{2}{\lambda+1} \left[\frac{1}{2^\lambda} - \frac{1}{\lambda+2} \right] a^\lambda$$

$$= \frac{c}{L} a^{\lambda+1} \quad \text{avec} \quad c = \frac{2}{\lambda+1} \left[\frac{1}{2^\lambda} - \frac{1}{\lambda+2} \right]$$

La variance d'estimation total est donc :

$$\nabla_{Est}^2 = C \frac{a^{1+\lambda}}{L} + B \frac{S^{1+\lambda}}{L^{2+\lambda}} \quad (\text{ligne} + \text{tranche}) \quad 79.$$

2 - Optimisation, à prix de revient donné, de la précision ou vice-versa.

Introduisons cette notion économique :

- si ∞ d'échantillons $a = 0 \Rightarrow$ Cher

Mais on aura toujours le terme de tranche, donc pas avantage à augmenter indéfiniment le nombre d'échantillons,

- si peu d'échantillons $a \neq L \Rightarrow$ Bon marché

Mais précision dérisoire.

On introduit le prix de revient :

$$P = \underbrace{\bar{w}}_{\text{prix du m de galerie}} L + \underbrace{p}_0 \frac{L}{a} = \bar{w} L \left(1 + \frac{p_0}{a}\right) \quad \text{avec } p_0 = \frac{B}{\bar{w}} \quad (\text{c'est une longueur})$$

prix du prélèvement individuel

On emploie la méthode des multiplicateurs de Lagrange pour chercher le minimum (local) de $f(x, y)$ lié à la condition $g(x, y) = \text{constante}$

On introduit $f + \mu g$ Cela revient à chercher le minimum absolu de cette fonction.

multiplicateur
de Lagrange

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} (f + \mu g) = \frac{\partial f}{\partial x} + \mu \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} (f + \mu g) = \frac{\partial f}{\partial y} + \mu \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (\text{on éliminera dans ces 2 relations})$$

Il s'agit ici de minimiser ∇_{Est}^2 à P donné (par ex.)

On forme donc : $\nabla_{Est}^2 + \mu P'$

avec $P' = P/\bar{w}$

$$C a^{1+\lambda}/L + B S^{1+\lambda}/L^{2+\lambda} + \mu L (1 + p_0/a)$$

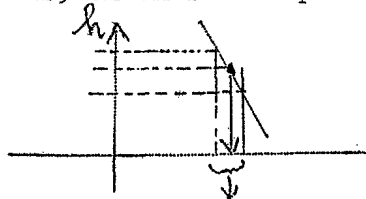
$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial a} = (C/L) a^\lambda (1+\lambda) + \mu L (-p_0/a^2) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial L} = C a^{1+\lambda} (-1/L^2) + B S^{1+\lambda} (-(2+\lambda)/L^{3+\lambda}) + \mu (1 + p_0/a) = 0 \end{cases}$$

On trouve :

$$h = \frac{1+\lambda}{(\lambda+2)B} \left[\lambda a^{1+\lambda} + \frac{1+\lambda}{p_0} a^{2+\lambda} \right]$$

Pour a cste, on déduit l'équidistance optimale, $h = S/L$ et vice-versa. Dans les applications, on cherchera plutôt $a = f(h)$.

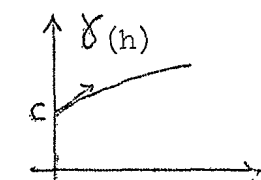
On montre que :



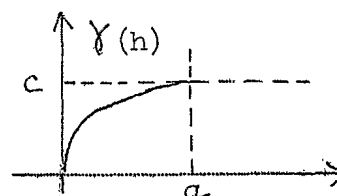
a opt. presque indépendant de h.

CHAPITRE DIXIEME - EFFET DE PEPITE ET PHENOMENES DE TRANSITION

I - DIFFERENTIATION DU PHENOMENE EN FONCTION DE L'ECHELLE DE TRAVAIL



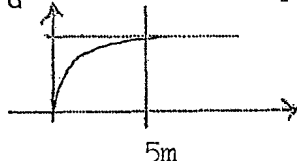
effet de pélite

Phénomène de transition
(corrélations nulles au delà
de la portée a)

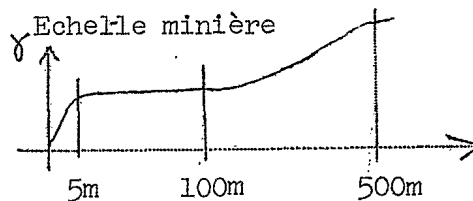
Ces deux manifestations sont comparables, tout dépend en fait de l'échelle d'observation.

Exemple : Concrétions carbonatées dans le minerai de fer.

Echelle chimique



Dimension des concrétions



Dimension des bancs sédimentaires

II - VARIANCE DE PEPITE

Si l'on se place au niveau ponctuel, on a un variogramme :

$$\gamma(h) = C(0) - C(h)$$

où $C(h)$ est la fonction de covariance de portée a

donc : $C(h) = 0$ si $|h| > a$

Au niveau macroscopique, dans la réalité on ne dispose expérimentalement que de la régularisée dans v, volume de prélèvement

$$\gamma_v(x) = \frac{1}{v} \int_v \gamma(x+y) dx$$

Seul est expérimentalement accessible le variogramme de la régularisée

$$\gamma_v = \frac{1}{v^2} \gamma * k * k - A$$

$$\gamma_v = A - \frac{1}{v^2} \int_v \int_v C(h+x-y) dx dy$$

La constante A étant trouvée pour $h = 0$

$$\gamma_v = \frac{1}{v^2} \int_v dx \int_v C(x-y) dy - \frac{1}{v^2} \int_v dx \int_v C(h+x-y) dy$$

On a : $\gamma_v(0) = 0$

mais dès que $h > \dim. v$, comme $\dim. v$ est pris très supérieur à a

$$|h + x - y| > a \text{ si } x \in v \text{ et } y \in v$$

donc : $C(h + x - y) = 0$

$$\text{d'où : } \gamma_v(h) = \frac{1}{v^2} \int_v \int_v C(x-y) dx dy$$

On obtient donc ce que par définition on appelle la variance de pépite.

$$\gamma_p^2 = \frac{1}{v^2} \int_v \int_v C(x-y) dx dy$$

On a :

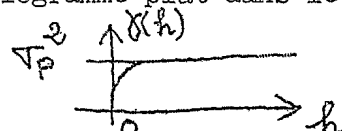
$$\int_v C(x-y) dy = \int_{R^n} C(x-y) dy = \int C(h) dh$$

Sauf si $x \in$ à la couronne $v - v'$, mais cela ne met en jeu qu'un terme correctif de l'ordre de a , négligeable en première approximation.

d'où :

$$\gamma_p^2 = \frac{1}{v} \int C(h) dh = \frac{A}{v} = \text{constante de pépite}$$

C'est l'ordonnée du variogramme plat dans le cas d'un effet de pépite pur.

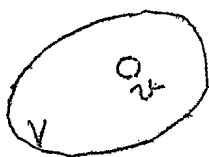


On remarque que :

- γ_p^2 est en raison inverse du volume de prélèvement, résultat à rapprocher de la statistique classique où elle aurait été en raison inverse de la masse de prélèvement.
- $C(h)$ représentant la structure fine du phénomène n'a pas d'importance car n'intervient que son intégrale étendue à l'espace entier.

III - INCIDENCE SUR LA VARIANCE D'EXTENSION ET D'ESTIMATION

a) Variance d'extension

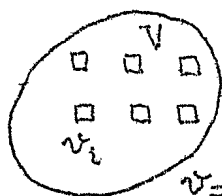


$$\gamma^2(v|V) = -\frac{1}{V^2} \int_v dx \int_v C(x-y) dy + \frac{1}{v^2} \int_v \int_v C(x-y) dy$$

L'apport de l'effet de pépite sera donc :

$$\gamma^2(v|V) = A \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{V} \right)$$

b) Variance d'estimation



$$\gamma_E^2 = \frac{1}{V^2} \int_v dx \int_v C(x-y) + \frac{1}{v^2} \int_v dx \int_v C(x-y) dy - \frac{2}{vV} \int_v dx \int_v C(x-y) dy$$

$$\gamma_E^2 = \frac{A}{V} - 2 \frac{A}{V} + \frac{A}{v} = A \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{V} \right)$$

Si l'échelle de V est très supérieure à celle de l'effet de pépite

$$\gamma_E^2 \approx \frac{A}{v} = \frac{\gamma_p^2}{n}$$

(résultat de la statistique classique)

(γ_p^2 étant relatif à un v_i)

Dans le cas d'un effet de pépité pur on n'a que cet apport mais il s'ajoute à la variance de la composante continue dans les autres cas.

IV - EXERCICES

Effet de pépité à l'état pur - Exercice pratique (n° 7, page 70).

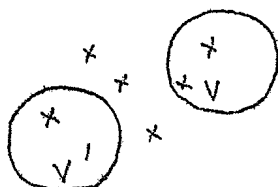
On a un processus de Poisson dans $\mathbb{R}^3$

Dans V , il y a $N(V)$ échantillons.

$N(V)$, v.a obéit à la loi Poisson de paramètre λV

Pour deux volumes disjoints :

$V \cap V' = \emptyset \Rightarrow N(V) \text{ et } N(V') \text{ sont des v.a indépendantes}$



On prélève un échantillon v en x :



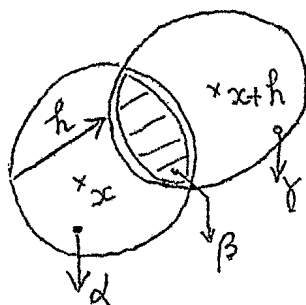
$Y(x) = N(v_x) = \text{nombre de pépites ponctuelles dans } v$

1) Fonction de covariance de $Y(x)$

$$C(h) = E[Y(x) Y(x+h)] - E[Y(x)] E[Y(x+h)]$$

$$E[Y(x)] = E[N(v_x)] = \lambda v$$

$$C(h) = E[Y(x) Y(x+h)] - \lambda^2 v^2$$



$$N(v_x) = \alpha + \beta$$

$$N(v_{x+h}) = \beta + \gamma$$

$$\begin{aligned} E[Y(x) Y(x+h)] &= E[(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)] \\ &= E[\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta^2 + \beta\gamma] \end{aligned}$$

α, β, γ sont des v.a deux à deux indépendants car correspondant à des volumes disjoints.

$$= E(\alpha) E(\beta) + E(\alpha) E(\gamma) + E(\beta) E(\gamma) + E(\beta^2)$$

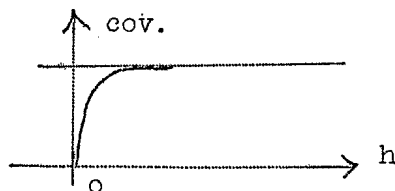
Variance de $N(v_x \cap v_{x+h}) = \text{variance de } \beta$

$$= D^2(\beta) = E(\beta^2) - [E(\beta)]^2$$

$$E[Y(x) Y(x+h)] = D^2(\beta) + \underbrace{[E(\alpha) + E(\beta)][E(\beta) + E(\gamma)]}_{E[Y(x)] E[Y(x+h)]}$$

D'où : $\boxed{\text{Cov}(\mathcal{Y}(x)) = D^2(\beta) = \lambda K(h)}$
par définition

Cette expression est nulle, dès que v_x et v_{x+h} sont disjoints



≈ Réciproquement : à tout covariogramme géom. on peut associer une V.R. qui l'admet comme fonction de covariance (ex. du schéma sphérique)

2) Pépites munies de poids aléatoires indépendants,

Les poids sont tirés dans une loi $X(m, \sigma^2)$

C'est une randomisation ou poissonnisation. On peut donner deux solutions de la recherche de la covariance.

a - Emploi des fonctions caractéristiques

Loi $X \rightarrow$ fonction caract. Φ

Si considère $N = n$ (fixé) échantillons, indépendance $\Rightarrow$ fonction caract. Φ^n

Ils sont répartis suivant une loi de Poisson de densité :

$$\text{d'où } \psi_y(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda v)^n}{n!} \Phi^n e^{-\lambda v} = e^{\lambda v (\Phi - 1)}$$

$$\log. \psi(u) = \lambda v (\Phi - 1) \quad \text{avec } \frac{d^2}{du^2} (\log \psi) = \lambda v \psi''(u)$$

$$\text{variance} = \frac{d^2}{du^2} (\log \psi)_{u=0} \text{ et } \psi''(u)_{u=0} = \text{moment d'ordre 2}$$

$$\text{esp. math} = \frac{d}{du} (\log \psi)_{u=0} = \lambda v E(X) = \boxed{\lambda v m = E(Y)}$$

$$D^2(Y) = \lambda v E(X^2) = \lambda v (\sigma^2 + m^2)$$

b - Solution directe

On étudie tout d'abord, l'évolution de Y conditionnellement à $N = n$

$$Y = \sum X_i \Rightarrow E_n(Y) = n E(X) = nm$$

$$D_n^2(Y) = n \sigma^2$$

E_n étant linéaire la déconditionnalisation se fait directement tandis que pour D_n , on est obligé de passer par l'intermédiaire de :

$$E_n(Y^2) = n \sigma^2 + n^2 m^2$$

On déconditionnalise :

$$E(Y) = \sum P_n E_n(Y) = m E(N) = \lambda v m$$

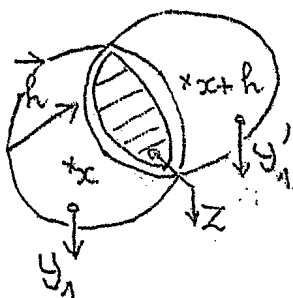
$$E(Y^2) = \sum P_n E_n(Y^2) = \sigma^2 E(N) + m^2 E(N^2) \\ = \sigma^2 \lambda v + m^2 (\lambda v + \lambda^2 v^2)$$

$$D^2(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 \\ = \lambda v (\sigma^2 + m^2) + \lambda^2 v^2 m^2 + \lambda^2 v^2 m^2$$

c - Calcul de la fonction de covariance

$$C(h) = E[Y(x) Y(x+h)] - \lambda^2 m^2 v^2$$

Y_1 et Y'_1 sont deux v.a de même loi (volumes égaux)



$$Y(x) = Y_1 + Z$$

$$Y(x+h) = Y'_1 + Z$$

$$C(h) = \text{cov.} (Y_1 + Z, Y'_1 + Z) \\ = \text{cov.} (Z, Z) = \text{variance} (Z)$$

Le volume occupé par Z est $K(h)$ (covariogramme géométrique)

$$C(h) = \lambda K(h) (m^2 + \sigma^2)$$

les poids différents pour chaque point
on introduit seulement un simple facteur sur la
covariance.

3) Schéma de dilution - Exercice pratique (n°8, page 70)

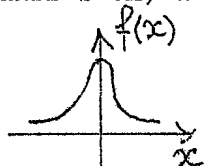
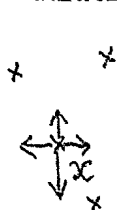
On peut considérer deux phénomènes qui donnent lieu au même modèle :

- pondération



≅ Par ex : effets en un point x de différentes
pérites poissonniennes d'uranium.

- dilution (ou diffusion) à partir d'un germe.



Par ex : à une dimension.

$$\text{On pose : } Y(x) = \sum_i f(x - x_i)$$

x_i implantation des germes
aléatoires poissonniens.

On cherche la covariance $K(h)$ de $Y(x)$

Pour ce faire, on considère un petit volume $d\xi$, implanté en un point ξ

$$\begin{array}{c} \boxed{\circ} d\xi \\ \xi \end{array} \quad \text{en } \xi \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Pr (pas de germe dans } d\xi) = 1 - \lambda d\xi \\ \text{Pr (1 germe dans } d\xi) = \lambda d\xi \\ \text{Pr (+ d'1 germe)} = 0 \end{array} \right.$$

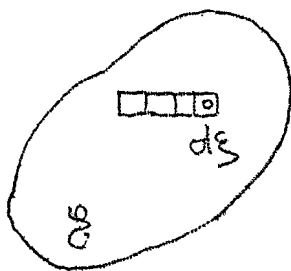
On considère les deux va :

$$Z_x \quad \left\{ \begin{array}{ll} f(x-\xi) & \text{avec proba } \lambda d\xi \\ 0 & 1 - \lambda d\xi \end{array} \right. \quad \text{et} \quad Z_{x+h} \quad \left\{ \begin{array}{ll} f(x+h-\xi) & \text{avec proba } \lambda d\xi \\ 0 & 1 - \lambda d\xi \end{array} \right.$$

On bâtit alors la fonction caractéristique élémentaire, de la contribution de $d\xi$ à $Y(x) Y(x+h)$

$$\Phi_\xi = (1 - \lambda d\xi) \times \underbrace{1}_{\text{fonction caractéristique variable nulle}} + \lambda d\xi e^{iu f(x-\xi) + iv f(x+h-\xi)}$$

fonction caractéristique
variable nulle



On somme selon des $d\xi$ jointifs recouvrant l'espace, les contributions seront indépendantes (disjointes)

On préfère :

$$\log \Phi_\xi = \Psi_\xi = \log [1 + [-\lambda d\xi + \lambda d\xi e^{iu f(x-\xi) + iv f(x+h-\xi)}]]$$

On prend le premier terme du développement limité :

$$\Psi_\xi = \lambda d\xi [e^{iu f(x-\xi) + iv f(x+h-\xi)} - 1]$$

En intégrant :

$$\Psi = \lambda \int_{\Omega} [e^{iu f(x-\xi) + iv f(x+h-\xi)} - 1] d\xi$$

C'est une loi de probabilité à 2 variables

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} (\Psi(u, v))_{u, v=0} = -cov$$

$$-C(h) = \lambda (i)^2 \int f(x-\xi) f(x+h-\xi) d\xi$$

$$\boxed{C(h) = \lambda g(h)} \quad \text{avec} \quad g = f * f^v$$

CHAPITRE ONZIEME - SCHEMAS ET ABAQUES : SCHEMA DE DE WIJO

I - DEFINITION

Il est défini par la fonction intrinsèque isotrope :

$$\chi(r) = 3\alpha \log r$$

On ne travaille jamais au niveau ponctuel mais toujours sur sa régularisée dans un volume v , car il n'y a pas de F.A. correspondante mais une distribution au sens de Laurent Schwartz.

α = dispersion absolue, ne joue qu'un rôle multiplicatif.

II - EQUIVALENT LINEAIRE

On introduit la fonction :

$$F(v) = \frac{1}{v^2} \int_v dx \int_v \log |x-y| dy$$

Alors :

$$\nabla^2(v/V) = 3\alpha [F(V) - F(v)]$$

Considérons deux échantillons v et v' , si :



$$F(v) = F(v')$$

Les deux échantillons auront même variance dans V on dit qu'ils sont équivalents vis-à-vis du même schéma de de Vijo.

$$F(v) = F(v') \iff v \equiv v'$$

Dans la classe $[v]$ on peut trouver un segment appelé équivalent linéaire, en effet si :

$$\begin{aligned} \chi(h) &= \frac{1}{h} \int_0^h \log x \, dx = \frac{1}{h} [x \log x - x]_0^h \\ h \chi(h) &= h \log h - h \end{aligned}$$

on a :

$$\begin{aligned} h^2 F(h) &= \int_0^h x \chi(x) \, dx = \int_0^h [x \log x - x] \, dx \\ &= \log h - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

L'équivalent linéaire de l'échantillon v est donc le segment de longueur l défini par :

$$F(v) = \log. l - \frac{3}{2}$$

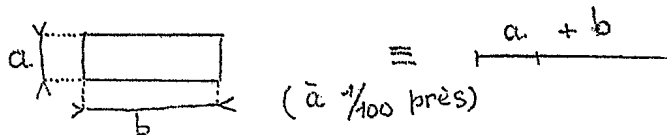
Si l'on considère $L = V$, on aura :

$$F(V) - F(v) = F(L) - F(l) = \log. \frac{L}{l}$$

$$\nabla^2(v/V) = 3\alpha \log \frac{L}{l}$$

Cette expression est commode car on dispose :

- d'abaques étalonnés en équivalents linéaires
- de formules d'approximation, par exemple :



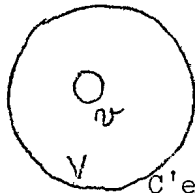
$$(a \text{ 1/100 près})$$

De plus, on peut obtenir une estimation rapide de la dispersion absolue par :

$$3\alpha = \frac{\nabla^2}{\log \frac{L}{l}}$$

Remarque :

Si v est semblable à V (similitude géométrique) alors les équivalents linéaires sont dans le même rapport de similitude.



Dans ce cas : $\frac{V}{v} = \left(\frac{L}{l}\right)^3$

Alors : $\nabla^2(v/V) = \alpha \log \frac{V}{v}$

C'est la formule que de Wijo a observée expérimentalement dans le gisement du Rand.

III - UTILISATION DES EQUIVALENTS LINEAIRES DANS LA PRATIQUE

Si γ_v est le variogramme de la régularisée sur v :

$$\gamma_v(h) = \frac{3\alpha}{v^2} \int_v dx \int_v \log(h+x-y) dy + A$$

A = constante déterminée par $\gamma_v(0) = 0$, d'où :

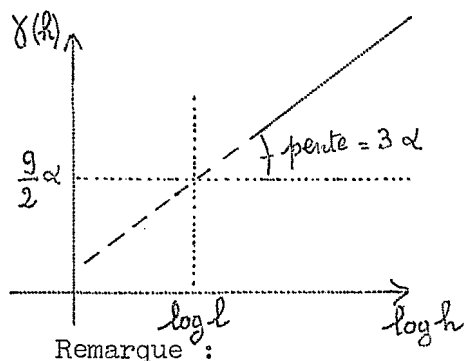
$$A = -3\alpha F(v)$$

Donc si $l \equiv v$:

$$\gamma_v(h) = \frac{3\alpha}{v^2} \int_v dx \int_v \log(h+x-y) dy - 3\alpha \log l + \frac{9\alpha}{2}$$

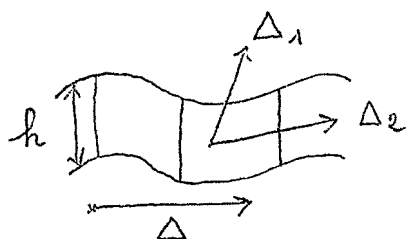
Comme h est toujours supérieur à dim. v (dans la pratique) les échantillons étant toujours petits, la valeur moyenne donnée par l'intégrale est proche de $\log h$, donc :

Pour $h > 1$:



Remarque :

Si pour une formation on regarde l'évolution des échantillons de longueur h dans une direction Δ



$$\begin{aligned}\gamma_v(h) &= 3\alpha \log h - 3\alpha \log l + \frac{g}{2}\alpha \\ &= 3\alpha \left[\log \frac{h}{l} + \frac{3}{2} \right] \quad (1)\end{aligned}$$

Expérimentalement on obtient donc :

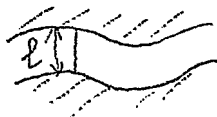
- α^* estimateur de α
- l^* estimateur l à l'ordonnée $\frac{g}{2}\alpha$

- s'il y a isotropie au niveau ponctuel, alors le l de la formule (1) est la puissance réelle de la formation.
- plus souvent il y aura anisotropie selon deux directions Δ_1 et Δ_2 , la formule (1) nous donnera alors une puissance équivalente :

leq que l'on utilisera telle quelle dans les formules du schéma isotrope.

IV - SCHEMA DE DE WIJO A DEUX DIMENSIONS

1) Puissance d'une formation



Le segment de longueur l se déplace parallèlement à lui-même.

$$\gamma_l(h) = 3\alpha \log \frac{h}{l} + \frac{g}{2}\alpha$$

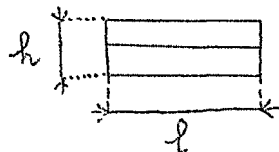
Aux petites distances, $h < l$, on a le principe de correspondance classique relatif à la montée sous puissance constante l

$$\log r \Rightarrow \frac{\pi r}{l}$$

d'où

$$\gamma_l(h) = 3\alpha \frac{\pi h}{l}$$

2) Variance d'extension d'un tracé dans son rectangle

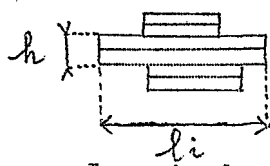


Dans le cas général on utilise des abaques.

Cependant lorsque h est petit devant l , $h \ll l$, on a :

$$\nabla_E^2 = \frac{3\alpha}{6} \times \pi \frac{h}{l} = \alpha \frac{\pi}{2} \frac{h}{l}$$

- 3) Gisement stratiforme reconnu par traçages parallèles.



$$\sigma_E^2 = \frac{\sum l_i^2 \sigma_{E_i}^2}{(\sum l_i)^2} = \alpha \frac{\pi}{2} \frac{h}{L} = \alpha \frac{\pi}{2} \frac{S}{L^2}$$

Le prix de reconnaissance rapporté à la tonne de minerai est 2 fois plus faible pour un gisement 4 fois plus gros.

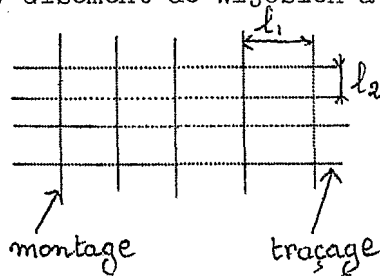
- 4) Couche mince reconnue par sondages à maille carrée
Il faut introduire l'équivalent linéaire de l'échantillon.

$$\sigma_E^2 = 3\alpha \left(\log \frac{2a}{p} - \frac{1}{2} \right)$$

Pour les études à 3 dimensions on se sert le plus souvent d'abaques.

V - EXERCICES

- a) Gisement de Wijosien à deux dimensions reconnu par traçages et montages.



Les traçages fournissent une estimation Z_1 de la teneur et les montages une estimation Z_2 , on veut les utiliser pour estimer le gisement dans son ensemble.

On effectue en fait un krigeage, on cherche donc une combinaison linéaire de Z_1 et Z_2 .

$Z^* = \lambda Z_1 + (1-\lambda) Z_2$ qui conduise à la plus petite variance d'estimation possible.

Si Z est la teneur réelle, l'erreur d'approximation se décompose selon :

$$Z - Z^* = \lambda (Z - Z_1) + (1-\lambda) (Z - Z_2)$$

Hypothèse d'approximation : $Z - Z_1$ et $Z - Z_2$ sont à peu près indépendants

En effet, si Z_1 conduit à une surestimation il n'y a aucune raison pour qu'alors Z_2 fournisse une surestimation ou une sous-estimation systématique d'où :

$$D^2(Z - Z^*) = \lambda^2 \sigma_1^2 + (1-\lambda)^2 \sigma_2^2$$

On se place dans le cas où :

$$l_1 > h \text{ et } l_2 > h \quad (\text{règle de montée classique})$$

d'où :

$$\sigma_1^2 = \alpha \frac{\pi}{2} \frac{S}{L_1^2} \quad \sigma_2^2 = \alpha \frac{\pi}{2} \frac{S}{L_2^2}$$

Donc :

$$D_2 = \alpha \frac{\pi}{2} S \left[\frac{\lambda^2}{L_1^2} + \frac{(1-\lambda)^2}{L_2^2} \right]$$

à l'optimum :

$$\frac{\partial D^2}{\partial \lambda} = \alpha \frac{\pi}{2} S \left[\frac{2\lambda}{L_1^2} - \frac{2(1-\lambda)}{L_2^2} \right] = 0$$

$$\lambda \alpha \pi S \left[\frac{1}{L_1^2} + \frac{1}{L_2^2} \right] = \alpha \pi S \frac{1}{L_2^2}$$

$$\boxed{\lambda = \frac{L_1^2}{L_1^2 + L_2^2}} \quad l_1 > l_2$$

On obtient alors :

$$Z^* = \frac{L_1^2 Z_1 + L_2^2 Z_2}{L_1^2 + L_2^2} \quad \text{avec} \quad D_{\min}^2 = \frac{\alpha \frac{\pi}{2} S}{L_1^2 + L_2^2}$$

On en déduit que pour une distance fixe $\Delta = L_1 + L_2$ à reconnaître il est plus avantageux d'avoir des traçages parallèles serrés

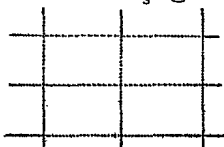


$$L_1 = l$$

$$L_2 = 0$$

$$D^2 = \alpha \frac{\pi}{2} S \frac{1}{l^2}$$

que des traçages et des montages.

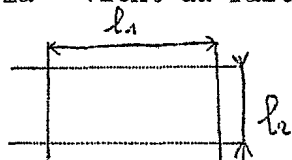


$$L_1 = \frac{l}{2}$$

$$L_2 = \frac{l}{2}$$

$$D^2 = \alpha \frac{\pi}{2} S \frac{2}{l^2}$$

Cela vient du fait que dans le cas de figure pris $l_1 > l_2$



La distance moyenne entre deux traçages est inférieure à celle entre deux montages, ils ont plus de poids.

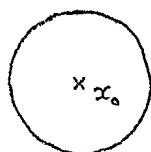
b) Estimation de panneaux circulaires en schéma de Wijo

1 - Fonctions caractéristiques d'un schéma de de Wijo relatives à un cercle.

On rappelle que dans le plan la fonction log. r est harmonique ce qui se note :

$$\Delta \log. r = 0$$

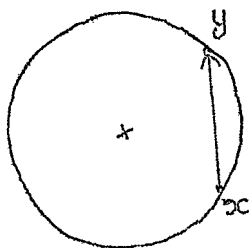
Ceci se traduit par le fait que :



$$f(x_0) = \frac{1}{2\pi R} \int_C f(x) dx$$

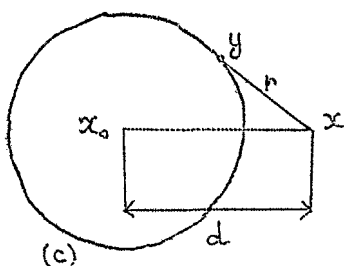
On calcule :

$C(R)$ = valeur moyenne de $\log r$ sur la circonférence des rayon R



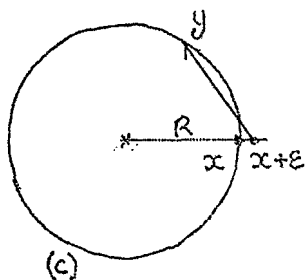
$$r = |x - y|$$

Puisque $\log r$ est une fonction harmonique à l'extérieur et sur le cercle :



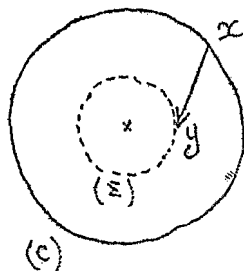
$$\frac{1}{2\pi R} \int_{\text{cercle}} \log r = \log d \quad \begin{aligned} r &= |x - y| \\ d &= |x - x_0| \end{aligned}$$

Dans le cas présent on prend un point en $x + \varepsilon$ très près de x mais à l'extérieur du cercle, y décrivant C on a :



$$\frac{1}{2\pi R} \int_C \log |x + \varepsilon - y| = \log(R + \varepsilon)$$

$$\text{d'où : } C(R) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \log(R + \varepsilon) = \log R$$



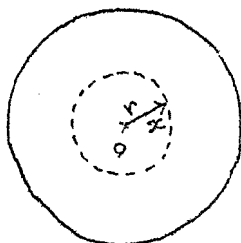
- $X(R)$ = valeur moyenne de $\log r$ entre le cercle et la circonférence.

à x fixé on fait décrire à y le cercle Σ d'où :

valeur moyenne $(\log r) = \log R$

Pour tout le cercle nous aurons :

$$X(R) = \frac{1}{S} \int \log R = \log R \quad S = \text{surface de } (C)$$

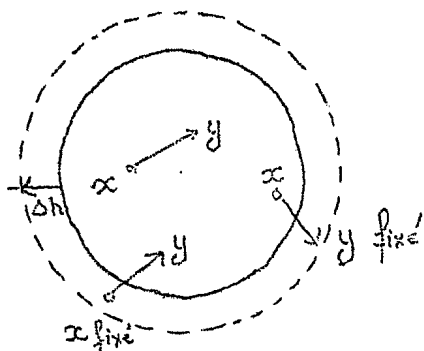


- $C_0(R)$ = valeur moyenne de $\log r$ entre le cercle et son centre.

$$\begin{aligned} C_0(R) &= \frac{1}{S} \int_0^R \log r \, ds = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R \log r \, 2\pi r \, dr \\ &= \frac{2}{R^2} \left[\frac{1}{2} r^2 \left(\log r - \frac{1}{r} \right) \right]_0^R = \log R - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

- $F(R)$ = valeur moyenne de $\log r$ dans le cercle.

On observe la contribution apportée à cette intégrale pour une variation du rayon R du cercle de ΔR .



On a :

$$F(R) = \frac{1}{S^2} \int_{C_R} \int_{C_R} \log |x-y| dx dy$$

ou

$$\pi^2 R^4 F(R) = \int_{C_R} dx \int_{C_R} \log |x-y| dy$$

d'où :

$$\Delta (\pi^2 R^4 F(R)) = \Delta S \times \left(\int_C \log |x-y| dr \right)$$

$$\begin{aligned} \text{car : } \int_C \underbrace{\log |x-y| dx}_{y \text{ fixé appartenant à } C} + \int_C \underbrace{\log |x-y| dy}_{x \text{ fixé appartenant à } C} \\ = \int_C \log r dr = S \chi(R) \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \Delta (\pi^2 R^4 F(R)) &= 2\pi R \Delta R \times \pi R^2 \chi(R) \\ &= 4\pi^2 R^3 \log R \Delta R \end{aligned}$$

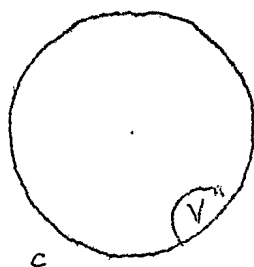
donc :

$$R^4 F(R) = \int_0^R 4r^3 \log r dr = \left[r^4 \left(\log r - \frac{1}{4} \right) \right]_0^R$$

$$\text{car : } \int r^n \log r = \frac{1}{n+1} r^{n+1} \left(\log r - \frac{1}{n+1} \right) \quad (\text{intégration par parties})$$

$$\boxed{F(R) = \log R - \frac{1}{4}}$$

2 - Variance d'estimation d'un panneau circulaire par sa circonférence.



$$\nabla_{est}^2 (V_{par C}) = -\frac{1}{C^2} \iint_C \gamma(x-y) dx dy - \frac{1}{S^2} \iint_V \gamma(x-y) dx dy + \frac{1}{CS} \iint_C \int_V \gamma(x-y) dx dy$$

avec : $S = \pi R^2$ et $C = 2\pi R$

On voit en se rapportant à la question précédente que :

$$\nabla_E^2 = -C(R) - F(R) + X(R)$$

$$\boxed{\nabla_E^2 = \frac{1}{4}} \quad \left(= \frac{\nabla_E^2}{3\alpha} \text{ dans le cas général} \right)$$

On voit donc que cette variance d'estimation ne dépend pas de R, c'est une propriété très particulière du schéma de de Wijo.

3 - Variance d'extension dans le cercle d'un petit élément central

Si $v \equiv 1$, on a :

$$D^2 = \log.1 - \frac{3}{2} - F(R) + 2 C_0(R)$$

$$D^2 = \log \frac{R}{l} + \frac{3}{4}$$

Si L est l'équivalent linéaire du cercle, on a :

$$F(R) = \log.R - \frac{1}{4} = \log.L - \frac{3}{2}$$

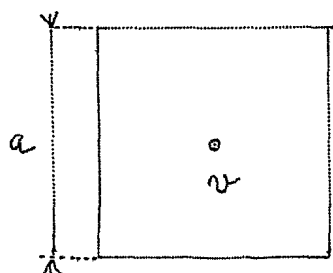
$$\text{d'où : } \log.R = \log.L - \frac{5}{4}$$

On en déduit :

$$D^2 = -\left(\log.1 - \frac{3}{2}\right) - \left(\log.L - \frac{3}{2}\right) + 2 \left[\log.L - \frac{5}{4} - \frac{1}{2} \right]$$

$$D^2 = \log. \frac{L}{l} - \frac{1}{2}$$

Si on transpose le cas du cercle au cas du carré :



$$v \equiv 1$$

On peut faire l'approximation de périmètre

$$4a \approx 2\pi R$$

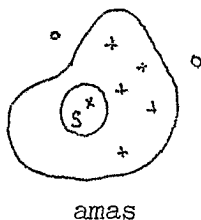
$$\text{Comme } L \equiv 2a$$

$$D^2 = \log \left(\frac{2a}{l} \right) - \frac{1}{2}$$

DOUZIEME CHAPITRE - KRIGEAGE SIMPLE

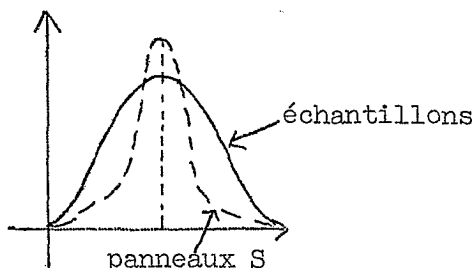
I - POSITION DU PROBLEME

1) Effets systématiques dans les erreurs d'estimation



Pour obtenir la meilleure estimation possible d'un amas il s'agit de tirer le meilleur parti des données.

On pourrait par exemple prendre la moyenne arithmétique des teneurs des échantillons positifs, mais la variance des petits échantillons est supérieure à la variance des grands échantillons.



On est certain dans ce cas, c'est un phénomène connu depuis longtemps, de :

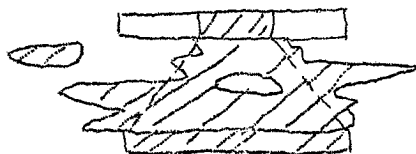
- surestimer les panneaux riches
- sous-estimer les panneaux pauvres.

Par le Krigeage on compte faire intervenir les échantillons intérieurs (teneur riche) et extérieurs (teneur pauvre) pour essayer de corriger cette erreur systématique dans le sens de la sécurité.

Par exemple, si l'on reconnaît un gisement à l'aide de deux filons de reconnaissance on a tendance à schématiser le gisement par un trapèze et d'estimer la teneur par la moyenne des filons riches.

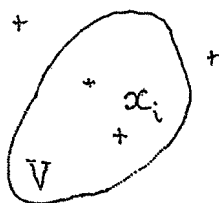


En réalité la forme du gisement est beaucoup plus complexe, si on exploite selon le trapèze on obtient un effet d'erreur systématique.



2) Enoncé du problème

Il s'agit d'estimer la teneur Z d'un domaine V à partir des teneurs en différents points de reconnaissance x_i :



$$Z = \frac{1}{V} \int_V Y(x) dx$$

à partir des $Y_{(x_i)} = Y_i$

On forme un estimateur linéaire :

$$Z^* = \sum_i \lambda_i Y_i$$

et l'on cherche les coefficients λ_i pour obtenir une variance minimale d'estimation.

II - CAS OU $\exists$ COVARIANCE ET L'ESPERANCE MATHEMATIQUE DE $Y(x)$ EST CONNUE

C'est une hypothèse très forte :

$\exists K(h)$ et m connu

On prend :

$$Z^* = \sum_{i=1}^m \lambda_i Y_i + \lambda_0 m \text{ et on minimise } F \{(Z - Z^*)^2\}$$

On doit avoir nécessairement :

$$\lambda_0 = 1 - \sum \lambda_i \text{ en effet, on a :}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda_0} E \{(Z - \lambda_0 m - \sum \lambda_i Y_i)^2\} &= 0 \\ m E \{(Z - \lambda_0 m - \sum \lambda_i Y_i)\} &= 0 \end{aligned}$$

Or : $F(Z) = m$ et $E(Y_i) = m$, d'où

$$m - \lambda_0 m - m \sum \lambda_i = m (1 - \sum \lambda_i - \lambda_0) = 0 \quad \text{c.q.f.d.}$$

donc :

$$Z^* = m + \sum \lambda_i (Y_i - m)$$

On suppose dans la suite que $m = 0$, cela ne réduit pas la généralité du problème car on peut toujours remplacer Y_i par $Y_i - m$.

$$\begin{aligned} (Z - Z^*)^2 &= (Z - \sum \lambda_i Y_i)^2 \\ &= Z^2 - 2 \sum \lambda_i Z Y_i + \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j Y_i Y_j \\ E(Z - Z^*)^2 &= \sigma_Z^2 - 2 \sum \lambda_i \sigma_{Zi} + \sum_{i,j} \sigma_{ij} \lambda_i \lambda_j \end{aligned}$$

car : $E(Z^2) = \nabla_Z^2$ lorsque $m = 0$

$$\exists K(h) \Rightarrow \exists \nabla_{z_i} \text{ et } \nabla_{i_j}$$

On annule les dérivées partielles, par rapport aux λ_i , de cette forme quadratique.

$$\frac{\partial E(Z - Z^*)^2}{\partial \lambda_i} = -2 \nabla_{z_i} + 2 \sum_j \lambda_j \nabla_{i_j} = 0$$

d'où le système d'équations :

$$(1) \quad \boxed{\sum_j \lambda_j \nabla_{i_j} = \nabla_{z_i}} \quad (\text{Matrice de type positif strict})$$

On obtient :

$$D^2(Z - Z^*) = \nabla_Z^2 - \sum_i \lambda_i \nabla_{z_i}$$

optimale

En réalité ∇_{i_j} et ∇_{z_i} s'expriment en fonction de $K(h)$ et le système (1) peut s'écrire :

$$\sum_j \lambda_j K(x_i - x_j) = \frac{1}{V} \int_V K(x - x_i) dx$$

Le deuxième membre s'exprime par une intégrale car Z est une teneur moyenne.

III - CAS OU EXISTE $K(h)$ MAIS m EST INCONNU

On ne peut supposer que m est nulle, on est obligé de l'estimer par m^* tel que :

$$m^* = \sum_i a_i Y_i$$

Si nous voulons avoir un estimateur sans biais, il faut :

$$E(m^*) = m$$

d'où :

$$E\left(\sum_i a_i Y_i\right) = \sum_i a_i E(Y_i) = m \left(\sum_i a_i\right) = m$$

Nous avons donc le système :

$$\begin{cases} m^* = \sum_i a_i Y_i \\ \sum_i a_i = 1 \end{cases}$$

Sans qu'il soit besoin de redémontrer que $\lambda_0 = 1 - \sum_i \lambda_i$ l'estimateur de Z s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
z^* &= m^* + \sum \lambda_i y_i - \sum \lambda_i m^* \\
&= \sum a_i y_i + \sum \lambda_i y_i - \sum_j \lambda_j \left(\sum_i a_i y_i \right) \\
&= \sum_i \left(a_i + \lambda_i - a_i \sum_j \lambda_j \right) y_i
\end{aligned}$$

d'où : $z^* = \sum \lambda'_i y_i$

En posant $\lambda'_i = \sum a_i + \lambda_i - a_i \sum_j \lambda_j$

Comme $\sum a_i = 1$

$$\sum \lambda'_i = 1 + \sum \lambda_i - \sum \lambda_j = 1$$

Il en résulte que :

$$\left\{ \begin{array}{l} m^* = \sum_i a_i y_i \\ \sum_i a_i = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} z_k = \sum_i \lambda_i y_i \\ \sum \lambda_i = 1 \end{array} \right.$$

$$D^2(z - z_k) = D^2(z) - 2 \sum_i \lambda_i \nabla_{z_i} + \sum_j \lambda_i \lambda_j \nabla_{ij}$$

On cherche le minimum de $D^2(z - z_k)$ sous la condition $\sum \lambda_i = 1$.

Rappelons que d'après la méthode des multiplicateurs de Lagrange

minimum de $f \Leftrightarrow \min \text{ de } f + \mu g \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial \lambda} (f + \mu g) = 0 \\ g = 0 \end{cases}$

Dans le cas présent :

$$\begin{aligned}
&\sum_j \lambda_j \nabla_{ij} = \nabla_{z_i} + \mu \quad (1) \\
(2) &\left\{ \begin{array}{l} \sum_i \lambda_i = 1 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

On multiplie (1) par λ_i et on somme par rapport à i :

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j \nabla_{ij} &= \sum_i \lambda_i \nabla_{z_i} + \mu \left(\sum_i \lambda_i \right) \\
&= \sum_i \lambda_i \nabla_{z_i} + \mu
\end{aligned}$$

D'où la variance de Krigage :

$$\mathcal{D}^2(z - z_k) = \boxed{\sigma_k^2 = \sigma_z^2 - \sum_i \lambda_i \sigma_{zi} + \mu}$$

Le paramètre μ est obtenu comme sous-produit de résolution du système (2)

IV - $\exists K(h)$ ET ESTIMATION OPTIMALE DE m

On estime m par :

$$\begin{cases} m^* = \sum_i a_i y_i \\ \sum_i a_i = 1 \end{cases}$$

On peut chercher les a_i pour avoir la meilleure estimation de m :

$$\begin{cases} \mathcal{D}^2(m - m^*) = \sum_{i,j} a_i a_j \sigma_{ij} & (1) \\ \sum_i a_i = 1 \end{cases}$$

On exprime que (1) est minimale compte tenu de $\sum a_i = 1$ à l'aide des multiplicateurs de Lagrange.

$$\begin{cases} \sum_j a_j \sigma_{ij} = \nu \\ \sum_i a_i = 1 \end{cases}$$

On remarque que cas 1 + cas 3 $\Rightarrow$ cas 2 alors qu'apparemment m ne figure pas dans la résolution du cas 2. Rappelons que :

$$\begin{aligned} - \text{cas 1} \quad Z^* &= m + \sum \lambda_i (y_i - m) \\ - \text{cas 2} \quad Z_k &= \sum \lambda'_i y_i \end{aligned}$$

On montre en fait que :

$$Z_k \equiv Z^* \text{ dans lequel on aurait remplacé } m \text{ par } m^* \text{ avec :}$$

$$m^* = \sum a_i y_i \quad \text{Les } a_i \text{ venant de la résolution du cas 3.}$$

En effet, on veut vérifier que :

$$\begin{aligned} Z_k &= m^* + \sum \lambda_i (y_i - m^*) \\ &= (1 - \sum \lambda_i) m^* + \sum \lambda_i y_i \end{aligned}$$

d'où :

$$\lambda'_i = (1 - \sum_j \lambda_j) a_i + \lambda_i$$

Ce qui implique que : $\sum \lambda_i = 1$ soit vérifiée, en effet :

$$\begin{aligned} \sum a_i - \left(\sum a_i \right) \left(\sum \lambda_j \right) + \sum \lambda_i \\ = 1 - \sum \lambda_j + \sum \lambda_i = 1 \end{aligned}$$

La valeur des paramètres de Lagrange n'étant déterminée que par cette condition, on en déduit que les formules de Krigeage sont les mêmes lorsqu'on connaît m ou lorsqu'on utilise l'estimateur optimal m^* de m .

On remarque que :

$$Z - Z_k = Z - Z^* - (1 - \sum \lambda_i) m^*$$

On a :

$$\begin{cases} E(Z^* y_i) = \sum \lambda_j \nabla_{ij} \\ E(Z y_i) = \nabla_{zi} \end{cases}$$

d'où :

$$\sum \lambda_j \nabla_{ij} = \nabla_{zi} \Rightarrow E[(Z - Z^*) y_i] = 0$$

La covariance de $Z - Z^*$ est nulle avec tous les y_i , en particulier avec :

$$m^* = \sum a_i y_i$$

Donc :

$$E[(Z - Z^*) m^*] = 0$$

On en déduit que :

$$\nabla_k^2 = \nabla_*^2 + (1 - \sum \lambda_i)^2 \mathcal{D}^2(m^*)$$

On a donc additivité des estimateurs et des variances correspondantes.

V - CAS OU IL N'EXISTE PAS DE COVARIANCE

$$Z = \frac{1}{V} \int_V y(x) dx$$

est alors une intégrale stochastique de variance infinie.

On veut en fait réaliser :

$$\mathcal{D}^2(Z_k - Z) < \infty$$

Pour ce faire, il faut prendre :

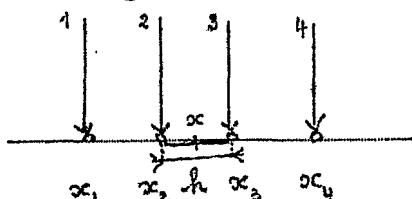
$$\begin{cases} Z_k = \sum \lambda_i y_i \\ \sum \lambda_i = 1 \end{cases}$$

Alors on retrouve le même système que précédemment en remplaçant $K(h)$ par $K(o) - \gamma$, d'où :

$$\begin{cases} \sum_j \lambda_j \gamma(x_i - x_j) = \frac{1}{V} \int_V \gamma(x - x_i) + \mu \\ \sum \lambda_i = 1 \end{cases}$$

VI - EXERCICES

Krigeage d'un segment de longueur h à partir de quatre sondages.



On prend un variogramme :

$$\gamma(h) = |h|^\alpha$$

Les fonctions caractéristiques en sont :

$$\chi(h) = \frac{h^\alpha}{\alpha+1} \quad \text{et} \quad F(h) = \frac{h^\alpha}{(\alpha+1)(\alpha+2)}$$

Equations de Krigeage

On a :

$$\begin{cases} \sum_j \lambda_j \gamma(x_i - x_j) = \frac{1}{V} \int_V \gamma(x - x_i) + \mu \\ \sum \lambda_i = 1 \end{cases}$$

On tient compte de la symétrie, on prend :

$$\lambda_1 = \lambda_4$$

$$\lambda_2 = \lambda_3$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1$$

d'où :

$$\lambda_1 = \lambda_4 = \frac{\lambda}{2} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1-\lambda}{2}$$

On remarque que :

$$\frac{1}{h} \int_0^h \gamma(u) du = X(h)$$

$$\frac{1}{h} \int_h^{2h} \gamma(u) du = 2X(2h) - X(h)$$

Tenue compte du fait que l'on a pris en compte la symétrie de la figure, il suffit pour avoir λ de résoudre les deux équations du système qui sont différentes. On prendra par exemple :

$$\frac{\lambda}{2} \gamma(x_1 - x_1) + \frac{1-\lambda}{2} \gamma(x_1 - x_2) + \frac{1-\lambda}{2} \gamma(x_1 - x_3) + \frac{\lambda}{2} \gamma(x_1 - x_4) = \frac{1}{h} \int_h^h \gamma(x - x_1) dx$$

$$\frac{\lambda}{2} \gamma(x_2 - x_1) + \frac{1-\lambda}{2} \gamma(x_2 - x_2) + \frac{1-\lambda}{2} \gamma(x_2 - x_3) + \frac{\lambda}{2} \gamma(x_2 - x_4) = \frac{1}{h} \int_h^h \gamma(x - x_2) dx$$

On sait que : $\gamma_0 = 0$

$$\frac{1}{h} \int \gamma(x - x_2) dx = \frac{1}{h} \int_0^h \gamma(u) du = X(h)$$

$$\frac{1}{h} \int_h^h \gamma(x - x_1) dx = \frac{1}{h} \int_0^h \gamma(v+h) dv$$

on pose $v + h = u$

d'où :

$$= \frac{1}{h} \int_h^{2h} \gamma(u) du = 2X(2h) - X(h)$$

Remarquons que le coefficient 2 vient du fait que X est une valeur moyenne.

D'où le système :

$$\frac{1-\lambda}{2} \gamma(h) + \frac{1-\lambda}{2} \gamma(2h) + \frac{\lambda}{2} \gamma(3h) = 2X(2h) - X(h)$$

$$\frac{\lambda}{2} \gamma(h) + \frac{1-\lambda}{2} \gamma(h) + \frac{\lambda}{2} \gamma(2h) = X(h)$$

On trouve :

$$\lambda = \frac{2(X(2h) - X(h)) - \frac{1}{2} \gamma(2h)}{\frac{\gamma(3h)}{2} - \gamma(2h) - \frac{\gamma(h)}{2}}$$

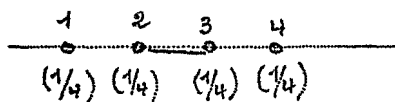
Dans le cas présent :

$$\lambda = \frac{\frac{2}{\alpha+1} (2^\alpha - 1) - 2^{\alpha-1}}{\frac{1}{2} 3^\alpha - 2^\alpha - \frac{1}{2}}$$

On remarque que pour :

$$\alpha = 0 \quad \frac{\lambda}{2} = \frac{1}{4} = \lambda_1 = \lambda_4$$

$$\frac{1-\lambda}{2} = \frac{1}{4} = \lambda_2 = \lambda_3$$

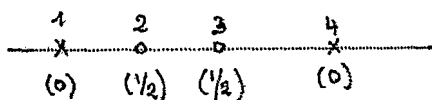


$$\alpha = 1$$

C'est le cas de l'effet de pépite à l'état pur, on retrouve les résultats de la statistique classique.

On a le modèle linéaire correspondant au mouvement Brownien.

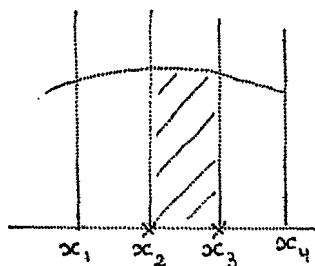
$$\lambda = 0$$



Le système est fermé, les données proches font écran total. Cela correspond aux propriétés markoviennes d'un processus à accroissements stationnaires indépendants.

Le phénomène se structure de plus en plus au fur et à mesure que α croît.

Pour $\alpha > 1$ $\lambda < 0$ nous obtenons des pondérateurs négatifs pour les points extérieurs.



Cela vient du fait que pour un phénomène bien régulier la moyenne sur $[x_1, x_4]$ est supérieure à la moyenne sur $[x_2, x_3]$

TREIZIEME CHAPITRE - ESTIMATION OPTIMALE DE LA DERIVE

I - CRITIQUE DES METHODES DE MOINDRES CARRES

Pour une estimation globale nous avons vu que l'hypothèse stationnaire était parfaitement inutile ou pouvait résoudre le problème en introduisant une pseudo-covariance, valeur moyenne de la covariance non-stationnaire.

Pour une étude locale on introduit l'hypothèse plus faible de la quasi-stationnarité qui correspond à une modification lente par rapport à l'échelle de travail des paramètres : espérance mathématique et variance.

La vogue a été jusqu'à présent, pour résoudre de tels problèmes, à l'ajustement de polynômes aux moindres carrés. On peut faire quelques critiques :

- on effectue alors une surestimation du côté continu ou structural du phénomène. Pourquoi la même méthode pourrait-elle s'appliquer à un phénomène géophysique très régulier et à l'effet de pépite des gisements d'or.

- la notion de "trend" aboutit à une confusion du mode opératoire et du concept. On attribue tour à tour des significations différentes à ce mot :

- . en cartographie automatique, il correspondra à la recherche d'un estimateur de $Z(x)$ valeur vraie, prise par la F.A. en un point x donné,

- . en matière minière, à l'estimation de la valeur moyenne $\int p(dx) Z(x)$ dans un panneau défini,

- . en gravimétrie à la recherche d'une anomalie régionale $E(Z(x))$ différenciée de l'anomalie locale.

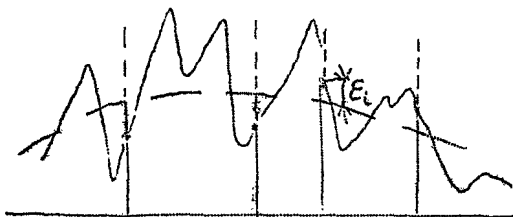
Trois problèmes :

$$\begin{cases} E(Z(x)) & \text{Dérive} \\ Z(x) & \text{Krigage ponctuel} \\ \int p(dx) Z(x) & \text{Krigage} \end{cases}$$

Il n'y a aucune chance pour que la méthode des moindres carrés soit optimale pour les trois à la fois car elle masque sous une fausse universalité la diversification des objectifs en vue.

Ses défauts :

- ne tient pas compte de la structure du réel
- ne tient pas compte de l'objectif
- ne permet pas d'obtenir une variance d'estimation.



Car on ne peut avoir accès qu'à la variance des résidus, c'est-à-dire la variance des écarts ε_i calculée aux points expérimentaux x_i privilégiés, qui par construction, est beaucoup plus faible que la variance réelle.

II - POSITION DU PROBLEME ET HYPOTHESES GENERALES

On s'intéresse à une réalisation d'une F.A. non stationnaire possédant les moments jusqu'à l'ordre 2.

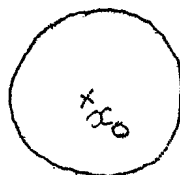
$$\text{Hyp. 1} \quad \begin{cases} E(Z(x)) = m(x) \text{ dérive} \\ E(Z(x)Z(y)) - m(x)m(y) = C(x, y) \\ \quad (C(x-y) \text{ dans le cas stationnaire}) \end{cases}$$

$m(x)$ n'est plus une constante, c'est l'espérance mathématique d'une fonction aléatoire non stationnaire.

Ces hypothèses pouvant être parfois trop fortes, on introduit l'équivalent de l'hypothèse intrinsèque en ne s'intéressant qu'aux accroissements

$$\text{Hyp. 2} \quad \begin{cases} E(Z(x) - Z(y)) = m(x) - m(y) \\ \frac{1}{2} D^2(Z(x) - Z(y)) = \gamma(x, y) \end{cases}$$

Dans ce cas $m(x)$ n'est définie qu'à une constante près



Dans un voisinage Vx_0 , on peut approcher $m(x)$ par :

$$m(x) = a_1 f^l(x)$$

f^l = famille quelconque de fonctions.

On changera de coefficients, en changeant de V .

De même on peut supposer que $C(x, x+h)$ et $\gamma(x, x+h)$ sont localement assimilables à des fonctions de type connu.

Avec :

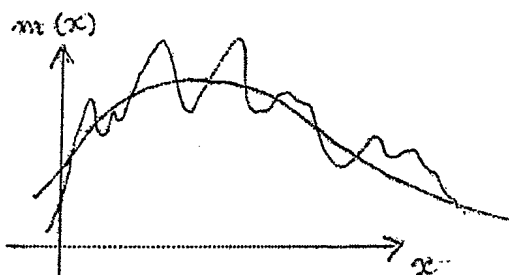
$$\gamma(x, x+h) = \gamma(h; \alpha(x))$$

$\alpha(x)$ étant un paramètre de variation lente, pratiquement invariant dans Vx_0

Par exemple :

$$\gamma(x, x+h) = \bar{\omega}(x) |h|$$

On introduit par ce biais une hypothèse de quasi-stationnarité qui revient à dire que localement on assimile le vrai phénomène à un phénomène stationnaire local qui lui est tangent. Ceci permet de pouvoir résoudre le problème statistique au moins localement.



La notion de dérive est intimement liée à l'échelle de travail, la régularité supposée de savariation est une condition que l'on peut toujours réaliser car si elle était très irrégulière on considérerait $m(x)$ comme réalisation d'une F.A.

Remarquons que l'effet de pépité pur est le seul cas où les méthodes de moindres carrés sont optimales dans l'estimation de la dérive. Incidemment cela correspond au cas où la statistique classique est applicable.

III - LA METHODE DES MULTIPLICATEURS DE LAGRANGE DANS LES PROBLEMES DE MINIMUM LIES

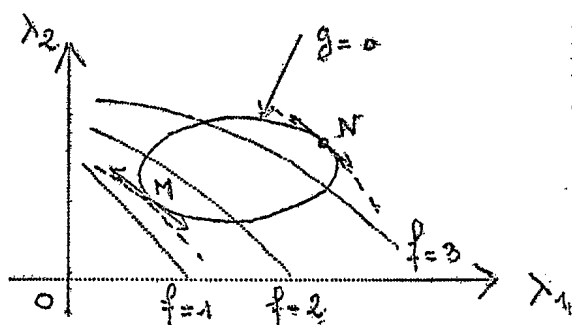
Soit une fonction dépendant de paramètres λ_α

$$f(\lambda_\alpha) \quad \alpha \in \{1, 2, \dots, m\}$$

On veut réaliser le minimum de f pour des valeurs liées par le système de conditions :

$$(1) \quad g_i(\lambda_\alpha) = 0 \quad i \in \{1, 2, \dots, m\}$$

Par exemple, pour deux paramètres :



Réaliser $f(\lambda_1, \lambda_2)$ minimum lié par $g(\lambda_1, \lambda_2) = 0$
En M et N cette condition est vérifiée les dérivées partielles de f et g y sont proportionnelles donc :

$$df = \mu dg \quad \mu = \text{multiplicateur de Lagrange}$$

C'est un phénomène général, en effet, si l'on se place sur la variété définie par (1) aux points où le df sera nul nous aurons :

$$dg_i = 0 \Rightarrow df = 0$$

Mais df et dg_i sont des fonctions linéaires de $d\lambda_\alpha$ donc il faut et il suffit que df soit une combinaison linéaire de dg_i

$$df = \sum_i \mu_i dg_i$$

D'où le système :

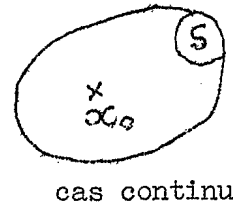
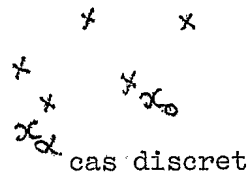
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \lambda_\alpha} = \sum_i \mu_i \frac{\partial g_i}{\partial \lambda_\alpha} \\ g_i(\lambda_\alpha) = 0 \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

Il y a m paramètres dans le système (1) et m équations dans le système (2), ce qui permet une résolution de l'ensemble par rapport aux paramètres de Lagrange.

IV - ESTIMATION OPTIMALE DE LA DERIVE (Hyp. 1)

Deux cas se présentent :

- cas discret
- cas continu



Toutes les formules correspondant au cas continu seront signalées entre parenthèses.

On connaît les $Z(x_\alpha) = Z_\alpha$ ($Z(x)$ $x \in S$) qui sont les réalisations vraies ainsi que la covariance $\mathbb{C}_{\alpha\beta} = C(x_\alpha, x_\beta)$ des points expérimentaux et on estime la dérive en un point x_0 placé dans leur voisinage.

$$m(x_0) = a_l f^l(x_0)$$

On cherche le meilleur estimateur linéaire :

$$m^*(x_0) = \lambda^\alpha Z_\alpha \quad (\text{convention d'Einstein})$$

$$(\quad = \int_S \lambda(dx) Z(x))$$

Dans le cas continu $\lambda(dx)$ est une mesure

Nous imposerons deux conditions à notre estimateur :

- universalité
- optimalité.

1) Universalité

On exprime ici que l'estimateur est sans biais, quels que soient les coefficients a_l

$$E(m^*(x_0)) = m(x_0) \quad \forall a_l$$

On a :

$$E(m^*(x_0)) = \sum \lambda^\alpha E(Z_\alpha)$$

En posant : $f_{\alpha}^l = f^l(x_{\alpha})$

$$E(m^*(x_0)) = \lambda^{\alpha} a_{\ell} f_{\alpha}^l$$

$$(\quad = a_{\ell} \int_S \lambda(dx) f^l(x))$$

On veut réaliser :

$$\lambda^{\alpha} a_{\ell} f_{\alpha}^l = a_{\ell} f^l(x_0) \quad \forall a_{\ell}$$

$$(a_{\ell} \int_S \lambda(dx) f^l(x) = a_{\ell} f^l(x_0) \quad \forall a_{\ell})$$

D'où condition d'universalité :

$$\boxed{\lambda^{\alpha} f_{\alpha}^l = f^l(x_0) = b^l}$$

$$(\int_S \lambda(dx) f^l(x) = b^l)$$

Incidentement les méthodes de moindres carrés vérifient cette condition.

2) Optimalité

Il faut exprimer que la variance liée par les conditions précédentes est minimale. On sait que dans le cas sans biais on peut centrer la variance.

$$D^2(m^*) = \lambda^{\alpha} \lambda^{\beta} E(z_{\alpha} z_{\beta}) = \lambda^{\alpha} \lambda^{\beta} \nabla_{\alpha\beta}$$

On a :

$$d(\lambda^{\alpha} \lambda^{\beta} \nabla_{\alpha\beta}) = 2\mu_{\ell} d(\lambda^{\alpha} f_{\alpha}^l)$$

Le facteur 2 est dû à la dérivation d'une forme quadratique.

La dérivation par rapport aux λ^{α} nous donne la condition d'optimalité :

$$\boxed{\lambda^{\beta} \nabla_{\alpha\beta} = \mu_{\ell} f_{\alpha}^l} \quad \forall x_{\alpha} \text{ point expérimental}$$

On obtient donc le système suivant :

$\begin{cases} \lambda^\alpha f_\alpha^\ell = b^\ell \\ \lambda^\beta \nabla_{\alpha\beta} = \mu_\ell f_\alpha^\ell \quad \forall x_\alpha \end{cases}$	$\begin{cases} \int_S \lambda(dx) f^\ell(x) = b^\ell \\ \int_S \lambda(dx) C(x, y) = \mu_\ell f^\ell(y) \quad \forall y \in S \end{cases}$
(2)	(1)

Pour des points $\notin$ à S la condition (1) ne sera pas vérifiée en général.
On multiplie (2) par λ^α d'où :

$$\lambda^\alpha \lambda^\beta \nabla_{\alpha\beta} = \mu_\ell \lambda^\alpha f_\alpha^\ell = D^2(m^*)$$

$$\textcircled{Du} \left(\int_S \int_S \lambda(dx) \lambda(dy) C(x, y) = \mu_\ell \int_S \lambda(dx) f^\ell(x) \right)$$

d'où :

$$D^2(m^*) = \mu_\ell b^\ell$$

dans les deux cas.

La question se pose de savoir si le système obtenu est régulier :

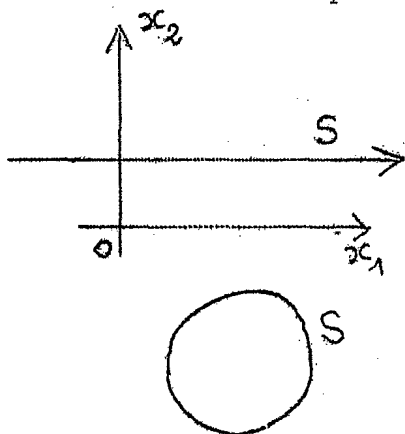
- cas discret
condition réalisée car la fonction de covariance est strictement définie positive,

- cas continu

Il faut alors utiliser la théorie mathématique des espaces de Hilbert. On voit alors qu'il faut s'imposer deux restrictions :

• les $f^\ell(x)$ sont linéairement indépendantes sur le domaine S
 $\sum B_\ell f^\ell(x) = 0 \quad \forall x \in S \Rightarrow B_\ell = 0 \quad \forall \ell$

Par exemple :



Si S droite parallèle à Ox_1 - pour une dérive linéaire

$ax_1 + bx_2 + C$ on a un système singulier.

Il n'y a pas d'espoir de connaître le phénomène autour de la ligne.

De même si S est un cercle, il n'y a pas d'espoir d'estimer une dérive quadratique.

$$ax_1^2 + bx_2^2$$

Il se peut que la mesure λ n'existe pas, alors nous aurons simplement :

$$m^*(x_0) \stackrel{m \cdot g}{=} \int_S \lambda(dx) Z(x)$$

3) Recherche des meilleurs estimateurs des coefficients a_l

Les équations du système dépendent linéairement de b^l

$$(3) \quad \begin{cases} \lambda^\alpha f_\alpha^l = b^l \\ \lambda^\alpha \lambda^\beta \tau_{\alpha\beta} = \mu_l b^l \end{cases}$$

Si l'on prend un point expérimental x_l différent de x_0 , seuls les coefficients b^l changeront donc :

$$m^*(x_0) = \lambda^\alpha (b^l) \tau_\alpha = \lambda^\alpha [f_\alpha^l(x_0)] \tau_\alpha$$

Les λ^α étant des fonctions linéaires des b^l par résolution de (3), on a donc une fonction linéaire des b^l que l'on note :

$$\lambda_l^\alpha b^l = \lambda^\alpha (b^l) \tau_\alpha$$

$$\boxed{m^*(x_0) = \lambda_l^\alpha b^l}$$

La matrice λ_l^α vérifie les équations :

$$\begin{cases} (4) \quad \lambda_i^\alpha f_\alpha^l = \delta_i^l \\ (5) \quad \lambda_i^\beta \tau_{\alpha\beta} = \mu_{il} f_\alpha^l \end{cases}$$

$$\left(\begin{cases} \int \lambda_i(dx) C(x-y) = \mu_{il} f^l(y) \quad \forall y \in S \\ \int \lambda_i(dx) f^l(x) = \delta_i^l \end{cases} \right)$$

d'où les estimateurs :

$$\boxed{a_l^* = A_l = \lambda_l^\alpha \tau_\alpha}$$

$$(A_l = \int_S \lambda_l(dx) \tau(x))$$

La condition d'universalité (4) exprime que :

$$E(A_\ell) = a_\ell$$

La condition (5) exprime que $\forall b^\ell = f^\ell(x_0)$ la quantité $A_\ell b^\ell$ a une variance minimale.

$$D^2(A_\ell b^\ell) \text{ minimale } \forall b^\ell$$

La variance d'estimation de la dérive s'exprime par :

$$D^2(m^*(x_0)) = \mu_\ell b^\ell$$

mais

$$\mu_\ell = \mu_{i\ell} b^i$$

d'où :

$$D^2(A_\ell b^\ell) = \mu_{i\ell} b^i b^\ell$$

Or on sait que les estimateurs étant centrés :

$$D^2(A_\ell b^\ell) = b^i b^j \text{cov}(A_i, A_j)$$

Donc :

$$\mu_{ij} = \begin{aligned} &= \text{matrice de covariance des estimateurs optimaux} \\ &= \text{matrice des coefficients de Lagrange.} \end{aligned}$$

$$\mu_{ij} = \text{cov}(A_i, A_j)$$

V - ESTIMATION OPTIMALE DE LA DERIVE (Hyp. 2)

On transpose les calculs précédents à des hypothèses affaiblies.

Hyp. 1 - $m(x) = a_0 + \sum_{\ell=1}^k a_\ell f^\ell(x) \quad \ell \in \{0, 1, \dots, k\}$

Hyp. 2 - Dans ce cas $m(x)$ n'est définie qu'à une constante près, on ne connaît que :

$$m(x+h) - m(x) = a_\ell f^\ell(x) = \sum_{\ell=1}^k a_\ell f^\ell(x) \quad \ell \in \{1, 2, \dots, k\}$$

a_0 ne peut être estimé car on a de grandes chances de tomber sur un estimateur de variance infinie.

On estimera donc la dérive à une constante près par :

$$m^*(x_0) = \lambda^\alpha z_\alpha$$

Elle ne pourra avoir une variance linéaire que si celle-ci peut s'exprimer en fonction linéaire des accroissements.

On est obligé d'introduire une condition et un paramètre de Lagrange supplémentaires.

$$\boxed{\sum_{\alpha} \lambda^{\alpha} = 0}$$

$$\left(\int_S \lambda(dx) = 0 \right)$$

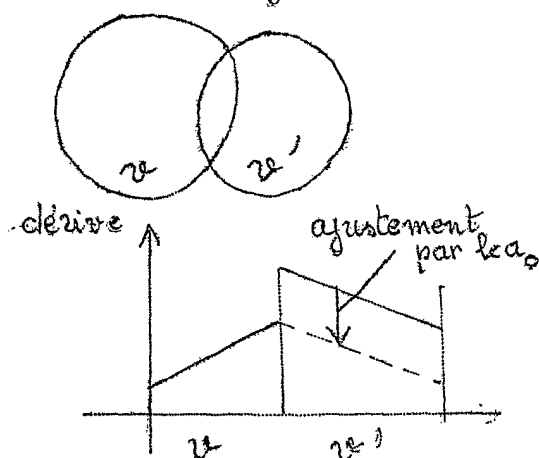
à la condition précédente supplémentaire près on obtient les mêmes formules.

- Cas discret

$$\begin{cases} \lambda_i^{\beta} \gamma_{\alpha\beta} = -\mu_{il} f_{\alpha}^l - c_i & - (c_i = \text{paramètre de Lagrange supplémentaire}) \\ \lambda_i^{\alpha} f_{\alpha}^l = \delta_i^l \\ \sum_{\alpha} \lambda_i^{\alpha} = 0 \end{cases}$$

- Cas continu

$$\begin{cases} \int_S \lambda_i(dx) \gamma(x,y) = -\mu_{il} f^l(y) - c_i \quad \forall y \in S \\ \int_S \lambda_i(dx) f^l(x) = \delta_i^l \\ \int_S \lambda_i(dx) = 0 \end{cases}$$

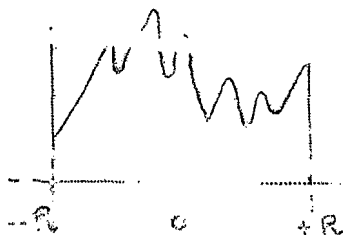


En fait l'expression de la dérive n'est valable que localement, un raccordement est donc nécessaire quand on passe d'une zone v à une zone v' .

Ce sera le rôle du a_0 que l'on ajustera à cet effet car en réalité on n'a estimé la dérive qu'à une constante près.

VI - EXERCICE

Estimation optimale d'une dérive quadratique en présence d'un variogramme linéaire.



On se place dans le cas unidimensionnel sur un segment $[-R, +R]$

Nous avons un variogramme linéaire :

$$\gamma(x, y) = |x - y|$$

Il correspond au processus de Poisson ou au mouvement Brownien.

Hyp Il existe une dérive parabolique

$$m(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \quad \text{que l'on estime à une constante}$$

près :

$$m^*(x) = A_1 x + A_2 x^2$$

On a :

$$\begin{cases} A_1^* = \int_{-R}^{+R} \lambda_1(dx) x \\ A_2^* = \int_{-R}^{+R} \lambda_2(dx) x^2 \end{cases}$$

On cherche les mesures λ_1 et λ_2 qui correspondent à la meilleure estimation de A_1 et A_2 .

- Optimalité :

$$\begin{cases} \int_{-R}^{+R} \lambda_1(dx) |x-y| = -\int_{-R}^{+R} \lambda_1(dx) y - \int_{-R}^{+R} \lambda_2(dx) y^2 - C_1 & (1) \\ \int_{-R}^{+R} \lambda_2(dx) |x-y| = -\int_{-R}^{+R} \lambda_2(dx) y + \int_{-R}^{+R} \lambda_2(dx) y^2 - C_2 & (2) \end{cases}$$

On a $\int_{-R}^{+R} \lambda_{12} = \int_{-R}^{+R} \lambda_{21}$ car cov. (A_1, A_2) est une fonction symétrique or :

$$\mu_{ij} = \text{Cov}(A_i, A_j)$$

- Universalité :

$$\int x \lambda_1(dx) = 1 \quad (3)$$

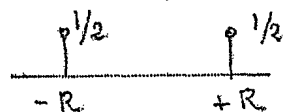
$$\int x \lambda_2(dx) = 0 \quad (5)$$

$$\int x^2 \lambda_1(dx) = 0 \quad (4)$$

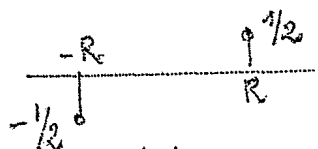
$$\int x^2 \lambda_2(dx) = 1 \quad (6)$$

$$\int \lambda_1(dx) = \int \lambda_2(dx) = 0 \quad (7)$$

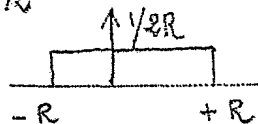
On considère 3 mesures :



$$V_1(dx) = \frac{1}{2} (\delta_R(dx) + \delta_{-R}(dx))$$



$$V_2(dx) = \frac{1}{2} (\delta_R(dx) - \delta_{-R}(dx))$$



$$V_3(dx) = \frac{dx}{2R}$$

densité constante sur $[-R, +R]$

Avec :

$$\delta_R(dx) = \text{mesure de Dirac en } R$$

On a :

$$\int_{-R}^{+R} V_1(dx) |x-y| = \frac{1}{2} [\text{valeur de } |x-y| \text{ en } R + \text{valeur de } |x-y| \text{ en } -R]$$

ceci est d'ailleurs un phénomène général.

$$\int \delta_a(dx) f(x) = f(a)$$

d'où :

$$\int_{-R}^{+R} V_1(dx) |x-y| = \frac{1}{2} [R-y + R+y] = R$$

Remarquons que cette valeur ne dépend pas de y

On a de même :

$$\int_{-R}^{+R} V_2(dx) |x-y| = \frac{1}{2} [R-y - R-y] = -y$$

et

$$\int_{-R}^{+R} V_3(dx) |x-y| = \int_{-R}^y (y-x) \frac{dx}{2R} + \int_{+y}^R (x-y) \frac{dx}{2R} = \frac{y^2 + R^2}{2R}$$

Nous pourrions donc satisfaire aux relations (1) et (2) en prenant :

$$\begin{cases} \lambda_1 = a V_1 + b V_2 + c V_3 \\ \lambda_2 = d V_1 + e V_2 + f V_3 \end{cases}$$

Pour obtenir les coefficients, on écrit que les 6 autres relations sont vérifiées.

On montre en fait que :

$$\begin{cases} a = c = 0 \\ e = 0 \end{cases}$$

Il nous suffira donc de 3 équations, les paramètres de Lagrange étant obtenus par identification de (1) et (2)

Remarquons que :

$$\begin{cases} \int_{-R}^{+R} x V_1 (dx) = \frac{1}{2} [R + (-R)] = 0 \\ \int_{-R}^{+R} x V_2 (dx) = \frac{1}{2} [R - (-R)] = R \\ \int_{-R}^{+R} \frac{x dx}{2R} = \frac{1}{2R} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-R}^{+R} = 0 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \int_{-R}^{+R} x^2 V_1 (dx) = R^2 \\ \int_{-R}^{+R} x^2 V_2 (dx) = 0 \\ \int_{-R}^{+R} \frac{x^2 dx}{2R} = \frac{1}{2R} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-R}^{+R} = \frac{R^2}{3} \end{cases}$$

D'où le système :

$$\begin{cases} \int b x V_2 (dx) = b R = 1 \\ d \int x^2 V_1 (dx) + f \int x^2 V_3 (dx) = d R^2 + f \frac{R^2}{3} = 1 \\ d \int V_1 (dx) + f \int V_3 (dx) = d + f = 0 \end{cases}$$

Car :

$$\begin{cases} \int_{-R}^{+R} V_1 (dx) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \\ \int_{-R}^{+R} \frac{dx}{2R} = \left[\frac{x}{2R} \right]_{-R}^{+R} = 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{(somme des masses placées} \\ \text{en } -R \text{ et } +R) \end{array}$$

D'où :

$$\boxed{b = \frac{1}{R} \quad d = \frac{3}{2} \frac{1}{R^2} \quad f = -\frac{3}{2} \frac{1}{R^2}}$$

On en déduit la valeur des coefficients de Lagrange et par la même des coefficients de la matrice de covariance des A_1, A_2 .

On a :

$$\begin{aligned} \int_{-R}^{+R} \frac{1}{R} V_2(dx) |x-y| &= -\frac{y}{R} = -\mu_{11} y - \mu_{12} y^2 - C_1 \\ \int_{-R}^{+R} \left[\frac{3}{2} \frac{1}{R^2} V_1(dx) - \frac{3}{2} \frac{1}{R^2} V_3(dx) \right] |x-y| \\ &= \frac{3}{2} \frac{1}{R^2} - \frac{3}{2} \frac{y^2 + R^2}{2R^3} = \mu_{21} y - \mu_{22} y^2 - C_2 \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \mu_{11} &= \frac{1}{R} & \mu_{12} &= 0 & C_1 &= 0 \\ \mu_{22} &= \frac{3}{4R^3} & \mu_{21} &= 0 & C_2 &= \frac{3}{2} \frac{R-1}{R^2} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\boxed{\begin{cases} D^2(A_1) = \mu_{11} = \frac{1}{R} \\ D^2(A_2) = \mu_{22} = \frac{3}{4R^3} \end{cases}}$$

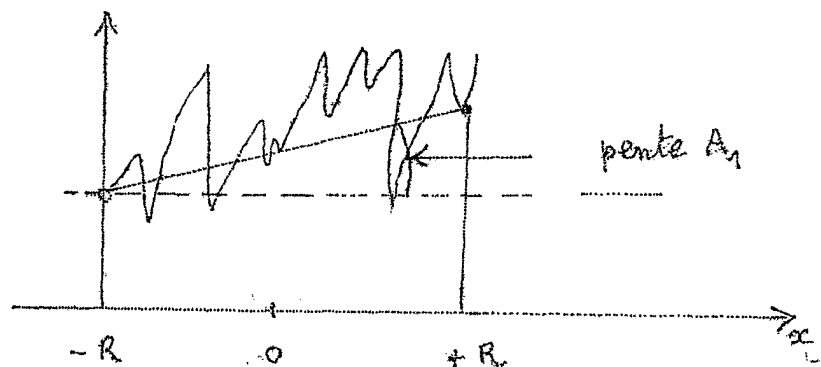
On obtient aussi l'expression optimale des coefficients A_1 et A_2

$$\begin{cases} A_1 = \int_{-R}^{+R} \frac{1}{R} V_2(dx) Z(x) = \frac{1}{2R} (Z(R) - Z(-R)) \\ A_2 = \int_{-R}^{+R} \frac{3}{2R^2} [V_1(dx) - V_3(dx)] Z(x) = \frac{3}{4R^2} (Z(R) + Z(-R)) - \frac{3}{2R^2} \bar{Z} \end{cases}$$

avec :

$$\bar{Z} = \frac{1}{2R} \int_{-R}^{+R} Z(x) dx$$

On observe ainsi que la pente de la dérive linéaire A_1 est uniquement déterminée par le premier et le dernier point expérimental, dans le cas d'une dérive linéaire.



QUATORZIEME CHAPITRE - ESTIMATION ET FLUCTUATION DU VARIOGRAMME

I - INVARIANCE TENSORIELLE DE L'ESTIMATEUR OPTIMAL

On se place dans le cas discret, pour facilité d'écriture

On estime la vraie dérive :

$$m(x_0) = a_l f^l(x_0) \text{ par:}$$

$$m^*(x_0) = A_l f^l(x_0) = \lambda^\alpha \Sigma_\alpha$$

Les paramètres sont solution du système

$$\begin{cases} \lambda^\alpha f_\alpha^l = f^l(x_0) = b^l & (\text{universalité}) \\ \lambda^\beta \Sigma_{\alpha\beta} = \mu_l f_\alpha^l & (\text{optimalité}) \end{cases}$$

On utilise une écriture matricielle :

$$(1) \begin{cases} F \lambda = b \\ C \lambda = \mu F \end{cases}$$

où C = matrice de covariance entre points expérimentaux.

Si par exemple, on utilisait des polynômes de fonctions trigonométriques, il serait nécessaire d'effectuer un changement de coordonnées. Cela reviendrait alors à effectuer la transformation linéaire :

$$F' = B F \quad \text{et} \quad b' = B b$$

où B = matrice de changement de coordonnées.

On obtient le système :

$$\begin{cases} F' \lambda' = b' \\ C \lambda' = \mu' F' \end{cases}$$

On a :

$$\begin{aligned} B F \lambda' &= B b \\ B' B F \lambda' &= B' B b \Rightarrow \begin{cases} F \lambda' = b \\ C \lambda' = \mu' B F \end{cases} \quad (2) \end{aligned}$$

Nous voyons que le système (2) est identique au système (1) avec :

$$\begin{cases} \lambda' = \lambda \\ \mu' = \mu B^{-1} \end{cases}$$

L'estimation de la dérive en un point donné est donc invariante par transformation linéaire.

Il est équivalent de dire que les A_1 se modifient de façon contravariante par rapport aux $f^1(x_0)$

$$\begin{cases} F' = B F & \text{covariant} \\ A' = A B^{-1} & \text{contravariant} \end{cases}$$

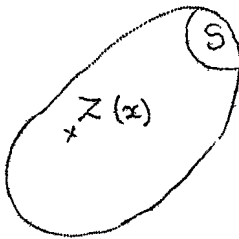


Cette propriété est importante car dans les applications on est souvent obligé de choisir une origine et de la déplacer.

II - VARIOGRAMME DES RESIDUS EXPERIMENTAUX

Il faut vérifier que le variogramme sous-jacent $\gamma(x, y)$ est de la forme $\bar{\omega} |h|^\alpha$ ou $\bar{\omega} e^{-ah}$, formules dans lesquelles il est nécessaire d'estimer les paramètres $\bar{\omega}$, α , a . Mais on ne connaît pas la dérive, les estimations et les biais s'imbriquent donc de façon compliquée.

On fait l'hypothèse que $\gamma(x, y)$ est de type connu : $\bar{\omega}(x - y)$ par exemple. On en déduit alors une estimation optimale A_1 des coefficients de dérive. On construit le variogramme expérimental des écarts $\gamma^*(h)$ et on compare son espérance mathématique au variogramme théorique des écarts. Pour simplifier les notations, on se place dans le cas continu



S a pour indicatrice $k(x)$, on rappelle que le covariogramme géométrique a pour expression :

$$K(h) = \text{Mes}(S \cap S_h) = \int k(x) k(x+h) dx$$

Les résidus expérimentaux s'expriment par :

$$Z(x) - m^*(x)$$

On a alors :

$$2\gamma^*(h) = \frac{1}{K(h)} \int [Z(x+h) - m^*(x+h) - Z(x) + m^*(x)]^2 k(x) k(x+h) dx$$

La division par $K(h)$ se justifie par le fait que l'on a calculé une valeur moyenne sur $S \cap S - h$.

Si l'on connaissait la vraie valeur de $m(x)$, on aurait :

$$2\bar{\gamma}(h) = E \left\{ \frac{1}{K(h)} \int [Z(x+h) - m(x+h) - Z(x) + m(x)] h(x) h(x+h) dx \right\}$$

Or par définition :

$$E \{ \text{accroissements centrés} \} = \gamma(x, y)$$

d'où :

$$2\bar{\gamma}(h) = \frac{1}{K(h)} \int \gamma(x, x+h) h(x) h(x+h) dx$$

C'est cette valeur moyenne $\bar{\gamma}(h)$ que l'on avait introduite pour montrer précédemment que l'hypothèse stationnaire était superflue.

$$\begin{aligned} E \left\{ [Z(x+h) - m^*(x+h) - Z(x) + m^*(x)]^2 \right\} \\ = E \left\{ (Z(x+h) - Z(x))^2 + (m^*(x+h) - m^*(x))^2 \right. \\ \left. - 2(m^*(x+h) - m^*(x))(Z(x+h) - Z(x)) \right\} \end{aligned}$$

$$= 2\gamma(x, x+h) + \text{biais}$$

$$= 2\gamma(x, x+h) + C - 2R$$

- Expression du terme carré C

$$[m^*(x+h) - m^*(x)]^2 = A_l A_s \left[f^l(x+h) - f^l(x) \right] \left[f^s(x+h) - f^s(x) \right]$$

$$\text{Comme : } E \{ A_l A_s \} = \mu_{ls}$$

$$C = \mu_{ls} \left[f^l(x+h) - f^l(x) \right] \left[f^s(x+h) - f^s(x) \right]$$

- Expression du terme rectangle

$$[m^*(x+h) - m^*(x)] [Z(x+h) - Z(x)] = A_l \left[f^l(x+h) - f^l(x) \right] [Z(x+h) - Z(x)]$$

$$A_l = \int \lambda_l(dy) Z(y)$$

C'est donc une combinaison linéaire des $Z(y)$

Examinons dans quelles conditions une expression telle que :

$Z(y) [Z(x+h) - Z(x)]$ a une espérance mathématique

- dans le cas où une covariance existe, ceci est évident,
- dans le cas où il n'y a qu'un variogramme γ la condition $\int \lambda_2(dy) = 0$ nous est imposée. Mais de toutes façons elle figure dans le système fondamental, d'où :

$$E \{ Z(y) [Z(x+h) - Z(x)] \} = \gamma(x, y) - \gamma(x+h, y)$$

$$\begin{aligned} E \{ A_1 [Z(x+h) - Z(x)] \} &= E \left\{ \int \lambda_2(dy) Z(y) [Z(x+h) - Z(x)] \right\} \\ &= \int \lambda_2(dy) [\gamma(x, y) - \gamma(x+h, y)] \end{aligned}$$

Mais les coefficients A_1 sont optimaux, ils vérifient donc :

$$\int \lambda_2(dy) \gamma(x, y) = -\mu_{L_2} f^S(x) - C_1 \quad \forall x \in S$$

Les constantes C_1 disparaissant on obtient :

$$E \{ A_1 [Z(x+h) - Z(x)] \} = \mu_{L_2} (f^S(x+h) - f^S(x))$$

Donc :

$$R = \mu_{L_2} [f^S(x+h) - f^S(x)] [f^L(x+h) - f^L(x)]$$

On voit que le terme carré est égal au terme rectangle, ce qui vérifie un fait très général concernant les formes quadratiques à l'optimum.

$$\begin{aligned} E \left\{ [Z(x+h) - m^{\#}(x+h) - Z(x) + m^{\#}(x)]^2 \right\} \\ = 2 \gamma(x, x+h) - \mu_{L_2} [f^L(x+h) - f^L(x)] [f^S(x+h) - f^S(x)] \end{aligned}$$

Comme μ_{L_2} est une matrice strictement définie positive on en déduit que toujours :

$$2 \gamma^*(h) < 2 \gamma(x, x+h)$$

Il reste à intégrer pour obtenir l'espérance du variogramme des écarts expérimentaux.

$$2 E \{ \gamma^*(h) \} = 2 \bar{\gamma}(h) - \mu_{L_2} T^{L_2}(h)$$

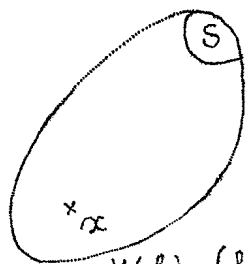
Avec :

$$T^{ls}(h) = \frac{1}{K(h)} \int \left(f^l(x+h) - f^l(x) \right) \left(f^s(x+h) - f^s(x) \right) h(x) h(x+h) dx$$

Ce sont des expressions calculables lorsqu'on a choisi des f^l .

III - COMPARAISON AVEC LA METHODE DES MOINDRES CARRES

Pour faciliter les écritures on raisonne dans le domaine continu.



On suppose que la vraie dérive est de la forme :

$$m(x) = a_1 f^l(x)$$

On l'estime par :

$$m^{\#}(x) = B_1 f^l(x)$$

$$K(h) = \int h(x) h(x+h) dx$$

Pour effectuer une estimation aux moindres carrés, il faut réaliser le minimum de l'intégrale.

$$I = \int \left(Z(x) - m^{\#}(x) \right)^2 k(x) dx$$

Cette intégrale est étendue au domaine S. On obtient donc un système d'équations :

$$\boxed{\frac{\partial I}{\partial B_l} = 0}$$

$$\frac{\partial}{\partial B_l} \left[Z(x) - B_l f^l(x) \right]^2 = -2 f^l(x) \left[Z(x) - B_l f^l(x) \right]$$

D'où le système linéaire de n équations à n inconnues.

$$-2 \int f^l(x) \left[Z(x) - B_l f^l(x) \right] h(x) dx = 0$$

Donc :

$$B_l \int_S f^l(x) f^l(x) dx = \int_S f^l(x) Z(x) dx$$

On pose :

$$T^{ls} = \frac{1}{K(o)} \int f^s(x) f^l(x) h(x) dx \quad (\text{matrice})$$

Où : $K(o)$ = surface de S

$$B_s T^{ls} = \frac{1}{K(o)} \int_S f^l(x) z(x) dx$$

On introduit la matrice S inverse de T :

$$S T = I \quad \text{ou} \quad S_{ij} T^{kl} = \delta_{ij}^k$$

D'où :

$$B_j = \frac{S_{jl}}{K(o)} \int z(x) f^l(x) h(x) dx$$

1) Estimateur sans biais

On se place pour plus de facilité dans le cas où il existe une covariance.

$$\begin{aligned} E \{ B_j \} &= \frac{S_{jl}}{K(o)} \int E \{ z(x) \} f^l(x) h(x) dx \\ &= \frac{S_{jl}}{K(o)} \int a_s f^s(x) f^l(x) h(x) dx \end{aligned}$$

Or :

$$\int_S f^s(x) f^l(x) dx = K(o) T^{ls}$$

d'où :

$$E \{ B_j \} = a_s S_{jl} T^{ls} = a_s \delta_j^s = a_j$$

$$E \{ B_j \} = a_j$$

2) Calcul de la matrice de covariance et comparaison avec l'estimateur optimal.

On introduit la matrice

$$\beta_{ij} = \text{Cov.} (B_i, B_j)$$

Comme l'estimateur est sans biais on peut centrer les covariances d'où :

$$B_i B_j = \frac{1}{[K(0)]^2} S_{i\ell} S_{j\ell} \iint h(x) h(y) Z(x) Z(y) f^\ell(x) f^\ell(y) dx dy$$

Comme :

$$E \{ B_i B_j \} = \beta_{ij}$$

d'où :

$$\beta_{ij} = \frac{S_{i\ell} S_{j\ell}}{[K(0)]^2} \iint c(x, y) f^\ell(x) f^\ell(y) h(x) h(y) dx dy$$

On peut alors comparer les résultats sur des exemples. Pour le cas d'un variogramme linéaire et d'une dérive quadratique on obtiendra par exemple :

$$D^2(A_1) = \frac{1}{R} \quad \beta_{11} = D^2(B_1) = \frac{6}{5} \frac{1}{R}$$

$$D^2(A_2) = \frac{3}{4R^3} \quad \beta_{22} = D^2(B_2) = \frac{15}{14R^3}$$

On remarque qu'en plus d'une amélioration de la précision on obtient une simplification des formules dans le cas optimal.

3) Condition d'équivalence entre les moindres carrés et l'estimation optimale.

Montrons que les conditions d'universalité correspondant à un estimateur sans biais sont vérifiées

$$B_j = \int \lambda_j(dx) Z(x)$$

avec : $\lambda_j(dx) = \text{mesure de densité}$ $\frac{S_{j\ell}}{K(0)} f^\ell(x) h(x)$

La condition d'universalité s'écrit :

$$\int \lambda_j(dx) f^\ell(x) = \delta_j^\ell$$

elle est effectivement remplie :

$$\frac{1}{K(0)} S_{j\ell} \int f^\ell(x) f^\ell(x) h(x) dx = \frac{S_{j\ell}}{K(0)} T^\ell K(0) = \delta_j^\ell$$

La condition d'optimalité s'exprimait par :

$$\int \lambda_j(dx) c(x, y) = \mu_{j\ell} f^\ell(y) \quad \forall y \in S$$

ce qui impose dans ce cas l'équation fonctionnelle :

$$\frac{S_{j\ell}}{K(0)} \int f^\ell(x) c(x, y) dx = \mu_{j\ell} f^\ell(y) \quad \forall y \in S$$

Ceci ressemble beaucoup à l'équation des fonctions propres d'un opérateur. Rappelons que f est dite fonction propre d'un opérateur $\mathcal{A}$

si : $\mathcal{A} f = \lambda f$

Dans le cas présent l'opérateur $\mathcal{A}$ a pour noyau la covariance $C(x, y)$

$$\varphi(y) = \mathcal{A} f = \int_S C(x, y) f(x) dx$$

D'où l'équation définissant la fonction propre de $\mathcal{A}$

$$\int_S C(x, y) f(x) dx = \lambda f(y) \quad \forall y \in S$$

En fait dans le cas présent nous n'avons pas une fonction f mais une combinaison linéaire de fonctions f^l

si : $\varphi^l = \mathcal{A} f^l$

alors :

$$\frac{S_{jl}}{K(0)} \varphi^l = \mu_{jl} f^l \quad \text{où} \quad \boxed{\varphi^l = M_s^l f^l}$$

Pour que les moindres carrés soient optimaux, il faut et il suffit donc que les fonctions f^l soient des combinaisons linéaires des fonctions propres de l'opérateur de noyau $C(x, y)$

4) Cas particulier où les conditions d'équivalence sont vérifiées.

$$\boxed{\mathcal{A} = I}$$

alors :

$$\mathcal{A} f = \lambda f \quad \forall f$$

C'est une propriété caractéristique d'un opérateur ayant comme noyau la mesure de Dirac.

$$C(x - y) = \delta(x - y)$$

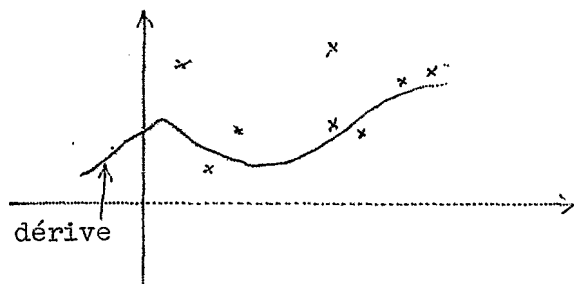
On devrait d'ailleurs écrire plus correctement :

$$C(h) dh = \delta(h)$$

C'est l'effet de pépite à l'état pur.

$$\mathcal{A} f = \int f(x) C(x - y) dx = \int f(x) \delta_y(dx) = f(y)$$

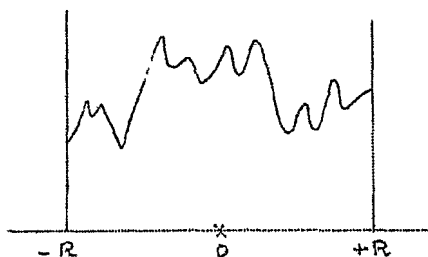
$\delta_y(dx)$ = mesure de Dirac placée au point y



Cela signifie que le phénomène est constitué d'une dérive sur laquelle viennent se placer des erreurs aléatoires du type erreur de mesure.

IV - EXERCICE

Calcul du variogramme des résidus dans le cas d'un variogramme linéaire et d'une dérive quadratique.



On se place à une dimension sur un segment

$$[-R, +R]$$

Dans le cas d'un variogramme linéaire

$$\gamma(h) = |h|, \text{ on a déjà formé les}$$

estimateurs optimaux d'une dérive quadratique.

$$\text{On a : } m^{\#}(x) = A_1 f^1(x) + A_2 f^2(x)$$

$$\text{Avec : } f^1(x) = x \quad f^2(x) = x^2$$

$$\mu_{11} = \frac{1}{R} \quad \mu_{12} = \mu_{21} = 0 \quad \mu_{22} = \frac{3}{4R^3}$$

$$\begin{cases} A_1 = \frac{1}{2R} [Z(R) - Z(-R)] \\ A_2 = \frac{3}{4R^2} [Z(R) - Z(-R)] - \frac{3}{2R^2} \bar{Z} \end{cases}$$

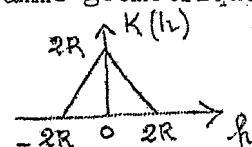
$$\text{avec } \bar{Z} = \frac{1}{2R} \int_{-R}^{+R} Z(x) dx$$

On rappelle que dans le cas d'un segment $[-R, +R]$ le covariogramme géométrique est la fonction triangle de la forme.

$$K(h) = 2R - |h| \quad \text{avec} \quad |h| \leq 2R$$

On calcule

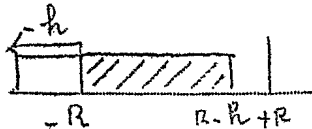
$$E \{ \gamma^*(h) \}$$



a) Calcul de $\overline{\gamma}(h)$

On a :

$$\begin{aligned} 2\overline{\gamma}(h) &= \frac{1}{K(h)} \int_{-R}^{R-h} \gamma(h) k(x) k(x+h) dx \\ &= \frac{1}{2R-h} \int_{-R}^{R-h} \gamma(h) d(x) = h \frac{2R-h}{2R-h} = h \end{aligned}$$



$$\boxed{2\overline{\gamma}(h) = |h|}$$

b) Calcul des coefficients T^{ij}

$$T^{11} = \frac{1}{K(h)} \int_{-R}^{R-h} h^2 k(x) k(x+h) dx = \frac{1}{K(h)} \int_{-R}^{R-h} h^2 dx = \boxed{h^2 = T^{11}}$$

$$\begin{aligned} T^{12} &= \frac{1}{K(h)} \int_{-R}^{R-h} h^2 (2x+h) k(x) k(x+h) dx \\ &= \frac{h^2}{K(h)} \int_{-R}^{R-h} (2x+h) dx = \frac{h^2}{K(h)} \left[x^2 + hx \right]_{-R}^{R-h} = \boxed{0 = T^{12}} \end{aligned}$$

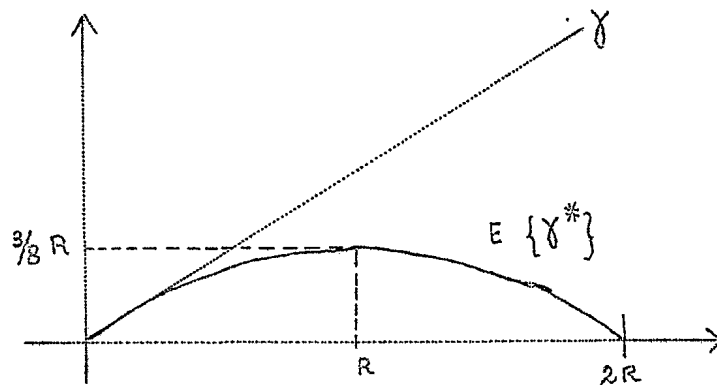
$$\begin{aligned} T^{22} &= \frac{1}{K(h)} \int_{-R}^{R-h} h^2 (2x+h)^2 k(x) k(x+h) dx \\ &= \frac{h^2}{K(h)} \int_{-R}^{R-h} (4x^2 + 4xh + h^2) dx = \boxed{\frac{h^2}{3} (2R-h)^2 = T^{22}} \end{aligned}$$

d'où :

$$2E\{\gamma^*(h)\} = 2h - \frac{h^2}{R} - \frac{3h^2}{4R^3} \left[\frac{h^2}{3} - \frac{4R}{3}h + \frac{4R^2}{3} \right]$$

$$\boxed{E\{\gamma^*(h)\} = h - \frac{h^2}{R} + \frac{1}{2} \frac{h^3}{R^2} - \frac{1}{8} \frac{h^4}{R^3}}$$

On a :



On obtient un variogramme plat qui selon l'échelle sous laquelle on l'observe pourrait faire croire que les résidus sont indépendants.

Au voisinage de l'origine le comportement est non altéré, puis la courbe s'aplatit et on trouve une valeur nulle au dernier point expérimental. Avec la méthode des moindres carrés on obtiendrait un résultat analogue.

Il y a des biais très importants, ainsi si l'on a l'idée "à priori" d'être devant une dérive sur laquelle viennent se superposer des variations indépendantes (erreurs de mesure), en construisant le variogramme expérimental son aplatissement apportera à tort l'apparence d'une confirmation.

Il y a donc lieu d'être très prudent.

Remarquons que la valeur nulle en $2R$, c'est-à-dire pour le couple $[-R, +R]$ était prévisible par simple application des formules.

$$[Z(R) - m^*(R)] - [Z(-R) - m^*(-R)] = 0$$

QUINZIEME CHAPITRE - KRIGEAGE UNIVERSEL

I - POSITION DU PROBLEME

On se propose d'estimer

$$- \int p(dx) Z(x) \text{ avec support de } \mu \cap S = \emptyset$$

ou $- Z(x) \text{ en } x \notin S$

On peut d'ailleurs ramener la résolution de ce dernier cas à celle du précédent en prenant :

$$p(dx) = \text{mesure de Dirac en } x.$$

On traitera parallèlement le cas discret et le cas continu.

L'estimation de $Z = \int p(dx) Z(x)$ se limite à la recherche du meilleur estimateur linéaire.

$$Z^* = \lambda^\alpha Z_\alpha$$

$$(Z^* = \int_S \lambda(dx) Z(x))$$

II - KRIGEAGE UNIVERSEL DANS LE CAS DES HYP. 1

Rappelons que :

$$\text{Hyp. 1} \quad \begin{cases} \exists \text{ espérance mathématique } m(x) = a_1 f^1(x) \\ \exists \text{ covariance } C(x, y) \end{cases}$$

1) Universalité

Il nous faut exprimer que :

$$E(Z - Z^*) = 0 \quad \forall a_1$$

On a :

$$E(Z) = \int p(dx) a_1 f^1(x)$$

$$E(Z^*) = \lambda^\alpha E(Z_\alpha) = \lambda^\alpha a_1 f^1(x_\alpha) = \lambda^\alpha a_1 f_\alpha^1$$

L'égalité devant s'effectuer $\forall a_1$ on identifie les facteurs :

$$\lambda^\alpha f_\alpha^1 = \int p(dx) f^1(x) = b^1$$

$$\left(\int \lambda(dx) f^l(x) = b^l \right)$$

Les b^l sont des quantités connues.

2) Optimalité

On cherche l'estimateur qui conduit à la plus petite variance d'estimation.

$$D^2(Z - Z^*) = \sigma_Z^2 - 2 \sigma_{Z^*} + \sigma_{Z^*}^2$$

Toutes les variances introduites existent car nous sommes dans le cadre de l'Hyp. 1.

$$\sigma_Z^2 = \iint p(dx) p(dy) C(x, y)$$

$$\sigma_{ZZ^*} = \lambda^\alpha \sigma_{Z, \alpha} \quad \text{avec} \quad \sigma_{Z, \alpha} = \int p(dx) C(x, x_\alpha)$$

$$\sigma_{Z^*}^2 = \lambda^\alpha \lambda^\beta \sigma_{\alpha\beta}$$

Donc :

$$D^2(Z - Z^*) = \sigma_Z^2 - 2 \lambda^\alpha \sigma_{Z, \alpha} + \lambda^\alpha \lambda^\beta \sigma_{\alpha\beta}$$

On exprime classiquement, à l'aide des multiplicateurs de Lagrange que les dérivées par rapport à λ^α sont des combinaisons linéaires des contraintes

$$-2 \sigma_{Z, \alpha} + 2 \lambda^\beta \sigma_{\alpha\beta} = 2 \mu_l f_\alpha^l$$

D'où :

$$\lambda^\beta \sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{Z, \alpha} + \mu_l f_\alpha^l$$

$$\left(\int \lambda(dx) C(x, y) = \int p(dx) C(x, y) + \mu_l f^l(y) \quad \forall y \in S \right)$$

On obtient ainsi les équations du Krigeage universel.

3) Krigeage ponctuel

On remplace dans ce cas $p(dx)$ par la mesure de Dirac placée au point z où on veut procéder à l'estimation. On obtient :

- cas discret :

$$\begin{cases} \lambda^\beta \nabla_{\alpha\beta} = C(z, x_\alpha) + \mu_\ell f_\alpha^\ell \\ \lambda^\alpha f_\alpha^\ell = b^\ell = f^\ell(z) \end{cases}$$

- cas continu :

$$\begin{cases} \int_S \lambda(dy) C(x, y) = C(z, y) + \mu_\ell f^\ell(y) \\ \int_S \lambda(dx) f^\ell(x) = b^\ell = f^\ell(z) \end{cases}$$

Le Krigeage ponctuel constitue un procédé d'interpolation rigoureux, si on veut estimer $Z(z)$ en un des points expérimentaux, on retrouve la valeur expérimentale. Cela vient du procédé par combinaison linéaire des valeurs aux points expérimentaux.

On le vérifie :

- dans le cas discret

$$z = x_{\gamma_0} \quad \gamma_0 = \text{indice particulier}$$

on a :

$$\begin{cases} \lambda^{\gamma_0} = 1 \\ \lambda^\beta = 0 \end{cases} \quad \text{pour } \beta \neq \gamma_0$$

d'où le système :

$$\begin{cases} \nabla_{\alpha\gamma_0} = \nabla_{\alpha\gamma_0} + \mu_\ell f_\alpha^\ell \\ 1 + f_{\gamma_0}^\ell = f_{\gamma_0}^\ell \end{cases}$$

On prendra donc :

$$\mu_\ell = 0 \Rightarrow z^*(x_{\gamma_0}) = z_{\gamma_0}$$

- dans le cas continu

On estime en : $z = y_0 \in S$

On choisit une mesure de Dirac placée en y_0 :

$$\lambda(dx) = \delta_{y_0}(dx)$$

$$\text{d'où : } C(y_0, y) = C(y_0, y) + \mu_1 f^1(y) \quad \forall y \in S$$

$$f^1(y_0) = f^1(y_0)$$

On prendra donc :

$$\mu_1 = 0 \Rightarrow Z^*(y_0) = Z(y_0)$$

Il y a égalité entre l'estimateur et l'estimé.

4) Expression de la variance minimale

La condition d'optimalité s'exprime par :

$$\lambda^\alpha \lambda^\beta \nabla_{\alpha\beta} = \lambda^\alpha \nabla_{z,\alpha} + \mu_\ell \lambda^\alpha f_\alpha^\ell$$

On connaît les paramètres μ_1 comme sous-produit de résolution du système. On obtient la variance de Krigeage universel

$$\boxed{\nabla_u^2 = \nabla_z^2 - \lambda^\alpha \nabla_{z,\alpha} + \mu_\ell \lambda^\alpha f_\alpha^\ell}$$

$$(\nabla_u^2 = \nabla_z^2 - \iint \lambda(dx) p(dy) C(x,y) + \mu_\ell \int \lambda(dx) f^\ell(x))$$

Dans l'intégrale double, $x \in S$ et $y \in$ au domaine à estimer

$$\begin{aligned} \text{Or : } \lambda^\alpha f_\alpha^\ell &= b^\ell \\ \left(\int_S \lambda(dx) f^\ell(x) &= b^\ell \right) \end{aligned}$$

$$\text{d'où : } \nabla_u^2 = \nabla_z^2 - \lambda^\alpha \nabla_{z,\alpha} + \mu_\ell b^\ell$$

$$(\nabla_u^2 = \nabla_z^2 - \iint \lambda(dx) p(dy) C(x,y) + \mu_\ell b^\ell)$$

III - KRIGEAGE UNIVERSEL DANS LE CAS DES HYP. 2

La dérive n'est définie qu'à une constante près, on estime :

$$a_1 f^1(x) \quad 1 \in \{1, 2, \dots, n\}$$

On emploie les mêmes raisonnements que précédemment, mais il faut s'assurer que $Z - Z^*$ admet espérance et variance.

$$\begin{aligned} Z - Z^* &= \int p(dx) Z(x) - \int \lambda(dx) Z(x) \\ &= \int (p(dx) - \lambda(dx)) Z(x) \end{aligned}$$

Cette combinaison linéaire n'a d'espérance ou de variance finie que si la somme de ses coefficients est nulle :

$$\int \lambda(dx) = \int p(dx) = A$$

On prend en général $A = 1$, ce qui correspond au cas de la moyenne pondérée
Donc :

- cas continu :

$$\int \lambda(dx) = \int p(dx) = 1$$

- cas discret :

$$\sum_{\alpha} \lambda^{\alpha} = 1$$

On obtient la même condition d'universalité, on explicite la condition d'optimalité.

$$\begin{aligned} D^2(Z - Z^*) &= - \lambda^{\alpha} \lambda^{\beta} \gamma_{\alpha\beta} + 2 \lambda^{\alpha} \int p(dy) \gamma(y, x_{\alpha}) \\ &\quad - \iint p(dx) p(dy) \gamma(x, y) \end{aligned}$$

La dernière expression est une constante calculable donnée.
On n'exprime que l'expression minimale compte tenu de :

$$\begin{cases} - \text{universalité} \\ - \sum_{\alpha} \lambda^{\alpha} = 1 \end{cases}$$

La dernière condition introduit un paramètre de Lagrange de plus.
On obtient :

- cas discret :

$$\begin{cases} \lambda^\beta \gamma_{\alpha\beta} = \int \gamma(x_\alpha, y) p(dy) - \mu_\ell f_\alpha^\ell - \mu_0 \\ \lambda^\alpha f_\alpha^\ell = b^\ell \\ \sum_\alpha \lambda^\alpha = 1 \end{cases}$$

(ou une autre constante)

- cas continu

$$\begin{cases} \int \lambda(dx) \gamma(x, y) = \int \gamma(y, x) p(dx) - \mu_\ell f^\ell(y) - \mu_0 \quad \forall y \in S \\ \int \lambda(dx) f^\ell(x) = b^\ell \\ \int \lambda(dx) = 1 \end{cases}$$

Pour la variance on a la simplification habituelle due à l'optimum d'une forme quadratique.

$$\begin{aligned} \sigma_u^2 &= \lambda^\alpha \int \gamma(x_\alpha, y) p(dy) - \iint p(dx) p(dy) \gamma(x, y) \\ &\quad + \mu_\ell b^\ell + \mu_0 \end{aligned}$$

IV - LIAISON ENTRE LE KRIGEAGE SIMPLE ET LE KRIGEAGE UNIVERSEL

S'il n'existait pas de dérive, on aurait un Krigeage simple, et on obtiendrait un estimateur :

$$z_K = \int_S \lambda_K(dx) z(x)$$

qui vérifierait :

$$\int_S \lambda_K(dx) c(x, y) = \int_S p(dx) c(x, y) \quad \forall y \in S$$

Evidemment, sans terme de Lagrange car on n'a pas besoin dans ce cas de condition d'universalité.

On se place dans le cas d'un krigeage ponctuel pour simplifier les notations.

Un krigeage simple de $Z(z)$ pour $z \notin S$ est alors réalisé par le système :

$$(1)' \quad \int_S \lambda_K(dx) C(x,y) = C(z,y) \Rightarrow Z_K = \int_S \lambda_K(dx) Z(x)$$

Un krigeage universel de la même entité est alors réalisé par :

$$\left. \begin{aligned} (1) \quad \int_S \lambda(dx) C(x,y) &= C(z,y) + \frac{1}{l} f^l(y) \quad \forall y \in S \\ (2) \quad \int_S \lambda(dx) f^l(x) &= b^l = f^l(z) \end{aligned} \right\} \Rightarrow Z^* = \int_S \lambda(dx) Z(x)$$

Dans ce cas, on peut en fait résoudre le problème en ne se servant que de (2) sans s'intéresser à l'estimation de la dérive. Il ne faut cependant pas croire que l'estimation de la dérive est sans influence sur l'estimateur obtenu, en fait :

$$(1)' \Rightarrow Z_K$$

$$(1) \Rightarrow \boxed{Z^* = Z_K + Z_D}$$

Où Z_D est la correction à apporter, à l'estimateur du krigeage simple, due à la dérive.

On peut poser :

$$Z_D = \int_S \lambda_D(dx) Z(x)$$

et l'on aura :

$$\lambda(dx) = \lambda_K(dx) + \lambda_D(dx)$$

On s'intéresse alors aux équations qui doivent vérifier λ_D .

On remplace dans l'équation (1) λ par $\lambda_k + \lambda_D$
d'où :

$$\int_S \lambda_D (dx) C(x, y) = \mu_1 f^1(y)$$

La condition d'universalité (2) donne :

$$\int_S \lambda_D (dx) f^l(x) = f^l(z) - \int_S \lambda_k (dx) f^l(x)$$

On peut poser :

$$b^l = f^l(z) - \int_S \lambda_k (dx) f^l(x)$$

La mesure λ_D vérifie donc :

$$(4) \begin{cases} \int_S \lambda_D (dx) C(x, y) = \mu_2 f^l(y) \\ \int_S \lambda_D (dx) f^l(x) = b^l \end{cases}$$

C'est un système identique à celui obtenu pour l'estimation optimale de la dérive. On sait que dans ce cas on avait obtenu un estimateur optimal :

$$m^{\#}(x_0) = A_\ell b^l \quad \text{avec} \quad A_i = \int \lambda_i (dx) Z(x)$$

Donc en résolvant le système (4) nous obtiendrons :

$$\lambda_D = \lambda_\ell b^l ; \quad \text{d'où : } Z_D = A_\ell b^l$$

mais avec dans ce cas des b^l différents de ceux utilisés pour l'estimation optimale de la dérive :

$$b^l = - \int_S \lambda_k (dx) f^l(x) + f^l(z)$$

On a donc :

$$\begin{aligned} Z^{\#} &= Z_k + A_1 b^1 \\ &= A_1 f^1(z) + Z_k - A_\ell \int_S \lambda_k (dx) f^l(x) \end{aligned}$$

On remarque que :

$$A_1 f^l(z) = \text{valeur de la dérive optimale}$$

En remplaçant Z_k par sa valeur on trouve :

$$Z^{\#} = A_1 f^l(z) + \int \lambda_K(dx) [Z(x) - A_1 f^l(x)]$$

d'où :

$$Z^{\#}(z) - A_1 f^l(z) = \int \lambda_K(dx) [Z(x) - A_1 f^l(x)]$$

Si on connaissait les coefficients a_1 vrais, on se ramènerait dans ce cas à un krigeage simple de la variable centrée qui donnerait :

$$Z^{\#}(z) - a_1 f^l(z) = \int \lambda_K(dx) [Z(x) - a_1 f^l(x)]$$

On voit donc de ce fait :

- que l'on peut considérer que le krigeage universel se ramène au cas du krigeage simple des résidus estimés de façon optimale,

- qu'il est légitime de kriger les résidus estimés de la même manière que les vrais résidus.

Ce résultat s'étend d'ailleurs aux variances :

$$\sigma_U^2 = \sigma_K^2 + \sigma_D^2$$

En effet, si l'on considère :

$$Z^{\#} - Z(z) = Z_k - Z(z) + Z_D$$

On obtient ici la somme de deux termes de covariance nulle car :

$$\int_S \lambda_K(dx) C(x, y) = C(z, y)$$

$$\text{s'écrit : } \text{Cov}(Z_k, Z(y)) = \text{Cov}(Z(z), Z(y))$$

$$\text{d'où : } \text{Cov}(Z_k - Z(z), Z(y)) = 0 \quad \forall y \in S$$

$\int_S v(dy) Z(y)$ étant une combinaison linéaire de $Z(y)$,

nous avons :

$$\text{Cov} (Z_k - Z(z), \int_S v(dy) Z(y)) = 0$$

En particulier pour $v = \lambda_D$, on obtient :

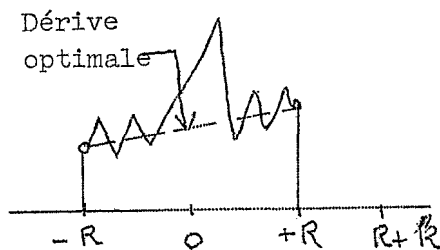
$$\text{Cov} (Z_k - Z, Z_D) = 0$$

On en déduit le résultat d'additivité des variances.

V - EXERCICE

Krigeage ponctuel avec dérive parabolique en présence d'un variogramme linéaire.

On désire kriger la valeur $Z(z)$ en $z = R+h$ à l'aide de la connaissance du phénomène entre $-R$ et $+R$



Plutôt que de résoudre directement le système du krigeage universel on se propose d'utiliser le théorème d'additivité.

- krigeage simple $Z_k \Rightarrow$ variance σ_k^2

- krigeage universel

$$Z_U = Z_k + Z_D \Rightarrow \text{variance } \sigma_U^2 = \sigma_k^2 + \sigma_D^2$$

1) Equations du krigeage simple

$$\begin{cases} \int_{-R}^{+R} \lambda_K(dx) |x-y| = |R+h-y| + \mu_0 \\ \int_{-R}^{+R} \lambda_K(dx) = 1 \end{cases}$$

Si l'on prend

$$\lambda_k = \delta_R(dx)$$

On aura $\int_{-R}^{+R} \lambda_k(dx) = 1$

$$\int_{-R}^{+R} \delta_R(dx) |x-y| = |R+k-y| + \mu_0$$

ou $R-y = R+k-y + \mu_0$

$$\mu_0 = -k$$

Le variogramme linéaire caractérise un processus de Poisson ou un mouvement Brownien. Prendre la mesure de Dirac en R revient à prendre en compte la propriété Markovienne d'un tel processus selon laquelle l'estimation est égale à la dernière réalisation (indépendance entre la droite et la gauche d'un point).

On a :

$$Z_k = Z(R)$$

$$\nabla_k^2 = D^2(Z - Z_k) \quad \text{où} \quad Z = Z(R+k)$$

$$= E \left\{ [Z(R+k) - Z(R)]^2 \right\} = 2\gamma(R+k-R) = 2\gamma(k)$$

$$\nabla_k^2 = 2k$$

2) Krigage universel

Si l'on connaissait la vraie valeur de la dérive on aurait :

$$\begin{aligned} Z^* - (a_1 Z + a_2 Z^2) &= \int \lambda_k(dx) [Z - (a_1 Z + a_2 Z^2)] \\ &= Z(R) - a_1 R - a_2 R^2 \end{aligned}$$

$$\text{car : } \lambda_k = \delta_R(dx)$$

Cette expression se transpose dans le cas du krigeage universel car on sait que l'on a le droit de kriger (simplement) les résidus estimés

$$Z_U - (A_1 z + A_2 z^2) = Z(R) - A_1 R - A_2 R^2$$

avec $z = R + k$, on a :

$$Z_U = A_1 k + A_2 (k^2 + 2 R k) + Z(R)$$

et :

$$\nabla_U^2 = D^2(Z(R)) + D^2[A_1 k + A_2 (k^2 + 2 R k)]$$

Puisqu'il a été prouvé théoriquement que ces deux termes étaient de covariance nulle :

$$D^2(Z(R)) = \nabla_k^2 = 2k$$

$$D^2[A_1 k + A_2 (k^2 + 2 R k)] = \mu_{11} k^2 + \mu_{22} (k^2 + 2 R k)^2$$

car : $\mu_{ij} = \text{cov}(A_i, A_j)$

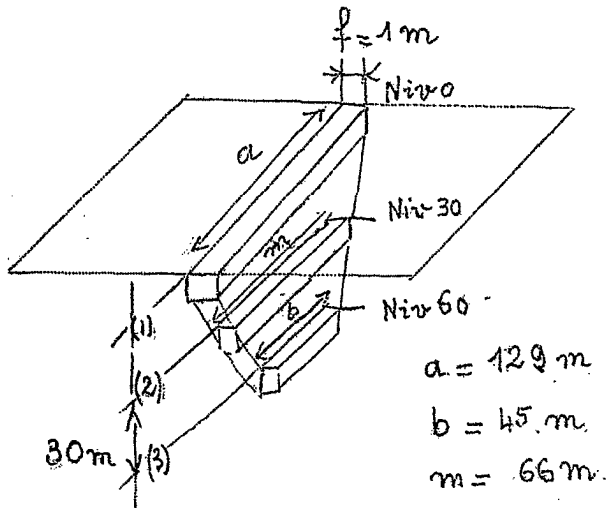
et dans ce cas $\mu_{11} = \mu_{22} = 0$

D'où :

$$\nabla_U^2 = 2k + \frac{4k^2}{R} + \frac{4k^3}{R^2} + \frac{3k^4}{4R^3}$$

La puissance 4 de k montre que cette variance se détériore beaucoup plus vite lorsqu'on s'éloigne du point R que lorsqu'on est dans le cas où n' dérive.

SEIZIEME CHAPITRE - EXEMPLE DE L'UTILISATION DE LA GEOSTATIQUE



On reconnaît un gisement de Wolframite (W_2O_3) qui se présente sous deux formes :

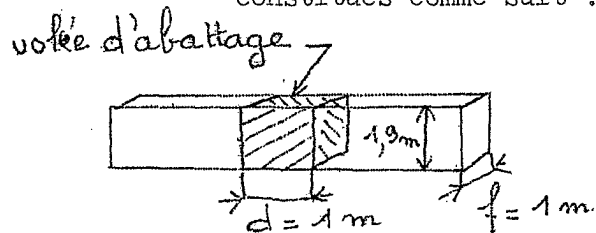
- ciment
- pépitique (effet prépondérant)

La partie à exploiter se compose d'un filon trapézoïdal de largeur

$$f = 1\text{ m}$$

On le reconnaît par des volées d'abattage successives selon (1), (2) et (3) aux niveaux 0 - 30 et 60 m.

Les percements de reconnaissance étant constitués comme suit :



On désire connaître la variance d'estimation de l'accumulation du gisement a , en m / pourcentage de teneur = $m \times \text{‰}$

On dispose de :

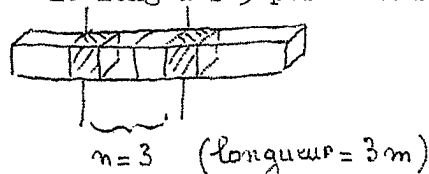
- la variance statistique expérimentale ∇^2 des volées (considérées dans leur ensemble) dans le trapèze reconnu

$$\nabla^2 = 14,44$$

- l'accumulation moyenne expérimentale

$$a_m = 3,02\text{ m} \times \text{‰}$$

- du variogramme expérimental γ_{exp} construit à partir des volées, qui dépend de n = distance (exprimée en nombre de volées) entre deux volées le long des 3 percements de reconnaissance.



n	$\gamma_{\text{exp.}}(n)$
1	5,88
2	7,82
3	9,12
4	8,54
5	10,47
6	10,24
7	10,84
8	11,03
9	12,07

I - VARIOGRAMME DE LA REGULARISEE A UNE VOLEE D'ABATTAGE DU SCHEMA DE WIJSIEN PONCTUEL

Schéma de Wijsien ponctuel $\gamma(r) = 3 \alpha \text{Log } r$
ou $\gamma(h) = 3 \alpha \text{Log } |h|$

Nous savons que le variogramme de la régularisée de ce schéma sur un volume v est :

$$\bigcirc_v \quad \gamma_v(h) = \frac{3\alpha}{v^2} \iint_v \text{Log } |h+x-y| dx dy$$

Si $|h| > \dim(v)$, alors :

$$\gamma_v(h) = 3\alpha \left[\text{Log } \frac{|h|}{l} + \frac{3}{2} \right]$$

où l est l'équivalent linéaire de v , donné par la formule :

$$F(v) = F(l)$$

$$\text{avec } F(v) = \frac{1}{v^2} \int_v dx \int_v \text{Log } |y-x| dy$$

Si un effet de pépite est présent dans le variogramme ponctuel nous aurons :

$$\gamma'(h) = C - C(h) + \gamma(h) = \gamma_1(h) + \gamma(h)$$

$$\gamma'_v(h) = \frac{1}{v^2} \gamma_1 * k * \overset{v}{k} - B + \gamma_v(h)$$

si $\dim v > a$
et $|h| > \dim v$

B : constante trouvée pour $h = 0$

$$\gamma'_v(h) = \frac{1}{v^2} \iint_{vv} c(x-y) dx dy - \underbrace{\frac{1}{v^2} \iint_{vv} c(h+x-y) dx dy}_{= 0 \text{ car } |h| > \dim v > a} + \gamma_v(h)$$

(portée effet de pépité)

$$\gamma'_v(h) = \frac{A}{v} + \gamma_v(h) = \underset{C_0}{C_{ste}} + \gamma_v(h)$$

$$= 3\alpha \left[\log \frac{|h|}{1} + \frac{3}{2} \right] + C_0 \quad (|h| > \dim v)$$

Remarque :

Si $|h| \gg \dim v$

alors $\gamma_v(h) \simeq \gamma(h)$

et $\gamma'_v(h) = C_0 + \gamma(h)$

1) Ajustement à la réalité du schéma de Wijsien

On observe expérimentalement sur papier semi-logarithmique que l'on peut raisonnablement ajuster la réalité à un modèle de Wijsien.

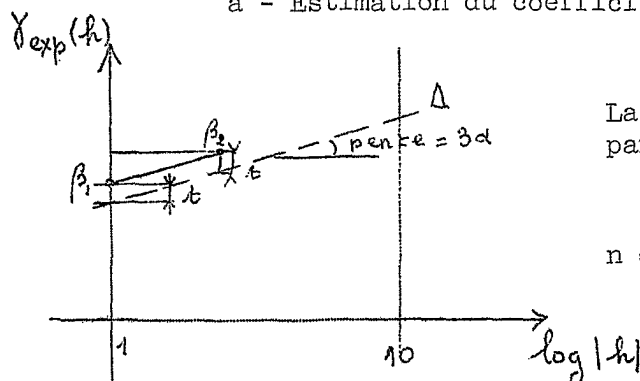
Il faut alors estimer les paramètres :

$$\begin{cases} 3\alpha & = \text{dispersion} \\ C_0 & = \text{constante de pépité} \end{cases}$$

Le variogramme ajusté sera :

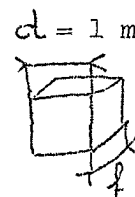
$$\gamma_v^*(h) = 3\alpha \left(\log \frac{|h|}{1} + \frac{3}{2} \right) + C_0$$

a - Estimation du coefficient de dispersion α



La droite Δ ajustée est sensiblement parallèle à $\beta_1 \beta_2$

$$n = \frac{|h|}{d} = |h|$$



$$\beta_1 - n = |h| = 1 \quad y_{\beta_1} = 3\alpha \log 1 - 3\alpha \log l + \frac{9\alpha}{2} + C_0 + t$$

$$\beta_2 - n = |h| = 2 \quad y_{\beta_2} = 3\alpha \log 2 - 3\alpha \log l + \frac{9\alpha}{2} + C_0 + t$$

d'où :

$$y_{\beta_1} - y_{\beta_2} = 3\alpha \log 2 = 2$$

$$3\alpha = \frac{2}{\log 2}$$

$$3\alpha^* = 2,8$$

b - Estimation de la constante de pépité C_0

Nous savons que la variance d'extension d'une volée dans le filon trapézoïdal en utilisant le covariogramme ajusté est, dans le cas où il n'y a pas d'effet de pépité :

$$\nabla^2(v/V) = 3\alpha \log \frac{E}{l}$$

E = équi. lin. de V

l = équi. lin. de v

v = volée

V = filon trapézoïdal

Dans le cas où il y a effet de pépité :

$$\begin{aligned} \nabla'^2(v/V) &= \nabla^2(v/V) + \frac{1}{v^2} \int_{\tilde{v}}^{dsc} \int_{\tilde{v}}^c c(x-y) dy \\ &\quad \text{(variance de pépité)} \\ &= \nabla^2(v/V) + C_0 \end{aligned}$$

Nous connaissons la valeur expérimentale de cette variance

$$\nabla^2 = 14,44$$

On en déduit une estimation de C_0 par :

$$\nabla^2 (v/V) + C_0^* = 14,44$$

On détermine

- l'équivalent linéaire de la volée (Poly - abaque n°1, page 73)



$$a = 1,9$$

$$b = \frac{1}{1} = 1$$

$$c = d = 1$$

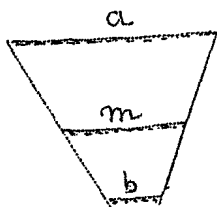
$$\frac{b}{a} = \frac{1}{1,9}$$

$$\frac{c}{b} = 1$$

$$l = \lambda a = 1,8 \times 1,9$$

$$l = 3,5 \text{ m}$$

- l'équivalent linéaire du filon trapézoïdal, considéré comme d'épaisseur négligeable.



$$E^2 = L^2 + m^2 + e^2 - \frac{1}{3} \frac{e^2 m^2}{L^2} + 2S$$

$$\text{avec } L = \frac{a+b}{2}$$

$$e = \frac{a-b}{2}$$

$$E = 150 \text{ m}$$

d'où :

$$C_0^* = 4,9$$

On peut vérifier que pour :

$$n = |h| = 1 \text{ on a bien } \gamma_{exp}^{(1)} = 3 \alpha \frac{3}{2} + C_0$$

On a :

$$\gamma_{exp}(h) \approx \gamma_v^*(h) = 2,5 \left(\log \frac{|h|}{3,5} + \frac{3}{2} \right) + 4,9$$

2) Variance d'estimation de l'accumulation par les lignes de percées.

On suppose les tranchées de reconnaissance parfaitement connues et on cherche ∇_{ext}^2 des galeries à la formation.

Dans ces conditions la variance d'estimation ne comporte qu'un terme de tranche.

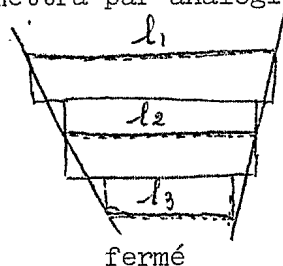
On sait que :

fermé $\begin{array}{c} (n+1) \\ \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \end{array}$

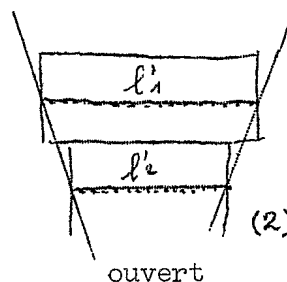
centré $\begin{array}{c} (n') \\ \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \end{array}$

conduisent à la même variance d'estimation dès que $n \geq 3$.

On admettra par analogie que :



et



admettent la même variance d'estimation.

$$L = l'_1 + l'_2 = l_2 + l_{1/2} + l_{3/2} = 153$$

Nous savons que dans le cas de la figure (2) et pour un schéma de Wijsien, on a :

$$\sigma_{est}^2 = \alpha \frac{\pi}{2} \frac{S}{L^2}$$

d'où : $\sigma_{\tau}^2 = 0,335$ (terme de tranche)

En fait pour une accumulation moyenne a , la variance d'estimation est :

$$\frac{\sigma_{\tau}^2}{a^2} = \frac{\sigma_{\tau}^2}{(3,02)^2} = 0,04 \quad \frac{\sigma_{\tau}}{a} = 0,2$$

(valeur expérimentale) et $\frac{2\sigma}{a} = 0,4 = 40\%$

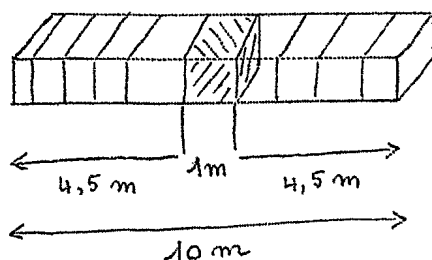
(mesure de la précision par convention)

III - VARIANCE D'ESTIMATION EN SUPPOSANT QUE L'ON A ANALYSE QU'UNE VOLÉE SUR 10

Les tranchées sont imparfaitement reconnues, nous aurons un terme de ligne

La volée v est représentative de sa zone d'influence $V = 10 v$

a - composante continue - Schéma de de Wijo seul.



$$\sigma_{ext(1)}^2 = -\frac{1}{v^2} \int_v \int_v \gamma(x-x') dx dx' \quad (1)$$

$$- \frac{1}{V^2} \int_v \int_v \gamma(x-x') dx dx' \quad (2)$$

$$+ \frac{2}{v-V} \int_v \int_v \gamma(x-x') dx dx' \quad (3)$$

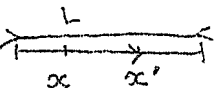
Il est préférable de s'aider des équivalents linéaires de v et V

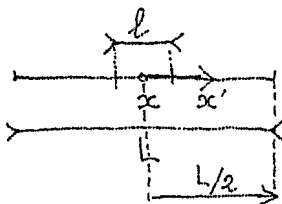
$$v \equiv 1$$

$$V \equiv L \simeq 12,4$$

Alors :

(1)  $3 \alpha \left(\log l - \frac{3}{2} \right) = F(l)$

(2)  $F(L) = 3 \alpha \left(\log L - \frac{3}{2} \right)$

(3) 

Comme $l \ll L$ on considère que l'on a :

$$\chi\left(\frac{L}{2}\right)$$

avec

$$\chi(h) = \frac{3\alpha}{h} \int_0^h \log x dx = 3\alpha (\log h - 1)$$

d'où :

$$\nabla_{ext(1)}^2 = 3\alpha \left[2 \left(\log \frac{12,4}{2} - 1 \right) - \log 12,4 + \frac{3}{2} - \log 3,5 + \frac{3}{2} \right]$$

$= 1,4$

b - Effet de pépite seul

$$\nabla_{ext(2)}^2 = A \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{V} \right) \begin{array}{l} \text{mais} \\ \text{comme} \\ V = 10v \\ + \text{terme } \frac{1}{vV} \simeq \text{terme en } \frac{1}{V} \end{array} \simeq \frac{A}{v} = C_0$$

d'où :

$$\nabla_1^2 = \nabla_{ext(1)}^2 + C_0 = 6,3$$

pour une zone d'influence

$$\text{Il y a : } m = \frac{129 + 66 + 45}{10} = 24$$

On sait que l'on peut faire comme si on avait une somme de v.a. indépendantes.

$$\sigma_p^2 = \frac{\sigma_1^2}{24}$$

$$\sigma_l^2 = 0,25$$

d'où :

$$\sigma^2 = \sigma_c^2 + \sigma_e^2 = 0,59$$

$$\frac{\sigma}{a} = 0,24$$

$$\frac{2\sigma}{a} = 0,48 = 48\%$$
