Fontainebleau C-53

# LECONS SUR LES FONCTIONS ALEATOIRES D'ORDRE 2

-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-

G. MATHERON

Mars 1972

# LECONS SUR LES FONCTIONS ALEATOIRES D'ORDRE 2

## Table des Matières


| | | |
|---|---|---|
| **Section 1 -** | **RAPPEL SUR LES ESPACES DE HILBERT** | 1 |
| 1-1 | Propriétés élémentaires | 1 |
| 1-2 | L'espace $L^2(\Omega,\mathcal{A},P)$ | 3 |
| 1-3 | La convergence forte | 7 |
| | P-1-7 (Théorème des projections) | 7 |
| | P-1-8 (Théorème de Riesz) | 8 |
| 1-4 | La convergence faible | 9 |
| | P-1-11 (Théorème de Banach-Steinhaus) | 11 |
| **Section 2 -** | **LES F.A. D'ORDRE 2** | 13 |
| 2-1 | Continuité en moyenne quadratique | 14 |
| 2-2 | L'espace $H(\Lambda)$ des combinaisons linéaires finies, et l'espace $H(Z)$. | 15 |
| 2-3 | L'intégrale stochastique | 16 |
| | a/ Caractérisation faible de l'intégrale | 17 |
| | b/ L'espace $M_c$ des mesures à support compact | 18 |
| | c/ Caractérisation forte de l'intégrale | 22 |
| 2-4 | La dérivation en moyenne quadratique | 25 |
| **Section 3 -** | **LES F.A. STATIONNAIRES D'ORDRE 2 (FAST)** | 27 |
| 3-1 | La covariance | 27 |
| 3-2 | Le groupe continu $U_h$ d'opérateurs unitaires | 29 |
| 3-3 | Les éléments invariants | 33 |
| 3-4 | Le théorème de Bochner | 35 |
| 3-5 | L'isomorphisme $\alpha : H(X) \to L^2(\mathbb{R}^n,\chi)$ | 38 |
| 3-6 | Le théorème ergodique | 41 |
| 3-7 | Analyse harmonique d'une FAST $U_xX$ | 43 |
| 3-8 | Analyse harmonique du groupe $U_h$ | 50 |

Table des Matières (Suite)

Section 4 - LES FONCTIONS ALEATOIRES INTRINSEQUES (FAI) 54

4-1 Le variogramme et la dérive 54

4-2 Structures des FAI et de leurs variogrammes 58

4-3 Applications 62

4-4 Les FAI dérivables et les gradients généralisés 66

Section 5 - EXERCICES 72

# LECONS SUR LES FONCTIONS ALEATOIRES D'ORDRE 2

Dans ce cours, nous supposons connues les définitions générales relatives aux fonctions aléatoires (F.A.). La première section est un rappel sur les espaces de Hilbert. Dans la seconde, on s'attache surtout à la construction de l'intégrale en moyenne quadratique; dans la troisième, on étudie les F.A. stationnaires d'ordre 2 du point de vue surtout de l'analyse harmonique. Une dernière section est consacrée à quelques généralisations (F.A. à accroissements stationnaires d'ordre 2 appelées aussi F.A. intrinsèques).

## Section 1 - RAPPEL SUR LES ESPACES DE HILBERT

### 1-1 Propriétés Elémentaires.

Soit H un espace vectoriel sur le corps des complexes $\mathbb{C}$ (ou, éventuellement, sur le corps des réels $\mathbb{R}$), et $<\ >$ une application de $H \times H$ dans $\mathbb{C}$ vérifiant les propriétés suivantes pour $X, Y, X_1, X_2 \in H$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ :

1/ $< X,Y > = \overline{< Y,X >}$

2/ $< \lambda X_1 + \mu X_2, Y > = \lambda < X_1, Y > + \mu < X_2, Y >$

3/ $< X, X > \geq 0$ et $< X, X > = 0 \Leftrightarrow X = 0$

On dira que $< X, Y >$ est le produit scalaire des éléments X et Y de H, et on posera $\|X\| = \sqrt{< X,X >}$ . On déduit alors des axiomes précédents l'inégalité de Schwarz :

$$|< X,Y >| \leq \|X\| \; \|Y\| \tag{1-1}$$

et l'inégalité triangulaire :

$$\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$$

Compte tenu de l'axiome 3/, $\| \ \|$ est donc une norme sur H. On dit qu'un espace vectoriel H normé par la norme ainsi associée à un produit scalaire est un espace préhilbertien. Si de plus H est <u>complet</u> pour la topologie associée a cette norme, on dit que H est un espace de Hilbert (on rappelle qu'un espace vectoriel normé H est complet si toute suite de Cauchy $X_n$ dans H - c'est-à-dire toute suite $X_n$ vérifiant $\|X_n - X_m\| \to 0$ pour n, $m \to \infty$ - converge vers une limite $X \in H$).

Les propriétés élémentaires suivantes valables dans un espace de Hilbert H seront d'un emploi constant :

<u>P-1-1</u> - $X_n \to X \Rightarrow \|X_n\| \to \|X\|$ (Continuité de la norme)

<u>P-1-2</u> - $X_n \to X \Rightarrow < X_n,Y > \to < X,Y >$ pour tout $Y \in H$

En effet, il suffit d'appliquer l'inégalité de Schwarz (1-1) qui donne :

$$|< X_n - X,Y >| \leq \|Y\| \; \|X_n - X\|$$

<u>P-1-3</u> - $X_n \to X$ et $Y_n \to Y \Rightarrow \lim\limits_{n,m} < X_n, Y_m > = < X,Y >$

En effet, on a :

$$< X_n, Y_m > = < X_n - X, Y_m > + < X, Y_m >$$

D'après P-1-2, $< X, Y_m >$ converge vers $< X, Y >$. D'autre part, d'après l'inégalité de Schwarz, on a $|< X_n - X, Y_m >| \leq \|X_n - X\| \sup_m \|Y_m\|$, et $\sup_m \|Y_m\|$ est borné d'après P-1-1. Donc $< X_n - X, Y_m >$ tend vers 0 et la propriété en résulte.

<u>P-1-4</u> (<u>Critère de Cauchy</u>) - Une suite $X_n$ dans H est convergente si et seulement si $\lim\limits_{n,m} < X_n, X_m >$ existe lorsque n et mttendent vers l'infini (et cette limite est alors $\|X\|^2$ avec $X = \lim X_n$).

La condition est nécessaire d'après P-1-3 appliquée avec $Y_n = X_m$. Inversement, si elle est vérifiée, la relation

$$\|X_n - X_m\|^2 = \|X_n\|^2 + \|X_m\|^2 - < X_n, X_m > - < X_m, X_n >$$

montre que $X_n$ est une suite de Cauchy, donc admet une limite X dans H. D'après P-1-3, on a bien $\lim\limits_{n,m} < X_n, X_m > = < X, X > = \|X\|^2$ .

## <u>1-2 L'espace $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$.</u>

Soit $\Omega$ un ensemble, $\mathcal{A}$ une $\sigma$-algèbre sur $\Omega$ et P une probabilité sur $\mathcal{A}$. On désigne par $\mathcal{L}^2(\Omega, \ , P)$ l'espace des fonctions f sur $\Omega$ à valeurs complexes mesurables pour $\mathcal{A}$ et vérifiant la condition :

$$\int |f(\omega)|^2 \, P(d\omega) < \infty$$

On peut munir $\mathcal{L}^2$ du produit scalaire défini par :

$$< f, g > = \int f(\omega) \, \overline{g(\omega)} \, P(d\omega)$$

Mais ce produit scalaire ne vérifie pas l'axiome 3, de sorte que

$< f,f >$ ne définit pas une norme (en effet, $< f,f > = 0$ entraine seulement $f = 0$ presque sûrement pour P). Mais, si l'on considère la relation $\mathcal{R}$ définie par $f \, \mathcal{R} \, g$ si $f = g$ p.s. ($f$ et $g \in \mathcal{L}^2$), on vérifie sans peine que $< f,g >$ dépend seulement des classes d'équivalence de f et g modulo $\mathcal{R}$. On désigne alors par $L^2(\Omega,\mathcal{A},P)$ l'espace quotient $\mathcal{L}^2/\mathcal{R}$ dont les éléments sont donc des classes d'équivalence de variables aléatoires de $\mathcal{L}^2$ (et non des V.A. : par abus de langage, nous appellerons cependant encore V.A. les éléments de $L^2$). Pour X et $Y \in L^2(\Omega,\mathcal{A},P)$, on pose :

$$< X,Y > = \int x(\omega) \, \overline{y}(\omega) \, P(d\omega)$$

$x \in X$ et $y \in Y$ désignant des représentants quelconques des classes X et Y respectivement. Le produit scalaire ainsi défini vérifie (par construction) l'axiome 3, et $\|X\| = \sqrt{< X,X >}$ est une norme pour $L^2$ .

<u>P-1-5 - $L^2(\Omega,\mathcal{A},P)$ est un espace de Hilbert.</u>

Il faut montrer que $L^2(\Omega,\mathcal{A},P)$ est complet pour la norme $\|X\|$ définie ci-dessus. Soit donc $X_n$ une suite de Cauchy dans $L^2$, c'est-à-dire telle que $\lim\limits_{n,m} \|X_n - X_m\|^2 = 0$. De cette suite, on peut extraire une suite partielle $X_{n_k}$ vérifiant pour k entier $\geq 0$ :

$$\|X_{n_{k+1}} - X_{n_k}\|^2 = \int |X_{n_{k+1}}(\omega) - X_{n_k}(\omega)|^2 \, P(d\omega) \leq \frac{1}{8^k}$$

($X_{n_k}(\omega)$ désigne la valeur en $\omega$ d'un représentant quelconque de la classe $X_{n_k}$). Cette relation entraine

$$(\alpha) \qquad P(|X_{n_{k+1}} - X_{n_k}| > \frac{1}{2^k}) \leq \frac{1}{2^k}$$

Considérons alors les sous-ensembles $A_k \subset \Omega$ définis par :

$$A_k = \bigcap_{r\geq k} \left\{ |X_{n_{r+1}} - X_{n_r}| \leq \frac{1}{2^r} \right\}$$

D'après ($\alpha$) on trouve $P(\ A_k) \leq \sum_{r\geq k} P(|X_{n_{r+1}} - X_{n_r}| > \frac{1}{2^r}) \leq \frac{1}{2^{k-1}}$ . Cette probabilité tend vers 0. Par suite, l'ensemble $A = \bigcup_k A_k$ vérifie $P(A) = 1$.

Montrons que, sur chaque $A_k$, la suite $X_{n_r}(\omega)$ converge uniformément. En effet, on a pour tout $\omega \in A_k$ :

$$|X_{n_s}(\omega) - X_{n_{s+t}}(\omega)| \leq \sum_{r=s}^{s+t-1} |X_{n_{r+1}}(\omega) - X_{n_r}(\omega)| \leq \frac{1}{2^{s-1}}$$

de sorte que $X_{n_r}$ est une suite de Cauchy uniforme sur $A_k$ . En particulier, $X_{n_r}(\omega)$ converge pour tout $\omega \in A$, c'est-à-dire presque sûrement (puisque $P(A) = 1$). Posons $X(\omega) = \lim X_{n_r}(\omega)$ pour $\omega \in A$ et $X(\omega) = 0$ pour $\omega \notin A$, et désignons également par X la classe d'équivalence de cette V.A. Comme $X_n$ est une suite de Cauchy dans $L^2$, on a $\|X_m - X_{n_r}\|^2 \leq \varepsilon$ dès que m et $n_r$ sont supérieurs à un $N(\varepsilon)$. Sur $A_k$, il en résulte aussi :

$$\int_{A_k} |X_m(\omega) - X_{n_r}(\omega)|^2 \, P(d\omega) \leq \varepsilon$$

Or la limite $X_{n_r} \to X$ est uniforme sur $A_k$. Il en résulte donc $\int_{A_k} |X_m - X|^2 \, P(d\omega) \leq \varepsilon$, puis en passant à la limite $k \to \infty$, d'après la continuité monotone séquentielle de l'intégrale, $\int_A |X_m - X|^2 \, P(d\omega) \leq \varepsilon$, c'est-à-dire $\|X_m - X\|^2 \leq \varepsilon$. Par suite, $X \in L^2$ et $X_m$ converge vers X dans $L^2$.

Chemin faisant, nous avons établi le corollaire suivant :

P-1-6 - Si une suite $X_n$ converge dans $L^2(\Omega,\mathcal{A},P)$ vers une limite X, on peut en extraire une suite partielle convergeant presque sûrement vers la même limite X.

La convergence dans $L^2$ est souvent appelée convergence en moyenne quadratique (m.q.) pour la distinguer des autres types de convergence utilisés en probabilités, et dont le schéma suivant résume la hiérarchie :

$$\begin{array}{ll} \text{Conv. p.s.} \searrow & \\ & \text{Conv. en probabilité} \Rightarrow \text{Conv. en loi (ou conv. étroite)} \\ \text{Conv. m.q.} \nearrow & \end{array}$$

La convergence p.s., par contre, n'entraîne pas la convergence m.q. (on peut d'ailleurs avoir $X_n \to X$ p.s. sans que X ni les $X_n$ soient dans $L^2$). La convergence m.q., de son côté, n'entraîne pas la convergence p.s. mais seulement la propriété plus faible P-1-6.

$L^2(\Omega,\mathcal{A},P)$ étant un espace de Hilbert, les propriétés P-1-1 à P-1-4 lui sont applicables. Il est commode de les reformuler en termes d'espérance mathématique, en remarquant que l'on peut écrire :

$$E(X) = \langle X,1 \rangle \quad , \quad E(X\,\overline{Y}) = \langle X,Y \rangle$$

Ainsi :

La convergence en moyenne quadratique $X_n \to X$ entraîne $E(X_n) \to E(X)$ et $E(X_n^2) \to E(X^2)$, d'après P-1-1 et P-1-2. De même, $X_n \to X$ et $Y_n \to Y$ m.q. entraîne $\lim\limits_{n,m} E(X_n\,\overline{Y_m}) = E(X\,Y)$, d'après P-1-3. Enfin, une suite $X_n$ converge en moyenne quadratique si et seulement si $\lim\limits_{n,m} E(X_n \overline{X}_m)$ existe (P-1-4).

## 1-3 Convergence forte.

P-1-7 - (Théorème des projections) - Soit H un espace de Hilbert, K une partie convexe et fermée de H, et X un élément quelconque de H. Il existe un et un seul élément $X_o \in K$ réalisant $\operatorname*{Inf}\limits_{Y\in K} \|X-Y\|$. Cet élément $X_o$ est caractérisé par la relation :

$$(1-2) \qquad \forall\, Y \in K \quad , \quad R_e < X-X_o \ , \ Y-X_o > \leq 0$$

Pour établir ce théorème, on utilisera la relation $\|Z + Z'\|^2 + \|Z - Z'\|^2 = 2\,\|Z\|^2 + 2\,\|Z'\|^2$ qui, appliquée à $Z = \frac{Y+Y'}{2} - X$ et $Z' = \frac{Y-Y'}{2}$ donne :

$$(\alpha) \qquad \|Y-Y'\|^2 = 2\,\|Y-X\|^2 + 2\,\|Y'-X\|^2 - 4\,\|X - \frac{Y+Y'}{2}\|^2$$

Posons $\delta = \operatorname*{Inf}\limits_{Y\in K} \|X-Y\|$.

Unicité de $X_o$: Si $\delta = \|X-Y\| = \|X-Y'\|$ pour Y et $Y' \in K$, la relation ($\alpha$) donne $\|Y-Y'\|^2 = 4\,\delta^2 - 4\,\|X - \frac{Y+Y'}{2}\|^2$. Mais $\frac{Y+Y'}{2}$ appartient au convexe K, et $\|X - \frac{Y+Y'}{2}\| \geq \delta$ entraîne $\|Y-Y'\|^2 \leq 0$, soit $Y = Y'$.

Existence de $X_o$: Soit $Y_n$ une suite dans K telle que $\|X-Y_n\|$ converge vers $\delta$. C'est une suite de Cauchy, car la relation ($\alpha$) donne : $\|Y_n-Y_m\|^2 = 2\,\|X-Y_n\|^2 + 2\,\|X-Y_m\|^2 - 4\,\|X - \frac{Y_n+Y_m}{2}\|^2 \leq 2\,\|X-Y_n\|^2 + 2\,\|X - Y_m\|^2 - 4\,\delta^2$ , et cette expression tend vers 0 lorsque n et m tendent vers l'infini. Posons alors $X_o = \lim Y_n$ . $X_o$ appartient au fermé K, et, d'après P-1-1, $\lim \|X-X_n\| = \|X-X_o\|$, donc $\|X-X_o\| = \delta$.

Relation 1-2 - Montrons que $X_o$ vérifie (1-2) : pour $\lambda$ réel compris entre 0 et 1, et $Y \in K$ on a $(1-\lambda)X_o + \lambda Y \in K$, donc :

$$\|X-X_o\|^2 \leq \|X-X_o + \lambda(X_o-Y)\|^2 = \|X-X_o\|^2 + \lambda^2\|X_o-Y\|^2 + 2\lambda\, R_e < X-X_o, X_o-Y>$$

On en tire $\lambda\|X_o-Y\|^2 + 2\, R_e < X-X_o, X_o-Y > \geq 0$, et (1-2) pour $\lambda \downarrow 0$.

Inversement, si $X_o \in K$ vérifie (1-2), on a pour tout $Y \in K$ : $\|X-Y\|^2 = \|X-X_o + (X_o-Y)\|^2 = \|X-X_o\|^2 + \|X_o-Y\|^2 + 2\, R_e < X-X_o, X_o-Y >$ $\geq \|X-X_o\|^2$.

Corollaire - Si K est un sous-espace fermé, $X_o$ est caractérisé par la relation : $< X-X_o, Y > = 0$ pour tout $Y \in K$.

En effet, comme $Y' = Y + X_o \in K$, la relation (1-2) donne $R_e < X-X_o, Y > \leq 0$ puis de même $R_e < X-X_o, -Y \leq 0$, donc $R_e < X-X_o, Y >$ $= 0$. En recommençant le raisonnement avec iY au lieu de Y, on trouve $Im < X-X_o, Y > = 0$, d'où $< X-X_o, Y > = 0$. Inversement, si $X_o \in K$ vérifie $< X-X_o, Y > = 0$ pour tout $Y \in K$, on a $\|X-Y\|^2 = \|X-X_o\|^2 + \|X_o-Y\|^2 \geq$ $\|X-X_o\|^2$.

P-1-8 (Théorème de Riesz) - Tout espace de Hilbert H est identifiable à son dual. Autrement dit, si $\Phi$ est une forme linéaire continue sur H, il existe un élément unique $X_o \in H$ tel que l'on ait $\Phi(Y) =$ $< Y, X_o >$ pour tout $Y \in H$ et $\|\Phi\| = \|X_o\|$.

Si $\Phi = 0$, $X_o = 0$ convient. Si $\Phi \neq 0$, soit $u \in H$ tel que $\Phi(u) =$ $\lambda \neq 0$ . Soit $u_o$ la projection de u sur l'orthogonal de $\Phi^{-1}(0)$. Comme

$u-u_o \in \Phi^{-1}(0)$, on a aussi $\Phi(u_o) = \lambda$. Soit alors $Y \in H$. De $\Phi(Y)u_o - \lambda Y \in \Phi^{-1}(0)$ résulte que cet élément est orthogonal à $u_o$, d'où $\Phi(Y) = \dfrac{\lambda}{\|u_o\|^2} < Y,u_o >$. Il suffit de prendre $X_o = \overline{\lambda} \dfrac{u_o}{\|u_o\|^2}$.

L'unicité de $u_o$ est immédiate. L'inégalité de Schwarz $|\Phi(Y)| \leq \|Y\| \, \|X_o\|$ donne $\|\Phi\| \leq \|X_o\|$, et la relation $\Phi(X_o) = \|X_o\|^2$ montre que l'on a en fait l'égalité $\|\Phi\| = \|X_o\|$.

## 1-4 Convergence faible.

La topologie définie par la norme d'un espace de Hilbert H est appelée topologie forte, par opposition à la topologie faible que nous allons définir ; de même la convergence $X_n \to X$ définie par $\|X-X_n\| \to 0$ est appelée <u>convergence forte</u> (et aussi convergence m.q. si H est un espace $L^2$). On peut aussi munir H d'une autre topologie appelée topologie faible pour laquelle les ensembles de la forme $\{X : X \in H, \ |< X,Y_i >| < a_i, \ i = 1,2,\ldots k\}$ (k entier positif, $a_i > 0$, $Y_i$ quelconques dans H) constituent une base fondamentale de voisinages de l'élément 0. Dans cette topologie, la convergence, appelée <u>convergence faible</u>, est définie comme suit :

On dit qu'une suite $X_n$ <u>converge faiblement</u> vers une limite X dans H si l'on a $\lim < X_n,Y > = < X,Y >$ pour tout $Y \in H$.

<u>P-1-9</u> - Si une suite $X_n$ converge faiblement vers X dans H, on a $\|X\| \leq \underline{\lim} \|X_n\|$.

En effet, $|< X,X_n >| \leq \|X\| \, \|X_n\|$ entraîne $\|X\|^2 = \lim < X,X_n > \leq \|X\| \, \underline{\lim} \|X_n\|$.

P-1-10 - Pour qu'une suite $X_n$ converge fortement dans H vers une limite X, il faut et il suffit qu'elle converge faiblement vers X et que l'on ait $\|X\| = \lim \|X_n\|$ . En particulier, la convergence forte entraîne la convergence faible.

La condition est nécessaire d'après P-1-1 et P-1-2. Inversement, si elle est vérifiée, $\|X-X_n\|^2 = \|X\|^2 + < X_n,X_n > - < X,X_n > - < X_n,X >$ tend vers 0.

Pour aller plus loin dans l'étude de la convergence faible, il faut disposer d'un théorème fondamental (théorème de Banach-Steinhaus) valable pour les espaces de Banach (on rappelle qu'un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet : en particulier tout espace de Hilbert est un espace de Banach). Posons d'abord deux définitions et un lemme.

Soit E un espace de Banach, et $p : E \to R$ une fonction sur E à valeurs réelles. On dit que p est une <u>fonctionnelle convexe</u> sur E si l'on a $p(X+Y) \leq p(X) + p(Y)$ et $p(\lambda X) = |\lambda|\ p(X)$ pour $X, Y \in E$ et $\lambda$ complexe (en particulier, ceci entraîne $0 \leq p(X)$ pour tout $X \in E$). On dit que p est <u>semi-continue inférieurement</u> (sci) si pour tout $X_0 \in E$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que $\|X-X_0\| \leq \eta$ entraîne $p(X) \geq p(X_0) - \varepsilon$.

<u>Lemme sur les fonctionnelles convexes</u>. Soit E un espace de Banach et p une fonctionnelle convexe sci sur E. Il existe un nombre $M < \infty$ tel que l'on ait $p(X) \leq M \|X\|$ pour tout $X \in E$.

Désignons par $B_r(X)$ la boule fermée de centre X et de rayon r, et montrons d'abord que si p n'est pas bornée sur $B_1(0)$ elle n'est bornée sur aucune boule $B_r(Y)$ $(r > 0)$. En effet, si $p(X) \leq C$ pour $X \in B_r(Y)$, on a $p(X-Y) \leq p(X) + p(-Y) = p(X) + p(Y) \leq 2C$ dès que $\|X-Y\| \leq r$. Soit alors $Z \in H$ avec $\|Z\| \leq 1$. Prenons $X = Y + rZ \in B_r(Y)$. De $Z = \frac{X-Y}{r}$ résulte $p(Z) \leq \frac{2C}{r}$, et $p$ est bornée sur $B_1(0)$.

Supposons alors que $p$ n'est bornée sur aucune boule $B_r(Y)$, $r > 0$, et montrons que celà conduit à une absurdité. Prenons $X_1 \in \mathring{B}_1(0)$ avec $p(X_1) > 1$. Comme $p$ est sci, il existe $\rho_1 < \frac{1}{2}$ tel que $B_{\rho_1}(X_1) \subset \mathring{B}_1(0)$ avec $p > 1$ sur $\mathring{B}_{\rho_1}(X_1)$. Par récurrence, on forme une suite $X_n$, $\rho_n$ avec $B_{\rho_n}(X_n) \subset \mathring{B}_{\rho_{n-1}}(X_{n-1})$, $\rho_n < \frac{1}{2}\rho_{n-1}$ et $p(X) > n$ sur $B_{\rho_n}(X_n)$. De $\rho_n < \frac{1}{2^n}$ résulte que la suite $X_n$ est une suite de Cauchy. Soit $X_o$ sa limite dans E. Pour $n \geq m$, on a $X_n \in B_{\rho_m}(X_m)$ donc $X_o \in B_{\rho_m}(X_m)$. Par suite $p(X_o) > m$ quel que soit $m$, ce qui contredit $p(X_o) < \infty$. Donc $p$ est bornée sur la boule unité.

I-1-11 (Théorème de Banach-Steinhaus) - Soit $U_i$, $i \in I$ une famille d'applications linéaires continues d'un espace de Banach E dans un espace vectoriel normé F. Si l'on a $\sup_{i\in I} \|U_i(X)\| < \infty$ pour tout $X \in E$, alors $\sup_{i\in I} \|U_i\| < \infty$.

En effet, l'application $X \to \|U_i(X)\|$ de E dans R est linéaire et continue pour chaque $i \in I$, et on vérifie immédiatement que l'application $X \to \sup_{i\in I} \|U_i(X)\|$ est une fonctionnelle convexe sci. Le lemme ci-dessus donne donc $\sup_i \|U_i\| < \infty$.

Appliquons ce théorème à la convergence faible dans l'espace de Hilbert H. On rappelle qu'une partie T de H est totale dans H si son enveloppe linéaire (ensemble des combinaisons linéaires finies d'éléments de T) est dense dans H.

P-1-12 - Soit T une partie totale dans H. Pour qu'une suite $X_n$ converge faiblement vers X dans H, il faut et il suffit que l'on ait $\operatorname{Sup}_n \|X_n\| < \infty$ et $< X_n, Y > \to < X, Y >$ pour tout $Y \in T$.

La condition est nécessaire, d'après le théorème de Banach-Steinhaus (appliqué à la famille $U_n : Y \to < X_n, Y >$ d'applications de H dans $\mathcal{C}$). Inversement, supposons cette condition vérifiée, et soit $Y \in H$. Si Y appartient à l'enveloppe linéaire L(T) de T, $< X_n, Y >$ converge vers $< X, Y >$. Si $Y \notin L(T)$, soit $Y_\varepsilon \in L(T)$ avec $\|Y - Y_\varepsilon\| \leq \varepsilon$ (puisque L(T) est dense dans H). De $< X_n - X, Y > = < X_n - X, Y - Y_\varepsilon > + < X_n - X, Y_\varepsilon >$, on tire $|< X_n - X, Y >| \leq \varepsilon (\|X\| + \operatorname{Sup}_n \|X_n\|) + |< X_n - X, Y_\varepsilon >|$. Le second terme tend vers 0 pour n infini, le premier peut être choisi arbitrairement petit. Donc $< X_n - X, Y >$ tend vers 0.

P-1-13 - Tout espace de Hilbert H est faiblement complet (autrement dit si une suite $X_n$ dans H vérifie $\lim_{n,m} < X_n - X_m, Y > = 0$ pour tout $Y \in H$, la suite $X_n$ est faiblement convergente).

En effet, pour chaque Y, la suite numérique $< X_n, Y >$ a une limite, soit $\Phi(Y)$. D'après le théorème de Banach-Steinhaus, on a $B = \operatorname{Sup}_n \|X_n\| < \infty$, donc aussi $\|\Phi\| \leq B < \infty$. D'après le théorème de Riesz, il existe $X \in H$ tel que la forme linéaire $\overline{\Phi}$ soit de la forme $\overline{\Phi}(Y) = < Y, X >$, c'est-à-dire $\Phi(Y) = < X, Y >$. Donc $X_n$ converge faiblement vers X.

P-1-14 (Compacité séquentielle faible) - Si une suite $X_n$ dans H vérifie $\operatorname{Sup}_n \|X_n\| < \infty$, on peut en extraire une suite partielle faiblement convergente.

En effet, désignons par L l'enveloppe linéaire des $X_n$, par $\overline{L}$ son adhérence dans H, et par $L^{\perp}$ son orthogonal dans H. Pour $Y \in L^{\perp}$, on a $< X_n, Y > = 0$, et il suffit donc d'établir la convergence faible dans $\overline{L}$. Or $\overline{L}$ admet une partie totale dénombrable $\{\ell_p,\ p = 1,2,\dots\}$, (par exemple $\ell_p = X_p$). Comme $|< X_n, \ell_1 >| \leq \|X_n\|\ \|\ell_1\|$ est bornée, on peut extraire de $X_n$ une première suite partielle $X_n^1$ telle que $< X_n^1, \ell_1 >$ converge. De $X_n^1$, de même on extrait une sous-suite $X_n^2$ telle que $< X_n^2, \ell_2 >$ converge, et, par itération, pour tout entier p positif, on forme une suite partielle $X_n^p$ extraite de $X_n^{p-1}$ et telle que $< X_n^p\ \ell_1 >$, $< X_n^p, \ell_2 >$ ... et $< X_n^p\ \ell_p >$ convergent. La sous-suite diagonale $X_n^n$ est alors telle que $< X_n^n, \ell_p >$ converge quel que soit p. Comme $\{\ell_p\}$ est une partie totale dans $\overline{L}$, il résulte de P-1-12 que $X_n^n$ converge faiblement dans $\overline{L}$ (donc aussi dans H).

## Section 2 - LES FONCTIONS ALEATOIRES D'ORDRE 2

Si E est un ensemble et $L^2(\Omega,\mathcal{A},P)$ un espace de Hilbert de classes d'équivalence de variables aléatoires, on dit qu'une application $Z : E \to L^2(\Omega,\mathcal{A},P)$ est une fonction aléatoire d'ordre 2. Dans ce qui suit, nous nous limiterons au cas $E = \mathbb{R}^n$. Pour chaque $x \in \mathbb{R}^n$, $Z(x)$ est donc une (classe de) V.A. à valeurs réelles ou complexes. On appellera <u>covariance</u> non centrée ( et par abus de langage simplement covariance) la fonction $C : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ définie par :

$$C(x,y) = E[Z(x)\ \overline{Z}(y)] = < Z(x),\ Z(y) >$$

De même, on désignera parfois par $m(x) = E[Z(x)] = < Z(x),\ 1 >$

l'espérance de $Z(x)$. La covariance proprement dite, ou covariance centrée serait la fonction $\sigma$ définie par $\sigma(x,y) = < Z(x)-m(x), Z(y)-m(y)>$ $= C(x,y)-m(x)\overline{m}(y)$.

## 2-1 Continuité en moyenne quadratique.

Nous dirons que la F.A. Z est <u>fortement continue</u> sur l'espace euclidien E (ou <u>continue en moyenne quadratique</u>) si l'application $Z : E \to L^2$ est continue, c'est-à-dire si $x_n \to x$ dans E entraîne $Z(X_n) \to Z(x)$ fortement dans $L^2$.

<u>P-2-1</u> - Les propriétés suivantes sont équivalentes :

a/ La F.A. d'ordre 2 Z est continue en moyenne quadratique

b/ La covariance C est continue sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

c/ La covariance C est continue ~~sur la~~ en tt pt de la diagonale de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

a/ $\Rightarrow$ b/. Soient $x_n$ et $y_n$ deux suites dans l'espace euclidien E convergeant respectivement vers les points x et y. Il faut montrer $C(x_n,y_n) \to C(x,y)$. D'après a/, $Z(x_n) \to Z(x)$ et $Z(y_n) \to Z(y)$ dans $L^2$. Donc, d'après P-1-3, $< Z(x_n), Z(y_n) > = C(x_n,y_n)$ converge vers $< Z(x), Z(y) > = C(x,y)$.

Il est clair que b/ $\Rightarrow$ c/. Montrons c/ $\Rightarrow$ a/. Soit $x_n$ une suite convergeant vers x dans E. Il suffit d'écrire $\|Z(x_n)-Z(x)\|^2 = C(x_n,x_n) - C(x_n,x) - C(x,x_n) + C(x,x)$ et d'utiliser la continuité de C au point $(x,x) \in E \times E$ pour en déduire $\|Z(x_n) - Z(x)\| \to 0$.

On voit, d'après P-2-1, que la continuité de C sur la diagonale entraîne sa continuité sur $E \times E$ entier. Une covariance n'est donc certainement pas une fonction quelconque. De fait, si k est un entier $> 0$, $x_1, x_2, \dots x_k$ k points de E et $\lambda_1, \dots \lambda_k$ k nombres complexes quelconques, on a :

$$\sum_{i,j} \lambda_i \bar{\lambda}_j \; C(x_i, x_j) \geq 0$$

car $E[|\sum \lambda_i \; Z(x_i)|^2] = \sum_{i,j} \lambda_i \bar{\lambda}_j < Z(x_i), Z(x_j) > \geq 0$. Inversement, si une fonction C sur $R^n \times R^n$ vérifie cette propriété, on peut montrer qu'il existe une F.A. (par exemple à loi spatiale gaussienne) admettant C comme covariance.

## 2-2 L'espace $H(\Lambda)$ des combinaisons linéaires finies, et l'espace H engendré par Z.

Désignons par $\Lambda$ l'ensemble des mesures sur E à support fini, c'est-à-dire des mesures de la forme $\lambda = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \, \delta_{x_i}$ ($\lambda_i$ complexe, $\delta_{x_i}$ mesure de Dirac au point $x_i$), et désignons par $Z(\lambda)$ l'intégrale :

$$Z(\lambda) = \int \lambda(dx) \; Z(x) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \; Z(x_i)$$

qui a toujours un sens, puisque c'est en réalité une combinaison linéaire finie d'éléments de $L^2$. Nous définissons ainsi une application linéaire $Z : \Lambda \to L^2$. Soit $H(\Lambda)$ l'espace image de $\Lambda$ dans $L^2$ par cette application (espace des combinaisons linéaires finies). C'est un sous-vectoriel de $L^2$ non fermé en général. Désignons alors par $H = \overline{H(\Lambda)}$ son adhérence dans $L^2$. H est un sous-espace fermé de $L^2$, donc un espace de Hilbert (espace de Hilbert engendré par les $Z(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$). Il contient les combinaisons linéaires finies des $Z(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ et aussi les limites en moyenne quadratique de telles combinaisons linéaires finies (donc toutes les V.A. que l'on pourra déduire des $Z(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ à l'aide d'opérations linéaires ayant un sens en moyenne quadratique). Par construction, $\{Z(x),\ x \in \mathbb{R}^n\}$ est une partie totale dans H.

On notera l'expression simple du produit scalaire entre éléments de $H(\Lambda)$ :

$$(2\text{-}1) \qquad < Z(\lambda),\ Z(\lambda') > = \iint \lambda(dx)\ C(x,y)\ \overline{\lambda}'(dy) \qquad (\lambda,\lambda' \in \Lambda)$$

Plus généralement, pour $\lambda \in \Lambda$ et $X \in L^2$, on a de même :

$$(2\text{-}2) \qquad < Z(\lambda),\ X > = \int \lambda(dx) < Z(x),\ X >$$

Ces formules se démontrent immédiatement, puisqu'il s'agit en réalité de sommes finies. Nous allons généraliser ces résultats au cas de mesures à support non fini.

## 2-3 L'intégrale stochastique.

Soit $\mu$ une mesure sur l'espace euclidien $E = \mathbb{R}^n$ (il s'agit ici de mesures de Radon, c'est-à-dire de formes linéaires continues sur l'espace des fonctions continues à support compact muni de sa topologie habituelle). Notre objectif est de donner un sens à l'intégrale $\int \mu(dx)\ Z(x)$ (qui représentera un élément de $L^2$, c'est-à-dire une V.A. et non pas un nombre). Dans tout ce qui suit nous supposons toujours que Z est une F.A. continue m.q. donc que la covariance C est continue sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ .

a/ Caractérisation faible de l'intégrale $\int \mu(dx) \overline{Z(x)}$.

Pour tout $X \in L^2$, la fonction $x \to \langle Z(x), X \rangle$ est continue sur E, puisque la continuité forte entraîne la continuité faible. Si la mesure $\mu$ est telle que l'intégrale $\int \mu(dx) \langle Z(x), X \rangle$ existe pour tout $X \in L^2$, l'application $X \to \int \overline{\mu}(dx) \langle X, Z(x) \rangle$ (imaginaire conjuguée de l'intégrale précédente) est une forme linéaire sur $L^2$. Si de plus cette forme linéaire est continue, le théorème de Riesz nous garantit l'existence d'un élément $Z(\mu) \in L^2$ tel que l'on ait :

$$(2\text{-}3) \qquad \langle Z(\mu), X \rangle = \int \mu(dx) \langle Z(x), X \rangle \qquad (X \in L^2)$$

Cet élément appartient d'ailleurs à l'espace $H \subset L^2$ engendré par les $Z(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ (car on a $\langle Z(x), X \rangle = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ dès que X est dans l'orthogonal de H, donc aussi $\langle Z(\mu), X \rangle = 0$). Nous dirons que $Z(\mu)$ est l'intégrale (stochastique) de $Z(x)$ pour la mesure $\mu$, et nous écrirons souvent $\int \mu(dx) Z(x)$ au lieu de $Z(\mu)$.

Si $\mu$ est une mesure positive telle que $\int \mu(dx) \|Z(x)\| < \infty$, l'intégrale $Z(\mu)$ existe. En effet, l'inégalité de Schwarz donne

$$\left| \int \mu(dx) \langle Z(x), X \rangle \right| \leq \int \mu(dx) | \langle Z(x), X \rangle | \leq \|X\| \int \mu(dx) \|Z_x\|$$

L'application $X \to \int \mu(dx) \langle X, Z(x) \rangle$ a donc une norme inférieure à $\int \mu(dx) \|Z(x)\|$, donc finie, et le théorème de Riesz s'applique.
Si $\mu$ est une mesure quelconque, le même résultat est valable à condition de remplacer $\mu$ par la mesure valeur absolue $|\mu|$. Ainsi :

P-2-2 - Pour toute mesure de Radon $\mu$ sur $\mathbb{R}^n$, la condition $\int |\mu|(dx) \|Z(x)\| < \infty$ est suffisante pour l'existence de l'intégrale stochastique $Z(\mu)$ définie en (2-3). En particulier $Z(\mu)$ existe pour toute mesure $\mu$ à support compact.

La définition faible (2-3) ne permet pas de calculer la norme $\|Z(\mu)\|$ et de généraliser la relation (2-1). D'autre part, comme $Z(\mu) \in H$ et que $H(\Lambda)$ est dense dans $H$, nous savons bien qu'il existe une suite de combinaisons linéaires finies $\int \lambda_n(dx)\ Z(x)$ , $\lambda_n \in \Lambda$ convergeant fortement vers $Z(\mu) = \int \mu(dx)\ Z(x)$. Mais nous voudrions pouvoir exhiber explicitement une telle suite (ne serait-ce que pour avoir un moyen de calcul approché). Pour celà, nous allons d'abord examiner le cas où $\mu$ est à support compact, et, en premier lieu, établir quelques lemmes.

b/ <u>L'espace $M_c$ des mesures à support compact.</u>

Désignons par $M_c = M_c(E)$ l'espace des mesures de Radon à support compact sur l'espace euclidien $E = \mathbb{R}^n$ . On sait que $M_c$ est le dual de l'espace $\mathcal{C}(E)$ des fonctions continues sur E muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts. La convergence (faible) dans $M_c$ est alors caractérisée comme suit :

Une suite $\mu_n$ converge vers $\mu$ dans $M_c$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1/ - Les supports des mesures $\mu_n$ sont contenus dans un compact fixe (qui contient alors nécessairement aussi le support de $\mu$).

2/ - Pour toute fonction continue $\varphi \in \mathcal{C}(E)$, la suite $\int \mu_n(dx)\ \varphi(x)$ converge vers $\int \mu(dx)\ \varphi(x)$

<u>Lemme 2-1</u> - L'espace $\Lambda$ des mesures à support fini est dense dans $M_c$ .

Pour le démontrer, on peut partir du fait que le dual de $M_c$ est $\mathscr{C}(E)$ lui-même ($\mathscr{C}(E)$ est réflexif). Donc, si $\Lambda$ n'était pas dense dans $M_c$, d'après le théorème de Hahn-Banach il existerait une fonction $\varphi \in \mathscr{C}(E)$ non nulle avec $\int \lambda(dx)\ \varphi(x) = 0$ pour tout $\lambda \in \Lambda$ , et en particulier avec $\lambda = \delta_y$ (mesure de Dirac en y), $\varphi(y) = 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}^n$ : mais celà contredit $\varphi \neq 0$.

Donnons une autre démonstration, plus directe, en construisant effectivement une suite $\lambda_N$ dans $\Lambda$ convergeant vers une mesure $\mu \in M_c$ donnée. Pour celà, considérons pour chaque entier N la partition de $E = \mathbb{R}^n$ constituée de cubes $A_i^N$ (avec i au lieu de $(i_1, i_2, \ldots i_n)$, $i_1$, $i_2$, $\ldots i_n$ entiers) définis comme suit :

$$A_i^N = \left\{x = (x_1, x_2, \ldots x_n) : \frac{i_k}{2^N} \leq x_k < \frac{i_k+1}{2^N} \quad , \quad k = 1, 2, \ldots n\right\}$$

et choisissons pour chaque i un point $x_i^N \in A_i^N$ . Posons :

$$\lambda_N = \sum_i \ \mu(A_i^N)\ \delta_{x_i^N}$$

Comme $\mu \in M_c$ est à support compact, l'expression de $\lambda_N$ ne comporte qu'un nombre fini de termes non nuls, et $\lambda_N \in \Lambda$ . De plus, les $\lambda_N$ ont leurs supports contenus dans un compact fixe $K_o$ . Il reste à vérifier la condition 2/ pour établir la convergence $\lambda_N \to \mu$ . Soit donc $\varphi$ une fonction continue sur E. On a :

$$\int \lambda_N(dx)\ \varphi(x) = \sum_i \ \mu(A_i^N)\ \varphi(x_i^N) = \int \mu(dx) \sum_i \ 1_{K_o}(x)\ 1_{A_i^N}(x)\ \varphi(x_i^N)$$

(la présence de l'indicatrice $1_{K_o}(x)$ nous garantit que la somme ne comporte qu'un nombre fini de terme ). La majoration :

$$\left| \sum_i 1_{K_o}(x)\ 1_{A_i^N}(x)\ \varphi(x_i^N) \right| \leq \sup_{x \in K_o} |\varphi(x)|$$

jointe au fait que $\int |\mu|$ est fini (puisque $\mu$ est à support compact) nous autorise à appliquer le théorème de convergence dominée. Or, pour $N \to \infty$ , on trouve pour chaque $x \in E$ : $\sum_i 1_{K_o}(x)\ 1_{A_i^N}(x)\ \varphi(x_i^N) \to$ $\to 1_{K_o}(x)\ \varphi(x)$ . Par suite $\int \lambda_N(dx)\ \varphi(x)$ converge vers $\int_{K_o} \mu(dx)\ \varphi(x)$ $= \int \mu(dx)\ \varphi(x)$. Ainsi $\lambda_N$ converge vers $\mu$ dans $M_c$, et $\Lambda$ est dense dans $M_c$ .

<u>Lemme 2-2</u> - La convergence $\mu_n \to \mu$ dans $M_c$ entraîne $\sup_n \int |\mu_n| < \infty$ .

En effet, soit $K_o$ un compact contenant les supports des $\mu_n$ . L'espace $\mathscr{C}(K_o)$ des fonctions continues sur $K_o$ muni de la norme $\sup_{x \in K_o} |\varphi(x)| = \|\varphi\|$ est un espace de Banach, dont le dual est l'espace $M(K_o)$ des mesures de Radon sur $K_o$, et $M(K_o)$ est un espace de Banach pour sa norme qui est définie par $\|\mu\| = \int |\mu|$ . Pour tout $\varphi \in \mathscr{C}(K_o)$, on a par définition $\int \mu_n\ \varphi \to \int \mu_\varphi$ , donc $\sup_n \left| \int \mu_n\ \varphi \right| < \infty$ . D'après le théorème de Banach-Steinhaus (P-1-11), il en résulte bien $\sup_n \|\mu_n\|$ $= \sup_n \int |\mu_n| < \infty$ .

<u>Lemme 2-3</u> - Si $\mu_n$ et $\nu_n$ sont deux suites convergeant dans $M_c$ vers les limites $\mu$ et $\nu$ respectivement, on a $\lim_{n,m} \mu_n \otimes \nu_m = \mu \otimes \nu$ dans $M_c\ (E \times E)$.

En effet, si $K_o$ est un compact contenant les supports des $\mu_n$ et des $\nu_m$ , le compact $K_o \times K_o$ de $E \times E$ contient le support des mesures produit $\mu_n \otimes \nu_m$ . Il reste à vérifier que l'on a

$$\lim_{n,m} \iint \mu_n(dx)\ \varphi(x,y)\ \nu_m(dy) = \int \mu(dx)\ \varphi(x,y)\ \nu(dy)$$

pour toute fonction $\varphi$ continue sur $K_o \times K_o$ . Or une telle fonction $\varphi$ est uniformément continue sur $K_o \times K_o$ . Pour $\varepsilon > 0$ donné, on peut donc trouver $\eta$ tel que $|y-y_o| < \eta$ entraîne $|\varphi(x,y)-\varphi(x,y_o)| < \varepsilon$ pour tout $x \in K_o$ et tout $y_o \in K_o$ . On peut alors couvrir le compact $K_o$ par un nombre fini $k$ de boules $B_\eta(y_i)$, $i = 1,2,\ldots k$. Soit $y \in K_o$, et $y_i$ tel que $y \in B_\eta(y_i)$. On peut écrire :

$$\int \mu_n(dx)\ \varphi(x,y) - \int \mu(dx)\ \varphi(x,y) = \int [\mu_n(dx)-\mu(dx)][\varphi(x,y)-\varphi(x,y_i)]$$

$$+ \int [\mu_n(dx)-\mu(dx)]\ \varphi(x,y_i)$$

D'après le lemme 2-2, on a $\sup\limits_n \int |\mu_n-\mu| \leq B < \infty$, et d'autre part $|\varphi(x,y)-\varphi(x,y_i)| \leq \varepsilon$ uniformément en $x \in K_o$ . Le premier terme est donc majoré en module par $\varepsilon B$. Comme $\int \mu_n(dx)\ \varphi(x,y_i) \to \mu(dx)\ \varphi(x,y_i)$ pour chaque $i = 1,2,\ldots k$, le second terme est de même majoré uniformément en $i$ dès que $n$ est assez grand. Ainsi, la convergence des $f_n(y) = \int \mu_n(dx)\ \varphi(x,y)$ vers $f(y) = \int \mu(dx)\ \varphi(x,y)$ est uniforme sur $y \in K_o$ . On en déduit $\lim\limits_{n,m} \int [f_n(y)-f(y)]\ \nu_m(dy) = 0$ (puisque $\sup\limits_m \int |\nu_m| < \infty$). D'autre part $f_n$ et $f$ sont continues sur $K_o$ , de sorte que $\lim\limits_m \int f(y)\ \nu_m(dy) = \int f(y)\ \nu(dy)$. Il en résulte bien :

$$\lim_{n,m} \iint \mu_n(dx)\ \varphi(x,y)\ \nu_m(dy) = \iint \mu(dx)\ \varphi(x,y)\ \nu(dy)$$

c/ <u>Caractérisation forte de l'intégrale stochastique $\int \mu(dx)\, Z(x)$</u>.

Examinons tout d'abord le cas des mesures à support compact. Comme corollaire des lemmes ci-dessus, nous obtenons l'énoncé suivant :

<u>P-2-3</u> - Pour toute mesure $\mu$ à support compact, il existe une suite $\lambda_n$ de mesures à supports finis convergeant vers $\mu$ dans $M_c$ . Pour toute suite $\lambda_n$ convergeant vers $\mu$ dans $M_c$ , la suite $\int \lambda_n(dx)\, Z(x)$ converge fortement vers $Z(\mu) = \int \mu(dx)\, Z(x)$.

Soit en effet une suite $\lambda_n$ convergeant vers $\mu$ dans $M_c$ (il en existe, d'après le lemme 2-1). D'après le lemme 2-3, on a :

$$\lim_{n,m} < Z(\lambda_n),\ Z(\lambda_m) > = \iint \mu(dx)\ C(x,y)\ \overline{\mu}(dy)$$

Donc, d'après le critère de Cauchy, $Z(\lambda_n)$ converge fortement vers une limite $Y \in L^2$ . Comme la convergence forte entraîne la convergence faible, on a $\lim_n < \int \lambda_n(dx)\ Z(x),\ X > = < Y,X >$ pour tout $X \in L^2$. Mais $< \int \lambda_n(dx)\ Z(x), X > = \int \lambda_n(dx) < Z(x),X >$ converge vers $\int \mu(dx) <$ $< Z(x),X >$ puisque la fonction $< Z(x),X >$ est continue et que $\lambda_n$ converge vers $\mu$ dans $M_c$ . On a donc $< Y,X > = \int \mu(dx) < Z(x),X >$ , et $Y$ est identique à l'intégrale $Z(\mu)$ définie par la relation (2-3).

Comme corollaire, on obtient les relations suivantes, valables pour $\mu$ et $\mu'$ <u>à support compact</u> :

$$(2-4)\quad \begin{cases} \|Z(\mu)\|^2 = \iint \mu(dx)\ C(x,y)\ \overline{\mu}(dy) \\ \\ < Z(\mu),\ Z(\mu') > = \iint \mu(dx)\ C(x,y)\ \overline{\mu}'(dy) \end{cases}$$

Il suffit, en effet, d'appliquer P-2-3 avec des suites $\lambda'_n \to \mu'$. On a alors $< Z(\mu), Z(\mu') > = \lim_{n,m} < Z(\lambda_n), Z(\lambda'_m) >$ (d'après P-1-3) $= \lim_{n,m} \iint \lambda_n(dx)\ C(x,y)\ \bar{\lambda}'_m(dy) = \iint \mu(dx)\ C(x,y)\ \bar{\mu}'(dy)$ (d'après le lemme 2-3).

Notons aussi que l'on a le droit de permuter le symbole d'espérance mathématique et le symbole $\int$, soit (pour $\mu \in M_c$) :

(2-5) $$E \int \mu(dx)\ Z(x) = \int \mu(dx)\ E[Z(x)]$$

Il suffit, en effet, d'appliquer la relation faible (2-3) avec $X = 1 \in L^2$. On notera aussi que, si l'on utilise la suite $\lambda_N = \sum \mu(A_i^N)\ \delta_{x_i^N}$ introduite dans la démonstration du lemme 2-1, on voit que la suite $\sum_i \mu(A_i^N)\ Z(x_i^N)$ converge fortement vers $Z(\mu) = \int \mu(dx)\ Z(x)$. On peut donc considérer $Z(\mu)$ comme une intégrale de Riemann-Stieltjes en moyenne quadratique.

<u>P-2-4</u> - L'application $\mu \to Z(\mu)$ de $M_c$ dans $L^2$ est fortement continue.

En effet, si $\mu_n \to \mu$ dans $M_c$,

$$\|Z(\mu_n)-Z(\mu)\|^2 = \iint [\mu_n(dx)-\mu(dx)]\ C(x,y)\ [\bar{\mu}_n(dy)-\bar{\mu}(dy)]$$

d'après (2-4), et cette expression tend vers 0, d'après le lemme 2-3, puisque $\mu_n - \mu$ tend vers 0 dans $M_c$.

Dans le cas où $\mu$ n'est pas à support compact, notons seulement le résultat suivant :

<u>P-2-5</u> - Soit $\mu$ une mesure de Radon sur $\mathbb{R}^n$ telle que $\int |\mu|(dx) \|Z(x)\| < \infty$, et $1_{B_n}$ l'indicatrice de la boule de rayon n. Posons $\mu_n = 1_{B_n}\ \mu$.

Alors la suite $Z(\mu_n)$ converge fortement vers $Z(\mu)$, et on a :

$$\|Z(\mu)\|^2 = \iint \mu(dx)\ C(x,y)\ \overline{\mu}(dy)$$

De même, si $\mu$ et $\nu$ sont deux mesures telles que $\int |\mu|(dx)\|Z(x)\|$ et $\int |\nu|(dx)\|Z(x)\|$ soient finies, on a :

$$< Z(\mu),\ Z(\nu) > = \iint \mu(dx)\ C(x,y)\ \overline{\nu}(dy)$$

En effet, on a $< Z(\mu_n),\ Z(\mu_m) > = \iint \mu_n(dx)\ C(x,y)\ \overline{\mu}_m(dy) =$

$= \iint \mu(dx)\ 1_{B_n}(x)\ C(x,y)\ 1_{B_m}(y)\ \overline{\mu}(dy)$. La fonction à intégrer est majorée en module par $\|Z(x)\|\ \|Z(y)\|$, et par hypothèse

$$\iint |\mu|(dx)\ \|Z(x)\|\ \|Z(y)\|\ |\mu|(dy) = \left(\int |\mu|(dx)\ \|Z(x)\|\right)^2$$

est fini. Le théorème de convergence dominée donne donc

$$\lim_{n,m}\ < Z(\mu_n)\ Z(\mu_m) > = \iint \mu(dx)\ C(x,y)\ \overline{\mu}(dy)$$

D'après le critère de Cauchy, $Z(\mu_n)$ converge donc vers une limite Y telle que $\|Y\|^2 = \iint \mu(dx)\ C(x,y)\ \overline{\mu}(dy)$. Pour tout X, d'autre part, $< Z(\mu_n),\ X > = \int \mu_n(dx)\ < Z(x),\ X >$ converge vers $< Y,X >$ (puisque la convergence forte entraîne la convergence faible). Mais $\int \mu_n(dx)\ < Z(x),X > = \int 1_{B_n}(x)\ < Z(x),X >\ \mu(dx)$ converge aussi vers $\int < Z(x),X >\ \mu(dx)$, comme on le voit en appliquant à nouveau le théorème de convergence dominée. On a donc $< Y,X > = \int \mu(dx)\ < Z(x),X >$ pour tout $X \in L^2$ , c'est-à-dire $Y = Z(\mu)$.

## 2-4 La dérivation en moyenne quadratique.

Dans cette sous-section, nous nous plaçons dans l'espace euclidien $E = \mathbb{R}$ à une seule dimension, à seule fin de simplifier les notations. Les résultats se transposent d'eux-mêmes en termes de dérivées partielles dans le cas de l'espace $\mathbb{R}^n$. Mais, dans ce dernier cas, il est souvent plus intéressant d'utiliser la notion un peu plus forte de différentiabilité. Nous n'examinerons cette dernière, dans la section 3, que dans le cas des F.A. stationnaires.

Si Z est une F.A. d'ordre 2 sur la droite réelle, nous dirons qu'une F.A. d'ordre 2 Z' est la dérivée en moyenne quadratique de Z si, pour tout $x \in R^n$, $\frac{Z(x+h)-Z(x)}{h}$ converge fortement vers $Z'(x)$ lorsque h tend vers 0.

D'après le critère de Cauchy, la F.A. Z(x) admet une dérivée si et seulement si $\lim\limits_{h,h'\to 0} < \frac{Z(x+h)-Z(x)}{h}, \frac{Z(x+h')-Z(x)}{h'} >$ existe.

Or ce produit scalaire vaut :

$$\frac{1}{h\,h'}\,[C(x+h,x+h') - C(x,x+h') - C(x+h,x) + C(x,x)]$$

On voit ainsi que Z est dérivable si et seulement si la covariance $C(x,y)$ admet une dérivée seconde $\frac{\partial^2 C}{\partial x\,\partial y}$ (en un sens très légèrement généralisé) en tout point de la diagonale de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Lorsque cette condition est remplie, la dérivée second existe en tout point de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, et $\frac{\partial^2 C}{\partial x\,\partial y}$ est la covariance de la dérivée $Z'(x)$.

En effet, on trouve d'abord :

$$< Z'(x),\ Z(y) > = \lim_{h\to 0} < \frac{Z(x+h)-Z(x)}{h}\ ,\ Z(y) > =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} [C(x+h,y) - C(x,y)] = \frac{\partial}{\partial x}\ C(x,y)$$

(puisque la convergence forte entraîne la convergence faible), puis de même :

$$< Z'(x), Z'(y) > = \lim_{h\to 0} < Z'(x),\ \frac{Z(y+h)-Z(y)}{h} > = \frac{\partial^2}{\partial x\ \partial y}\ C(x,y)$$

Ainsi :

<u>P-2-5</u> - Une F.A. d'ordre 2 sur $\mathbb{R}$ admettant la covariance C est dérivable en moyenne quadratique si et seulement si la dérivée seconde généralisée $\lim\limits_{h,h'\to 0} \frac{1}{hh'}\ [C(x+h,x+h') - C(x,x+h') - C(x+h,x) + C(x,x)]$ existe en tout point de la diagonale de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ . La dérivée seconde $\frac{\partial^2 C}{\partial x\ \partial y}$ existe alors en tout point de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ et coïncide avec la covariance de la dérivée.

Le rapport entre l'intégration et la dérivation est précisé par la proposition suivante :

<u>P-2-6</u> - Si Z(x) est une F.A. d'ordre 2 continue m.q. sur $\mathbb{R}$, on a en tout $x \in \mathbb{R}$ et pour a réel quelconque = $\frac{d}{dx} \int_a^x Z(\xi)d\xi = Z(x)$.

En effet, on a $\frac{1}{h} \left[\int_a^{x+h} Z(\xi)d\xi - \int_a^x Z(\xi)d\xi\right] = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} Z(\xi)d\xi$ , puis :

$$\| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} Z(\xi)d\xi - Z(x) \| = \frac{1}{h} \|\int_x^{x+h} [Z(\xi) - Z(x)]\ d\xi\ \| \leq \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \|Z(\xi) - Z(x)\|d\xi$$

Comme Z est continue m.q., on a $\|Z(\xi)-Z(x)\| \leq \varepsilon$ dès que $|\xi-x|$ est inférieur à un certain $\eta$. Pour $h < \eta$, l'intégrale précédente est donc majorée par $\varepsilon$, donc tend vers 0 avec h, ce qui établit la proposition.

## - Section 3 -

## LES FONCTIONS ALEATOIRES STATIONNAIRES D'ORDRE 2 (FAST)

### 3-1 La covariance.

Une F.A. d'ordre 2 $Z(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ est dite stationnaire si $E[Z(x)]$ est une constante et si $E[Z(x)\ Z(y)] = C(x-y)$ pour une fonction $C(h)$, $h \in \mathbb{R}^n$ appelée covariance stationnaire (non centrée). Cette covariance vérifie les propriétés :

$$\begin{cases} C(o) = E[|Z(x)|^2] \geq 0 \\ C(h) = \overline{C(-h)} \\ |C(h)| \leq C(o) \end{cases}$$

D'après P-2-1, les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

a/ $Z(x)$ est continue m.q.

b/ La covariance stationnaire C est continue en $h = 0$.

c/ C est continue sur $R^n$.

De même, une F.A. sur $\mathbb{R}_1$ $Z(x)$ sera dérivable si et seulement si $C(h)$ est deux fois différentiable en $h = 0$. $C(h)$ sera alors deux fois différentiable en tout $h \in \mathbb{R}$, et la dérivée seconde changée de signe $-C''(h)$ sera la covariance stationnaire de la FAST dérivée $Z'(x)$.

(Nous verrons au paragraphe 3-7 que ce résultat subsiste dans $\mathbb{R}^n$).

On voit que les covariances ne sont pas des fonctions tout-à-fait quelconques. En fait, pour qu'une fonction C sur $\mathbb{R}^n$ soit une covariance (c'est-à-dire pour qu'il existe une FAST Z(x) admettant la covariance stationnaire C(h), il faut et il suffit que C(h) soit <u>de type positif</u>, c'est-à-dire vérifie :

$$(3\text{-}1) \qquad \sum_{i,j} \lambda_i \bar{\lambda}_j \, C(x_i - x_j) \geq 0$$

pour tout entier $k > 0$, tout choix de k points $x_1, \ldots x_k$ dans $R^n$ et tout choix de k nombres complexes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$ : cette condition est nécessaire (elle exprime $E[|\sum_i \lambda_i Z(x_i)|^2] \geq 0$). Inversement, si elle est vérifiée, on peut former une F.A. à loi gaussienne (par exemple) admettant C comme covariance stationnaire. Nous verrons plus loin (théorème de Bochner) la caractérisation des fonctions de ~~covariances~~ continues.

Lorsque la FAST Z(x) est continue m.q., c'est-à-dire lorsque la covariance C(h) est continue, <u>l'intégrale stochastique</u> $\int \mu(dx)\, Z(x)$ <u>existe pour toute mesure μ bornée</u> (c'est-à-dire vérifiant $\int |\mu|(dx) < \infty$). Celà résulte de P-2-2, puisqu'ici $\|Z(x)\|^2 = C(o)$ est une constante. Les relations (2-4) et (2-5) deviennent ici :

$$E[\int Z(x)\, \mu(dx)] = m \int \mu(dx) \qquad (m = E[Z(x)],\ \forall x \in \mathbb{R}^n)$$

$$< Z(\mu),\ Z(\mu') > = \iint \mu(dx)\, C(x-y)\, \bar{\mu}'(dy)$$

Si μ est une mesure bornée, on peut donc introduire la F.A. d'ordre 2 :

$$Y(x) = \int \mu(dy)\, Z(y+x)$$

(<u>régularisée de Z par la mesure $\mu$</u>). Elle admet l'espérance $E[Y(x)] = m\int \mu(dy)$ indépendante de x, et la covariance :

$$< Y(x), Y(x') > = \iint \mu(dy)\ C(y-y' + x-x')\ \overline{\mu}(dy')$$

qui ne dépend que de x-x', et non séparément de x et x'. <u>La régularisée est donc elle-même une FAST</u>, dont la covariance stationnaire est la fonction K définie par :

$$K(h) = \iint \mu(dx)\ C(h+x-x')\ \overline{\mu}(dx')$$

Si la mesure $\mu$ admet une densité $\varphi[\mu(dx) = \varphi(x)dx]$, on pose $x' = y+h$, et on trouve :

$$K(h) = \int C(h-y)dy \int \varphi(x)\ \overline{\varphi}(x+y)dx$$

soit

$$K = C * \check{\varphi} * \overline{\varphi}$$

($\check{\varphi}$, transposée de $\varphi$, est définie par $\check{\varphi}(x) = \varphi(-x)$). On sait qu'un produit de convolution est dérivable pourvu seulement que l'un de ses facteurs le soit. Si donc la fonction $\varphi$ admet une dérivée d'ordre 1, K est deux fois dérivable, et la régularisée Y(x) est dérivable m.q. même si Z(x) ne l'était pas.

## <u>3-2 Le groupe continu $U_h$ d'opérateurs unitaires.</u>

Soit Z(x) une FAST sur $\mathbb{R}^n$ et C(h) sa covariance stationnaire. Désignons par $H(Z) \subset L^2$ le sous-espace fermé de $L^2$ engendré par les $Z(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Nous nous proposons de définir sur H(Z) un groupe $U_h$

d'opérateurs prolongeant les translations de $\mathbb{R}^n$ .

Soit $h \in \mathbb{R}^n$ . Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ , posons d'abord $U_h \; Z(x) = Z(x+h)$. $U_h$ est une application de $\{Z(x), \; x \in \mathbb{R}^n\}$ dans lui-même (en effet, si x et y sont deux points de $\mathbb{R}^n$ , $Z(x) = Z(y)$ équivaut $\|Z(x) - Z(y)\|^2 = 0$ donc à $C(o) = R_e \; C(x-y)$ et entraîne donc $Z(x+h) = Z(y+h)$ pour tout $h \in \mathbb{R}^n$). Cette application est bijective, et admet $U_{-h}$ comme inverse. Enfin les $U_h$ constituent un groupe commutatif ($U_{h+h'} = U_h \; U_{h'} = U_{h'} \; U_h$). Nous prolongeons ensuite $U_h$ sur l'espace (non fermé) $H(\Lambda)$ des combinaisons linéaires finies en posant :

$$U_h \int \lambda(dx) \; Z(x) = \int \lambda(dx) \; Z(x+h) \qquad (\lambda \in \Lambda)$$

On vérifie comme ci-dessus que cette application de $H(\Lambda)$ dans lui-même est bien définie ($Z(\lambda) = Z(\lambda')$ équivaut à :

$$\int [\lambda(dx)-\lambda'(dx)] \; C(x-y) \; [\overline{\lambda}(dy)-\overline{\lambda}'(dy)] = 0$$

et entraîne donc $U_h \; Z(\lambda) = U_h \; Z(\lambda')$ pour tout $h \in \mathbb{R}^n$). Par construction, $U_h$ est un opérateur linéaire sur $H(\Lambda)$. Il admet l'inverse $U_{-h}$ et les $U_h$ , $h \in \mathbb{R}^n$ forment un groupe commutatif. En fait, $U_h$ est un opérateur unitaire, car :

$$< U_h \; Z(\lambda), \; U_h \; Z(\lambda') > = \int \lambda(dx) \; C(x-y) \; \overline{\lambda}'(dy) = < Z(\lambda), \; Z(\lambda') >$$

et de même, plus généralement :

$$< U_h \; Z(\lambda), \; U_{h'} \; Z(\lambda') > = < U_{h-h'} \; Z(\lambda), \; Z(\lambda') >$$

Enfin $U_h$ est continue en h (dans le sens $\lim\limits_{h'\to 0} \; U_{h+h'} \; Z(\lambda) = U_h \; Z(\lambda)$

pour tout $Z(\lambda) \in H(\Lambda)$) si et seulement si $Z(x)$ est continue m.q., c'est-à-dire si et seulement si la covariance $C(h)$ est continue (vérification immédiate).

$U_h$ se prolonge ensuite sur $H(Z) = \overline{H(\Lambda)}$ en posant pour tout $Y \in H(Z)$, $U_h Y = \lim U_h Z(\lambda_n)$ pour une suite $\lambda_n$ telle que $Z(\lambda_n) \to Y$ [cette limite existe, car la suite $U_h Z(\lambda_n)$ est une suite de Cauchy d'après la relation $\|U_h Z(\lambda_n) - U_h Z(\lambda_m)\| = \|Z(\lambda_n) - Z(\lambda_m)\|$ et ne dépend pas du choix de la suite $\lambda_n$ telle que $Z(\lambda_n) \to Y$ : si une autre suite $Z(\lambda'_n) \to Y$, on a $Z(\lambda_n - \lambda'_n) \to 0$ et aussi $\|U_h [Z(\lambda_n) - Z(\lambda'_n)]\| = \|Z(\lambda_n) - Z(\lambda'_n)\| \to 0$].

Les relations suivantes sont conservées par ce passage à la limite, et restent donc vraies sur H :

$$(3\text{-}2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} U_{-h} = U_h^{-1} \\ \\ U_{h+h'} = U_h\, U_{h'} = U_{h'}\, U_h \\ \\ \|U_h\, Y\| = \|Y\| \\ \\ < U_h\, Y,\ U_{h'}\, Y' > = < U_{h-h'}\, Y,\ Y' > \end{array} \right.$$

Il s'agit donc d'un groupe d'opérateurs unitaires sur H. Ce groupe est continu en $h \in \mathbb{R}^n$ (c'est-à-dire $U_h Y \to Y$ pour $h \to 0$) si (et seulement si) la covariance $C(h)$ est continue. En effet, soit $Y \notin H(\Lambda)$, mais $Y \in H$, et $\varepsilon > 0$. On peut trouver $Z(\lambda) \in H(\Lambda)$ avec $\|Y - Z(\lambda)\| \leq \varepsilon$. On a alors $\|(U_h - I)Y\| \leq \|(U_h - I)[Y - Z(\lambda)]\| + \|(U_h - I)\, Z(\lambda)\|$. Le premier terme est majoré par $2\varepsilon$ et le second est arbitrairement petit pour h assez petit, d'où la continuité.

Les relations (3-2) montrent qu'à tout $Y \in H$ est associée la FAST $Y(x)$ définie par $Y(x) = U_x Y$. En particulier, $Z(x)$ elle-même est de cette forme, car $Z(x) = U_x Z_o$ avec $Z_o = Z(0)$. Ainsi $Z(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ coïncide avec la trajectoire dans H de l'élément $Z_o$ pour le groupe $U_x$ . Le fait que $H = H(Z)$ soit l'espace de Hilbert engendré par les $Z(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ est une limitation superflue que nous allons maintenant lever :

Soit $Z_i$, $i \in I$ une famille (éventuellement infinie) de F.A. d'ordre 2 sur $\mathbb{R}^n$ . On dira que c'est une famille stationnaire si, pour tout $i \in I$, $E[Z_i(x)]$ est indépendant de x, et si pour tout $i,j \in I$, la covariance (rectangle) $E[Z_i(x)\ Z_j(y)]$ est de la forme $C_{ij}(x-y)$, c'est-à-dire dépend uniquement de x-y et non pas séparément de chacun de ces deux points. Désignons par H l'espace de Hilbert engendré par les $Z_i(x)$, $i \in I$, $x \in \mathbb{R}^n$ , et posons $U_h\ Z_i(x) = Z_i(x+h)$. $U_h$ se prolonge encore par un groupe d'opérateurs unitaires sur H, continu en h si et seulement si chacune des FAST $Z_i(x)$ est continue m.q.

On voit que finalement la donnée d'une famille stationnaire de F.A. d'ordre 2 continues en moyenne quadratique est équivalente à la donnée <u>d'un groupe continu d'opérateurs unitaires</u> $U_h$, <u>$h \in \mathbb{R}^n$</u> , <u>définis sur un sous-espace fermé H d'un espace $L^2(\Omega,\mathcal{A},P)$</u>. C'est dans ce cadre que nous allons maintenant travailler.

A tout élément $Y \in H$ est associée la FAST $Y(x) = U_x Y$, $x \in \mathbb{R}^n$ , dont la covariance stationnaire est la fonction C définie par $C(h) =$ $= < U_h Y,Y >$ , et aussi le sous-espace fermé $H(Y) \subset H$ engendré par les $U_x Y$, $x \in \mathbb{R}^n$ . On désignera par $\Pi_Y$ le <u>projecteur</u> de H(Y). Il vérifie la relation de <u>commutation</u> :

$$U_h \Pi_y = \Pi_y U_h \qquad (h \in \mathbb{R}^n) \tag{3-3}$$

En effet, $H(Y)$, engendré par les $U_x Y, x \in \mathbb{R}^n$, est stable par construction pour $U_h$. Soit $X \in H$. Dans l'expression : $U_h X = U_h \Pi_y X + U_h(I-\Pi_y)X$ le premier terme est donc dans $H(Y)$. Le second est dans l'orthogonal de $H(Y)$, car pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $< U_x Y, U_h(I-\Pi_y)X > = < U_{x-h} Y, (I-\Pi_y)X > = 0$. D'après l'unicité de la décomposition orthogonale, on en déduit $U_h \Pi_y X = \Pi_y U_h X$, c'est-à-dire la relation (3-3).

## 3-3 Les éléments invariants.

Soit, comme ci-dessus, $H$ un espace de Hilbert de variables aléatoires muni d'un groupe continu d'opérateurs unitaires $U_h$, $h \in \mathbb{R}^n$. Nous dirons qu'un élément $X \in H$ est <u>invariant</u> (pour le groupe $U_h$) s'il vérifie la relation :

$$U_h X = X$$

pour tout $h \in \mathbb{R}^n$. Nous désignerons par $H_o \subset H$ l'ensemble des invariants de $H$. $H_o$ est <u>un sous-espace fermé</u> de $H$ (à cause de la continuité des opérateurs $U_h$ : $X_n \to X$ entraînant $U_h X_n \to U_h X$ pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, les relations $U_h X_n = X_n$ passent à la limite). Nous désignerons par $E_o$ le projecteur de l'espace $H_o$ des invariants. Dans beaucoup d'applications, on choisit l'espace $H$ et le groupe $U_h$ de manière à ce que les seuls éléments invariants soient les constantes (<u>cas dit ergodique</u>). <u>Dans ce cas, le projecteur $E_o$ est identifiable à l'espérance mathématique $E$</u>. En effet, dans ce cas, l'élément $1 \in L^2$ constitue à lui tout seul une base orthonormée de $H_o$, et l'on a pour tout $Y \in H$ : $E_o\ Y = < Y,\ 1 > 1 = E(Y)1 = E(Y)$. C'est cette circonstance qui confère son intérêt au théorème ergodique qui sera établi ci-dessous.

Revenons au cas général où $H_o$ est un sous-espace fermé quelconque de H. On a les relations :

$$E_o\ U_h = U_h\ E_o = E_o \qquad (h \in \mathbb{R}^n) \tag{3-4}$$

En effet, pour $X \in H$ on a $E_o\ X \in H_o$, puisque $E_o$ est le projecteur de $H_o$ , donc $U_h\ E_o\ X = E_o\ X$ par définition de $H_o$, c'est-à-dire $U_h\ E_o = E_o$ . Pour tout $Y \in H$, on en déduit : $< E_o\ U_h\ X, Y > = < U_h\ X,\ E_o\ Y >$ (puisque $E_o$ est un projecteur) $= < X, U_{-h}\ E_o\ Y > = < X, E_o\ Y >$ (d'après (3-4) appliquée avec $-h$ au lieu de h) $= < E_o\ X, Y >$ , donc $E_o\ U_h\ X = E_o\ X$, soit $E_o\ U_h = E_o$ .

Soit maintenant X un élément de H, H(X) le sous-espace fermé de H engendré par les $U_x\ X$, $x \in \mathbb{R}^n$ , et $\Pi_X$ le projecteur de H(X). On a les relations de commutation :

$$\Pi_X\ E_o = E_o\ \Pi_X \tag{3-5}$$

En effet, en utilisant successivement les relations de commutations (3-3) et (3-4), on trouve pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ : $U_h\ \Pi_X\ E_o = \Pi_X\ E_o$. Pour tout $Y \in H$, l'élément $\Pi_X\ E_o\ Y$ est donc invariant par $U_h$, soit $\Pi_X\ E_o\ Y \in H_o$ , ou encore $E_o\ \Pi_X\ E_o\ Y = \Pi_X\ E_o\ Y$. On en déduit : $\Pi_X\ E_o = E_o\ \Pi_X\ E_o$ . Pour Y et Y' quelconques dans H, celà entraîne (puisque $\Pi_X$ et $E_o$ sont des projecteurs) :

$$< E_o \Pi_X Y, Y' > = < Y, \Pi_X E_o Y' > = < Y, E_o \Pi_X E_o Y' > =$$

$$< E_o \Pi_X E_o Y, Y' > \text{ . Donc } E_o \Pi_X = E_o \Pi_X E_o = \Pi_X E_o \text{ .}$$

La relation de commutation (3-5) entraîne la proposition suivante, qui constitue déjà une première version du théorème ergodique.

P-3-1 - Pour tout $X \in H$, l'invariant $E_o X$ appartient au sous-espace fermé $H(X)$ engendré par les $U_x X$, $x \in \mathbb{R}^n$, et les seuls invariants contenus dans $H(X)$ sont les éléments proportionnels à $E_o X$. En particulier, $H(X)$ ne contient des invariants non nuls que si $E_o X \neq 0$.

En effet $\Pi_X E_o X \in H(X)$ entraîne, d'après (3-5) $E_o \Pi_X X = E_o X \in H(X)$. Si $X_o \in H_o \cap H(X)$, il existe une suite $\lambda_n \in \Lambda$ telle que l'on ait $X_o = \lim \int \lambda_n(dx)\, U_x X$, donc (le projecteur $E_o$ étant continu) $X_o = E_o X_o = \lim \int \lambda_n(dx)\, E_o U_x X$. D'après (3-4), il en résulte : $X_o = E_o X \lim \int \lambda_n(dx)$, et $X_o$ est proportionnel à $E_o X$.

## 3-4 Le théorème de Bochner.

On a vu qu'une fonction $C$ sur $\mathbb{R}^n$ est une covariance stationnaire si et seulement si elle est de type positif. Le théorème suivant caractérise donc la classe des covariances continues (aussi bien que la classe des fonctions caractéristiques du calcul des probabilités).

P-3-2 - (Théorème de Bochner) Une fonction $\Phi$ sur $\mathbb{R}^n$ est continue et de type positif si et seulement si elle est transformée de Fourier d'une mesure positive sommable.

a/ Soit $F(dx)$ une mesure positive sur $\mathbb{R}^n$ telle que $\int F(dx) < \infty$.

La fonction $\Phi$ définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$\Phi(u) = \int e^{-2i\pi(ux)} F(dx)$$

où (ux) représente le produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ est continue. Soient $U_j$, $j = 1,2,\ldots N$, N points de $\mathbb{R}^n$, et $\lambda_j$, $j = 1,2,\ldots N$ des nombres complexes. On a :

$$\sum_{j,k} \lambda_j \overline{\lambda}_k \Phi(u_j-u_k) = \int \sum_{j,k} \lambda_j \overline{\lambda}_k e^{-2i\pi[x(u_j-u_k)]} F(dx) =$$

$$= \int \left| \sum_j \lambda_j e^{-2i\pi(xu_j)} \right|^2 F(dx) \geq 0$$

et $\Phi$ est de type positif.

b/ La réciproque est un peu plus délicate à établir et va nécessiter plusieurs étapes. Soit $\Phi$ une fonction continue de type positif sur $\mathbb{R}^n$ . Comme on l'a vu, il existe alors une FAST Z(x) admettant la covariance stationnaire $\Phi(x)$, et l'intégrale stochastique $\int \varphi(x)\, Z(x)dx$. existe pour toute fonction sommable $\varphi$, ce qui entraîne :

$$E(|Z(x)|^2) = \iint \varphi(x)\ \Phi(x-y)\ \varphi(y)\ dx\ dy \geq 0$$

En particulier, pour la fonction $\varphi$ définie par :

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi b^2)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{2b^2} + 2i\pi(ux)}$$

on trouve :

$$\frac{1}{(2\pi b^2)^{n/2}} \iint e^{-\frac{x^2+y^2}{2b^2} + 2i\pi u(x-y)} \Phi(x-y)\ dx\ dy =$$

$$\frac{1}{(2\pi b^2)^{n/2}} \int e^{2i\pi uh}\ \Phi(h)\ dh \int e^{-\frac{(x+h)^2+y^2}{2b^2}} dy \geq 0$$

Mais la seconde intégrale est la convoluée de deux densités gaussiennes, et par suite :

$$\frac{1}{(2\pi b^2)^{n/2}} \int e^{-\frac{(x+h)^2+y^2}{2b^2}} dy = \frac{1}{(4\pi b^2)^{n/2}} e^{-\frac{h^2}{4b^2}}$$

Par conséquent, en posant $a = 1/4b^2$, on voit que pour $a > 0$ la transformée de Fourier $f_a(u)$ de la fonction $e^{-ah^2}\,\Phi(h)$ est une <u>fonction positive</u> :

$$(\alpha) \qquad f_a(u) = \int e^{2i\pi uh}\, e^{-ah^2}\, \Phi(h)\, dh \geq 0$$

Montrons que l'on a le droit d'inverser cette relation, c'est-à-dire d'écrire :

$$(\beta) \qquad e^{-ah^2}\, \Phi(h) = \int e^{-2i\pi uh}\, f_a(u)\, du$$

Il suffit pour celà de vérifier que la fonction positive $f_a(u)$ a une intégrale finie, soit $\int f_a(u)\, du < \infty$ ; D'après la propriété de convergence monotone de l'intégrale, on peut écrire tout d'abord :

$$\int f_a(u)du = \lim_{b\uparrow\infty} \int e^{-\frac{u^2}{2b}} f_a(u)du$$

En tenant compte de la définition ($\alpha$) de la fonction $f_a$, on trouve ensuite :

$$\int e^{-\frac{u^2}{2b}} f_a(u)du = \iint e^{-ah^2-\frac{u^2}{2b}+2i\pi uh}\, \Phi(h)\, du\, dh =$$

$$= \int e^{-ah^2}\, \Phi(h)dh \int e^{-\frac{u^2}{2b}+2i\pi uh} du = (2\pi b)^{n/2} \int e^{-uh^2-2\pi^2 bh^2} \Phi(h)dh =$$

$$= (2\pi)^{n/2} \int e^{-2\pi^2\xi^2-\frac{a\xi^2}{b}}\, \Phi\left(\frac{\xi}{\sqrt{b}}\right) d\xi$$

Dans cette dernière expression, la fonction à intégrer vérifie la majoration :

$$\left| e^{-2\pi^2\xi^2 - \frac{a\xi^2}{b}} \Phi\left(\frac{\xi}{\sqrt{b}}\right) \right| \leq e^{-2\pi^2\xi^2} \Phi(0)$$

indépendante de b, et converge pour chaque $\xi$ vers $e^{-2\pi^2\xi^2} \Phi(0)$ lorsque b tend vers l'infini (car, par hypothèse, $\Phi$ est continue). Le théorème de convergence dominée s'applique alors, et donne :

$$\int f_a(u)du = (2\pi)^{n/2} \Phi(0) \int e^{-2\pi^2\xi^2} d\xi = \Phi(0)$$

La fonction positive $f_a$ a donc une intégrale finie, et la formule d'inversion ($\beta$) est donc valable. Faisons maintenant tendre a vers 0. On sait qu'une suite de mesures positives sommables converge étroitement (on dit aussi : converge en loi lorsqu'il s'agit de probabilités) vers une mesure positive sommable si et seulement si la suite des transformées de Fourier converge ponctuellement vers une limite continue, et la limite des transformées est alors la transformée de la limite. Ici, $e^{-ah^2} \Phi(h)$ admet la limite $\Phi(h)$, continue par hypothèse. Donc les mesures positives $f_a(u)du$ convergent étroitement vers une mesure positive $F(du)$ admettant la transformée de Fourier $\Phi(h)$, soit

$$\Phi(h) = \int e^{-2i\pi uh} F(du)$$

ce qui achève la démonstration.

## 3-5 L'isomorphisme $\alpha : H(\underline{X}) \to L^2(\underline{R}^n, \underline{X})$.

Soit alors H un espace de Hilbert muni d'un groupe continu d'opérateurs unitaires $U_h$ , $h \in \mathbb{R}^n$ . D'après le théorème de Bochner, à tout élément $X \in H$ est associé une mesure positive sommable $\chi$ sur $\mathbb{R}^n$ telle que l'on ait :

$$(3\text{-}6) \qquad < U_h X, X > = \int e^{-2i\pi uh} \chi(du) \qquad (h \in \mathbb{R}^n)$$

Nous dirons que $\chi$ est la <u>mesure spectrale</u> associée à X. Soit alors H(X) le sous-espace fermé de H engendré par les $U_h X$, $h \in \mathbb{R}^n$ . Nous allons maintenant montrer que <u>les deux espaces de Hilbert H(X) et $L^2(\mathbb{R}^n,\chi)$ sont isomorphes</u> (il s'agit d'un isomorphisme entre espaces de Hilbert, c'est-à-dire d'un isomorphisme conservant le produit scalaire). Pour celà, nous procéderons par étapes.

a/ Définissons d'abord une application $\alpha$ du sous-ensemble $\{U_x X, x \in \mathbb{R}^n\}$ de H(X) dans $L^2 = L^2(\mathbb{R}^n, \chi)$, en posant pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ :

$$(3\text{-}7) \qquad \alpha(U_x X) = e^{-2i\pi(x.)}$$

(la notation $e^{-2i\pi(x.)}$ représente la fonction qui vaut $e^{-2i\pi(xu)}$ en chaque $u \in \mathbb{R}^n$). Pour que cette définition ait un sens, il faut vérifier que $U_x X = U_y Y$ pour deux points x et y distincts entraine l'égalité $e^{-2i\pi(x.)} = e^{-2i\pi(y.)}$ au sens de $L^2(\mathbb{R}^n,\chi)$, c'est-à-dire $\chi$-<u>presque partout</u>. De fait, d'après (3-6) on a les équivalences

$U_x X = U_y X \Leftrightarrow \| U_x X - U_y X\| = 0 \Leftrightarrow 2 \|X\|^2 - < U_{x-y} X, X > - < U_{y-x} X, X >$

$\Leftrightarrow \int | 1 - e^{-2i\pi u(x-y)}|^2 \chi(du) = 0 \Leftrightarrow e^{-2i\pi ux} = e^{-2i\pi uy}$ $\chi$ presque partout.

Comme il s'agit même d'équivalences, on a montré du même coup que l'application $\alpha$ définie en (3-7) est <u>injective</u>.

b/ Pour toute mesure $\mu$ bornée, posons maintenant :

$$\alpha \left[ \int \mu(dx)\ U_x\ X \right] = \int e^{-2i\pi(x,\cdot)}\ \mu(dx) \tag{3-8}$$

Ici encore, il faut vérifier que $\int \mu(dx)\ U_x\ X = \int \mu'(dx)\ U_x\ X$ entraîne l'égalité $\chi$ presque partout des transformées de Fourier $\tilde{\mu}$ et $\tilde{\mu}'$ des mesures $\mu$ et $\mu'$. De fait $\| \int \mu(dx)\ U_x\ X - \int \mu'(dx)\ U_x\ X \| = 0$ équivaut à :

$$\iint [\mu(dx)-\mu'(dx)] < U_{x-y}\ X, X > [\overline{\mu}(dy)-\overline{\mu}'(dy)] = 0$$

c'est-à-dire, d'après (3-6) à :

$$\int \chi(du) \iint [\mu(dx)-\mu'(dx)]\ e^{-2i\pi u(x-y)}\ [\overline{\mu}(dy)-\overline{\mu}'(dy)] = 0$$

donc à $\int |\tilde{\mu}(u) - \tilde{\mu}'(u)|^2\ \chi(du) = 0$, c'est-à-dire enfin à $\tilde{\mu} = \tilde{\mu}'$ presque partout pour $\chi$. Comme il s'agit d'une équivalence, on a du même coup démontré que l'application linéaire $\alpha$ définie sur le sous-vectoriel $H(M)$ non fermé dans $H$ (ensemble des éléments de la forme $\int \mu(dx)\ U_x\ X$ où $\mu$ est une mesure bornée) est une <u>injection</u> dans $L^2(\mathbb{R}^n, \chi)$.

Cette application conserve le produit scalaire (donc aussi la norme). Soient, en effet, $\mu$ et $\nu$ deux mesures bornées, $\tilde{\mu}$ et $\tilde{\nu}$ leurs transformées de Fourier, images dans $L^2$ par l'application $\alpha$ des éléments $\int \mu(dx)\ U_x\ X$ et $\int \nu(dx)\ U_x\ X$. En utilisant (3-6), on trouve :

$$< \int \mu(dx)\ U_x\ X, \int \nu(dy)\ U_y\ X > = \iint \mu(dx) < U_{x-y}\ X, X > \nu(dy) =$$

$$= \iiint \mu(dx)\ \nu(dy)\ e^{-2i\pi u(x-y)}\ \chi(du) = \int \tilde{\mu}(u)\ \tilde{\nu}(u)\ \chi(du)$$

et cette dernière expression est le produit scalaire $< \tilde{\mu}, \tilde{\nu} >$ dans $L^2$.

L'espace H(M) de définition de cette application $\alpha$ est dense dans H(X). L'espace image est dense dans $L^2(\mathbb{R}^n,\chi)$ (car il contient les exponentielles complexes qui forment une partie totale dans $L^2(\mathbb{R}^n,\chi)$ comme on le vérifie immédiatement). Enfin, $\alpha$ est continue (puisqu'elle conserve la norme) injective et conserve le produit scalaire. Cette application se prolonge donc par un isomorphisme d'espacesde Hilbert de H(X) sur $L^2(\mathbb{R}^n,\chi)$. Nous désignerons encore cet isomorphisme par $\alpha$.

3-6 Le théorème ergodique.

Cherchons maintenant l'image par cet isomorphisme $\alpha : H(X) \to L^2(\mathbb{R}^n,\chi)$ de l'opérateur unitaire $U_h$ $(h \in \mathbb{R}^n)$. Cette image $\alpha \circ U_h$ est un opérateur unitaire dans $L^2$. Comme on a $\alpha(U_h\, U_x\, X) = \alpha(U_{h+x}\, X) = e^{-2i\pi(h.)-2i\pi(x.)}$ d'après (3-7), c'est-à-dire $\alpha(U_h\, U_x\, X) = e^{-2i\pi(h.)}\, \alpha(U_x\, X)$, on voit que $\alpha \circ U_h$ est l'opérateur multiplicatif $e^{-2i\pi(h.)}$ dans $L^2$ .

Cherchons alors à quelle condition un élément $Y \in H(X)$ est invariant pour le groupe $U_h$ . Soit $\varphi = \alpha(Y)$ l'image de Y dans $L^2(\mathbb{R}^n,\chi)$. Y sera invariant pour $U_h$ si et seulement si son image est invariante pour le groupe $\alpha \circ U_h$ , c'est-à-dire si et seulement si on a pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ :

$$\varphi(u) = e^{-2i\pi(uh)}\, \varphi(u) \quad \text{pour } \chi \text{ presque tout } u$$

$\varphi(o)$ peut être quelconque, $\varphi(u)$ doit être nulle pour $\chi$ presque tout $u \neq 0$. Autrement dit, on doit avoir $\varphi = a\, 1_{\{o\}}$ ($\chi$ presque partout) pour un nombre complexe a. ($1_{\{o\}}$ est l'indicatrice de $\{o\}$, définie par $1_{\{o\}}(o) = 1$ et $1_{\{o\}}(u) = 0$ pour $u \neq 0$).

Si la mesure $\chi$ n' a pas d'atome à l'origine $[\chi(\{o\}) = 0]$, $1_{\{o\}} = 0$ $\chi$ presque partout, et il n'y a pas d'invariants non nuls dans $H(X)$. Au contraire, si la mesure $\chi$ a un atome à l'origine $[\chi(\{o\}) \neq 0]$, $1_{\{o\}}$ n'est pas équivalent à 0, et $H(X)$ contient des invariants non nuls qui forment un sous-espace à une dimension. D'après P-3-1, $E_o X$ est dans $H(X)$, et on a donc $\alpha(E_o X) = a\, 1_{\{o\}}$. Les relations $< E_o X, E_o X > = < X, E_o X > = < E_o X, X >$ entraînent ensuite, puisque $\alpha$ conserve le produit scalaire, $< a\, 1_{\{o\}}, a\, 1_{\{o\}} > = < 1, a\, 1_{\{o\}} > = < a\, 1_{\{o\}}, 1 >$ dans $L^2$, c'est-à-dire $a\, \chi(\{o\}) = \bar{a}\, \chi(\{o\}) = |a|^2 \chi(\{o\})$. Si $\chi$ a un atome à l'origine, ceci entraîne $a = 0$ ou $a = 1$. Mais $a = 0$ est exclu (car $E_o X = 0$ entraîne qu'il n'y a pas d'invariants non nuls, d'après P-3-1). Donc l'image de $E_o X$ est l'indicatrice $1_{\{o\}}$ elle-même. Si $\chi$ n'a pas d'atome, on a $E_o X = 0$ et $1_{\{o\}} = 0$ dans $L^2(\mathbb{R}^n, \chi)$, de sorte qu'on peut dans tous les cas considérer $1_{\{o\}}$ comme l'image de $E_o X$ :

$$(3\text{-}9) \qquad \alpha(E_o X) = 1_{\{o\}}$$

Il est alors facile d'établir le théorème suivant :

<u>P-3-3</u> (<u>Théorème ergodique</u>)- Soit $\mu_t$, $t > 0$ une famille à un paramètre de mesures positives de somme unité ($\int \mu_t(dx) = 1$), et $\tilde{\mu}_t$ les transformées de Fourier de ces mesures. Si l'on a pour tout $u \neq 0$ dans $\mathbb{R}^n$ : $\lim\limits_{t\to\infty} \tilde{\mu}_t(u) = 0$, alors $\int \mu_t(dx)\, U_x X$ converge fortement vers $E_o X$ pour $t \to \infty$.

En effet, on a $\alpha(\int \mu_t(dx)\, U_x X) = \tilde{\mu}_t$ d'après (3-8). De $|\tilde{\mu}_t| \leq \tilde{\mu}_t(o) = 1$ résulte $|\tilde{\mu}_t(u) - 1_{\{o\}}(u)|^2 \leq 4$, et, pour $t \to \infty$, cette fonction converge ponctuellement vers 0. D'après le théorème de convergence dominée, on a donc $\int |\tilde{\mu}_t(u) - 1_{\{o\}}(u)|^2 \chi(du) \to 0$, et $\tilde{\mu}_t$

converge vers $1_{\{0\}}$ dans $L^2(\mathbb{R}^n,\chi)$. Compte tenu de la relation (3-9), et puisque $\alpha$ est un isomorphisme d'espace de Hilbert, celà entraîne $\lim \int \mu_t(dx)\ U_x\ X = E_0\ X$.

<u>Exemples</u> - On peut prendre pour $\mu_t$ la loi de Gauss de densité $\frac{1}{(2\pi t)^{n/2}}\, e^{-\frac{x^2}{2t}}$ dont la transformée de Fourier est $e^{-\frac{t}{2}u^2}$, soit :

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}} \int e^{-\frac{x^2}{2t}}\ U_x\ X\, dx = E_0\ X$$

On peut aussi prendre $\mu_t(dx) = \frac{1}{t^n} k_n(x)dx$, où $k_n(x)$ est l'indicatrice du cube $[0,t]^n$ de $\mathbb{R}^n$, avec $\tilde{\mu}_t(u) = \prod_{j=1}^{n} \frac{1- e^{-2i\pi u_j t}}{2i\pi u_j t}$. Dans ce cas, en explicitant les coordonnées $x_1,x_2,\dots x_n$ de $x \in \mathbb{R}^n$, on trouve :

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^n} \int_0^t dx_1 \int_0^t dx_2 \dots \int_0^t U_{x_1}\ U_{x_2} \dots U_{x_n}\ X\, dx_n = E_0\ X$$

## <u>3-7 Analyse harmonique de la FAST $U_x X$.</u>

Soit $\mathcal{B}$ la famille des boréliens de $\mathbb{R}^n$, et $\zeta : \mathcal{B} \to L^2(\Omega,\mathcal{A},P)$ une application de $\mathcal{B}$ dans un espace de V.A. d'ordre 2. Nous dirons que $\zeta$ est une <u>mesure aléatoire orthogonale</u> (à valeurs dans $L^2(\Omega,\mathcal{A},P)$ si cette application vérifie les trois axiomes suivants :

1 - $B,\ B' \in \mathcal{B},\ B \cap B' = \emptyset \Rightarrow \langle \zeta(B),\ \zeta(B') \rangle = 0$

2 - $B,\ B' \in \mathcal{B},\ B \cap B' = \emptyset \Rightarrow \zeta(B \cup B') = \zeta(B) + \zeta(B')$

3 - $B_n \downarrow \emptyset$ dans $\mathcal{B} \Rightarrow \zeta(B_n) \to 0$ fortement

$\zeta$ vérifiant ces conditions, posons $\chi(B) = \|\zeta(B)\|^2$ . L'application $\chi : \mathcal{B} \to \mathbb{R}_+$ ainsi définie est une mesure positive sommable. En effet, d'après 1 et 2, pour $B \cap B' = \emptyset$, on a $\chi(B \cup B') = \chi(B) + \chi(B') + < \zeta(B), \zeta(B') > + < \zeta(B'), \zeta(B) > = \chi(B) + \chi(B')$, et $\chi$ est additive. Si $B_n \downarrow \emptyset$, on a $\zeta(B_n) \to 0$, donc $\chi(B_n) \to 0$, et $\chi$ vérifie la continuité monotone séquentielle. Enfin, avec $B = \mathbb{R}^n$, on a $\zeta(\mathbb{R}^n) \in L^2(\Omega,\mathcal{A},P)$, donc $\chi(\mathbb{R}^n) = \|\zeta(\mathbb{R}^n)\|^2 < \infty$ : $\chi$ est une <u>mesure positive sommable</u>.

On peut ensuite définir <u>l'intégrale</u> (<u>au sens de Lebesgue</u>) $\varphi(u)\ \zeta(du)$ pour toute fonction $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n,\chi)$. Pour celà, on considère d'abord le cas où $\varphi$ est une fonction étagée, soit $\varphi = \sum C_j\ 1_{B_j}$ ($C_j$ complexes, $1_{B_j}$ indicatrices d'un nombre fini de boréliens disjoints) et on définit l'intégrale en posant $\int \varphi(u)\ \zeta(du) = \sum C_j\ \zeta(B_j)$. Compte tenu de l'axiome 2, on trouve $\|\int \varphi(u)\ \zeta(du)\|^2 = \sum_j |C_j|^2\ \chi(B_j) = \int |\varphi(u)|^2\ \chi(du)$, et, plus généralement, pour deux fonctions étagées quelconques $\varphi_1$ et $\varphi_2$ :

$$< \int \varphi_1(u)\ \zeta(du)\ , \int \varphi_2(u)\ \zeta(du) > = \int \varphi_1(u)\ \overline{\varphi_2(u)}\ \chi(du)$$

Le sous-espace (non fermé) de $L^2(\chi)$ constitué des fonctions étagées est ainsi rendu isomorphe au sous-espace (non fermé) de $L^2(\Omega,\mathcal{A},P)$ constitué des intégrales $\int \varphi(u)\ \zeta(du)$ correspondantes. Par continuité, cet isomorphisme se prolonge par un isomorphisme $\zeta : L^2(\chi) \to H$ de $L^2(\chi)$ sur un sous-espace fermé $H$ de $L^2(\Omega,\mathcal{A},P)$. Comme il s'agit d'un isomorphisme d'espaces de Hilbert, on a (pour $\varphi_1$ , $\varphi_2$ dans $L^2(\mathbb{R}^n,\chi)$) :

$$(3\text{-}10) \qquad < \zeta(\varphi_1)\ ,\ \zeta(\varphi_2) > = \int \varphi_1(u)\ \overline{\varphi_2(u)}\ \chi(du)$$

Si $\varphi_n$ et $\varphi$ sont des fonctions réelles positives appartenant à $L^2(\chi)$, la convergence monotone $\varphi_n \uparrow \varphi$ entraîne $\zeta(\varphi_n) \to \zeta(\varphi)$ fortement. En effet, $|\varphi-\varphi_n|^2$ est majoré par la fonction $|\varphi|^2$ intégrable pour $\chi$, et le théorème de convergence dominée montre que $\|\zeta(\varphi_n)-\zeta(\varphi)\|^2 = \int |\varphi-\varphi_n|^2 \chi(du)$ converge vers 0. On sait que pour toute fonction réelle positive $\varphi \in L^2(\chi)$ on peut trouver une suite de fonctions étagées $\varphi_n$ telles que $\varphi_n \uparrow \varphi$. On a donc $\zeta(\varphi) = \lim \int \varphi_n(u)\ \zeta(du)$, et on peut donc considérer $\zeta(\varphi)$ comme une intégrale stochastique au sens de Lebesgue, soit

$$\zeta(\varphi) = \int \varphi(u)\ \zeta(du)$$

Dans le cas où $\varphi$ est une fonction <u>continue bornée</u>, on peut aussi considérer $\zeta(\varphi)$ comme une intégrale au sens de <u>Stieltjes</u>, soit $\zeta(\varphi) = \int \varphi(u)\ d\ \zeta(u)$. En effet, considérons pour N entier $> 0$, la partition de $\mathbb{R}^n$ au moyen des cubes $A_i^N$ déjà utilisés au paragraphe 2-3 (démonstration du lemme 2-1), et choisissons un point $U_i^N$ dans chaque cube $A_i^N$. Posons $\varphi_N = \sum\limits_i \varphi(U_i^N)\ 1_{A_i^N}$. Pour tout u, on a $\lim \varphi_N(u) = \varphi(u)$ pour $N \to \infty$. Les fonctions $\varphi_N$ vérifient : $|\varphi_N(u)| \leq \operatorname{Sup}\limits_u |\varphi(u)| < \infty$, de sorte que le théorème de convergence dominée donne $\int |\varphi-\varphi_N|^2 \chi \to 0$, c'est-à-dire $\zeta(\varphi_N) \to \zeta(\varphi)$ fortement. Ainsi :

$$\zeta(\varphi) = \lim_{N\to\infty} \sum_i \varphi(U_i^N)\ \zeta(A_i^N)$$

Il s'agit donc bien d'une intégrale au sens de Stieltjes.

<u>P-3-4</u> - Une F.A. $X(x)$ sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans un espace $L^2(\Omega,\mathcal{A},P)$ est une FAST si et seulement si elle est transformée de Fourier d'une mesure orthogonale $\zeta$, nécessairement unique, à valeurs dans $L^2(\Omega,\mathcal{A},P)$, soit :

$$X(x) = \int e^{-2i\pi(ux)} \zeta(du)$$

(l'intégrale étant prise indifféremment au sens de Lebesgue ou de Stieltjes).

En effet, soit $X(x) = U_x X$ une FAST, $\chi$ sa mesure spectrale, et $\zeta = \alpha^{-1}$ l'isomorphisme d'espaces de Hilbert, $\zeta : L^2(\mathbb{R}^n,\chi) \to H(X)$ associant à l'exponentielle complexe $e^{-2i\pi(h.)}$ la variable aléatoire $\zeta(e^{-2i\pi(h.)}) = U_x X$. (Si $\alpha$ est l'isomorphisme $H(X) \to L^2(\mathbb{R}^n,\chi)$ introduit au paragraphe 3-5, on a donc $\zeta = \alpha^{-1}$). Pour $B \in \mathcal{B}$, on a évidemment $1_B \in L^2(\mathbb{R}^n,\chi)$. Posons $\zeta(B) = \zeta(1_B)$. $\zeta$ est alors une mesure orthogonale sur $\mathcal{B}$, car $B \cap B' = \emptyset$ entraîne $1_{B\cup B'} = 1_B + 1_{B'}$, d'où l'axiome 2, et $1_B\, 1_{B'} = 0$, d'où $< \zeta(B), \zeta(B') > = \int 1_B\, 1_{B'}\, \chi = 0$ et l'axiome 1, et l'axiome 3 se vérifie immédiatement à partir du théorème de convergence dominée. L'intégrale $\int \varphi(u)\, \zeta(du)$ associée à cette mesure coïncide avec la fonctionnelle $\zeta(\varphi)$ lorsque $\varphi$ est une fonction étagée, donc aussi par continuité pour tout $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n,\chi)$. Pour $\varphi = e^{-2i\pi(h.)}$ en particulier, on a $\zeta(\varphi) = U_h X$ par définition, donc $U_h X = \int e^{-2i\pi(uh)} \zeta(du)$.

Inversement, soit $\zeta$ une mesure orthogonale à valeur dans $L^2(\Omega,\mathcal{A},P)$, et posons $X(x) = \int e^{-2i\pi(ux)} \zeta(du)$. Si $\chi$ est la mesure vérifiant $\|\zeta(B)\|^2 = \chi(B)$, la relation (3-10) donne :

$$< X(x), X(y) > = < \zeta(e^{-2i\pi(x.)}), \zeta(e^{-2i\pi(y.)}) > =$$

$$= \int e^{-2i\pi u(x-y)} \chi(du)$$

$X(x)$ est donc une FAST dont la mesure spectrale est $\chi$. L'isomorphisme $\alpha : H(X) \to L^2(\mathbb{R}^n,\chi)$ du paragraphe 3-5 vérifie $\alpha(X(x)) = e^{-2i\pi(x.)}$.

On a donc $\zeta = \alpha^{-1}$, et la mesure $\zeta$ est nécessairement unique.

Lorsque $Z(x)$ est une FAST <u>réelle</u>, il y a intérêt à séparer la partie réelle et la partie imaginaire de $\zeta$. La mesure spectrale $\chi$ est ici symétrique par rapport à l'origine, et $\zeta(\varphi)$ est une V.A. réelle (resp. imaginaire) si et seulement $\varphi$ possède la symétrie hermitienne $\varphi(u) = \overline{\varphi(-u)}$ (resp. l'antisymétrie $\varphi(u) = -\overline{\varphi(-u)}$). Pour tout borélien $B \in \mathcal{B}$, désignons par $\check{B}$ le symétrique de $B$ par rapport à l'origine, et posons :

$$\begin{cases} \xi(B) = \frac{1}{2}[\zeta(B) + \zeta(\check{B})] \\ \\ \eta(B) = \frac{1}{2i}[\eta(B) - \eta(\check{B})] \end{cases}$$

$\xi$ et $\eta$ sont deux mesures aléatoires <u>réelles</u> respectivement symétrique et antisymétrique. $\xi$ et $\eta$ ne sont plus orthogonales, mais on a encore $< \xi(B), \xi(B') > = < \eta(B), \eta(B') > = 0$ si $B' \cap B = B' \cap \check{B} = \emptyset$. De plus $\xi$ et $\eta$ sont mutuellement orthogonales, dans le sens $< \xi(B), \eta(B') > = 0$ pour deux boréliens quelconques $B$ et $B'$ (plus généralement, pour $\varphi$ et $\varphi'$ dans $L^2(\mathbb{R}^n, \chi)$ l'une symétrique, l'autre antisymétrique, on a $< \zeta(\varphi), \zeta(\varphi') > = \int \varphi(u)\, \overline{\varphi'(u)}\, \alpha(du) = 0$, puisque la mesure $\chi$ est symétrique). Comme on a alors $\zeta = \xi + i\eta$, on voit que $Z(x)$ est de la forme :

$$Z(x) = \int \cos 2\pi(ux)\, \xi(dx) + \int \sin 2\pi(ux)\, \eta(dx)$$

<u>Différentiabilité d'une FAST</u> - A titre d'application de l'analyse harmonique, nous allons caractériser la différentiabilité d'une FAST. Nous dirons qu'une F.A. D'ordre 2 $Z : \mathbb{R}^n \to L^2(\Omega,\mathcal{A},P)$ est différentiable m.q. en $x \in \mathbb{R}^n$ s'il existe un vecteur aléatoire $G = (G_1,G_2,\ldots G_n)$ et une F.A. d'ordre 2 $\varepsilon(h)$ tels que l'on ait pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ :

$$\left| \begin{array}{l} Z(x+h) - Z(x) = \sum_{i=1}^{n} h_i\, G_i + \varepsilon(h) \\ \lim_{|h|\to 0} \frac{\varepsilon(h)}{|h|} = 0 \qquad \text{(au sens fort)} \end{array} \right.$$

Il est facile de voir que ces conditions entraînent l'existence des dérivées partielles en moyenne quadratique, et que l'on a $\frac{\partial Z(x)}{\partial x_i} = G_i$. Nous dirons aussi que Z est différentiable si elle est différentiable en tout $x \in \mathbb{R}^n$ .

<u>P-3-5</u> - Soit $X(x)$ une FAST sur $\mathbb{R}^n$ $C(h) = < U_h X,X >$ sa covariance et $\chi$ sa mesure spectrale. Les quatre conditions suivantes sont équivalentes :

a/ $U_x X$ est différentiable sur $\mathbb{R}^n$.

b/ X vérifie une majoration de la forme $\|(U_h-I)X\| \leq a|h|$ $(a < \infty)$, (soit $C(o) - R_e\, C(h) \leq b|h|^2$) .

c/ Les n dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial x_j} U_x X$ existent en $x = 0$ .

d/ $\int |u|^2 \chi(du) < \infty$.

Il est immédiat que a/ entraîne b/. Montrons b/ $\Rightarrow$ d/. La majoration b/ s'écrit :

$$\int [1 - \cos 2\pi(uh)]\, \chi(du) \leq b|h|^2$$

Soit $\alpha = (\alpha_1, \dots \alpha_n)$ un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^n$, $(u\alpha) = u_1 \alpha_1 + \dots + u_n \alpha_n$, et $h = r\alpha$, $r > 0$ un élément de $\mathbb{R}^n$. Prenons la transformée de Laplace en $r$ de l'inégalité précédente. Pour $\lambda > 0$, on trouve :

$$\int_0^\infty [1 - \cos 2\pi r(u\alpha)]\, e^{-\lambda r}\, dr = \frac{4\pi^2(u\alpha)^2}{\lambda[\lambda^2+4\pi^2(u\alpha)^2]} \geq \frac{4\pi^2(u\alpha)^2}{\lambda[\lambda^2+4\pi^2 u^2]}$$

Comme $\int_0^\infty r^2\, e^{-\lambda r} dr = 2/\lambda^3$, on en déduit :

$$\int \frac{4\pi^2\, \lambda^2(u\alpha)^2}{\lambda^2+4\pi^2\, u^2}\, \chi(du) \leq 2b$$

Pour $\alpha = \alpha_j$ vecteur unitaire de l'axe des $u_j$, $(u\alpha_j) = u_j$ et, par sommation en $j$, on trouve :

$$4\pi^2 \int \frac{\lambda^2 |u|^2}{\lambda^2+4\pi^2|u|^2}\, \chi(du) \leq 2\, nb$$

Enfin, en utilisant la continuité monotone pour $\lambda \uparrow \infty$, il vient $\int 4\pi^2 |u^2|\, \chi(du) \leq 2\, nb$, c'est-à-dire d/.

On a c/ $\Leftrightarrow$ d/, parce que la dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial x_j} U_x X$ en $x = 0$ existe si et seulement si $-2i\pi u_j \in L^2(\mathbb{R}^n, \chi)$, soit $\int (u_j)^2\, \chi(du) < \infty$ ( le démontrer à titre d'exercice).

Il reste à montrer d/ $\Rightarrow$ a/. Il suffit d'ailleurs d'établir a/ en $x = 0$. Comme d/ $\Rightarrow$ c/, désignons par $G_j$ les dérivées partielles en $x = 0$. $G_j$ a pour image $-2i\pi u_j$ dans $L^2(\mathbb{R}^n, \chi)$, et l'image de $\varepsilon(h) = U_h X - X - \sum_j h_j G_j$ est donc la fonction $e^{-2i\pi(uh)} - 1 + 2i\pi(uh)$.
On trouve :

$$|e^{-2i\pi(uh)} - 1 + 2i\pi(uh)|^2 = 2(1-\cos 2\pi uh) - 4\pi(uh) \sin 2\pi(uh) + 4\pi^2(uh)^2$$

Cette expression est majorée en module par $16\pi^2\ |u|^2\ |h|^2$. Par suite, l'intégrale :

$$\left\|\frac{\varepsilon(h)}{|h|}\right\|^2 = \int \frac{1}{|h|^2}\ |e^{-2i\pi(uh)} - 1 + 2i\pi(uh)|^2\ \chi(du)$$

vérifie les conditions du théorème de convergence dominée, puisque $|u|^2$ est intégrable, et que la fonction à intégrer tend vers 0 en tout u pour $|h| \to 0$. Autrement dit, $\varepsilon(h)/|h|$ tend vers 0 fortement pour $|h| \to 0$, et $U_x\ X$ est différentiable.

## 3-8 Analyse harmonique du groupe $U_h$.

A tout x ∈ H, l'énoncé P-3-4 associe la mesure orthogonale $\zeta_X$ à valeurs dans H, définie de manière unique par la relation

$$U_x\ X = \int e^{-2i\pi(ux)}\ \zeta_X(du) \qquad (x \in \mathbb{R}^n) \tag{3-11}$$

Il en résulte que la mesure orthogonale associée à $\alpha X + \beta Y$ ($\alpha,\beta$ complexes, X et Y dans H) est $\alpha\ \zeta_X + \beta\ \zeta_Y$, autrement dit l'application $X \to \zeta_X$ est linéaire. Pour tout borélien $B \in \mathcal{B}$, la relation :

$$E(B)\ X = \zeta_X(B)$$

définit donc un opérateur <u>linéaire</u> E(B) sur H, d'ailleurs <u>continu</u>, car $\|E(B)X\|^2 = \int_B \chi(du) \leq \int \chi(du) = \|X\|^2$, $\chi$ désignant la mesure spectrale associée à X, d'où $\|E(B)\| \leq 1$.

Si B et B' sont deux boréliens disjoints, on a $E(B)\ E(B') = E(B')\ E(B) = 0$. En effet, si $\chi$ est la mesure spectrale de X, celle de E(B) X est $1_B\ \chi$ et celle de E(B') E(B) X est $1_{B'}\ 1_B\ \chi = 0$, d'où

$E(B')\ E(B) = 0$.

Pour $B \cap B' = \emptyset$, on a $\zeta_X(B \cup B') = \zeta_X(B) + \zeta_X(B')$ pour tout $X \in H$, donc $E(B \cup B') = E(B) + E(B')$. Prenons $B' = B^c$ complémentaire de $B \in \mathcal{B}$. $E(B \cup B^c) = E(\mathbb{R}^n) = I$ (car $\zeta_X(\mathbb{R}^n) = X$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$). Donc : $I = E(B) + E(B^c)$. Cette relation, jointe à $E(B)\ E(B^c) = = E(B^c)\ E(B) = 0$ signifie que $E(B)$ est un <u>projecteur</u> (pour $B = \{o\}$, en particulier, on retrouve le projecteur $E_o = E(\{o\})$de l'espace $H_o$ des invariants).

Pour $B \subset B'$, en posant $B' = (B' \cap B^c) \cup B$, on trouve $E(B') = E(B) + E(B' \cap B^c)$ puis $E(B)\ E(B') = E(B')\ E(B) = E(B)$. Pour $B$ et $B'$ quelconques, enfin, en écrivant $B' = (B' \cap B) \cup (B' \cap B^c)$, on a d'abord $E(B') = E(B' \cap B) + E(B' \cap B^c)$ . Comme $B$ contient $B' \cap B$ et est disjoint de $B' \cap B^c$, il vient $E(B)\ E(B' \cap B) = E(B' \cap B)$, et $E(B)\ E(B' \cap B^c) = 0$, et par suite :

$$E(B)\ E(B') = E(B')\ E(B) = E(B \cap B') \tag{3-12}$$

Enfin $B_n \uparrow B$ (ou $B_n \downarrow B$) entraîne $E(B_n) \to E(B)$ (dans le sens : $E(B_n)X$ converge fortement vers $E(B)X$ pour tout $X$) à cause de la propriété analogue de $\zeta_X(B)$.

Si maintenant $\varphi$ est une fonction mesurable et bornée, on peut lui associer l'opérateur linéaire continu $E(\varphi)$ défini sur $H$ par $E(\varphi)X = \zeta_X(\varphi)$. La relation (3-12) se généralise sous la forme :

$$E(\varphi)\ E(\varphi') = E(\varphi')\ E(\varphi) = E(\varphi\varphi') \tag{3-13}$$

($\varphi, \varphi'$ mesurables et bornées). En effet, celà est immédiat si $\varphi$ et $\varphi'$ sont des fonctions étagées. Si $\varphi$ et $\varphi'$ sont réelles et bornées, on prend deux suites $\varphi_n$, $\varphi'_n$ de fonctions étagées vérifiant $\varphi_n \uparrow \varphi$ et $\varphi'_n \uparrow \varphi'$, donc aussi $\varphi_n \to \varphi$ et $\varphi'_n \to \varphi'$ fortement dans $L^2(\chi)$, donc $\zeta_X(\varphi_n) \to \zeta_X(\varphi)$ et $\zeta_X(\varphi'_n) \to \zeta_X(\varphi')$, puisque $\zeta$ est un isomorphisme de $L^2(\chi)$ sur $H(X)$, et (3-13) passe à la limite.

En particulier, d'après (3-11), on a :

$$U_x = E(\, e^{-2i\pi(x.)}) \qquad (x \in \mathbb{R}^n)$$

et par suite

(3-14) $$U_x\, E(\varphi) = E(\varphi)\, U_x$$

L'adjoint de $E(\varphi)$ est $E(\overline{\varphi})$, soit

(3-15) $$[E(\varphi)]^* = E(\overline{\varphi})$$

En effet, $E(B) = E^*(B)$ pour tout borélien $B$, pusique $E(B)$ est un projecteur. On en déduit immédiatement la relation (3-15) lorsque $\varphi$ est une fonction étagée, puis (en prenant $\varphi_n \uparrow \varphi$, $\varphi_n$ fonctions étagées, d'où aussi $\varphi_n \to \varphi$ dans chaque $L^2(\chi)$) par passage à la limite lorsque $\varphi$ est mesurable et bornée).

Si maintenant $\varphi$ est une fonction mesurable, mais non bornée, on ne peut définir l'opérateur $E(\varphi)$ que pour les $X \in H$ dont la mesure spectrale $\chi$ vérifie $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n, \chi)$. Désignons par $\mathscr{D}_\varphi$ ce sous-ensemble de $H$ : pour $X \in \mathscr{D}_\varphi$ , on pose $E(\varphi)X = \zeta_X(\varphi)$. Les relations (3-13), (3-14) et (3-15) se généralisent sans difficulté.

Montrons que cet opérateur $E(\varphi)$ est <u>fermé</u>, c'est-à-dire vérifie la propriété : $X_n \in \mathcal{D}_\varphi$ , $X_n \to X$ et $E(\varphi)X_n \to Y \Rightarrow X \in \mathcal{D}_\varphi$ et $E(\varphi)X = Y$. Pour celà, notons d'abord le lemme suivant :

<u>Lemme</u> - Soit $X_n$ une suite convergeant fortement dans H vers une limite X, et soient $\chi_n$ et $\chi$ les mesures spectrales de $X_n$ et de X. Alors la suite $\chi_n$ converge étroitement vers $\chi$.

En effet, la suite de fonctions $C_n$ définies par $C_n(h) = \langle U_h X_n, X_n \rangle$ converge en tout $h \in \mathbb{R}^n$ vers la limite $C(h) = \langle U_h X, X \rangle$ (d'après P-1-3). Mais cette limite est une fonction continue. Comme, d'après le théorème de Bochner, les $C_n$ sont les transformées de Fourier des mesures positives $\chi_n$, celà implique (d'après le théorème classique) la convergence étroite de la suite $\chi_n$ vers la mesure $\chi$ dont la transformée est C.

Il est alors facile de vérifier que $E(\varphi)$ est fermé (pour $\varphi$ mesurable mais non borné). Soit en effet $X_n$ une suite dans $\mathcal{D}_\varphi$ convergeant fortement vers X et telle que $E(\varphi)X_n$ converge fortement vers une limite Y. La suite $\chi_n$ des mesures spectrales des $X_n$ converge donc étroitement vers la mesure spectrale $\chi$ de X, tandis que la suite des mesures spectrales des $E(\varphi)\ X_n$, qui sont les $|\varphi|^2\ \chi_n$ , converge étroitement vers la mesure spectrale $\chi_Y$ de Y. On en déduit sans peine $\chi_Y = |\varphi|^2\ \chi$, et comme $\chi_Y$ est sommable, $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n, \chi)$, c'est-à-dire $X \in \mathcal{D}_\varphi$ . En appliquant le même raisonnement à la suite $X'_n = X_n - X$ (qui vérifie $X'_n \to 0$, et $E(\varphi)X'_n \to Y - E(\varphi)X$, on voit que la mesure spectrale de $Y - E(\varphi)X$ est la limite étroite de $|\varphi|^2\ \chi'_n$ , où $\chi'_n$ est la mesure spectrale de $X'_n$ . Comme $\chi'_n$ converge étroitement vers 0, la mesure spectrale de $Y - E(\varphi)X$ est nulle, d'où $Y = E(\varphi)X$, et $E(\varphi)$ est fermé.

Exemple - Dans le cas de l'espace à une dimension, $E(-2i\pi u)$ est l'opérateur infinitésimal A associé au groupe $U_h$ à un paramètre (Définition : $X \in \mathcal{D}_A$ si $\lim\limits_{h \to 0} \frac{U_h - I}{h} X$ existe, et cette limite est alors AX. On le démontrera à titre d'exercice. Ainsi A est un opérateur fermé. On démontrera aussi les propriétés suivantes : $\mathcal{D}_A$ est dense, $A^* = -A$. Dans le cas à n dimensions, on définira de même les opérateurs (denses et fermés) $A_j = E(-2i\pi u_j)$ $(j = 1,2\ldots n)$ associés aux dérivations partielles relativement aux coordonnées $x_j$ .

## Section 4 - LES FONCTIONS ALEATOIRES INTRINSEQUES (F.A.I.)

### 4-1 Le variogramme et la dérive.

On dit qu'une F.A. $Z(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ est une F.A. à accroissements stationnaires d'ordre 2, ou est une fonction aléatoire intrinseque (F.A.I.) si pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ la F.A. $x \to Z(x+h) - Z(x)$ est une FAST sur $\mathbb{R}^n$. Autrement dit, si l'on désigne par H l'espace de Hilbert engendré par les accroissements $Z(x)-Z(y)$, $x, y \in \mathbb{R}^n$, il existe un groupe $U_h$ d'opérateurs unitaires tel que l'on ait $Z(x+h) - Z(x) = U_x [Z(h)-Z(o)]$. Nous poserons :

on se limite aux groupe continu d'opérat. unit.

$$Y(x) = Z(x) - Z(o)$$

Il vient donc

$$(4\text{-}1) \quad Y(x+h) = U_x Y(h) + Y(x) = U_h Y(x) + Y(h)$$

et, en particulier :

$$(U_x - I)\, Y(h) = (U_h - I)\, Y(x) \tag{4-2}$$

Pour éviter des complications inutiles, nous nous limiterons au cas où la F.A. $Y(x)$ est réelle et continue en moyenne quadratique. La continuité m.q. entraîne la continuité du groupe $U_h$ en $h \in \mathbb{R}^n$. Inversement, si le groupe $U_h$ est continu et si $Y(x)$ est continue en $x = 0$, la relation (4-1) montre que $Y(x)$ (donc $Z(x)$ elle-même) est continue m.q.

Exemples - Pour tout $x \in H$, $Y(x) = (U_x - I)X$ est une F.A.I. De même, dans $R^1$, $\int_0^x U_\xi \, X \, d\xi$ est une F.A.I.

Si $Y(x)$ est une F.A.I. (vérifiant $Y(o) = 0$), nous poserons $Y_o(x) = E_o\, Y(x)$ et nous dirons que $Y_o(x)$ est la dérive de $Y(x)$. D'après (4-1) et (3-4), on trouve $Y_o(x+h) = Y_o(x) + Y_o(h)$. D'autre part, $Y(x)$ est continue m.q. et le projecteur $E_o$ est un opérateur continu. $Y_o(x)$ est donc elle-même continue m.q., et la relation précédente entraîne alors que $Y_o(x)$ est de la forme $\sum_{i=1}^{n} x_i X_i$ pour n éléments invariants $X_i \in H_o$. Autrement dit, la dérive est une forme linéaire à coefficients invariants.

Dans ce qui suit, nous poserons :

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} \|Y(h)\|^2$$

et nous dirons que $\gamma(h)$ est le variogramme (non centré) de la F.A.I. Y. D'après (4-1), on a aussi pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ :

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} \|Y(x+h) - Y(x)\|^2 = \frac{1}{2} \|Z(x+h) - Z(x)\|^2 \tag{4-3}$$

De fait, la donnée du variogramme $\gamma$ détermine la covariance de $Y(x) = Z(x) - Z(o)$. En effet, d'après (4-3), on a :

$$2\,\gamma(x-y) = 2\,\gamma(x) + 2\gamma(y) - 2 < Y(x), Y(y) >$$

soit :

(4-4) $$< Y(x), Y(y) > = \gamma(x) + \gamma(y) - \gamma(x-y)$$

Examinons quelles conditions doit vérifier une fonction réelle $\gamma$ pour être le variogramme d'une F.A.I. Les conditions $\gamma(o) = 0$, $\gamma(x) \geq 0$, $\gamma(x) = \gamma(-x)$ sont évidemment nécessaires.

Plus généralement, désignons par $\Lambda_o \subset \Lambda$ l'espace des mesures réelles $\lambda$ à support fini vérifiant la condition : $\int \lambda(x) = 0$, et convenons de dire qu'une fonction réelle g est <u>de type positif conditionnel</u> si l'on a :

$$\iint \lambda(dx)\ g(x-y)\ \lambda(dy) \geq 0 \qquad \forall\ \lambda \in \Lambda_o$$

<u>P-4-1</u> - Une fonction réelle $\lambda$ sur $\mathbb{R}^n$ est un variogramme si et seulement si $-\gamma$ est de type positif conditionnel et $\gamma(o) = 0$.

En effet, soit $Z(x)$ une F.A.I. dont $\gamma$ est le variogramme. Posons $Y(x) = Z(x) - Z(o)$. D'après (4-4), on a pour tout $\lambda \in \Lambda_o$ :

$$\|\int \lambda(dx)\ Y(x)\|^2 = \iint \lambda(dx)\ [\gamma(x)+\gamma(y) - \gamma(x-y)]\ \lambda(dy) =$$

$$= -\iint \lambda(dx)\ \gamma(x-y)\ \lambda(dy) \geq 0$$

et $-\gamma$ est de type positif conditionnel.

Inversement, supposons $\gamma(o) = 0$ et $-\gamma$ de type positif conditionnel. Montrons que pour tout $\lambda \in \Lambda$ on a :

$$\iint \lambda(dx)\ [\gamma(x) + \gamma(y) - \gamma(x-y)]\ \lambda(dy) \geq 0$$

Le calcul ci-dessus montre que cette relation est vérifiée si $\int \lambda(dx) = 0$. Il suffit donc de l'établir dans le cas où $\int \lambda(dx) = 1$. Mais dans ce cas, on a

$$\iint \lambda(dx)\ [\gamma(x)+\gamma(y)-\gamma(x-y)]\ \lambda(dy) = -\iint [\delta(dx)-\lambda(dx)]\ \gamma(x-y)\ [\delta(dy)-\lambda(dy)]$$

puisque $\gamma(o) = 0$, et cette expression est $\geq 0$ puisque $\delta-\lambda \in \Lambda_o$ et que $-\gamma$ est de type $\geq 0$ conditionnel.

Il existe donc une F.A. d'ordre 2, soit $Y(x)$, dont la covariance vérifie la relation (4-4). Il reste à montrer que, pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, $Y(x+h) - Y(x)$ est une FAST. Celà résulte du calcul suivant :

$$< Y(x+h)-Y(x),\ Y(y+h)-Y(y) > = < Y(x+h),\ Y(y+h) > - < Y(x),\ Y(y+h) >$$

$$- < Y(y),\ Y(x+h) > + < Y(x),\ Y(y) > = \gamma(x+h) + \gamma(y+h) - \gamma(x-y)$$

$$- \gamma(x) - \gamma(y+h) + \gamma(x-y-h) - \gamma(y) - \gamma(x+h) + \gamma(y-x-h) + \gamma(x) + \gamma(y) -$$

$$- \gamma(x-y) = \gamma(x-y-h) + \gamma(x-y+h) - 2\ \gamma(x-y)$$

Plus généralement, si $Z(x)$ est une F.A.I. et si $Y(x) = Z(x) - Z(o)$, pour tout $\lambda, \lambda' \in \Lambda_o$, on a :

$$\int \lambda(dx)\ Z(x) = \int \lambda(dx)\ Y(x)$$

et on en déduit :

$$(4-4)\quad \begin{cases} \| \lambda(dx)\ Z(x) \|^2 = -\iint \lambda(dx)\ \gamma(x-y)\ \lambda(dy) \\ < \int \lambda(dx)\ Z(x), \int \lambda'(dx)\ Z(x) > = -\iint \lambda(dx)\ \gamma(x-y)\ \lambda'(dy) \end{cases}$$

A condition donc de ne jamais considérer que des combinaisons linéaires de somme nulle, on a le droit de travailler sur une F.A.I. comme s'il s'agissait d'une FAST dont la covariance stationnaire serait $-\gamma(h)$.

L'énoncé suivant se démontre sans difficulté :

P-4-2 - Une F.A.I. $Z(x)$ est continue m.q. si et seulement si son variogramme $\gamma$ est continu en $h = 0$. $\gamma$ est alors continu en tout $h \in \mathbb{R}^n$.

## 4-2 Structure des F.A.I. et de leurs variogrammes.

Plaçons-nous dans le cas où $Z(x)$ et $Y(x) = Z(x) - Z(o)$ sont continues m.q. D'après P-4-2, $\gamma$ est continue. Posons :

$$\alpha = \sup_{|h| \leq 1} \|Y(h)\|$$

On a $\alpha < \infty$ d'après la continuité de $\gamma$. Soit alors $u$ un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^n$ et $x = (N+\varepsilon)u$ ($N$ entier $\geq 0$, $0 \leq \varepsilon < 1$) un point de la demi-droite de direction $u$. Les relations (4-1) donnent :

$$Y[(n+\varepsilon)u] = U_{nu}\, Y(\varepsilon u) + Y(nu) =$$

$$= U_{nu}\, Y(\varepsilon u) + Y(u) + U_u\, Y(u) + \ldots + U_{nu}\, Y(u)$$

D'où la majoration :

$$\|Y[(n+\varepsilon)u]\| \leq \alpha + n\, \|Y(u)\| \leq \alpha + (n+\varepsilon)\alpha$$

Par suite :

$$(4\text{-}5) \qquad \|Y(x)\| \leq \alpha(1 + |x|)$$

Cette majoration montre que l'intégrale stochastique $\int \mu(dx)\ Y(x)$ existe dès que $\int (1 + |x|)\ |\mu|(dx) < \infty$. Comme $Z(x) = Y(x) + Z(o)$, et que $Z(o)$ n'est pas, en général, dans $L^2(\Omega,\mathcal{A},P)$, l'intégrale $\int \mu(dx) Z(x)$ peut très bien ne pas exister. Mais si la mesure $\mu$ vérifie la condition :

$$\int \mu(dx) = 0$$

on peut trouver une suite $\lambda_n \in \Lambda_0$ telle que $\int \lambda_n(dx)\ Y(x) \to \int \mu(dx)\ Y(x)$ Comme on a $\int \lambda_n(dx)\ Y(x) = \int \lambda_n(dx)\ Z(x)$ (puisque $\lambda_n \in \Lambda_0$), on peut définir l'intégrale $\int \mu(dx)\ Z(x)$ comme la limite forte de la suite $\int \lambda_n(dx)\ Z(x)$, c'est-à-dire poser :

$$\int \mu(dx)\ Z(x) = \int \mu(dx)\ Y(x) \qquad \left( \int \mu(dx) = 0 \right)$$

On vérifie alors sans peine que les règles de calcul (4-4) restent valables pour cette intégrale stochastique.

On a vu que $Y(x) = (U_x - I)X$ est une F.A.I. L'énoncé suivant montre que les F.A.I. de cette forme sont denses dans l'ensemble des F.A.I. sans dérive.

<u>P-4-3</u> - Soit $Z(x)$ une F.A.I. continue m.q. et sans dérive, et posons $Y(x) = Z(x) - Z(o)$. Il existe une suite $X_n$ dans H telle que l'on ait $Y(x) = \lim\ (U_x - I)X_n$ au sens fort pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. $Y(x)$ est elle-même de la forme $(U_x - I)X$ pour un $x \in H$ si et seulement si son variogramme est borné.

Montrons d'abord la seconde partie de l'énoncé. $Y(x) = (U_x - I)X$

entraîne $\|Y(x)\| \leq 2\,\|X\|$, donc que le variogramme est borné. Inversement, supposons $\sup_x \|Y(x)\| = B < \infty$ . Soit alors

$$\mu_t(dx) = \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}}\, e^{-\frac{x^2}{2t}}\, dx$$

D'après la majoration de $\|Y(x)\|$, l'intégrale stochastique $\int \mu_t(dx)\; Y(x)$ existe, et vérifie :

$$\left\|\int \mu_t(dx)\; Y(x)\right\| \leq \int \mu_t(dx)\; \|Y(x)\| \leq B$$

D'après la compacité faible (P-1-14), on peut trouver une suite $t_n \to \infty$ telle que $\int \mu_{tn}(dx)\; Y(x)$ converge faiblement vers une limite $Z_o \in H$. Par suite $(U_h-I)\int \mu_{tn}(dx)\; Y(x) = \int \mu_{tn}(dx)\; (U_h-I)\; Y(x)$ converge faiblement vers $(U_h-I)\; Z_o$. Mais, d'après (4-2), on a :

$$\int \mu_{tn}(dx)\; (U_h-I)\; Y(x) = \int \mu_{tn}(dx)\; U_x\; Y(h) - Y(h)$$

D'après le théorème ergodique (P-3-3), l'intégrale $\int \mu_{tn}(dx)\; U_x\; Y(h)$ converge fortement vers $E_o\; Y(h)$. On a donc

$$(U_h-I)\; Z_o = E_o\; Y(h) - Y(h)$$

Mais $E_o\; Y(h) = 0$, car $\|E_o\; Y(h)\| \leq \|Y(h)\|$ montre que $\|E_o\; Y(h)\| \leq B$, et, comme $E_o\; Y(h)$ est de la forme $\Sigma_1^n\; h_i\; X_i$ pour des $X_i \in H_o$ , celà entraîne $X_i = 0$ et $E_o\; Y(h) = 0$. On a donc bien $Y(h) = (U_h-I)X$ avec $X = -\; Z_o$. En utilisant à nouveau le théorème ergodique, on voit même de plus que l'intégrale :

$$\int \mu_t(dx)\; Y(x) = \int \mu_t(dx)\; U_x\; X - X$$

converge **fortement** vers $E_o X - X = - X$ (puisqu'on a $X \in H_o^{\perp}$).

Dans le cas général (variogramme non borné), l'intégrale $\int \mu_t(dx)\ Y(x)$ existe encore, à cause de la majoration (4-5). Les relations (4-2) donnent alors :

$$(U_h - I) \int \mu_t(dx)\ Y(x) = \int \mu_t(dx)\ U_x\ Y(h) - Y(h)$$

Cette expression converge vers $E_o\ Y(h) - Y(h)$, d'après le théorème ergodique, soit, puisque $Y(h)$ est supposé sans dérive :

$$\lim_{t \to \infty} (U_h - I) \int \mu_t(dx)\ Y(x) = - Y(h) \quad \text{(au sens fort)}$$

ce qui achève la démonstration.

Cherchons maintenant les conditions nécessaires et suffisantes que doit vérifier une fonction $\gamma$ pour être un variogramme.

P-4-4 - Si $\gamma$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}^n$ vérifiant $\gamma(o) = 0$, les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

a/ $-\gamma$ est de type positif conditionnel (ou, d'après P-4-1, $\gamma$ est un variogramme.

b/ Pour tout $t > 0$, $e^{-t\gamma}$ est de type positif.

c/ $\gamma$ est de la forme $\gamma(h) = Q(h) + \int \frac{1 - \cos 2\pi(uh)}{4\pi^2 u^2} \chi(du)$ pour une forme quadratique $Q \geq 0$ et une mesure positive $\chi$ symétrique sans atome à l'origine et vérifiant $\int \frac{\chi(du)}{1 + 4\pi^2 u^2} < \infty$.

Montrons a/ $\Rightarrow$ b/. Soit $Z(x)$ une F.A.I. admettant le variogramme $\gamma$. D'après (4-4), la F.A. $Y(x) = Z(x) - Z(o)$ admet la covariance

$C(x,y) = \gamma(x) + \gamma(y) - \gamma(x-y)$. Désignons par $Y_n(x)$ une suite de F.A. indépendantes admettant la même covariance $C(x,y)$, et par $N$ une variable de Poisson d'espérance $E(N) = t$, indépendante des $Y_n(x)$. La F.A. définie par : $Y_o(x) = 1$ si $N = 0$, $Y_o(x) = \prod_{n=1}^{N} Y_n(x)$ si $N > 0$ admet la covariance :

$$C_o = \Sigma \frac{t^n}{n!} C^n e^{-t} = e^{t(C-1)}$$

La F.A. $Y_o(x)/\|Y_o(x)\|$ admet alors la covariance stationnaire :

$$< \frac{Y_o(x)}{\|Y_o(x)\|} , \frac{Y_o(y)}{\|Y_o(y)\|} > =$$

$= \exp\left\{t[\gamma(x) + \gamma(y) - \gamma(x-y) - \gamma(x) - \gamma(y)\right\} = e^{-t\gamma(x-y)}$ . Donc $e^{-t\gamma}$ est une fonction de type positif.;

On peut achever la démonstration en remarquant que b/ $\Rightarrow$ c/ d'après le théorème classique sur la forme des lois indéfiniment divisibles, et en vérifiant directement c/ $\Rightarrow$ a/ (ce qui est immédiat).

## 4-3 Applications.

P-4-5 - Soit $Y(x) = Z(x) - Z(o)$ une F.A.I. continue m.q. et $\gamma$ son variogramme. Les trois énoncés suivants sont équivalents :

a/ $Y(x)$ est sans dérive.

b/ La forme quadratique $Q$ de P-4-4 (énoncé c/) est nulle.

c/ $\gamma(h)/|h|^2 \to 0$ pour $|h| \to \infty$ (ou $Y(h)/|h| \to 0$ fortement)

En effet, cherchons la mesure spectrale associée à l'élément $Y(x) \in H$.

On a $< U_h\ Y(x),\ Y(x) > = \gamma(x+h) + \gamma(x-h) - 2\ \gamma(h)$, soit, d'après P-4-4, énoncé c/ :

$$\underset{\|}{\chi_x(\{0\})} + 2 \int_{R^n/\{0\}} \cos 2\pi u h \Big/ \frac{1-\cos 2\pi u x}{4\pi^2 u^2} \Big/ \chi(du)$$

$$< U_h\ Y(x),\ Y(x) > = 2\ Q(x) + 2 \int \frac{1-\cos\ 2\pi ux}{4\pi^2\ u^2} \cos\ 2\pi uh\ \chi(du)$$

$$= \int \cos 2\pi u h\ \chi_x(du) \quad \text{pour la fn stat définie en } Y(x)$$

autre démonstration prob. : par identification $Q(x) =$

Soit $\mu_t$ une famille de mesures symétriques $\geq 0$ dont les transformées de Fourier $\tilde{\mu}_t$ vérifient $\tilde{\mu}_t(u) \to 1_{\{o\}}(u)$. D'après le théorème ergodique, $\lim\limits_{t\to\infty} \int \mu_t(dh) < U_h\ Y(x),\ Y(x) > = \|E_o\ Y(x)\|^2$. Mais d'autre part, d'après P-4-4, on a :

$$\int \mu_t(dh) < U_h\ Y(x),\ Y(x) > = 2\ Q(x) + 2 \int \tilde{\mu}_t(u)\ \frac{1-\cos\ 2\pi ux}{4\pi^2\ u^2}\ \chi(du)$$

et cette expression converge vers $2\ Q(x)$ (d'après la majoration $\left|\frac{1-\cos\ 2\pi ux}{4\pi^2\ u^2}\right| \leq |x|^2$ et le théorème de convergence dominée, puisque $\chi$ est sans atome à l'origine. Ainsi, $Q = 0$ équivaut à $\|E_o\ Y(x)\|^2 = 0$, soit a/ $\Leftrightarrow$ b/.

Montrons b/ $\Leftrightarrow$ c/. En effet, d'après P-4-4, on a :

$$\frac{\gamma(h)}{|h|^2} = \frac{Q(h)}{|h|^2} + \int \frac{1-\cos\ 2\pi(uh)}{4\pi^2\ |u|^2\ |h|^2}\ \chi(du)$$

Or on a la majoration $\left|\frac{1-\cos\ 2\pi(uh)}{4\pi^2\ |u|^2\ |h|^2}\right| \leq \frac{(uh)^2}{|u|^2\ |h|^2} \leq 1$ et pour tout $u \neq 0$ (c'est-à-dire presque partout pour $\chi$) la fonction à intégrer tend vers 0 pour $|h| \to \infty$. D'après le théorème de convergence dominée, on a donc $\int \frac{1-\cos\ (2\pi uh)}{4\pi^2\ u^2\ h^2}\ \chi(du) \to 0$ pour $|h| \to \infty$. Par conséquent, $\gamma(h)/h^2$ tend vers 0 si et seulement si la forme quadratique $Q$ est nulle.

En ce qui concerne la dérivabilité, nous pouvons maintenant améliorer notablement l'énoncé P-4-2.

P-4-6 - Soit $Y(x) = Z(x) - Z(o)$ une F.A.I. continue en m.q., $\gamma$ son variogramme et $\chi$ la mesure positive qui figure en P-4-4 énoncé c/. Les 4 conditions suivantes sont équivalentes :

a/ $Y(x)$ est différentiable m.q.

b/ Le variogramme $\gamma$ vérifie une majoration du type $\gamma(h) \leq a|h|^2$.

c/ La mesure $\chi$ est sommable ( $\int \chi(du) < \infty$).

d/ Chacune des dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial x_i}$ , $Z(x)$ existe en tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Sous l'une de ces conditions, $\frac{\partial}{\partial x_i} Z(x)$ est une FAST dont la covariance stationnaire est $\frac{\partial^2}{\partial h_i^2} \gamma(h)$ et la mesure spectrale correspondante est $\frac{u_i^2}{|u|^2} \chi(du)$ à un atome près en 0 (d'ailleurs nul si $Y(x)$ est sans dérive).

Il suffit d'établir le théorème dans le cas où $Y(x)$ est sans dérive.

D'après la majoration (4-5), il est clair que a/ $\Rightarrow$ b/. Montrons b/ $\Rightarrow$ c/. Soit $\alpha$ un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^n$, et $r$ un réel $\geq 0$. Par hypothèse, $\gamma(\alpha r) \leq ar^2$, donc aussi, puisque $Q$ est une forme quadratique $\geq 0$

$$0 \leq \int \frac{1-\cos\ (2\pi(u\alpha)r)}{4\pi^2\ u^2}\ \chi(du) \leq br^2$$

pour un $b < \infty$ . Prenons la transformée de Laplace. Pour $\lambda > 0$, on trouve :

$$\int_0^\infty e^{-\lambda r}\ dr \int \frac{1-\cos\ (2\pi(u\alpha)r)}{4\pi^2\ u^2}\ \chi(du) = \int \frac{(u\alpha)^2}{|u|^2}\ \frac{1}{\lambda(\lambda^2+4\pi^2(u\alpha)^2)}\ \chi(du)$$

Comme la transformée de $r^2$ est $2/\lambda^3$, on en déduit :

$$\int \frac{(u\alpha)^2}{|u|^2} \quad \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + 4\pi^2 \ u^2} \quad \chi(du) \leq 2b$$

En prenant $\alpha = e_i$, vecteur unitaire de l'axe des $u_i$, et en sommant de $i = 1$ à $n$, il vient ensuite :

$$\int \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + 4\pi^2 \ u^2} \quad \chi(du) \leq 2 \ nb$$

Pour $\lambda \uparrow \infty$, enfin, $\lambda^2/(\lambda^2 + 4\pi^2 \ u^2) \uparrow 1$ entraîne par continuité monotone $\int \chi(du) \leq 2 \ nb < \infty$ : la mesure $\chi$ est bornée.

On vérifie c/ $\Leftrightarrow$ d/ à partir de la relation :

$$< Y(x), Y(x') > = \int \frac{1-\cos 2\pi(ux) - \cos 2\pi(ux') + \cos 2\pi[u(x-x')]}{4\pi^2 \ |u|^2} \ \chi(du)$$

en utilisant le critère de Cauchy et le théorème de convergence dominée. La relation

$$< U_h \ Y(x), \ Y(x) > = 2 \int \frac{1-\cos 2\pi(ux)}{4\pi^2 \ |u|^2} \quad \cos 2\pi(uh) \ \chi(du)$$

montre ensuite que la dérivée partielle $Y_j'(x)$ vérifie $Y_j'(x) =$ $= U_x \ Y_j'(o)$ (d'après (4-2)) et :

$$< U_h \ Y_j'(o), \ Y_j'(o) > = \int \frac{u_j^2}{|u|^2} \quad \cos 2\pi(uh) \ \chi(du) = \frac{\partial^2}{\partial \ h_j^2} \ \gamma(h)$$

Enfin d/ ou c/ entraîne a/. En effet, on trouve alors :

$$\frac{1}{|h|^2} \quad \|Y(h) - \Sigma \ h_j \ Y_j'(o)\|^2 =$$

$$= \int \frac{2[1-\cos 2\pi(uh)] - 4\pi(uh) \sin 2\pi(uh) + 4\pi^2(uh)^2 \cos 2\pi(uh)}{4\pi^2 \ |u|^2 \ |h|^2} \quad \chi(du)$$

et le théorème de convergence dominée montre que cette expression tend vers 0 avec $|h|$.

## 4-4 Les F.A.I. dérivables et l'espace des gradients généralisés.

Dans l'espace à une seule dimension, l'équation $\frac{d}{dx} U_x Y = U_x X$ n'a pas toujours de solution (voir exercice 11). Par contre, la F.A.I. définie par $Y(x) = \int_0^x U_\xi X \, d\xi$ vérifie évidemment $Y'(x) = U_x X$. Cette F.A.I. est de la forme $Y(x) = (U_x - I)Y$ si et seulement si son variogramme est borné (P-4-3) : telle est donc la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une FAST $U_x Y$ dont $U_x X$ soit la dérivée. On voit que les F.A.I. dérivables s'introduisent de manière naturelle comme solutions généralisées du problème des primitives.

Dans l'espace à n dimensions, ce sont des vecteurs gradients qu'il convient d'introduire. Si H est notre espace de Hilbert habituel, muni de son groupe continu $U_h$, $h \in \mathbb{R}^n$, nous désignerons par $H_n$ l'espace produit $H^n$ muni du produit scalaire $< X, Y > = \sum_{i=1}^{n} < X_i, Y_i >$ ($X = (X_1, \ldots X_n)$ et $Y = (Y_1, \ldots Y_n) \in H^n$) pour lequel $H^n$ est un espace de Hilbert. Le groupe continu $U_h$ s'étend à $H_n$ (en posant $U_h X = (U_h X_1, \ldots U_h X_n)$ et constitue encore sur $H_n$ un groupe continu d'opérateurs unitaires. Si $A_i$ est l'opérateur infinitésimal associé à la dérivation partielle par rapport à la coordonnée $x_i$, l'opérateur linéaire $A = (A_1, \ldots A_n) : H \to H_n$, défini par $AX = (A_1 X_1, \ldots A_n X)$ est <u>fermé</u> (paragraphe 3-9). Pour $X \in \mathcal{D}_A = \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{D}_{A_i}$, on a $A U_x X = U_x A X = \text{grad } U_x X$. Nous dirons donc qu'un vecteur $Y \in H_n$ est un <u>gradient au sens strict</u> s'il est de la forme $Y = AX$ pour un $X \in \mathcal{D}_A$.

Notons que $\mathscr{D}_A$ est <u>dense</u> dans H (on le voit en associant à tout $X \in H$ ses régularisées $X_t = \int f_t(x)\, U_x\, X\, dx$, où $f_t$ est la densité gaussienne habituelle : on a $X_t \in \mathscr{D}_A$ et $\lim X_t = X$ pour $t \to 0$).

L'ensemble $H_g = A(H) \subset H_n$ des gradients au sens strict est un sous-vectoriel de $H_n$ qui n'est ni dense ni fermé dans $H_n$. Nous allons essentiellement nous intéresser à son adhérence $\overline{H}_g$ dans $H_n$ que nous appellerons l'espace des <u>gradients généralisés</u>, et montrer que l'on peut identifier $\overline{H}_g$ à l'espace des F.A.I. sans dérive et dérivables m.q. sur H.

Si X est un élément de H, et $\chi$ sa mesure spectrale, on a $X \in \mathscr{D}_A$ si et seulement si $-2i\pi u_j \in L^2(\mathbb{R}^n, \chi)$ pour $j = 1,2,\dots n$, c'est-à-dire $\int |u|^2\, \chi(du) < \infty$. Les composantes $Y_j = A_j\, X$ du gradient $Y = AX \in H_n$ vérifient alors :

$$(4\text{-}6) \qquad < U_h\, Y_j\, ,\, Y_k > = 4\pi^2 \int u_j\, u_k\, e^{-2i\pi(uh)}\, \chi(du)$$

Inversement, si les composantes $Y_j$ d'un $Y \in H_n$ vérifient (4-6) pour une mesure $\chi$ sommable (telle par conséquent que $\int |u|^2\, \chi(du) < \infty$ ), il existe $X \in H$ tel que $Y = AX$, et $\chi$ est la mesure spectrale de X (le démontrer a titre d'exercice) en raisonnant dans l'espace $H(Y_j)$ engendré par les $U_h\, Y_j$ , $h \in \mathbb{R}^n$, $j = 1,2,\dots n$).

Notons aussi cette propriété des composantes $A_i$ de l'opérateur A : Soit $X \in H$. Si $X \in \mathscr{D}_{A_i}$ et si $A_i\, X \in \mathscr{D}_{A_j}$ , on a $X \in \mathscr{D}_{A_j}$ , $A_j\, X \in \mathscr{D}_{A_i}$ et :

$$A_i\, A_j\, X = A_j\, A_i\, X$$

(en effet, si $\chi$ est la mesure spectrale de X, $X \in \mathscr{D}_{A_i}$ équivaut à $u_i \in L^2(\mathbb{R}^n,\chi)$, et $A_i X \in \mathscr{D}_{A_j}$ à $\int u_j^2 u_i^2 \chi(du) < \infty$, puisque $4\pi^2 u_i^2 \chi(du)$ est la mesure spectrale de $A_i X$. Celà entraîne $X \in \mathscr{D}_{A_j}$ , $A_j X \in \mathscr{D}_{A_i}$. Enfin, $A_i A_j X$ et $A_j A_i X$ ont pour image le même élément $-4\pi^2 u_i u_j$ de $L^2(\mathbb{R}^n,\chi)$).

Désignons par $A^* : H_n \to H$ l'adjoint de A, qui est un opérateur dense et fermé comme A lui-même. Par définition, pour tout $Y \in H_n$ , on a $Y \in \mathscr{D}_{A*}$ et $A^*Y = Z$ si pour tout $X \in \mathscr{D}_A \subset H$ la relation $< Y,AX > = < Z,X >$ est vérifiée. Dans le cas particulier où chaque composante $Y_i$ vérifie $Y_i \in \mathscr{D}_{A_i}$, le premier membre s'écrit :

$$< Y, AX > = \sum_i < Y_i, A_i X > = -\sum_i < A_i Y_i , X > \quad (\text{car } A_i^* = - A_i)$$

et par suite

$$A^*Y = -\sum_i A_i Y_i$$

Autrement dit, $A^*$ est (au signe près) un <u>prolongement de l'opérateur divergence</u>. C'est pourquoi nous dirons qu'un vecteur $Y \in H$ est <u>conservatif</u> s'il vérifie $Y \in \mathscr{D}_{A*}$ , $A^*Y = 0$.

L'opérateur $A^*$ étant fermé, <u>l'ensemble des vecteurs conservatifs</u> constitue un sous-espace fermé de $H_n$ . Montrons que cet espace est identique à <u>l'orthogonal $H_g^{\perp}$ de l'espace des gradients</u>.

En effet, la relation $< Y, AX > = 0 = < 0,X >$ pour tout $X \in \mathscr{D}_A$ signifie (d'après la définition même de l'adjoint $A^*$) $Y \in \mathscr{D}_{A*}$ et $A^*Y = 0$.

Inversement, par conséquent, <u>l'espace $\overline{H}_g$ des gradients généralisés</u>

<u>est caractérisé comme l'orthogonal de l'espace $H_g^{\perp}$ des vecteurs conservatifs</u>. Autrement dit, $G \in \overline{H}_g$ équivaut à :

$$Q \in \mathcal{D}_{A^*} \ , \ A^*Q = 0 \Rightarrow < G,Q > = 0$$

On note que les invariants sont conservatifs, soit $H_o \subset H_g^{\perp}$, donc que tout gradient généralisé G vérifie $E_o \, G = 0$.

Soit alors Z(x) une F.A.I. sur H, et posons comme d'habitude $Y(x) = Z(x) - Z(o)$. Supposons que Z(x) soit différentiable m.q. en tout $x \in \mathbb{R}^n$. La relation :

$$Z(x+h) - Z(x) = U_x [Z(h) - Z(o)] = U_x \, Y(h)$$

montre l'existence du vecteur G dont les composantes $G_i$ vérifient :

$$Y(h) = \sum_i h_i \, G_i + \varepsilon(h) \qquad \text{avec} \quad \frac{\varepsilon(h)}{|h|} \to 0 \text{ pour } |h| \to 0$$

et donne l'expression du gradient de Z(x) :

(4-7) $$\text{grad } Z(x) = U_x \, G$$

Inversement, l'existence de G entraîne manifestement celle de grad Z(x) en tout $x \in \mathbb{R}^n$, et la relation (4-7) est alors valable.

Considérons alors la relation (4-2). Si G existe, elle entraîne $Y(h) \in \mathcal{D}_A$ et :

(4-8) $$A \, Y(h) = (U_h - I)G$$

Ainsi A Y(h) n'est pas identique à $U_h \, G$, mais à $(U_h-I)G$. La condition

$Y(h) \in \mathcal{D}_A$ n'est d'ailleurs pas suffisante pour entraîner l'existence de G.

P-4-7 - Soit $G \in H_n$ . Pour qu'il existe une F.A.I. dérivable et sans dérive $Z(x)$ sur H vérifiant grad $Z(x) = U_x\, G$ ($x \in R^n$) il faut et il suffit que G soit un gradient généralisé.

En effet, soit $Y(x)$ une F.A.I. sans dérive vérifiant $Y(o) = 0$, et $f_t(x)$ la densité de la loi de Gauss de variance t. Posons :

$$X_t = \int f_t(x)\ Y(x)\ dx$$

La relation :

$$(U_h - I)X_t = \int f_t(x)\ (U_x - I)\ Y(h)\ dx$$

qui résulte de (4-2) entraîne $(U_h - I)X_t \to -\,Y(h)$ pour $t \to \infty$ (théorème ergodique). Si le vecteur G de composantes $G_i$ telles que $Y(h) = \sum h_i\, G_i + \varepsilon(h)$ , $\lim\limits_{|h| \to 0} \varepsilon(h)/|h| = 0$ existe, cette relation donne aussi $X_t \in \mathcal{D}_A$ et :

$$A\ X_t = \int f_t(x)\ (U_x - I)G\ dx$$

Comme $E_o\, G = 0$ (puisque $Y(x)$ est sans dérive) le théorème ergodique montre alors $A\ X_t \to G$ pour $t \to \infty$ , donc $G \in \overline{H}_g$ (G est un gradient généralisé).

Inversement, soit $G \in \overline{H}_g$ un gradient généralisé, et $X_n$ une suite dans $\mathcal{D}_A$ telle que $A\ X_n \to G$ dans $H_n$ . La relation :

$$\|(U_h - I)\ X_n\| \leq |h|\ \|A\ X_n\|$$

(la démontrer à titre d'exercice) montre que les $(U_h-I)X_n$ forment une suite de Cauchy uniforme sur les compacts, donc convergeant vers une limite $Y(h)$ qui est une F.A.I. continue en $h \in \mathbb{R}^n$. L'inégalité ci-dessus passe à la limite et donne :

$$\|Y(h)\| \leq |h| \; \|G\|$$

Par suite $Y(h)$ est différentiable (P-4-6, énoncé b/). Comme $A$ est un opérateur fermé, les convergences $(U_h-I)\ X_n \rightarrow Y(h)$, et $A(U_h-I)\ X_n = (U_h-I)A\ X_n \rightarrow (U_h-I)G$ entraînent $Y(h) \in \mathcal{D}_A$ et $A\ Y(h) = (U_h-I)G$. Il suffit de comparer à (4-8) pour voir que $G$ admet bien les composantes $G_i$ telles que $Y(h) = \sum h_i\ G_i + \varepsilon(h)$ (à un invariant près en principe, mais $Y(h)$ est sans dérive, comme la limite des $(U_h-I)X_n$, et cet invariant est nul.

<u>Corollaire</u> - Soit $G \in H_n$. Pour qu'il existe une F.A.I. dérivable $Z(x)$ sur $H$ vérifiant grad $Z(x) = G$, il faut et il suffit que $G$ soit la somme $G_o + G_1$ d'un vecteur invariant $G_o$ (c'est-à-dire d'un élément de $H_n$ dont les composantes sont dans $H_o$) et d'un gradient généralisé $G_1$.

## - Section 5 - EXERCICES -

Exercice 1 - Soit H un espace de Hilbert, et $Y^\ell$ , $\ell = 1,2,\ldots k$ k vecteurs de H. Montrer l'équivalence des trois propriétés suivantes :

a/ Les $Y^\ell$ sont linéairement indépendants.

b/ Det $< Y^\ell , Y^s > \neq 0$.

c/ Il existe k vecteurs $Y_\ell$ tels que $< Y_\ell , Y^s > = \delta_\ell^s$

Lorsque ces conditions sont réalisées, montrer que la projection d'un $X \in H$ dans l'enveloppe linéaire des $Y^\ell$ est $< X, Y_\ell > Y^\ell$

Exercice 2 - Dans les mêmes conditions que dans l'exercice précédent expliciter la projection orthogonale $X_o$ de $X \in H$ dans la variété linéaire fermée V définie par $V = \{Y : < Y, Y^\ell > = b^\ell , \ell = 1,2,\ldots k\}$ (désigner par $V_o$ le sous-espace fermé défini par $< Y, Y^\ell > = 0$, qui est l'orthogonal de l'enveloppe linéaire L des $Y^\ell$ : $X_o$ est alors de la forme $X_o = X + C^\ell Y_\ell$ , avec $C^\ell = b^\ell - < X, Y^\ell >$ )

Exercice 3 - Si une suite $X_n$ converge vers X dans $L^2(\Omega,\mathcal{A},P)$, et si de plus $X_n(\omega)$ converge vers $Y(\omega)$ presque partout pour P, on a $X = Y$ p.s.

Exercice 4 - Soit $H_n$ une suite décroissante de sous-espaces fermés d'un espace de Hilbert, $\Pi_n$ le projecteur de $H_n$, $H_o = \bigcap_{n\geq 1} H_n$ et $\Pi_o$ le projecteur de $H_o$ . Montrer que pour tout $X \in H$, la suite $\Pi_n X$ converge fortement vers $\Pi_o X$ (montrer $X = (X - \Pi_1 X) + (\Pi_1 X - \Pi_2 X) + \ldots + (\Pi_n X - \Pi_{n+1} X) + \Pi_{n+1} X$ , vérifier l'orthogonalité des différents termes et passer à la limite $n \to \infty$ ).

Exercice 5 - Covariance du mouvement brownien ($X(t)$, $t \geq 0$ est un processus à accroissements indépendants et stationnaires avec $E[X(t)] = 0$, $E[X^2(t)] = t$ et une loi gaussienne) ($C(t,t') = \mathrm{Inf}\ (t,t')$).

Montrer que l'intégrale $Z(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} X(t)dt$ existe pour $x > 0$.

Montrer $<Z(x),\ Z(y)> = \frac{1}{x\ y(x+y)}$ $\qquad (x,\ y > 0)$

Si $x \downarrow 0$ : $x^{\alpha} Z(x) \to 0$ fortement pour $\alpha > \frac{3}{2}$. $x^{3/2} Z(x)$ converge faiblement mais non fortement vers 0.

Poser $Y(x) = x^{3/2} Z(x)$, $x > 0$ et $Y(o) = 0$. La covariance de cette F.A. (définie sur $x \geq 0$) est $\frac{\sqrt{xy}}{x+y}$. $Y(x)$ est faiblement continue en 0, mais non fortement continue.

Exercice 6 - Soit $X(t)$ une F.A. sur R continue m.q. et bornée en norme ($\|X(t)\| \leq B < \infty$). Montrer que $x \int_0^{\infty} e^{-xt} X(t+\tau)dt$ converge fortement vers $X(\tau)$ pour $x \to +\infty$.

Exercice 7 - Soit $Z(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ une F.A. d'ordre 2 et H l'espace de Hilbert engendré par les $Z(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$. On considère une suite croissante de compacts $B_k$ recouvrant $\mathbb{R}^n$ et vérifiant $B_k \subset \mathring{B}_{k+1}$.

On désigne par $H_n = H(B_n^c)$ le sous-espace fermé de H engendré par les $Z(x)$, $x \notin B_n$, et par $H_o = \cap H_n$ leur intersection.

Montrer que $H_o$ ne dépend pas du choix de la suite particulière $B_k$ utilisée. Si $\Pi_o$ est le projecteur de $H_o$, la F.A. $Z_o(x) = \Pi_o Z(x)$ est appelée partie déterministe de $Z(x)$, $Z_1(x) = (I-\Pi_o) Z(x)$ partie probabiliste de $Z(x)$. On a $< Z_o(x),\ Z_1(y) > = 0$ $\forall\ x,\ y \in \mathbb{R}^n$.

$Z_o(x)$ est purement déterministe, $Z_1(x)$ purement probabiliste.

Montrer que si $Z(x)$ est une FAST, il en est de même de $Z_o(x)$ et de $Z_1(x)$.

Applications - 1/ Sur $\mathbb{R}$, la F.A. de covariance $< Z(x), Z(y) > = e^{-a|x-y|}$ est purement probabiliste (utiliser l'exercice 4).

2/ Sur $\mathbb{R}$, une F.A. de covariance $< Z(x), Z(y) > = e^{-a(x-y)^2}$ est purement déterministe.

On montrera même un résultat plus fort : pour tout $x_o \in \mathbb{R}$, l'espace fermé engendré par $Z(x_o)$ et toutes ses dérivées en $x_o$ est identique à H lui-même. Pour cela, on remplacera $Z(x)$ par $Y(x) = e^{ax^2} Z(x)$ et on montrera que les dérivées successives de $Y(x)$ en $x = 0$ forment un système orthogonal. On en déduira $Y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} Y^{(n)}(0)$

Exercice 8 - Soit $X(t)$ une F.A. d'ordre 2 sur $\mathbb{R}$ continue m.q. et bornée en norme. On considère l'équation différentielle $\lambda Z(t) + \frac{d}{dt} Z(t) = X(t)$. Montrer que l'unique solution vérifiant $Z(t_o) = 0$ est $Z(t) = \int_{t_o}^{t} e^{-\lambda(t-\tau)} X(\tau)d\tau$ (il faut montrer que $Z(t)$ vérifie l'équation différentielle au sens de la dérivation m.q.).

Montrer que, pour $t_o \to -\infty$, cette solution converge fortement vers une limite $Z_\infty(t)$. Montrer que $Z_\infty(t)$ est la seule solution bornée en norme.

Exercice 9 - Soit $A_n$, $B_n$ deux suites de $L^2(\Omega,\mathcal{A},P)$ vérifiant $< A_n, A_m > = < B_n, B_m > = 0$ pour $n \neq m$, $< A_n, B_m > = 0$ $\forall$ n et m et $\|A_n\|^2 = \|B_n\|^2 = \sigma_n^2$ , avec $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^2 < \infty$ . Soit $\lambda_n$ une suite de nombres réels quelconques. Montrer que $Y(t) = \sum (A_n \cos \lambda_n t + B_n \sin \lambda_n t)$ existe et admet la covariance (stationnaire) $< Y(t), Y(t') > = C(t-t')$ avec $C(h) = \sum \sigma_n^2 \cos \lambda_n h$ .

Exercice 10 - Soit $X(x) = U_x X$ une FAST sur $\mathbb{R}$. Il existe une et une seule FAST $Y(x) = U_x\ Y$ telle que $\lambda\ Y(x) + Y'(x) = X(x)$ ($\lambda > 0$ donné). (Si $A = \lim_{h\to 0} \frac{U_h - I}{h}$ est l'opérateur infinitésimal, et $\chi_Y$ la mesure spectrale de Y, partir de $\|\lambda Y + AY\|^2 = \int (\lambda^2 + 4\pi^2\ u^2)\chi_Y(du)$ pour établir l'unicité . Si $\chi$ est la mesure spectrale de Y, et $\varphi$ l'image de Y dans $L^2(\chi)$, montrer $\varphi = \frac{1}{\lambda - 2i\pi u}$ et en déduire $Y = \int_0^\infty e^{-\lambda x}\ U_{-x}\ X\ dx$).

<u>Exercice 11</u> - Si $X(x)$ est une FAST donnée sur $\mathbb{R}$, continue m.q., à quelle condition existe-t-il une FAST $Y(x)$ vérifiant $Y'(x) = Y(x)$, soit $AY = X$ en posant $X(x) = U_x\ X$ et $Y(x) = U_x\ Y$ ?

Montrer d'abord que $E_0\ X = 0$ est une condition nécessaire, et que la solution, si elle existe, est unique à un invariant près. On s'intéressera à la solution Y vérifiant $E_0\ Y = 0$ (si elle existe).

a/ Si $\chi$ est la mesure spectrale de X, la solution existe si et seulement si $-\frac{1}{2i\pi u} \in L^2(\chi)$. Pour expliciter la solution, procéder comme suit :

b/ Montrer que $Y_\lambda = \int_0^\infty e^{-\lambda\xi}\ U_{-\xi} X\ d\xi$ converge fortement vers la solution Y si et seulement si celle-ci existe (car $\frac{1}{\lambda - 2i\pi u}$ converge dans $L^2(\chi)$ vers $-\frac{1}{2i\pi u}$ si et seulement si cette limite est dans $L^2$).

c/ Poser $Z(t) = \int_0^t U_h\ X\ dh$ . Montrer que Y existe si et seulement si $\sup_t \|Z(t)\| < \infty$, et dans ce cas $\frac{1}{T}\int_0^T Z(t)\ dt$ converge fortement vers $-Y$.

[condition nécessaire : Si Y existe, montrer $Z(t) = (U_t - I)Y$, et $\|Z(t)\| \le 2\ \|Y\|$ puis utiliser le théorème ergodique.]

Condition suffisante : $\|Z_t\| \le B$ entraîne $\|t\ E_0\ X\| \le B$, et $E_0\ X = 0$. Montrer $\| \frac{1}{T}\int_0^T Z(t)dt\| \le B$. Prendre $T_n$ telle que $Z_n = \frac{1}{T_n}\int_0^{T_n} Z(t)dt$

ait une limite faible $Z_o$. Montrer $A\, Z_n = - X + \frac{1}{T_n}\int_o^{T_n} U_t\, X\, dt$ et appliquer le théorème ergodique. En déduire $Z_o \in \mathcal{D}_A$, $A\, Z_o = -X$. Avec $Y = - Z_o$, la proposition directe montre la convergence forte des $\frac{1}{T}\int_o^T Z(t)dt$ vers $-Y$.

<u>Exercice 12</u> -(<u>Equation de la chaleur</u>) - On se propose de trouver une FAST $Y_t(x)$ vérifiant $\frac{\partial Y_t}{\partial t} = \frac{C}{2}\,\Delta\, Y_t$ pour $t > 0$, $Y_o(x)$ donné. Etablir l'unicité à l'aide de la caractérisation faible. Chercher la solution dans l'espace $H(Y_o)$ engendré par les $Y_o(x) = U_x\, Y_o$ (son image dans $L^2(\chi_{Y_o})$ est $e^{-2\pi u^2 ct}$, d'où $Y_t(x) = U_x\, Y_t$, $Y_t = \int f_t(x)\, U_x\, Y_o\, dx$ où $f_t$ est la densité d'une loi de Gauss). Montrer que $Y_t$ converge fortement vers $E_o\, Y_o$ pour $t \to \infty$. Etudier $\lim_{T\to\infty}\int_o^T Y(t)dt$ (cette limite $Z$ existe si et seulement si $\frac{1}{2\pi u^2 c} \in L^2(\chi)$ et vérifie alors $\frac{C}{2}\,\Delta\, Z = Y_o$. Inversement, l'équation de Laplace $\frac{C}{2}\,\Delta\, Z(x) = U_x\, Y_o$ n'a de solution stationnaire que si cette limite $Z$ existe, et alors on a $Z(x) = U_x\, Z$).

<u>Exercice 13</u> - On veut montrer qu'à toute fonction réelle $f \in L^2(\mathbb{R}^n, dx)$ correspond une covariance stationnaire $g(h) = \int f(x)\, f(x+h)dx$ et donner un mode de construction explicite d'une F.A. stationnaire admettant cette covariance. Pour celà, on partira d'un processus de Poisson dans $\mathbb{R}^n$ (Déf. : pour tout borélien $B$, le nombre de points du processus tombant dans $B$ est une variable de Poisson $N(B)$ avec $E[N(B)] = a\, V(B)$, $a > 0$, $V(B)$ volume de $B$ ; si des boréliens $B_i$ sont disjoints, les $N(B_i)$ sont mutuellement indépendantes). On désignera par $x_i$ les points de ce processus.

a/ Soit $f$ une fonction réelle continue à support compact.

Pour $x \in \mathbb{R}^n$ , on posera : $Y(x) = \sum_i f(x-x_i)$. Montrer que $Y(x)$ est une FAST admettant l'espérance $m = a \int f(x)dx$ et la covariance $C(h) = a^2 m^2 + a\, g(h)$. [Prendre deux points $x_o$ et $y_o$, un compact $V$ contenant ces deux points et suffisamment grand pour contenir les supports $(x_i + K)$ des $f(x-x_i)$ telles que $x_o$ ou $y_o$ soit dans $x_i + K$ ($K$, support de $f$). Raisonner conditionnellement sur l'hypothèse $N(V) = n$, étant entendu que les $n$ points $x_i$ de Poisson tombant dans $V$ sont alors répartis uniformément dans $V$ indépendamment les uns des autres avec la même loi de densité $\frac{1_V(x)}{\text{Mes } V}$ ].

b/ Soient $X_i$ des V.A. indépendantes admettant la même espérance $\mu$ et le même moment d'ordre 2, $(\mu^2 + \sigma^2)$. Poser $Z(x) = \sum_i X_i f(x-x_i)$. Montrer que $Z(x)$ est une FAST avec l'èspérance $a \mu \int f(x)\, dx$ et la covariance $[a \mu \int f(x)dx]^2 + a\, (\mu^2 + \sigma^2)\, g(h)$.

c/ Soit $f_n$ une suite de fonctions continues à supports compacts, et $Y_n(x)$ les FAST correspondantes construites comme en a/. Montrer que l'on a $E[Y_n(x_o)\, Y_m(y_o)] = a^2 \int f_m(x)dx \int f_n(y)dy + a \int f_n(z)\, f_m(z+y_o-x_o)dz$. En déduire que $Y_n(x)$ converge m.q. vers une FAST $Y(x)$ si et seulement si $\lim \int f_n(x)dx$ existe et $f_n \to f$ dans $L^2(\mathbb{R}^n,dx)$. Montrer que la covariance centrée de $Y(x)$ est $g(h) = \int f(x)\, f(x+h)dx$.

d/ Mêmes questions qu'en c/ avec $Z_n(x) = \sum X_i\, f_n(x-x_i)$. En particulier, si $\mu = 0$, $Z_n(x)$ converge m.q. vers une FAST $Z(x)$ si et seulement si la suite $f_n$ est convergente dans $L^2(\mathbb{R}^n,dx)$. Si $f = \lim f_n$, la covariance de $Z(x)$ est $\int f(x)\, f(x+h)dx$.

<u>Exercice 14</u> - Soit $Z(x)$ une FAST, $\chi$ sa mesure spectrale. On suppose que la mesure $\chi$ est discrète, c'est-à-dire de la forme

$\chi = \sum_{n=0}^{\infty} p_n^2 \, \delta_{u_n}$ ($u_n$ suite de points donnés dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^N$ , $p_n^2$ coefficients > 0 donnés.

Montrer qu'il existe une suite de V.A. $\zeta_n$ vérifiant $< \zeta_n , \zeta_m > = 0$ et $\|\zeta_n\|^2 = p_n^2$ telle que l'on ait $Z(x) = \sum \zeta_n \, e^{-2i\pi(u_n x)}$ [utiliser l'isomorphisme $H(Z) \to L^2(\chi)$].

Lorsque $Z(x)$ est une FAST réelle, il existe deux suites $\xi_n$ , $\eta_n$ de V.A. vérifiant $< \xi_n , \eta_m > = 0 \quad \forall$ n et m, $< \xi_n , \xi_m > = < \eta_n , \eta_m > = 0$ $(n \neq m)$ et $\|\xi_n\|^2 = \|\eta_n\|^2$ telles que $Z(x) = \sum \xi_n \cos 2\pi(u_n \, x) + \sum \eta_n \sin 2\pi(u_n \, x)$.

Réciproque (cf. Exercice 9).

Exercice 15 - Dans les mêmes conditions que dans l'exercice précédent, montrer

$$\zeta_n = \lim_{t \to \infty} \int e^{2i\pi(u_n x)} \mu_t(dx) \; Z(x)$$

pour toute famille $\mu_t$ de mesures positives vérifiant :

$$\int \mu_t(dx) = 1, \text{ et } \lim_{t \to \infty} \int e^{-2i\pi(ux)} \mu_t(dx) = 0 \quad \text{pour } u \neq 0$$

Exercice 16 - Soit $Z(x)$ une FAST sur $\mathbb{R}^n$, $\chi$ sa mesure spectrale, B un borélien borné de $\mathbb{R}^n$, dont la frontière est de $\chi$-mesure nulle, $1_B$ son indicatrice, $\tilde{1}_B$ la fonction définie par $\tilde{1}_B(x) = \int_B e^{2i\pi ux} \, du$, $f_t$ la densité de la loi de Gauss de moyenne nulle et de variance $t/2$. Montrer que la fonction définie par $\varphi_t(v) = \int_B f_t(v-u) du$ converge vers $1_B$ dans $L^2(\chi)$ pour $t \to 0$. En déduire que

$$\zeta(t) = \int e^{-2\pi^2 x^2 t} \, \tilde{1}_B(x) \; Z(x) dx$$

converge fortement vers $\zeta(B)$ pour $t \to 0$.

Exercice 17 - Soit $Z(x)$, $x \in \mathbb{R}$ une F.A.I. sur la droite réelle, et $\varphi$ une fonction continue à support compact. Définir l'intégrale de Stieltjes $\int \varphi(x)\, d\, Z(x)$ comme limite m.q. d'expressions du type $\sum \varphi(z_i)\, [Z(x_{i+1}) - Z(x_i)] = \sum \varphi(z_i)\, U_{h_i}\, Y(h)$. [Utiliser P-4-4 énoncé c/ et le théorème de convergence dominée). Pour $\varphi$, $\varphi'$ continues à support compact, on a :

$$< \int \varphi(x)\, d\, Z(x), \int \varphi'(x)\, d\, Z(x') > = \int \tilde{\varphi}(u)\, \overline{\tilde{\varphi}'(u)}\, \chi(du)$$

Prolonger sur $L^2(\mathbb{R}, \chi)$

Exercice 18 - Montrer que le variogramme linéaire $\gamma(h) = |h|$ sur $\mathbb{R}$ est associé à la mesure $\chi(du) = 2\, du$ (du, mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$), soit

$$|h| = 4 \int_0^\infty \frac{1 - \cos\, 2\pi uh}{4\pi^2\, u^2}\, du$$

Exercice 19 - (Emergence d'un opérateur) - Soit H un espace de Hilbert de V.A. muni d'un groupe continu $U_h$ d'opérateurs unitaires, et B un opérateur strictement positif sur H ($< X, BX > \geq 0$ et $< X, BX > = 0 \Leftrightarrow X = 0$) continu ainsi que son inverse.

a/ Pour le produit scalaire $< >_B$ défini par $< X, Y >_B =$ $= < X, BY >$, H est un espace de Hilbert.

b/ Soit $G_o$ un vecteur invariant de $H_n$. Montrer qu'il existe un et un seul gradient généralisé G minimisant l'"énergie" $< G_o + G, B(G_o + G) >$, et que $Q = B(G_o + G)$ est un vecteur conservatif (utiliser le théorème des projections dans H muni de $\| \|_B$).

c/ Montrer que l'application $G_o \to E_o\, Q = Q_o$ est linéaire, et que l'on a $< G_o + G, Q > = < G_o, Q_o >$ (émergence de l'énergie). En particulier, dans le cas ergodique, il existe une matrice $n \times n$, soit $K$, telle que l'on ait $Q_o = K\, G_o$ (émergence de l'opérateur $B$) avec $Q_o = E(Q)$, $G_o = E(G_o + G)$.

Exercice 17 - Soit $Z(x)$, $x \in \mathbb{R}$ une F.A.I. sur la droite réelle, et $\varphi$ une fonction continue a support compact. Définir l'intégrale de Stieltjes $\int \varphi(x)\, d\, Z(x)$ comme limite m.q. d'expressions du type $\sum \varphi(z_i)\, [Z(x_{i+1}) - Z(x_i)] = \sum \varphi(z_i)\, U_{h_i}\, Y(h)$. [Utiliser P-4-4 énoncé c/ et le théorème de convergence dominée). Pour $\varphi$, $\varphi'$ continues à support compact, on a :

$$< \int \varphi(x)\, d\, Z(x), \int \varphi'(x)\, d\, Z(x') > = \int \tilde{\varphi}(u)\, \bar{\tilde{\varphi}}'(u)\, \chi(du)$$

Prolonger sur $L^2(\mathbb{R}, \chi)$

Exercice 18 - Montrer que le variogramme linéaire $\gamma(h) = |h|$ sur $\mathbb{R}$ est associé à la mesure $\chi(du) = 2\, du$ (du, mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$), soit

$$|h| = 4 \int_0^\infty \frac{1-\cos\, 2\pi uh}{4\pi^2\, u^2}\, du$$

Exercice 19 - (Emergence d'un opérateur) - Soit H un espace de Hilbert de V.A. muni d'un groupe continu $U_h$ d'opérateurs unitaires, et B un opérateur strictement positif sur H ($< X, BX > \geq 0$ et $< X, BX > = 0 \Leftrightarrow X = 0$) continu ainsi que son inverse.

a/ Pour le produit scalaire $< >_B$ défini par $< X,Y >_B =$ $= < X, BY >$ , H est un espace de Hilbert.

b/ Soit $G_o$ un vecteur invariant de $H_h$. Montrer qu'il existe un et un seul gradient généralisé G minimisant l'"énergie" $< G_o + G, B(G_o + G) >$ , et que $Q = B(G_o + G)$ est un vecteur conservatif (utiliser le théorème des projections dans H muni de $\| \; \|_B$).

c/ Montrer que l'application $G_o \rightarrow E_o\, Q = Q_o$ est linéaire, et que l'on a $< G_o + G, Q > = < G_o, Q_o >$ (émergence de l'énergie). En particulier, dans le cas ergodique, il existe une matrice $n \times n$, soit K, telle que l'on ait $Q_o = K\, G_o$ (émergence de l'opérateur B) avec $Q_o = E(Q)$, $G_o = E(G_o + G)$.