

ECOLE DES MINES DE PARIS
CENTRE DE MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE
MONTAIGNEBLEAU
COURS DE GEOSTATISTIQUE
NON LINEAIRE ★

G. MATHERON
A. JOURNEL

A. MARECHAL
J. DERAISME

LE PARAMETRAGE TECHNIQUE DES RESERVES

G. MATHERON

CENTRE DE GEOSTATISTIQUE
ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DES MINES DE PARIS
35 Rue Saint-Honoré
77305 FONTAINEBLEAU
- France -

LE PARAMETRAGE TECHNIQUE DES RESERVES

TABLE

0 - <u>INTRODUCTION</u>	1
1 - <u>INTUITION SIMPLISTE : ZONEOGRAPHIE ET HISTOGRAMME</u>	3
La relation tonnage/teneur de S. Lasky	3
Critique	5
2 - <u>LES FACTEURS DU PARAMETRAGE TECHNIQUE</u>	7
a) Contraintes géométriques	7
b) Support	8
c) Information	9
d) Critères	10
3 - <u>SELECTION LIBRE ET SIMPLE</u>	11
4 - <u>SELECTION LIBRE A DEUX NIVEAUX</u>	13
5 - <u>SELECTION SIMPLE SOUS CONTRAINTE</u>	16
Principe de l'analyse convexe	17
Exemple 1 : toit et mur de teneur	20
Exemple 2 : ciel ouvert	21
6 - <u>SELECTION DOUBLE SOUS CONTRAINTE</u>	23
Exemple 1 : toit et mur de teneur avec découverte	25
Exemple 2 : toit et mur de teneur avec sélection fine	25
Exemple 3 : ciel ouvert avec sélection libre du minerai	26

LE PARAMETRAGE TECHNIQUE DES RESERVES

0 - INTRODUCTION

Le but du paramétrage technique des réserves récupérables d'un gisement (ou d'une portion donnée d'un gisement) est d'aider l'exploitant à choisir (si possible) parmi les différents projets techniquement réalisables celui qui a le plus de chances de conduire au meilleur résultat économique dans les conditions du moment.

A cette fin, on se propose de disjoindre le problème de la recherche du meilleur projet en deux parties, l'une purement technique, l'autre économique. La première partie est justement notre paramétrage technique. Elle consiste à sélectionner à l'avance, en fonction d'un ou deux paramètres purements techniques (par exemple : des teneurs de coupure, ou encore des tonnages de minerai à traiter et de stérile à extraire, etc...) une famille de projets optimaux en un sens purement technique (c'est-à-dire indépendamment de toute considération économique). Cette famille devra posséder la propriété suivante : quelles que soient les conditions économiques du moment (cours des métaux, prix de revient de l'extraction et du traitement, etc...) et la formule de valorisation à utiliser, le projet économiquement optimal (quel qu'il soit) tombe nécessairement à l'intérieur de cette famille d'optima techniques.

Cette disjonction (ou paramétrage technique préalable) n'est pas toujours possible en toute rigueur, mais elle est souvent réalisable en première approximation. Dans ce qui suit, nous nous plaçons dans le cas simple où la valeur économique d'un projet est une fonction de la forme

$$B(Q, T, V)$$

~ Q : quantité de métal (ou de substance utile)

~ T : tonnage de minerai à traiter

~ V : tonnage total à extraire (minerai + stérile).

Pour paramétrer les réserves, nous n'avons pas besoin de connaître explicitement cette fonction B (qui peut donc, à ce stade, rester indéterminée); sous réserve seulement de supposer (ce qui est raisonnable) que B est une fonction croissante de Q et décroissante de T et V.

Dès lors, le paramétrage technique est possible. En effet, parmi tous les projets possibles comportant le même tonnage traité T et le même volume extrait V, le meilleur sera toujours celui qui maximise la quantité de métal Q.

En fonction de T et de V, on définira donc le projet maximisant Q à T et V fixés, et on construira la fonction correspondante :

$$Q = Q(T, V)$$

qui réalise ainsi le paramétrage cherché. Pour choisir le projet économiquement optimal, il suffira (lorsque la fonction de valorisation B sera suffisamment connue) de déterminer les valeurs de T et de V réalisant le maximum de $B[Q(T,V), T, V]$.

En pratique, on remplacera souvent T et V par deux autres paramètres z et λ : (ayant le sens de teneurs de coupure), et on construira une représentation paramétrique de la famille des optima techniques, de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} Q = Q(z, \lambda) \\ T = T(z, \lambda) \\ V = V(z, \lambda) \end{array} \right.$$

L'optimisation économique consistera alors (une fois B connue) à choisir les valeurs z et λ maximisant l'expression :

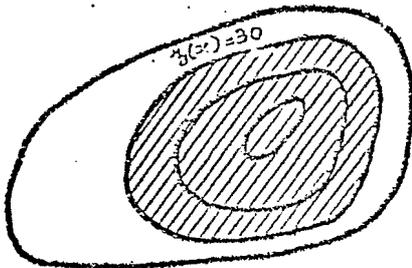
$$B[Q(z, \lambda), T(z, \lambda), V(z, \lambda)]$$

I - INTUITION SIMPLISTE : ZONEOGRAPHIE ET HISTOGRAMMES

~ La relation tonnage-teneur de Lasky.

Vers 1950, S. Lasky s'est demandé comment variaient les réserves (récupérables) d'un porphyry copper en fonction du critère de sélection usuel (la teneur de coupure en Cu %). Il est ainsi arrivé à la notion capitale de relation tonnage/teneur.

Lasky partait d'une représentation simple de ses porphyry copper : la teneur $z(x)$ au point x était (implicitement) considérée comme une fonction régulière et continue de x , manifestant par exemple une décroissance régulière lorsque l'on s'éloigne du coeur riche du porphyry (aujourd'hui, c'est à la dérive et non à la teneur elle-même que l'on pourrait attribuer ces caractères). Il supposait cette fonction connue (parfaitement ou avec une très bonne approximation) et son point de vue était celui d'une zonéographie :



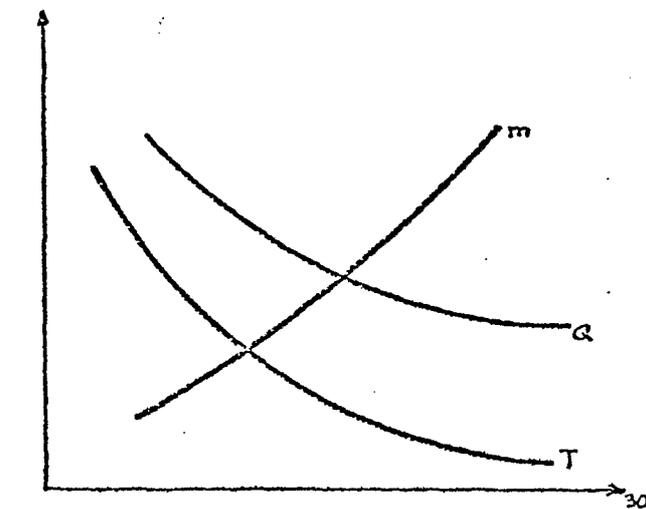
Si la teneur de coupure en Cu est z_0 , on exploitera le domaine limité par l'isoteneur z_0 , soit

$$B_{z_0} = \{x : z(x) \geq z_0\}$$

avec le tonnage et la teneur :

$$(1-1) \quad T(z_0) = \int_{B_{z_0}} \lambda(dx) \quad Q(z_0) = \int_{B_{z_0}} z(x) \lambda(dx)$$

($\lambda(dx) = dx$ ou, plus précisément, $\rho(x) dx$ où ρ est la densité). Il obtient ainsi les courbes T et Q et $m = Q/T$ paramétrées en z_0 .



Q et T sont évidemment décroissant (et m croissante) en z_0 .

On peut donc éliminer z_0 et construire :

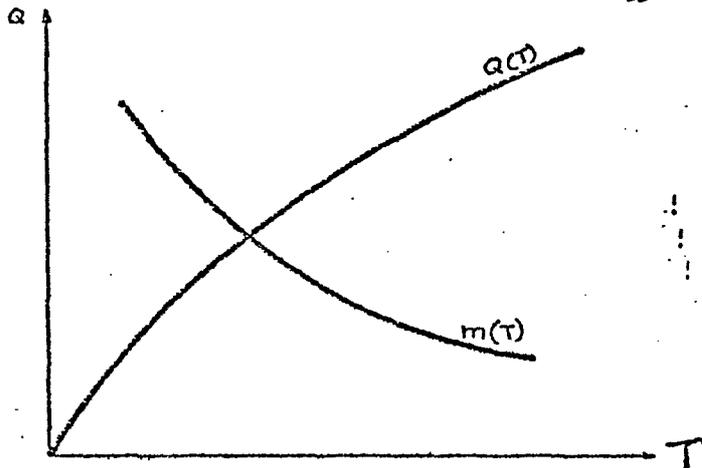
$$Q = Q(T), m = m(T) \text{ etc...}$$

[Ex. : la loi dite loi de Lasky de la forme :

$$m = \alpha - \beta \log T]$$

$Q(T)$ est croissante et concave.

En effet, si $T(dz)$ est le tonnage compris entre les isoteneurs z et $z + dz$:



$$(1-2) \quad \left\{ \begin{array}{l} T(z_0) = \int_{z_0}^{\infty} T(dz) \\ Q(z_0) = \int_{z_0}^{\infty} zT(dz) \end{array} \right.$$

Par suite, $\frac{dQ}{dT} = z_0 > 0$, mais $T(z_0)$ est fonction décroissante de z_0 , donc aussi z_0 fonction décroissante de T : la pente de la tangente décroît quand T augmente, et Q est concave.

Noter la relation :

$$Q(z_0) = z_0 T(z_0) + \int_{z_0}^{\infty} T(z) dz$$

Donc :

$$m(T) = \frac{Q}{T} = z_0 + \frac{1}{T} \int_{z_0}^{\infty} T(z) dz \geq z_0$$

La relation $Q = mT$ donne ensuite $dQ = mdT + Tdm$, donc $z_0 dT = mdT + Tdm$. On en déduit :

$$\frac{dm}{dT} = - \frac{m - z_0}{T} \leq 0$$

Ainsi, m décroît lorsque T augmente.

On peut aussi donner une autre interprétation, en termes d'histogramme, ou de loi de distribution $F(dz)$ des teneurs (ponctuelles). En effet, si T_0 est le tonnage maximum de minerai (la limite de $T(z_0)$ lorsque $z_0 \rightarrow 0$), on peut poser :

$$F(dz) = - \frac{1}{T_0} T(dz)$$

Il vient alors :

$$\begin{cases} T(z_0) = T_0(1-F(z_0)) = T_0 \int_{z_0}^{\infty} F(dz) \\ Q(z_0) = T_0 \int_{z_0}^{\infty} z F(dz) = z_0 T(z_0) + T_0 \int_{z_0}^{\infty} [1-F(z)] dz \end{cases}$$

Ces formules constituent, dans ce cas très simple, le paramétrage technique des réserves récupérables, en fonction d'un seul paramètre : la teneur de coupure z_0 .

De fait - et à supposer que les teneurs ponctuelles soient effectivement connues et qu'il soit effectivement possible de procéder à une sélection aussi fine - le meilleur choix possible du volume à exploiter pour obtenir un tonnage T donné serait celui qui maximise Q, c'est-à-dire l'ensemble $\{Z(x) \geq z_0\}$ avec un z_0 tel que $T(z_0) = T$.

Critique : Du point de vue de la Géostatistique, le modèle simpliste de Lasky n'est pas tenable. Du fait des hypothèses (non réalistes) faites sur la variable régionalisée (VR) $Z(x)$: fonction très

régulière et connue - 3 notions, que l'on doit d'habitude très soigneusement distinguer - se trouvent ici confondues :

- ~ la zonéographie
- ~ l'histogramme des teneurs
- ~ la relation tonnage/teneur

Avec les VR habituelles, cette méthode conduirait à de graves surestimations. En aucun cas, en effet, on n'a le droit d'utiliser l'histogramme des teneurs ponctuelles (ou des carottes), mais tout au plus celui des teneurs de blocs, ou unités minimales sur lesquelles portera la sélection effective (leur taille dépend du mode d'exploitation envisagé). Cela pose un premier problème (que l'on sait résoudre) :

~ comment prévoir l'histogramme des blocs en connaissant celui des carottes.

Mais ce n'est pas tout. Pour qu'il soit légitime d'identifier la relation tonnage/teneur avec la fonction de répartition des blocs, il faudrait :

~ que les teneurs réelles des blocs soient parfaitement connues au moins au moment de l'exploitation,

~ qu'aucune contrainte géométrique ne pèse sur la sélection (autrement dit que l'on soit entièrement libre de sélectionner chacun des blocs indépendamment des autres).

La première condition n'est jamais réalisée, sauf (à peu près) pour l'Uranium où l'on peut mesurer directement les radioactivités des blocs au moment de l'exploitation. Dans tous les autres cas, la teneur des blocs ne sera pas connue au moment de l'exploitation,

mais seulement estimée : sur la base d'une information plus riche peut-être que celle dont nous disposons aujourd'hui, mais avec une marge d'erreur encore importante.

Quant à la seconde condition, il sera rarement (ou jamais) possible en pratique d'aller extraire n'importe où un petit bloc riche en laissant en place ses voisins pauvres. Dans le cas d'un ciel ouvert, ces contraintes géométriques deviennent même l'aspect le plus important du problème.

2 - LES FACTEURS DU PARAMETRAGE TECHNIQUE

Ces facteurs sont suggérés par la critique précédente. Notons tout de suite qu'il y aura autant de paramétrages techniques, donc autant de définitions possibles des réserves récupérables que de modes possibles d'exploitations. Pour un procédé donné d'exploitation, les facteurs suivants devront être pris en compte :

a : Contraintes géométriques- [Principe : tout n'est pas possible]

Les caractéristiques technologiques du type d'exploitation imposent souvent des contraintes sévères quant à la forme géométrique des volumes à extraire ou à enlever en découverture. Cela peut se traduire par la notion de contours autorisés. Exemples :

~ Ciel ouvert : l'exploitation doit respecter la pente d'équilibre naturel. Si on extrait un point x , on doit aussi extraire le cône Γ_x (pointe-en-bas) ayant son sommet en ce point, et les contours autorisés sont nécessairement réunion de tels cônes.

~ en stratiforme; choix d'un toit et d'un mur de teneur.
On s'impose, par exemple, de ne prendre qu'une seule passe de puissance $\geq p$ mètres.

La sélection elle-même peut être simple ou opérer à plusieurs niveaux. Par exemple, on a souvent affaire à une sélection double comportant :

~ une sélection d'extraction concernant le choix du volume V à extraire (qui doit être un contour autorisé). La découverte peut être considérée comme un cas particulier de sélection d'extraction.

~ une sélection du minerai (chacun des blocs v contenus dans le volume V à extraire pourra être envoyé soit au stérile soit au minerai).

Les contraintes géométriques s'expriment de manière différente au niveau de chacune de ces sélections. Par exemple, la sélection du minerai, au niveau des blocs élémentaires v , sera le plus souvent libre de toute contrainte (chaque petit bloc, une fois extrait, peut être envoyé au minerai ou au stérile indépendamment des autres blocs). Au contraire, la sélection d'extraction sera en général soumise à des contraintes plus ou moins sévères (le volume V à extraire devant constituer un "contour autorisé").

Parfois aussi (par exemple en sous-terrain, ou dans le cas d'une formation stratiforme peu profonde), on pourra considérer (en première approximation) que le volume V à extraire est constitué d'une réunion de panneaux V_j de taille donnée que l'on peut choisir indépendamment les uns des autres (Cette terminologie suppose que les blocs v , au niveau desquels on sélectionne le minerai à traiter, sont plus petits que les panneaux V_j à extraire) : on peut dans ce cas parler de sélection libre à deux niveaux (niveau v pour la sélection du minerai, niveau V_j pour la sélection d'extraction).

b : Support (Principe : les variables que l'on exploitera ne sont pas celles que nous fournit la reconnaissance. On exploitera des blocs ou des panneaux, jamais des carottes).

Pour chacune de ces sélections, on doit préciser son support, c'est-à-dire la taille de la plus petite unité susceptible d'être sélectionnée : blocs v , pour la sélection du minerai ; panneaux V_j pour la sélection d'extraction.

c : L'information sur la base de laquelle sont (ou seront) effectivement prises les décisions de sélection aux différents niveaux (minerai et extraction). (Principe : l'estimation n'est jamais identique à la réalité).

On doit soigneusement distinguer :

~ l'information actuelle (disponible au moment où on procède au paramétrage des réserves : par exemple des sondages de reconnaissance).

~ l'information future ou "ultime" qui sera disponible au moment de prendre la décision définitive, mais ne l'est pas encore en général aujourd'hui. Par exemple, pour la sélection du minerai, on disposera des résultats des trous de tir au moment de décider si un bloc v doit être mis au stérile ou au minerai.

Ce décalage entre information actuelle et information future est la source d'une des principales difficultés du paramétrage : comme la sélection réelle sera basée sur une information future non encore disponible, nous ne pouvons pas prévoir à l'avance son effet sans anticiper, en probabilité, cette information future sur la base de l'information actuelle.

Cela ne sera pas trop grave en l'absence de contrainte (si les panneaux peuvent être sélectionnés indépendamment) car une reconstitution probabiliste globale sera possible. S'il y a des contraintes fortes (open pits par exemple) la prévision passe nécessairement par le niveau local. Elle nécessite alors un outillage plus puissant (les fonctions de transfert) et la donnée de l'information définitive.

d - Les critères utilisés pour chacune des sélections. En toute généralité, pour la sélection S_i (par exemple S_1 = sélection d'extraction, S_2 = sélection de minerai) on doit se donner un critère de la forme :

f_i (Information disponible au moment de la décision effective concernant S_i) $\geq z_i$.

Les z_i constitueront les paramètres du paramétrage technique des réserves. Il y en aura donc, en principe, autant que de niveaux de sélection. Les fonctions critiques f_i (choisies à l'avance par nous) devront respecter en principe la condition suivante :

~ quelles que soient les valeurs des paramètres économiques, intervenant dans la formule de valorisation, et, si possible, quelle que soit cette formule elle-même (pourvu qu'elle reste plausible) l'optimum économique doit figurer parmi la famille de projets définis par les critères f_i .

3 - SELECTION LIBRE ET SIMPLE.

Ici, le gisement est découpé en blocs (ou en panneaux) v_i et on peut sélectionner indépendamment chacun des v_i ($i = 1, \dots, N$). Parmi tous les choix possibles de k blocs, le meilleur serait celui qui maximise le métal récupéré $v \sum Z(v_i)$ (et cela quelle que soit la formule de valorisation). Mais on ne connaît pas les teneurs $Z(v_i)$, et on ne dispose (ou plutôt : ne disposera) que de leurs estimateurs $Z^*(v_i)$.

Nous supposons essentiellement que ces estimateurs vérifieront la condition de non biais conditionnel.

$$(3-1) \quad E[Z(v_i) | Z^*(v_i)] = Z^*(v_i)$$

Au stade actuel, les estimateurs $Z^*(v_i)$ ne sont pas encore connus, si on ne dispose (par exemple) que des résultats de sondages de reconnaissance à large maille (ayant donné des résultats Z_α , $\alpha = 1, \dots, n$).

Pour un panneau v_i donné, on devrait donc calculer :

$$P(Z^*(v_i) \geq z | Z_\alpha)$$

probabilité (conditionnelle en Z_α) pour qu'il soit finalement sélectionné, et estimer $T(z)$ par :

$$T(z) = v \sum_i P(Z^*(v_i) \geq z | Z_\alpha)$$

Dans ce point de vue, on estime le $T(z)$ global par sommation des estimations locales de chacun des panneaux v_i . C'est une procédure assez lourde que l'on peut éviter ici. Car (pourvu que

les panneaux soient assez nombreux) la sommation de ces diverses probabilités conditionnelles redonne approximativement (dans le cas stationnaire et ergodique) la probabilité non conditionnelle $P(Z^*(v) \geq z)$ pour un panneau de taille v , soit :

$$T(z) = N v P(Z^*(v) \geq z)$$

Il suffit donc de connaître la loi a priori de l'estimateur futur soit $F^*(dz)$.

D'après (3-1), $E(Z(v) | Z^*(v)) = Z^*(v)$, d'où l'on déduit :

$$E[Z(v) | Z^*(v) \geq z] = E[Z^*(v) | Z^*(v) \geq z]$$

D'où le paramétrage cherché, avec $T_0 = N v$:

$$(3-2) \quad \begin{cases} T(z_0) = T_0 \int_{z_0}^{\infty} F^*(dz) \\ Q(z_0) = T_0 \int_{z_0}^{\infty} z F^*(dz) \end{cases}$$

Il est du type de Iasky (1-2) - mais F^* est la loi de l'estimateur futur $Z^*(v)$ et non celle des teneurs des blocs $Z(v)$. De plus, la seconde relation (3-2) (mais non la première) présuppose la condition de non-biais conditionnel (3-1).

En pratique, on ne connaît pas la loi F^* des $Z^*(v)$ (non plus d'ailleurs que celle des $Z(v)$), sauf toutefois si l'information future est déjà disponible (dans ce cas, on forme effectivement les $Z^*(v_i)$ et on prend leur histogramme). Mais, moyennant certaines hypothèses de permanence, on peut obtenir une expression approchée de F^* à partir de l'histogramme des Z_α (information actuelle).

4 - SELECTION LIBRE A DEUX NIVEAUX

Ici, on suppose qu'une première sélection S_1 (d'extraction), sur la base d'une information I_1 (pas nécessairement encore disponible au moment où on fait l'estimation) choisit les panneaux V_j à extraire. Puis, une deuxième sélection S_2 (du minerai) choisit dans chaque panneau V_j les blocs v_{ji} à envoyer au minerai, et cela sur la base d'une information "ultime" I_2 plus riche que I_1 , inconnue au moment où l'on procède à l'estimation. Supposons, pour commencer, que I_1 (mais non I_2) soit actuellement disponible.

A ce moment, pour un choix donné des panneaux V_j , $j \in J$ supposés sélectionnés les raisonnements faits au paragraphe 3 s'appliquent : l'optimum économique tombera dans la famille des projets $\{Z^*(v_{j,i}) \geq z\}$ définis par l'application d'une même teneur de coupure z aux estimateurs (futurs) $Z^*(v_{ji})$ des différents blocs contenus dans les panneaux sélectionnés.

On doit donc faire le même paramétrage qu'en (3-2), mais panneau par panneau, et, par conséquent, en utilisant la loi $F_j(dz|I_1)$ de la teneur $Z^*(v_j)$ d'un bloc v_j parcourant le panneau V_j conditionnée par l'information actuelle I_1 . Pour chaque panneau V_j on obtient donc une estimation (locale) des réserves récupérables :

$$(4-1) \quad \begin{cases} T_j(z_0) = v_j \int_{z_0}^{\infty} F_j^*(dz|I_1) \\ Q_j(z_0) = v_j \int_{z_0}^{\infty} z F_j^*(dz|I_1) \end{cases}$$

Les techniques du krigeage disjonctif sont très utiles pour estimer rapidement ces fonctions de transfert (ou paramétrage local des réserves) panneau par panneau.

Il reste maintenant à optimiser le choix J des panneaux V_j , $j \in J$ à extraire. Pour la commodité du raisonnement (et bien que le résultat auquel nous allons parvenir ait valeur générale) supposons provisoirement que la formule de valorisation soit linéaire, c'est-à-dire, à un facteur près :

$$B(Q,T,V) = Q - zT - \lambda V$$

(dans cette formule, z et λ représenteraient, à un facteur près, les prix de revient de traitement et d'extraction. Mais nous n'attachons pas d'importance à cette interprétation économique, et nous considérons simplement z et λ comme deux paramètres que l'on peut faire varier indépendamment).

Pour un choix donné J de panneaux V_j à extraire, on a donc (en espérance)

$$E(B|J) = \sum_{j \in J} [Q_j(z) - z T_j(z) - \lambda V_j]$$

A z et λ fixés, un panneau j devra donc être sélectionné pour l'extraction si et seulement si il apporte une contribution positive à la somme ci-dessus. Le critère de sélection des panneaux est donc :

$$(4-2) \quad \frac{Q_j(z) - z T_j(z)}{V_j} \geq \lambda$$

Si maintenant nous considérons z et λ comme de simples paramètres variables, nous obtenons le paramétrage suivant : A z et λ donnés, on retient les panneaux vérifiant le critère (4-2), et ceci définit l'ensemble $J = J(z, \lambda)$ des panneaux sélectionnés. Dans cet ensemble $J(z, \lambda)$ de panneaux, on sélectionne ensuite les blocs de teneurs $\geq z$ (sélection du minerai). On obtient ainsi le paramétrage cherché :

$$(4-3) \quad \left\{ \begin{array}{l} Q(z, \lambda) = \sum_{j \in J(z, \lambda)} Q_j(z) \\ T(z, \lambda) = \sum_{j \in J(z, \lambda)} T_j(z) \\ V(z, \lambda) = \sum_{j \in J(z, \lambda)} V_j \end{array} \right.$$

Remarques :

1/ Bien que, pour abrégé, nous l'ayons établi en supposant linéaire la formule de valorisation, le paramétrage (4-3) obtenu a valeur générale. Plus précisément, les techniques de l'analyse convexe, que nous allons étudier, montrent que les projets définis par (4-3) correspondent tous à des optima techniques (pour z et λ donné, chacun d'eux maximise la quantité de métal Q pour $T = T(z, \lambda)$ et $V = V(z, \lambda)$ fixés). Par contre, il peut exister des optima techniques qui échappent à ce paramétrage, mais : ces optima qui nous échappent seront toujours, en pratique, encadrés d'assez près par des projets de la famille (4,3) ; et, d'autre part, pour les formules de valorisations usuelles, ils n'auront presque aucune chance de correspondre à l'optimum économique.

2/ Nous avons supposé que l'information I_1 de première sélection était disponible. Si elle ne l'est pas encore, c'est-à-dire si l'on dispose seulement d'une information $I_0 \subset I_1$ plus pauvre, les $Q_j(z)$ et $T_j(z)$ doivent être considérés comme des variables aléatoires, et les formules (4-3) doivent être anticipées en probabilité : il est possible de le faire, mais nous n'aborderons pas ce point ici.

5 - SELECTION SIMPLE SOUS CONTRAINTE.

La contrainte s'exprime en disant que tout projet doit correspondre à un contour $A \in \mathcal{B}$ (appartenant à la famille \mathcal{B} des contours autorisés). Exemples :

~ ciel ouvert : $A \in \mathcal{B}$ si A respecte les conditions de pente d'équilibre, donc si A est réunion des cones Γ_x , $x \in A$.

~ toit et mur de teneur : ici le gisement est divisé en panneaux P_j . Dans chaque panneau, la partie exploitée doit être ou vide ou une tranche horizontale de puissance $\geq p$ donnée (par exemple). On admet, pour simplifier, que ces tranches horizontales peuvent être choisies indépendamment dans les différents panneaux P_j (donc, on néglige les conditions de raccordement).

Parmi les projets possibles A de volume $V(A) \leq v$ donné, on admet que le meilleur est celui qui maximise la quantité de métal $Q(A)$.

Pour chaque v , il y a donc un (ou plusieurs) A_v réalisant

$$(5-1) \quad \text{Sup} \{Q(A) : A \in \mathcal{B}, V(A) \leq v\} = Q(v)$$

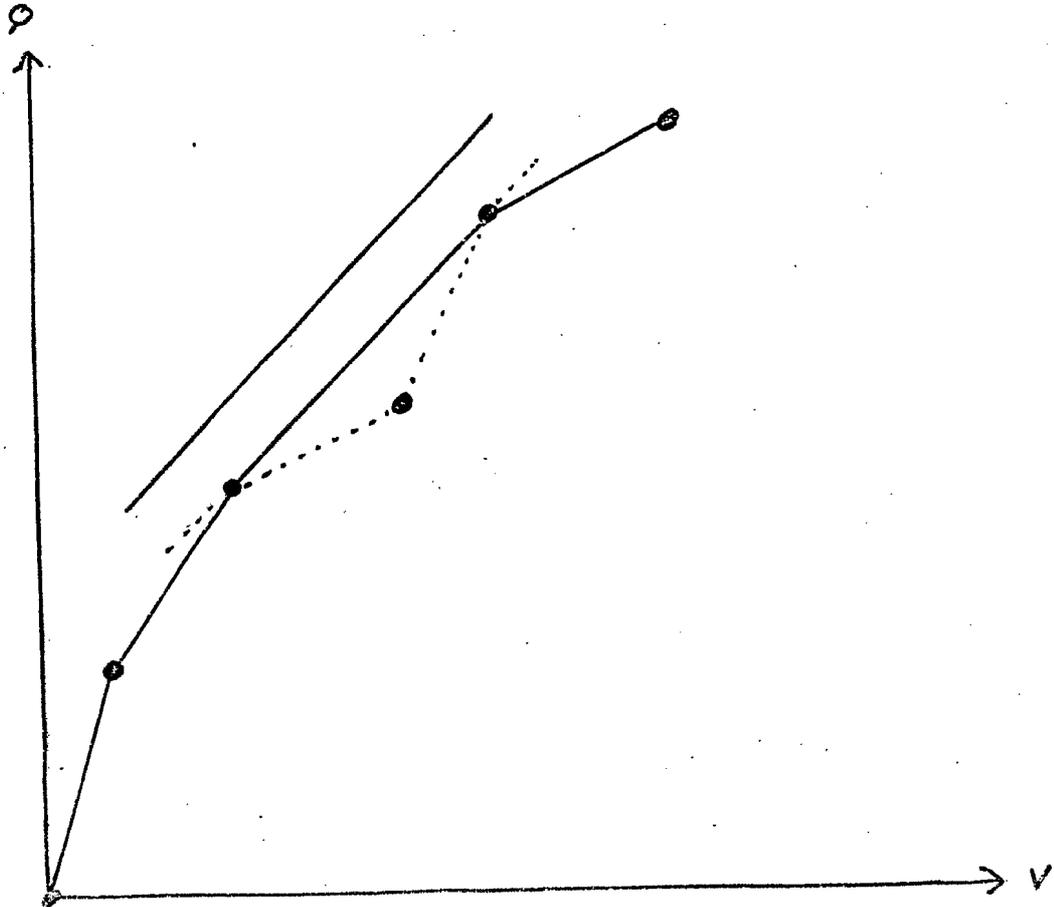
Si la teneur $q(x)$ est connue en chaque point x , $Q(A) = \int_A q(x)dx$ est connue pour chaque A , et la formule ci-dessus réalise (théoriquement) le paramétrage technique en v . Lorsque $q(x)$ n'est pas connu, rien d'essentiel n'est changé si l'information I sur la base de laquelle on choisit le contour A est actuellement disponible - ce que nous supposons ici. En effet, on forme pour chaque x l'estimateur $q^*(x) = E(q(x) | I)$ vérifiant la condition de non biais conditionnel, et on est ramené à maximiser

$$\int_A q^*(x) dx = Q^*(A) \quad (\text{car } E(Q(A)|I) = Q^*(A) \text{ pour chaque } A \in \mathcal{B})$$

Nous laisserons donc de côté l'astérisque, et écrirons $Q(A)$ au lieu de $Q^*(A)$.

Principe de l'Analyse Convexe

En pratique, le problème (5-1) est rarement facile à résoudre. On se heurte vite à une combinatoire inextricable. La technique de l'analyse convexe va consister à remplacer la courbe (inaccessible) $Q = Q(v)$, qui est croissante, mais non, en général, concave, par son enveloppe concave $Q = \hat{Q}(v)$, en général beaucoup plus facile à construire : dans cette opération, nous laissons, en principe, échapper quelques optima techniques possibles (mais ils sont rarement les plus intéressants du point de vue économique, et, de toute façon, ne sont jamais très éloignés de points (connus) de la courbe $\hat{Q}(v)$). C'est déjà, implicitement, ce que nous avons fait au paragraphe précédent.



Pour chaque $\lambda \geq 0$, nous considérons, en axes (Q, V) , les droites d'équation $Q - \lambda V = \gamma$. Lorsque γ est grand, la courbe $Q = Q(v)$ est toute entière contenue dans le demi-plan inférieur défini par cette droite. ($Q(v) - \lambda v < \gamma$ pour tout v). Pour une valeur critique $\gamma = \gamma(\lambda)$, la droite rencontre un, ou éventuellement plusieurs, points de la courbe, mais celle-ci reste encore contenue dans le demi-plan inférieur (c'est-à-dire, cette fois, $Q(v) - \lambda v \leq \gamma(\lambda)$).

Il est alors facile de voir que $\gamma(\lambda)$ est donné par :

$$(5-2) \quad \gamma(\lambda) = \sup_{A \in \mathcal{B}} \{Q(A) - \lambda V(A)\}$$

et que le (ou les) contours autorisés A qui réalisent ce maximum correspondent, justement, aux points où la droite $Q - \lambda V = \gamma(\lambda)$ rencontre la courbe $Q = Q(v)$ (ces points s'appellent points d'appui de la droite en question).

L'enveloppe concave $Q = \hat{Q}(v)$, dont l'expression explicite est :

$$\hat{Q}(v) = \inf_{\lambda \geq 0} \{\gamma(\lambda) + \lambda v\}$$

s'obtient ainsi en ne conservant que les points d'appui des différentes droites obtenues en faisant varier λ . Les projets "perdus" correspondent aux parties "rentrantes" de la courbe $Q(v)$, donc, en général, présentent peu d'intérêt. Moyennant cette perte, peu importante, nous remplaçons le problème inextricable (5-1), par le problème, beaucoup plus facile, (5-2) : trouver, pour chaque λ , le projet maximisant $Q - \lambda V$.

On peut alors paramétrer les réserves en λ : pour chaque $\lambda \geq 0$, la droite d'appui $q - \lambda v = \gamma(\lambda)$ admet les deux points d'appui extrêmes $(V_{\lambda}^{-}, Q_{\lambda}^{-})$ et $(V_{\lambda}^{+}, Q_{\lambda}^{+})$ (ce qui signifie $V_{\lambda}^{-} \leq V_{\lambda} \leq V_{\lambda}^{+}$ pour tout autre point d'appui) associés à deux projets A_{λ}^{-} et A_{λ}^{+} . On obtient le paramétrage :

$$V^{+}(\lambda) = V(A_{\lambda}^{+}) \quad V^{-}(\lambda) = V(A_{\lambda}^{-})$$

$$Q^{+}(\lambda) = Q(A_{\lambda}^{+}) \quad Q^{-}(\lambda) = Q(A_{\lambda}^{-})$$

V^{+} et Q^{+} sont décroissantes et continues à gauche, V^{-} et Q^{-} décroissantes et continues à droite. De plus :

$$\gamma(\lambda) = Q^{+}(\lambda) - \lambda V^{+}(\lambda) = Q^{-}(\lambda) - \lambda V^{-}(\lambda)$$

est convexe, décroissante et continue.

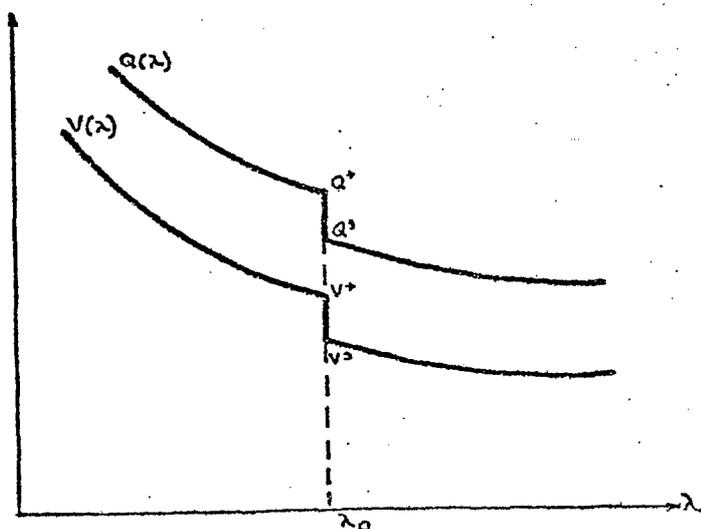
Ce paramétrage est unique, malgré les notations V^{+} , V^{-} etc..

car

$$V^{-}(\lambda) \downarrow V^{+}(\lambda_0) \quad , \quad Q^{-}(\lambda) \downarrow Q^{+}(\lambda_0) \quad \text{pour } \lambda \uparrow \lambda_0$$

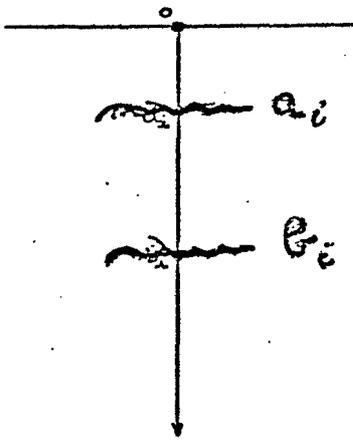
$$V^{+}(\lambda) \uparrow V^{-}(\lambda_0) \quad , \quad Q^{+}(\lambda) \uparrow Q^{-}(\lambda_0) \quad \text{pour } \lambda \downarrow \lambda_0$$

(cela résulte de $V^{+}(\lambda) \geq V^{-}(\lambda) \geq V^{+}(\lambda_0)$ pour $\lambda \uparrow \lambda_0$, etc..)



Exemple 1 : toit et mur de teneur.

Soit à déterminer les cotes a_i et b_i du toit et du mur sur chaque panneau P_i . Pour chaque i , on connaît le krigeage $Z_i^*(x)$ de la tranche horizontale de cote x , de sorte que :

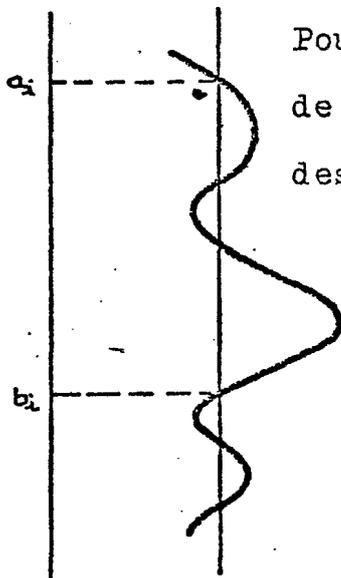


$$Q - \lambda V = \sum_i \int_{a_i}^{b_i} (Z_i^*(x) - \lambda) dx$$

On obtient le paramétrage en λ en optimisant indépendamment les différents termes

$$\int_{a_i}^{b_i} (Z_i^*(x) - \lambda) dx$$

puisqu'il n'y a pas de condition de raccordement entre panneaux.



Pour chaque λ , il n'y a qu'un très petit nombre de possibilités (car $Z^*(x) < \lambda$ pour x juste au dessus de a_i ou juste au dessous de b_i).

Pour chaque panneau :

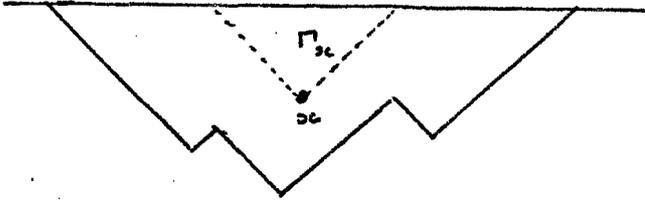
$$T_i(\lambda) = (b_i - a_i)$$

$$Q_i(\lambda) = \int_{a_i}^{b_i} Z_i^*(x) dx$$

puis $T(\lambda) = \sum T_i(\lambda) ; Q(\lambda) = \sum Q_i(\lambda)$

Exemple 2 : Ciel ouvert

Ici, les contraintes de pente d'équilibre, imposent d'extraire le cône Γ_x de sommet x dès que l'on décide d'extraire



le point x , et tout contour autorisé $A \in \mathcal{B}$ est ainsi réunion des cônes Γ_x qu'il contient.

On montre facilement ceci :

1/ Pour une valeur donnée $\lambda \geq 0$, il existe un plus petit contour autorisé B_λ^- et un plus grand contour autorisé B_λ^+ réalisant le maximum de $Q(A) - \lambda V(A)$ pour $A \in \mathcal{B}$, avec nécessairement $B_\lambda^- \subset B_\lambda^+$ (en général, $B_\lambda^- = B_\lambda^+$, sauf pour un petit nombre de valeurs critiques du paramètre λ).

2/ Ces contours sont emboîtés les uns dans les autres lorsque λ varie :

$$B_{\lambda'}^+ \subset B_\lambda^- \quad \text{pour } \lambda > \lambda'$$

3/ Pour chaque point x , il existe une plus grande valeur du paramètre λ , soit $\Lambda(x)$ telle que x appartient au contour optimal B_λ^+ tant que $\lambda \leq \Lambda(x)$, et ne lui appartient plus pour $\lambda > \Lambda(x)$. Cette fonction $\Lambda(x)$, lorsqu'on la connaît, permet donc de paramétrer les contours optimaux : on a, en effet, le critère simple suivant :

$$x \in B_\lambda^+ \quad \text{si et seulement si } \Lambda(x) \geq \lambda$$

4/ On peut considérer la relation $y \in \Gamma_x$ comme une relation d'ordre (y est au-dessus de x , au sens de cette relation d'ordre, si l'extraction de x entraîne celle de y), et dire qu'une fonction f donnée est croissante pour l'ordre Γ si $f(y) \geq f(x)$ dès que

$y \in \Gamma_x$. La fonction $\Lambda(x)$ qui réalise le paramétrage des contours optimaux est nécessairement croissante pour l'ordre Γ .

Plus précisément, on démontre le résultat suivant :
parmi toutes les fonctions Γ -croissantes, la fonction $\Lambda(x)$ est celle qui réalise la meilleure approximation de la fonction teneur $Z(x)$, c'est-à-dire celle qui réalise le minimum de l'intégrale :

$$\int [Z(x) - \Lambda(x)]^2 dx$$

Autrement dit encore : $\Lambda(x)$ est la projection de la teneur $Z(x)$ sur l'ensemble des fonctions Γ -croissantes.

C'est sur ce résultat capital que sont fondées les méthodes permettant, en pratique, de paramétrer les réserves dans le cas des open-pits : le programme dit "open pit" permet en effet (moyennant certaines approximations) de déterminer effectivement la fonction $\Lambda(x)$.

Le paramétrage s'obtient alors exactement comme dans le modèle zonéographique de Lasky, à condition de remplacer la teneur $Z(x)$ par cette fonction $\Lambda(x)$:

$$\left| \begin{array}{ll} B_{\lambda}^{+} = \{ \Lambda \geq \lambda \} & ; \quad B_{\lambda}^{-} = \{ \Lambda > \lambda \} \\ V_{\lambda}^{+} = \int_{\Lambda \geq \lambda} dx & ; \quad V_{\lambda}^{-} = \int_{\Lambda > \lambda} dx \\ Q_{\lambda}^{+} = \int_{\Lambda \geq \lambda} \Lambda(x) dx & ; \quad Q_{\lambda}^{-} = \int_{\Lambda > \lambda} \Lambda(x) dx \end{array} \right.$$

6 - SELECTION DOUBLE SOUS CONTRAINTES.

Les contours autorisés sont ici des couples $(A, A') \in \mathcal{B}$ où A' est le volume sélectionné pour l'extraction et $A \subset A'$ le volume sélectionné pour minerai. Nous poserons $\omega = (A, A')$, et les $\omega \in \mathcal{B}$ seront appelés les projets autorisés. Pour tout $\omega = (A, A')$, on pose :

$$V(\omega) = V(A') = \text{volume à extraire}$$

$$T(\omega) = V(A) = \text{volume (ou tonnage) de minerai récupéré}$$

$$Q(\omega) = Q(A) = \text{métal récupéré}$$

(avec évidemment $V(\omega) \geq T(\omega)$).

Le thème général est celui d'une dualité entre le paramétrage en (V, T) et le paramétrage dual en (λ, θ) .

Le Paramétrage en (V, T) .

Posons, pour $v \geq T \geq 0$

$$(6-1) \quad Q(v, T) = \text{Sup} \{Q(\omega), \omega \in \mathcal{B}, T(\omega) \leq T, V(\omega) \leq v\}$$

C'est une fonction croissante de chacune des variables, qui constitue un paramétrage technique admissible (sous la seule hypothèse que, de deux projets conduisant aux mêmes valeurs de V et T , le meilleur est celui qui donne la plus grande quantité de métal).

Mais ce paramétrage technique est, en pratique, inaccessible à cause de la complexité de la combinatoire mise en jeu. On va donc ici encore remplacer $Q(v, T)$ par son enveloppe concave, ce qui revient à utiliser le paramétrage dual :

Le paramétrage dual en λ, θ

Ici encore nous allons remplacer la fonction $Q(v, T)$ par son enveloppe concave $\hat{Q}(v, T)$. Pour cela, pour chaque valeur des paramètres λ et θ , nous déterminerons (ce qui est, en général, réalisable) le ou les projets réalisant le maximum :

$$\gamma(\lambda, \theta) = \text{Sup}_{\omega \in \mathcal{B}} \{Q(\omega) - \lambda V(\omega) - \theta T(\omega)\}$$

Ces projets correspondent aux points d'appui des plans $Q - \lambda V - \theta T = \gamma(\lambda, \theta)$, i.e. les points où ces plans rencontrent la surface $Q = Q(V, T)$, laquelle cependant reste contenue dans le demi-espace inférieur défini par ce plan. Ces points d'appui permettent ainsi de construire l'enveloppe concave de $Q(V, T)$, soit :

$$\hat{Q}(V, T) = \text{Inf}_{\lambda, \theta \geq 0} \{\gamma(\lambda, \theta) + \lambda V + \theta T\}$$

Les points d'appui fournissent, en fonction de λ et θ , un paramétrage technique de la forme :

$$Q = Q(\lambda, \theta) \quad ; \quad T = T(\lambda, \theta) \quad ; \quad V = V(\lambda, \theta).$$

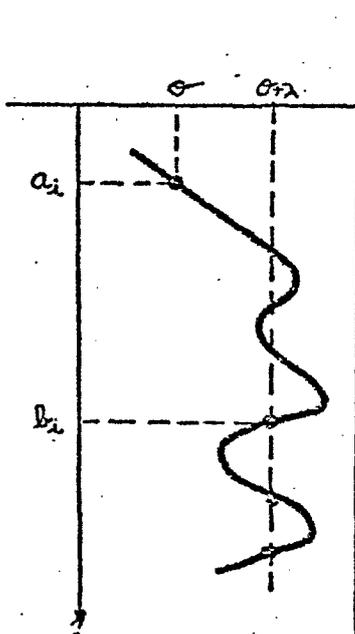
En pratique, on fixe l'un des paramètres, par exemple $\theta = \theta_0$, et on construit le paramétrage en λ (à $\theta = \theta_0$ fixé) comme dans le paragraphe précédent. En faisant ensuite varier θ_0 , on obtient le paramétrage cherché en (λ, θ) .

Exemple 1 : Toit et Mur de teneur avec découverte.

Avec les notations du paragraphe 5, on a ici :

$$Q(\omega) - \lambda V(\omega) - \theta T(\omega) = \sum_i \left[\int_{a_i}^{b_i} Z^*(x) dx - \lambda(b_i) - \theta(b_i - a_i) \right]$$

Comme on choisit (a_i, b_i) librement dans chacun des panneaux, on doit optimiser

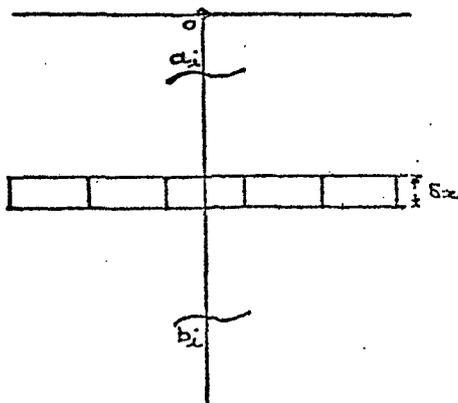


$$\int_{a_i}^{b_i} Z^*(x) dx - (\lambda + \theta) b_i + \theta a_i$$

indépendamment pour chacun des panneaux P_i : il n'y a qu'un petit nombre de combinaisons : on doit avoir $Z^*(x) < \theta$ au dessus de a et $\geq \theta$ au dessous ; de même $Z^*(x) < \lambda + \theta$ au dessous de b et $\geq \lambda + \theta$ au dessus. On obtient donc très vite le paramétrage :

$$\begin{cases} Q(\lambda, \theta) = S \sum_i \int_{a_i}^{b_i} Z^*(x) dx \\ T(\lambda, \theta) = S \sum_i (b_i - a_i) \\ V(\lambda, \theta) = S \sum_i b_i \end{cases}$$

Exemple 2 : Toit et Mur de teneur, et sélection fine du minerai.



Il s'agit, par exemple, d'un gisement d'Uranium. Dans chaque panneau, on extrait une tranche horizontale (a_i, b_i) . (on ne tient pas compte d'une découverte éventuelle.)

Au moment de l'exploitation, une sélection fine du minerai est faite sur des parallélépipèdes v de hauteur δx .

Sur ces blocs v , le critère $Z^*(v) \geq \theta$ permet le paramétrage technique d'un volume donné (une tranche a_i, b_i) supposé extrait. Cela conduit aux fonctions de transfert de chaque tranche horizontale $(x, x+\delta x)$ pour chaque panneau P_i (de surface S_i).

$$\begin{cases} T_i(x; \theta) = S_i \delta x \int_{\theta}^{\infty} F_i^*(x; dz) \\ Q_i(x; \theta) = S_i \delta x \int_{\theta}^{\infty} z F_i^*(x; dz) \end{cases}$$

On a alors pour la tranche (a_i, b_i)

$$Q_i - \lambda V_i - \theta T_i = S_i \int_{a_i}^{b_i} (Q_i(x; \theta) - \theta T_i(x; \theta) - \lambda) dx$$

Pour chaque θ donné, a_i et b_i se déterminent comme dans le paragraphe 5 (avec $Q_i(x, \theta) - \theta T_i(x, \theta)$ au lieu de $Z^*(x)$). On obtient ainsi a_i et b_i en fonction de λ et θ , et, par sommation en i , le paramétrage $Q(\lambda, \theta)$, $T(\lambda, \theta)$, $V(\lambda, \theta)$.

Exemple 3 : Ciel ouvert avec sélection libre du minerai.

Chaque contour autorisé devant être réunion de blocs v , on discrétise le problème au niveau de v . Pour chaque bloc v_x (de centre x , $x \in E$ où E est fini), on forme les fonctions de transfert $T(x; \theta)$ et $Q(x; \theta)$. Pour chaque θ fixé, on est ramené au problème à un paramètre λ avec $Z_i(x) = Q(x; \theta) - \theta T(x; \theta)$. D'où le paramétrage.

L'ESTIMATION GLOBALE DES RESERVES
RECUPERABLES

G. MATHERON

CENTRE DE GEOSTATISTIQUE
ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DES MINES DE PARIS
35 Rue Saint-Honoré
77305 FONTAINEBLEAU
- France -

L'ESTIMATION GLOBALE DES RESERVES
RECUPERABLES

TABLE

<u>0 - INTRODUCTION</u>	1
<u>1 - LA CORRECTION AFFINE</u>	3
<u>2 - LE CAS LOGNORMAL</u>	4
Effet d'information	6
Possibilité du paramétrage local	9
<u>3 - RECHERCHE D'UNE ANAMORPHOSE GAUSSIENNE</u>	10
Conditions requises	12
Le modèle gaussien	14
<u>4 - LES DEVELOPPEMENTS EN POLYNOMES D'HERMITE</u>	16
Loi du changement de support	18
<u>5 - LES RELATIONS TONNAGE/TENEUR</u>	19
<u>6 - LE MODELE GAUSSIEN DISCRETISE</u>	23

L'ESTIMATION GLOBALE DES RESERVES RECUPERABLES

0 - INTRODUCTION

Comment corriger l'effet de support et l'effet d'information ?
Nous nous plaçons dans le cas le plus simple : celui d'une sélection libre à un seul niveau :

Effet de support : parmi les blocs de taille v existant dans le gisement, nous voulons prévoir le nombre et la teneur moyenne de ceux dont la teneur $Z(v)$ est $\geq z$. Autrement dit : nous souhaitons connaître la loi $F_v(dz)$ des teneurs des blocs de taille v .

Effet d'information : en réalité, la sélection n'opèrera pas sur les teneurs $Z(x)$ elles-mêmes (qui resteront inconnues au moment de la décision ultime), mais sur les estimateurs ultimes $Z^*(v)$ (formés, par krigeage ou par d'autres procédés, au moment où l'information ultime sera connue).

Pour prévoir le nombre des blocs que l'on sélectionnera en coupant à $Z^*(v) \geq z$, il suffit de connaître la loi $F_v^*(dz)$, à une seule variable, de cet estimateur ultime $Z^*(v)$. Par contre, pour prévoir la teneur moyenne des blocs ainsi sélectionnés, il faut de plus connaître la loi à deux variables $F(dz, dz^*)$ de $Z(v)$ et de son estimateur $Z^*(v)$, ou, au moins, l'espérance conditionnelle

$$h(z^*) = E[Z(v) | Z^*(v) = z^*]$$

de la teneur réelle $Z(v)$ du bloc lorsque celle de son estimateur est connue $Z^*(v) = z^*$.

Si l'estimateur ultime $Z^*(v)$ vérifie la condition de non biais conditionnel $z^* = h(z^*)$, il suffit donc de connaître la loi : $F_v^*(dz)$ de cet estimateur. Mais, en général, les estimateurs usuels ne vérifient pas cette condition (même le krigeage : si la variance

de krigeage est petite, on peut souvent admettre $z^* = h(z^*)$ en première approximation, mais cela cesse d'être admissible si σ_K^2 est un peu grande).

Les éléments ci-dessus (loi F_V de $Z(v)$ pour l'effet de support ; loi F_V^* de $Z^*(v)$ et espérance conditionnelle $h(z^*)$ de $Z(v)$ à $Z^*(v) = z^*$) permettent d'effectuer les corrections voulues au niveau global, donc de prévoir la relation tonnage teneur globale du gisement :

$$\begin{cases} T_{V^*}(z) = N v \int_z^\infty F_V^*(dx) \\ Q_{V^*}(z) = N v \int_z^\infty h(x) F_V^*(dx) \end{cases}$$

Mais l'on désire souvent disposer de la même opération au niveau local, disons panneaux par panneaux. Il faut alors être capable d'estimer les lois précédentes (F_V^* ou F_V) conditionnellement à l'information disponible au voisinage de chaque bloc v à estimer.

Les données étant représentées par les teneurs Z_α , $\alpha = 1, 2$, des échantillons disponibles, il faut donc, en principe, connaître la loi à $(n+1)$ variables ($Z^*(v)$, Z_1, \dots, Z_n) : le problème se complique considérablement, et le recours à un modèle se révèle obligatoire [N.B. : c'est toujours à nos risques et périls que nous choisissons un modèle. Ce modèle, moyennant des calculs plus ou moins rapides mais faisables, nous fournit une solution. Maintenant que vaut cette solution ? Exactement autant que notre modèle. Si ce modèle est grossièrement faux, la "solution" correspondante risque d'être illusoire. L'expérience et la pratique en décident : les "bons" modèles sont justement ceux qui fournissent des solutions que la pratique ultérieure confirme].

1 - LA CORRECTION AFFINE

Pour apprécier l'ordre de grandeur de la correction de support, voici un procédé très rapide : A partir des données expérimentales (les teneurs ponctuelles Z_i), nous estimons la loi $F(dz)$ de ces teneurs, leur moyenne m , leur variance S^2 , leur variogramme γ . Connaissant γ_1 , nous pouvons aussi prévoir la variance $S_v^2 = S^2 - \bar{\gamma}(v,v)$ des blocs.

La loi F_v (inconnue) des blocs doit admettre cette moyenne m et cette variance S_v^2 : on peut donc en avoir une approximation grossière en resserrant la loi F autour de sa moyenne m , de manière à obtenir la variance voulue. Ce procédé consiste à admettre que les variables

$$Z(v) \text{ et } m + \frac{S_v}{S}(Z-m)$$

ont la même loi, soit :

$$P(Z(v) \geq z) = 1 - F_v(z) = 1 - F\left(m + \frac{S}{S_v}(z-m)\right)$$

En ce qui concerne la relation tonnage teneur paramétrée en T ($Q = Q(T)$ au niveau ponctuel, $Q_v = Q_v(T)$ pour les blocs v), partons de la relation

$$z(T) = \frac{dQ}{dT} ; \quad z_v(T) = \frac{dQ_v}{dT}$$

Par construction, nous avons :

$$(1-1) \quad Z_v(T) = m + \frac{S_v}{S}[z(T)-m]$$

En intégrant en T, (et compte tenu de $Q(T) = Q_v(T) = 0$ en $T = 0$), il vient donc :

$$(1-2) \quad \begin{cases} Q_v(T) = \left(1 - \frac{S_v}{S}\right)m T + \frac{S_v}{S} Q(T) \\ m_v(T) = \left(1 - \frac{S_v}{S}\right)m + \frac{S_v}{S} m(T) \end{cases}$$

Ce paramétrage en T est donc facile à former. Pour en déduire le paramétrage en z, il faut effectuer le changement de variable (1-1) : Si T(z) et $T_V(z)$ sont les tonnages de minerai coupé à z respectivement au niveau des carottes et des blocs, on a :

$$T_V(z) = T\left[m + \frac{S}{S_V}(z-m)\right]$$

On en déduit $Q_V(z)$ en substituant dans (1-2)

$$Q_V(z) = \left(1 - \frac{S_V}{S}\right)m T_V(z) + \frac{S_V}{S} Q[T_V(z)]$$

On peut, de la même manière, estimer la loi F_V^* de l'estimateur futur $Z^*(v)$, à partir de sa moyenne (qui est toujours égale à la moyenne m) et de sa variance $S_{V^*}^2$ (que l'on sait calculer) : mais ce procédé ne permet pas d'évaluer l'espérance conditionnelle $h(z^*)$ des blocs. Donc, on pourra prévoir le tonnage sélectionné à $Z^*(v) \geq z$, mais non la quantité de métal correspondante - sauf si on admet (mais c'est une approximation déjà plus grossière) que $h(z^*) = z^*$ (par exemple : cas où $Z^*(v)$ est un krigeage et où la variance de krigeage est faible). Enfin, ce procédé ne permet absolument pas de reconstituer les lois à plusieurs variables ($Z^*(v)$, et Z_α), donc échoue radicalement en ce qui concerne les estimations locales. Il faut trouver autre chose. Pour nous orienter dans cette recherche, examinons le cas particulièrement favorable d'une FA (multi-)lognormale.

2 - LE CAS LOGNORMAL

Dans ce modèle, la FA Z(x) représentant les teneurs ponctuelles est de la forme :

$$Z(x) = m e^{\sigma Y(x) - \frac{\sigma^2}{2}}$$

où Y(x) est une FA gaussienne stationnaire, d'espérance nulle, de variance unité, dont la loi spatiale (multi-gaussienne) est donc déterminée par la covariance (= corrélogramme) :

$$\rho_{x,y} = \rho(x-y) = E(Y(x)Y(y))$$

Avec ces notations $m = E(Z(x))$ est l'espérance de la FA $Z(x)$, et σ^2 est la variance du logarithme (neperien) de $Z(x)$. La variance de $Z(x)$ et la covariance (centrée) de $Z(x)$ et $Z(y)$ sont alors :

$$\begin{cases} S^2 &= m^2(e^{\sigma^2} - 1) \\ S_{xy} &= m^2(e^{\sigma^2} \rho_{xy} - 1) \end{cases}$$

Ce modèle (FA lognormale stationnaire) est assez souvent admissible pour certaines catégories de gisement à basse teneur (Uranium, Or, éventuellement cuivre, etc...) .

En ce qui concerne un bloc v , sa teneur est représentée dans ce modèle par la VA :

$$Z(v) = \frac{1}{v} \int_v Z(x) dx = m \frac{e^{-\sigma^2/2}}{v} \int_v e^{\sigma Y(x)} dx$$

En toute rigueur, $Z(v)$ ne peut pas être lognormale. Malgré cet interdit théorique, on constate très fréquemment que la loi de $Z(v)$ reste (à peu près) lognormale tant que la taille du bloc v n'est pas trop grande (permanence empirique de la lognormalité).

Compte tenu de cette permanence empirique, nous admettons donc le modèle suivant : $Z(v)$ est lognormale, soit :

$$Z(v) = m e^{\sigma_v Y_v - \frac{1}{2} \sigma_v^2}$$

où Y_v est une gaussienne réduite (= centrée, normée). Il reste à choisir σ_v^2 (variance logarithmique de $Z(v)$) de manière à ce que $Z(v)$ ait la variance correcte S_v^2 . Donc :

$$S_v^2 = m^2(e^{\sigma_v^2} - 1), \text{ i.e. } \sigma_v^2 = \log\left(1 + \frac{S_v^2}{m^2}\right)$$

Les avantages de ce modèle (lorsqu'il est valable) sont écrasants :

1/ Extrême simplicité du paramétrage

Dans tout ce qui suit, g et G désigneront la densité et la fonction de répartition de la loi de Gauss réduite :

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} ; \quad G(y) = \int_{-\infty}^y g(x) dx$$

Alors (à un facteur près T_0 , représentant le tonnage de minerai total, c'est-à-dire coupé à $z = 0$) et en posant :

$$y = \frac{1}{\sigma_v} \log \frac{z}{m} + \frac{1}{2} \sigma_v$$

(valeur de la gaussienne réduite Y_v associée à $Z(v) = z$), il vient

$$(2-1) \quad \begin{cases} T_v(z) = 1 - G(y) \\ Q_v(z) = m[1 - G(y - \sigma_v)] \end{cases}$$

[Exercice : établir ces formules]

2/ On peut prendre en compte l'effet d'information

En effet, supposons (par exemple) que l'estimateur ultime soit de la forme :

$$Z^*(v) = \sum_i \lambda_i Z(x_i)$$

$$\text{avec } \sum \lambda_i = 1$$

(les $Z(x_i)$ représenteront les teneurs des échantillons voisins du bloc v et disponibles au moment de la sélection : par exemple, des trous de tir. Il n'est pas nécessaire, bien que ce soit recommandable, que cet estimateur soit le krigeage). Cette combinaison linéaire peut (au même titre que l'intégrale $Z(v)$) être assimilée à une VA lognormale, soit

$$(2-2) \quad Z^*(v) = m e^{\frac{\sigma_v^*}{2} Y_v^* - \frac{1}{2} \sigma_v^{*2}}$$

où Y_v^* est une gaussienne réduite. Comme on sait calculer la variance $S_{v^*}^2$ de $Z^*(v)$, on détermine σ_v^{*2} par :

$$S_{v^*}^2 = m^2 (e^{\sigma_v^{*2}} - 1)$$

Il reste à franchir un pas de plus en admettant que les deux VA, Y_v et Y_v^* , individuellement gaussiennes, obéissent ensemble à une loi de Gauss à 2 variables, caractérisée par un coefficient de corrélation

$$\rho = \rho_{vv^*} = E(Y_v Y_v^*)$$

(N.B. : il s'agit réellement d'une hypothèse supplémentaire, d'ailleurs essentielle, et non d'une conséquence de ce qui précède : mais, si les lois des teneurs ponctuelles peuvent être considérées comme multi-lognormales, et si v n'est pas trop grand, cette nouvelle hypothèse (bilognormalité de $Z(v)$ et $Z^*(v)$) a toutes les chances d'être à peu près vérifiée).

On choisira ρ de manière à respecter la covariance S_{vv^*} de $Z(v)$ et $Z^*(v)$ (que l'on sait calculer). Donc ρ est défini par

$$S_{vv^*} = m^2 [e^{\rho \sigma_v \sigma_{v^*}} - 1]$$

Nous connaissons la loi (lognormale) de $Z^*(v)$, de moyenne m et de variance logarithmique σ_v^{*2} , voir (2-2).

Il reste à calculer l'espérance conditionnelle $h(z^*)$ de $Z(v)$ à $Z^*(v)$ fixé. On trouve :

$$(2-3) \quad h(z^*) = E[Z_v | Z_v^* = z^*] = m e^{\rho \sigma_v y^* - \frac{\rho^2 \sigma_v^2}{2}}$$

avec, évidemment, y^* défini par

$$z^* = m e^{\sigma_v^* y^* - \frac{1}{2} \sigma_v^{*2}}$$

On en déduit le tonnage et la quantité de métal récupérable en coupant à $Z^*(v) \geq z^*$:

$$(2-4) \quad \begin{cases} T_{v^*}(z^*) = 1 - G(y^*) \\ Q_{v^*}(z^*) = m[1 - G(y^* - \rho \sigma_v)] \end{cases}$$

[Exercice : établir ces formules].

En comparant à (2-1), on voit que la perte de quantité de métal due à l'effet d'information se traduit par le remplacement de σ_v par $\rho\sigma_v$: soit, à $T = 1 - G(y)$ constant :

$$Q_v(z) - Q_{v^*}(z^*) = m [G(y - \rho \sigma_v) - G(y - \sigma_v)] > 0$$

Remarque : Lorsque l'estimateur vaut z^* , le minerai, en moyenne, vaut non pas z^* mais $h(z^*)$. La coupure sur $Z^*(v)$ fait donc illusion : si la teneur limite est θ , il faut couper sur l'estimateur $Z^*(v)$, non à θ , mais à la teneur z^* défini par $h(z^*) = \theta$, soit

$$z^* = m \left(\frac{\theta}{m}\right)^{\frac{\sigma_v^*}{\rho\sigma_v}} \exp\left(\frac{\rho^2 \sigma_v^2 - \sigma_v^{*2}}{2}\right)$$

Il est plus simple de remplacer l'estimateur initial $Z^*(v)$ par :

$$H = h(Z^*(v)) = E(Z(v)/Z^*(v))$$

Soit, explicitement

$$H = m \left(\frac{Z^*}{m}\right)^{\frac{\rho\sigma_v}{\sigma_v^*}} \exp\left(\frac{\sigma_v^{*2} - \rho^2 \sigma_v^2}{2}\right)$$

H est lognormale, avec l'espérance m et la variance logarithmique

$$\sigma_h^2 = \rho^2 \sigma_v^2$$

Si donc nous paramétrons à l'aide de la gaussienne réduite associée à h selon (2-3), i.e.

$$y = \frac{1}{\sigma_h} \log \frac{h}{m} + \frac{1}{2} \sigma_h$$

On retrouvera les formules (2-1) avec σ_h au lieu de σ_v :

$$(2-5) \quad \left\{ \begin{array}{l} T_v(h) = 1 - G(y) \\ Q_v(h) = m[1 - G(y - \sigma_h)] \end{array} \right.$$

3/ Le paramétrage est possible au niveau local

Enfin, il est possible d'obtenir la loi du bloc $Z(v)$ et de son estimateur $Z^*(v)$ conditionnée par l'information disponible au voisinage du bloc v.

Si, en effet, les Z_α représentent les teneurs des échantillons disponibles et les Y_α les gaussiennes réduites qui leur sont associées, nous pouvons introduire l'hypothèse (supplémentaire) suivante : Y_v, Y_v^* et les Y_α ont une loi multigaussienne .

Cette loi multigaussienne sera entièrement déterminée par les données des coefficients

$$\rho_{v\alpha} = E(Y_v Y_\alpha) \quad ; \quad \rho_{v^*\alpha} = E(Y_v^* Y_\alpha)$$

(nous connaissons déjà ρ_{vv^*}). On choisira, comme toujours, ces coefficients de manière à respecter les covariances (connues) $S_{v\alpha}$ et $S_{v^*\alpha}$, soit

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{v\alpha} = m^2 [e^{\rho_{v\alpha} \sigma_v \sigma} - 1] \\ S_{v^*\alpha} = m^2 [e^{\rho_{v^*\alpha} \sigma_v^* \sigma} - 1] \end{array} \right.$$

Le reste (la détermination des relations tonnage teneur conditionnées par les Z_{α}) est affaire de calculs faciles que l'on pourra effectuer à titre d'exercice.

Autre exercice proposé : krigeage lognormal. Au lieu de l'estimateur linéaire $Z^*(v) = \sum \lambda^i Z(x_i)$ étudié ci-dessus, on peut (théoriquement, c'est préférable ; en pratique, c'est plus compliqué et vraisemblablement moins robuste) utiliser l'espérance conditionnelle de $Z(v)$ lorsque les $Z(x_i)$ sont fixés, soit $Z'(v) = f(Z_i)$: montrer que $Z'(v)$ est encore lognormale, et transposer les résultats précédents.

3 - RECHERCHE D'UNE ANAMORPHOSE GAUSSIENNE

Si nous analysons les raisons du succès du modèle lognormal, nous trouvons ceci : pour chacune de nos variables (teneur de bloc $Z(v)$, estimateur ultime $Z^*(v)$, teneurs ponctuelles $Z(x)$) nous avons trouvé une gaussienne (Y_v, Y_v^*, Y_x etc...) et une transformation ou anamorphose (φ_v, φ_{v^*} etc...) telles que :

$$Z(v) = \varphi_v(Y_v) \text{ etc...}$$

et que ces différentes gaussiennes réduites obéissent, dans leur ensemble, à une loi multigaussienne. Le fait que ces anamorphoses se soient trouvées être de type particulier (exponentiel) $\varphi_v(y) = m \exp\{\sigma_v y - \sigma_v^2/2\}$ n'a joué, en réalité, aucun rôle, sinon pour simplifier les calculs. On peut donc espérer généraliser ce modèle qui nous a si bien réussi, et le rendre applicable à d'autres cas, non lognormaux. Voyons cela.

Au niveau ponctuel d'abord : il est essentiel que notre modèle soit une FA stationnaire $Z(x)$. Moyennant cette stationnarité, les données ponctuelles (les Z_{α}) permettront d'estimer la fonction de répartition $F(z)$ de la VA $Z(x)$. Pour simplifier l'exposé, je suppose que $F(z)$ est continue. En désignant par $G(y)$ la fonction de répartition de la loi de Gauss réduite, nous pouvons à chaque y associer la valeur z telle que $F(z) = G(y)$. Ceci définit une

fonction :

$$z = \varphi(y) = F^{-1}[G(y)]$$

que nous appellerons anamorphose : c'est une fonction croissante, de sorte qu'inversement y s'exprime en fonction de z par :

$$y = \varphi^{-1}(z) = G^{-1}[F(z)]$$

Par construction, Z obéit à la loi F si et seulement si $Z = \varphi(Y)$ avec $Y = \varphi^{-1}(Z)$ gaussienne réduite.

Définissons donc une nouvelle FA stationnaire $Y(x)$ en posant

$$Y(x) = \varphi^{-1}(Z(x))$$

Pour chaque x , la VA $Y(x)$ est donc gaussienne réduite. Cela n'implique absolument pas que, pour plusieurs points d'appui x_α ($\alpha = 1, 2, \dots, n$), les $Y_\alpha = Y(x_\alpha)$ obéissent, dans leur ensemble, à une loi multigaussienne. Toutefois (encouragés par la réussite du modèle lognormal, et, sous réserve, naturellement, de procéder dans chaque cas particulier à un contrôle de cette hypothèse) nous supposons qu'il en est bien ainsi. Après la stationnarité, donc, notre seconde hypothèse fondamentale sera que notre anamorphose φ est multigaussienne.

A ce stade, notre modèle est de la forme :

$$(3-1) \quad Z(x) = \varphi[Y(x)]$$

où $Y(x)$ est une F.A. stationnaire multigaussienne (d'espérance nulle et de variance 1) et φ une fonction croissante quelconque appelée anamorphose (la donnée de l'anamorphose φ équivaut à celle de la loi F de Z_x). Le modèle lognormal correspond au cas particulier où φ est une fonction exponentielle.

Passons au problème du changement de support. A la teneur $Z(v)$ du bloc v , de loi F_v , on peut encore associer une anamorphose φ_v et une gaussienne réduite Y_v telles que

$$Z(v) = \varphi_v(Y_v)$$

Ici encore $\varphi_v(y) = F_v^{-1}[G(y)]$, de sorte que la donnée de φ_v équivaut à celle de la loi F_v . Toutefois, à la différence du cas ponctuel, nous n'avons pas (en dehors de la moyenne m et de la variance S_v^2 que nous savons calculer) en général d'information expérimentale sur la loi F_v . Notre première tâche consiste donc à trouver un modèle plausible pour l'anamorphose φ_v .

Quelles sont les conditions requises pour un tel modèle ? Dans le cas lognormal, nous avons :

$$\varphi_v(y) = m \exp(\sigma_v y - \sigma_v^2/2)$$

m étant fixe (c'est la moyenne générale, évidemment invariante). Il s'agissait donc d'un modèle à un seul paramètre, soit σ_v . Au lieu de σ_v , prenons un paramètre $r > 0$ quelconque, et proposons nous de chercher une famille φ_r de fonctions vérifiant les conditions suivantes :

- a) pour chaque r , φ_r est une fonction croissante
- b) conservation de la moyenne : pour chaque r , on doit avoir

$$\int \varphi_r(y) g(y) dy = m$$

- c) détermination bi-univoque de la variance : la fonction

$$S^2(r) = \int [\varphi_r(y)]^2 g(y) dy - m^2$$

doit être croissante, de manière à ce que la seule donnée de la variance suffise à déterminer r .

d) Si nous choisissons de faire correspondre la valeur $r=1$ au support ponctuel, $\varphi_1(y) = \varphi(y)$ est connue à l'aide des données expérimentales. Dans le cas gaussien, c'est-à-dire :

$$\varphi(y) = m + \sigma y$$

nous savons que les teneurs des blocs sont encore gaussiennes. Donc :

$$\varphi_r(y) = m + r \sigma y$$

(avec $S^2(r) = r^2 \sigma^2$, σ^2 désignant la variance ponctuelle).

Dans le cas lognormal, c'est-à-dire :

$$\varphi(y) = m \exp(\sigma y - \sigma^2/2)$$

nous savons que φ_r doit être de la forme :

$$\varphi_r(y) = m \exp(r \sigma y - \sigma^2 r^2/2)$$

Nous imposerons donc à l'algorithme exprimant φ_r en fonction de φ de respecter la permanence de la normalité et de la lognormalité.

e) Lorsque la variance devient petite, c'est-à-dire dans le cas de grands blocs, les théorèmes généraux du calcul des probabilités suggèrent que la loi de $Z(v)$ doit se rapprocher d'une loi de Gauss : donc (convergence vers la loi de Gauss) lorsque r est petit, φ_r doit différer assez peu de l'expression linéaire $m + s(r).y$.

f) On sait qu'augmenter v , donc diminuer r , doit détériorer la relation tonnage teneur. Si nous posons

$$Q_r(y) = \int_y^{\infty} \varphi_r(x) g(x) dx$$

nous exigeons donc la condition :

$$\frac{\partial Q_r}{\partial r} \geq 0$$

Le modèle gaussien

Il existe plusieurs modèles plausibles vérifiant ces conditions. Nous n'examinerons ici que le plus simple d'entre eux, connu sous le nom de modèle gaussien discrétisé (la justification de cette terminologie apparaîtra ultérieurement).

Pour introduire ce modèle, partons de la relation de définition :

$$Z(v) = \frac{1}{v} \int_v Z(x)dx = \frac{1}{v} \int_v \varphi(Y_x)dx$$

Désignons par \underline{x} le point aléatoire choisi dans v selon une loi uniforme, et par $Y_{\underline{x}}$ la variable aléatoire composée obtenue en remplaçant x dans $Y(x)$ par ce point aléatoire. C'est encore une gaussienne réduite. La relation intégrale ci-dessus nous indique qu'à $Z(v)$ fixé ou, ce qui revient au même puisque $Z(v) = \varphi_v(Y_v)$, à Y_v fixé, l'espérance conditionnelle de $\varphi(Y_{\underline{x}})$ doit être égale à $Z(v)$. Autrement dit, on a nécessairement :

$$(3-1) \quad \varphi_v(Y_v) = E[\varphi(Y_{\underline{x}}) | Y_v]$$

Cette relation (3-1), purement formelle, est valable dans tous les cas. Pour avoir un modèle explicite, introduisons l'hypothèse suivante (nécessairement approximative : on peut montrer qu'en toute rigueur une telle hypothèse ne peut pas être vérifiée) : la loi à deux variables $(Y_{\underline{x}}, Y_v)$ est gaussienne elle aussi, au moins approximativement et pour les petites valeurs de v . Comme $Y_{\underline{x}}$ et Y_v sont des gaussiennes réduites, cette loi binormale est entièrement définie par le coefficient de corrélation r de $Y_{\underline{x}}$ et Y_v .

Sous cette hypothèse, la relation (3-1) détermine complètement φ_v dès que φ et r sont connus : mais c'était exactement notre objectif. Explicitement, notons qu'à $Y_v = y$ fixé, $Y_{\underline{x}}$ est gaussienne avec la variance $(1-r^2)$ et l'espérance ry . Par suite, d'après (3-1), en écrivant φ_r au lieu de φ_v , nous obtenons la relation cherchée :

$$(3-2) \quad \varphi_r(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(ry + \sqrt{1-r^2} x) g(x)dx$$

Tel est l'algorithme du changement de support dans le modèle discrétisé. Vérifie-t-il les conditions a/,... f/ énumérées ci-dessus ? Il en est bien ainsi.

a/ Comme φ est (par construction) déjà une anamorphose, c'est-à-dire une fonction croissante, la fonction à intégrer dans (3-2) augmente avec y , donc φ_r est une fonction croissante de y .

b/ La moyenne m est conservée, soit :

$$\int \varphi_r(y) g(y) dy = \int \varphi(y) g(y) dy$$

On peut le vérifier par un calcul explicite à partir de (3-2). Il est plus simple de remarquer que (3-1) assure automatiquement cette conservation :

$$E[\varphi_v(Y_v)] = E[\varphi(Y_x)] = m$$

d'après les propriétés de l'espérance conditionnelle.

c/ Il n'est pas très commode de vérifier directement sur (3-2) que $S^2(r)$ est une fonction croissante de r . Cela apparaîtra, par contre, comme une conséquence immédiate du développement de φ_r en polynômes d'Hermite.

d/ La permanence de la normalité et de la lognormalité se vérifient immédiatement.

Pour les conditions e/ et f/, il sera plus facile de les vérifier sur les développements du paragraphe suivant. [Pour la condition f/, on peut également déduire d'abord de (3-2) la relation différentielle :

$$(3-3) \quad \frac{r}{\partial r} \frac{\partial \varphi_r}{\partial r} = - \frac{\partial^2 \varphi_r}{\partial y^2} + y \frac{\partial \varphi_r}{\partial y}$$

(qui résulte aussi immédiatement d'une interprétation de (3-1) à l'aide d'un processus gaussien markovien stationnaire), et substituer

dans

$$\frac{\partial Q_r}{\partial r} = \int_y^{\infty} \frac{\partial \varphi_r(x)}{\partial r} g(x) dx$$

Après une intégration par partie, on trouvera :

$$(3-4) \quad \frac{\partial Q_r(y)}{\partial r} = \frac{1}{r} g(y) \frac{\partial \varphi_r(y)}{\partial y}$$

Comme φ_r est une fonction croissante de y , cette expression est effectivement positive.]

4 - LES DEVELOPPEMENTS EN POLYNOMES D'HERMITE

Le polynome d'Hermite de degré n , soit $H_n(x)$ est défini par :

$$H_n(x) = \frac{1}{g(x)} \frac{d^n}{dx^n} g(x)$$

Ces polynomes vérifient la relation d'orthogonalité

$$\int H_n(x) H_m(x) g(x) dx = 0 \quad \text{pour } n \neq m$$

$$\int H_n^2(x) g(x) dx = n!$$

et toute fonction $f(x)$ (telle que $\int f^2 g dx < \infty$) admet le développement :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{n!} H_n(x) \\ f_n = \int H_n(x) f(x) g(x) dx \end{array} \right.$$

En particulier, l'exponentielle $e^{\lambda x}$ admet le développement

$$(4-1) \quad e^{\lambda x} = e^{\lambda^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} H_n(x)$$

Notons les relations :

$$\begin{cases} H'_n = -n H_{n-1} \\ H_{n+1} = H'_n - x H_n \\ H''_n - x H'_n = -n H_n \end{cases}$$

Mais la propriété principale, en ce qui nous concerne, est la suivante : si X et Y sont deux gaussiennes réduites et ρ leur coefficient de corrélation, alors :

$$(4-3) \quad E[H_n(X) | Y = y] = \rho^n H_n(y)$$

Donnons deux démonstrations différentes de cette relation fondamentale.

1 - Si nous prenons $\varphi = H_n$ dans (3-2), alors $\varphi_\rho(y)$ est justement cette espérance conditionnelle. Compte tenu de l'équation (3-3) et de la dernière relation (4-2), il vient :

$$\rho \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial \rho} = n \varphi_\rho$$

En intégrant, et en remarquant $\varphi_\rho = 0$ pour $\rho = 0$, on trouve bien $\varphi_\rho = \rho^n \varphi$, c'est-à-dire (4-3).

2 - A $Y=y$ fixé, on a :

$$E[e^{\lambda X} / Y = y] = e^{\rho \lambda y + (1-\rho^2) \frac{\lambda^2}{2}}$$

D'après (4-1), le premier membre est :

$$e^{\frac{\lambda^2}{2}} \sum (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} E[H_n(X) | Y=y]$$

et le second :

$$e^{\frac{\lambda^2}{2}} \sum (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} \rho^n H_n(y)$$

Par identification, on en déduit (4-3).

Conséquence : Pourvu que $|\rho| < 1$, la loi X à Y = y fixé admet la densité :

$$g_{\rho}(x|y) = \left(\sum \frac{\rho^n}{n!} H_n(x) H_n(y) \right) g(x)$$

Expression du changement de support

Pour effectuer les calculs rapidement, il sera commode d'utiliser le développement de l'anamorphose φ en polynomes d'Hermite, soit :

$$(4-4) \quad \varphi(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{n!} H_n(x)$$

$$(C_n = \int \varphi(x) H_n(x) g(x) dx)$$

En particulier :

$$C_0 = m = \int \varphi(x) g(x) dx$$

est l'espérance de $Z_x = \varphi(Y_x)$. Quant à la variance S^2 , compte tenu des propriétés d'orthogonalité, on trouve

$$S^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n^2}{n!}$$

(le terme en $n = 0$ disparaît, du fait que l'on retranche $m^2 = C_0^2$).

Compte tenu de notre propriété fondamentale (4-3), il résulte de (3-2) ou, plus facilement, de (3-1) que l'algorithme du changement de support prend la forme très simple :

$$(4-5) \quad \varphi_r(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{n!} r^n H_n(y)$$

valable pour $|r| \leq 1$. La variance correspondante est alors

$$(4-6) \quad S^2(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n^2 r^{2n}}{n!}$$

C'est donc bien une fonction croissante de r (du moins pour $r \geq 0$, seul cas que nous envisageons).

Exemple : Dans le cas lognormal, on a

$$\varphi(y) = m e^{\sigma y - \sigma^2/2} = m \sum (-1)^n \frac{\sigma^n}{n!} H_n(y)$$

d'après (4-1). D'après (4-5), il vient :

$$\varphi_r(y) = m \sum (-1)^n \frac{\sigma^n r^n}{n!} H_n(y)$$

Donc, en utilisant à nouveau (4-1) :

$$\varphi_r(y) = m e^{r\sigma y - r^2 \sigma^2/2}$$

On retrouve ainsi la permanence de la lognormalité.

5 - LES RELATIONS TONNAGE/TENEUR

Dans notre modèle discrétisé, les relations (4-5) et (4-6) résolvent le problème du changement de support : de fait, si $Z(x) = \varphi(Y(x))$, nous développons l'anamorphose φ des teneurs ponctuelles comme en (4-4) ; nous choisissons pour $r > 0$ la valeur (unique) déterminée d'après (4-6) en posant $S^2(r) = S_v^2$, où S_v^2 est la variance (connue) des blocs v ; l'anamorphose $\varphi_v = \varphi_r$ des teneurs $Z(v)$ est alors donnée par (4-5), et la loi F_v des blocs s'en déduit.

Les relations tonnage/teneur (pour les teneurs réelles $Z(v)$ des blocs v) sont alors paramétrées en y sous la forme :

$$T_v(y) = 1 - G(y)$$

$$Q_v(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n r^n}{n!} \int_y^{\infty} H_n(x) g(x) dx$$

Compte tenu de la définition des polynomes H_n , on voit que la quantité de métal admet le développement :

$$(5-1) \quad Q_v(y) = m[1 - G(y)] - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n r^n}{n!} H_{n-1}(y) g(y)$$

Après l'effet de support, examinons l'effet d'information.
Si l'estimateur ultime $Z^*(v)$ est de la forme :

$$Z^*(v) = \sum \lambda_i Z(x_i) \quad \text{avec} \quad \sum \lambda_i = 1$$

nous pouvons lui appliquer (au même titre qu'à $Z(v)$) le modèle développé plus haut : donc nous considérerons que cet estimateur ultime admet l'anamorphose gaussienne :

$$Z^*(v) = \varphi_{r^*}(Y_v^*)$$

où Y_v^* est une gaussienne réduite, et r^* déterminé par la condition habituelle de variance, soit :

$$S^2(r^*) = S_{v^*}^2$$

Pour avoir la loi simultanée de $Z(v)$ et des $Z^*(v)$, nous introduisons à ce stade une hypothèse (supplémentaire) : la binormalité des deux gaussiennes Y_v et Y_v^* . Pour achever de déterminer cette loi à deux variables, il faut connaître le coefficient

$$\rho = \rho_{vv^*} = E(Y_v Y_v^*)$$

Or, compte tenu de la relation capitale (4-3) et de l'orthogonalité des polynômes d'Hermite, il est immédiat que la covariance de $Z(v) = \varphi_r(Y_v)$ et de $Z^*(v) = \varphi_{r^*}(Y_v^*)$ est

$$(5-2) \quad S_{vv^*} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n^2 r^n r^{*n}}{n!} \rho^n$$

S_{vv^*} , r et r^* étant connus, cette relation détermine la valeur ρ cherchée (de manière univoque si nous nous limitons aux valeurs positives).

Nous pouvons dès lors calculer l'espérance conditionnelle $h(z)$ de $Z(v)$ à $Z^*(v) = z$ fixé en utilisant (4-3) :

$$\left\{ \begin{array}{l} h(z) = E[\varphi_{r^*}(Y_v^*) | Y_v^* = y] \\ (z = \varphi_{r^*}(y)) \end{array} \right.$$

Il vient :

$$h(z) = \sum \frac{C_n}{n!} r^n \rho_{vv^*}^n H_n(y) = \varphi_{r \rho_{vv^*}}(y)$$

En général, donc, z est différent de $h(z)$. Pour que la condition de non biais conditionnel soit vérifiée dans ce modèle, il faut et il suffit que l'on ait $\rho_{vv^*} = r^*$, c'est-à-dire, d'après (5-2) :

$$S_{vv^*} = S_{v^*}^2$$

En général cette condition n'est pas vérifiée (même si $Z^*(v)$ est un krigeage) à cause de la condition imposée aux poids $\sum \lambda^\alpha = 1$.

[N.B. : la condition $\sum \lambda^\alpha = 1$ n'est nullement, ici, une condition de non biais. Elle a seulement pour objet de nous permettre d'évaluer l'anamorphose φ_{r^*} de $Z^*(v)$, puisque c'est seulement aux combinaisons linéaire de poids 1 que s'applique notre modèle de changement de support.

Supposons que nous prenions comme estimateur le krigeage simple $Z_K(v) = \sum \lambda_K^\alpha (Z_\alpha - m) + m$ avec, en général

$$v = \sum \lambda_K^\alpha \neq 1$$

Pour appliquer notre modèle, posons

$$Z^*(v) = \frac{1}{v} \sum \lambda_K^\alpha Z_\alpha ; \quad Z_k(v) = v Z^*(v) + (1-v)m$$

La combinaison linéaire $Z^*(v)$ vérifie la condition sur les poids, mais, en général, $S_{vv^*} \neq S_{v^*}^2$ et le non biais n'est pas vérifiée. On calcule comme ci-dessus l'anamorphose φ_{r^*} de $Z^*(v)$ et celle du krigeage Z_K s'en déduit par

$$Z_k(v) = v \varphi_{r^*}(Y_v^*) + (1-v)m$$

Par conséquent, l'espérance conditionnelle :

$$E[Z(v))/Z_K(v)] = h(Z_V^*) = \varphi_{r\rho}(Y_V^*)$$

n'est nullement égale à $Z_K(v)$, sauf dans le cas gaussien (c'est-à-dire dans le cas où φ est linéaire)].

Le paramétrage des réserves s'en déduit.

Si l'on choisit de couper à $Z^*(v) \geq z$, en définissant y par la condition :

$$z = \varphi_{r^*}(y)$$

il vient :

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{v^*}(z) = 1 - G(y) \\ Q_{v^*}(z) = \int_y^\infty \varphi_{r\rho}(x)g(x)dx \end{array} \right.$$

et on trouve, comme précédemment, le développement suivant de la quantité de métal coupée à $z = \varphi_{r^*}(y)$:

$$Q_{v^*}(z) = m[1-G(y)] - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n r^n \rho^n}{n!} H_{n-1}(y)g(y)$$

On peut aussi remarquer que ce paramétrage en $z = \varphi_{r^*}(y)$ fait illusion, puisque l'espérance de la teneur $Z(v)$ du bloc dont l'estimation est $Z^*(v) = z$ n'est pas z , mais

$$h(z) = \varphi_{\rho r}(y)$$

de sorte que (du point de vue de la recherche d'une coupure optimale) tout se passe comme si nous coupons à $h(z)$ et non à z .

On peut alors, comme dans le cas lognormal, suggérer de remplacer l'estimateur initial $Z^*(v)$ par l'estimateur corrigé

$$H = h(Z^*(v)) = \varphi_{\rho r}[\varphi_{r^*}^{-1}(Z^*(v))]$$

que vérifie la condition de non biais.

En coupant, sur ce nouvel estimateur, à $H \geq h$, on obtient, en posant cette fois

$$h = \varphi_{pr}(y)$$

le paramétrage associé à l'estimateur corrigé

$$\left\{ \begin{array}{l} T_V(h) = 1 - G(y) \\ Q_V(h) = \int_y^{\infty} \varphi_{pr}(x)g(x)dx \end{array} \right.$$

identique au précédent en tant que fonction de y - mais non, évidemment, en tant que fonction de h (et, en pratique, ce sont les fonctions T_V et Q_V exprimées en h qui doivent être utilisées dans les calculs économiques).

Exercices proposés - 1 - Vérifier, à l'aide de (4-5), la convergence vers la loi de Gauss lorsque r tend vers 0.

2 - A partir du développement (5-1) de la quantité de métal, démontrer que $Q_r(y)$ est une fonction croissante de r et retrouver la relation (3-4).

6 - LE MODELE GAUSSIEN DISCRETISE

Le paramétrage local est-il possible dans le présent cadre, autrement dit notre modèle permet-il de reconstituer les lois de $Z(v)$ et $Z^*(v)$, ou, ce qui revient au même, des gaussiennes Y_v et Y_v^* conditionnellement aux données $Z_\alpha = \varphi(Y_\alpha)$ disponibles au voisinage d'un bloc v donné ?

En apparence, la réponse devrait être positive : rien ne nous empêche, semble-t-il, d'introduire sur la lancée la nouvelle hypothèse ad hoc, celle de la multinormalité des variables (Y_v, Y_v^*, Y_α) .

Pour déterminer cette loi multigaussienne, ρ_{vv^*} étant déjà connue, il nous suffit de choisir les coefficients $\rho_{v\alpha}$ et $\rho_{v^*\alpha}$ de

manière à reconstituer les covariances (connues) $S_{v\alpha}$ et $S_{v^*\alpha}$ correspondantes, selon les relations

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{v\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n^2}{n!} r^n \rho_{v\alpha}^n \\ S_{v^*\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n^2}{n!} r^{*n} \rho_{v^*\alpha}^n \end{array} \right.$$

De fait, on pourra procéder effectivement ainsi en pratique pourvu que chaque bloc v contienne au plus un échantillon ponctuel. Par contre, si les blocs v contiennent plusieurs échantillons, des difficultés surgissent, qui mettent en question la cohérence interne de notre modèle dès que nous admettons la multinormalité de Y_v et de toutes les variables ponctuelles Y_x .

En effet, supposons que pour chaque point x, le couple (Y_v, Y_x) soit bigaussien. Alors, l'espérance conditionnelle de $Z(x) = \varphi(Y_x)$ à $Z(v)$, c'est-à-dire à Y_v fixé est :

$$(6-1) \quad E(Z(x)/Z(v)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{n!} \rho_{xv}^n H_n(Y_v)$$

le coefficient ρ_{xv} étant déterminé par la condition

$$(6-2) \quad S_{xv} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n^2}{n!} r^n \rho_{xv}^n$$

Intégrons (6-1) dans v il vient :

$$(6-2) \quad E\left[\frac{1}{v} \int_v Z(x) dx / Z(v)\right] = \sum \frac{C_n}{n!} H_n(Y_v) \frac{1}{v} \int_v \rho_{xv}^n dx$$

Mais, puisque dans tous les cas $Z(v)$ est égal à l'intégrale $(1/v) \int_v Z(x) dx$, le premier membre est $Z(v)$ lui-même, c'est-à-dire (dans notre modèle) :

$$Z(v) = \varphi_r(Y_v) = \sum \frac{C_n r^n}{n!} H_n(Y_v)$$

Or la relation (6-2), qui définit ρ_{xv} , n'entraîne certainement pas l'égalité

$$r^n = \frac{1}{v} \int_v \rho_{xv}^n dx$$

pour chaque n : nous tombons ainsi sur une redoutable contradiction.

Pour rétablir la cohérence interne du modèle, nous devons renoncer à attribuer une localisation précise, à l'intérieur de chaque bloc v , aux teneurs ponctuelles $Z(x)$, $x \in v$.

De fait, le point de départ de notre modèle, c'est-à-dire le passage de la relation formelle (3-1) à l'expression explicite (3-2) a consisté à admettre la binormalité du couple $(Y_v \text{ et } Y_x)$, où x est le point aléatoire dans v : or il est facile de voir que cette hypothèse est incompatible avec la binormalité du couple (Y_v, Y_x) pour chaque point x individualisé dans v (à moins, ce qui ne sera jamais le cas en pratique, que ρ_{xv} ne reste constant lorsque x décrit v).

Conséquence : pour assurer la cohérence du modèle, nous devons considérer chaque échantillon ponctuel $Z(x_i)$ comme implanté de manière aléatoire dans le bloc v_i contenant le point x_i , c'est-à-dire remplacer $Z(x_i) = \varphi(Y_{x_i})$ par $Z(\underline{x}_i) = \varphi(Y_{\underline{x}_i})$, \underline{x}_i aléatoire dans v_i .

La relation (6-1) est alors remplacée par

$$(6-3) \quad E[Z(\underline{x})/Z(v)] = \sum \frac{C}{n!} \rho_{\underline{x}v}^n H_n(Y_v)$$

avec un coefficient $\rho_{\underline{x}v}$ déterminé par la relation (6-2) écrite avec $S_{\underline{x}v}$ au lieu de S_{xv} : mais, $S_{\underline{x}v}$, covariance de la teneur du bloc v et de celle du point \underline{x} aléatoire dans v est évidemment :

$$S_{\underline{x}v} = \frac{1}{v} \int_v S_{xv} dx = S_v^2$$

c'est-à-dire la variance de $Z(v)$. Donc $\rho_{\underline{x}v}$ est déterminé par

$$S_v^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C^2}{n!} r^n \rho_{\underline{x}v}^n$$

Or, par construction, r vérifie la relation :

$$S_v^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C^2}{n!} r^{2n}$$

Par suite, on a l'égalité :

$$(6-4) \quad \rho_{\underline{xv}} = r$$

et, dans ces conditions, (6-3) se réduit à :

$$E[Z(x)/Z(v)] = \varphi_r(Y_v) = Z(v)$$

La cohérence est donc assurée.

Pour achever de spécifier ce nouveau modèle où les points expérimentaux x_i sont maintenant remplacés par des points aléatoires \underline{x}_i implantés dans les blocs v_i correspondants, nous devons préciser les coefficients de corrélation suivants (entre les gaussiennes associées aux diverses variables)

$\rho_{v_i v_j}$: entre deux blocs v_i, v_j distincts

$\rho_{\underline{x}_i v_j}$: entre le point \underline{x}_i dans v_i et le bloc $v_j \neq v_i$

$\rho_{\underline{x}_i \underline{x}_j}$: entre deux points pris dans deux blocs distincts

$\rho_{\underline{x} \underline{x}'}$: entre deux points pris dans le même bloc v

Partant des relations suivantes entre covariances :

$$S_{v_i v_j} = S_{\underline{x}_i \underline{x}_j} = S_{\underline{x}_i v_j}$$

$$S_{\underline{x} \underline{x}'} = S_{\underline{x} v} = S_v^2$$

et utilisant la fonction :

$$S^2(r) = \sum \frac{C^n}{n!} r^{2n}$$

nous trouvons que ces coefficients sont déterminés par les relations :

$$S_{v_i v_j} = S^2[\sqrt{r^2 \rho_{v_i v_j}}] = S^2[\sqrt{\rho_{x_i x_j}}] = S^2[\sqrt{r \rho_{x_i v_j}}]$$

$$S_v^2 = S^2(\sqrt{\rho_{x x'}}) = S^2(\sqrt{r \rho_{x v}}) = S^2(\sqrt{r^2})$$

Donc :

$$\rho_{x_i x_j} = r \rho_{x_i v_j} = r^2 \rho_{v_i v_j}$$

$$\rho_{x x'} = r \rho_{x v} = r^2$$

Ces relations expriment que, dans ce modèle, la teneur d'un échantillon ponctuel $Z(x_i)$ est conditionnellement indépendante de toutes les autres variables (de blocs et de points) lorsque la teneur $Z(v_i)$ du bloc correspondant est fixée.

Nous arrivons ainsi à la conception suivante (qui justifie la terminologie) de notre modèle gaussien discrétisé :

La FA initiale $Z(x)$, stationnaire et définie au niveau ponctuel est remplacée par une version discrétisée de la même FA régularisée sur les blocs v : Autrement dit, le gisement entier étant considéré comme la réunion d'un nombre N (peut-être grand, mais fini) de blocs v_i disjoints, la structure du modèle est déterminée par la donnée des variables aléatoires :

$$Z(v_i) = \varphi_r(Y_{v_i})$$

(teneurs des blocs) anamorphosées par φ_r des gaussiennes réduites Y_{v_i} : la loi (multivariable) correspondante est définie par les coefficients de corrélation $\rho_{v_i v_j}$.

Les blocs v_i sont ensuite munis d'échantillons "ponctuels" (que l'on doit concevoir comme implantés au hasard, chacun dans son bloc et indépendamment les uns des autres) avec des teneurs de la forme

$$Z(x_i) = \varphi(Y_{x_i})$$

où chaque gaussienne réduite $Y_{\underline{x}_i}$ est :

$$Y_{\underline{x}_i} = r Y_{V_i} + \sqrt{1-r^2} \varepsilon_i$$

avec des ε_i gaussiennes réduites indépendantes les unes des autres
et des Y_{V_j} .

Ce modèle (qui permet le paramétrage local et global des réserves) présente, en outre, de grands avantages pour les techniques de simulation, conditionnelles ou non.

LES MODELES GAUSSIENS ANAMORPHOSES

A. MARECHAL

CENTRE DE GEOSTATISTIQUE
ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DES MINES DE PARIS

35 Rue Saint-Honoré

77305 FONTAINEBLEAU

- France -

LES MODELES GAUSSIENS ANAMORPHOSES

I - INTRODUCTION

Les problèmes pratiques d'estimation du minerai récupérable font apparaître la nécessité d'estimer des histogrammes locaux, ce qui implique la définition de modèles probabilistes multivariés (c'est-à-dire précisant la loi de probabilité conjointe de plusieurs points). De plus, les quantités à estimer étant toujours des teneurs moyennes de blocs, ces lois de probabilité doivent lier valeurs ponctuelles et valeurs moyennes de blocs, et impliquent entre autre la connaissance de la loi de probabilité des blocs. En résumé il nous faut définir des lois de probabilité multivariés, relatives conjointement à des teneurs de points et de blocs, relevant de modèles suffisamment généraux pour s'ajuster aux différents types de distribution rencontrés en études minières mais n'impliquent cependant pas trop de paramètres pour permettre une inférence statistique.

Par ailleurs, une façon d'aborder l'étude de problèmes non linéaires est d'effectuer des simulations conditionnelles : or la plupart des méthodes connues de simulations dans l'espace conduisent, selon le théorème central limite de la théorie des probabilités, à des fonctions aléatoires gaussiennes, qu'il faut ensuite transformer pour retrouver les différentes lois de distribution expérimentales (c'est ainsi par exemple qu'on simulera une F.A. lognormale par exponentiation de la gaussienne simulée). Il se trouve que les modèles implicitement utilisés ainsi répondent aux conditions énoncées plus haut, tout en présentant de nombreuses particularités intéressantes liées aux propriétés des lois de Gauss. Dans ces conditions, il était naturel de choisir, dans une première tentative de modélisation multivariée, les modèles gaussiens anamorphosés à la fois à cause de la simplicité de leur formalisme et pour élucider certains problèmes apparus lors de l'étude de simulations conditionnelles.

II - RAPPELS SUR LES F.A. GAUSSIENNES

II-1. Rappel sur les F.A.

Une F.A. peut être définie par sa loi spatiale, c'est-à-dire par la loi de probabilité conjointe de N variables aléatoires $Z_i(x_i)$ correspondant à la F.A. prise en N points d'appuis donnés x_i . Les problèmes que nous étudierons mettront toujours en évidence un nombre fini N de points d'appui de la F.A., de sorte que nous serons toujours ramenés à utiliser des lois de probabilité multivariées.

- . Loi de probabilité multivariée : c'est la loi de probabilité d'une variable aléatoire vectorielle (Y_1, Y_2, \dots, Y_N)

$$F(y_1, \dots, y_n) = \text{Prob}\{Y_1 < g_1, \dots, Y_N < g_n\}$$

De cette loi multivariée dérivent deux types de loi de probabilité :

- . les lois marginales $F_i(y_i) = F(+\infty, +\infty, y_i, \dots, +\infty)$, qui sont les lois des V.A. Y_i considérées seules.
 - . les lois conditionnelles, du type $F(y_i | y_j) = \text{Prob}\{Y_i < y_i | Y_j = y_j\}$
- La V.A. définie par cette loi s'appelle "variable à conditionnée de Y_i à Y_j fixé" et sa moyenne l'espérance conditionnelle.

On appellera F.A. totalement gaussienne la F.A. $Y(x)$ dont toutes les lois multivariées associées sont des lois gaussiennes multivariées. Dans la suite, on s'intéressera uniquement aux modèles stationnaires, c'est-à-dire ceux pour lesquels toutes les lois marginales $P\{Y(x) < y\}$ sont identiques, et même on simplifiera le formalisme en se ramenant toujours à des F.A. gaussiennes centrées et normées (i.e. dont les lois marginales ont une moyenne nulle et variance unité).

II-2. V.A. gaussiennes vectorielles

Une V.A. gaussienne à N composantes centrée et normée (Y_1, \dots, Y_N) est entièrement définie par la donnée d'une matrice H définie positive dont les éléments sont les coefficients de

corrélations entre les composantes Y_i

$$H = \{\rho_{ij}\} \quad \text{avec} \quad \rho_{ij} = 1 \quad \text{si} \quad i = j$$

$$\rho_{ij} = E(Y_i Y_j)$$

Dans le cas particulier où cette V.A. gaussienne est associée à une F.A. stationnaire gaussienne $Y(x)$, on sait que chaque composante Y_i correspond à $Y(x)$ pris en un point d'appui x_i , de sorte que les coefficients de corrélation $\rho_{ij} = E[Y(x_i) \cdot Y(x_j)]$ sont donnés directement par la covariance $\rho(h)$ de la F.A. $Y(x)$: $\rho_{ij} = \rho(x_i - x_j)$. En particulier une loi à deux composantes sera définie par une seule corrélation ρ et la densité de la loi sera de la forme :

$$g_\rho(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{y_1^2 + y_2^2 - 2(y_1 y_2)\rho}{2(1-\rho^2)}\right\}$$

Les lois marginales étant alors du type $g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp - \frac{1}{2} y^2$

Les principales propriétés des V.A. vectorielles gaussiennes dont nous ferons usage sont les suivantes :

- Toutes les lois marginales sont gaussiennes centrées et normées.
- Toute combinaison linéaire finie $\lambda^i Y_i$ de composantes Y_i est gaussienne de moyenne nulle et de variance $\lambda^i \lambda^j \rho_{ij}$.
- Deux composantes Y_i et Y_j d'une V.A. vectorielle gaussienne sont indépendantes si $\rho_{ij} = 0$.
- Etant donné une variable à $N+1$ composantes (Y_0, Y_1, \dots, Y_N) , le meilleur estimateur de Y_0 à Y_1, \dots, Y_N fixé est la variable Espérance conditionnelle $Y_0^* = E[Y_0 | Y_1 = y_1, \dots, Y_N = y_N]$. Si nous considérons alors le vecteur (Y_0, Y_1, \dots, Y_N) comme totalement gaussien, alors $E[Y_0 | Y_1, \dots, Y_N]$ est une V.A. gaussienne, de valeur probable $\lambda^i y_i$, de variance $1 - \sigma_K^2$. (λ^i est le vecteur solution du krigeage à moyenne connue de Y_0 par les Y_i , et σ_K^2 est la variance de krigeage associée). De plus la propriété du krigeage à moyenne connue d'absence de corrélation entre

l'estimateur et l'erreur d'estimation conduit dans le cas gaussien à l'indépendance des deux variables aléatoires $E(Y_0|Y_1, Y_2, \dots, Y_N)$ et $[Y_0 - E(Y_0|Y_1, \dots, Y_N)]$.

II -3. Variabes aléatoires gaussiennes à une et deux dimensions

Dans la suite, on parlera toujours de V.A. gaussiennes Y_1, Y_2 centrées et normées, de corrélation ρ . $g(y)$ et $G(y)$ désigneront respectivement la densité et la loi de distribution associés.

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} y^2} \quad G(y) = \int_{-\infty}^y g(x) dx$$

Soit $\varphi(y)$ une fonction mesurable et Y une V.A. gaussienne $(0,1)$; supposons que l'on doive étudier la V.A. $\varphi(Y)$ et qu'il paraisse commode d'approcher cette V.A. par un développement polynomial d'ordre n :

$$\varphi^*(Y) = a_0 + a_1 Y + a_2 Y^2 + \dots + a_n Y^n$$

La représentation polynomiale la plus satisfaisante sera celle pour laquelle la variance de l'écart $\varphi(Y) - \varphi^*(Y)$ est minimum

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} [\varphi(Y) - a_0 - a_1 Y - \dots - a_n Y^n]^2 g(y) dy$$

Ce problème se résoud facilement si au lieu de représenter φ avec des monomes Y, Y^2, \dots, Y^n , on utilise les termes croissants H_n d'une famille de polynomes, les polynomes d'Hermite, définis par :

$$n > 0 : H_n(y)g(y) = \frac{d^n}{dy^n} g(y), \quad H_0(y) = 1$$

La propriété remarquable de cette famille de polynomes est :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(y)H_m(y)g(y)dy = \delta_{n,m} n !$$

$$\delta_{n,m} = 1 \text{ si } n = m \\ = 0 \text{ si } n \neq m$$

(Les polynomes H_n sont orthogonaux pour la densité de Gauss). On utilisera alors le développement approché :

$$\varphi^*(Y) = \sum_{n=0}^N \frac{\phi_n}{n!} H_n(Y) \text{ où les } \phi_n \text{ sont des coefficients numériques inconnus.}$$

On montre que l'on obtient directement les coefficients ϕ_n par :

$$\phi_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) H_n(y) g(y) dy \text{ ou encore } \phi_n = E[\varphi(Y) H_n(Y)]$$

L'intérêt de représenter une V.A. $\varphi(Y)$ sous la forme précédente dérive précisément de la propriété fondamentale de la famille H_n ,

$$\text{si } \varphi(Y) = \sum_{n=0}^N \frac{\phi_n}{n!} H_n(Y)$$

alors $E[\varphi(Y)] = \phi_0$ puisque pour $\forall n \neq 0 \quad E[H_n(Y)] = 0$

$$\text{et } \text{Var}[\varphi(Y)] = \sum_{n=1}^N \frac{\phi_n^2}{n!}$$

Compte tenu des propriétés de la famille H_n , il paraît intéressant d'utiliser un développement classique de la densité gaussienne bivariable $g_\rho(y_1, y_2)$ vue précédemment :

$$g_\rho(y_1, y_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{n!} H_n(y_1) H_n(y_2) g(y_1) g(y_2)$$

On appelle lois isofactorielles les lois à deux variables dont la densité peut se mettre sous cette forme (produit des densités marginales par une série de produits $\chi_n(y_1) \chi_n(y_2)$, χ_n étant les polynomes orthogonaux pour la densité marginale).

Le développement précédent conduit naturellement au développement de la densité de la variable $(Y_1 | Y_2 = y_2)$, dont l'expression classique est $f(y_1 | y_2) = \frac{g_\rho(y_1 y_2)}{g(y_2)}$

$$f(y_1 | y_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{n!} H_n(y_1) H_n(y_2) g(y_1)$$

On en tire une représentation simple de la V.A. $E(Z_1|Z_2)$ quand les deux variables sont du type $Z_1 = \varphi_1(Y_1)$, $Z_2 = \varphi_2(Y_2)$ et que (Y_1, Y_2) suivent une loi gaussienne bivariable (corrélation ρ) :

soient $\varphi_1(y) = \sum \frac{\psi_{1,n}}{n!} H_n(y)$ et $\varphi_2(y) = \sum \frac{\psi_{2,n}}{n!} H_n(y)$, alors on a :

$$E(Z_1|Z_2) = \sum_n \frac{\psi_{1,n}}{n!} \rho^n H_n(Y_2)$$

c'est-à-dire $E(Z_1|Z_2) = \varphi_{1,\rho}(Y_2)$ où $\varphi_{1,\rho}$ est la fonction

$$\varphi_{1,\rho}(y) = \sum \rho^n \frac{\psi_{1,n}}{n!} H_n(y)$$

II-4. Les V.A. gaussiennes anamorphosées

Il résulte des paragraphes précédents que l'étude des V.A. à deux composantes Z_1, Z_2 est très facilitée si on peut représenter Z_1 et Z_2 sous la forme

$$\begin{array}{lll} Z_1 = \varphi_1(Y_1) & \varphi_1(y) = \sum_n \frac{\psi_n^1}{n!} H_n(y) & Y_1 : \text{V.A. gaussienne red} \\ Z_2 = \varphi_2(Y_2) & \varphi_2(y) = \sum_n \frac{\psi_n^2}{n!} H_n(y) & Y_2 : \text{V.A. gaussienne red} \end{array}$$

et faire l'hypothèse que le couple (Y_1, Y_2) est gaussien : en particulier le problème de la régression de Z_1 en Z_2 se résoud facilement comme nous venons de le voir. Or il est toujours possible de représenter une V.A. continue Z_1 sous la forme d'une fonction $\varphi_1(Y_1)$, par l'opération d'anamorphose (utilisée pour la simulation de Monte-Carlo).

Par conséquent, il sera toujours possible de considérer une F.A. stationnaire $Z(x)$ comme une anamorphosée de F.A. marginalement gaussienne $Y(x)$ avec $Z(x) = \phi[Y(x)]$, mais cela n'entraîne pas que la F.A. $Y(x)$ est totalement gaussienne (i.e. dans sa loi de distribution conjointe). Pour pouvoir profiter totalement des propriétés gaussiennes, nous devons au moins supposer que tout couple de V.A. $Y(x_1), Y(x_2)$ est gaussien bivarié : dans la pratique on fera même souvent une hypothèse gaussienne totale pour $Y(x)$ comme dans le modèle "gaussien discret".

III - LE MODELE GAUSSIEN DISCRET

III-1. Exemple du cas lognormal

La loi de probabilité la plus utilisée dans les modélisations de phénomènes géologiques est sans conteste la loi lognormale : la V.A. lognormale Z se présente sous forme d'une loi gaussienne anamorphosée, puisque par définition de la loi lognormale il existe une V.A. gaussienne Y telle que $Z = \exp(m + \sigma Y)$. On étend sans difficulté en géostatistique le modèle lognormal au cas d'une fonction aléatoire lognormale $Z(x)$, telle que $Z(x) = \exp[m + \sigma Y(x)]$, où $Y(x)$ est une F.A. totalement gaussienne. Bien entendu un tel modèle ne peut faire référence qu'à des teneurs moyennes de support constant, des carottes de dimensions uniformes par exemple que l'on considèrera comme des supports ponctuels de teneur $Z(x)$. Conformément aux notations précédentes, on a $Y(x)$ processus gaussien centré, normé, de corrélogramme $\rho(h)$ et :

$$Z(x) = \exp[m + \sigma Y(x)]$$

Les formules classiques de la loi lognormale permettent de trouver les principales caractéristiques de Z à partir des paramètres m et σ :

$$M = E(Z) = \exp(m + \sigma^2/2)$$

$$\Sigma^2 = \text{var}(Z) = M^2(e^{\sigma^2} - 1)$$

$$\Sigma(h) = E(Z(x+h) - M)(Z(x) - M) = M^2(e^{\rho(h)} - 1)$$

De plus, conformément à la propriété vue plus haut, conditionnellement à une information donnée ($Y_1 = y_1, \dots, Y_n = y_n$) la variable $Y_0 | Y_1, \dots, Y_n$ est encore gaussienne, de moyenne $\lambda^i y_i$ et variance $1 - \sigma_K^2$ et peut donc s'écrire $\lambda^i y_i + \sqrt{1 - \sigma_K^2} Y'_0$: la variable transformée ($Z_0 | Z_1 = e^{m + \sigma y_1}, \dots, Z_n$) est donc lognormale, et s'écrit comme :

$$Z_0(Z_1 \dots Z_n) = \exp(m + \sigma \lambda^i y_i + \sigma \sqrt{1 - \sigma_K^2} Y'_0)$$

On voit donc que sous réserve de faire l'hypothèse gaussienne totale pour $Y(x)$, on est capable grâce au formalisme lognormal de connaître théoriquement les lois de distributions conditionnelles d'une teneur ponctuelle à information donnée : ces lois sont encore lognormales, ce qui fait apparaître une certaine "permanence" du type de loi.

La modélisation sous forme lognormale d'un ensemble de N teneurs ponctuelles ne pose pas de difficulté particulière, mais ne répond pas au problème rencontré le plus fréquemment dans les études minières, à savoir de définir la loi de probabilité de la teneur moyenne Z_V d'un panneau V et même la loi conjointe de cette teneur Z_V et des teneurs ponctuelles $Z(x_\alpha)$ des données. Dans le cas de teneurs ponctuelles lognormales, on a constaté expérimentalement que les teneurs moyennes de panneaux suivaient elles aussi assez bien une loi lognormale (de variance plus faible évidemment), phénomène désigné habituellement par le terme de "Permanence lognormale". Sur le plan des modèles, la définition des paramètres de cette nouvelle loi lognormale se fait sans difficultés :

Soit $Z(x) = \exp[m + \sigma Y(x)]$ ($Y(x)$ de corrélogramme $\rho(h)$) le modèle correspondant aux teneurs ponctuelles $Z(x)$, dont la fonction de covariance est $\Sigma(h) = M^2(e^{\rho(h)} - 1)$. La variance théorique Σ_V^2 de la variable $Z_V = \frac{1}{V} \int_V Z(x) dx$ est donnée par la formule géostatistique :

$$\Sigma_V^2 = \overline{\Sigma(V,V)} = M^2 \left\{ \frac{1}{V^2} \int_V \int_V e^{\rho(x-y)} dx dy - 1 \right\}$$

et donc on peut déduire Σ_V^2 des paramètres (m, σ, ρ) du modèle ponctuel de $Z(x)$. On fait alors l'hypothèse que Z_V est encore lognormale, donc qu'il existe une V.A. gaussienne x telle que $Z_V = \exp(m' + \sigma'X)$, m' et σ' devant satisfaire aux relations :

$$E(Z_V) = E[Z(x)] \Rightarrow m' + \frac{\sigma'^2}{2} = m + \frac{\sigma^2}{2}$$

$$\text{Var}(Z_V) = \Sigma_V^2 \Rightarrow \sigma'^2 = \text{Log}[e^{\overline{\rho(V,V)}}]$$

Par conséquent, les données théoriques du modèle ponctuel accompagnées de l'hypothèse de permanence de la lognormalité permettent de déterminer entièrement la loi de Z_V : en fait on peut même appliquer le même principe à la variable vectorielle $(Z_{\alpha_1}, \dots, Z_{\alpha_n}, Z_{V_1}, \dots, Z_{V_p})$ où l'on considère conjointement à la fois des variables ponctuelles Z_{α_i} et régularisées Z_{V_j} . On admet que les variables ponctuelles Z_{α_i} sont lognormales du type $Z_{\alpha_i} = \exp(m + \sigma Y_{\alpha_i})$ et que les variables régularisées sont du type $Z_{V_j} = \exp(m' + \sigma' X_j)$, et que la variable vectorielle $(Y_{\alpha_1}, \dots, Y_{\alpha_n}, X_1, \dots, X_p)$ est totalement gaussienne, centrée, normée, définie par une matrice de corrélation $\{r_{ij}\}$ telle que, transformées par le formalisme lognormal, ces corrélations soient égales aux valeurs $\Sigma_{\alpha\beta}, \Sigma_{\alpha V}, \Sigma_{V_1 V_2}$ des corrélations entre les Z_{α} et Z_V .

En réalité l'étude théorique d'un tel modèle montre qu'il n'est pas consistant sur le plan théorique : la "permanence de la lognormalité" est impossible sur le plan théorique, à moins de modifier le sens donné aux variables ponctuelles Z_{α_i} et régularisées Z_{V_j} . C'est ce qu'on fait dans le modèle gaussien discret qui généralise sous une forme un peu plus rigoureuse le modèle lognormal précédent.

III-2 - Cas général

Le principe de définition du modèle est le même que celui qui est sous-jacent dans le modèle lognormal précédent :

. définir un principe de "permanence", permettant de déterminer la loi de probabilité d'une régularisée Z_V à partir des paramètres du modèle des variables ponctuelles $Z(x)$: Les $Z(x)$ sont considérées comme les anamorphosés $\varphi[Y(x)]$ d'une F.A. $Y(x)$ gaussienne, et les Z_{V_i} sont considérés comme les anamorphosés $\varphi_V(X_i)$, X_i étant aussi une V.A. gaussienne. Le principe de "permanence" sera matérialisé par une formule reliant théoriquement les deux fonctions d'anamorphose φ et φ_V .

. faire l'hypothèse que les variables isolément gaussiennes $Y(x_\alpha)$ et X_i forment un ensemble totalement gaussien.

Comme nous l'avons remarqué plus haut, cette hypothèse n'est possible que si nous altérons légèrement la signification des variables ponctuelles : pour cela nous allons privilégier dans le modèle une taille de bloc v qui est supposé jouer un rôle particulier (Taille du bloc de sélection, blocs à simuler, etc...) et nous choisissons de découper le gisement en un pavage de tels blocs Z_{V_i} . L'information est supposée comme à un niveau ponctuel (ou considéré comme tel), et à une maille toujours supérieure à v , de sorte que l'on trouvera toujours au plus une donnée $Z(x_\alpha)$ dans un bloc v_i : l'artifice qui permet de définir un modèle totalement gaussien consiste à considérer la donnée Z_α présente dans un petit bloc comme positionnée aléatoirement dans ce bloc (En quelque sorte on accepte de négliger une parcelle d'information qui est la position exacte de Z_α dans son v_α associé). La conséquence de cette approximation est que $E(Z_\alpha | Z_{V_\alpha}) = Z_{V_\alpha}$, ce qui permet de relier dans notre modèle les données ponctuelles Z_α aux données de volume Z_{V_α} .

Le gisement est découpé en N blocs v_i , dont les teneurs Z_{V_i} sont reliés à un vecteur gaussien (X_1, \dots, X_N) par une anamorphose φ_V : $Z_{V_i} = \varphi_V(X_i)$. A chaque bloc v_i nous attacherons au plus une donnée ponctuelle Z_i reliée à un autre vecteur gaussien (Y_1, \dots, Y_N) par une anamorphose ponctuelle $Z_i = \varphi(Y_i)$. Les hypothèses concernant les gaussiennes sont les suivantes :

a/. Pour tout bloc v_i , le couple (X_i, Y_i) est gaussien, centré, réduit avec un coefficient de corrélation $r > 0$ constant quelque soit v_i .

b/. Nous avons vu plus haut que $E(Z_\alpha | Z_{v_\alpha}) = Z_{v_\alpha}$ (conséquence de la position de Z_α dans v_α). Nous complétons cette propriété par l'hypothèse que à X_i fixé, Y_i est indépendant de toutes les autres V.A. du modèle, Y_j, X_j .

c/. (X_1, \dots, X_N) est totalement gaussien

a, b, c impliquent que le vecteur $(Y_1, X_1, Y_2, X_2, \dots, Y_N, X_N)$ est totalement gaussien, centré, normé et donc entièrement défini par les corrélations suivantes : (les valeurs effectives des corrélations sont données ici sans démonstration).

. Corrélations bloc \times bloc

$R_{ij} = E(X_i \cdot X_j)$ sera donné en fait par une fonction $R(h)$, covariance des anamorphoses inverses X_i des teneurs de blocs :

$$R_{ij} = R(x_\alpha - x_\beta)$$

. Corrélations point-bloc

$$r_{i\alpha} = E(X_i \cdot Y_\alpha) = r R_{i\alpha}$$

. Corrélation point-point

$$\rho_{\alpha\beta} = E(Y_\alpha \cdot Y_\beta) = r^2 R_{\alpha\beta} \quad \alpha \neq \beta$$

En définitive l'ensemble des corrélations de blocs sera fixé par deux quantités : $R(h)$ la fonction covariance des X et r , paramètre défini plus haut comme $E(Y_\alpha \cdot X_i)$.

III-3 - Permanence en modèle gaussien discret

Le modèle précédent définit entièrement les V.A. Y_α et X_i anamorphosés inverses respectivement des teneurs ponctuelles $Z(x_\alpha)$ et des teneurs moyennes Z_{v_i} . Comme d'habitude la fonction d'anamorphose ponctuelle ϕ sera connue expérimentalement par l'intermédiaire de l'histogramme expérimental des données ponctuelles $Z(x_\alpha)$; l'anamorphose ϕ_v des teneurs de blocs doit être dérivée directement du modèle précédent.

Supposons $\varphi(y)$ connu par son développement :

$$\varphi(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi_n}{n!} H_n(y)$$

On fait l'hypothèse que le développement de $\varphi_v(y)$ peut s'écrire :

$$\varphi_v(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi_n D_n}{n!} H_n(y)$$

et la théorie montre que les termes D_n se déduisent directement du paramètre r du modèle $r = E(Y_\alpha, X_i)$

$$D_n = r^n$$

L'intérêt de cette remarque est qu'elle nous permet de caler expérimentalement la valeur du paramètre r : en effet, nous connaissons par l'étude géostatistique directe le variogramme des données ponctuelles $\gamma(h)$ et donc la covariance $S(h) = \overline{\gamma(\infty) - \gamma(h)}$, e aussi la covariance des teneurs de bloc Z_{v_i} : $S_v(h) = \overline{S(v, v)}$. En particulier $S_v(0) = \overline{S(v, v)}$ est la variance théorique des teneurs de blocs Z_{v_i} . Or, nous avons vu plus haut que la variance associée à une fonction d'anamorphose se calcule directement à l'aide du coefficient ϕ_n :

$$\text{si } \varphi_v = \sum_n \frac{\phi_n r^n}{n!} H_n(y) \quad \text{alors} \quad \text{Var} [\varphi_v(X)] = \sum \frac{\phi_n^2 r^{2n}}{n!}$$

Pour déterminer r , il nous suffira de résoudre la relation

$$S_v(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi_n^2 r^{2n}}{n!}$$

La solution se trouve numériquement sans problème, car le second membre est une fonction croissante de r . Une fois r déterminé la même relation s'établit entre les fonctions de covariance $S_v(h)$ (connue par régularisation théorique de la covariance expérimentale $S(h)$) et $R(h)$ des anamorphosés de blocs :

$$S_V(h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi_n^2 r^{2n}}{n!} R^n(h)$$

La même méthode numérique qui a permis de déterminer r permet de déterminer $R(h_i)$ pour une suite de valeur h_i , et donc de fixer un modèle théorique pour $R(h)$.

III-4. - Conclusion

Le modèle gaussien discret anamorphosé fournit un cadre commode pour les calculs faisant intervenir les lois conjointes de teneur ponctuelle et de teneur de volume, et l'usage de l'anamorphose permet de l'appliquer à des lois de distribution ponctuelles quelconques. Il faut bien noter cependant que ce modèle souffre de deux restrictions :

. l'hypothèse gaussienne totale des Y_α ou des X_i est une hypothèse extrêmement forte et difficile à contrôler (sauf au niveau des histogrammes bivariés expérimentaux). On sait que dans de nombreux cas cette hypothèse sera fautive, mais on peut admettre que les conséquences de l'hypothèse gaussienne qui nous sont vraiment utiles ont un domaine de validité un peu plus large. Par ailleurs, l'hypothèse d'indépendance des Y_α à X_α fixé a des conséquences théoriques négatives qui restreignent la généralité du modèle (on s'aperçoit que l'histogramme local dans un panneau est entièrement fixé quand la moyenne du panneau est fixée).

. la deuxième restriction concerne les approximations théoriques, essentiellement celles faites à l'occasion de la "permanence" : la formule de permanence mise en évidence coïncide, dans le cas log-normal avec la permanence lognormale, dont on sait qu'en toute rigueur théorique elle est impossible.

En conclusion, le modèle gaussien discret n'est pas un modèle "à tout faire" applicable sans précaution à n'importe quel cas : de fait d'autres modèles existent (Modèle hermitien gaussien, modèle isofactoriels non gaussiens) qui pourraient s'avérer dans certains cas mieux adaptés aux variables étudiées que le modèle gaussien discret.

IV - EXEMPLE D'APPLICATION : CALCUL DE LA COURBE TONNAGE/TENEUR GLOB.

IV-1 - Exposé du problème

Soit un gisement superficiel devant être exploité en carrière. Supposons qu'on puisse fixer la taille des blocs de sélection (par exemple, des cubes de la hauteur des gradins d'exploitation) et en première approximation faire l'hypothèse que le minerai sera sélectionné librement bloc par bloc en utilisant une teneur de coupure z_c appliquée à la teneur moyenne Z_v de chaque bloc abattu. Dans ces conditions, les réserves exploitables seront données par l'intermédiaire d'une courbe tonnage/teneur de coupure, qui ne sera rien d'autre que l'estimateur de la loi de distribution des teneurs de bloc cumulé au-dessus de la teneur de coupure z_c .

Les problèmes à résoudre sont donc :

- . obtenir un estimateur satisfaisant de la loi de distribution des teneurs ponctuelles à l'intérieur de la partie minéralisée du gisement en s'aidant de l'ensemble des teneurs ponctuelles expérimentales.
- . modéliser cette loi de distribution sous la forme d'une fonction d'anamorphose et obtenir numériquement son développement en polynômes d'Hermite.
- . modifier le modèle précédent conformément à la procédure de permanence généralisée vue plus haut pour lui faire représenter la loi de distribution des teneurs de blocs Z_v .
- . utiliser numériquement ce modèle pour calculer la proportion du nombre de bloc v sélectionnés à une teneur de coupure donnée et leur teneur moyenne.

IV-2 - Détermination de la loi de distribution des teneurs ponctuelle

Soit V le champ minéralisé. On se propose de trouver un estimateur pour la fonction $P_v(z) = \{\text{Proportion dans } V \text{ de points } x \text{ tels que } Z(x) < z\}$. Formellement, si $F_x(z)$ est la loi de distribution de $Z(x)$, la valeur probable de $P_v(z)$, soit $F_v(z)$ n'est autre que la valeur moyenne dans le volume V des lois ponctuelles $F_x(z)$: $F_v(z) = \frac{1}{V} \int_V F_x(z) dx$. En ce sens le problème de l'estimation de $P_v(z)$ se rapproche de celui de l'estimation de Z_v , teneur moyenne dans V , puisqu'à z fixé, P_v est la moyenne dans V des indicatrices

$(I_Z(Z(x))) = 0$ si $Z(x) > z$, $I_Z(Z(x)) = 1$ si $Z(x) < z$.

Un estimateur évident de $P_V(z)$ est bien sûr l'histogramme cumulé expérimental des données ponctuelles disponibles, $F^*(z)$, qui joue le même rôle vis-à-vis de $F_V(z)$ que la moyenne arithmétique des données \bar{Z}_α vis-à-vis de la teneur moyenne Z_V : si le champ V est très grand, (ou couvre entièrement la zone minéralisée) et si les points de mesure x_α sont distribués de manière suffisamment uniforme dans V , on sait que \bar{Z}_α est un estimateur satisfaisant de Z_V , et de même $F^*(z)$ sera un estimateur satisfaisant de $F_V(z)$. Si par contre V a été choisi dans le coeur de la minéralisation, et est entouré de données systématiquement plus faibles que les données intérieures, ou si l'information n'est pas distribuée uniformément, on sait que Z_α , $x_\alpha \in V$, est un mauvais estimateur de Z_V , car ne tenant pas compte du salissage par les faibles valeurs des frontières : dans ce cas l'estimateur adéquat de Z_V est le krigeage Z_{KV} et de même il convient d'estimer $F_V(z)$ par une pondération convenable des données ponctuelles intérieures et extérieures.

La définition de l'estimateur théorique de $F_V(z)$ relève des techniques de krigeage disjonctif qui seront mises en oeuvre à un stade plus avancé de l'étude. Au niveau de l'étude, on tirera profit du fait que l'on procède généralement à un krigeage de Z_V (soit en krigeant globalement V , soit par réunion du krigeage des panneaux de V) pour définir comme estimateur de $F_V(z)$ l'histogramme expérimental pondéré cumulé des Z_α .

Dans le krigeage de V , chaque donnée disponible est affectée d'un pondérateur λ_α (éventuellement nul si x_α est trop loin de V et négligé dans l'estimation de Z_V). On construira l'histogramme pondéré en affectant à chaque Z_α non pas une fréquence absolue 1, mais une fréquence λ_α : une classe d'histogramme contiendra donc comme fréquence relative la somme des λ_α des Z_α appartenant à la classe normée par la somme totale des λ_α .

Les inconvénients du procédé sont :

- . nécessité de stocker tous les λ^α utilisés lors du krigeage
- . éventualité (très faible) de classe à "fréquence" négative, qu'il faut alors arbitrairement mettre à zéro.

Par contre les avantages sont déterminants :

- . Prise en compte (avec la métrique du variogramme) de la position exacte des informations.
- . Obtention d'un histogramme expérimental dont la moyenne est précisément Z_{KV} .

III-3 - Modélisation en anamorphose hermitienne de la loi ponctuelle

Une fois obtenue un estimateur $F^*(z)$ de la loi ponctuelle moyenne dans V , nous allons représenter la variable Z^* associée à cet estimateur sous forme d'une anamorphosée gaussienne $Z^* = \varphi(Y)$. Si $G(y)$ est la loi de distribution de la gaussienne $(0,1)$, on a

$$F^*[\varphi(y)] = G(y)$$

Soit encore
$$\varphi(y) = F^{*-1}[G(y)]$$

La fonction cumulée expérimentale $F^*(z)$ étant définie sur des classes z_i , la relation F^{*-1} n'est définie exactement que pour les classes z_i , on peut alors :

- . soit modéliser $F^*(z)$ par un modèle de loi (ou par une combinaison appropriée de fonctions mathématiques), de façon à disposer d'une représentation $F^M(z)$ continue, monotone, croissante, et donc par l'inversion $F^{M-1}[G(y)]$ de disposer d'une modélisation continue de $\varphi(y)$.
- . soit définir $\varphi(y)$ de manières discontinues pour les valeurs de y correspondant aux classes expérimentales z_i , et ensuite modéliser cette séquence de valeurs (z_i, y_i) .

En fait, on ne s'intéresse pas particulièrement à un modèle de la fonction $\varphi(y)$ car on a vu plus haut que tous les calculs se feront sur un développement hermitien de $\varphi(y)$: on prendra donc la deuxième démarche et on cherchera directement à ajuster, par un polynome du type

$\sum_{n=0}^N \frac{\psi_n}{n!} H_n(y)$ le graphe de points (y_i, z_i) , et on sait que les coefficients ψ_n seront donnés par les relations :

$$\psi_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) H_n(y) g(y) dy$$

et le problème sera d'estimer ces intégrales par des méthodes numériques sachant que l'on ne connaît $Z = \varphi(y)$ que pour un échantillonnage (z_i, y_i) discret de point.

On utilise principalement deux méthodes :

. la méthode d'intégration de Gauss : l'intégrale est estimée à partir de la valeur de $\varphi(y_\alpha)$, $\alpha = 1, \dots, k$, où les points y_α sont définis théoriquement comme solutions de l'équation $H_k(y) = 0$ (Voir référence A. MARECHAL : "The Practice of Transfu Function : Numerical methods and their application").

. l'intégration exacte en utilisant une représentation simplifiée de $\varphi(y)$ (par exemple linéaire ou quadratique) dans les classes (z_i, z_{i+1}) de l'histogramme.

Dans les deux cas on est conduit à faire des hypothèses pour compléter l'histogramme expérimental, en particulier pour les queues d'histogrammes : les deux méthodes d'ajustement ci-dessus sont de types interactif, et permettent d'essayer successivement diverses valeurs numériques pour les queues d'histogrammes.

A la fin de cette étape, on dispose d'une représentation de $F_V(z)$ sous la forme d'une fonction d'anamorphose $\varphi(y)$ développée en polynomes

$$\varphi(y) = \sum_{n=0}^N \frac{\psi_n}{n!} H_n(y)$$

Il est important de noter que $\varphi(y)$ définit entièrement le modèle de loi de probabilité moyenne $F_V(z)$, et en particulier :

$$\begin{aligned}\phi_0 &= \text{Moyenne } [F_V(z)] &= Z_V \\ \sum_{n=1}^N \frac{\phi_n^2}{n!} &= \text{Variance } [F_V(z)] &= \Sigma^2 - \Sigma_V^2\end{aligned}$$

Par conséquent l'étude structurale des données $Z(x_\alpha)$ ayant conduit à un variogramme ponctuel $\gamma(x)$, on doit avoir $\gamma(V,V) = \sum_n \frac{\phi_n^2}{n!}$. En fait en général le champ V conduira pratiquement tout le domaine d'étude et en choisira même pour $\gamma(x)$ un modèle de palier $\sum_n \frac{\phi_n^2}{n!} = \gamma(\infty)$.

IV-4 - Modification de l'anamorphose pour changement de support

D'après les propriétés du modèle gaussien discret, la fonction d'anamorphose φ_V correspondant à la distribution de la variable Z_V dans le champ V se déduit de la fonction φ par :

$$\varphi_V(y) = \sum_{n=0}^N \frac{\phi_n r^n}{n!} H_n(y)$$

Le coefficient r devant satisfaire à la relation :

$$\Sigma_V^2 = \sum_{n=1}^N \frac{\phi_n^2 r^{2n}}{n!}, \quad r > 0$$

Σ_V^2 s'obtient classiquement par lecture des abaques (si le modèle $\gamma(h)$ est une combinaison linéaire de schémas standard) ou par intégration numérique de $\gamma(h)$ dans le bloc v . Quand à la relation ci-dessus, elle se résoud numériquement sans difficulté car la fonction

$S|G(r) = \sum_{n=1}^N \frac{\phi_n^2}{n!} r^{2n}$ est une fonction monotone croissante en r et

donc il suffit de faire croître r de 0 à 1 pour atteindre la valeur Σ_V^2 (qui est nécessairement inférieure à $\sum_{n=1}^N \frac{\phi_n^2}{n!}$).

IV-5 - Calcul effectif de la courbe Tonnage/teneur globale

Les réserves récupérables dans le champ V par sélection sur des blocs v seront définies par :

- $T_V(z_c)$ Tonnage récupéré en coupant sur les teneurs de bloc v à z_c
- $Q_V(z_c)$ Quantité de métal totale ainsi récupérée.

$F_V(z)$ étant la loi de probabilité qui correspond à l'anamorphose φ_V , et T_0 étant le tonnage total contenu dans V, on aura :

$$T_V(z_c) = T_0 [1 - F_V(z_c)]$$

(Dans l'hypothèse où la densité du minéral n'est pas fonction de z)

$$Q_V(z_c) = T_0 \int_{z_c}^{+\infty} z F_V(dz)$$

On a $F_V(z) = G(y)$ lorsque z et y sont associés par $z = \varphi_V(y)$.

On commencera par déterminer par une méthode numérique simple la valeur de y_c telle que

$$z_c = \sum_{n=0}^N \frac{\phi_n r^n}{n!} H_n(y_c)$$

ce qui donnera directement $T_V(z_c)$ par l'intermédiaire de l'intégrale de Gauss $G(y_c)$ (dont d'excellentes approximations numériques sont données dans toutes les tables numériques)

$$T_V(z_c) = T_0 [1 - G(y_c)]$$

Le calcul de Q_V est légèrement plus compliqué :

$$Q_V(z_c) = T_0 \int_{y_c}^{+\infty} \varphi_V(y) g(y) dy$$
$$= T_0 \sum_{n=0}^N \frac{\phi_n r^n}{n!} \int_{y_c}^{+\infty} H_n g(y) dy$$

Or la conséquence de la définition de la famille H_n est que l'intégrale $\int H_n(y)g(y) = H_{n-1} g$

$$Q_V(z_c) = T_0 \{ \phi_0 [1-G(y_c)] - g(y_c) \sum_{n=1}^N \frac{\phi_n r^n}{n!} H_n(y_c) \}$$

Plus classiquement, on présentera conjointement $T_V(z_c)$, tonnage récupéré, et $m_V(z_c) = \frac{Q_V(z_c)}{T_V(z_c)}$, teneur moyenne du minerai.

IV-6 - Conclusion sur le calcul de la courbe tonnage/teneur

Les paragraphes précédents ont montré qu'en utilisant le modèle gaussien discret anamorphosé, il était possible de produire dès les premiers stades de l'étude géostatistique une estimation des réserves récupérables sous l'hypothèse d'une sélection libre par blocs de taille v . Il est certain que dans la pratique la sélection ne sera jamais libre, ni le support des blocs aussi bien défini : nous pensons cependant que ce type d'estimation est susceptible de fournir très tôt après la fin des reconnaissances une approximation des tonnages récupérables, en attendant une seconde estimation plus précise par le formalisme des fonctions de transfert.

1

A SIMPLE SUBSTITUTE FOR CONDITIONAL EXPECTATION : THE DISJUNCTIVE KRIGING.

G. MATHERON

Centre de Morphologie Mathématique, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, Fontainebleau, France.

ABSTRACT. In this paper, a new procedure for non linear estimation is proposed : it is better than the usual best linear estimation, and necessitates less prerequisites than the conditional expectation.

0. INTRODUCTION.

In applied Geostatistics, we need more and more often to estimate certain variables which depend in a non linear way on the grades of an orebody. Simple examples are given by the estimation procedure of the "transfer functions". In such a case, it is generally no longer possible to use the classical linear kriging estimator, which are not fit for these problems and can be dangerously biased. On the other hand, one cannot resort to the conditional expectation technique, either because the available information is not sufficient, or simply because the computations are too expensive. Under the name of Disjunctive Kriging (D.K.) we propose in this paper an intermediate method, more powerful than the simple linear combinations, but less sophisticated than the conditional expectation (See Reference [4]).

The starting idea is the following. Let Z_0 be a random variable (R.V.) to be estimated from a set of others R.V. Z_α , $\alpha = 1, 2, \dots, N$. The most powerful method consists in forming the conditional expectation $E[Z_0 | Z_1, \dots, Z_N]$, i.e. the best approximation of Z_0 by a measurable function $f(Z_1, \dots, Z_N)$. Unfortunately, we generally do not know in practice the $(N+1)$ dimensional law of the R.V.

L²

(Z_0, Z_1, \dots, Z_N) , hence we are not able to compute this conditional expectation. On the other hand, kriging techniques would consider the best approximation of Z_0 by a linear combination $\sum \lambda_\alpha Z_\alpha$, and this requires nothing more than the covariance matrix, which can generally be estimated from the experimental data. As a counterpart, because the space of the linear combinations is much smaller than the space of the measurable functions, the approximation given by kriging is far to be as precise as the conditional expectation (except for the Gaussian case). By choosing a space larger than the linear combinations, but not so large that the corresponding technique would require unavailable data, we may hope to arrive at a non linear method practically workable and more precise than kriging.

In this research, a good starting point is given by the technique of data analysis known as "disjunctive coding" [1]. Let B_i , $i \in I$, be a partition of the real line (in intervals or classes, for instance). Each variable Y is associated with the family of R.V. Y_i , $i \in I$ defined by

$$Y_i = 1_{B_i}(Y) = \begin{cases} 1 & \text{if } Y \in B_i \\ 0 & \text{if } Y \notin B_i \end{cases}$$

Note that the family of the linear combinations $\sum \lambda_i Y_i$ is identical with the class of the B_i -measurable function $f(Y)$. If the partition B_i becomes finer and finer, we obtain at the limit the class of the Borel-measurable functions $f(Y)$.

Let us now return to our estimation problem : instead of kriging Z_0 from the variables Z_α themselves, we shall krig it from the much richer family constituted by the variables

$$Z_{i,\alpha} = 1_{B_i}(Z_\alpha)$$

The corresponding estimator will be of the form $Z_0 = \sum_\alpha f_\alpha(Z_\alpha)$, where $f_\alpha = \sum_i \lambda_{\alpha,i} 1_{B_i}$ is a B_i -measurable function. The covariances matrix of the $Z_{i,\alpha}$ depends only on the two-dimensional laws $F_{\alpha\beta}$, because we have

$$E[Z_{i,\alpha} Z_{j,\beta}] = F_{\alpha\beta}(B_i, B_j)$$

Hence, this method requires only the knowledge of the two-dimensional laws of the pairs (Z_0, Z_α) and (Z_α, Z_β) .

In the limit case of an infinitely fine partition B_i , we shall have to search for the best approximation of Z_0 by a sum $\sum f_\alpha(Z_\alpha)$, where the f_α are measurable functions of only one variable. The corresponding estimator will be called the disjunctive kriging (D.K.), and it will be shown that its computation requires nothing more than the knowledge of all the two-dimensional marginal laws $F_{0\alpha}$ and $F_{\alpha\beta}$: it is the desired workable intermediate between kriging and conditional expectation. The following table epitomizes the situation. (See next page).

1. THE EQUATIONS OF THE D.K.

Now, we shall give the general equations of the D.K. We suppose that all the variables admit order 2 moments, and thus belong to a (real) Hilbert space provided with the scalar product $\langle X, Y \rangle = E(X, Y)$. Let H_α be the subspace of the R.V. $f_\alpha(Z_\alpha)$, where f_α is a measurable function and $E[f_\alpha^2(Z_\alpha)] < \infty$. Then, the R.V. $\sum f_\alpha(Z_\alpha)$ generate the (closed) subspace $H = H_1 + \dots + H_N$ (this is not a direct sum, because the constant functions belong to $\cap H_\alpha$), and the disjunctive kriging Z_0^* of Z_0 is simply the projection of Z_0 on the subspace H . Thus, Z_0^* is characterized by :

$$\langle Z_0, Y \rangle = \langle Z_0^*, Y \rangle \quad (Y \in H_\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, N)$$

But the R.V. $Y \in H_\alpha$ are $Y = g(Z_\alpha)$, where g is an arbitrary measurable function, and the relationship $E[Z_0^* g(Z_\alpha)] = E[Z_0 g(Z_\alpha)]$ may be rewritten in terms of conditional expectations :

$$E[Z_0^* | Z_\alpha] = E[Z_0 | Z_\alpha] \quad (\alpha = 1, 2, \dots, N)$$

Hence, the D.K. is $Z_0^* = \sum_\beta f_\beta(Z_\beta)$ and the functions f_β are characterized by :

$$(D.K.) \quad E[Z_0 | Z_\alpha] = \sum_\beta E[f_\beta(Z_\beta) | Z_\alpha] \quad (\alpha = 1, 2, \dots, N)$$

The system (D.K.) depends only on the conditional laws of Z_0 and Z_β given Z_α , and needs no other prerequisites than the two-dimensional laws $F_{0\alpha}$ and $F_{\alpha\beta}$, as stated in the introduction.

METHOD	KRIGING	D.K.	CONDITIONAL EXPECTATION
<p><u>Estimator</u> : Z^* is the best approximation of Z_0 of the form</p> <p><u>Prerequisites</u></p>	<p>$\Sigma_{\alpha} \lambda_{\alpha} Z_{\alpha}$</p> <p>The covariances matrix</p>	<p>$\Sigma_{\alpha} f_{\alpha}(Z_{\alpha})$</p> <p>The various two-dimensional laws F_{α} and $F_{\alpha\beta}$</p>	<p>$f(Z_1, \dots, Z_N)$</p> <p>The (N+1)-dimensional law $F(dZ_0, \dots, dZ_N)$</p>

It follows from the projection theorem that

$$\|Z_0 - Z_0^*\|^2 = \|Z_0\|^2 - \|Z_0^*\|^2 = \|Z_0\|^2 - \langle Z_0^*, Z_0 \rangle$$

Since (D.K.) clearly implies $E(Z_0^*) = E(Z_0)$, $\|Z_0 - Z_0^*\|^2$ is the estimation variance σ^2 of the D.K., and we get :

$$(1) \quad \sigma_{DK}^2 = E[Z_0^2] - E[(Z_0^*)^2] = E(Z_0^2) - E(Z_0 Z_0^*)$$

2. THE REPRESENTATION OF TWO-DIMENSIONAL LAWS.

In the general case, we are not able to solve the system D.K. It would be possible (by a suitable discretization) to get approximate solutions, but this would generally imply expensive numerical computation. For this reason, we have to look for particular cases of simplification, and use a technique of Data analysis known as the factor representation of a two-dimensional law, (1), (6).

Let $F(dx, dy)$ be the law of two R.V. X and Y , F_1 and F_2 the corresponding (marginal) laws of X and Y , $H_1 = L^2(R, F_1)$ and $H_2 = L^2(R, F_2)$ the two Hilbert spaces associated with F_1 and F_2 . To each function $f \in H_2$, we may associate its conditional expectation given X , say $E_1 f$: it is the function $g = E_1 f$ defined (for F_1 -almost every $x \in R$) by

$$g(x) = E [f(Y) | X = x]$$

This operator $E_1 : H_2 \rightarrow H_1$ is linear, continuous and unit norm. In the same way, the conditional expectation given Y provides us with an operator E_2 from H_1 into H_2 . For any $f \in H_2$ and $g \in H_1$, we have $\langle E_1 f, g \rangle = \langle f, g \rangle = \langle f, E_2 g \rangle$, so that E_1 and E_2 are adjoint, i.e. $E_2 = E_1^*$. It follows that the operator $E_1 E_2 = E_2^* E_2$ from H_1 into itself is Hermitian. Moreover, it is positive (for $\langle E_1 E_2 f, f \rangle = \langle E_2 f, E_2 f \rangle = \|E_2 f\|^2 \geq 0$), and unit norm. Hence, its eigen values λ are real and satisfy $0 \leq \lambda \leq 1$. The constant function 1 is an eigen function associated with the eigen value $\lambda = 1$ (and it is the only one, except if there exist measurable non constant functions f and g such that $f(X) = g(Y)$ almost surely).

Let λ be a non null eigen value of $E_1 E_2$ ($0 < \lambda \leq 1$), and f_λ an eigen function associated with λ . We may suppose $\|f_\lambda\| = 1$. Clearly, $E_1 E_2 f_\lambda = \lambda f_\lambda$ implies $E_2 E_1 (E_2 f_\lambda) = \lambda E_2 f_\lambda$,

so that $g = E_2 f_\lambda$ is an eigen function of $E_2 E_1$, associated with the same eigen value λ . Moreover, $\|E_2 f_\lambda\|^2 = \langle E_1 E_2 f_\lambda, f_\lambda \rangle = \lambda > 0$. Hence, $g_\lambda = E_2 f_\lambda / \sqrt{\lambda}$ is unit norm, and the reciprocal formulae

$$(2) \quad g_\lambda = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} E_2 f_\lambda ; \quad f_\lambda = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} E_1 g_\lambda$$

define a one-to-one correspondence between the unit norm eigen functions of the operator $E_1 E_2$ and $E_2 E_1$, associated with the same eigen value $\lambda > 0$ (In particular, these operators admit the same set of eigen values λ). In terms of data analysis, the eigen functions f_λ and g_λ are called factors.

For a further analysis, some complementary hypotheses are required. For instance, let us suppose that the law $F(dx,dy)$ admits a measurable density ϕ with respect to the product $F_1(dx) F_2(dy)$ of the marginal laws, that is :

$$(3) \quad F(dx,dy) = \phi(x,y) F_1(dx) F_2(dy)$$

In particular, $\phi(x,y) F_2(dy)$ is the conditional law of Y given $X = x$, and the operator E_1 is defined by :

$$(4) \quad (E_1 g)(x) = \int \phi(x,y) g(y) F_2(dy)$$

Now, let us suppose that the density ϕ is square integrable; i.e. :

$$\iint |\phi(x,y)|^2 F_1(dx) F_2(dy) < \infty$$

Then, it can be shown that the operator $E_1 E_2$ and $E_2 E_1$ are compact. Their eigen values form a non increasing sequence $\lambda_0 = 1 \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$ such that $\sum \lambda_n^2 < \infty$. With each eigen value $\lambda_n > 0$ is associated an eigen function f_n of $E_1 E_2$ (g_n of $E_2 E_1$), and it is possible to choose these eigen functions so that they are orthonormed. Then, the density ϕ of the law $F(dx,dy)$ (with respect to $F_1(dx) F_2(dy)$) admit the following expansion :

$$(5) \quad \phi(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} f_n(x) g_n(y)$$

called the factor representation of the law $F(dx,dy)$, [6]. By comparing (4) and (5), we get the corresponding representations of

the conditional expectation operators E_1 and E_2 :

$$(6) \begin{cases} (E_1 g = \sum \sqrt{\lambda_n} < g, g_n > g_n \\ (\\ (E_2 f = \sum \sqrt{\lambda_n} < f, f_n > f_n \\ (\end{cases}$$

With the help of these relationships, we are now able to define an important case of simplification for the system (D.K.).

3. THE ISOFACTOR MODELS.

Let $Y_i, i = 0, 1, \dots, N$, be R.V., F_i the (marginal) law of Y_i and F_{ij} the (two-dimensional) law of the pair (Y_i, Y_j) . We shall say that the Y_i form an isofactor model if

- i) all the Y_i have the same marginal law $F_i = F$
- ii) the two-dimensional laws F_{ij} admit representations of the form (5) with the same factors χ_n (except eventually for the sign) i.e. $\chi_n = \pm f_n = \pm g_n$ for all the pairs (i, j) . In other words :

$$F_{ij}(dx, dy) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} T_n(i, j) \chi_n(x) \bar{\chi}_n(y) \right) F(dx) F(dy)$$

The law F and the factors χ_n are the same for all pairs (i, j) . The coefficients $T_n(i, j) = E [\bar{\chi}_n(Y_i) \chi_n(Y_j)]$ are correlation coefficients, and in particular :

$$T_0(i, j) = 1 ; -1 \leq T_n(i, j) \leq 1$$

It follows for any measurable function f such that $E [f^2(Y_j)] < \infty$ that (F-almost surely) :

$$E [f(Y_j) | Y_i] = \sum T_n(i, j) < f, \chi_n > \chi_n(Y_i)$$

$$(< f, \chi_n > = \int f(y) \chi_n(y) F(dy))$$

Now, let us consider the problem of the disjunctive kriging of Z_0 from the $Z_\alpha, \alpha = 1, \dots, N$, and suppose that each of these variables is given by an anamorphosis from the corresponding R.V. Y_i of an isofactor model, i.e. :

$$Z_0 = f(Y_0) ; (E[f^2(Y_0)]) < \infty$$

and $Z_\alpha = g_\alpha(Y_\alpha)$, $\alpha = 1, 2, \dots, N$. We have to find the D.K. of $Z_0 = f(Y_0)$ from the Y_α . Taking (6) into account, the system (D.K.) can be rewritten :

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n(0, \alpha) < f, \chi_n > \chi_n(Y_\alpha) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\beta=1}^N T_n(\alpha, \beta) < \chi_n, f_\beta > \chi_n(Y_\alpha)$$

The factors χ_n being orthogonal, this is equivalent to

$$\sum_{\beta=1}^N T_n(\alpha, \beta) < \chi_n, f_\beta > = T_n(0, \alpha) < f, \chi_n >$$

for any $\alpha = 1, 2, \dots, N$ and $n = 0, 1, \dots$. It is more convenient to put

$$f_n = < f, \chi_n > ; f_n^\alpha = < f_\alpha, \chi_n >$$

so that the function $f(Y_0)$ to be estimated and its D.K. $Z_0^* = \sum f_\alpha(Y_\alpha)$ admit the expansions :

$$\left(\begin{array}{l} f(Y_0) = \sum f_n \chi_n(Y_0) \\ Z_0^* = \sum_{\alpha=1}^N \sum_{n=0}^{\infty} f_n^\alpha \chi_n(Y_\alpha) \end{array} \right.$$

Then, for each $n = 1, 2, \dots$, the desired coefficients f_n^α are obtained by solving the system

$$(7) \quad \sum_{\beta=1}^N f_n^\beta T_n(\alpha, \beta) = f_n T_n(0, \alpha)$$

(For $n = 0$, it is sufficient to take $\sum f_0^\beta = f_0$, because $T_0(i, j) = 1$ and the system is degenerated).

From (6) it follows that $(T_n(ij))$ is the covariance matrix of the $\chi_n(Y_i)$, so that system (7) represents the usual kriging of $\chi_n(Y_0)$ by the $\chi_n(Y_i)$. In other words, in the frame of an isolated model, the problem is greatly simplified, and we may krig separately each factor : in the practical applications, we use expansions

stopped at a given order n_0 (for instance $n_0 = 6$ or 10) and we have only to solve separately n_0 systems $N \times N$.

Notice another direct consequence₂ of the orthogonality of the factors χ_n : the estimation variance σ_{DK}^2 of the D.K. also is the sum of the kriging variances of the factors, that is :

$$(8) \quad \begin{cases} \sigma_{KD}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{K,n}^2 \\ \sigma_{K,n}^2 = f_n^2 - f_n \sum_{\alpha=1}^N T_n(0,\alpha) f_n^\alpha \end{cases}$$

The summation extends from $n = 1$ to $n = \infty$, because the estimation variance of the factor $\chi_0 = 1$ is obviously zero.

4. THE HERMITIAN MODELS.

The Gaussian case provides us with simple examples of isofactor models, where the factors are the normalized Hermite polynomials $\eta_n = H_n / \sqrt{n!}$, [2], [6], with

$$(9) \quad H_n(x) = \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) \frac{d^n}{dx^n} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

It is well known that these polynomials form an orthogonal basis of $L^2(R,G)$, where G is the normal law with expectation 0 and variance 1. Let $G_\rho(dx, dy)$ be the two-dimensional normal law (with expectations 0, variances 1, and correlation coefficient ρ). The corresponding characteristic function is

$$\phi_\rho(u,v) = \exp\left(-\frac{u^2 + v^2 + 2\rho uv}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \frac{(iu)^n (iv)^n}{n!} e^{-\frac{u^2+v^2}{2}}$$

If $|\rho| < 1$, it follows from the bounded convergence theorem that the reciprocal Fourier transform can be taken term by term; so that the Gaussian density g_ρ admit the expansion :

$$g_\rho(x,y) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{n!} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dy^n} e^{-\frac{y^2}{2}}$$

Taking (9) into account, we get the following factor representation of the normal law G_ρ :

$$(10) \quad G_{\rho}(dx, dy) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \eta_n(x) \eta_n(y) G(dx) G(dy)$$

The factors are the normalized Hermite polynomials $\eta_n = H_n / \sqrt{n!}$. In particular :

$$E [H_n(X) | Y] = \rho^n H_n(Y)$$

It follows that any Gaussian model is isofactor, and allows an easy handling of the D.K.

It is possible to generalize slightly the Gaussian model. By changing ρ^n into T_n in (10), we obtain a two-dimensional law of the form :

$$\begin{aligned} (F(dx, dy) &= \phi(x, y) G(dx) G(dy) \\ (\phi(x, y) &= \sum T_n \eta_n(x) \eta_n(y) \end{aligned}$$

Naturally, the coefficients T_n cannot be chosen arbitrarily, since the function ϕ must be positive. The necessary and sufficient condition that must be satisfied is :

$$T_n = E(\rho^n)$$

where ρ is a R.V. such that $-1 \leq \rho \leq 1$ a.s. In other words, the T_n are the moments of a probability law concentrated on the interval $(-1, 1)$. Since the particular case $T_n = \rho^n$ corresponds to the normal law G_{ρ} , the law F appears as a mixture of normal laws with various correlation coefficients. The factors associated with F are the Hermite polynomials η_n , and we shall say that the law F is Hermitian.

This suggests the following isofactor model, called the Hermitian model : the R.V. Y_i are normal $(0, 1)$, i.e. $F_i = G$, and the two-dimensional laws F_{ij} are of the form :

$$(11) \quad F_{ij}(dx, dy) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(i, j) \eta_n(x) \eta_n(y) G(dx) G(dy)$$

with suitable coefficients $T_n(i, j) = E [\eta_n(Y_i) \eta_n(Y_j)]$. In particular, if $T_n(i, j) = \rho_{ij}^n$, the laws F_{ij} are normal. In any case, we have :

$$E [\eta_n(Y_i) | Y_j] = T_n(ij) \eta_n(Y_j)$$

and the relationships (7) hold.

5. EXAMPLE : D.K. OF A POINT TRANSFER FUNCTION.

Let $Z(x)$ be a stationary random function. It is always possible to find :

- another stationary R.F. $Y(x)$ such that, for any x , $Y(x)$ is normal (with expectation 0 and variance 1),

- a non decreasing anamorphosis f such that $Z(x) = f(Y(x))$. This does not imply that the two-dimensional law of $(Y(x), Y(y))$ is normal for any pairs of points (x, y) , but we shall assume that it is so (i.e. the anamorphosis f is order two Gaussian) as it frequently occurs in the applications.

The numerical values $Z_\alpha = Z(x_\alpha)$ at $x_\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, N$ being given, it is interesting to know, among all the possible points x belonging to a given panel V :

- how many will satisfy the condition $Z(x) \geq z_0$,

- or at least the expected value of the volume occupied in V by these points. In other words, we want to know the conditional law of $Z(\underline{x})$, given Z_α , when the point \underline{x} is random and uniformly distributed in V . As $Z(\underline{x}) = f(Y(\underline{x}))$, $Z(\underline{x}) \geq z_0$ is equivalent to $Y(\underline{x}) \geq y_0$ with $z_0 = f(y_0)$, and we have to estimate the probability (the "transfer function") :

$$P(Z(\underline{x}) \geq z_0 | Z_1, \dots, Z_N) = \frac{1}{V} \int_V P(Y(\underline{x}) \geq y_0 | Y_1, \dots, Y_N) dx$$

Generally, a direct calculation is either impossible or too expensive. On the contrary, it will be shown that the D.K. leads to a very simple approximation.

Let θ_{y_0} be the function defined by $\theta_{y_0}(y) = 1$ if $y \geq y_0$, and 0 if $y < y_0$, so that we have to estimate the conditional expectation $E [\theta_{y_0}(Y(\underline{x})) | Y_1, \dots, Y_N]$. Since the D.K. is the projection on a subspace H of the space of the measurable functions of (Y_1, \dots, Y_N) , this conditional expectation and the variable $\theta_{y_0}(Y(\underline{x}))$ itself admit the same D.K. Hence we may use, to estimate the transfer function, the expression :

$$P^*(Y(\underline{x}) \geq y_0) = \text{KD} \left[\theta_{y_0} Y(\underline{x}) \mid Y_1, \dots, Y_N \right]$$

But the R.V.'s $Y_0 = Y(\underline{x})$ and $Y_\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, N$ constitute a Hermitian model, with :

$$T_n(\alpha, \beta) = \rho_{\alpha\beta}^n$$

$$T_n(0, \alpha) = \frac{1}{V} \int_V (\rho_{x\alpha})^n dx$$

(ρ_{xy} is the correlation coefficient of $Y(x)$ and $Y(y)$), and θ_{y_0} admits the expansion :

$$\theta_{y_0}(y) = 1 - G(y_0) - g(y_0) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{n-1}(y_0) H_n(y)}{n!}$$

(g is the density of the normal law, and G the corresponding distribution function). Thus, it follows from (7) that

$$(12) \quad P^*(Y(\underline{x}) \geq y_0) = 1 - G(y_0) - g(y_0) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{n-1}(y_0)}{n!} \times$$

$$\sum_{\beta} \lambda_n^\beta H_n(Y_\beta)$$

and the λ_n^β are the solution of the system

$$\sum_{\beta} \lambda_n^\beta (\rho_{\alpha\beta})^n = T_n(0, \alpha)$$

Notice that this is equivalent to :

$$P(Y^*(\underline{x}) \geq y_0) = \int_{y_0}^{\infty} f_{\text{KD}}(z) dz$$

with a "density" f_{KD} defined by :

$$(13) \quad f_{\text{KD}}(z) = g(z) \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n(z)}{n!} \sum_{\beta} \lambda_n^\beta H_n(Y_\beta) \right]$$

More generally, the D.K. of an arbitrary function $\phi(Y(\underline{x}))$ will be :

$$(14) \quad \text{KD} \left[\phi(Y(\underline{x}) \mid Y_1, \dots, Y_N) \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(z) f_{\text{KD}}(z) dz$$

The formulae (12), (13) and (14) lead to easy numerical computation. Nevertheless, note that the "density" f_{KD} is not necessarily positive. (In the same way, the usual kriging estimator of a positive R.V. can sometimes take non positive numerical values). It follows from a general theorem, [7], that the conditional expectations are the only positive projectors, and thus, in certain cases, the inequality $f_{KD}(z) \geq 0$ will not be satisfied at every point z . But in practical applications, the negative values are rare and of small magnitude, so that it is possible to use this procedure.

ANNEX. The General Form of the Hermitian Laws.

If $\rho = \pm 1$, the normal law $G_\rho(dx, dy)$ has no density, but the fundamental relationship

$$E(H_n(X) | Y) = \rho^n H_n(Y)$$

remains valid. In order to take this limit case into account, we must slightly generalize the definition of the Hermitian laws given in section 4 :

We say that a two-dimensional law $F(dx, dy)$ is Hermitian if it satisfies the two following conditions :

- i) each marginal law is G , i.e. is normal $(0, 1)$
- ii) for any $n = 0, 1, 2, \dots$, the normalized Hermite polynomials η_n satisfy :

$$\begin{cases} E(\eta_n(X) | Y) = T_n \eta_n(Y) \\ E(\eta_n(Y) | X) = T_n \eta_n(X) \end{cases}$$

with suitable numerical coefficients T_n .

The following theorem characterizes the Hermitian laws and their associated coefficients T_n

THEOREM - A sequence $\{T_n\}$ of coefficients is associated with a necessarily unique Hermitian law F if and only if it admits the representation :

$$(15) \quad T_n = \int \rho^n \omega(d\rho)$$

for a probability ω concentrated on the closed interval $(-1, 1)$. If so, the corresponding characteristic function is

$$(16) \quad E[e^{iuX+ivY}] = \int \exp\left\{ -\frac{u^2+v^2+2\rho uv}{2} \right\} \omega(d\rho)$$

PROOF - The if part is obvious, because (16) is the characteristic function of the mixture $F = \int \omega(d\rho) G_\rho$ of normal laws and trivially satisfies conditions (i) and (ii) with the coefficients T_n given in (15).

Conversely, let $\{T_n\}$ be the sequence of coefficients associated with a Hermitian law F . It follows from conditions (ii) that $T_n = E[\eta_n(X) \eta_n(Y)]$, and this implies

$$(17) \quad T_0 = 1; \quad |T_n| \leq 1$$

Now, if λ is a real number, $\exp(\lambda x)$ admits the expansion :

$$e^{\lambda x} = e^{\lambda^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} H_n(x)$$

and thus condition (ii) implies :

$$(18) \quad e^{-\lambda^2/2} E(e^{\lambda X} | Y) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{T_n \lambda^n}{n!} H_n(Y)$$

But the function $e^{\lambda x}$ is positive, and $T_0 = 1$, so that the measure

$$e^{-\lambda^2/2} E(e^{\lambda X} | Y = y) G(dy)$$

is a probability. Its characteristic function is

$$\Phi_\lambda(u) = e^{-\lambda^2/2} \int_{-\infty}^{+\infty} E(e^{\lambda X} | y) e^{iuy} G(dy)$$

An application of the bounded convergence theorem shows that we may take term by term the Fourier transform of the expansion (18), because $|T_n| < 1$ by (17), and clearly

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iuy} H_n(y) G(dy) = (-1)^n (iu)^n e^{-u^2/2}$$

so that we get

$$\phi_\lambda(u) = \sum \frac{T_n \lambda^n}{n!} (iu)^n e^{-u^2/2}$$

By changing u into u/λ , we obtain another characteristic function, that is

$$\phi_\lambda\left(\frac{u}{\lambda}\right) = \sum \frac{T_n}{n!} (iu)^n e^{-u^2/2\lambda^2}$$

Now, if $\lambda \rightarrow \infty$, we find,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \phi_\lambda\left(\frac{u}{\lambda}\right) = \sum \frac{T_n}{n!} (iu)^n$$

It follows from (17) that this limit is a continuous function, and thus (by a classical theorem), it is still a characteristic function. Hence, there exists a probability law ω such that

$$(19) \quad \sum \frac{T_n}{n!} (iu)^n = \int e^{iu\rho} \omega(d\rho)$$

or, which is the same,

$$(15) \quad T_n = \int \rho^n \omega(d\rho)$$

Moreover, the inequalities (17) imply that ω is concentrated on the closed interval $(-1,1)$. Thus, F is a mixture of normal laws, and (16) is satisfied. Finally, the law ω , concentrated on a bounded interval, is uniquely determined by its moments T_n , and the statement concerning the uniqueness follows. QED.

Note that the set of the Hermitian laws is convex. Moreover, it is closed, and even compact (under the weak convergence of the probability laws). This is an easy consequence of the compactness of the set $\{\omega\}$ of the laws concentrated on the closed interval $(-1,1)$. In this compact convex set, the extremal elements are the normal laws G_ρ , and each Hermitian law admits the unique integral representation (16). In other words :

COROLLARY - The set of the Hermitian laws is a simplex, whose extremal elements are the normal laws G_ρ .

REFERENCES.

1. BENZECRI, J.P., 1973, L'Analyse des Données, Dunod, Paris.-
Tome I : 615 p.- Tome II : 619 p.
2. CRAMER, H., 1945, Mathematical Methods of Statistics, Princeton University Press, 574 p.
3. MARECHAL, A., 1974, Généralités sur les Fonctions de Transfert, Note CMM (unpublished).
4. MATHERON, G., 1973, Le Krigeage Disjonctif, Note CMM (unpublished).
5. MATHERON, G., 1974, Les Fonctions de Transfert des Petits Panneaux, Note CMM (unpublished).
6. NAOURI, 1972, Analyse fonctionnelle des correspondances continues, Thèse de Doctorat ès Sciences, Paris, 101 p.
7. NEVEU, J., 1964, Bases Mathématiques du Calcul des Probabilités, Masson, Paris,

1

FORECASTING BLOCK GRADE DISTRIBUTIONS :
~~THE TRANSFER FUNCTIONS, AND THEIR ESTIMATIONS.~~
THE TRANSFER FUNCTIONS .

G. MATHERON

Centre de Morphologie Mathématique, Ecole Nationale
Supérieure des Mines de Paris, Fontainebleau, France.

ABSTRACT. The transfer function is the conditional law of blocks v_i inside a panel V , given the available information. Two models are proposed, which allow an approximate computation (by disjunctive kriging) of these transfer functions, and in particular of the non-conditional law of variables with non-point support (for instance, the average grade of blocks v).

0. INTRODUCTION

In applied Geostatistics, very often problems arise which involve not only order 1 or 2 moments of variables with non-point support (like the average grade $Z(V) = 1/V \int_V Z(x) dx$ of a panel V)

but also the probability law itself of this random variable (R.V.) $Z(V)$, and eventually its conditional law given the available information. Theoretically, this law is entirely determined if the space law of the Random Function (R.F.) $Z(x)$ is known, but its computation is very difficult in practice or even impossible. In this paper, we propose an approximation method, based upon the use of Gaussian or Hermitian anamorphoses and disjunctive kriging (D.K.) techniques (3).

This method can be applied to estimate the tonnage/grade curves and to parameter the reserves. But in the present paper we examine only the problem of estimating the transfer functions (1), (2). Let us precise the problem : at the exploration stage, when the decision is taken to mine a given orebody, available information generally does not allow a very detailed local estimation.

For this reason, the orebody is divided into panels V of relatively large size, at which level only a significant estimation is possible at the present stage of exploration. Nevertheless, in the future, when mining a much more detailed selection will be used. Hence, each panel V itself must be divided into small blocks v_i (whose size v is determined by mining technology), and, when panel V is mined, each of the blocks v_i will be dispatched either to the mill, or to waste. Hence arises the first problem: can we estimate, using the present information, the number and the average grade of the blocks $v_i \subset V$ whose grade $Z(v_i)$ will be higher than a given cut-off grade z_0 ? Here, the matter is to determine the probability law of $Z(v_i)$ given the present information (i.e. given the grades $Z_\alpha = Z(x_\alpha)$ of the samples located at points $x_\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, N$). This conditional law will be called the (direct) transfer function of the blocks v_i into panel V .

Actually, the problem is more complicated. In fact, once it is decided to mine panel V , the decision of sending a given block $v_i \subset V$ to the mill or to waste will be made according to the information available at that time. This information will be much richer than the present one (i.e. the Z_α); nevertheless, we shall never know the real grades $Z(v_i)$ of the blocks v_i , but only their estimations Z_i^* , and the selection criterion will be applied to these future estimators Z_i^* (and not to the unknown real grades [4]). For instance, we shall decide to send a block v_i to waste if $Z_i^* < z_0$, and conversely. Then, the real problem is to estimate (for any possible cut-off grade z_0) the number and the average grade of the blocks v_i such that $Z_i^* \geq z_0$, and this implies the knowledge of the (conditional) two-dimensional law of (Z_i, Z_i^*) , given the present information (the Z_α). This problem will be greatly simplified by using the indirect transfer functions.

In the first two sections, we define models in the frame of which it is possible to estimate the law of the grades $Z(v)$ of small blocks v , upon the basis of the available point information (the $Z_\alpha = Z(x_\alpha)$). They require hypotheses which can be approximately satisfied in practical applications only for relatively small blocks v . The last two sections are devoted to estimation procedure (by D.K.) of these direct and indirect transfer functions.

1. THE HERMITIAN MODEL.

Let $Z(x)$ be a stationary order 2 random function R.F. It is always possible to find a non decreasing anamorphosis ϕ and another stationary R.F. $Y(x)$ such that $Z(x) = \phi(Y(x))$ for each point x , and Y_x is normal $(0,1)$. In the same way, for each block v_i , there exists another anamorphosis ϕ_v and a normalized Gaussian R.V. X_i such that

$$Z(v_i) = \phi_v(X_i)$$

Because of the stationarity, the anamorphosis ϕ_v is the same for all the blocks v_i (which are equal up to a translation). But we do not know it : the experimental data $Z_\alpha = Z(x_\alpha)$ allow an estimation of ϕ , but not of ϕ_v . Thus, our first problem will be to determine ϕ_v or, which is the same, to determine the (non-conditional) law of the grades $Z(v)$ of the blocks v . Obviously, this requires some complementary hypotheses.

In the present model, we assume that all the two-dimensional laws of the pairs (Y_x, Y_y) or (Y_x, X_i) are of the Hermitian type [3], i.e. admit densities of the form :

$$(1) \quad f(\xi, \xi') = \sum_{n=0}^{\infty} T_n \eta_n(\xi) \eta_n(\xi') g(\xi) g(\xi')$$

The η_n are the normalized Hermite polynomials, and g is the density of the normal law $(0,1)$. The coefficients $T_n = E[\eta_n(\xi) \eta_n(\xi')]$ are such that $T_0 = 1$, $-1 \leq T_n \leq 1$; and must satisfy an additional condition (see (3), Annex). In the particular case $T_n = \rho^n$, we get the normal law with the correlation coefficient ρ . In any case, we have

$$(2) \quad E(\eta_n(\xi) | \xi') = T_n \eta_n(\xi')$$

For a point-point pair (Y_x, Y_y) , the corresponding coefficient $T_n(x,y)$ depends on x and y , and is assumed to be known (in practical applications, we generally put $T_n(x,y) = \rho_{xy}^n$, i.e. the anamorphosis ϕ is supposed to be order 2 Gaussian). But for the point-block pairs (Y_x, X_i) , the corresponding coefficients $T_n(x, v_i)$ are

unknown, and we have to compute them.

For this purpose, we start from the definition of $Z(v_i) = \phi_v(X_i)$, i.e.

$$(3) \quad Z(v_i) = \frac{1}{v} \int_{v_i}^{\infty} Z(x) dx$$

and take the conditional expectation given $Z(v_i)$. From $Z(v_i) = \phi_v(X_i)$ and $Z(x) = \phi(Y_x)$, we get :

$$(4) \quad \phi_v(X_i) = \frac{1}{v} \int_{v_i}^{\infty} E[\phi(Y_x) | X_i] dx$$

It is convenient to use the expansions of ϕ and ϕ_v in Hermite polynomials, say

$$(5) \quad \begin{cases} \phi(x) = \sum C_n \eta_n(x) \\ \phi_v(x) = \sum C_n D_n \eta_n(x) \end{cases}$$

The coefficients $C_n = E[\phi(Y) \eta_n(Y)]$ are known, but the D_n are not and we have to compute them. By (2) and (5), the relationship (4) may be rewritten in the following form :

$$(6) \quad D_n = \frac{1}{v} \int_{v_i}^{\infty} T_n(x, v_i) dx$$

for each $n > 0$ such that $C_n \neq 0$ (for $n = 0$, $D_0 = 1$, and if $C_n = 0$, the corresponding term is dropped out in the expansion of ϕ_v).

Now, take the conditional expectation of (3) given Y_y . By (2) and (5), we get for the left hand side

$$E[Z(v_i) | Y_y] = \sum C_n D_n T_n(y, v_i) \eta_n(y)$$

and for the right hand side :

$$\frac{1}{v} \int_{v_i}^{\infty} E(Z_x | Y_y) = \sum C_n \left(\frac{1}{v} \int_{v_i}^{\infty} T_n(x, y) dx \right) \eta_n(Y_y)$$

By identifying these two expansions, we obtain for any n (such that $C_n \neq 0$)

$$(7) \quad D_n T_n(y, v_i) = \frac{1}{v} \int_{v_i} T_n(x, y) dx$$

and thus

$$D_n \frac{1}{v} \int_{v_i} T_n(y, v_i) dy = \frac{1}{v^2} \int_{v_i} \int_{v_i} T_n(x, y) dx dy$$

From (6) it follows :

$$(8) \quad \begin{cases} D_n = \frac{1}{v} \sqrt{\int_{v_i} \int_{v_i} T_n(x, y) dx dy} \\ T_n(x, v_i) = \frac{1}{D_n} \frac{1}{v} \int_{v_i} T_n(x, y) dy \end{cases}$$

These relationships only hold for any n such that $C_n \neq 0$. The first one allows a complete computation of the anamorphosis ϕ_v (which depends only on the products $C_n D_n$). On the contrary, in order to reconstitute the law of the pair $(Z(x), Z(v_i))$ we must assume that the second relationship (8) holds even if $C_n = 0$. With the help of this (non trivial) additional hypothesis, the relationships (8) provide us with all the elements required to estimate (by (D.K.)) the direct transfer functions.

When assuming that the block-block pairs (X_i, X_j) also follow Hermitian laws, we find by a very similar reasoning

$$T_n(v_i, v_j) = \frac{1}{D_n^2} \frac{1}{v^2} \int_{v_i} \int_{v_i} T_n(x, y) dx dy$$

but this result will not be used in the sequel.

Note that we have not proved that the coefficients T_n defined by (8) satisfy the condition given in [3], Annex, so that the density (1) is not necessarily positive. But, if v is small enough, this density is not very different from the corresponding point laws, and the negative value will be rare and of small magnitude, so that our formulae may be applied.

Besides, and even if the T_n satisfy the required condition, a very similar difficulty will arise, because in practice we use limited expansion

$$\sum_{n=0}^{n_0} T_n \eta_n(\xi) \eta_n(\xi')$$

stopped at a given $n_0 < \infty$, which is not necessarily everywhere positive. But if n_0 is large enough (in practice $n_0 = 6$ or 10) we may neglect this difficulty.

Finally, note that our Hermitian model is correct with regard to the covariances. If $S_{xy} = E(Z_x Z_y) - E(Z_x) E(Z_y)$ is the covariance function of the R.F. $Z(x)$, it follows from (1) :

$$S_{xy} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^2 T_n(x, y)$$

In the same way, the covariance S_{xv} of $Z(x)$ et $Z(v)$ is

$$S_{xv} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^2 D_n T_n(x, v)$$

and the variance S_v^2 of a block v is

$$S_v^2 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^2 D_n^2$$

It is easy to verify that (8) imply the correct relationships

$$S_{xv} = \frac{1}{v} \int_v S_{xy} dy \quad \text{and} \quad S_v^2 = \frac{1}{v^2} \int_v \int_v S_{xy} dx dy$$

2. THE DISCRETE GAUSSIAN MODEL.

To compute the indirect transfer functions, it would be convenient to assume that the R.V. Y_x, X_i are normal. But this is not possible in the frame of the Hermitian model, because $T_n(x, v_i)$ is not of the form $(\rho_{xv_i})^n$. For this reason, we shall modify our representation of the orebody, in order to allow the use of multivariate normal laws.

As a starting point, the orebody is essentially conceived as the union of a finite number of small blocks v_i (disjoint and equal

up to a translation). A (random) grade $Z_i = Z(v_i)$ is associated with each v_i , so that the Z_i give a discrete version of the moving average of the former R.F. $Z(x)$ regularized upon v . Moreover, there exists an anamorphosis ϕ_r , and, for each Z_i , a (0,1) Gaussian R.V. X_i such that :

$$Z_i = \phi_r (X_i)$$

The second step concerns the points x_α : we no longer demand their exact location inside the corresponding block v_α , and we denote by $Z(x_\alpha)$ the grade of a point x_α chosen at random (with a uniform probability) inside the block v_α . The experimental data are these $Z(x_\alpha)$ known for some blocks v_α (but not for all the blocks v_i whose union is the orebody itself). There exists an anamorphosis ϕ , and, for each α , a Gaussian R.V. Y_α such that

$$Z(x_\alpha) = \phi(Y_\alpha)$$

Since x_α is random in v_α , it is natural to assume that the conditional expectation of $Z(x_\alpha)$ given $Z_\alpha = Z(v_\alpha)$ is $Z(v_\alpha)$ itself, so that the anamorphoses ϕ and ϕ_r must satisfy the relationship

$$(9) \quad E [\phi(Y_\alpha) | X_\alpha] = \phi_r (X_\alpha)$$

For a complete specification of the discrete model, we assume that :

- for each α , the pair (X_α, Y_α) is normal with a correlation coefficient $r \geq 0$ independent of α .
- given X_α , Y_α is independent of the X_i and Y_β , ($i, \beta \neq \alpha$)
- the X_i follow a multivariate normal law.

These hypotheses (particularly the second one) are fairly strong, but are often (approximately) satisfied in practical applications if v is relatively small. They imply that the R.V.'s X_i, Y_α follow a multivariate Gaussian law with correlation coefficients :

$$R_{ij} = E(X_i X_j) \quad (\text{block-block})$$

$$r_{i\alpha} = E(X_i Y_\alpha) \quad (\text{block-point})$$

$$\rho_{\alpha\beta} = E(Y_\alpha Y_\beta) \quad (\text{point-point})$$

such that :

$$(10) \quad r_{i\alpha} = r R_{i\alpha} ; \quad \rho_{\alpha\beta} = r^2 R_{\alpha\beta} \quad (\alpha \neq \beta)$$

We assume that the point-anamorphosis ϕ , and the coefficients C_n of the expansion

$$(11) \quad \phi(x) = \sum C_n \eta_n(x)$$

are known (in the practical situation, they can be estimated from the experimental data). We also assume that the matrix covariance S_{ij} of the block grades Z_i and Z_j is known (it can be computed by regularization of the covariance function of the point grades, which is experimentally known). In order to completely specify the model, our task consists in :

- determining the block anamorphosis ϕ_r ,
- computing the correlation coefficients r of (Y_α, X_α) and $R_{\alpha\beta}$ of (X_α, X_β) .

From (9) and (11), we get first

$$(12) \quad \phi_r(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y) e^{-\frac{(y-rx)^2}{2(1-r^2)}} \frac{dy}{\sqrt{2\pi(1-r^2)}} \\ = \sum_{n=0}^{\infty} C_n r^n \eta_n(x)$$

It follows that the variance $S_v^2 = S_{ii}$ of the block grades satisfies the relationship :

$$(13) \quad S_v^2 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^2 r^{2n}$$

by which r^2 can be estimated, because S_v^2 is numerically known and the function $x \rightarrow \sum C_n^2 x^n$ is increasing on the interval $(0,1)$.

Since r is positive, it is solely determined by (13). In the same way the block-block covariance S_{ij} is

$$(14) \quad S_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^2 r^{2n} (R_{ij})^n$$

This relationship determines R_{ij} (with the help of the additional convention that R_{ij} and S_{ij} have the same sign), and the model is now completely specified.

The lognormal Case. In the particular case of the anamorphosis

$$\phi(x) = m \exp\left\{ \sigma x - \frac{\sigma^2}{2} \right\} = m \sum (-1)^n \frac{\sigma^n}{n!} H_n(x)$$

$Z(x_\alpha)$ is lognormal with expectation m and logarithmic variance σ^2 . Then, the first relationship (12) yields

$$\phi_r(x) = m \exp\left\{ r \sigma x - \frac{r^2 \sigma^2}{2} \right\} = m \sum (-1)^n \frac{r^n \sigma^n}{n!} H_n(x)$$

In other words, the block grades Z_i are still lognormal, with the same expectation m and the logarithmic variance $r^2 \sigma^2$. The invariance of the lognormality (which is very often experimentally verified) is automatically realized in the frame of our discrete model.

3. ESTIMATION OF A DIRECT TRANSFER FUNCTION.

Now we shall give a D.K. estimation procedure of the transfer function of a panel $V = \bigcup v_i$ constituted by the union of k blocks v_i . By definition, the (direct) transfer function is the conditional law of $Z(v)$, given the $Z(x_\alpha)$, $\alpha = 1, 2, \dots, N$, when v is chosen at random among the k blocks v_i . The problem is the same in the frame of the Hermitian and discrete models : the two-dimensional laws of the pairs (Y_α, Y_β) and (Y_α, X_i) are Hermitian with the coefficients

$$T_n(\alpha, \beta) = T_n(x_\alpha, x_\beta)$$

$$T_n(\alpha, i) = T_n(x_\alpha, v_i)$$

defined in (8) if the Hermitian model is chosen, and

$$T_n(\alpha, \beta) = (\rho_{\alpha\beta})^n = r^{2n} R_{\alpha\beta}^n \quad (\alpha \neq \beta)$$

$$T_n(\alpha, \alpha) = 1$$

$$T_n(\alpha, i) = r^n R_{\alpha i}^n$$

for the discrete Gaussian model.

When the block v is chosen at random among the k blocks v_i , its grade is $Z(v) = \phi_v(X)$ and X is a R.V. equal to X_i with the probability $1/k$. Hence, the law of the pair (Y_α, X) is Hermitian with the coefficients

$$T_n(\alpha, v) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k T_n(\alpha, i)$$

Then, the D.K. of $\eta_n(X)$ from the R.V.'s Y_α is of the form $\sum_{\beta} \lambda_n^\beta \eta_n(Y_\beta)$, with the coefficients λ_n^β determined by

$$\sum_{\beta} \lambda_n^\beta T_n(\alpha, \beta) = T_n(\alpha, v) \quad (n \geq 1)$$

(if $n = 0$, the D.K. of $\eta_0(X) = 1$ is always 1), and the D.K. of an arbitrary function

$$\psi(X) = \sum \psi_n \eta_n(X)$$

is

$$\text{KD } \psi(X) = \psi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sum_{\beta=1}^N \lambda_n^\beta \eta_n(Y_\beta)$$

((3)). But this can be rewritten

$$\text{KD } \psi(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(z) f_{\text{DK}}(z) dz$$

with a "density" f_{DK} defined by

$$(15) \quad f_{\text{DK}}(z) = g(z) \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(z) \sum_{\beta=1}^N \lambda_n^\beta \eta_n(Y_\beta) \right]$$

where g is the density of the normal law $(0,1)$.

In practical applications, the most interesting parameters to estimate are the number and the average grade of the blocks $v_i \subset V$ such that $Z_i \geq z_0$, where z_0 is a given cut-off grade. With z_0 is associated the number x_0 such that $z_0 = \phi_V(x_0)$ (ϕ_V is the anamorphosis of the blocks). The following formulae give (up to a factor equal to the total tonnage of the block V) the tonnage of ore and metal corresponding to the cut-off grade z_0 :

$$\begin{aligned}
 & \left(\int_{x_0}^{\infty} f_{KD}(y) dy = 1 - G(x_0) \right) - \\
 (16) & \left(g(x_0) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{n-1}(x_0)}{n!} \sum_{\beta=1}^N \lambda_n^{\beta} H_n(Y_{\beta}) \right) \\
 & \left(\int_{x_0}^{\infty} \phi_V(y) f_{KD}(y) dy = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x_0) \sum_{\beta=1}^N \lambda_n^{\beta} \eta_n(Y_{\beta}) \right)
 \end{aligned}$$

with

$$C_n(x_0) = \int_{x_0}^{\infty} \phi_V(y) \eta_n(y) g(y) dy$$

(g is the density of the normal law (0,1) and G the corresponding distribution function ; H_n is the non normalized Hermite polynomial)

In practical applications, the sums are stopped at $n = 6$ or 10 , and the numerical computations are easy.

4. ESTIMATION OF AN INDIRECT TRANSFER FUNCTION.

As indicated in the introduction, the decision to dispatch a given block $v_i \subset V$ either to the mill or to waste will be made, at the (future) time of its mining, upon the basis of the information then available : this information will be much richer than the present one (the $Z(x)$), but the real grades Z_i will never be exactly known, only estimations Z_i^* of them will be available at that time.

If these future estimations are supposed to be unbiased, we shall have :

$$(17) \quad E [Z_i | Z_i^*] = Z_i^*$$

(In practice, the classical linear estimations do not necessarily satisfy this relationship. But our reasoning remains valid when changing Z_i^* into $Z_i^{i*} = E(Z_i | Z_i^*)$)

Let us denote, as usual, by θ_{z_0} the function defined by $\theta_{z_0}(z) = 1$ if $z \geq z_0$ and $\theta_{z_0}(z) = 0$ if $z < z_0$. With the cut-off grade z_0 , a given block v_i will be sent to the mill if $\theta_{z_0}(Z_i^*) = 1$ and to waste if $\theta_{z_0}(Z_i^*) = 0$. In other words, the cut-off criterion changes the real grade Z_i into the valuable grade $Z_i \theta_{z_0}(Z_i^*)$. It follows from (17) that, given the future estimator Z_i^* , the conditional expectation of this valuable grade will be

$$E[Z_i \theta_{z_0}(Z_i^*) | Z_i^*] = Z_i^* \theta_{z_0}(Z_i^*)$$

Hence, up to a factor equal to the tonnage of the panel V itself, the ore tonnage $T(z_0)$ sent to the mill, and the conditional expectation $Q(z_0)$ (given Z_i^*) of the corresponding metal tonnage will be :

$$(18) \quad \begin{cases} T(z_0) = \frac{1}{k} \sum_i \theta_{z_0}(Z_i^*) \\ Q(z_0) = \frac{1}{k} \sum_i Z_i^* \theta_{z_0}(Z_i^*) \end{cases}$$

If the cut-off grade z_0 is considered as a parameter, the relationships (18) give the parametrization of the corresponding valuable reserve of the panel V . In particular, for a variation δz_0 of the cut-off parameter z_0 , the variation δQ and δT of the metal and the tonnage will satisfy the relationship

$$(19) \quad \delta Q = z_0 \delta T$$

In the present situation, the future estimations Z_i^* are not known, and we have to estimate $T(z_0)$ and $Q(z_0)$ either by their conditional expectations or by their D.K., given the present information (i.e. the $Z(x_\alpha) = \phi(Y_\alpha)$, or the Y_α themselves). By taking these D.K. or these conditional expectations, the relationships (18) remain valid, so that the estimation of one of them (for instance $Q(z_0)$) can be deduced from the other ($T(z_0)$). Hence, it is sufficient to give the calculations concerning the tonnage $T(z_0)$.

Condition (17) is not compatible with the Hermitian model of paragraph 1 (which does not allow calculation of a conditional expectation), so that we must work in the frame of the discrete Gaussian model of paragraph 2.

When mining, the available information will consist in the numerical values of the Y_ℓ associated with

i) the samples Y_α which are now available and

ii) many other samples which are not known at the present time.

In the discrete Gaussian model, the conditional law of X_i given Y_ℓ is normal with the conditional expectation :

$$X_i^* = E(X_i | Y_\ell) = \sum_{\ell} a_{i\ell} Y_\ell$$

where the coefficients $a_{i\ell}$ are determined by the usual system :

$$(20) \quad \sum_{\ell} a_{i\ell} \rho_{\ell s} = r_{is}$$

It follows from (20) that the R.V. X_i^* will satisfy the relationships

$$E(X_i X_i^*) = E(X_i^{*2}) = \sum_{\ell} a_{i\ell} r_{i\ell} = s_i^2$$

Hence, the two normalized Gaussian R.V.'s X_i and X_i^*/s_i admit the correlation coefficient s_i . It follows that the conditional expectation of the block grade

$$Z_i = \phi_r(X_i) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n r^n \eta_n(X_i)$$

given the Y_ℓ will be :

$$Z_i^* = E(Z_i | Y_\ell) = \sum_n C_n r^n s_i^n \eta_n\left(\frac{X_i^*}{s_i}\right) = \phi_{rs_i}\left(\frac{X_i^*}{s_i}\right)$$

In practice, s_i does not depend on i (because at the mining stage, the blocks are all estimated about in the same way), and we may put $s_i = s$. Note that it is possible to compute s by solving the kriging system (20) without knowing the numerical values of the future estimators Z_i^* : s is numerically known at the present time, and the future estimators will be :

$$Z_i^* = \phi_{rs} \left(\frac{X_i^*}{s} \right)$$

with the new anamorphosis ϕ_{rs} (instead of ϕ_r). Let x_0 be the number such that

$$z_0 = \phi_{rs}(x_0)$$

Then, $Z_i^* \geq z_0$ is equivalent to $X_i^*/s \geq x_0$. Hence, the valuable tonnage $T(z_0)$ defined in (18) is :

$$(21) \quad T(z_0) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \theta_{x_0}(X_i^*/s)$$

The D.K. of this expression remains to be calculated. Note first that, for any α , the correlation coefficient $r_{i\alpha}^*$ of the Gaussian pair $(Y_\alpha, X_i^*/s)$ is such that $r_{i\alpha}^* = r_{i\alpha}^* s_i$, because X_i and Y_α are conditionally independent given X_i^* . Hence, we have :

$$r_{i\alpha}^* = \frac{r_{i\alpha}}{s}$$

It follows that the D.K. of $\frac{1}{n} \sum_i \eta_n(X_i^*/s)$ given Y_α is

$$KD \left[\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \eta_n(X_i^*/s) \right] = \sum_{\alpha=1}^N \lambda_n^\alpha \eta_n(Y_\alpha)$$

with :

$$(22) \quad \sum_{\alpha} \lambda_n^\alpha (\rho_{\alpha\beta})^n = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\frac{r_{i\alpha}}{s} \right)^n$$

Now, by using the expansion :

$$\theta_{x_0}(x) = 1 - G(x_0) - g(x_0) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{n-1}(x_0)}{n!} H_n(x)$$

we obtain the D.K. of the tonnage $T(z_0)$ defined by (21) :

$$(23) \quad T_{KD}(z_0) = 1 - G(x_0) - g(x_0) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{n-1}(x_0)}{n!} \sum_{\alpha=1}^N \lambda_n^\alpha H_n(Y_\alpha)$$

This expansion is identical to (16). The differences between direct and indirect transfer functions are :

- in the indirect case, x_0 is defined by $z_0 = \phi_{rs}(x_0)$, (instead of $z_0 = \phi_r(x_0)$).

- the λ_n^α are given by system (22) whose right hand side contains the term $r_{i\alpha}/s$ (instead of $r_{i\alpha}$).

Hence, it is possible to calculate a density function f_{DK} by relationship (15), and to express the D.K. of the valuable metal tonnage $Q(z_0)$ by a formula similar to (16), i.e. :

$$Q_{KD}(z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x_0) \sum_{\beta=1}^N \lambda_n^\beta \eta_n(Y_\beta)$$

with :

$$\begin{cases} (z_0 = \phi_{rs}(x_0) \\ (\\ (C_n(x_0) = \int_{x_0}^{\infty} \phi_{rs}(y) \eta_n(y) g(y) dy \\ (\\ (\end{cases}$$

REFERENCES

1. A. Marechal, 1974, Généralités sur les Fonctions de Transfert, Note CMM (unpublished).
2. G. Matheron, 1974, Les Fonctions de Transfert des Petits Panneaux, Note CMM (unpublished).
3. G. Matheron, 1975, A simple substitute for conditional expectation: the Disjunctive Kriging, NATO Advanced Study Institute, Geostat 75, Rome, Italy, October 1975.
4. A. Journel, 1973, Le formalisme des ressources-réserves; in Revue de l'Industrie Minérale, N° 4, pp. 214-226.

THE PRACTICE OF TRANSFER FUNCTIONS : NUMERICAL METHODS AND THEIR APPLICATION.

A. Maréchal

Centre de Morphologie Mathématique, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, Fontainebleau, France.

ABSTRACT. For many people, whose job is ore reserve evaluation, mine planning or exploration strategy, the name of transfer function will be quite new : however, this tool may give an answer to very old problems. After recalling some questions to which classical estimation is unable to give correct answers, I shall present some examples of determination of transfer functions : I shall not insist on the theoretical formulation (to be found better in [1]) but essentially I shall try to give an insight into the overall process.

1. SOME OLD PROBLEMS

1.1. Open-pit design

The main methods developed to obtain a final optimum design use the concept of block : the orebody is divided into many identical "cubes" of the size of the selection unit, each of which being valued. Then, by different combinatorial methods, one determines the set of cubes which yields the maximum profit. Of course the accuracy of the whole method rests on a good valuation of each block, and especially on a correct forecasting of its future destination : ore pile or waste. This forecasting will be achieved in two steps : estimation of block grade, then selection by cut-off on the estimate.

We find here the main source of error in the block valuation : when making the effective decision "ore - waste", that is at the

mining stage, we usually have a much better information on the block grade than at the estimation stage (generally, we know the blast-hole grades ; if the holes are very close, we may even consider that we know the true block grade). We shall thus apply the cut-off criterion to the (nearly) true block grade, which may be fairly different from its initial estimate. One may think that there will be a compensation of errors, so that the mean result is correct : it is not so. The fact that the ore-waste status is forecast on the estimated block grade (which always has a smoother distribution than the true values) induces an unavoidable bias : compare the results of selection (in tonnage and mean grade of ore) by cutting on the 10 x 10 x 10 m. blocks and on their estimation by a drill-hole grid of 50 x 50 m. : if the cut-off grade is fairly high, you will find an astonishing difference.

The comparison between true 10 x 10 x 10 m. block grades and their estimated values by drill-holes shows that it is an illusion, in most cases, to forecast individually the future ore-waste status. We must then abandon the small cubes in seeking the optimum design and limit ourselves to larger cubes optimum design (which, additionally, will be less time-consuming) : but we must not forget that selection will be made on small units, so that each big cube will contain a certain proportion of small cubes of ore (and waste respectively). The use of transfer functions is to give an estimate, for each big cube, of the proportion of mining units which will be sent to the ore pile, together with the mean grade of this ore : this allows a correct valuation of each big cube and thus a significant optimum pit.

1.2. Mine Planning

Suppose you mine a rich iron orebody by open-pit method : a very frequent geological situation shows a certain number of pure hematite bodies surrounded by low grade ore. With the action of tectonics, underground waters, ... you may reasonably expect to find, in your monthly production, a mixing of high grade and low grade blocks. It is useless to receive from the computer an estimation of your monthly production grade of 50% Fe if you are only interested in the over 60% ore : maybe the estimation of a mean grade of 50% is accurate, but it does not tell you whether it consists of 50% of waste blocks of 40% Fe and 50% of 60% Fe, or 70% at 43% Fe and 30% at 67%. We have seen in the previous example, that it is not generally possible to give a precise estimate of each individual block, so that the convenient method is to give an estimate of the proportion of blocks, in the volume to be mined in the month, which will be found when mining, with a grade higher than 60% Fe.

1.3. Exploration strategy

A given superficial sedimentary layer contains lenses of mineralized ore [2] . You make an exploratory campaign with a 100 x 100 m. grid, a certain number of samples have a good ore grade and you must decide which zone to select to proceed with the exploration on a 25 x 25 m. grid : this will be the ultimate information and you will mine each 25 x 25 m. panel whose estimated grade will be higher than a given cut-off grade. How can you select the 100 x 100 m. big panels that will be drilled again? In many cases, people make an estimation of the big panel grade and make a selection with the same cut-off that is used for selecting the 25 x 25 m. panel. Of course, there is no reason to do so, because the true criterion would be to estimate, with the 100 x 100 m. information, how many 25 x 25 m. panels will be selected after the second campaign and what will their mean grade be. With such information, we can compare for each 100 x 100 m. panel the probable future benefit yielded by the mined 25 x 25 panels with the cost of the second exploration campaign. This kind of information will be given by an "indirect transformation" [1] .

2. SUMMARY OF THE THEORY OF TRANSFER FUNCTION

2.1. Definitions of transfer function (T.F) [1,2]

v being the volume of selection, we consider a big volume V union of n small volumes v_i , $i = 1, n$. Z_α , $\alpha = 1, 2, N$ are the grades of samples located at the points of coordinates x_α , $\alpha = 1, N$. Using the present information, we try to estimate the number and average grade of the blocks v_i whose grade Z_{v_i} is higher than a given cut-off z_c . These quantities will depend on the conditional law of probability of Z_{v_i} given Z_α , $\alpha = 1, N$. This law will be called the (direct) transfer function of block v_i and averaging the laws relative to each v_i of V , we find the TF of blocks v_i in V : the estimation of the proportion of selected blocks and of the corresponding mean grade will be respectively the cumulative distribution and the mean of the truncated TF.

In many cases (see Section 1) each block v_i will not be selected according to $Z_{v_i} > z_c$, but according to $Z_{v_i}^* > z_c$, where $Z_{v_i}^*$ will be the estimate of Z_{v_i} built with the latest information available when mining : thus the quantities we try to estimate

will depend on the conditional two-dimensional law of $(Z_{v_i}^*, Z_{v_i})$ that we shall call the indirect TF of Z_{v_i} .

2.2. Models and methods

Consider a big block V composed of n identical small blocks v_i . The TF of blocks v_i within V , knowing the information $Z_\alpha, \alpha = 1, N$ is the average in V of the distribution law of the conditional variables $Z_{v_i} | Z_\alpha, \alpha = 1, N$. We see that the exact determination of this TF will make use of the joint distribution $(Z_{v_i}, Z_{\alpha_1}, \dots, Z_\rho, \dots)$ which contains, as "by-products", the a priori distribution of Z_{v_i} , the joint distribution $(Z_\alpha, Z_\rho), (Z_{v_i}, Z_\alpha)$ and so on.

In order to reach the exact TF, we need a model for the distribution $(Z_{v_i}, Z_\alpha, Z_\rho, \dots)$ which would imply complicated calculus :

the solutions exposed in [1] consist in building a special unbiased estimator for the TF which actually need only the knowledge of the bivariate distributions (Z_α, Z_ρ) and (Z_α, Z_{v_i}) . According to the problem to solve, we shall make use of two v_i models : the Hermitian model and the discrete model. Each model rests on a representation of the variables Z_α and Z_{v_i} as Gaussian anamorphoses, i.e. :

$$Z_x = \varphi(Y_x) \quad Z_{v_i} = \varphi_v(X_i)$$

where Y_x and X_i are, individually, two standard Gaussian random variables.

In the Hermitian model, we assume that the joint distribution of all pairs of variables $(Y_\alpha, Y_\beta), (Y_\alpha, X_i)$ follow a Hermitian distribution

$$f(Y_\alpha, Y_\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x_\alpha, x_\beta) \eta_n(Y_\alpha) \eta_n(Y_\beta) g(Y_\alpha) g(Y_\beta)$$

$$f(Y_\alpha, X_i) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x_\alpha, v_i) \eta_n(Y_\alpha) \eta_n(X_i) g(Y_\alpha) g(X_i)$$

It follows from this assumption [1] that, given the information relative to point variables Z (e.i. given $T_n(x_\alpha, x_\beta)$ and $\varphi(y)$), we can compute any $T_n(x_\alpha, v_i)$ and the anamorphosis $\varphi_v(y)$.

As we have noted before, we have all the information necessary to estimate the TF. However, it must be added that the Hermitian model is mathematically contradictory, which means that the Hermitian laws deduced from our initial assumption may take negative values, for instance. This is a numerical drawback, but which will seldom appear if we are practically concerned with cut-off grade of medium values. The Hermitian model is thus an approximation of the true, but impossible to know, multivariate model (Y_α, X_i) .

- In the discrete model, we consider the orebody as the union of n little blocks v_i , each of which is associated with a potential point sample Z_{α_i} . Using again the anamorphosis representation, $Z_{\alpha_i} = \varphi(Y_{\alpha_i})$ and $Z_{v_i} = \varphi_r(X_i)$, we assume that :

- in each block v_i , (X_i, Y_α) is a Gaussian bivariate.
- conditionally to $X_i = x_i$, Y_α is independent of the rest of the R.V. of the model.
- $(X_i, i = 1, n)$ is a Gaussian multivariate.

We see that the model is fully determined if we know the following correlation coefficients :

$$R_{ij} = \text{Cov}(X_i, X_j) ; r_{i\alpha} = \text{Cov}(X_i, Y_\alpha) ; \rho_{\alpha\beta} = \text{Cov}(Y_\alpha, Y_\beta)$$

G. Matheron shows in [1] that the whole model can be determined when knowing the point experimental information $\varphi(y)$ and $\rho_{\alpha\beta}$.

Within the preceding theoretical frame, we build various estimators for the TF of v_i in a big block V : the most general method consists in building a disjunctive kriging (D.K) estimator of the conditionalized distribution of X_i , which is then transformed into a distribution of Z_{v_i} by anamorphosis φ_{v_i} .

The D.K estimator will be used either for estimating the direct TF in the frame of the Hermitian model or for estimating the indirect TF in the frame of the discrete model. The estimator will be a pseudo-density function :

$$f_{DK}(y) = g(y) \left[1 + \sum_{v=1}^{\infty} \eta_n(y) \sum_{\beta} \lambda_n^\beta \eta_n(Y_\beta) \right]$$

when the Y_β are the Gaussian values corresponding to the samples Z_β and the λ_n^β are the weights found by resolution of the D.K system of order n . By integration above the cut-off value g_c we find

respectively the proportion P of block v_i selected and the corresponding quantity of metal Q :

$$P = \int_{y_c}^{+\infty} f_{DK}(y) dy \qquad Q = \int_{y_c}^{+\infty} \varphi_v(y) f_{DK}(y) dy$$

In order to avoid some calculations, it is sometimes possible (when the information is close) to replace, as a TF, the distribution of X_i conditionalized by all the Y_α by the distribution of X_i conditionalized by X_{Ki} , X_{Ki} being its kriged estimate : this simplification, possible in the frame of the discrete model, allows a direct determination of the TF.

3. THE SEQUENCE OF STEPS IN A T.F. STUDY

3.1 Definition of the problem

Suppose we are preparing the evaluation and the design of an open-pit explored by vertical drill-holes on an almost regular grid of 100 x 100 m. We consider that each selectable unit, when mining, will be a cube of 10 x 10 x 10 m., the ore grade of which will be nearly truly known through sampling of the blast holes. According to the mean grade shown by the blast holes, the mined unit will be sent as ore, if the grade is higher than the plant cut-off z_c . The study of the orebody will be made for different possible plant cut-off z_{c1} , z_{c2} , ... In the classical evaluation method, each 10 x 10 x 10 m. block v_i to be mined will have an estimated value :

$$W = T_e (p_1 Z_{v_i}^* - p_2) \quad \text{if } Z_{v_i}^* \geq z_c$$

$$= - T_e p_2 \quad \text{if } Z_{v_i}^* < z_c$$

where : T_e is the tonnage (supposed constant) of each individual block v_i .

p_1 : sale price of metal/ton of metal ; p_2 : mining cost of mineral/ton.

$Z_{v_i}^*$: estimated grade of v_i .

In a TF valuation, we shall not valueate each individual v_i ,

but bigger blocks V_j containing n blocks v_i . The transfer function will allow us to estimate :

- $P_j(z_c)$: proportion of the n blocks v_i having a mean grade higher than z_c .

- $Q_j(z_c)$: quantity of metal contained in the $n P_j(z_c)$ selected blocks. The valuation of V_j will be :

$$W_j = n T_e [p_1 Q(z_c) - p_2]$$

The total tonnage of ore recovered will be $\sum_j n T_e P_j(z_c)$, of waste $\sum_j n T_e [1 - P_j(z_c)]$ and the mean grade of recovered ore $\bar{Z} = \frac{\sum_j Q_j}{\sum_j P_j}$.

The size of the blocks V_j will be chosen according to the grid of samples, so that each block V_j is valued with roughly the same precision. Once we have defined all the geometrical variables of the problem, i.e. the blocks v_i and V_j , and the economical ones z_c, p_1, p_2 , we can begin the first step.

3.2 Structural analysis of the point grade distribution.

Although not directly used in the TF formulae, the information drawn from the structural analysis of $Z(x)$ is of prime importance : effectively, the probabilistic models to be used suppose that $Z(x)$ is strictly stationary, at least that it is possible to define different zones of the orebody within which $Z(x)$ is stationary ; it will be very important, in particular, to make a very severe check of the sample values, in order to eliminate any doubtful data. In this step, data analysis will consist in computing the experimental variogram and histogram of the Z_α and eventually of the regularized variable in order to check the theoretical model of the variogram.

Anyway, we shall adjust a stationary model for the variogram (which is always possible locally), to which corresponds a model of covariance $S(h)$: this covariance will be very important for future tests.

We shall build the experimental distribution law $F^*(z)$ of the Z_α , cumulated from the experimental histogram. To allow future comparisons, we shall try to detail the tail of the histogram for

small and large value, and for each class, in addition to the frequency of occurrence, we shall compute the mean experimental grade. Finally, if the distribution of experimental data allows it, we shall compute the histogram of some linear combination of the samples : for instance with a regular grid it is possible to smooth the Z_{α} by taking the average of the sampled corners of the grid ; the histogram of such smoothed data will allow a check up of our theoretical "permanence" formulae.

3.3 Numerical determination of the anamorphosis

We represent Z as a function φ of a standard Gaussian variable Y , and for future calculus we need to represent φ in an expansion

$$\varphi(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi_n}{n!} H_n(y)$$

$H_n(y)$ being the non-normalized Hermite polynomial defined by

$$g(y) H_n(y) = \frac{d^n}{dy^n} [g(y)]$$

The Fourier coefficients ψ_n of this expansion are given by :

$$\psi_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) H_n(y) g(y) dy$$

and must be determined experimentally.

Notice that the relation $Z = \varphi(Y)$ implies $F(z) = G(y)$, where $F(z)$ and $G(y)$ are the cumulative distribution of Z and Y respectively : the function $\varphi(y)$ is then known only for the couples $[(z_i = \varphi(y_i))]$ when z_i are the limits of the classes of the experimental histogram and the y_i the values defined by the relation $F(z_i) = G(y_i)$. The problem of determination of the ψ_n reduces then to a problem of numerical calculus of an integral ; various solutions exist :

- Interpolate $\varphi(y)$ between the known points $\{y_{i-1}, z_{i-1}, y_i, z_i\}$ by a low degree local interpolator $\varphi^*(y)$ (linear or quadratic) and compute for each interval y_{i-1}, y_i the integral

$$\int_{y_{i-1}}^{y_i} \varphi^*(y) H_n(y) g(y) dy$$

- use a direct Gauss integration method, i.e. :

$$\psi_n^* = \sum_{i=1}^N W_i H_n(y_i) \varphi(y_i) \quad \text{with :}$$

- ψ_n^* : estimator of ψ_n

- N : number of points of the Gauss method ; N must be greater than the highest degree n of ψ_n to be calculated.

- W_i, y_i : weights and abscissa in the Gauss integration method. They are known from numerical tables once N is chosen.

- $\varphi(y_i)$: interpolated value of $\varphi(y)$ for the abscissa y_i .

The highest degree for $H_n(y)$ used in the expansion of $\varphi(y)$ will depend on the shape of $\varphi(y)$. We see in fig. 1, 2, 3 three experimental examples of function $\varphi(y)$ and the corresponding histograms : for an exponential shape of $\varphi(y)$ we have a good approximation with an expansion up to degree 6, but with the more complicated function of fig. 3, we need an expansion up to degree 15.

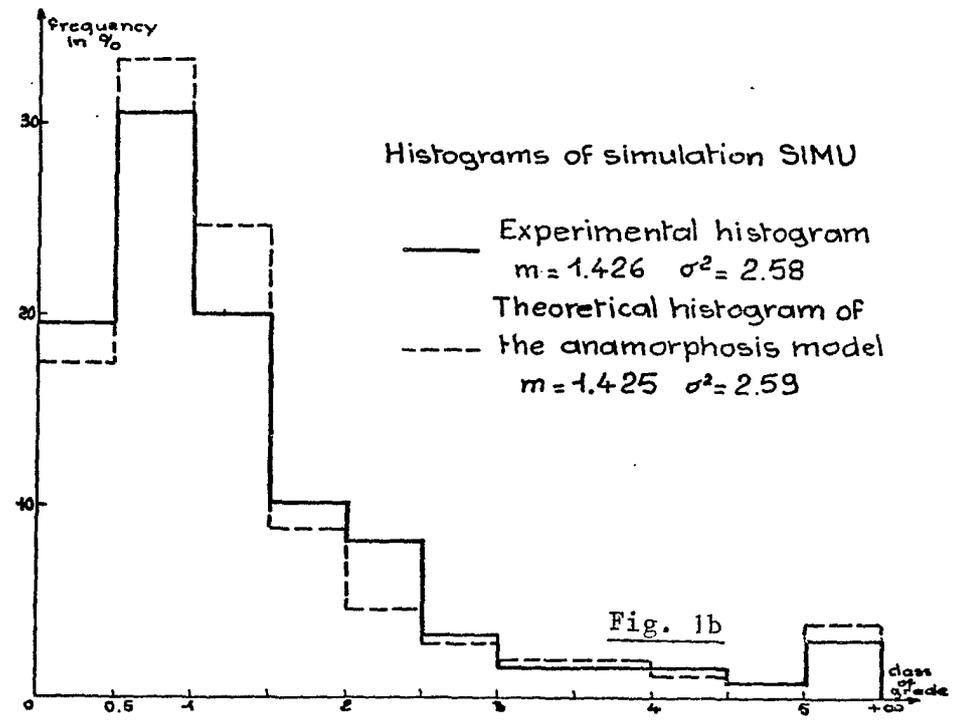
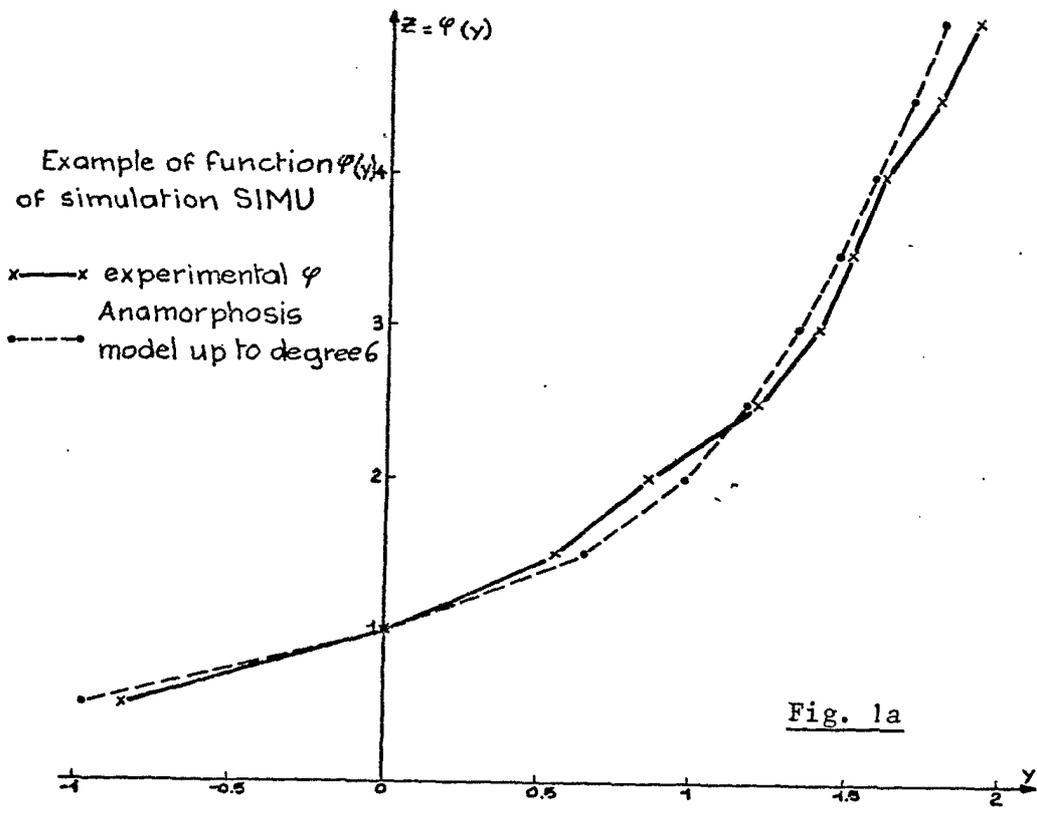
A last remark about $\varphi(y)$: it is necessary that $Z = \varphi(Y)$ has at least the first two moments equal to the ones adopted in the structural analysis, that is the same mean and variance. The function $\varphi(y)$ will be such that :

$$\psi_0 = m \quad \text{and} \quad \sum_{n=1}^N \frac{\psi_n^2}{n!} = S(o) \quad (\text{a priori variance of } Z)$$

- $\varphi(y)$ being fully determined by its Fourier coefficients Ψ_n , we now need the inverse function $y = \varphi^{-1}(Z)$: indeed the whole practical calculus will use the Gaussian information $Y_\alpha = \varphi^{-1}(Z_\alpha)$, and the coefficients $T_n(x, x_\alpha)$ of the bivariate Hermitian law of $(Y_x, Y_\alpha), V_x, V_\alpha$; so our use for function $\varphi^{-1}(Z)$ will reduce to the determination of the Y_α , but it is not necessary to have a mathematical formulation for that : actually, we shall solve numerically the equation $Z_\alpha = \varphi(Y_\alpha)$ for each Z_α without any additional determination of the function $\varphi^{-1}(z)$.

3.4 Structural analysis of the Gaussian variables Y_α .

Either in the frame of the Hermitian model or of the discrete



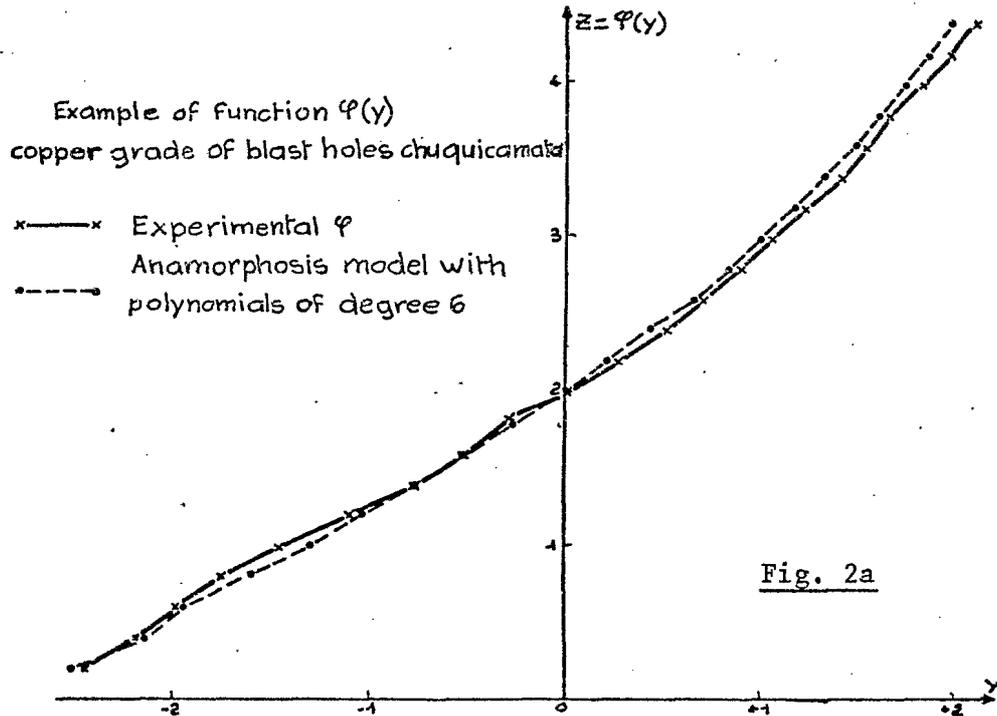


Fig. 2a

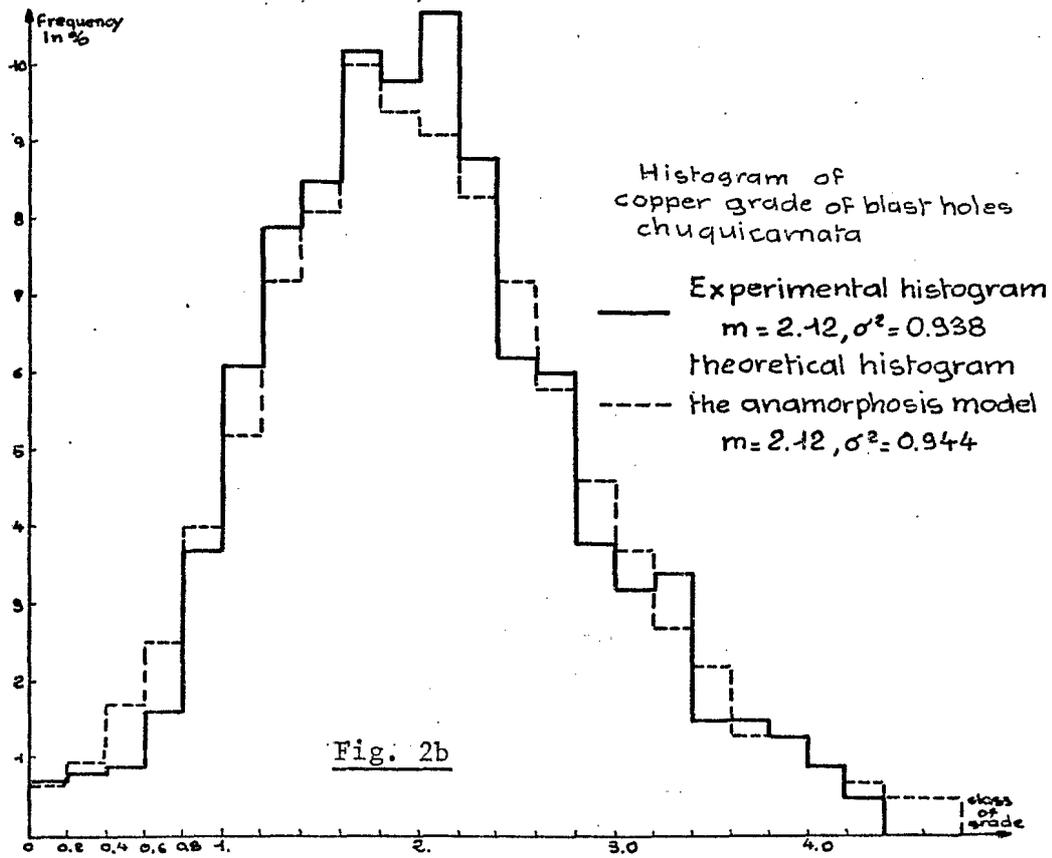


Fig. 2b

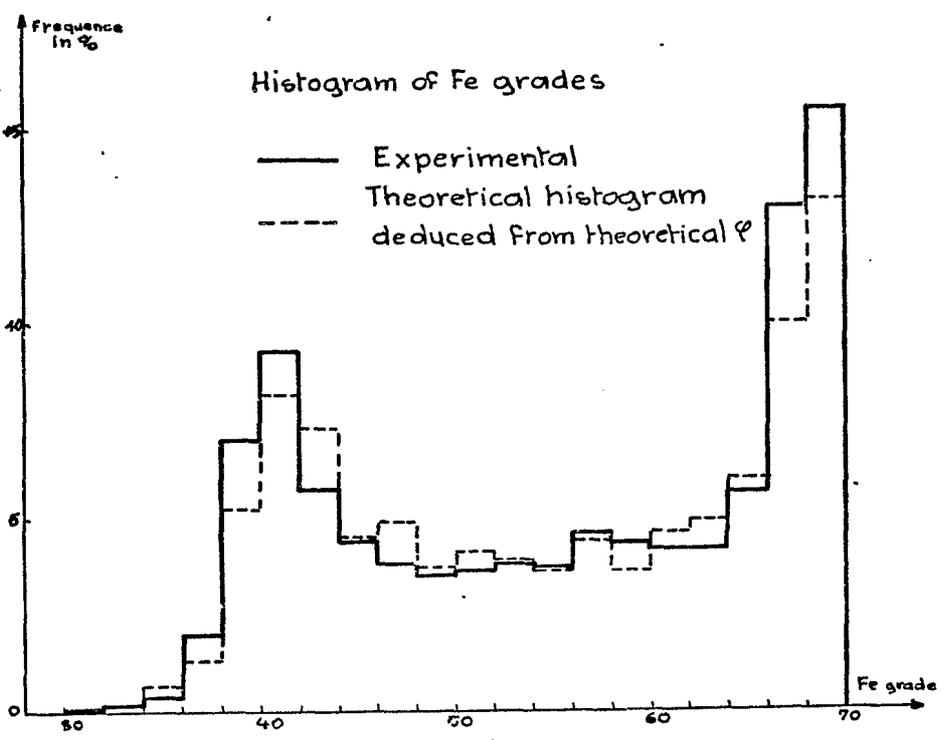
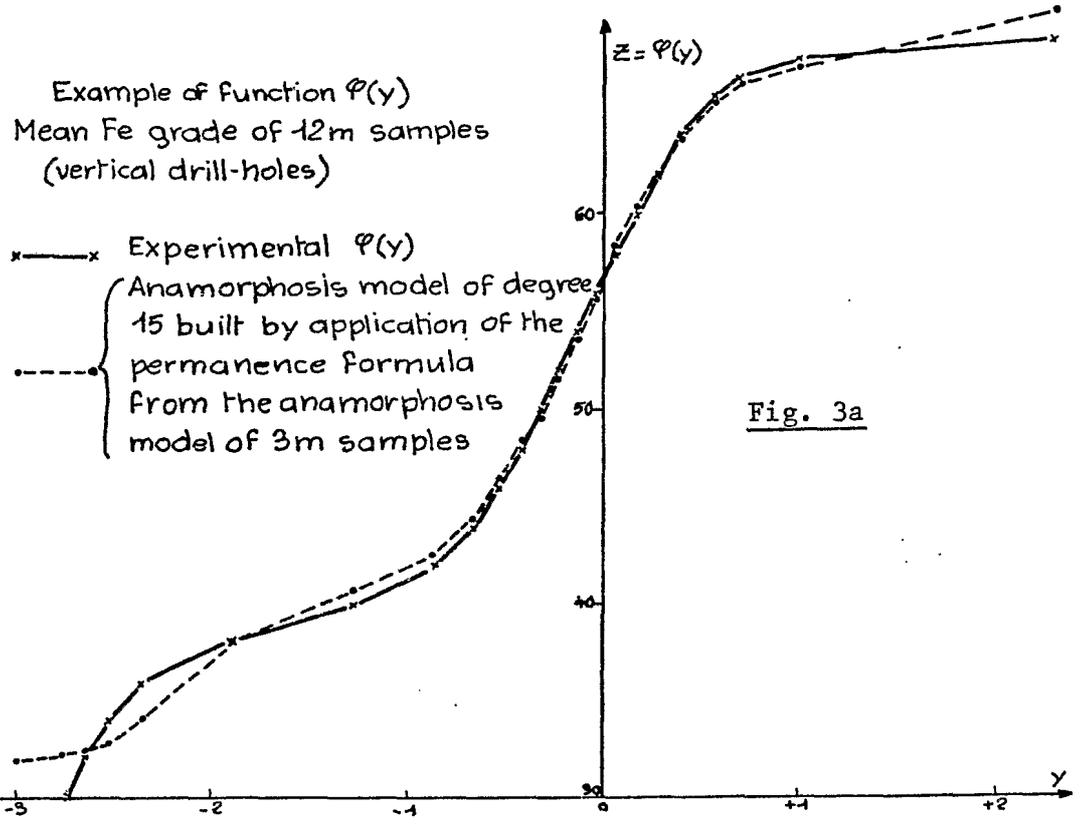


Fig. 3b

model, we need a model of covariance between the punctual Gaussian (Y_x, Y_y) , $\rho(h) = E(Y_x, Y_y)$. This model will be deduced from the structural study of the experimental Y_α . It is noticeable that the corresponding experimental variogram α is usually statistically smoother than the variogram of the Z_α and thus fitting a mathematical model is an easier operation.

Both models assume a particular bivariate distribution for each couple (Y_x, Y_y) : Hermitian (usually, it will be Gaussian) or Gaussian. To check this assumption, we compute the two-dimensional histograms of couples (Y_{x+h}, Y_x) , for various values of h : this will be done in a very similar manner with the computation of the experimental variogram, e.i, by grouping together all the pairs (Y_x, Y_y) for $(x-y) \neq h$. We then compare the experimental histogram to the theoretical Gaussian (or Hermitian) model ; in case of a Gaussian model, when the covariance $\rho(h)$ is already determined, it may be useful to compute directly the histogram of couples

$$\left(Y_{x+h}, \frac{\rho Y_{x+h} - Y_x}{\sqrt{1 - \rho^2}} \right) \quad (\text{for } h \text{ such that } \rho(h) < 1)$$

which is a pair of independent Gaussian variables.

After checking that there is no experimental contradiction to the Gaussian model for pairs (Y_{x+h}, Y_x) , a last checking will consist in comparing the experimental covariance of the Z_x , $S^*(h)$ with its theoretical value in the Gaussian model, e.i.

$$\sum_{u=1}^N \frac{\psi_n^2}{n!} [\rho(h)]^n$$

3.5 Numerical coefficients for the T.F. estimation

In the Hermitian model, we build a D.K. estimator $f_{DK}(y)$ of the T.F of X_i , inverse anamorphosis of the Z_{v_i} (see ref. 1). So we need first a formulation of the anamorphosis $Z_{v_i} = \varphi_{v_i}(X_i)$, which will be determined from the coefficients of the punctual anamorphosis $\varphi(y)$

$$\varphi_{v_i}(y) = \sum_{n=0}^N \frac{\psi_n}{n!} D_n(v) H_n(y)$$

$$\text{with } D_n^2(v) = \frac{1}{v} \int_V \int_V T_n(x,y) dx dy$$

The D.K. estimate of the T.F will be :

$$f_{DK}(y) = g(y) \left[1 + \sum_{n=1}^N \left(\sum_{\beta} \lambda_n^{\beta} H_n(Y_{\beta}) \right) \frac{H_n(y)}{n!} \right]$$

where the λ_n^{β} are solutions of the γ systems :

$$\sum_{\beta} \lambda_n^{\beta} T_n(x_{\alpha}, x_{\beta}) = \frac{1}{D_n(v)} \times \frac{1}{V} \int_V T_n(x_{\alpha}, y) dy, n = 1, 2, \dots$$

Thus, the parameters to calculate are $D_n(v)$, and $\frac{1}{V} \int_V T_n(x_{\alpha}, y) dy$.

Usually, the quantities $T_n(x,y)$ will be $\rho^n(x-y)$ and the corresponding integrals will be calculated by numerical approximation formulae. The integration of the estimator $f_{DK}(y)$ to obtain the two quantities $P(y_c)$ and $Q(y_c)$ used in the evaluation of each V_j is then easy and may be expressed simply as an expansion in $H_n(y_c)$.

As a conclusion, all the calculations required are similar to ones made in a kriging estimation, except that they must be repeated γ times.

In the discrete model, the procedure will be quite similar except that the formula giving the anamorphosis ϕ_v is a little different, and the coefficients of the D.K. systems easier to obtain. Moreover, we have seen that the initial assumptions of this model allow a simpler model of T.F obtained by conditioning of the kriging estimate of X_v : in this case the T.F is obtained directly without any system inversion, but this gain in computing time is paid by reduced precision in the estimation of the T.F.

3.6 Conclusion on the sequence of steps

The reader will have noted that a T.F study does not introduce in the practice of geostatistics any new computer algorithm : except for the determination of the ψ_n , all the different steps will be performed by standard geostatistical programs such as variogram, histogram, calculus of covariance between a point and a volume, linear system inversion etc... The practice of such a study will not introduce many changes in the standard geostatistical method, particularly in the organization of the input

15

and output data files : the main change is of course an increase in computing time, but this can be largely diminished in the future by an adequate programming.

4. PRACTICAL EXAMPLES

4.1 Point T.F estimation on a simulation

A two-dimensional point distribution is simulated by the turning band method : the orebody contains 50 x 10 square panels of 22 x 22 m. each block having inside a regular 11 x 11 point distribution.

For each block, a statistic was made of the internal 121 points, which gave the true mean value, the proportion of the 121 values falling within the classes of grade (0-0.5), (0.5-1.2), (1.2 +∞), and the mean grade of the corresponding proportion.

The problem is to build estimators of these quantities if we suppose that each block is sampled in the center. We shall use for these estimators the 9 nearest points : see in Fig. 4 one of the blocks to estimate and its surrounding information. We shall see the different calculation step-by step.

The structural study of the Z_x allows us to see that Z_x may be considered as stationary and isotropic, with a lognormal distribution (Fig. 1b). The study of anamorphosis $\varphi(y)$ (Fig. 1a) confirms this impression, and the ψ_n computed by Gaussian integration are very similar to the theoretical ψ_n of an exponential function : for $\varphi(y)$ we shall use the following ψ_n model : $\varphi(y) = \exp[0.8485y]$ which has the following sequence of ψ_n , $n = 0, 1, \dots, 5$. (We shall use a degree 5 representation).

1.433 ; - 1.215 ; 1.030 ; - 0.8743 ; 0.7458 ; - 0.6423 ;

The standard Gaussian values corresponding to the Z_α are :

$Y_\alpha = (\text{Log } Z_\alpha) / 0.8485$ (See example in Fig. 4)

The structural study of Y_α was then performed : the Gaussian bivariate model on (Y_x, Y_{x+h}) was checked on the two-dimensional experimental histogram, and was found to be correct for a correlation coefficient $\rho(h)$ which we found by computing the variogram of the Y_α . The following model was adjusted :

4.4532 ● 1.7342	13.0200 ● 3.0835	1.1507 ● 0.1686
1.5640 ● 0.5375	1.0336 ● 0.0396	0.6200 ● -0.5742
0.2480 ● -1.6742	0.1126 ● -2.6235	0.1215 ● -2.5317

7 8 9
2 5 6
1 2 3

samples numbers

4.4532: arithmetic value
1.7342: Transformed value for gaussian distribution

Fig. 4

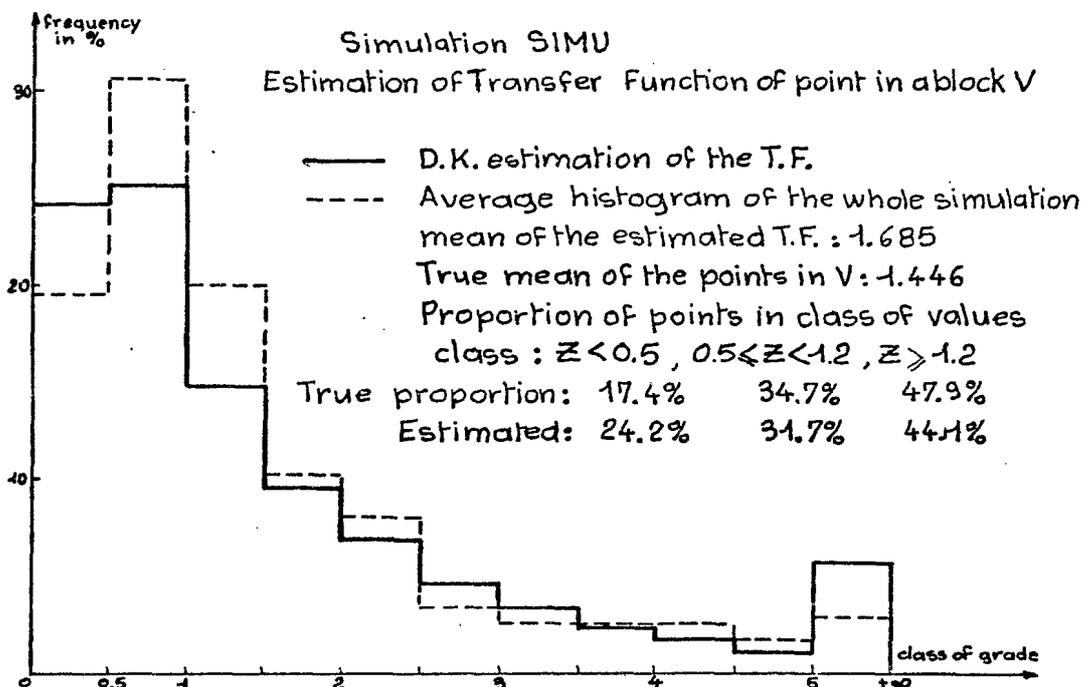


Fig. 5

$$\rho(h) = 0.16 \delta(h) + 0.84 \left[1 - \frac{1}{2} h/66 + \frac{3}{2} (h/66)^3 \right] \text{ for } h < 66\text{m.}$$

$$\rho(h) = 0 \text{ for } h \geq 66 \text{ m.}$$

We shall now compute two different estimators for the T.F :
 - a D.K estimator (as seen above) with the Hermitian model
 - an approximate estimator computed by conditionalizing by the kriging Y_K of the mean of Y_x in the block (noted G.M in table 2.)

In table 2, we see for 8 blocks of a same line the estimators of proportion and mean grade in the classes defined above. The first estimator, CO.E, is the best possible estimator, computed by averaging the conditional distribution of each of the 121 inside points. Estimator G.M is the estimator conditionalized by Y_K and the last line gives the observed true values.

We shall now compute the D.K estimator for the block shown in Fig. 4. The D.K estimator of the T.F will be :

$$f_{DK}(y) = g(y) \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{\beta=1}^9 \lambda_n^\beta H_n(Y_\beta) \right) \frac{H_n(y)}{n!} \right]$$

when the λ_n^β are solutions of the system :

$$\sum_{\beta=1}^9 \lambda_n^\beta \rho^n(x_\alpha - x_\beta) = \overline{\rho^n(x_\alpha, x_V)} \quad \text{for } n = 1, 2, \dots, 5$$

n/β	5	2	1
1	- 0.3725	- 0.0992	- 0.0265
2	0.1977	0.0456	0.0111
3	- 0.0745	- 0.0144	- 0.00346
4	0.0223	0.00357	0.00077
5	- 0.0062	0.00075	- 0.00014

The results of λ_n^β are given for $\beta = 5, 2, 1$, because we have obviously :

$$\lambda_n^2 = \lambda_n^4 = \lambda_n^6 = \lambda_n^8 \qquad \lambda_n^1 = \lambda_n^3 = \lambda_n^7 = \lambda_n^9$$

With the numerical values of Y_β appearing in Fig. 5, we compute the terms

$$C_n = \sum_{\beta=1}^9 \lambda_n^\beta H_n(Y_\beta) \quad , \quad n = 1, 5 \quad (C_0 = 1)$$

$$C_1 = -0.0026; C_2 = 0.4897; C_3 = 0.0763; C_4 = 0.235;$$

$$C_5 = -0.03$$

The point anamorphosis $\varphi(y) = \sum_0^5 \frac{\psi_n}{n!} H_n(y)$ allows the immediate computing of the mean value of the D.K distribution $f_{DK}(y)$:

$$Z_V^{DK} = \int \varphi(y) f_{DK}(y) dy \quad \text{with} \quad f_{DK}(y) = \sum_{n=0}^5 \frac{C_n}{n!} H_n(y) g(y)$$

$$\text{so} \quad Z_V^{DK} = \sum_{n=0}^5 \frac{\psi_n}{n!} C_n$$

With the numerical values seen above, we find $Z_V^* = 1.685$ (true value $Z_V = 1.466$).

We see in Fig. 5 the histogram corresponding to our $f_{DK}(y)$. To compute it, we determine the y_i corresponding to the limits of class $z_i = 0,5, 1, 1.5, \text{etc.}$ by $y_i = (\log z_i)/0.8485$, and then the frequency p_i of class i will be $p_i = F_{DK}(y_{i+1}) - F_{DK}(y_i)$.

The cumulative distribution $F_{DK}(y)$ is obtained by integration of the density $f_{DK}(y)$.

$$F_{DK}(y) = \int_{-\infty}^y f_{DK}(y) dy \quad \text{or} :$$

$$F(y) = G(y) + g(y) \sum_{n=0}^4 \frac{C_{n+1}}{n+1} \frac{H_n(y)}{n!} \quad \text{with}$$

$$G(y) = \int_{-\infty}^y g(y) dy$$

This density function immediately gives the estimation of the proportion of points in the classes $(0 - 0,5)$, $(0,5 - 1.2)$, $(1.2 - +\infty)$.

$$P(0 - 0.5) = F_{DK}(y_{0.5})$$

$$P(0.5 - 1.2) = F_{DK}(y_{1.2}) - F_{DK}(y_{0.5})$$

$$P(1.2 - +\infty) = 1 - F_{DK}(y_{1.2})$$

We compute the quantity of metal in a class by the cumulative quantity of metal

$$Q(y) = \int_y^{+\infty} \varphi(y) f_{DK}(y) dy$$

With $\varphi(y) = e^{\sigma y}$, The result is straightforward :

$$Q(y) = \sum_{n=0}^5 \frac{C_n d_n(y)}{n!} \quad d_n \text{ being computed by recurrence :}$$

$$d_0 = e^{\sigma^2/2} [1 - G(y-\sigma)] \quad \text{and} \quad d_n(y) = -\sigma d_{n-1}(y) - e^{\sigma^2/2} g(y-\sigma) H_{n-1}(y)$$

In conclusion, we give in the following table the results of estimation for the block of Fig. 5.

As forecast, the best estimator (but very time-consuming) is the true conditional expectation, followed by D.K and G.M. This can be checked also on the results of table 2. For that precise block, which we chose for the great variability of the surrounding grades, we may suppose that the block is just limited by high and low grade panels, so that its internal distribution will deviate largely from the average histogram of the samples : this is what appears on the histogram of Fig. 5.

4.2 T.F function of blocks of copper ore.

In (4), I present the study of the Chuquicamata orebody : in an already mined zone, it was possible to check the results of T.F function estimation with the true grades (as given by the blast holes). Fig. 7 shows the experimental histogram of mineable blocks of 20 X 20 X 13 m. in the studied zone, and the histogram estimated with the DDH information. As the individual grade of each DDH was not available the T.F was estimated by conditionalization of the kriged values and that is why the result is not as precise as it ought to be. However, this histogram was estimated with DDH samples located irregularly with a mean interdistance of 60 m.:

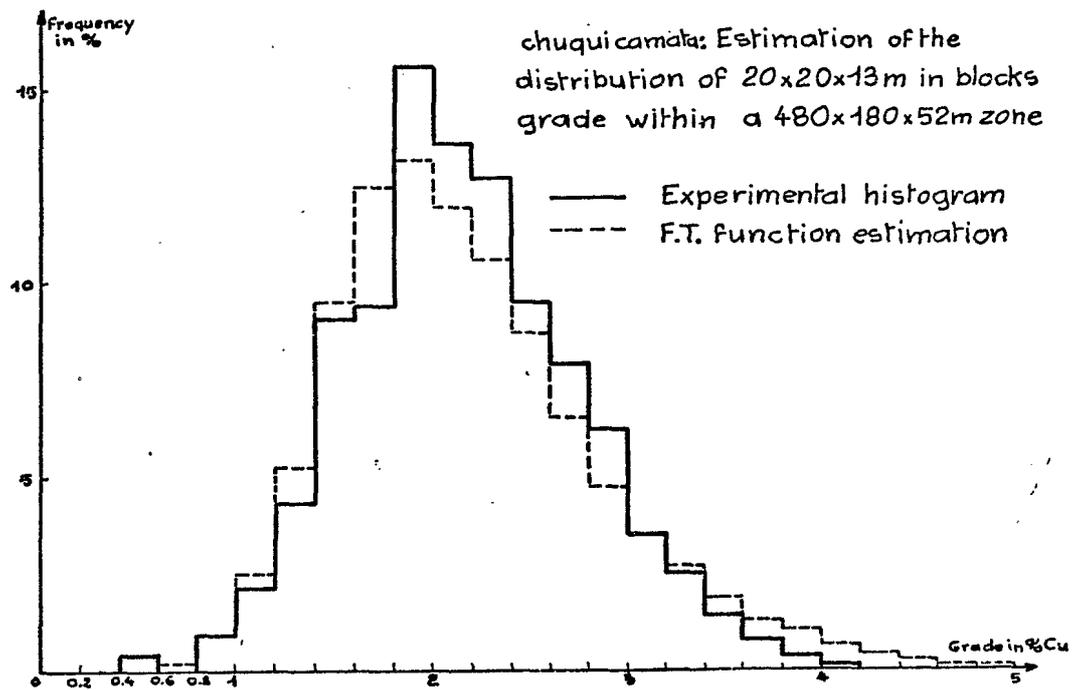


Fig. 6

Estimator	P_1	Q_1	P_2	Q_2	P_3	Q_3	m
CO.E	20.7	0.0704	38.2	0.312	41.2	0.999	1.381
G.M	2.2	0.0089	21.8	0.194	76.	2.1812	2.384
D.K	24.2	0.078	31.7	0.2445	44.1	1.3625	1.685
TRUE	17.4	0.067	34.7	0.264	47.9	1.116	1.446

TABLE 1

P_1, P_2, P_3 : Proportions in classes (0-0.5), (0.5-1.2) (1.2- $+\infty$)

Q_1, Q_2, Q_3 :Quantity of metal in the same classes.

T.F ESTIMATES OF A LINE OF BLOCKS : PROPORTION AND MEAN ORE GRADE
 OF POINTS IN THE CLASSES OF GRADE : 0-0.5 ; 0.5-1.2 ; 1.2- + ;
 $P_1, m_1, P_2, m_2, P_3, m_3$ respectively with M, mean panel grade.

Estimator	P_1	m_1	P_2	m_2	P_3	m_3	M
CO.E	.7927	.2756	.1968	.6860	.0106	1.4826	.3691
G.M	.8041	.2532	.1813	.6979	.0146	1.5630	.3530
TRUE	.8512	.3054	.1405	.7035	.0083	1.4843	.3711
CO.E	.7724	.2808	.2150	.6902	.0126	1.4941	.3842
G.M	.7814	.2597	.2007	.7027	.0178	1.5785	.3721
TRUE	.9587	.2814	.0413	.5177	.0000	.0000	.2911
CO.E	.7939	.2829	.1974	.6796	.0086	1.4508	.3713
G.M	.8085	.2519	.1775	.6969	.0141	1.5597	.3493
TRUE	.9091	.2676	.0826	.5702	.0083	1.4395	.3023
CO.E	.8680	.2593	.1282	.6615	.0038	1.3653	.3151
G.M	.8551	.2362	.1362	.6862	.0087	1.5140	.3086
TRUE	.9421	.2500	.0579	.5611	.0000	.0000	.2680
CO.E	.4706	.3279	.4408	.7484	.0887	1.6568	.6331
G.M	.4181	.3287	.4491	.7668	.1329	1.7510	.7144
TRUE	.4050	.3642	.4380	.7947	.1570	1.6143	.7491
CO.E	.0408	.3959	.2783	.8710	.6809	2.7261	2.1148
G.M	.0107	.4681	.1532	.9028	.8631	3.2496	2.8603
TRUE	.1240	.3948	.3802	.8739	.4959	2.4181	1.5802
CO.E	.0004	.6619	.0200	.9983	.9795	5.6722	5.5764
G.M	.0003	1.0288	.0110	1.1163	.9887	6.8330	6.7683
TRUE	.0000	.0000	.0909	.9724	.9091	4.2727	3.9727
CO.E	.0020	.5453	.0691	.9517	.9289	3.7152	3.5181
G.M	.0027	.6029	.0648	.9318	.9326	4.2490	4.0245
TRUE	.0000	.0000	.0496	1.0442	.9504	3.6943	3.5628

TABLE 2

the result may then be considered as satisfactory.

4.3 Histogram of a random measure.

In the following example, the variable to be estimated is a discrete random measure, i.e. a random quantity which takes integer values when measured on a surface : in a tropical forest, a specialist has counted the okoume trees of each square panel of 100 x 100 m., giving a total of more than 2000 numbers, ranking from zero to 13 trees per hectares. In Fig. 6 one can see the histogram of these measures, which could correspond to a randomized type of Poisson distribution. The random quantity being discrete, it seems inappropriate to use a continuous Gaussian anamorphosis model, and that it would be better to establish a correspondence with a discrete isofactorial variable : this possibility has already been studied theoretically by Matheron [5], but no practical study was made. Thus we tried, with our Hermitian formulae, to forecast the histogram of the density of Okoumé tree/ha on panels of larger surface. The same procedure as described before was adopted : definition of a point anamorphosis function (in our case, a sum of step functions), calculus of its Fourier coefficient for an expansion in Hermite polynomials, then transformation to give the anamorphosis φ_v of the large panels. We see in Fig. 7, that the result is not so good as in our preceding examples, although the variances are correct and the movement of the mode appears also in the theoretical model. My personal opinion is that the Gaussian anamorphosis is inadequate for a discrete variable, or must be performed with an expansion in polynomials of very high degree (to represent adequately the discontinuities of the step function) : our calculus was made with polynoms of degree 6, which was surely insufficient.

I decided to include this particular example in my paper to emphasize the fact that T.F may be applied to many domains in addition to mining, although special methods had to be developed for particular types of variables.

5. CONCLUSION

The aim of the present paper was to show that T.F estimation is already an operational method : although the formulation of the method is quite recent (Matheron, Maréchal, 1974), there were no special difficulties in its application, at least in academic problems. The practical difficulties will not be of computational type (although it will be necessary to make some effort to simplify the programs) ; they will appear, for instance, when defining with precision the volume of selection and its future estimate ; this will require some practice, because selection when mining is not

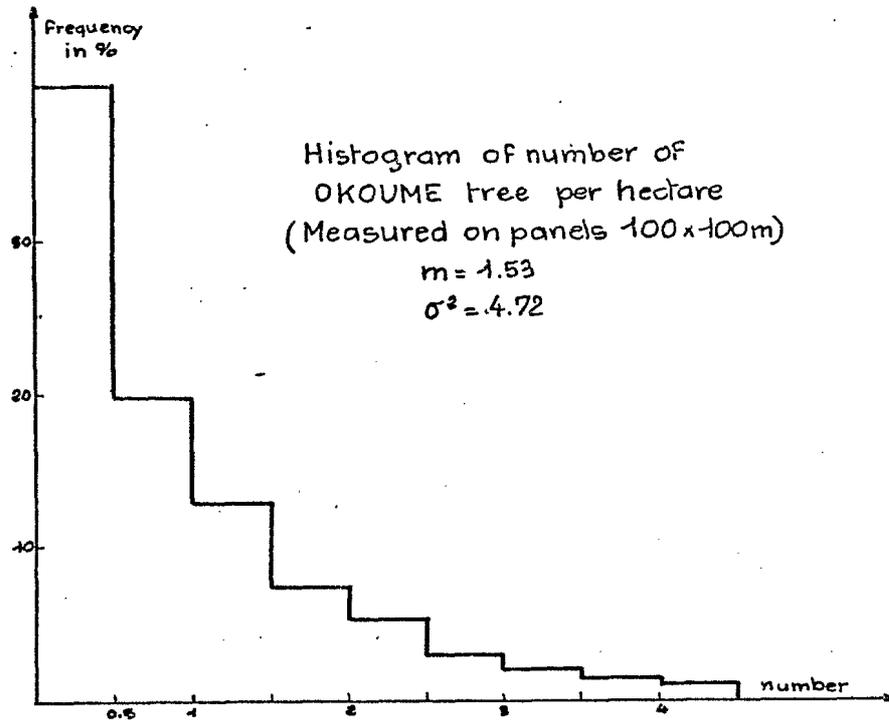


Fig. 7a

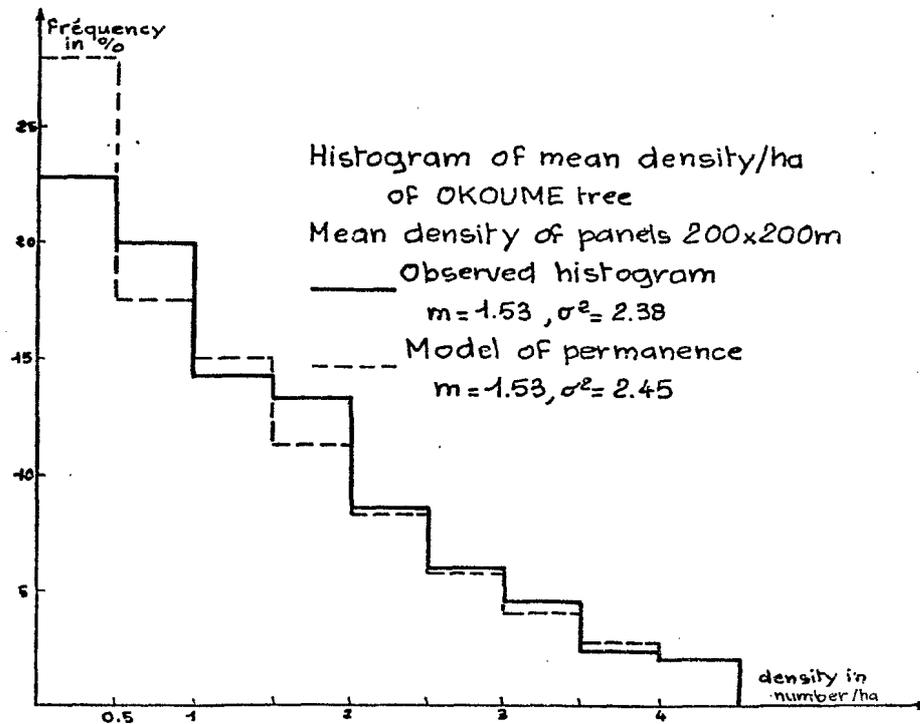


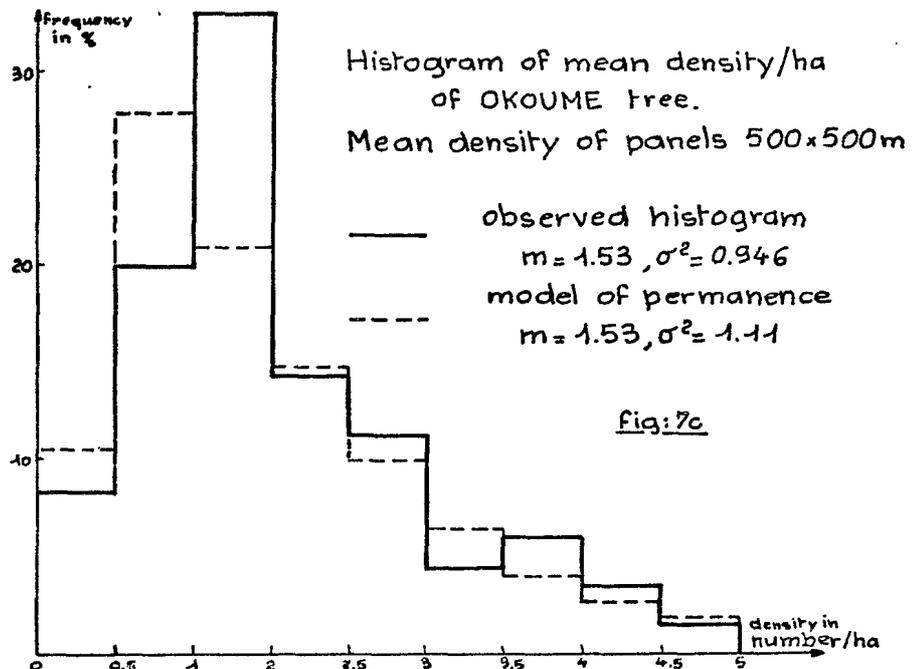
Fig. 7b

usually made on constant volumes.

However, no doubt that T.F estimation will soon become an indispensable tool in estimation procedures, especially for those orebodies which present very variable types of grade (iron orebody for instance). Moreover, it must be emphasized that this method is fully compatible with the conditional simulation technique which shares with it the same anamorphosis representation : according to the precise problem, an anamorphosis study may lead either to a T.F function estimation or to a simulation.

REFERENCES.

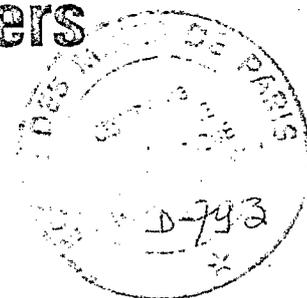
1. MATHERON, G. (1975) "Transfer functions and their estimations" Proceedings of NATO A.S.I., Rome.
2. MARECHAL, A. (1974) "Généralités sur les fonctions de transfert". Note interne, Centre de Morphologie Mathématique, Fontainebleau.
3. MARECHAL, A. (1975) "Analyse numérique des anamorphoses Gaussiennes". Note interne, Centre de Morphologie Mathématique, Fontainebleau.
4. MARECHAL, A. (1975) "Forecasting a grade-tonnage distribution for various panel sizes". 13th APCOM Conference, Clausthal, Germany, October 1975.
5. MATHERON, G. (1975) "Les fonctions de transfert des petits panneaux". Note interne Centre de Morphologie Mathématique, Fontainebleau.



Simulation de gisements miniers

par A.G. JOURNEL

Ingénieur civil des Mines
Maître de Recherches au Centre de Morphologie Mathématique



SOMMAIRE

Une fois défini un certain schéma d'exploitation de sélection, il ne suffit pas de connaître les estimations globales ou locales (panneau par panneau) : réserves sélectionnées. Il est essentiel pour le mineur comme pour le chimiste de prévoir les fluctuations des caractéristiques de ces réserves à l'issue de l'exploitation :

situations des teneurs en impureté

fluctuations des puissances de découverte, par exemple fluctuations quotidiennes, mensuelles, trimestrielles, etc...

Or, précisément tout estimateur lisse la réalité, ne permet donc pas d'étudier les fluctuations des caractéristiques du minerai à l'entrée-laverie, par exemple.

La géostatistique propose alors de simuler un nouveau gisement qui n'est pas une estimation lissée du gisement réel, mais plutôt une nouvelle réalisation du même phénomène minéralisée. Ce nouveau gisement

présentera les mêmes caractéristiques structurales et de dispersion que le gisement réel,

retrouvera aux points d'implantation des sondages les données (teneurs, puissances, etc...) du gisement réel.

Ce nouveau gisement sera connu à une maille aussi fine que l'on veut. On pourra donc simuler sur lui n'importe quel procédé et séquence d'exploitation et étudier les conséquences de cette exploitation à l'entrée-laverie par exemple (fluctuations de teneurs).

1. OBJECTIF D'UNE SIMULATION

L'étude des réserves récupérées donne une estimation globale des caractéristiques du minerai récupéré et parfois permet même de localiser ces réserves dans le gisement. On décide alors d'ouvrir le gisement G ou d'exploiter tel quartier jugé favorable

$g \in G$. Cependant pour un certain nombre de problèmes de dimensionnement des installations cette information ne suffit pas. Il faut encore connaître les fluctuations à diverses échelles (jour — mois — an, etc...) des caractéristiques de ce minerai récupéré g ; en effet les fluctuations de la caractéristique taux de découverte influencera le choix de l'outil de production, les fluctuations des caractéristiques teneurs décideront de la nécessité d'une aire d'homogénéisation ou de la souplesse de l'usine de traitement. Il faut donc connaître, par exemple les flux de teneurs, conséquences de tel ou tel procédé d'exploitation ou d'homogénéisation. Cette fois on ne peut plus se contenter de teneurs estimées car « tout estimateur lissant la réalité » (cf. la relation de lissage), les fluctuations réelles seront dangereusement lissées et l'on pourrait conclure à tort en une très grande homogénéité du minerai. A défaut de connaître parfaitement la réalité, et puisque son estimation future ne peut restituer les fluctuations réelles des caractéristiques, l'idée est de simuler cette réalité. Cette simulation ne cherchant pas à estimer, c'est-à-dire à approcher au mieux chaque valeur réelle, mais à identifier toutes les dispersions de ces valeurs réelles entre elles.

2. RAPPELS

Afin de bien comprendre en quoi une simulation diffère d'une estimation, il est bon de rappeler brièvement quelques concepts de base.

2.1. Notion de F.A.

Le gisement G est constitué d'une infinité de teneurs vraies ponctuelles en général inconnues :

$$\{z_0(x), x \in X\} \text{ cf. figure 1.}$$

Considérons une ligne quelconque dans G , la courbe des teneurs vraies $z_0(x)$ est une courbe en dents de scie mais présentant certaines caractéristiques structurales. De la courbe $z_0(x)$ on ne connaît que certaines valeurs $z_0(x_i)$, $i \in I$ par exemple aux nœuds d'une maille régulière. On sait que le variogramme expé-

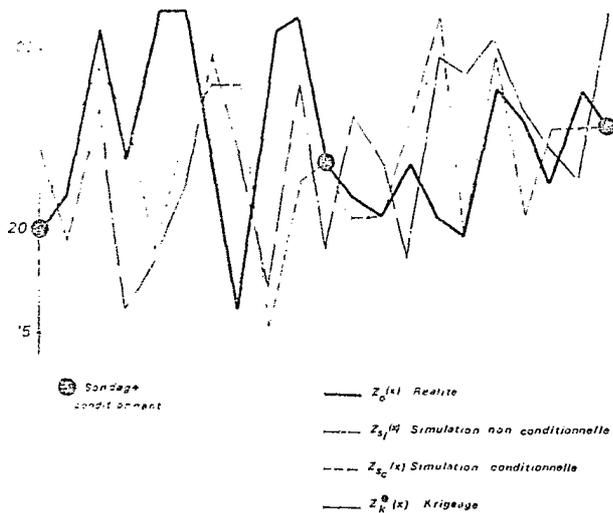


Fig. 1. — Réalité et simulations

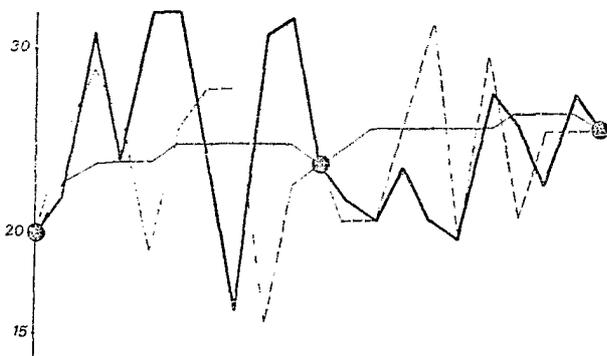


Fig. 2. — Réalité - Simulation - Krigeage

mentale $2\gamma_o(h)$ déduit de ces données $z_o(x_i)$ caractérise la structure de la courbe $z_o(x)$.

Cette courbe $z(x)$ peut être interprétée comme une réalisation particulière d'une F.A. $Z(x)$ caractérisée par le variogramme précédent $2\gamma_o(h)$. En quelque sorte la F.A. $Z(x)$ est un sac qui contient une infinité de courbes $z(x)$, différentes point par point $z_s(x) \neq z_o(x)$ mais telles que leurs variogrammes respectifs sont tous identiques au variogramme expérimental : $2\gamma_s(h) = 2\gamma_o(h) \quad \forall s, \forall h$. La réalité $z_o(x)$ n'est qu'une courbe particulière parmi cette infinité de courbes. Tirons en une quelconque, soit $z_s(x)$ et figurons la. On voit que si $z_s(x) \neq z_o(x)$ point par point les structures sous-jacentes aux 2 courbes sont identiques, en particulier la dispersion des $z_s(x)$, c'est-à-dire l'aspect en dents de scie de $z_s(x)$, est identique à la dispersion des $z_o(x)$.

2.2. Variances de dispersion

On peut caractériser la dispersion des teneurs vrais $z(x)$ dans un certain domaine $V \subset G$ par une variance dite de dispersion :

$$D_o^2 = E \{ [z_o(x) - m]^2 \}$$

si m est la moyenne des teneurs $z_o(x)$ dans V .

La géostatistique démontre que cette variance dispersion des teneurs ponctuelles dans V s'exprime uniquement en fonction du $1/2$ variogramme γ_o :

$$D_o^2 = \bar{\gamma}_o(V, V)$$

$\bar{\gamma}_o$ désignant une valeur moyenne de γ_o .

De même la dispersion des teneurs $z_s(x)$ dans même domaine V est caractérisée par la variance dispersion :

$$D_s^2 = E \{ [z_s(x) - m]^2 \}$$

Les moyennes des 2 réalisations $z_o(x)$ et $z_s(x)$ sont identiques = m . La géostatistique calcule cette variance :

$$D_s^2 = \bar{\gamma}_s(V, V) = \bar{\gamma}_o(V, V) = D_o^2 \quad \forall \text{ le volume}$$

Ainsi, bien que $z_s(x) \neq z_o(x)$ point par point, variances de dispersion des 2 réalisations $z_s(x)$ et $z_o(x)$ sont identiques. On dit que la réalisation $z_s(x)$ est une *simulation* de la réalité $z_o(x)$. Cette simulation $z_s(x)$ a l'avantage énorme de pouvoir être construite en tous les points x et non pas seulement aux nœuds de la maille réelle $\{x_i, i \in I\}$.

Conditionnalisation : Mais il y a dans le sac représentant la F.A. $Z(x)$ une infinité de réalisations possibles $z_{s_l}(x), l = 1, 2, \dots \infty$. Laquelle choisir ? Nous choisirons celles qui passent par les points expérimentaux x : c'est-à-dire les réalisations $z_{s_c}(x)$ qui identifient les données expérimentales (cf. figure 1) :

$$z_{s_c}(x_i) = z_o(x_i) \quad \forall i \in I$$

Cette simulation particulière $z_{s_c}(x)$ est dite : « *simulation conditionnelle* » aux données expérimentales. On voit que $z_{s_c}(x)$ sans être la réalité $z_o(x)$ est une nouvelle réalisation du même phénomène mis en évidence par les données expérimentales $Z(x)$.

2.3. Variances d'estimation

Ne peut-on alors considérer $z_{s_c}(x)$ comme un estimateur de la réalité inconnue $z_o(x)$? En effet $z_{s_c}(x)$ est un estimateur parmi d'autres $z_{s_l}(x)$ de la réalité $z_o(x)$; de plus il est exact, c'est-à-dire que l'estimation se confond avec la réalité aux points d'implantation des sondages : $z_{s_c}(x_i) = z_o(x_i)$ et il est sans biais :

$$E \{ z_{s_c}(x) \} = E \{ z_o(x) \} = m$$

$$\rightarrow E \{ z_{s_c}(x) - z_o(x) \} = 0 \text{ erreur nulle en moyenne}$$

Mais si $z_{s_c}(x)$ est un estimateur exact et sans biais, il n'est pas le meilleur estimateur exact et sans biais possible. On caractérise la qualité d'un estimateur sans biais par la variance d'estimation, ou erreur quadratique moyenne :

$$\text{Pour } z_{s_c} : \sigma_{s_c}^2 = E \{ [z_{s_c}(x) - z_o(x)]^2 \}$$

Or le krigeage, par définition, fournit un estimateur $z_k^*(x)$ exact, sans biais et de variance d'estimation minimale

$$\sigma_k^2 = E \{ [z_k^*(x) - z_o(x)]^2 \} \text{ minimal}$$

$$\text{Donc } \sigma_k^2 < \sigma_{s_c}^2$$

En moyenne la valeur krigée $z_K^*(x)$ approche mieux la réalité $z_o(x)$ que la valeur simulée $z_s(x)$ (cf. figure 3). Mais la courbe krigée $z_K^*(x)$ n'a aucune raison de refléter les mêmes caractéristiques structurales que la courbe réelle $z_o(x)$: on sait en particulier que le krigeage lisse les dispersions réelles (cf. Relation de Lissage — 1ère conférence). La variance de dispersion D_{K^*} des valeurs krigées autour de la moyenne m est inférieure à la variance de dispersion des valeurs réelles :

$$\sigma^2 = E\{[z_K^*(x) - m]^2\} < D_o^2 = E\{[z_o(x) - m]^2\}$$

Les deux moyennes m sont identiques du fait du caractère sans biais.

On voit combien est essentielle la distinction entre les 2 variances de dispersion D^2 et d'estimation. Suivant que l'on s'intéresse à l'une ou à l'autre, on utilisera la simulation $z_s(x)$ ou le krigeage $z_K^*(x)$ (figure 3) :

La simulation $z_s(x)$ identifie les caractéristiques structurales, en particulier toutes les variances de dispersion D_o^2 . L'utilisation de la simulation $z_s(x)$ est particulièrement indiquée dans les études de situations des caractéristiques d'un minéral.

Le krigeage $z_K^*(x)$ minimise la variance d'estimation σ^2 . Son utilisation est donc particulièrement indiquée dans les problèmes d'estimation globale ou locale des ressources et des réserves.

Simulation $z_s(x)$	moyenne $m = E\{z_s(x)\}$ dispersion $D^2_{z_s} = D_o^2$ 1/2 vario. $\gamma_{z_s}(h) = \gamma_o(h)$ conditionnelle $z_s(x_i) = z_o(x_i)$ $i \in I$
------------------------	---

Réalité $z_o(x)$	moyenne : $m = E\{z_o(x)\}$ dispersion : D_o^2 1.2 vario. : $\gamma_o(h)$ donnée : $z_o(x_i), i \in I$
---------------------	---

Krigeage $z_K^*(x)$	moyenne $m = E\{z_K^*(x)\}$ dispersion $D_{K^*}^2 < D_o^2$ 1/2 vario. $\gamma_{K^*}(h) \neq \gamma_o(h)$ exact $z_K^*(x_i) = z_o(x_i)$ estimateur optimal $\sigma_K^2 \forall i \in I$
------------------------	--

Fig. 3

3. TECHNIQUE DE LA SIMULATION

Comment obtient-on cette simulation conditionnelle $z_s(x)$?

Indiquons les principales étapes pratiques de l'élaboration de $z_s(x)$.

3.1. Analyse structurale

A l'aide des données disponibles $z_o(x_i) i \in I$, on caractérise d'abord la structure spatiale des $z_o(x)$ par l'intermédiaire de sa covariance ou de son vario-

gramme $2\gamma_o(h)$. Eventuellement si la simulation projetée doit tenir compte de corrélations entre diverses variables, $z_o(x)$ et $y_o(x)$ par ex., l'étude structurale caractérisera ces corrélations : coefficients de corrélation, régressions diverses, variogrammes croisés, etc...

3.2. Simulation non conditionnelle

Diverses techniques probabilistes permettent de simuler des réalisations $z_s(x)$ de F.A. présentant

- un moment d'ordre 1 (moyenne)
 - un moment d'ordre 2 (covariance ou variogramme)
- } fixés.

Ces techniques utilisent en général des moyennes mobiles que l'on promène sur un champ de dispersion poissonnienne. Leur utilisation devient très vite rédhibitoire dès que l'on sort de l'espace à 2 dimensions. La technique mise au point au Centre de Morphologie est originale en ce sens qu'elle ramène toute simulation à 3 dimensions à une simulation simple à une dimension sur un certain nombre de droites que l'on fait ensuite tourner dans l'espace : méthode des bandes tournantes.

Cette méthode permet d'obtenir avec des coûts d'ordinateur acceptables, une réalisation particulière $z_s(x)$ d'une F.A. conditionnée par ses 2 premiers moments : moyenne et variogramme. Cette simulation $z_s(x)$ est connue discrètement en les nœuds d'une maille aussi fine que l'on veut.

3.3. Conditionnalisation

La simulation $z_s(x)$ n'est pas conditionnelle c'est-à-dire que l'on a pas : $z_s(x_i) = z_o(x) \forall i \in I$. La solution de la conditionnalisation est assez triviale : en quoi un krigeage $z_K^*(x)$ diffère de la vraie valeur $z_o(x)$, elle en diffère par l'erreur $z_o(x) - z_K^*(x)$:

$$z_o(x) = z_K^*(x) + \{z_o(x) - z_K^*(x)\} = z_K^*(x) + \varepsilon_o(x)$$

On connaît $z_K^*(x)$ mais l'on ne connaît pas l'erreur. Simulons donc cette erreur $\varepsilon_o(x)$ par $\varepsilon_s(x)$:

$$\varepsilon_s(x) = z_s(x) - z_{sK^*}(x)$$

$z_s(x)$ est la simulation non conditionnelle précédente.

$z_{sK^*}(x)$ est le krigeage établi à partir des données simulées $z_s(x_i)$ implantés aux mêmes points $\{x_i, i \in I\}$ que les données réelles.

La réalisation obtenue :

$z_{s_c}(x) = z_K^*(x) + \varepsilon_s(x)$
--

est cette fois conditionnelle :

$$\forall i \in I \quad z_s(x_i) = z_K^*(x_i) + \{z_s(x_i) - z_{sK^*}(x_i)\} = z_o(x_i)$$

Les 2 krigeages sont exacts.

Et l'on démontre que cette simulation conditionnelle ainsi obtenue $z_{s_c}(x)$ possède la même structure que

$z_0(x)$, c'est-à-dire que la réalité $z_0(x)$: mêmes moyenne et variogramme, donc mêmes dispersions.

Remarque: l'élaboration de la simulation conditionnelle $z_c(x)$ suppose le krigeage préalable $z_k^*(x)$ en chaque point x .

3.4. Anamorphoses gaussiennes

La simulation conditionnelle $z_c(x)$ et plus généralement les simulations non conditionnelles $z_s(x)$ identifie les 2 premiers moments de la réalité $z_0(x)$. Mais qu'en est-il du type de l'histogramme de dispersion ?

— Sous l'hypothèse de stationnarité dans laquelle nous nous plaçons, à partir des données expérimentales $\{z_0(x_i), i \in I\}$ on peut tracer l'histogramme expérimental des $z_0(x)$ qui est par exemple de type gamma ou Log-normal.

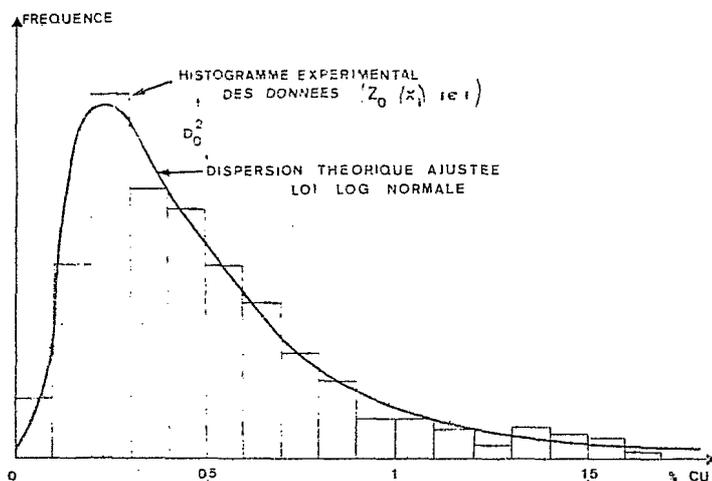


Fig. 4. — Anamorphose gaussienne

— Par conséquent du procédé de simulation par la méthode des bandes tournantes, la loi de dispersion des $z_c(x)$ est normale tout en présentant les mêmes deux premiers moments que $z_0(x)$.

— Pour identifier les deux types de lois de dispersion, on procède à une anamorphose gaussienne préalable, c'est-à-dire qu'au lieu de simuler $z_0(x)$ on simule sa transformée $y_c(x) = F.z_0(x)$ telle que cette transformée $y_c(x)$ présente un histogramme gaussien. Soit $y_c(x)$ cette simulation, la transformation inverse F^{-1} restitue la simulation cherchée $z_c(x) = F^{-1}.y_c(x)$ qui présente cette fois le bon histogramme.

Sur la figure 4, la dispersion expérimentale des $z_0(x)$ est log-normale, on simulera $\text{Log } z_0(x)$ qui présente une dispersion normale. Soit $y_c(x)$ cette simulation, la simulation cherchée est :

$$z_c(x) = \exp.\{y_c(x)\}$$

$z_c(x)$ présente une dispersion Log-normale puisque son Logarithme a une dispersion normale.

En résumé notre simulation conditionnelle $z_c(x)$ retrouve :

- les 2 premiers moments, moyenne et variogramme, donc les variances de dispersion de la réalité,
- l'histogramme de dispersion expérimental de réalité,
- les valeurs de cette réalité en les points d'implantation des sondages,
- de plus, si l'on simule plusieurs variables corrélées, leurs simulations retrouveront ces corrélations.

Citons l'exemple des simulations conditionnelles que nous avons réalisées sur le gisement de Prony

4. EXEMPLE : GISEMENT DE PRONY (NOUVELLE-CALÉDONIE)

Sur le gisement de Prony on disposait sur la 1^{ère} zone de production d'une maille de sondages $100 \text{ m} \times 100 \text{ m}$ (cf. figure 5). Les données de chacun de ces sondages permettent le calcul d'une courbe de dérive ou de « tendance moyenne » représentative des teneurs des tranches sdz d'un petit panneau centré sur le sondage x . A partir de cette courbe dérive et pour chaque valeur du paramètre t = teneur de coupure en Nickel, on définit un certain nombre de variables utiles $X(t, x), Y(t, x)$... par exemple puissance minéralisée $X(t, x)$, la teneur Ni correspondante $Y(t, x)$. Ces variables utiles ne sont connues qu'aux points d'implantation $x_j \in J$ de chacun des sondages à maille de 100 m , soient $X(t, x_j), Y(t, x_j) j \in J \subset G$.

Nous les avons simulées en tous les nœuds d'une maille carrée de $10 \text{ m} \times 10 \text{ m}$, soit une maille 10 fois plus dense. Cette simulation $X_s(t, x_i), Y_s(t, x_i) i \in I$ est conditionnelle aux structures des régions horizontales des $X(t, x_j)$ et $Y(t, x_j)$: moyennes-variances-variogrammes-corrélations.

- aux histogrammes expérimentaux des $X(t, x_j), Y(t, x_j)$
- aux données expérimentales de la maille J 100 m

$$\forall j \in J \quad X_s(t, x_j) = X(t, x_j) \text{ donnée}$$

Nous avons ainsi simulé 17 600 sondages, comportant chacun 24 informations qui sont, pour chacun, des 4 valeurs de la teneur de coupure $t = 0 \%$ (p de coupure) 0,8 %, 1 % et 1,2 % Ni, les 6 variables utiles suivantes :

- puissance de découverte,
- puissance et teneur Ni du 1^{er} minerai latéritique,
- puissance et teneur Ni du 2^{ème} minerai silicaté,
- teneur en impureté Mg correspondant à l'ensemble des deux minerais.

17 600 sondages \times 24 informations : 1 heure d'ordinateur aura suffi à fournir une information équivalente à 17 600 sondages, équivalente quant aux fluctuations des caractéristiques du minerai.

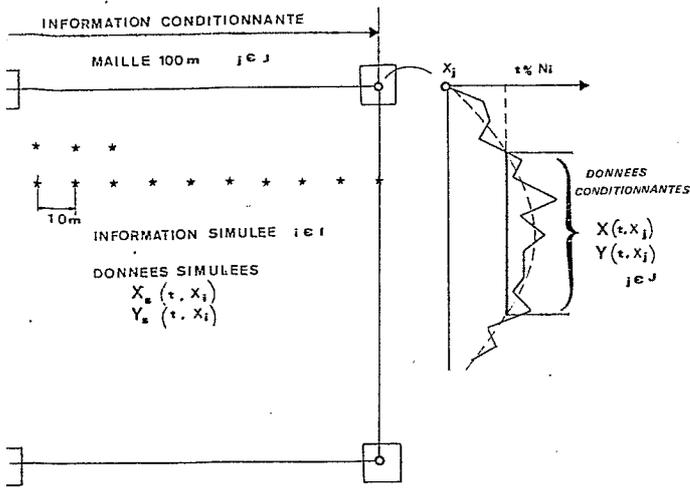


Fig. 5. — Simulation de Prony

- les 2 histogrammes de dispersion expérimental et simulé
- les 2 1/2 variogrammes théorique et simulé (déduit des 17 600 valeurs simulées).

5. UTILISATIONS DES SIMULATIONS

On dispose ainsi sur une certaine zone de production des valeurs simulées des caractéristiques utiles du minerai (teneurs par ex.) aux nœuds d'une maille extrêmement fine. C'est-à-dire que l'on connaît le gisement simulé quasiment parfaitement. En regroupant ces valeurs ponctuelles simulées on dispose d'estimateurs quasiment parfaits des teneurs moyennes simulées de panneaux de taille que l'on veut et implantés de façon quelconque (on peut aussi simuler directement ces teneurs de panneaux).

On peut donc appliquer sur ce gisement simulé un schéma d'exploitation quelconque. On connaîtra exactement les caractéristiques du minerai extrait, en particulier les fluctuations quotidiennes, mensuelles, trimestrielles, etc... des teneurs de ce minerai, ou des puissances de découverte. On peut donc adapter le procédé d'exploitation ou d'homogénéisation pour contrôler ces fluctuations. Il est possible par exemple que l'établissement de plusieurs chantiers de rythmes d'exploitation programmés puissent éviter le coût d'une aire d'homogénéisation ; on conserverait alors uniquement un parc de stockage qui coûte bien moins cher. L'étude des fluctuations à l'échelle d'une journée des puissances de découverte et minéralisée permettra par exemple d'adapter la souplesse de l'outil de production. Etc...

Présentons quelques résultats et critiquons les : La figure 6 montre, pour $t = 0\%$ Ni (pas de couche de teneur au toit et au mur), le 1/2 variogramme théorique $\gamma(h)$ ajusté aux points expérimentaux correspondant à la variable $X(O, x) =$ puissance de minerai latéritique.

Nous avons simulé une variable $X_s(O, x)$ présentant un 1/2 variogramme théorique $\gamma(h)$, une moyenne $m = 23,8$ et une variance de dispersion relative $\sigma^2 = 0,08$ définies sur le champ à simuler.

La figure 6 donne à titre de vérification :

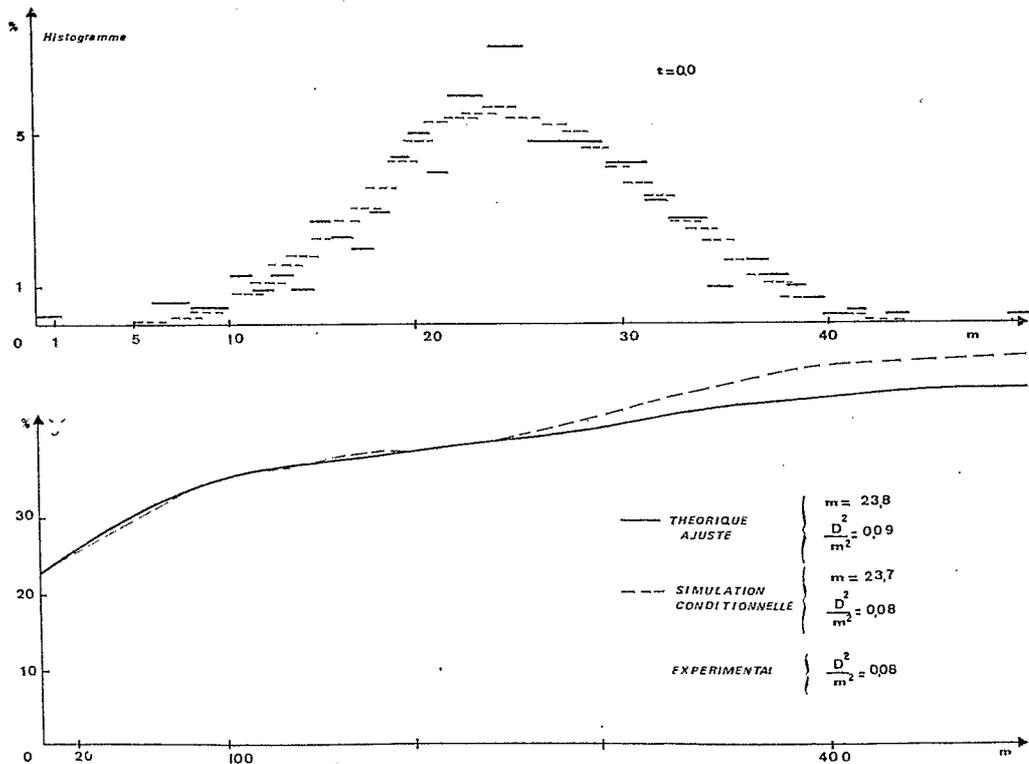


Fig. 6. — Puissance minerai latéritique

PRINCIPALES INTERVENTIONS

Question 1 : La simulation conditionnelle d'un gisement dispenserait-elle de reconnaître correctement ce gisement par sondages ?

Réponse : Absolument pas. Avant de simuler un gisement il faut d'abord bien le connaître pour savoir ce que l'on cherche à simuler. En particulier les structures des régionalisations des variables utiles doivent être reconnues (histogrammes — moyennes — variogrammes — corrélations — dérivées, etc.) avant de pouvoir être simulées, et ceci exige une reconnaissance systématique préalable du gisement par sondages ou autres travaux miniers. De plus une simulation $z_s(x)$ n'a pas la vocation d'être un estimateur de la réalité $z_o(x)$, c'est le krigeage $z_K^*(x)$ qui est le meilleur estimateur de cette réalité (cf. figure 2). Ce krigeage $z_K^*(x)$ approchera d'autant mieux la réalité $z_o(x)$ que l'on disposera de plus de sondages ou d'informations. Pour estimer les réserves récupérées ainsi que pour tracer les plans d'exploitation, on doit travailler sur les estimateurs $z_K^*(x)$ et en aucun cas sur les simulations $z_s(x)$.

Question 2 : Les simulations non conditionnelles $z_{s_j}(x)$ identifient déjà les structures et les dispersions de la réalité $z_o(x)$. Pour les études de fluctuations des caractéristiques d'un minerai ne pourrait-on pas se contenter de ces simulations non conditionnelles $z_{s_j}(x)$? Quelle est l'utilité de la conditionnalisation aux données réelles : $z_{s_c}(x) = z_o(x) \quad \forall j \in J$?
données

Réponse : En effet si l'on s'intéresse aux fluctuations des caractéristiques à l'échelle du gisement entier on peut se contenter d'une simulation non conditionnelle. Mais en général les simulations seront utilisées pour étudier des fluctuations à toute échelle, en particulier à l'échelle du petit panneau de production, il est alors intéressant que cette simulation retrouve aux endroits réels les panneaux riches et les panneaux pauvres, c'est-à-dire que la simulation soit conditionnelle. Dans un problème comme celui de la gestion de plusieurs chantiers d'exploitation, il est essentiel que la simulation utilisée ait une signification locale la plus proche possible de la réalité en place, c'est-à-dire que la simulation soit conditionnelle.

Question 3 : La simulation conditionnelle $z_{s_c}(x)$, sans être un estimateur optimal de la réalité $z_o(x)$, est un estimateur exact et sans biais de cette réalité. Ne pourrait-on pas se dispenser du krigeage $z_K^*(x)$ dans certains cas ?

Réponse : La construction de la simulation conditionnelle $z_{s_c}(x) = z_K^*(x) + \varepsilon_s(x)$ exige de toutes façons le krigeage préalable $z_K^*(x)$. On démontre que la variance d'estimation par $z_{s_c}(x)$ est exactement le double de la variance de krigeage :
 $\sigma_{s_c}^2 = E\{[z_{s_c}(x) - z_o(x)]^2\} = 2 \sigma_K^2 = 2 E\{[z_K^*(x) - z_o(x)]^2\}$

Question 4 : La simulation conditionnelle $z_{s_c}(x)$ est-elle unique ?

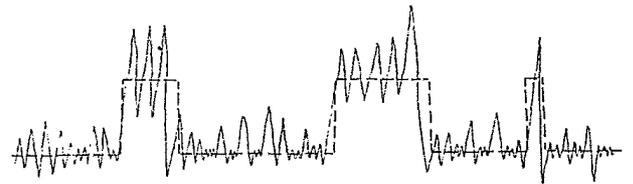
Réponse : Absolument pas. De même qu'il existe une infinité $\{z_{s_j}(x), 1=1,2,\dots,N\}$ de simulations non conditionnelles possibles sur lesquelles on peut simuler une infinité d'erreur $\varepsilon_{s_j}(x)$,

il existe une infinité de simulations conditionnelles $z_{s_c}(x)$ possibles. Il peut parfois être intéressant de travailler sur plusieurs de ces simulations conditionnelles possibles, toutes ces simulations étant des variantes différentes du même phénomène minéralisé $Z(x)$.

Question 5 : La conditionnalisation à l'histogramme expérimental des données disponibles signifie-t-elle que l'on ait identifié la loi spatiale de la réalité ? On a identifié les 2 premiers moments (moyenne et covariance ou variogramme), qu'en est-il des moments d'ordre supérieur à 2 ?

Réponse : Sous l'hypothèse de stationnarité, l'identification de l'histogramme expérimental signifie que l'on a identifié la loi de dispersion de la variable $z_o(x)$ en un point d'appui unique et quelconque x . Cela n'entraîne pas que la loi de dispersion $2, 3, \dots, n$ variables $z_o(x_1), z_o(x_2), \dots, z_o(x_n)$, ait été identifiée : la simulation conditionnelle n'identifie pas la loi spatiale du phénomène, en particulier les moments d'ordre supérieur à 2. Cela n'est pas grave dans la mesure où ces moments d'ordre supérieur sont rarement reconnus, de plus pour l'essentiel, problèmes miniers classiques ne font recours qu'aux 2 premiers moments.

Cependant il est bon d'insister sur le fait que la méthode des bandes tournantes engendre des simulations de loi spatiale gaussienne qui peuvent ne pas être adaptées à des phénomènes minéralisés dont on sait que la loi spatiale est d'un type particulier et très différent de la loi spatiale gaussienne : nous pensons par exemple à un phénomène non stationnaire à 2 états l'un fortement minéralisé, l'autre faiblement minéralisé stérile — chacun de ces 2 états pris séparément peut présenter une loi spatiale gaussienne mais le processus d'ensemble certainement pas une loi gaussienne.



La simulation brute d'un tel processus fournirait une courbe de loi spatiale gaussienne ; cette courbe peut présenter même moyenne et le même variogramme que l'ensemble des 2 états du processus réels, elle n'en serait pas moins une mauvaise représentation de la réalité.

Il est vrai que dans un tel cas pratique, l'analyse structurale aurait conduit à différencier les 2 états et à les simuler indépendamment, ou à considérer un processus régularisé (prise de moyenne sur des volumes suffisamment grands pour intégrer un grand nombre d'états différents) tel que sa loi spatiale serait de nouveau proche de la loi spatiale gaussienne.

Question 6 : Quel a été le coût des simulations conditionnelles que vous avez réalisées sur le gisement de Prony ?

Réponse : 100 000 F comprenant l'analyse structurale, la mise au point du programme et son passage. Rappelons qu'à Prony les variables avaient été simulées. Le coût d'exécution du programme mis au point s'est élevé à 5 000 F. Ce programme se présente sous forme modulaire et pourrait s'adapter à bien d'autres gisements sous réserve que l'analyse structurale préalable soit faite.

Utilisations pratiques des modélisations de gisements

Compte rendu de la réunion du 5 avril 1977

(Centre de Géostatistique de l'Ecole des Mines de Paris)

Le 5 avril 1977, le Centre de Géostatistique de l'Ecole des Mines de Paris a organisé une réunion d'information destinée à l'industrie extractive. Cette réunion a consisté en un ensemble de conférences suivies de débats. La réunion a été présidée par M. Georges Matheron, Directeur du Centre de Géostatistique.

Les Sociétés et Centres suivants étaient représentés :

Sociétés — Aluminium-Pechiney. Alusuisse. C.F.P. Ciments Français. Ciments Lafarge. Cogema. Cominak. S.L.N. mines. Somair. Sommenil. S.N.E.A.

Centres — B.R.G.M. Cerchar. C.F.P. Cnexo. C.R.P.G. Ensmim. E.N.S.M.P. Irsid. Université de Rome.

L'objectif de cette réunion était de présenter aux représentants de l'industrie quelques exemples d'utilisation des modélisations de gisements pour résoudre des problèmes de reconnaissance ou d'exploitation minière.

Au cours de cette réunion les méthodes géostatistiques de modélisation n'ont été rappelées que succinctement. Pour plus de précision on pourra se reporter aux références ci-après :

Journal — Le formalisme des relations ressources-réserves. Simulation de gisements miniers. Revue de l'Industrie Minière, Mine n° 4, Nov. 1973 - pp. 214-226.

Journal — Geostatistics for Conditional Simulations and orebodies. Economic Geology, U.S.A., Vol. 69, n° 5, pp. 673-687. Août 1974.

Les estimations locales et globales d'un gisement en définissent les ressources in situ. Pour valoriser ces ressources in situ l'exploitant devra choisir la reconnaissance permettant la meilleure sélection ainsi que les processus d'extraction, de stockage et de traitement du minerai. Or la technologie de l'exploitation conditionne le taux de récupération du minerai ainsi que les dispersions à toute échelle des teneurs produites.

Il est essentiel pour le mineur comme pour le laveur ou le chimiste de prévoir les caractéristiques moyennes et de variabilité du minerai à l'issue du processus d'exploitation afin qu'il puisse vérifier que les outils prévus sont adaptés : nom des engins d'extraction et de roulage, taille des stocks, espacement des galeries, souplesse de l'usine de traitement, etc.

L'idéal serait de travailler sur la réalité in situ. Malheureusement au moment de démarrer l'exploitation on a de la réalité in situ qu'une information insuffisante et, par conséquent, que des estimations trop imprécises pour faire les calculs de dispersion requis. L'idée est alors d'utiliser un modèle de la réalité.

Le gisement réel et le gisement modélisé sont en quelque sorte deux variantes d'un même phénomène minéralisé caractérisé par un certain modèle. Le modèle identifie les caractéristiques moyennes et de variabilité de la variable, caractéristiques estimées à partir des données expérimentales. Le modèle se prête donc à la détermination des dispersions à diverses échelles.

Pour l'étude des dispersions de teneurs il est équivalent de travailler sur le gisement modélisé ou sur le gisement réel.

Les techniques de simulations probabilistes proposées par la géostatistique permettent d'obtenir le modèle numérique du gisement en simulant une fonction aléatoire ayant les paramètres structuraux du modèle. Les moyens mis en œuvre relèvent des méthodes de modélisation.

Dans les articles qui suivent on étudie l'utilisation du gisement modélisé et l'application sur le modèle de simulations vers processus de reconnaissance ou de production.

On distinguera donc clairement, y compris par la terminologie, la *modélisation* du gisement et les *simulations* utilisant le modèle obtenu.

Les objectifs d'une modélisation et d'une estimation ne sont pas compatibles. Alors que l'estimation vise à approcher les valeurs réelles, la modélisation restitue les fluctuations réelles des caractéristiques. Néanmoins on pourra utiliser simultanément les résultats de l'estimation et de la modélisation : si l'un simule par exemple un processus de sélection à l'exploitation les blocs seront sélectionnés sur la base de leurs estimateurs comme cela se fait dans la pratique si on ignore la réalité. En revanche, les calculs de récupération et de fluctuation de qualité seront menés sur les blocs réels : on ne récupérera pas des blocs estimés mais des blocs vrais.

L'utilisation pratique des modélisations pour la définition d'un budget de reconnaissance, d'un projet d'exploitation ou de planification au jour le jour de la production doit fournir à l'industrie un outil opérationnel de décision.

Le développement de recherches ou d'études concrètes sur ce thème constitue vraisemblablement une voie nouvelle et utile pour rationaliser l'exploitation des ressources terrestres.

Simulation d'une reconnaissance séquentielle

par O. BERNUY, Ingénieur Géologue auprès de Minero Peru

et A. JOURNEL, Ingénieur civil des Mines, Maître de Recherches au Centre de Géostatistique de Fontainebleau

SOMMAIRE

Le modèle de gisement est représenté par une grille de 60 500 données simulées de sondages. Ces données simulées reproduisent la variabilité spatiale d'un gisement de nickel silicaté type néo-calédonien. Regroupant ces données de sondages 11 par 11, on dispose ainsi des valeurs moyennes vraies des 500 unités $u \times u$ constituant le modèle.

On simule une reconnaissance séquentielle du gisement, en démarrant par une campagne de 39 sondages à maille $4 u \times 4 u$, puis en la complétant progressivement jusqu'à la maille ultime $u \times u$ (500 sondages). A chaque étape de cette reconnaissance séquentielle, une analyse structurale géostatistique est conduite, qui permet d'élaborer des estimations tant locales que globales : ces estimations sont comparées à la réalité parfaitement connue du modèle. On étudie ainsi la robustesse et la précision de divers outils géostatistiques (variogrammes - variances d'estimation - krigage - estimation des réserves récupérables) ; cette simulation permet également de préciser à quel moment il convient d'arrêter les travaux de reconnaissance.

I. OBJECTIFS D'UNE SIMULATION DE RECONNAISSANCE

A chaque étape de la reconnaissance séquentielle d'un gisement, il est demandé diverses estimations des caractéristiques, tant physiques qu'économiques du gisement. La justesse de ces estimations est primordiale, car c'est sur ces valeurs estimées que l'on décide de la poursuite et de l'orientation des campagnes de reconnaissance, des méthodes d'exploitation et de traitement à envisager, et toutes ces décisions engagent des investissements parfois considérables. Avant de choisir telle ou telle procédure ou théorie d'estimation, le praticien veut savoir quel est l'ordre de grandeur des erreurs d'estimation possibles, et pour cela l'idéal serait de confronter les valeurs estimées à des valeurs réelles connues a priori. Malheureusement, un gisement n'est

parfaitement connu qu'une fois qu'il est exploité tout ou partie. L'idée est donc de travailler sur un modèle de gisement, ce modèle devant reproduire principales caractéristiques de morphologie et de variabilité d'un gisement réel. L'avantage de travailler sur un modèle de gisement est que l'on dispose au départ la connaissance quasi-parfaite de ce modèle, par exemple au travers des données simulées d'une maille de sondages extrêmement dense (tous les mètres par exemple). Sur ce gisement modélisé et parfaitement connu, on peut alors extraire les séquences d'information fragmentaire correspondant à une reconnaissance réelle, puis, à partir de cette information fragmentaire, construire des estimateurs (ressources, réserves, teneurs, etc.) que l'on peut confronter aux valeurs exactes déduites du modèle. On peut ainsi, sur ce gisement modélisé, étudier la robustesse et la précision de diverses techniques d'estimation, ou encore étudier l'impact de telle ou telle décision relative à la continuation de la reconnaissance du gisement.

II. PRÉSENTATION DU GISEMENT

Le modèle de gisement ici considéré peut représenter, soit une zone d'un gisement subhorizontal de puissance verticale variable (type phosphates sédimentaires ou Ni-latéritiques), soit un banc d'exploitation horizontal de puissance verticale constante dans un gisement exploité à ciel ouvert (type Cu-porphyrrique).

La zone modélisée est un rectangle G de dimension $50 u \times 10 u$, constitué de la réunion de 500 blocs carrés v_2 (de dimensions $u \times u$), (figure 1). Sur ce rectangle, le modèle est constitué des résultats simulés de 60 500 sondages verticaux, à maille régulière $u/11 \times u/11$, soient $11 \times 11 = 121$ sondages par bloc.

La valeur simulée sur chacun des 60 500 sondages représente une accumulation $a(x) = p(x).t(x)$, produite d'une puissance $p(x)$ par la teneur $t(x)$ si G provient d'un gisement sédimentaire subhorizontal, ou une teneur $z(x)$ définie sur la hauteur verticale constante de banc

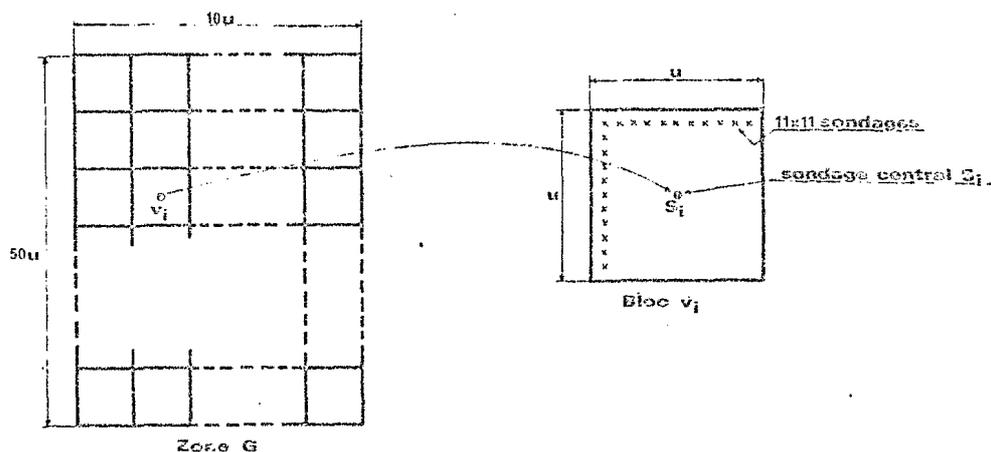


Fig. 1. — Sondages, blocs et zone modélisés

est un banc d'exploitation en ciel ouvert. Dans la suite de cet exposé, on parlera de teneur $z(x)$.

On dispose ainsi sur G des 60 500 teneurs de sondages à maille carrée $u/11$, ainsi que des 500 teneurs exactes $z_v(x_i)$ des blocs v_i (la teneur exacte de chaque bloc est assimilée à la moyenne arithmétique des 121 teneurs de sondages intérieurs).

Le modèle de la régionalisation spatiale de la teneur est reproduit :

1. $z(x)$ est une distribution imposée, de moyenne $m = 9,55\%$ et de variance $\sigma_z^2 = 22,4\%$. En fait, on a imposé de reproduire l'histogramme expérimental d'accumulations-nickel (puissance et teneur) d'un gisement néo-calédonien, cet histogramme ayant une allure lognormale. Il est bien évident que si l'on interprète $z(x)$ comme une teneur, la valeur $m = 9,55\%$ représente plutôt une teneur en plomb, ou si elle est divisée par 10 une teneur en cuivre.

2. On impose un modèle de variabilité spatiale, en référence à un modèle sphérique avec effet de pépite, de type dans l'espace horizontal considéré :

$$E\{z(x+h) - z(x)}^2\} = \gamma(h) = c_0 + c_1 \gamma_1(r), \quad \forall r = |h| \geq u/11$$

avec $c_0 = 6\%$, $c_1 \gamma_1(r)$ étant un schéma sphérique de portée $a_1 = 18\%$, et de portée $a_1 = 10 u$.

3. Remarquons que cette portée est de l'ordre de grandes dimensions de la zone G modélisée ($10 u \times 50 u$). Le présent modèle est donc plus représentatif d'une zone bien stationnaire d'un gisement que de la totalité de ce gisement.

I. SIMULATION DE LA RECONNAISSANCE

On a simulé sur le modèle précédent une reconnaissance séquentielle en 5 étapes. La zone rectangulaire, de dimensions $10 u \times 50 u$, est reconnue successivement par :

1. Une maille $4 u \times 4 u$, soit 39 sondages.

2. Une maille $2 u \times 4 u$ en quinconce, soit un élément de 24 sondages et au total 63 sondages.

3. Une maille $2 u \times 2 u$, soit au total 125 sondages.

4. Une maille $u \times 2 u$ en quinconce, soit au total 250 sondages.

5. Une maille finale $u \times u$, soit au total 500 sondages.

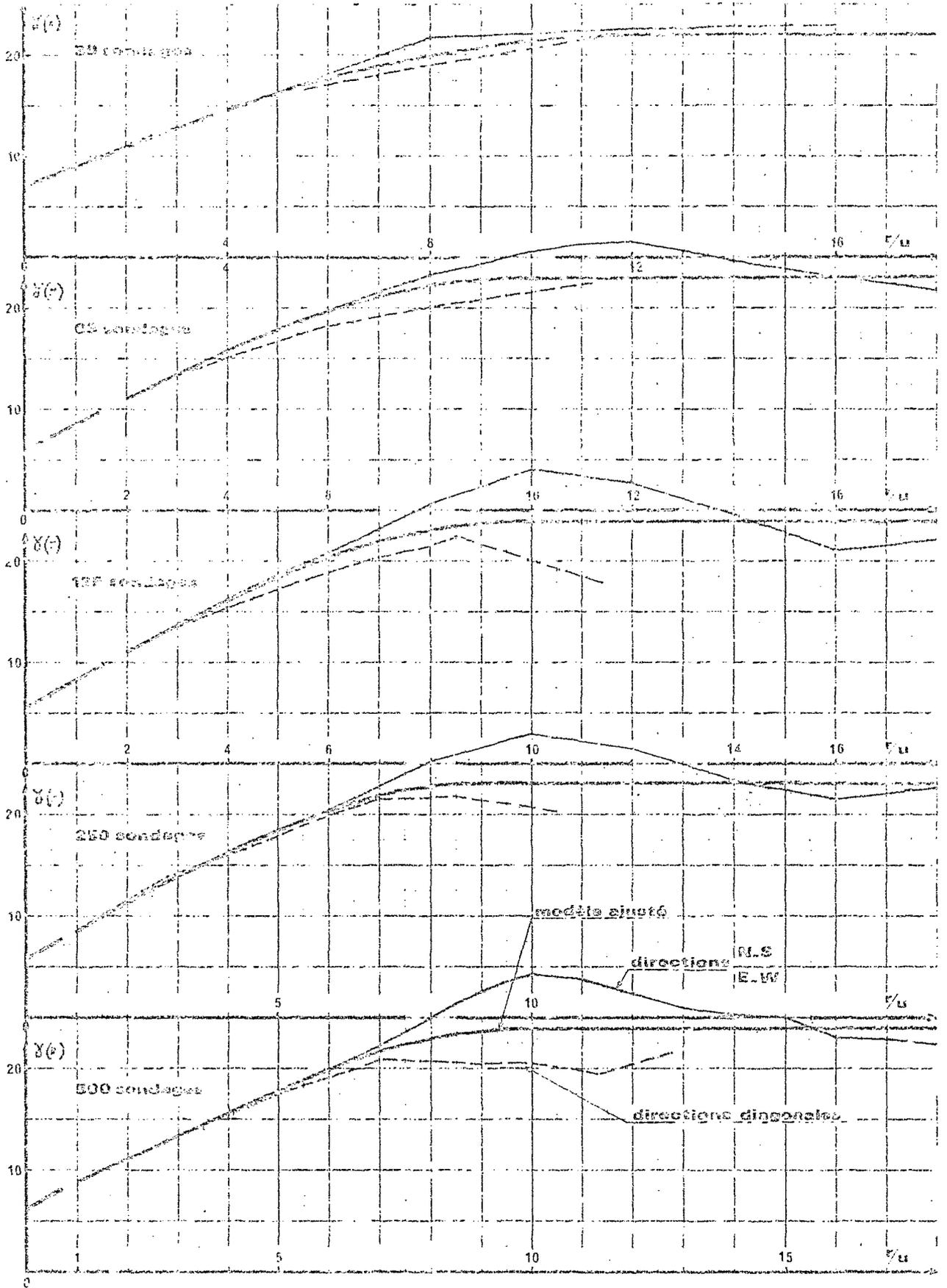
À l'issue de chacune de ces étapes, on construit, à partir des données disponibles, les demi-variogrammes dans les quatre directions principales (NS-EW et les deux directions diagonales) et l'on procède aux ajustements de modèles cf. figures 2-(1) à 2-(5) et tableau 3. Dès la première campagne (maille $4 u \times 4 u$), rien ne s'oppose à l'hypothèse d'isotropie. L'estimation de la constante de pépite est robuste dès la deuxième campagne ; remarquons que l'on aurait demandé, en pratique, dès cette deuxième campagne, une croix ou un alignement de sondages à petite maille. L'estimation du palier C_1 se fait à vue sur les demi-variogrammes expérimentaux, compte tenu de la variance expérimentale σ^{2*} des données disponibles (rappelons que cette dernière variance est un estimateur de la variance de dispersion géostatistique $D^2(O/G)$ des données de sondages dans la zone G. Remarquons surtout l'excellente robustesse du comportement linéaire aux petites distances (jusqu'à $r = 5 u$) de $\gamma(h)$; or, c'est de ce comportement que vont dépendre pour l'essentiel les diverses estimations à effectuer.

TABLEAU 3
Paramètre des modèles ajustés

Maille	$4 u \times 4 u$	$2 u \times 4 u$	$2 u \times 2 u$	$u \times 2 u$	$u \times u$	Modèle vrai
C_0	7,1	6,1	5,8	5,9	6,0	6,0
C_1	14,9	16,9	18,2	16,1	18,0	18,0
a_1	11 u	10 u	10 u	10 u	10 u	10 u
m^*	9,32	9,61	9,29	9,61	9,43	9,55
σ^{2*}	19,7	20,8	22,2	22,3	22,7	22,4

$\gamma(h) = C_0 + C_1 \gamma_1(r)$, avec γ_1 schéma sphérique de portée a_1 ; m^* et σ^{2*} : moyenne et variance expérimentales des données disponibles

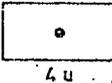
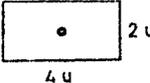
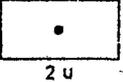
Fig. 2 -- Demi-variogrammes expérimentaux et leurs ajustements



À l'issue de chaque campagne, une fois le modèle global $\gamma(h)$ réajusté, on fait les calculs prévisionnels

suivants, dont on compare les résultats à la réalité connue déduite du modèle (tableau 4) :

TABLEAU 4
Prévisions de variances d'estimation à l'issue de chaque campagne comparées aux valeurs vraies (°) déduites du modèle

A l'issue de la campagne	Configuration	Estimation		Configuration	Estimation	
		Locale σ_e^2	Globale $\frac{\sigma_E}{m} \times 100$		Locale σ_e^2	Globale $\frac{\sigma_E}{m} \times 100$
(1) 39 sondages		9,08 (°) 9,03	5,8 % (°) 5,6 %		8,71 (°) 8,08	4,0 % (°) 3,8 %
(2) 63 sondages		8,49 (°) 8,08	3,8 % (°) 3,8 %		7,34 (°) 7,16	2,5 % (°) 2,5 %
(3) 125 sondages		7,13 (°) 7,16	2,6 % (°) 2,5 %		7,0 (°) 6,86	1,8 % (°) 1,7 %
(4) 250 sondages		6,9 (°) 6,86	1,7 % (°) 1,7 %		6,49 (°) 6,69	1,2 % (°) 1,2 %
(5) 500 sondages		6,66 (°) 6,69	1,2 % (°) 1,2 %			

On calcule la variance d'estimation locale σ_e^2 de la moyenne des 2 unités de maille, actuellement $4u \times 4u$ et correspondant à la future campagne, par rapport à son sondage central. Ainsi, à l'issue de la première campagne (1) et à partir du modèle structural de la figure 2-(1), on calcule les variances d'estimation des teneurs moyennes d'unités $4u \times 4u$ et $2u \times 2u$ par leurs sondages centraux ; le calcul géostatistique fournit respectivement

$$\sigma_e^2 = 9,08 \text{ et } \sigma_e^2 = 8,71,$$

et les valeurs réelles, déduites de la connaissance de 500 sondages constituant le modèle, sont :

$$(\circ), \sigma_e^2 = 9,03 \text{ et } \sigma_e^2 = 8,08.$$

À partir de cette variance d'estimation locale σ_e^2 , on calcule la variance d'estimation globale σ_E^2 de la teneur moyenne sur G par l'ensemble des données de la maille considérée. Plus précisément, on calcule l'écart-type d'estimation globale $100 \frac{\sigma_E}{m^*}$, exprimé en pourcents ; cet écart-type est rapporté à la moyenne arithmétique m^* des données de la maille considérée. À l'issue de la première campagne avec $m^* = 9,03$, le calcul prévisionnel donne, respectivement pour les 2 mailles $4u \times 4u$ et $2u \times 2u$, des prévisions de 5,8 % et 4,0 %, très proches des valeurs réelles (°) 5,6 % et 3,8 %.

À l'issue des résultats du tableau 4, on peut faire les remarques suivantes :

— Les prévisions du calcul géostatistique sont toujours en excellente concordance avec les valeurs réelles déduites du modèle. Signalons cependant que la grande portée ($a_1 = 10u$) représente ici un élément favorable à la justesse de ces prévisions. De telles comparaisons positives ont été effectuées sur divers gisements réels, cf. en particulier la remarquable étude de MM. R.L. Sandefur et D.G. Grant (1976).

— Si seule l'estimation globale de la teneur moyenne sur G était requise, on aurait pu arrêter la reconnaissance dès la troisième campagne (125 sondages à maille $2u \times 2u$) avec un intervalle de confiance standard gaussien de : $[m^* \pm 2 \sigma_E] = [9,29 \pm 0,48]$. Le passage à la maille finale de 500 sondages (soit 4 fois plus de sondages) réduit peu cet intervalle de confiance : $[9,49 \pm 0,23]$. Les quatrième et cinquième campagnes de sondage ne se justifient que pour une estimation locale du gisement par blocs ou unités de sélection : on peut alors limiter la réalisation de ces campagnes aux seules zones de première production.

IV. KRIGEAGE DES UNITÉS DE SÉLECTION

À partir de l'information fournie par la campagne ultime (500 sondages à maille $u \times u$), on a réalisé le krigeage des unités de production et de sélection assimilées aux blocs v_1 de dimensions $u \times u$. Pour ce krigeage, on a considéré la configuration d'estimation de la figure 5, soit :

~ 1 pondérateur λ_1 pour la teneur du sondage central.

— ~ 1 pondérateur λ_2 pour la teneur moyenne des 4 sondages médians de 1^{re} auréole.

~ 1 pondérateur λ_3 pour la teneur moyenne des 4 sondages d'angle de 1^{re} auréole.

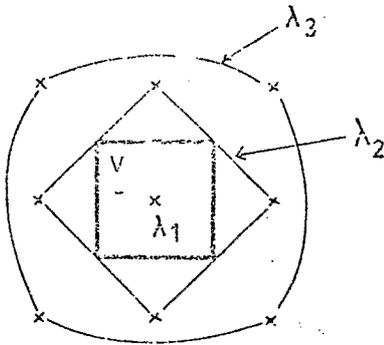


Fig. 5. — Configuration de krigeage des unités de sélection

Cette configuration de krigeage n'est complète que pour les 384 blocs v_i intérieurs à la zone G' , de dimensions $8u \times 48u$, définie comme l'érodée de G par une unité de distance u . Afin de ne considérer que des unités v_i dont le système de krigeage est identique, on limitera l'étude de sélection qui va suivre à ces seuls 384 blocs de G' .

Le tableau 6 donne les résultats $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \sigma_K^2$ du précédent système de krigeage. Disposant des teneurs vraies des 384 blocs krigés, on peut comparer la variance de krigeage calculée, $\sigma_K^2 = 1,32$, à la variance d'estimation vraie déduite des 384 erreurs connues, $\sigma_e^2 = 1,35$. La prévision de la variance de l'erreur est donc excellente.

Si pour estimer chacune de ces 384 unités de sélection, on avait utilisé la procédure des polygones d'influence (Poly.), attribuant à chaque unité v la teneur de son sondage central, soit :

$\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, la variance d'estimation vraie serait de : $\sigma_e^2 = 6,92$. La prévision que la géostatistique aurait donné de cette variance est 7,31.

TABLEAU 6
Résultats comparés du krigeage
et de l'estimateur par polygone d'influence

	Krig.	Poly.
λ_1	0,204	1
λ_2	0,458	0
λ_3	0,333	0
σ_K^2 calculée	1,323	7,307
σ_e^2 vraie	1,343	6,919

V. ESTIMATION DES RÉSERVES RÉCUPÉRAB

On suppose que la sélection effective au moment de l'exploitation ne dispose que de l'information — scages à maille $u \times u$, et que l'on récupère toute unités v_i de teneurs estimées $Z_{v_i}^*$, supérieures à teneur de coupure z_0 .

— Le tonnage minéral récupéré $T(z_0)$, c'est-à-dire le nombre d'unités récupérées $N(z_0)$, est déduit d'histogrammes de dispersion (cf. figures 9-a et b) 384 valeurs estimées, $Z_{KV_i}^*$ par krigeage, ou $Z_{v_i}^*$ polygones d'influence. Notons que l'histogramme des estimateurs $Z_{v_i}^*$ n'est autre que celui des teneurs de sondages centraux ; ainsi, considérer l'estimateur $Z_{v_i}^*$ par polygone d'influence revient très exactement à ignorer l'influence du support v de la sélection. La figure 9-c donne l'histogramme des 384 teneurs vraies des blocs v_i .

— Une fois la sélection effectuée, $Z_{KV_i}^* \geq z_0$ ou $Z_{v_i}^* \geq z_0$, il reste à vérifier la conditionnel, c'est-à-dire l'accord entre la teneur moyenne vraie $E\{Z_v/Z_v^* \geq z_0\}$ et la teneur moyenne estimée $E\{Z_v^*/Z_v^* \geq z_0\}$ du tonnage ainsi récupéré. Les figures 8-a et b donnent, pour chacun des 2 estimateurs considérés, les 2 courbes $E\{Z_v/Z_v^* \geq z_0\}$ et $E\{Z_v^*/Z_v^* \geq z_0\}$ en fonction de la valeur de coupure z_0 . On note que le krigeage assure le non-biais conditionnel, alors que la sélection effectuée sur les estimateurs de polygone d'influence est sujette à un biais (surestimation systématique des teneurs effectivement récupérées), ce biais s'accroissant à mesure que la sélection est plus sévère (z_0 plus grand).

— La quantité de métal globale effective récupérée, $Q(z_0) = T(z_0) \times E\{Z_v/Z_v^* \geq z_0\}$, est proportionnelle à la grandeur

$$N(z_0) \times E\{Z_v/Z_v^* \geq z_0\}.$$

la différence entre les 2 quantités de métal récupéré correspondant aux 2 types d'estimateurs de sélection considérés, chiffre exactement l'intérêt économique du krigeage, du moins d'une approche géostatistique rigoureuse des problèmes de sélection qui compte des 2 influences fondamentales du support de la sélection et du niveau d'information.

— A titre de référence, on peut donner également tous les résultats d'une sélection hypothétique effectuée sur les teneurs vraies Z_{v_i} des 384 unités de sélection, c'est-à-dire sur une connaissance parfaite du gisement. Cette sélection idéale conduit bien entendu aux mêmes résultats.

— Le tableau récapitulatif 7 donne, pour les 3 hypothèses de sélection (sur teneur vraie $Z_{v_i} \geq z_0$),

sur krigée $Z_{KV}^* \geq z_0$, sur teneur estimée par $\geq z_0$, pour les 3 valeurs de coupure : $z_0 = 4 - 9$ et 14% , nombre de blocs récupérés $N(z_0)$, teneur moyenne vraie du tonnage récupéré, $E\{Z_V/Z_V^* \geq z_0\}$, teneur moyenne estimée du tonnage récupéré, $E\{Z_V^*/Z_V^* \geq z_0\}$, biais conditionnel $E\{Z_V - Z_V^*/Z_V^* \geq z_0\}$, variance d'estimation expérimentale des teneurs récupérés, $E\{[Z_V - Z_V^*]^2/Z_V^* \geq z_0\}$, quantité de métal globale effectivement récupérée, $N(z_0) \times E\{Z_V/Z_V^* \geq z_0\}$, estimation effectuée de cette quantité de métal, $N(z_0) \times E\{Z_V^*/Z_V^* \geq z_0\}$.

TABLEAU 7

comparés des sélections basées sur différents estimateurs

Estimateur	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
vraie Z_V	370	10,08	0	0	3 730		
est. Z_{KV}^*	365	10,13	10,05	0,08	1,36	3 698	3 668
est. Z^*	337	10,51	10,68	-0,17	6,94	3 542	3 599
vraie Z_V	203	12,97	0	0	2 633		
est. Z_{KV}^*	205	12,82	12,66	0,16	1,36	2 628	2 593
est. Z^*	199	12,52	13,52	-1,00	7,08	2 491	2 650
vraie Z_V	67	16,19	0	0	1 085		
est. Z_{KV}^*	65	16,04	15,91	0,13	1,56	1 043	1 034
est. Z^*	67	14,93	15,95	-2,02	7,81	1 000	1 136

On note que la sélection effectuée sur estimateurs par krigeage conduit à une meilleure récupération du gisement, en terme de quantité de métal globale effectivement récupérée. On note surtout que l'estimateur par polygone d'influence surestime toujours la quantité de métal effectivement récupérable, ce qui est particulièrement dangereux dans une étude de faisabilité.

Alors qu'une sélection effectuée sur les estimateurs classiques, ID — par inverse des distances ou par inverse des carrés des distances, auraient pu donner des résultats sensiblement meilleurs que ceux obtenus par sélection effectuée sur Z^* -Poly., mais toujours restant inférieurs à ceux de la sélection effectuée par krigeage.

Si, pour estimer chacun des 384 blocs constituant la maille, on avait disposé non d'une maille parfaitement régulière mais seulement d'une maille pseudo-régulière avec des groupements et lacunes de sondages (cas qui se présente en pratique minière), les résultats du krigeage seraient encore plus nettement meilleurs que ceux des estimateurs classiques, Poly., ID ou ID2.

Fig. 8. — Biais conditionnel des estimateurs

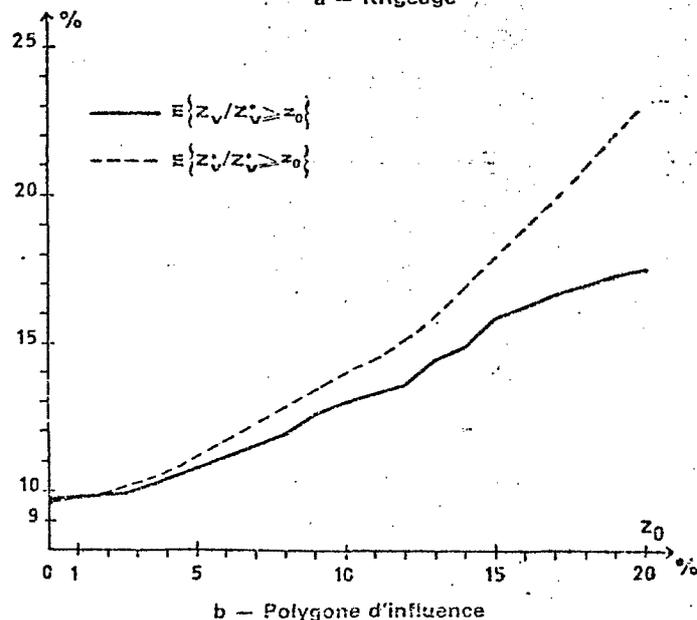
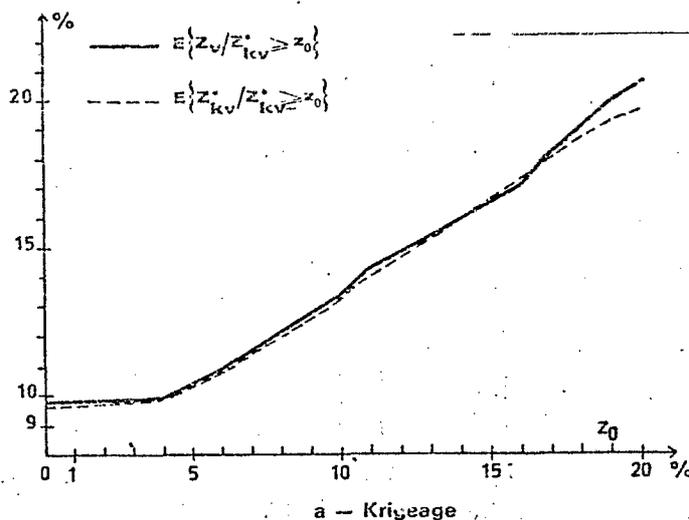
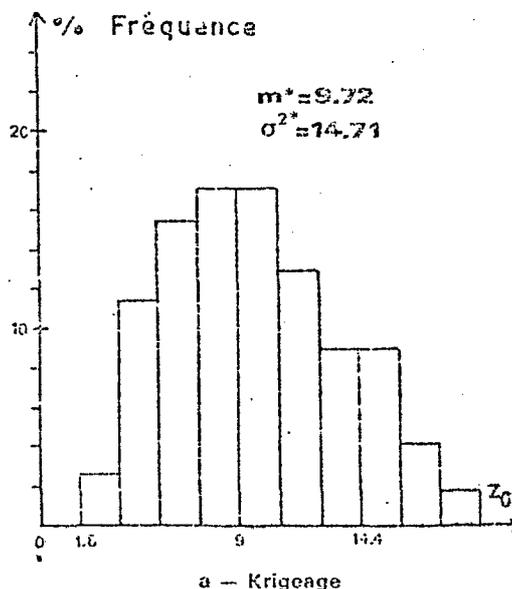
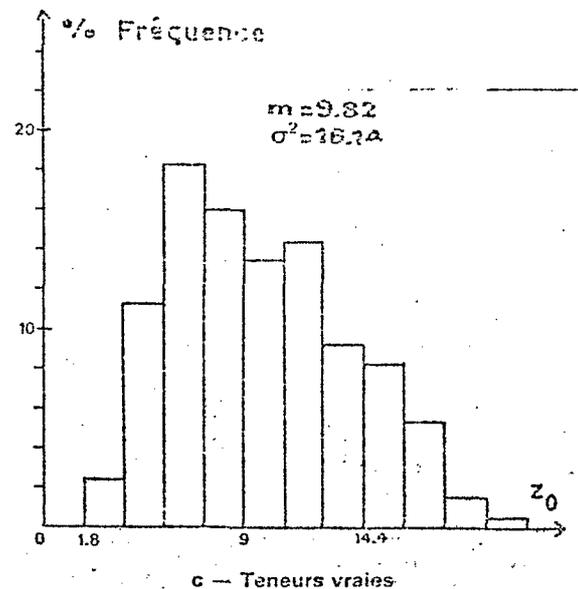
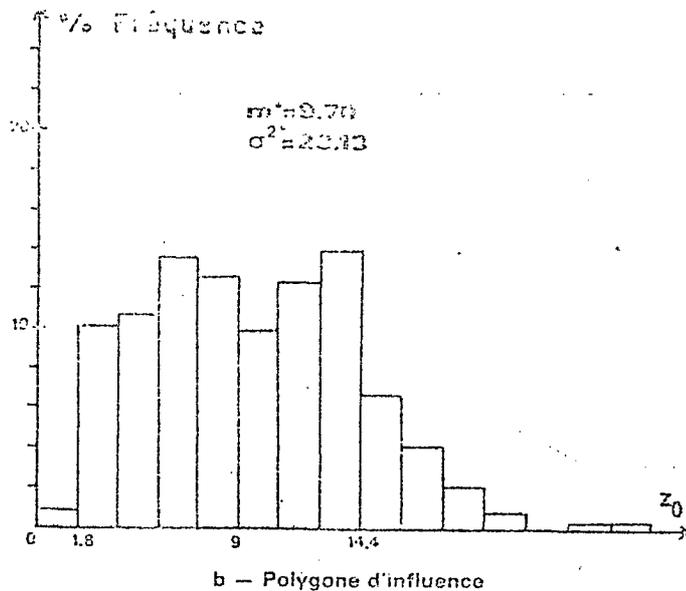


Fig. 9. — Histogrammes des teneurs vraies et de leurs estimateurs





RÉFÉRENCES

- Ch. HUIJBREGTS — Selection and grade-tonnage relationship. (1975).
 Proceedings of NATO A.S.I. « Geostat 75 », Rome.
 Ed. D. Reidel Publ. Corp., Dordrecht, Netherlands.
- A. JOURNEL — Geostatistics and sequential exploration. (1973).
 In Mining Engineering, Oct. 1973, pp. 44-48.
- A. JOURNEL — Le formalisme des relations ressources-réserves.
 Revue de l'Industrie Minière, Supplément Mine n° 4,
 Nov. 1973, pp. 214-226.
- R.L. SANDEFUR and D.C. GRANT — Preliminary evaluation of
 uranium deposits.
 -- A geostatistical study of drilling density
 in Wyoming solution fronts (1976).
 In Proceedings of I.A.E.A., 1976 Meeting, U.S.A.

DISCUSSION

Question

Le gain sur la quantité de métal apporté par le krigeage vis-à-vis de la méthode par polygones d'influence semble faible (environ 10 %). Ce gain n'est-il pas annulé par les coûts d'extraction de blocs supplémentaires ?

Réponse

Dans la zone considérée, tout bloc est extrait et ensuite envoyé au stérile ou à la laverie. A frais d'exploitations égaux, un gain de 10 % en quantité de métal ne me semble pas négligeable, d'autant

moins qu'il ne nécessite aucun investissement de reconnaissance supplémentaire. Enfin si l'on veut diminuer le tonnage traité, il d'élever la teneur de coupure (toujours en sélectionnant sur v krigées).

Question

Les modifications de gisement peuvent-elles servir à étal budget et le schéma de reconnaissance nécessaire à une bonne litique de sélection ?

Réponse

Oui, certainement, à condition que le modèle de gisement suffisamment représentatif du gisement réel, et en particulier reproduire correctement les structures de variabilité spatiale de ramètre de sélection (ici la teneur). Pour cela on doit disposer information structurale (histogramme - variogrammes - condition à des données réelles) suffisante. Une fois le modèle du ment acquis, on peut chiffrer la perte due au fait que l'on ne pas sur teneurs vraies, et déterminer le budget et le type de naissance nécessaire pour se rapprocher de cette sélection opti

Question

La stabilité des variogrammes construits à l'issue de chaque se de reconnaissance semble ici assez exceptionnelle.

Réponse

En effet, et nous l'avons signalé le modèle ici considéré ren, te plus une zone bien homogène d'un gisement que la totalité gisement. On remarque en particulier que la portée ($a_1 = 1$ est de l'ordre de grandeur de la plus petite dimension de cette

Cependant cette homogénéité et la régularité de la maille de reconnaissance ($u \times u$) sont plutôt des éléments favorable méthodes classiques d'estimation, du type polygones d'influ En présence de minéral plus hétérogène et de maille de reconnaissance irrégulière sinon préférentielle, l'avantage du krigeage encore plus net.

ETUDE DE L'EXPLOITATION DU GISEMENT DE FUENTES ROSAS

A L'AIDE DE LA SIMULATION NON CONDITIONNELLE

DES BLOCS

J.L. REBOLIO-ALCANTARA *

* Ingénieur des Mines - Projet Minier (S.M.M.P.-Espagne)

Mars 1977

ETUDE DE L'EXPLOITATION DU GISEMENT DE FUENTES ROSAS

A L'AIDE DE LA SIMULATION NON CONDITIONNELLE DES BLOCS

SOMMAIRE

- 1 - Description Géologique et caractéristiques géomécaniques.
- 2 - Reconnaissance du gisement.
- 3 - Simulation non conditionnelle.
 - 3-1 Modèle simulé
 - 3-2 Morphologie et tonnage des masses enrichies
 - 3-3 Infrastructure d'exploitation
 - 3-4 Sondages de localisation et d'évaluation des masses enrichies
 - 3-5 Conclusions

1 - DESCRIPTION GEOLOGIQUE ET CARACTERISTIQUES GEOMECHANIQUES.

Le gisement d'origine précambrienne se trouve dans une région affectée par des plissements hercyniens NE-SW. La minéralisation est constituée par de la chalcopyrrite disséminée dans 2 couches de micaschistes intercalées dans une série gneiss-amphibolites.

On distingue deux zones dans le gisement : dans la première, la minéralisation est située préférentiellement dans la couche inférieure ; dans la seconde, à l'inverse, 80% de l'accumulation métal se trouve dans la couche supérieure.

Selon l'étude réalisée par M. FINE, les caractéristiques mécaniques sont excellentes.

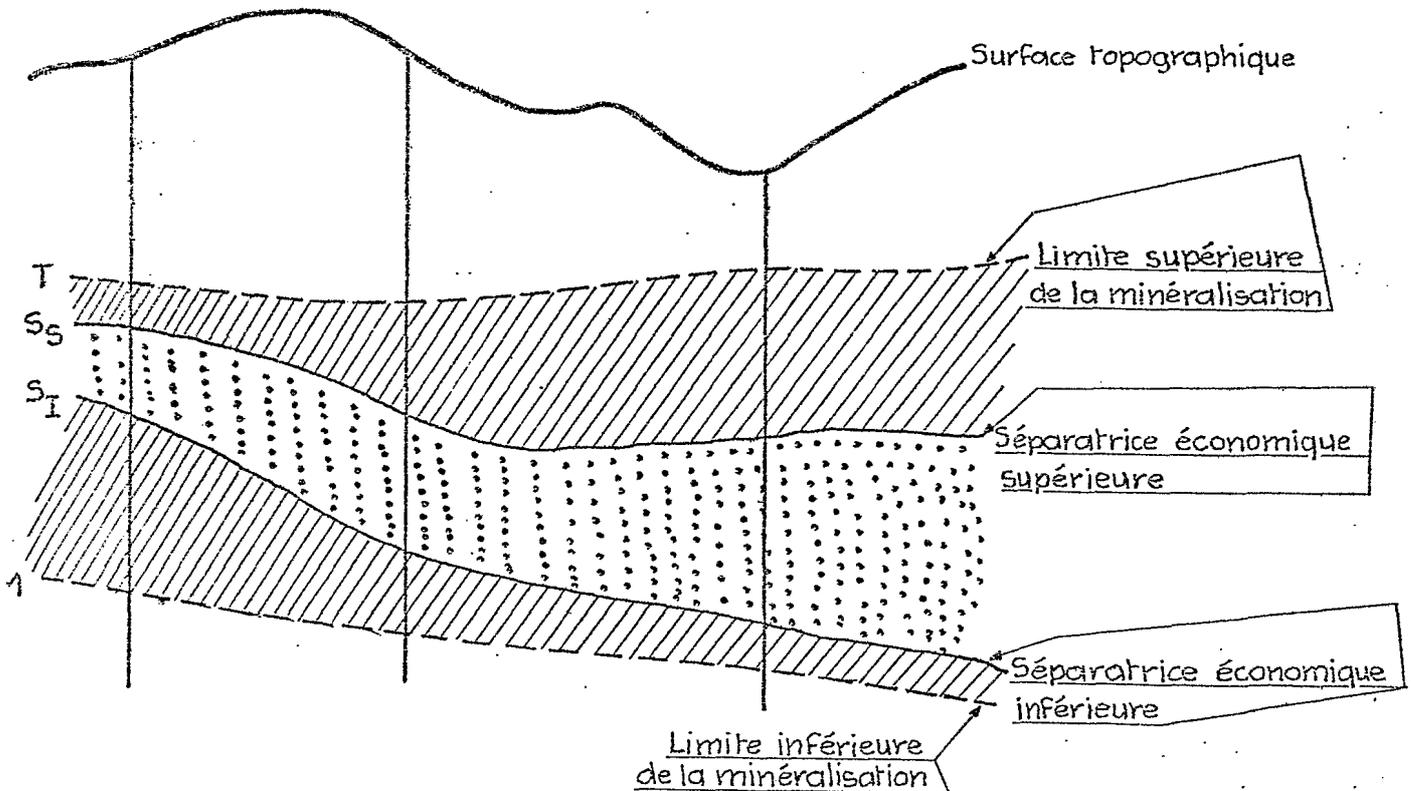


Fig. 1 - Coupe schématique du gisement

2 - RECONNAISSANCE DU GISEMENT.

La campagne de sondages fournit 47500 mètres de sondages dont 3800 au coeur du gisement.

L'analyse structurale menée sur les échantillons de 1 m. a caractérisé la régionalisation par un demi-variogramme exponentiel, isotrope dans l'espace :

$$\begin{aligned} \gamma(h) &= C_0 + C(1 - e^{-r/\omega}) & C_0 &= 0.03 \\ \forall r &= |h| & C &= 0.146 \quad \omega = 10 \text{ m.} \end{aligned}$$

L'évaluation des teneurs a été basée sur les estimations par krigeage des teneurs des blocs de $5 \times 5 \times 5$ centrés sur les sondages. A partir de là, on a appliqué des critères économiques pour définir les séparatrices (supérieure et inférieure) qui limitent la zone de l'exploitation future.

A cette phase de l'étude, on peut disposer d'une évaluation des réserves pour différentes teneurs de coupure.

3 - SIMULATION NON CONDITIONNELLE.

Le gisement ayant été évalué, on se pose le problème du choix d'une méthode d'exploitation compatible avec la morphologie et la structure de répartition de la minéralisation. Une exploitation non sélective, de type sublevel par exemple, enverrait à l'usine de traitement toute la portion de minerai comprise entre le toit, le mur économiques, et la teneur moyenne à l'entrée serait trop faible. Il faut recourir à des méthodes d'exploitation permettant une certaine sélectivité du minerai.

Au cours de la phase d'évaluation globale, on ne peut pas obtenir la teneur d'entrée à l'usine de concentration à partir de la courbe tonnage-teneur : on risque d'aboutir à des résultats non réalisables en pratique. En effet, pour une teneur de coupure élevée, il faut tenir compte de la disposition réelle du minerai

sélectionné dans le gisement qui vient modifier les prévisions faites sur la courbe tonnage-teneur. Il s'avère nécessaire de disposer d'une information sur la situation relative des blocs de différentes teneurs. Un modèle du gisement permet de tester les résultats de différentes méthodes d'exploitation.

3-1 - Modèle simulé.

La réalisation d'un modèle simulé du gisement par blocs de $5 \times 5 \times 5 \text{ m}^3$ utilisant les résultats de l'analyse structurale a été effectuée par le Centre de Géostatistique de l'Ecole des Mines de Paris. Deux possibilités étaient offertes : simulation conditionnelle ou simulation non conditionnelle.

La simulation conditionnelle présente une meilleure similitude avec la réalité, mais le but n'est pas d'étudier la mise en exploitation d'une zone particulière réelle du gisement ; aussi a-t-on choisi de faire une simulation non conditionnelle. Sur le modèle simulé, on a reconstitué la couche stérile intermédiaire de gneiss.

La simulation non conditionnelle fournit donc un modèle de gisement sous forme d'un réseau de blocs dont les teneurs présentent un histogramme et un variogramme donnés.

Les blocs de $5 \times 5 \times 5 \text{ m}^3$ sont inclus dans un parallélépipède de $240 \times 240 \times 100 \text{ m}^3$. Ils ont été représentés graphiquement à l'aide d'un programme désignant les blocs de teneur supérieure à une teneur de coupure d'entrée.

Les caractéristiques locales (moyenne, variance de dispersion, histogrammes) des teneurs dans des zones d'extension réduite sont affectées de fluctuations importantes. C'est la raison pour laquelle on a simulé un panneau-enveloppe de dimensions supérieures au domaine effectivement étudié.

3-2 - Morphologie et tonnage des masses enrichies.

La représentation des blocs du modèle montre la présence de masses enrichies dans une matrice plus pauvre. Ces masses

présentent une cohérence autant verticale qu'horizontale. Cette observation conduit à adopter une méthode d'exploitation qui opérera sélectivement sur ces masses.

Etant donné leur forme relativement irrégulière, l'extraction de l'une de ces masses entrainera un salissage inévitable, mais calculable. Au contraire, un certain nombre de blocs riches (de teneur supérieure à la teneur de coupure) seraient exclus de la masse réellement exploitable, puisque celle-ci doit avoir une forme géométrique réalisable (courbures minimum, suppression de digitations....)

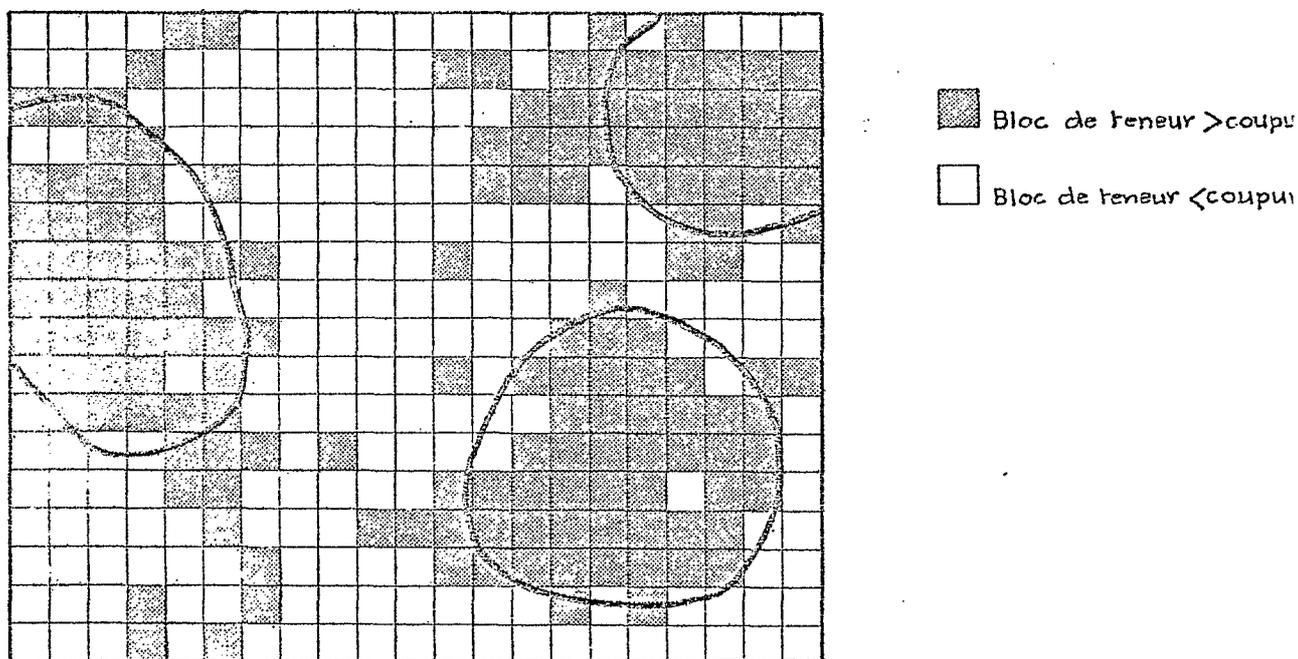


Fig. 2 - Délimitations des masses riches sur les blocs simulés d'un niveau.

On a alors isolé et découpé manuellement un certain nombre de ces masses sur la représentation des blocs simulés (cf. Figure 2). On a ainsi obtenu une idée des tonnages que l'on récupérerait. La taille moyenne de ces masses est de 78.000 T. Une maquette en plastique transparent a été construite pour visualiser clairement la disposition de ces masses.

Pour la teneur de coupure adoptée, les "masses exploitables" représentent 31% du tonnage total.

Le salissage dû à l'exploitation est pris en compte puisque les masses ont été définies de façon à être techniquement exploitables : elles incluent donc des blocs stériles pour en suivre les formes.

3-3 - Infrastructure d'exploitation.

Les tracés de reconnaissance seront utilisés pour accéder aux masses enrichies. Les travaux prévus sont les suivants (cf. Figures 3 et 4) :

(a) Galeries au mur, constituant la base de chaque niveau. Niveaux tous les 50 mètres. La longueur totale de ces galeries est de 2700 mètres.

(b) A chaque niveau, partant de la galerie au mur, une recoupe jusqu'au toit économique de la couche, tous les 50 mètres. Etant donné le pendage et la puissance moyenne de la couche, il y aura 54 recoupes d'une longueur moyenne de 71 mètres, ce qui donne un total de 3840 mètres.

(c) Galeries d'union des recoupes contiguës qui totalisent 2700 mètres.

Il est alors possible d'évaluer le coût par tonne des travaux de reconnaissance et d'accès. Des roses de sondages seront forées à partir des recoupes, et serviront à localiser et évaluer les masses.

La méthode d'exploitation consistera à pénétrer dans les masses riches (précédemment délimitées) au moyen des galeries d'accès : une sur la partie supérieure qui ouvrira le sommet de la chambre une sur la partie inférieure pour l'extraction du minerai après ouverture d'un front d'abattage. Il se créera ainsi une sorte de carrière souterraine aux dimensions de la masse exploitée.

3-4 - Sondages de localisation et d'évaluation des masses.

Plusieurs configurations ont été testées sur la représentation des blocs simulés. On a retenu celle constituée par des

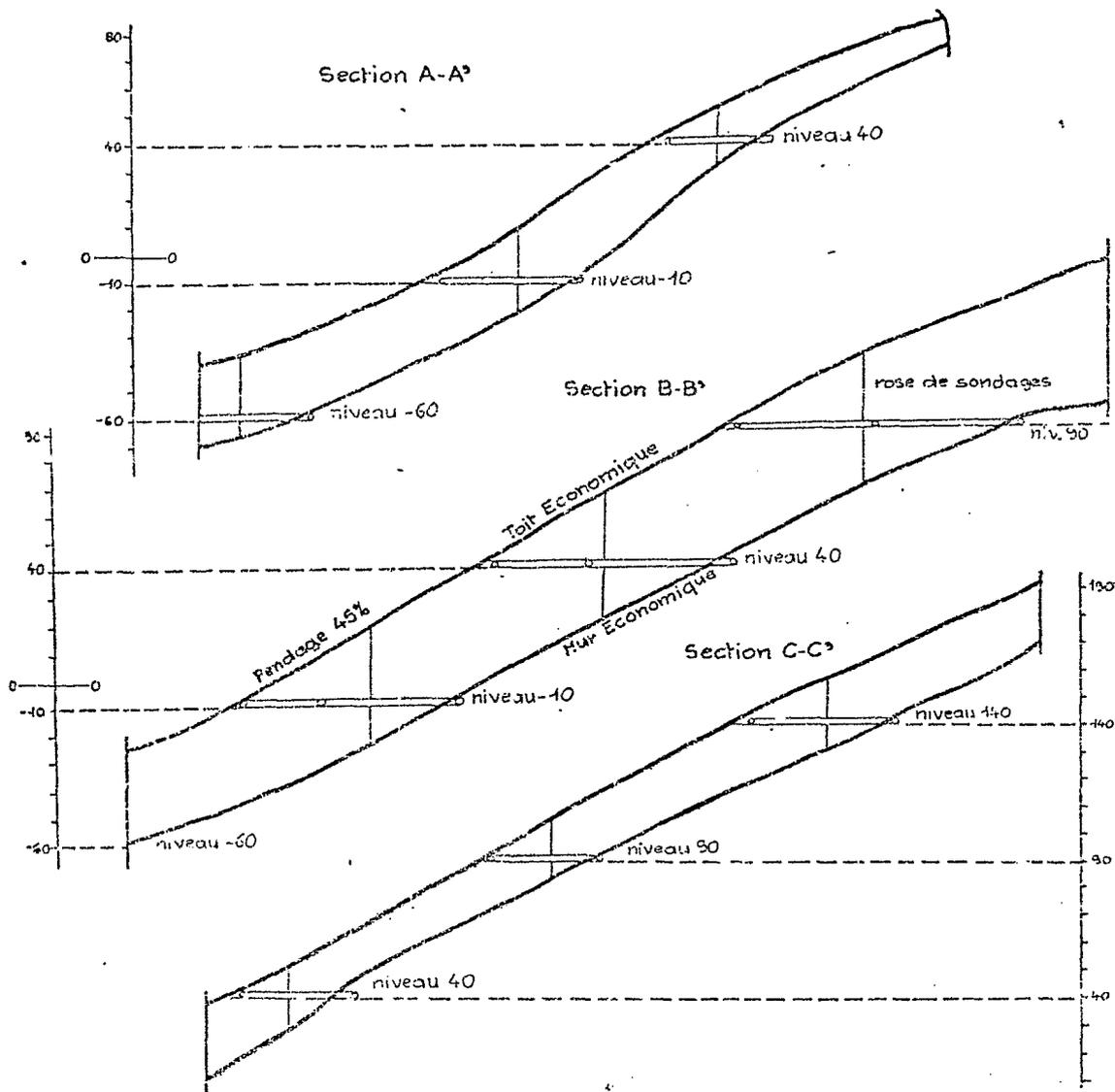


Fig. 3 - Travaux de reconnaissance et d'accès aux masses : section

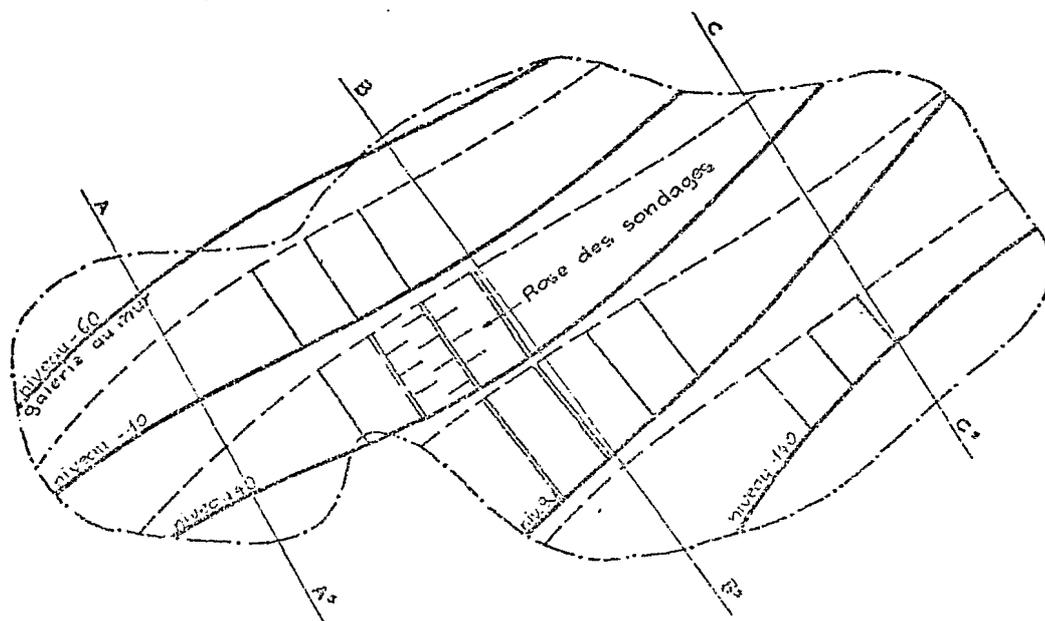


Fig. 4 - Travaux de reconnaissance et d'accès aux masses : plan

roses de 16 sondages réalisées perpendiculairement aux recoupes du mur au toit, tous les 10 mètres.

Cette disposition donne les meilleures possibilités de délimiter les masses à un coût acceptable. Les sondages seront percutants, avec récupération de cuttings de perforation à analyser postérieurement.

En cours d'exploitation, les masses reconnues seront estimées par krigeage à l'aide des sondages les traversant et de ceux situés aux abords immédiats.

Il est prévu de disposer d'une avance suffisante dans la connaissance des masses riches qui permette une planification flexible de l'exploitation.

3-5 - Conclusions.

L'étude décrite a permis non seulement de dessiner la méthode d'exploitation, mais aussi d'en évaluer le coût. Il est probable que les personnes qui réalisent une étude des réserves d'un gisement arrivent à avoir une idée suffisamment claire de la structure de la morphologie, de la répartition du métal. La difficulté consiste à transmettre cette information non seulement qualitative mais aussi quantitative à celui qui doit dessiner et valoriser la méthode d'exploitation. La simulation de blocs constitue un auxiliaire précieux à ce moment.

Le travail interactif entre géologues, géostatisticiens et mineurs de l'équipe d'un projet peut s'effectuer autour de la représentation possible que propose le modèle de gisements.

NOTE - Ont collaboré à ce travail, outre le Centre de Géostatistique de l'Ecole des Mines de Paris qui a réalisé la simulation, l'équipe de la S.M.M.P - España coordonnée par J.P. Florant : M. Servajean, Chabod, Milla, Cantano, ce dernier particulièrement pour le dessin de la méthode d'exploitation.



MODELISATIONS DE GISEMENT ET CHOIX
D'UNE METHODE D'EXPLOITATION

=====

J. DERAISME *

* Ingénieur Civil des Mines, Ingénieur de Recherches
au Centre de Géostatistique de Fontainebleau.

MODELISATIONS DE GISEMENT ET CHOIX D'UNE METHODE
D'EXPLOITATION

Après que l'étude de faisabilité ait prouvé qu'un gisement était économiquement exploitable, des décisions importantes doivent être prises sur la façon dont le minerai sera extrait, et traité. La technique minière que l'on mettra en oeuvre conditionnera la récupération du métal contenu dans les réserves prévues. Etant donnés les investissements considérables mis en jeu il est particulièrement intéressant de pouvoir tester l'impact de telle ou telle méthode sur le résultat final et de prendre une décision en connaissance de cause.

Les modélisations de gisements constituent une base de données sur laquelle on peut simuler un processus d'exploitation. Les résultats d'une telle simulation servent à guider le choix d'une méthode d'exploitation appropriée au gisement.

Le modèle de gisement qui supporte cette étude ne représente pas un gisement réel précis mais un type de gisement ayant des caractéristiques proches d'un porphyre cuprifère.

Notre démarche se veut exploratoire aussi a-t-on simplifié et schématisé les méthodes d'exploitation que l'on a simulées ; si l'on voulait étudier pour une mine particulière le comportement du minerai au travers du processus d'exploitation, il conviendrait évidemment de prendre en compte précisément l'ensemble des contraintes techniques imposées. Il n'en reste pas moins que l'approche du problème serait la même que celle indiquée ici.

On s'est contenté ici de montrer le type de problèmes que l'on pouvait aborder grâce aux modélisations de gisements : nombre de chantiers à exploiter simultanément, et impact sur les fluctuations, planification au jour le jour de l'exploitation, application d'une politique sélective, nécessité d'un stock d'homogénéisation.

INTRODUCTION.

On peut distinguer plusieurs phases dans l'étude de faisabilité d'un gisement :

- Une phase d'évaluation des caractéristiques globales du gisement (structures, estimation des ressources, détermination d'une maille "optimale" de sondages...).
- Une phase de connaissance des réserves exploitables (estimations locales des unités d'exploitation, courbes tonnage-teneur, paramétrage des réserves...).
- Une phase d'étude du comportement du minerai au travers du processus d'exploitation.

Nous nous placerons ici au cours de cette dernière phase quand la décision d'exploiter a été prise : le mineur veut entre autres choisir la méthode d'exploitation assurant la meilleure récupération du gisement et un bon fonctionnement de l'usine de traitement. La géostatistique fournit la base de données, permettant de développer de telles études, avec des modélisations de gisement.

A défaut de connaître le gisement réel en chaque point les modélisations en donnent une représentation qui possède les mêmes caractéristiques structurales de variabilité. Nous ne reviendrons pas sur la méthode utilisée pour obtenir numériquement les données modélisées du gisement (cf.[1]).

On dispose ici sur 4 niveaux des teneurs de blocs parallélépipédiques de section carrée 18 m x 18 m et de hauteur 5 m ainsi que des teneurs des tronçons de sondages centrés sur les blocs. On peut considérer ce modèle de gisement comme représentant un gisement de type porphyre cuprifère dont on a identifié les caractéristiques suivantes :

- Teneur moyenne de 1 % Cu. Histogramme fortement dissymétrique (cf. fig. 1)
- Régionalisation isotrope des teneurs avec structure de transition de portée 70 m environ.

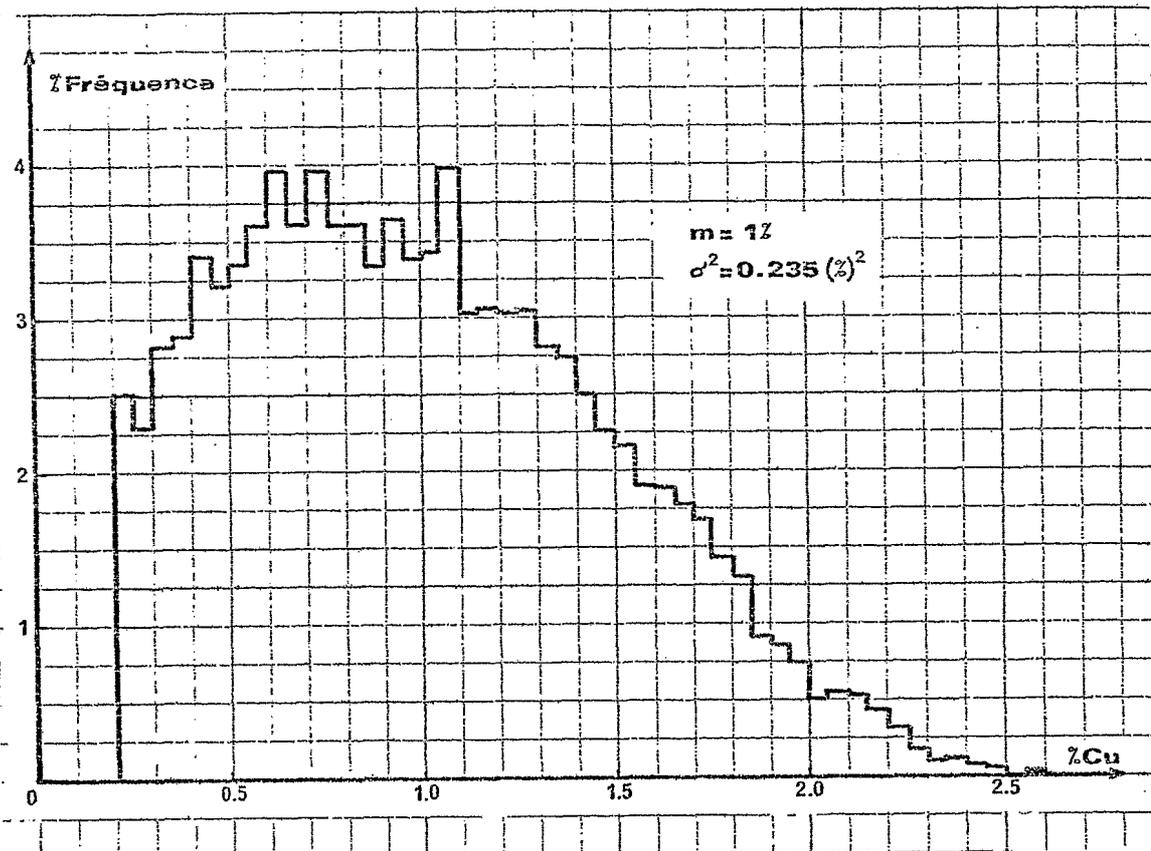


Fig. 1 : Histogramme des teneurs vraies des blocs.

SIMULATION DE L'EXPLOITATION.

1 - Données du problème.

A partir de maintenant, nous considérons le gisement simulé comme parfaitement représentatif du gisement réel du point de vue des fluctuations.

Les unités minimales d'exploitation sont des blocs de section carrée de 18 m. x 18 m. et de hauteur 5 m. Un tel bloc élémentaire renferme 4370 tonnes de minerai. La cadence d'exploitation est fixée à 35000 tonnes par jour, soit l'équivalent de 8 blocs élémentaires. Un an de production est fait de 280 jours.

La laverie a été étudiée de façon à traiter cette production, néanmoins la récupération est fonction de la capacité de la laverie à "absorber" des sauts de teneurs qui viennent modifier les réglages des quantités de réactifs. Une première réponse est donnée par l'automation, mais ce n'est pas la panacée universelle pour deux raisons :

- une automation poussée coûte cher,
- étant donnés les retards et l'incertitude dus à l'échantillonnage du minerai à l'entrée-laverie, la récupération s'écartera sensiblement de l'optimum. Sans écarter l'automation, l'exploitant s'interroge sur la possibilité de réduire l'amplitude des fluctuations du flux des teneurs à l'entrée-laverie en agissant sur la méthode d'exploitation elle-même.

En effet, il est clair qu'il sera d'autant plus facile de régler les réactifs que le minerai à traiter sera de qualité la plus constante possible. Nous avons fixé à 15 jours la durée minimale au-delà de laquelle le laveur accepte de modifier ses réglages. Nous avons considéré ici que la teneur est le paramètre sensible qui détermine le réglage de la laverie ; il s'agit d'une hypothèse arbitraire mais sans conséquence sur l'appréciation à porter sur les résultats ; tout autre paramètre régionalisé que l'on aurait déterminé se prêterait de façon identique à l'étude.

Pour atteindre l'objectif d'homogénéisation des teneurs journalières au cours des processus de production, nous avons envisagé deux possibilités :

- a) Schéma 1 : exploitation par 2 grosses pelles peu mobiles sur des bancs de 10 mètres de haut, 2 bancs étant exploités simultanément.
- b) Schéma 2 : exploitation par 4 pelles mobiles sur des bancs de 5 mètres de haut, 4 bancs étant exploités simultanément.

2 - Schémas d'exploitation.

a) Schéma 1 : chacune des pelles extrait chaque jour 2 gros blocs de 10 m. de haut, constitués de la réunion de 2 blocs élémentaires de 18 m. x 18 m. x 5 m. superposés. Ces gros blocs forment un pavage dans le plan horizontal sur 25 colonnes. Les pelles avancent parallèlement aux lignes et extraient entièrement les 25 blocs d'une ligne avant d'attaquer la ligne suivante (cf. Fig. 2)

Les pelles sont peu mobiles ; elles extraient donc les blocs dans l'ordre rencontré sur le terrain. La laverie reçoit donc tous les jours 4 gros blocs.

Ce schéma d'exploitation, de par sa nature, a peu d'effet sur l'homogénéisation. Aussi l'objectif initial de régularisation des flux de teneurs journalières ne peut être atteint dans le cadre de ce schéma que par l'adjonction d'un stock d'homogénéisation : nous avons donc simulé également ce schéma de production, soit le schéma 1' .

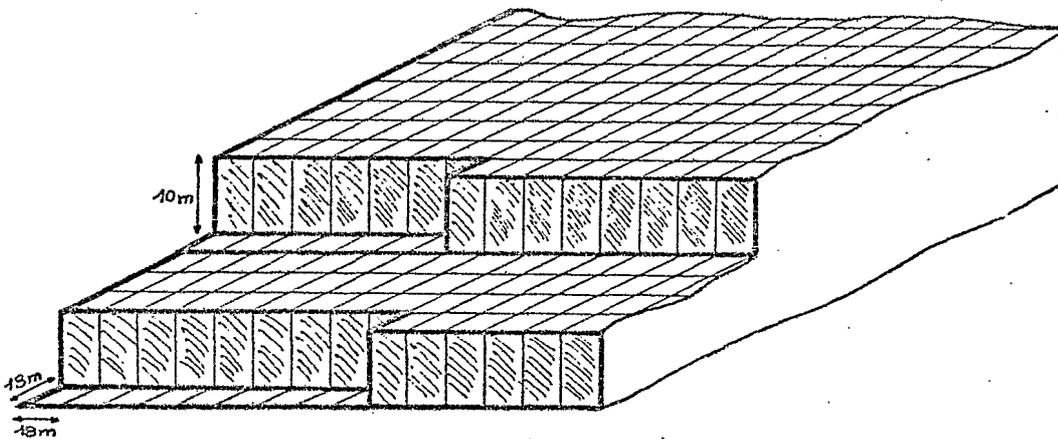


Fig. 2 - Allure du front d'exploitation pour le schéma 1'

b) Schéma 1' : l'exploitation est identique au schéma 1 . La différence réside en ce que les blocs extraits ne sont pas systématiquement envoyés à la laverie, mais peuvent transiter par un stock d'homogénéisation.

Le stock est constitué en deux parties : un sous-stock recevant les teneurs riches, un sous-stock recevant les teneurs pauvres. Au total les stocks représentent deux jours de production, soit l'équivalent de 8 gros blocs, la répartition entre les 2 sous-stocks variant d'un jour à l'autre. Le stock est utilisé pour stabiliser au moins pendant 15 jours le flux des teneurs journalières autour d'une valeur moyenne, en assurant par là un fonctionnement sans à-coups de la laverie. On destine donc un bloc au stock si son envoi direct à la laverie perturbe sa marche.

L'envoi d'un bloc dans un sous-stock, un jour donné, s'accompagne de la reprise d'un bloc le même jour dans l'autre sous-stock. Dans le cas où le stock ne serait pas suffisant pour lisser les fluctuations à l'entrée-laverie, on donne à l'exploitation un degré de souplesse supplémentaire, à savoir :

- au lieu de produire 2 blocs sur chaque banc, on extraira 3 blocs sur un banc et 1 bloc sur l'autre, tout en rétablissant l'équilibre avant 8 jours.
- certains jours on extraira 5 blocs (la laverie en traitant toujours 4), ces surproductions passagères devront être équilibrées par un nombre équivalent de sous-productions.

Toutefois on s'attache à respecter le plus souvent possible la norme de l'exploitation.

c) Schéma 2 : 4 bancs de 5 m. de haut sont exploités simultanément à l'aide d'une pelle sur chaque banc. Les pelles doivent extraire entièrement une ligne de blocs avant d'attaquer la ligne suivante. La mobilité des pelles permet de choisir les blocs à extraire de façon à ce que la teneur moyenne des blocs exploités un même jour s'écarte le moins possible de la moyenne observée sur 15 jours à l'entrée-laverie. L'homogénéisation ainsi opérée à l'exploitation se traduit par des coûts plus élevés de roulage, aussi a-t-on cherché à maintenir les déplacements des pelles dans des limites raisonnables.

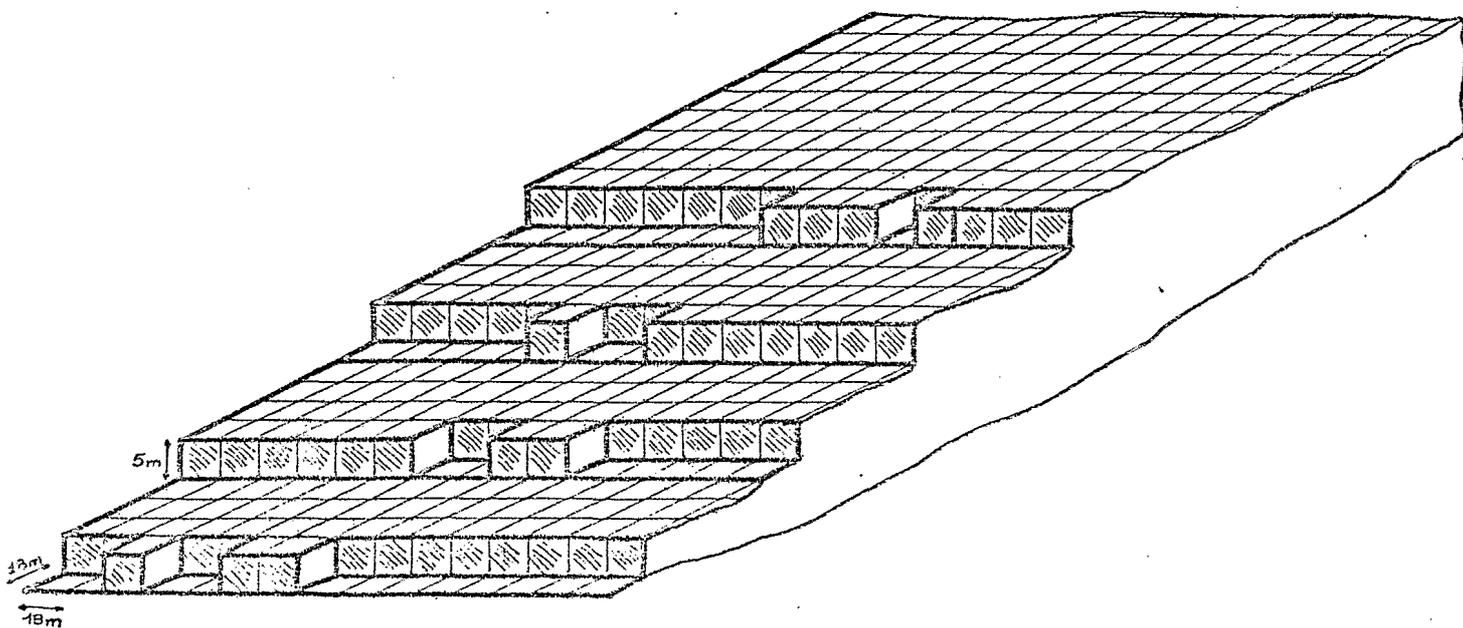


Fig : 3 - Allure du front d'exploitation pour le schéma 2

Nous avons également envisagé le cas où l'ensemble des blocs ne peut être économiquement récupéré. Une exploitation sélective peut être menée dans le cadre du schéma 2, étant donné la mobilité des pelles soit 2' le schéma d'exploitation en découlant.

Le point de vue adopté consiste à observer comment la sélection définie à partir de la courbe tonnage-teneur est reproduite à l'exploitation compte tenu des contraintes supplémentaires de roulage et de contrôle du flux de teneurs à l'entrée laverie.

Nous avons défini les critères utilisés pour choisir les blocs à envoyer en laverie de la façon suivante :

1°/ Soit z_c la teneur de coupure optimale définie sur la courbe tonnage-teneur : on a pris $z_c = 0.75 \% \text{ Cu}$ éliminant ainsi 32 % du gisement. Tout bloc dont la valeur krigée est supérieure à z_c est sélectionné.

2°/ Soit z'_c une teneur limite en dessous de laquelle l'exploitant perd de l'argent. Tout bloc dont la valeur krigée est inférieure à z'_c est envoyé au stérile.

3°/ Un bloc de teneur krigée comprise entre z'_c et z_c peut être sélectionné à certaines conditions :

- la moyenne locale (sur une quinzaine) s'en trouve abaissée dans des limites raisonnables (pas plus de 5 % en différence relative).

- le mélange d'un tel bloc aux autres blocs sélectionnés permet d'obtenir un flux de minerai plus régulier à l'entrée laverie.

- la récupération d'un tel bloc évite à une pelle de trop se déplacer pour extraire le prochain bloc de teneur krigée supérieure à z_c .

Ces critères sont arbitraires mais sont plus proches de la réalité minière qui est différente de l'application brutale d'une teneur de coupure.

Comme pour le schéma 2 les blocs finalement sélectionnés sont choisis de façon à homogénéiser le minerai à l'entrée laverie.

3 - Mise en oeuvre de la simulation d'exploitation.

Seul le schéma 1 a été entièrement simulé par ordinateur, pour les autres schémas seuls les calculs des résultats journaliers et des variances de dispersion ont été faits sur ordinateur, la planification au jour le jour de l'exploitation a été effectuée à la main.

En fonction des contraintes que l'on s'est imposées, on a déterminé pour chaque jour les blocs à envoyer en laverie, et éventuellement la décision d'utiliser ou non le stock. Le choix s'est fait sur la base des estimateurs de krigeage (cf. [2]) des unités d'exploitation : en effet, l'exploitant ne connaît les teneurs vraies des blocs qu'après coup c'est-à-dire trop tard, aussi, au moment de la planification, il doit se fier à des estimateurs. On a choisi le krigeage car il s'agit de l'estimateur linéaire non biaisé minimisant l'erreur d'estimation.

Le krigeage mis en oeuvre ici est très simple car l'information utilisée (un sondage central simulé par bloc élémentaire) est régulière. En moyenne, chaque bloc de $18 \times 18 \times 5 \text{ m}^3$ est estimé avec une erreur d'écart-type relatif $\frac{\sigma_K}{m}$ de 18%.

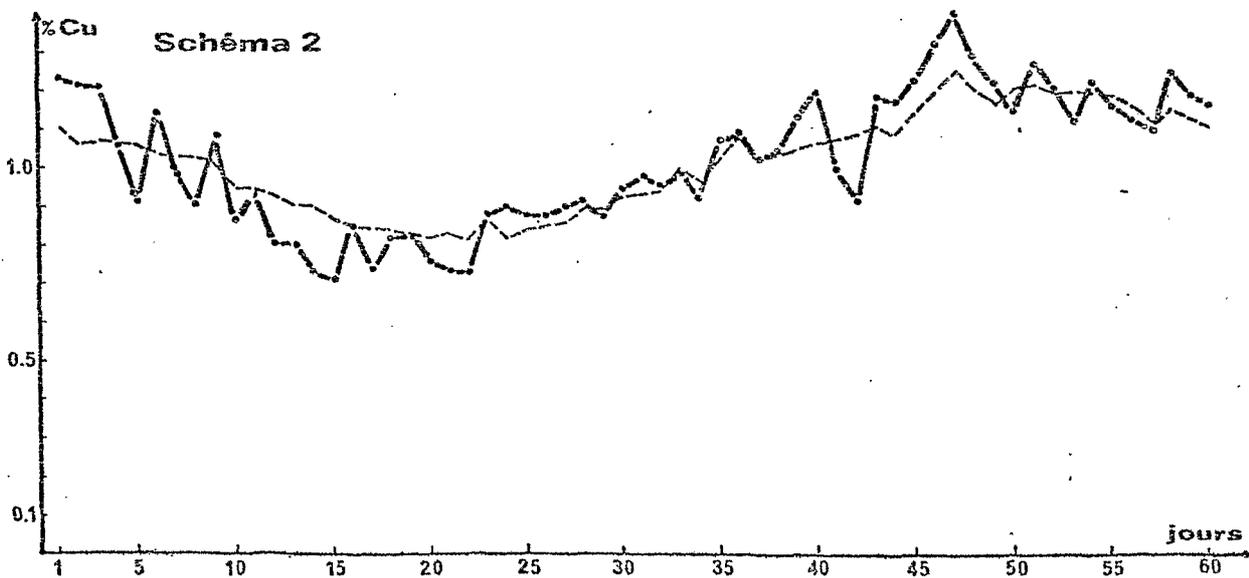
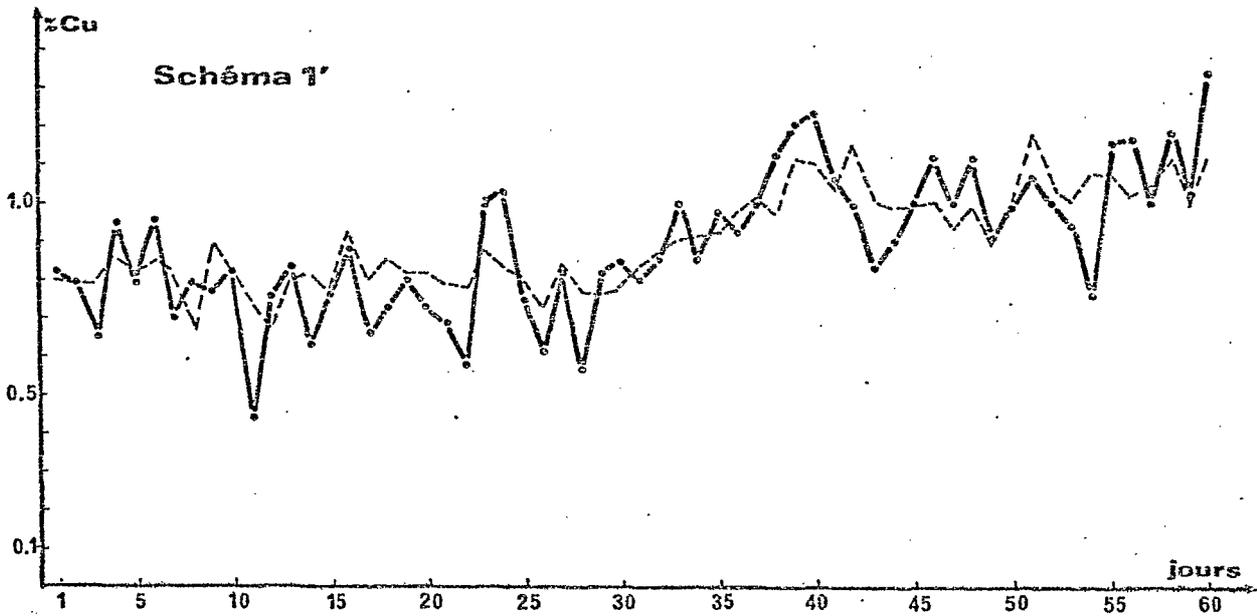
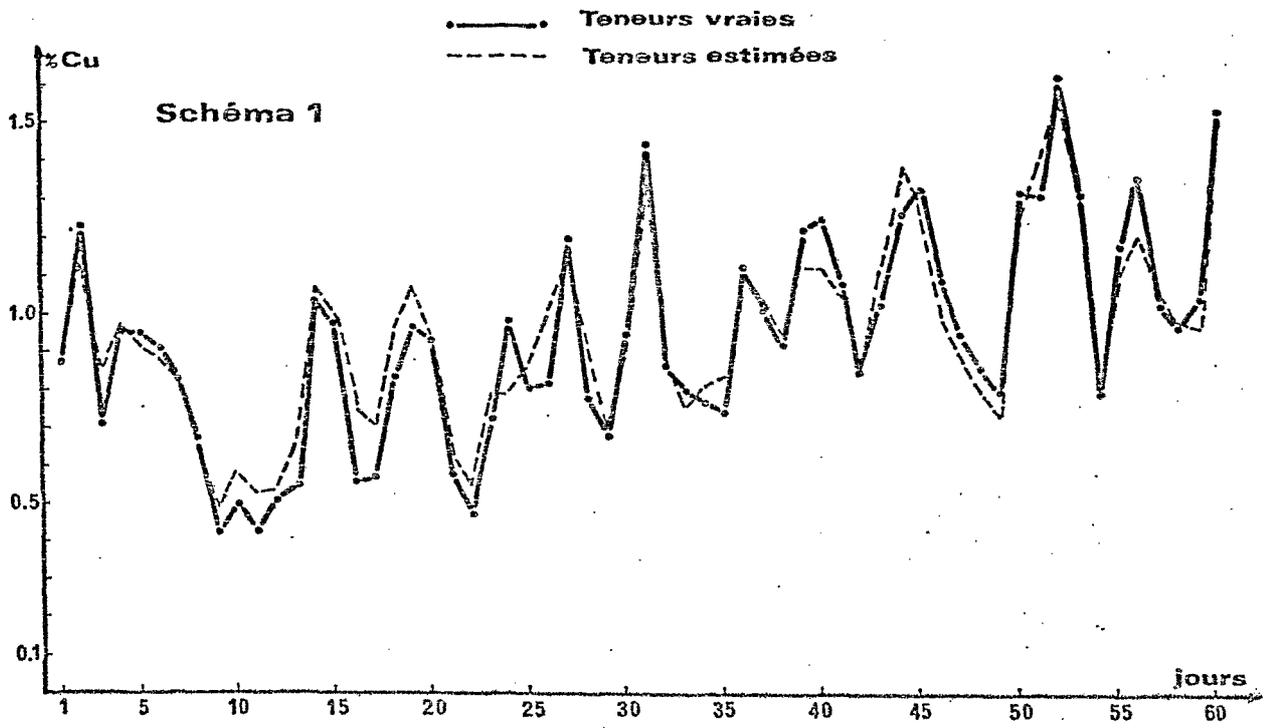
Les calculs des moyennes journalières à partir desquels on choisit les blocs ont donc été faits sur ces estimateurs, l'intérêt de l'étude sur simulation est qu'ici on dispose en outre des teneurs vraies des blocs ; on peut donc tirer un bilan comparatif des méthodes envisagées à partir des résultats réels de l'exploitation.

Pour le schéma 1', bien que l'objectif ne soit pas de simuler le comportement du stock d'homogénéisation, il a fallu faire certaines hypothèses sur les teneurs d'un bloc repris au stock :

1 - Pour la planification, on décide de prendre un bloc au stock pour le mélanger à 3 autres blocs sur la base de la teneur moyenne estimée du stock au moment considéré.

2 - Une fois la décision prise de prendre un bloc au stock, on calcule les teneurs moyennes vraies et estimées de la journée en supposant que les teneurs vraies et estimées du bloc pris au stock sont des variables aléatoires. Ces variables aléatoires sont considérées comme des variables gaussiennes de moyenne m et de variance σ^2 :

Fig. 4 - PROFILS CHRONOLOGIQUES DES TENEURS JOURNALIERES -



* m est la teneur moyenne (vraie ou estimée) du stock.

* σ/m est fixé de telle sorte que si l'on considère l'ensemble des blocs individuels envoyés au stock au cours de l'année, la différence entre les teneurs maximale et minimale de cet ensemble rapportée à la teneur moyenne est estimée égale à $4 \sigma/m$.

4 - Résultats.

a) Pas de sélection

Sur la figure 4, on donne pour les 3 schémas simulés sans sélection l'allure du flux des teneurs pendant les 2 premiers mois.

On voit sur la figure précédente que le problème posé au départ n'était pas illusoire. Entre le schéma 1 et les schémas 1' et 2 la préférence du laveur va évidemment à ces derniers.

Bien que l'on ait du mal à imaginer que la laverie puisse traiter avec un rendement optimal les teneurs issues du schéma 1, il reste difficile de chiffrer a priori la perte occasionnée. Quoi qu'il en soit, les profils obtenus à partir des simulations sont très utiles au stade de l'étude de la laverie à implanter.

Le tableau ci-dessous permet d'avoir une vue synthétique de l'impact de la méthode d'exploitation sur les fluctuations à l'entrée de la laverie.

	Schéma 1	Schéma 1'	Schéma 2
Variance de dispersion d'1 jour dans 7 jours	0.0452	0.0115	0.0074
Variance de dispersion d'1 jour dans 15 jours	0.0501	0.0136	0.0082
Variance de dispersion d'1 jour dans 1 mois	0.0525	0.0156	0.0106
Variance de dispersion d'1 jour dans 1 an	0.0816	0.0405	0.0310
Variance de dispersion de 15 jours dans 1 an	0.0260	0.0249	0.0227

TABLEAU 1 : Variances de dispersion issues des trois méthodes d'exploitation. (Lorsqu'il y a 2 chiffres dans une case, le chiffre supérieur concerne les teneurs vraies, celui du dessous les teneurs estimées).

Les résultats ci-dessus appellent plusieurs remarques :

- Selon la méthode employée pour exploiter un gisement, les caractéristiques de fluctuation du flux des teneurs journalières peuvent varier dans des proportions considérables. L'étude sur simulation permet de prévoir les ordres de grandeur des variabilités à diverses échelles à l'entrée-laverie, ce que la géostatistique classique d'estimation était impuissante à faire (puisque basée sur la connaissance des structures de la minéralisation in situ).
- L'écart entre les dispersions pour les différents schémas est de plus en plus grand quand l'échelle à laquelle on se place est petite; il est clair que quelle que soit la méthode employée, le minerai extrait pendant une quinzaine sera sensiblement le même, aussi est-il normal que les variances de dispersion des teneurs moyennes des quinze jours vis-à-vis de la teneur moyenne de l'année soient identiques. En revanche, les mélanges opérés pour les schémas 1' et 2 s'avèrent particulièrement efficaces pour stabiliser les teneurs journalières pendant une semaine ou une quinzaine : cela correspond bien au désir du laveur d'éviter de changer chaque jour ses réglages.
- Si l'on considère maintenant les dispersions des estimateurs, on constate que les teneurs journalières estimées sont beaucoup plus lissées que les valeurs vraies. Il s'agit d'une propriété classique de l'estimateur de krigeage et l'on sait bien que pour évaluer les dispersions réelles il ne faut pas se fier aux dispersions des estimateurs. Dans le cas où l'exploitant ne dispose que des seuls estimateurs, il peut néanmoins déduire les dispersions vraies en appliquant la relation de lissage suivante (rigoureuse si l'estimateur Z^* de la quantité Z est un krigeage) :

$$\text{Var } Z = \text{Var } Z^* + \sigma_K^2$$

où σ_K^2 est la variance d'estimation par krigeage de Z par Z^* . Pour le schéma 2 la relation ne s'applique pas exactement, puisque Z^* n'est pas un krigeage mais une moyenne de 8 krigeages ; en appliquant une relation de lissage analogue, on obtient toutefois un bon ordre de grandeur des dispersions vraies. Pour le schéma 1', en revanche, cette prévision n'est plus possible car la teneur journalière est une moyenne de teneurs ayant des comportements différents selon leur provenance (mine ou stock).

- On remarquera que même si les dispersions estimées sont très faibles (quasiment nulles) c'est-à-dire si la planification à partir des estimateurs est excellente, les fluctuations réelles des teneurs ne disparaissent pas entièrement.

Il y a donc un seuil de variabilité en deça duquel on ne peut descendre : ce seuil est défini par la qualité de l'estimation ; les variances d'estimation expérimentales des teneurs journalières pour les 3 schémas sont :

Schéma 1 : 0.0089 Schéma 1' : 0.0131 Schéma 2 : 0.0061

Pour le schéma 1' on note que : - 17% de la production transite par le stock, ce qui est assez faible.

- Pour près de 50% des jours, la production ne correspond pas à la normale de 2 blocs sur chaque banc. Si de trop fréquents décalages dans la production posait des problèmes, on serait alors tenté d'y remédier en adjoignant au stock existant un troisième sous-stock de teneur moyenne.

b) avec sélection

Le tableau ci-dessous donne sur la 1ère colonne les principales caractéristiques moyennes du minerai récupéré pendant 1 an de production et sur les 2ème et 3ème colonnes les caractéristiques du minerai après coupure stricte à 0.6 % et 0.75 % (toujours pour 1 an de production).

	Sélection effective	Coupure à 0.6 %	Coupure à 0.75 %
Tonnage envoyé en laverie	9.80×10^6 t	9.80×10^6 t	9.90×10^6 t
Tonnage envoyé au stérile	2.55×10^6 t	1.55×10^6 t	3.25×10^6 t
Teneur du minerai traité	1.188 % Cu (estimé : 1.183 % Cu)	1.145 % Cu (estimé : 1.143 % Cu)	1.225 % Cu (estimé : 1.220 % Cu)
Quantité de métal du minerai traité	116.400 t	112.200 t	120.000 t

Tableau 2 : Caractéristiques du minerai extrait suivant trois politiques de sélection.

Sur l'histogramme global des teneurs estimées de l'ensemble des blocs du gisement, les prévisions des caractéristiques du minerai après coupure à 0.6 % et 0.75 % donnaient ceci (en ramenant tout à 1 an de production soit 9.8×10^6 t traitées en laverie) :

	Coupure à 0.6 %	Coupure à 0.75 %
Tonnage envoyé au stérile	2.42×10^6 t	4.61×10^6 t
Teneur du minerai traité	1.140 % Cu	1.224 % Cu
Quantité de métal du minerai	111.700 t	119.900 t

Tableau 3 : Prévisions des caractéristiques de la production d'un an à partir de l'histogramme global du gisement.

Si les teneurs prévues par l'étude de faisabilité sont proches des teneurs effectivement récupérées on remarque qu'il n'en est pas de même pour les tonnages.

Les résultats du tableau 3 ont été calculés en supposant que le gisement était entièrement homogène et que l'histogramme local était identique à l'histogramme global. Il n'était pas besoin d'entreprendre cette étude pour être persuadé que cela était faux, par contre les données simulées permettent d'avoir un ordre de grandeur de l'écart entre les caractéristiques globales et locales.

Or cet écart n'est pas mince et peut avoir des conséquences importantes sur la marche de l'exploitation : si l'extraction des blocs stériles a été prévue sur la base d'un bloc stérile pour 2 blocs envoyés en laverie (d'après l'histogramme global), des difficultés dans l'approvisionnement de la laverie surgiront quant une année le rythme sera de un bloc au stérile pour 3 en laverie (cf. tableau 2, coupure à 0.75 %) et corrélativement une autre année de un bloc au stérile et un en laverie.

A ce fait vient s'ajouter le décalage entre l'application stricte de la teneur de coupure (0.75 % par ex.) et la sélection pratiquée sur le terrain : la simulation de la production pendant un an montre que la sélection pratiquée est équivalente à l'application d'une teneur de coupure de 0.69 %.

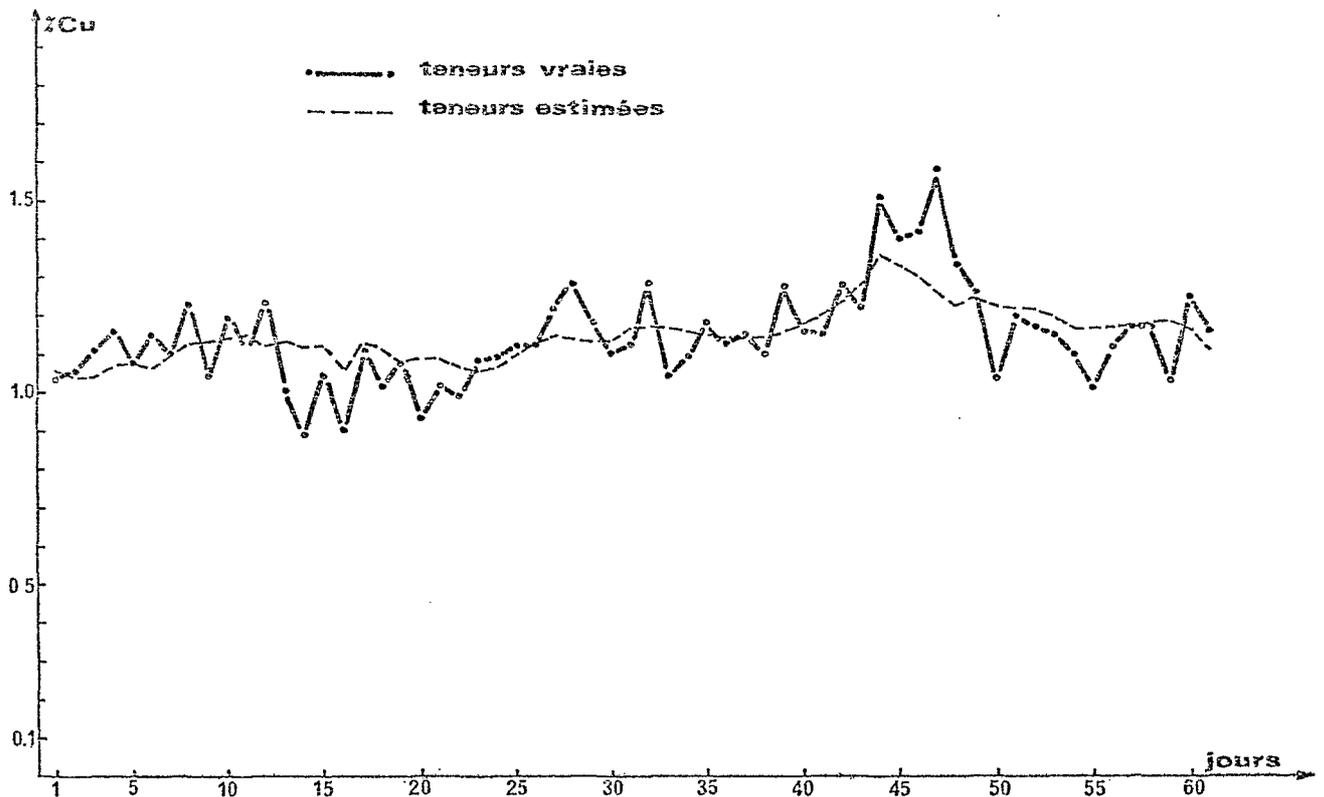


Fig. 5 - Profil chronologique des teneurs journalières :
Schéma 2' (avec sélection).

Il s'agit uniquement d'un équivalent sur une année mais la réalité est plus complexe : en fait la coupure appliquée plus ou moins consciemment n'est pas fixée une fois pour toutes et varie suivant les caractéristiques locales de la zone exploitée. La réalisation à la main de la simulation d'exploitation a mis en évidence ce fait sans que l'on puisse en déduire un critère théorique de coupure locale.

La figure 5 donne le profil chronologique des teneurs journalières produites pendant un an. L'allure de ce profil est très semblable à celle correspondant au schéma 2 sans sélection. Les variances de dispersions à diverses échelles (cf. Tableau 4) sont d'ailleurs très proches.

Variance d'estimation d'une journée	0.0070
Variance de dispersion d'un jour dans 7 jours	0.0072 0.0015
Variance de dispersion d'un jour dans 15 jours	0.0094 0.0027
Variance de dispersion d'un jour dans 30 jours	0.0104 0.0032
Variance de dispersion d'un jour dans un an	0.0239
Variance de dispersion de 15 jours dans un an	0.0220

Tableau 4 : Variance de dispersion à diverses échelles.
(chiffre sup^r : vrai ; Chiffre inf^r : estimé)

CONCLUSION.

La décision finale entre les 3 méthodes d'exploitation envisagées appartient à l'économiste qui dira si le coût d'un stock ou de roulages plus importants peut être compensé par une meilleure récupération du métal.

A l'aide des simulations, il est possible de fournir un certain nombre de paramètres techniques dont la connaissance est d'un intérêt primordial avant de mettre le gisement en exploitation.

Bien que simple, le cas traité ici montre ce que l'on peut obtenir des simulations du point de vue de la prévision des fluctuations à la sortie usine. Il s'agit évidemment d'un aspect particulier dans l'étude des problèmes aval (après les études globales de faisabilité). D'autres aspects, liés notamment à la pratique d'une politique sélective, peuvent sans doute faire l'objet de recherches fructueuses.

La simulation sur un an d'une exploitation sélective a fait ressortir 2 points importants :

- la coupure sur l'histogramme de l'ensemble du gisement n'a pas nécessairement de signification locale.
- les contraintes techniques de l'exploitation modifient notablement les prévisions faites en ne retenant que la teneur de coupure comme critère de sélection.

REFERENCES.

- [1] - A. JOURNEL (1974) : Simulation conditionnelle de gisements miniers - Théorie et Pratique. Thèse de Docteur-Ingénieur, Université de Nancy 1.
- [2] - G. MATHERON (1970) : La Théorie des Variables Régionalisées et ses applications.- Les Cahiers du Centre de Morphologie Mathématique, Fasc. n° 5, Ed.: Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris.
- [3] - G. MATHERON (1976) : Forecasting block grade distributions : the transfer functions.- In Advanced Geostatistics in the Mining Industry, NATO A.S.I., Rome, 1976. p. 237. Ed.: D. Reidel Publ. Corp., Dordrecht, Holland.