

*Tous droits de traduction, d'adaptation
et de reproduction, par tous procédés,
y compris la photographie et le microfilm
réservés pour tous pays.*

© 1967 Masson et C^{te}, Paris.
Imprimé en France.

1/1000

ÉLÉMENTS

POUR UNE THÉORIE
DES MILIEUX POREUX

PAR

G. MATHERON

MASSON & CIE, ÉDITEURS

A LA MÊME LIBRAIRIE

Du même auteur :

- LES VARIABLES RÉGIONALISÉES ET LEUR ESTIMATION. *Une application de la théorie des fonctions aléatoires aux sciences de la nature.* 1965. Un volume de 306 pages, avec 1 figure.
-
- PRÉCIS DE GÉOMORPHOLOGIE, par M. DERRUAU, 5^e édition et mise à jour 1967. Un volume de 416 pages, avec 162 figures et 61 planches hors texte.
- APPLICATION DE LA GÉOLOGIE AUX TRAVAUX DE L'INGÉNIEUR, par J. GOGUEL, 2^e édition revue et corrigée, 1967. Un volume de 374 pages, avec 118 figures.
- TRAITÉ DE TECTONIQUE, par J. GOGUEL, 2^e édition revue et augmentée, 1965. Un volume de 457 pages, avec 215 figures.
- MAGNÉTISME EN GÉOLOGIE ET PROSPECTION MAGNÉTIQUE AU SOL (*Manuels de prospection géophysique*, publiés sous la direction de J. Goguel), par P. LASFARGUES, 1966. Un volume de 158 pages, avec 75 figures, 5 dépliants hors texte.
- PRINCIPES ET MÉTHODES DE LA GÉOMORPHOLOGIE, par J. TRICART, 1965. Un volume de 496 pages, avec 35 figures, 8 planches et 1 carte en couleurs.
- L'ÉPIDERME DE LA TERRE. *Esquisse d'une géomorphologie appliquée* (Travaux publics, urbanisme, aménagements agricoles, prospection des ressources naturelles), par J. TRICART, 1962. Un volume de 166 pages, avec 11 figures et 12 planches hors texte (Collection « *Évolution des Sciences* »).
- MISE EN VALEUR DES GISEMENTS MÉTALLIFÈRES. *Estimation. Exploitation. Traitement des minerais*, par J. SANDIER, 1962. Un volume de 150 pages, avec 86 figures, tableaux.
- LES EAUX SOUTERRAINES. *Hydrologie dynamique et chimique. Recherche, exploitation et évaluation des ressources*, par H. SCHOELLER, 1962. Un volume de 642 pages, avec 187 figures.
- PHYSIQUE DE BASE *pour biologistes, médecins, géologues* (S.P.C.N., Licence de sciences naturelles et de chimie-physiologie, études médicales), par L. LLIBOUTRY, 2^e édition, 1963. Un volume de 422 pages, avec 291 figures.

REVUE DE GÉOGRAPHIE PHYSIQUE ET DE GÉOLOGIE DYNAMIQUE 5 fascicules par an
--

ÉLÉMENTS
POUR UNE THÉORIE
DES MILIEUX POREUX

par

G. MATHERON



MASSON ET C^{IE}, ÉDITEURS
120, BOULEVARD SAINT-GERMAIN, PARIS, VI^e
1967

INTRODUCTION

*« ... Sunt ergo corpora certa
quae spatium pleno possint distinguere inane »*

Mis en face de la réalité d'un milieu poreux, l'esprit peut s'effrayer d'abord de la tâche à entreprendre. Ces millions de grains et la variété inépuisable de leurs formes et de leurs dimensions, le réseau compliqué de leurs interstices, où mille détours possibles s'offrent au cheminement d'un fluide, semblent défier les ressources de la description. Mais cette richesse n'est qu'apparente, cette diversité superficielle donne bientôt une impression de monotonie profonde : Ce sont toujours les mêmes grains, les mêmes pores, qui se répètent indéfiniment, identiques à eux-mêmes, en dépit de variations insignifiantes. Ayant reconnu cela, la raison empirique se met au travail. Elle élabore la multiplicité informe qui lui est donnée, lui impose ses propres cadres, et se construit ainsi un objet sur lequel elle peut agir et qu'elle peut étudier. Elle ramène la géométrie complexe des grains à la forme simple de quelques courbes granulométriques, et résume les itinéraires capricieux des filets de courant à l'aide d'une propriété unique, la perméabilité.

Nous nous proposons, dans ce qui suit, de soumettre à l'analyse théorique les deux notions — granulométries et perméabilité — qui se sont ainsi progressivement dégagées de l'expérience. Il serait prématuré de prétendre construire dès aujourd'hui une théorie complète des milieux poreux. On se heurterait à trop de difficultés encore irrésolues. Pour ne citer qu'un exemple, on ne sait pas encore rattacher d'une manière précise la perméabilité d'un milieu poreux aux granulométries qui expriment ses caractères géométriques. Mais on ne doit pas pour autant vouer ces études à un empirisme définitif. Sans prétendre ramener à l'unité de la forme rationnelle la masse des connaissances fragmentaires acquises empiriquement, on peut essayer cependant d'y introduire un peu d'ordre. On ne trouvera donc ci-après ni vaste synthèse, ni résultats vraiment nouveaux. Notre projet, beaucoup plus modeste, sera seulement de produire au jour et d'analyser ce qui est déjà contenu implicitement dans ces deux concepts empiriques de granulométrie et de perméabilité. La première partie de ce travail sera donc consacrée à la géométrie des milieux poreux, c'est-à-dire aux

granulométries, et la deuxième à leurs propriétés hydrodynamiques. c'est-à-dire aux perméabilités.

Pour qu'il soit possible de définir au sens usuel la granulométrie d'un matériau naturel ou artificiel, deux conditions sont requises :

a) le matériau doit être constitué de grains individualisables sans ambiguïté;

b) il doit être possible de classer les grains en fonction d'un paramètre quantitatif unique.

Dans la pratique industrielle ou en laboratoire, ces conditions sont imposées *ipso facto* au matériau traité par les opérations techniques auxquelles on le soumet : les grains sont libérés ou individualisés (donc définis en tant que grains) par une suite d'opérations déterminées (concassage, broyage) et séparés en classes par une autre suite d'opérations également bien définies (par exemple des tamisages). Le résultat — la courbe granulométrique — permet de comparer entre eux des matériaux différents, pourvu qu'ils soient traités de manière strictement identique : tel matériau apparaîtra comme plus grossier, ou plus hétérogène, que tel autre. Mais la granulométrie obtenue dépendra en général des conditions opératoires choisies, et, en dehors de cas particuliers très simples, tels que celui des grains sphériques, ne pourra pas se relier de manière évidente à des caractéristiques géométriques précises des grains. Le classement empirique ne correspond pas, en général, à un critère conceptuel clair. Et, en effet, pour peu que leur forme soit complexe, les grains ne sont pas soumis à une relation d'ordre unique. Selon que l'on met l'accent sur le plus grand diamètre, la section moyenne, le volume, etc... on obtient différents principes de classement, entre lesquels chaque dispositif expérimental réalise une pondération variable.

D'autre part, la notion de granulométrie ne se limite pas aux matériaux préparés, mais s'étend également aux matériaux en place. Le pétrographe, l'hydrogéologue, le pétrolier, s'intéressent à la granulométrie des minéraux constitutifs d'une roche, ou d'un milieu poreux. A une autre échelle, le sédimentologue s'intéresse aux dimensions de lentilles gréseuses, aux puissances affectées aux différents faciès d'une série lithologique rythmique, etc... Or une granulométrie *in situ* exprime bien certaines caractéristiques géométriques des grains individuels, mais ne tient pas compte des rapports des grains entre eux et de leurs dispositions mutuelles dans l'espace. Pour employer un langage pétrographique, elle renseigne sur la structure des grains, mais non sur la texture de la roche (l'arrangement des grains). De plus, la notion de grain individualisable peut devenir très floue et cesser d'être utilisable. Entre deux grains distincts, et les mêmes grains reliés par un chapelet

de granules, puis par un isthme, il y a un passage continu que la granulométrie ne peut pas exprimer. Dans un milieu poreux, la notion de grain peut même s'évanouir tout à fait, et de toute manière les propriétés hydrodynamiques les plus intéressantes (la perméabilité) semblent liées davantage aux dimensions des pores qu'à celles des grains. Il convient donc d'introduire une conception plus large de la granulométrie, capable de décrire la géométrie complexe d'un milieu à deux composantes sans se référer à des « grains » individualisés. A la granulométrie des grains, il convient aussi d'adjoindre celle des pores, et c'est précisément cette granulométrie des pores qui paraît susceptible de rendre compte de l'arrangement des grains entre eux, c'est-à-dire, de la texture de la roche, ainsi que de la perméabilité du milieu.

Cette conception élargie de la granulométrie est certainement possible. De fait, elle existe déjà. Les matériaux *in situ*, en effet, ne sont généralement pas accessibles dans leurs trois dimensions. On ne dispose le plus souvent que de sections (affleurements, lames minces, etc.) à deux dimensions, et le passage de la granulométrie à deux dimensions, mesurée sur une section, à la vraie granulométrie à trois dimensions pose un problème difficile (que nous aborderons dans un cas particulier). Sur les sections elles-mêmes, il est souvent plus commode de mesurer non pas la taille des grains, mais leurs traversées, c'est-à-dire les longueurs des segments qu'ils interceptent sur une ou plusieurs droites parallèles à une direction donnée. La statistique de ces traversées conduit à une véritable granulométrie à une seule dimension : mais celle-ci n'est nullement liée à l'existence des grains individualisés, et peut être construite aussi bien à partir des traversées des pores ou du ciment. Par ailleurs, les diagrammes de Purcell, utilisés dans l'industrie pétrolière, représentent l'envahissement progressif des pores par le mercure sous des pressions croissantes (des rayons décroissants pour la courbure des ménisques) et possèdent, par conséquent, la signification d'une véritable granulométrie des pores, à trois dimensions cette fois.

Le premier chapitre de cette étude sera donc consacré à définir une conception purement géométrique de la granulométrie *in situ*. Celle-ci devra être indépendante de l'existence de grains individuels, s'appliquer aux pores aussi bien qu'aux grains, et généraliser, par conséquent, la notion de granulométrie des traversées unidimensionnelles ou celle du diagramme de Purcell, mais contenir également comme cas particulier la notion usuelle de granulométrie, chaque fois que celle-ci est définie sans ambiguïté (par exemple, dans le cas de grains sphériques). D'autre part, l'extrême complexité des milieux

naturels que l'on cherche à décrire (constituants d'une roche, milieu poreux, succession de faciès lithologiques...) rend à peu près inévitable le recours à un langage probabiliste. Les courbes granulométriques cumulées — bien qu'elles ne possèdent pas par elles-mêmes de contenu probabiliste — appellent, elles aussi, ce langage, dans la mesure où elles se présentent sous un aspect formellement identique aux fonctions de répartition du calcul des probabilités. Dans un deuxième chapitre, par conséquent, nous chercherons à décrire un tel milieu comme un ensemble aléatoire et à le caractériser par sa loi spatiale $P(x_1, x_n)$ donnant la probabilité pour que n points déterminés de l'espace x_1, \dots, x_n appartiennent, par exemple, aux grains. Plus généralement, nous devons introduire les moments fonctionnels $P(B, B')$ donnant la probabilité pour que deux ensembles donnés B et B' soient contenus, le premier dans les grains, le second dans les pores, et reconstruire, à partir des $P(B, B')$ les notions granulométriques du premier chapitre, qui recevront ainsi l'interprétation probabiliste qu'elles appellent. Ce programme ne pourra, malheureusement, être complètement réalisé que dans le cas particulier de la granulométrie des traversées.

Dans un troisième chapitre, nous présenterons, à titre d'illustration, quelques schémas susceptibles d'être utilisés dans les applications (schéma booléen, schéma semi-markovien), et nous aborderons, dans le chapitre 4 le problème difficile qui consiste à reconstituer une granulométrie originelle à trois dimensions à partir des granulométries induites à deux dimensions (sections planes) ou à une seule dimension (traversées). On voudra bien, peut-être, accorder quelque attention au rôle important que semblent jouer les grandeurs spécifiques : nombre, longueur et surfaces spécifiques, dans l'espace à trois dimensions, nombre et périmètre spécifiques dans l'espace à deux dimensions. Enfin, dans une annexe purement mathématique, nous apporterons quelques justifications axiomatiques sommaires à la théorie des milieux poreux aléatoires exposée dans le deuxième et le troisième chapitres.

L'apparition de ce langage probabiliste ne doit prêter à aucune équivoque. Elle ne signifie en aucune façon que l'on fasse appel à je ne sais quel hasard conçu comme un accroc hypothétique au déterminisme ⁽¹⁾. Ce langage joue ici le même rôle que dans la mécanique statistique classique : celle-ci, on le sait, renonçant à expliciter le fourmillement des particules élémentaires et l'entrecroisement sans

⁽¹⁾ Le concept de hasard, c'est-à-dire, proprement, de ce qui n'est ni voulu ni prévu par l'homme, n'a rien de scientifique. On n'en fait pas usage dans la formulation axiomatique de la théorie des probabilités. Le mot lui-même n'est plus guère utilisé que par une sorte de concession à une habitude ancienne, ou pour rendre plus intuitifs les exemples traités.

fin de leurs interactions, ne retient fermement que ce seul point : à savoir que ces mouvements, si complexes soient-ils, obéissent strictement aux lois de la mécanique, et ce point lui suffit pour retrouver les concepts et les lois de la thermodynamique.

Qu'il s'agisse donc d'étudier la géométrie d'un milieu poreux ou, comme dans la deuxième partie, ses propriétés hydrodynamiques, le calcul des probabilités n'intervient pas à titre de science des lois du hasard. Il apparaît plutôt comme un outil conceptuel permettant de penser un changement d'échelle. Il fonctionne comme un grand simplificateur. De toute la richesse des phénomènes qui se manifestent à l'échelle inférieure, et de la complexité inextricable des structures qu'ils y dessinent, il ne retient rien ou presque (seulement l'universel, c'est-à-dire la loi spatiale). Mais ce presque rien se révèle essentiel, et lui suffit pour reconstituer ou retrouver les concepts et les lois qui donnent la clé de ce qui se joue à l'échelle supérieure. Et, à leur tour, ces nouveaux objets apparus à cette nouvelle échelle vont entrer dans de nouvelles synthèses, nouer de nouvelles structures, dont la complexité croissante rendra bientôt nécessaire une nouvelle simplification, et le passage à une échelle encore plus élevée.

Dans la deuxième partie de ce travail, consacrée à l'étude des écoulements de filtration dans un milieu poreux, nous devons distinguer différents niveaux d'observation, dont chacun sera caractérisé par des objets, des structures et des lois qui n'apparaissent qu'à son échelle. Outre un niveau microscopique, qui est celui des particules élémentaires, nous devons considérer un niveau granulométrique, où règne l'équation de Navier, puis un premier niveau macroscopique, où se manifeste la loi de Darcy. Les perméabilités, apparues à ce premier niveau macroscopique, prennent une signification purement locale, lorsque l'on élève encore le point de vue, et se montrent comme régionalisées (variables dans l'espace), d'où passage à un deuxième niveau macroscopique, plus élevé que le premier, et genèse d'une nouvelle perméabilité macroscopique constante. Dans une formation géologique un peu complexe, caractérisée comme la superposition de structures emboîtées les unes dans les autres à des échelles différentes, ce processus se répète, et l'on doit définir autant de perméabilités distinctes qu'il y a d'échelles de structures.

Le chapitre 5 sera consacré au premier de ces changements d'échelle, c'est-à-dire au passage du niveau granulométrique au premier niveau macroscopique. Il apparaîtra que la loi de Darcy n'est pas une conséquence de l'équation de Navier, mais seulement de la linéarité de celle-ci et d'une condition générale selon laquelle seuls sont observables au niveau macroscopique les écoulements uniformes ou quasi

uniformes à ce niveau. Cette conclusion restera un peu formelle, car il ne nous sera pas possible d'expliciter la perméabilité en fonction de la géométrie du milieu poreux. Nous montrerons seulement que la symétrie et le caractère défini-positif du tenseur k^{ij} peuvent se déduire de l'équation de Navier.

Les deux derniers chapitres, enfin, étudieront la composition des perméabilités. C'est peut-être ici que l'on trouvera quelques résultats nouveaux dans un ouvrage qui n'est pas destiné à en présenter. Un milieu à perméabilités ponctuelles régionalisées (variables), possédant cependant une certaine homogénéité statistique, se comporte, vis-à-vis d'écoulements uniformes ou quasi uniformes, comme s'il était doué d'une perméabilité macroscopique constante obligatoirement comprise entre la moyenne harmonique et la moyenne arithmétique des perméabilités ponctuelles. Grâce à une méthode d'approximation due à Schwydlar, on peut montrer que cette perméabilité constante se situe à mi-chemin ou aux deux-tiers du chemin séparant ces deux limites, selon que l'espace est à deux ou trois dimensions. Ainsi la règle de la moyenne géométrique ne peut pas s'appliquer aux écoulements tri-dimensionnels. Nous montrons par contre qu'elle s'applique en toute rigueur aux écoulements plans, au moins dans le cas particulier où les perméabilités ont une loi spatiale lognormale et invariante par rotation.

Les écoulements non uniformes, et en particulier les écoulements radiaux, apparaîtront sous un aspect beaucoup plus complexe. Il n'existe pas pour eux de perméabilité macroscopique constante. La perméabilité apparente qu'on peut leur attribuer est aléatoire, et sa valeur probable peut, selon les conditions aux limites, prendre n'importe laquelle des valeurs comprises entre les moyennes harmonique et arithmétique. Il semble que l'on atteigne ici les limites de ce que l'analyse théorique peut apporter en l'état actuel de nos connaissances.

PREMIÈRE PARTIE

GÉOMÉTRIE DES MILIEUX POREUX

CHAPITRE PREMIER

GRANULOMÉTRIES EN PLACE

SOMMAIRE

Paragraphe 1. — *Dilatation et érosion des grains selon un ensemble B: un point z appartient au dilaté des grains si le translaté de B implanté en z rencontre les grains, à l'érodé des grains si ce translaté est contenu dans les grains. Dilater les grains équivaut à éroder les pores et réciproquement.*

Paragraphe 2. — *L'ouverture de A s'obtient en érodant A puis en dilatant l'ensemble ainsi érodé. La fermeture résulte d'une dilatation suivie d'une érosion. Ouvrir les pores équivaut à fermer les grains. La fermeture est une opération croissante, isotone et idempotente. Un point z appartient à l'ouverture A_{ω} de A selon B s'il existe un translaté de B contenant z et contenu dans A.*

Paragraphe 3. — *A l'aide des homothétiques λB d'un ensemble convexe B (par exemple une sphère, un cercle ou un segment de droite) et de l'ouverture $A_{\omega\lambda}$ et de la fermeture $A_f\lambda$ associées, on définit la granulométrie par*

$$F(\lambda) = \text{Mes}(A_{f\lambda}), \quad F(-\lambda) = \text{Mes}(A_{\omega\lambda})$$

Pour $\lambda > 0$ $F(\lambda)$ représente la granulométrie des pores, et celle des grains pour $\lambda < 0$.

1. — Érosion et dilatation.

Dans l'espace euclidien à n dimensions R^n (en pratique, n sera égal à 1, 2, ou 3, mais il est commode de ne pas spécifier à l'avance le nombre des dimensions), un milieu à deux composantes, remplissant l'espace entier, est défini par la donnée d'un ensemble A et de son complémentaire A^c . Dans la suite, nous désignerons A par l'expression « *les grains* » et son complémentaire A^c par l'expression « *les pores* », sans que cela implique d'hypothèse particulière sur la forme géométrique de A ou l'existence de « *grains* » individualisables. Il arrivera que A soit supposé borné, mais alors A^c (les pores) s'étendra jusqu'à l'infini, de manière que tout point de l'espace appartienne soit aux grains, soit aux pores.

D'un point de vue plus analytique, on peut également définir ce milieu par la donnée d'une fonction $k_A(x)$, dite *fonction caractéristique* de A ,

égale à 1 dans les grains et à 0 dans les pores :

$$(1,1) \quad k_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Pour décrire la géométrie complexe dessinée sur une lame mince (deux dimensions) par des grains A opaques et leur complémentaire A^c supposé transparent, J. Serra ⁽¹⁾ propose le dispositif expérimental suivant : un spot lumineux circulaire de rayon donné λ balaye la plaque. Lorsque le spot est centré en un point x , deux circonstances seulement sont possibles : ou bien la lumière passe (si le spot rencontre les pores) ou bien elle ne passe pas (si le spot est contenu tout entier dans les grains). Posons :

$$\begin{cases} k'_\lambda(x) = 0 & \text{si la lumière passe} \\ k'_\lambda(x) = 1 & \text{si elle ne passe pas.} \end{cases}$$

La fonction $k'_\lambda(x)$ ainsi définie est la fonction caractéristique d'un ensemble A'_λ qui se déduit de A par une sorte d'érosion, puisque seuls appartiennent à A'_λ les points de A situés à une distance supérieure à λ de la frontière des grains. Cette *érosion* des grains peut aussi, inversement, s'interpréter comme *une dilatation des pores*.

De même, les grains étant cette fois supposés transparents et les pores opaques, posons :

$$\begin{cases} k''_\lambda(x) = 0 & \text{si la lumière ne passe pas} \\ k''_\lambda(x) = 1 & \text{si elle passe.} \end{cases}$$

$k''_\lambda(x)$ est la fonction caractéristique d'un nouvel ensemble A''_λ qui se déduit de A par dilatation, puisque seuls n'appartiennent pas à A''_λ les points des pores situés à une distance supérieure à λ de la frontière des pores. L'opération effectuée est une *dilatation des grains*, ou une *érosion des pores*.

Pour plus de commodité, convenons de réserver les valeurs positives du paramètre λ à la dilatation, et les valeurs négatives à l'érosion des grains par le spot de rayon λ . Autrement dit, écrivons :

$$\begin{array}{ll} k_{-\lambda} & \text{et } A_{-\lambda} & \text{au lieu de } k'_\lambda & \text{et } A'_\lambda \\ k_\lambda & \text{et } A_\lambda & \text{au lieu de } k''_\lambda & \text{et } A''_\lambda \end{array} \quad (\lambda > 0)$$

Soit $S(\lambda)$ l'aire occupée sur la lame mince par les grains dilatés selon le spot de rayon λ (aire de A_λ) et $S(-\lambda)$ l'aire occupée par les grains érodés selon le même spot (aire de $A_{-\lambda}$). $S(\lambda)$ est une fonction non décroissante de λ . Pour $\lambda < \mu$, on a manifestement les inclusions

$$A_{-\mu} \subset A_{-\lambda} \subset A \subset A_\lambda \subset A_\mu$$

(1) J. SERRA « remarques sur une lame mince de minerai Lorrain », *Bulletin du BRGM* (sous presse).

et par suite les inégalités

$$S(-\mu) \leq S(-\lambda) \leq S(0) \leq S(\lambda) \leq S(\mu)$$

Cette propriété évoque une courbe granulométrique. Cependant $S(\lambda)$ n'a pas encore réellement la signification d'une granulométrie. Dans le cas, en effet, où A est composé de cercles disjoints (grains circulaires) la variation $S(\lambda + \Delta\lambda) - S(\lambda)$ ne reflète pas directement le nombre des grains de rayon compris entre λ et $\lambda + \Delta\lambda$.

Toutefois, la transformation de Serra (faisant passer de A à A_λ ou $A_{-\lambda}$) va constituer une étape indispensable dans la construction du concept géométrique de granulométrie. Avant de poursuivre, il convient de présenter cette transformation sous une forme plus générale et plus systématique. Nous devons, pour cela, emprunter quelques notions élémentaires à la théorie des ensembles, et utiliser certains symboles aujourd'hui familiers à tous, comme l'union \cup , l'intersection \cap ou l'appartenance \in . Les opérations ensemblistes dont nous donnerons l'écriture symbolique auront toujours, malgré leur forme abstraite, une signification très concrète et très intuitive. Il ne s'agit d'ailleurs pas de spéculations purement théoriques. Ces opérations peuvent être réalisées effectivement, et conduire à des résultats numériques, à l'aide de calculatrices électroniques ou d'appareils beaucoup plus simples du type de l'analyseur de structures de J. Serra : ce dernier appareil, procédant par visée photométrique directe sur lame mince et comptage électronique, permet d'effectuer en quelques minutes des opérations qui pourraient paraître assez compliquées.

Opération $A \oplus B$. — Soient A et B deux ensembles quelconques de l'espace euclidien R^n . A sera, par exemple, l'ensemble des grains tandis que B va jouer le rôle du spot lumineux envisagé ci-dessus (en fait, cette interprétation n'est pas obligatoire, et, dans les définitions suivantes A et B interviennent symétriquement). A tout point x de A et à tout point y de B , nous pouvons faire correspondre la somme géométrique $x + y$. Lorsque x et y décrivent A et B , le point $x + y$ décrit un ensemble que nous noterons $A \oplus B$. En notation ensembliste, on a donc :

$$(1.2) \quad A \oplus B = \bigcup_{\substack{x \in A \\ y \in B}} (x + y)$$

L'opération ainsi définie est manifestement *associative* et *commutative*.

Lorsque C est un ensemble quelconque et z un point, il est commode de désigner par C_z l'ensemble se déduisant de C dans la translation z :

$$C_z = \bigcup_{x \in C} (x + z)$$

L'équation (1.2) peut alors s'écrire sous les deux formes suivantes :

$$(1.3) \quad A \oplus B = \bigcup_{x \in A} B_x = \bigcup_{y \in B} A_y$$

$A \oplus B$ est la réunion, lorsque x décrit A , des ensembles B_x déduits de B dans la translation x . C'est aussi la réunion, lorsque y décrit B , des ensembles A_y déduits de A dans la translation y .

L'opération $A \oplus B$ est étroitement apparentée à une dilatation de A selon l'ensemble B . Plus précisément, pour qu'un point z appartienne à $A \oplus B$, il faut et il suffit qu'il soit de la forme $a + b$ avec $a \in A$ et $b \in B$. Autrement dit, il faut et il suffit que l'on puisse trouver un point b dans B tel que $z - b$ appartienne à A . Désignons par \check{B} le transposé de B (son symétrique par rapport à l'origine).

$$\check{B} = \bigcup_{b \in B} (-b)$$

Dire que l'on peut trouver $b \in B$ tel que $z - b \in A$ équivaut à dire que $(\check{B})_z$ (le translaté par z de l'ensemble \check{B}) rencontre A :

$$(1,4) \quad z \in A \oplus B \iff (\check{B})_z \cap A \neq \emptyset$$

(on rappelle que le symbole \iff est celui de l'équivalence logique, et que \emptyset représente l'ensemble vide).

Ainsi z appartiendra à $A \oplus B$ si, et seulement si, l'échantillon égal à \check{B} et implanté au point z a une intersection non vide avec A . On voit que $A \oplus B$ représente la dilatation de A par le transposé \check{B} de B (et non par B lui-même). Si l'on veut dilater A par B lui-même, c'est donc l'opération $A \oplus \check{B}$ qu'il convient d'effectuer. Résumons ces résultats par une définition et une proposition.

Définition. — On appelle transformé de Serra (par dilatation) d'un ensemble A par un ensemble B , ou, brièvement, dilaté de A par B l'ensemble C :

$$C = \{z : B_z \cap A \neq \emptyset\}$$

des points z tels que l'ensemble B_z déduit de B dans la translation z rencontre l'ensemble A .

Proposition 1. — L'ensemble C ainsi défini est égal à $A \oplus \check{B}$. On a :

$$C = A \oplus \check{B} = \bigcup_{x \in A} (\check{B})_x = \bigcup_{y \in B} A_{-y}$$

L'opération $A \ominus B$. — La pseudo-addition d'ensembles $A \oplus B$ n'admet pas d'opération inverse. Nous définirons une pseudo-soustraction $A \ominus B$ par la formule :

$$(1,5) \quad A \ominus B = (A^c \oplus B)^c$$

Ainsi, $A \ominus B$ est le complémentaire de la pseudo-somme $A^c \oplus B$ de B et du complémentaire de A .

De la relation (1,3) on déduit immédiatement par passage au complémentaire :

$$(1,6) \quad A \ominus B = \bigcap_{y \in B} A_y$$

$A \ominus B$ est l'intersection, lorsque y décrit B , des ensembles A_y déduits de A dans la translation y .

De même, on déduit de (1,4) :

$$(1,7) \quad z \in A \ominus B \iff (\check{B})_z \subset A$$

$A \ominus B$ est l'ensemble des points z tels que l'échantillon égal au transposé de B et implanté en z soit tout entier contenu dans A .

D'où la définition et la proposition suivantes :

Définition. — On appelle transformé de Serra (par érosion) d'un ensemble A par un ensemble B l'ensemble :

$$C = \{z : B_z \subset A\}$$

des points z tels que l'ensemble B_z déduit de B dans la translation z soit contenu dans A .

Proposition 2. — L'ensemble C ainsi défini est égal à $A \ominus \check{B}$. On a :

$$C = A \ominus \check{B} = \bigcap_{y \in B} A_{-y}$$

Cas particulier. — 1. — Prenons pour B l'ensemble $B_1 = \{o, b\}$ constitué de deux points seulement : l'origine O et un point b . $A \oplus B_1$ est la réunion $A \cup A_b$ de A et de son translaté par b , $A \ominus B_1$ est l'intersection $A \cap A_b$ de ces mêmes ensembles.

De même si B est constitué de p points $\{o, b_1, \dots, b_{p-1}\}$ $A \oplus B$ est l'union de A et de ses translatés $A_{b_1} \dots A_{b_{p-1}}$, $A \ominus B$ est l'intersection de A et de ses translatés.

2. — Prenons pour B l'ensemble $B_2 = [o, h]$ constitué de tous les points d'un segment de droite ayant son origine en O et son extrémité en un point h . $A \oplus B_2$ est l'ensemble balayé par A lorsqu'on lui imprime la translation h . $A \ominus B_2$ est l'ensemble des points qui appartiennent à tous les ensembles correspondant aux positions intermédiaires occupées par A dans cette translation.

3. — Si l'on prend pour B la boule $B_\lambda = \{z : |z| \leq \lambda\}$ de rayon λ , on retrouve la transformation par dilatation ou érosion selon un spot lumineux circulaire dans le cas où l'espace est à deux dimensions.

Mesures. — Si A et B sont mesurables et bornés, il est possible de définir les mesures (volumes ou surfaces, selon le nombre de dimensions de l'espace) des transformés $A \oplus \check{B}$ et $A \ominus \check{B}$. Désignons par $H(B)$ et

$K(B)$ ces mesures :

$$\begin{cases} H(B) = \text{Mes}(A \oplus \check{B}) \\ K(B) = \text{Mes}(A \ominus \check{B}) \end{cases}$$

Ces fonctions d'ensemble $K(B)$ et $H(B)$ permettent de définir des fonctions non décroissantes analogues à la fonction $S(\lambda)$ introduite dans le cas du spot lumineux circulaire. Si B_λ désigne une famille d'ensembles tels que $B_\lambda \subset B_\mu$ pour $\lambda < \mu$ (par exemple B_λ pourra être la boule de rayon λ), la fonction définie par :

$$\begin{cases} S(\lambda) = H(B_\lambda) \\ S(-\lambda) = K(B_\lambda) \end{cases}$$

est bien non-décroissante. Mais elle ne possède pas encore une véritable signification granulométrique.

Règles d'inclusion. — Nous donnons en Annexe I une étude plus détaillée de la transformation de Serra. Nous mentionnerons simplement ici l'inclusion :

$$(A \ominus C) \oplus B \subset (A \oplus B) \ominus C$$

Cette inclusion, généralement stricte, a un sens intuitif évident : l'érosion de A par C fait disparaître des portions de A , isolées et de petites dimensions, qu'une dilatation ultérieure par B ne peut pas restituer. Ces mêmes portions, au contraire, peuvent subsister si la dilatation par B est effectuée avant l'érosion par C .

D'autre part, les règles suivantes sont évidentes et se démontrent immédiatement : Si B est contenu dans B' on a :

$$(1,8) \quad \begin{cases} A \oplus B \subset A \oplus B' \\ A \ominus B \supset A \ominus B' \\ B \ominus A \subset B' \ominus A \end{cases}$$

2. — Ouverture et fermeture.

Pour définir la granulométrie d'un ensemble A , nous serons conduits à effectuer sur A deux transformations successives : d'abord une érosion, puis (sur l'ensemble ainsi érodé) une dilatation, et nous dirons qu'il s'agit d'une ouverture de A ; ou bien, au contraire, d'abord une dilatation, et ensuite une érosion, et nous dirons qu'il s'agit d'une fermeture de A . La définition précise est la suivante :

Définition. — *Étant donné deux ensembles A et B , on appelle ouverture de A selon B , et on note A_ω l'ensemble*

$$A_\omega = (A \ominus \check{B}) \oplus B$$

On appelle fermeture de A selon B et on note A_f l'ensemble

$$A_f = (A \oplus \check{B}) \ominus B$$

Avant d'examiner la signification très intuitive de cette définition, il convient de justifier la terminologie employée. En algèbre, on appelle fermeture une opération croissante, isotone et idempotente. Par dualité, on associe à toute fermeture une opération décroissante, isotone et idempotente, appelée ouverture, définie de telle manière qu'il est équivalent d'ouvrir un ensemble ou de fermer son complémentaire. Montrons que les opérations A_ω et A_f vérifient bien ces conditions.

Tout d'abord, ces deux opérations sont *duales* l'une de l'autre vis-à-vis de la complémentation. Autrement dit, l'ouverture du complémentaire d'un ensemble A coïncide avec le complémentaire de la fermeture de A , et réciproquement. Ou encore : *ouvrir les pores équivaut à fermer les grains, et réciproquement*. Cette propriété se traduit par les égalités :

$$(2,1) \quad \begin{cases} (A^c)_\omega = (A_f)^c \\ (A^c)_f = (A_\omega)^c \end{cases}$$

On le voit facilement à partir de (1,5) et de la définition donnée ci-dessus. Explicitons, par exemple, $(A_f)^c$. Il vient :

$$\begin{aligned} (A_f)^c &= [(A \oplus \check{B}) \ominus B]^c \\ &= (A \oplus \check{B})^c \oplus B = (A^c \ominus \check{B}) \oplus B = (A^c)_\omega \end{aligned}$$

La première relation traduit la définition de A_f . Les deux suivantes résultent de (1,5), c'est-à-dire de la définition de l'opération $A \ominus B$. La dernière, enfin, provient de la définition même de A_ω .

Puisque ces deux opérations sont en dualité, il suffit de montrer que l'application $A \rightarrow A_f$ est une fermeture (une opération croissante, isotone et idempotente). En passant aux complémentaires, il en résultera que l'application $A \rightarrow A_\omega$ est décroissante, isotone et idempotente (est une ouverture).

C'est une opération *croissante*. Les grains sont contenus dans leur fermeture, et on a

$$(2,2) \quad A \subset A_f$$

Pour le voir, explicitons la définition de A_f à partir de (1,3) et de (1,6), ce qui donne

$$(2,3) \quad A_f = \bigcap_{y \in B} \bigcup_{x \in B} A_{y-x}$$

Soit z un point quelconque de A . Pour tout point y de B , on peut trouver un point x de B , à savoir le point $x = y$, tel que z appartienne à $A_{y-x} = A_0 = A$. Donc z appartient à A_f , d'après (2,3), et par suite (2,2) est démontré.

En passant aux complémentaires, on voit que l'opération A_ω est décroissante :

$$(2,4) \quad A_\omega \subset A$$

En deuxième lieu, il s'agit d'opérations *isotones*. Autrement dit, si A est contenu dans A' , A_f est contenu dans A'_f et A_ω dans A'_ω :

$$(2,5) \quad \begin{aligned} A \subset A' &\implies A_f \subset A'_f \\ &A_\omega \subset A'_\omega \end{aligned}$$

Cela résulte aussi de (2,3), car, pour tout x et tout y , A_{y-x} est contenu dans A'_{y-x} .

Enfin, il s'agit d'opérations *idempotentes*, autrement dit, on a :

$$(2,6) \quad \begin{cases} (A_f)_f = A_f \\ (A_\omega)_\omega = A_\omega \end{cases}$$

En effet, explicitons la fermeture itérée :

$$(A_f)_f = [(A \oplus \check{B}) \ominus B] \oplus \check{B} \ominus B = (A \oplus \check{B})_{\omega'} \ominus B$$

L'indice ω' désigne ici l'ouverture selon l'ensemble \check{B} transposé de B (ouverture transposée). Toute ouverture étant décroissante, d'après (2,4), on a

$$(A \oplus \check{B})_{\omega'} \subset A \oplus \check{B}$$

La troisième règle d'inclusion (1,8) donne alors

$$(A_f)_f = (A \oplus \check{B})_{\omega'} \ominus B \subset (A \oplus \check{B}) \ominus B = A_f$$

Comme on a aussi l'inclusion inverse, puisque la fermeture est une opération croissante, la première égalité (2,6) en résulte, et la deuxième s'en déduit aussitôt par dualité.

Signification géométrique de l'ouverture et de la fermeture. — Ces opérations, et les propriétés que nous venons d'établir, possèdent une signification géométrique très intuitive, qui nous servira à construire le concept de granulométrie. Pour dégager cette signification, remarquons qu'un point z appartient à l'ouverture A_ω si, et seulement si $(\check{B})_z$ rencontre $A \ominus \check{B}$ (d'après (1,4) et la définition de A_ω), donc, également, si, et seulement si, on peut trouver un point $b \in B$ tel que $z - b$ appartienne à $A \ominus \check{B}$. Mais pour que le point $y = z - b$ appartienne à $A \ominus \check{B}$, il faut et il suffit que B_y soit contenu dans A . De même b appartient à B si, et seulement si, $z = y + b$ appartient à B_y . Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

Proposition 3. — Pour qu'un point z appartienne à l'ouverture A_ω de A selon B , il faut et il suffit qu'il existe un translaté B_y de B contenant z et entièrement contenu dans A : $z \in B_y \subset A$.

Par dualité, on obtient une autre proposition : pour qu'un point z appartienne à la fermeture A_f de A selon B , il faut et il suffit que tous les translatés B_z de B contenant z rencontrent A .

En termes plus concrets, on voit que l'ouverture $(A^c)_\omega$ des pores A^c est le domaine balayé par les translatés de B auxquels on fait parcourir toutes les positions géométriquement possibles pour lesquelles ils restent entièrement contenus dans les pores. Les zones exclues de cette ouverture sont celles que de tels translatés ne peuvent atteindre. Elles correspondent à des inclusions, des chenaux étroits ou des anfractuosités de dimensions inférieures à celles de B . On voit que l'ouverture des pores donne une certaine image de la granulométrie des pores. De la même manière, l'ouverture des grains est le domaine balayé par les translatés de B qu'il est géométriquement possible d'implanter à l'intérieur de A . Elle élimine petits grains isolés, promontoires aigus, isthmes étroits, etc... et reflète ainsi la granulométrie des grains.

3. — Définition des granulométries.

En effectuant ouverture et fermeture A_{ω_λ} et A_{f_λ} selon un ensemble B_λ dépendant d'un paramètre unique λ (par exemple B_λ sera la boule de rayon λ), il va donc être possible de définir une granulométrie, sous réserve que, λ croissant, les ouvertures A_{ω_λ} aillent en décroissant et les fermetures A_{f_λ} en croissant. Cette propriété de monotonie — évidente géométriquement dans le cas des boules — n'est cependant pas vérifiée pour des B_λ quelconques. Les deux propositions suivantes suffisent, cependant, à définir des classes très larges d'ensembles pour lesquels elle sera vérifiée.

Proposition 4. — *La famille des ouverts selon B coïncide avec la famille des ensembles de la forme $C \oplus B$ (C ensemble quelconque) et la famille des fermés selon B coïncide avec la famille des ensembles de la forme $C \ominus B$.*

Raisonnons, par exemple, dans le cas des ouverts selon B . Si $A = A_{\omega}$ est ouvert selon B , on a, par définition, $A = C \oplus B$ avec $C = A \ominus \check{B}$. Réciproquement, $C \oplus B$ est ouvert selon B . En effet, on a d'une part :

$$(C \oplus B)_\omega = [(C \oplus B) \ominus \check{B}] \oplus B = C_{f'} \oplus B \supset C \oplus B$$

f' désignant la fermeture transposée (selon \check{B}) qui est croissante. D'autre part :

$$(C \oplus B)_\omega \subset C \oplus B$$

puisque l'ouverture est décroissante. On en déduit l'égalité

$$(C \oplus B)_\omega = C \oplus B$$

En particulier B lui-même est toujours ouvert selon B , puisque $B = \{0\} \oplus B$, et on a :

$$(B \ominus \check{B}) \oplus B = B$$

Proposition 5. — Si C est ouvert selon B , les ouvertures A_{ω_B} , A_{ω_C} et les fermetures A_{f_B} et A_{f_C} de tout ensemble A selon B et C vérifient les inclusions :

$$(3,1) \quad A_{\omega_C} \subset A_{\omega_B} \subset A \subset A_{f_B} \subset A_{f_C}$$

En effet, d'après la proposition précédente, C , étant ouvert selon B , est de la forme $B' \oplus B$, et son transposé \check{C} , égal à $\check{B}' \oplus \check{B}$, est ouvert selon \check{B} . Soit alors z un point de A_{f_B} . Par définition, on a :

$$\check{B}_z \subset A \oplus \check{B}$$

On en déduit, d'après les règles d'inclusion (1,8) :

$$\check{B}_z \oplus (\check{C} \ominus B) \subset A \oplus \check{B} \oplus (\check{C} \ominus B)$$

Mais $\check{B} \oplus (\check{C} \ominus B) = (\check{C} \ominus B) \oplus \check{B}$ (d'après la commutativité de l'opération \oplus), est l'ouverture de \check{C} selon \check{B} , c'est-à-dire \check{C} lui-même puisque \check{C} est ouvert selon \check{B} . L'inclusion ci-dessus se réduit donc à :

$$\check{C}_z \subset A \oplus \check{C}$$

ce qui signifie $z \in A_{f_C}$. Par suite, $A_{f_B} \subset A_{f_C}$. L'inclusion relative aux ouverts s'en déduit en passant aux complémentaires.

Granulométrie selon une famille B_λ . — Soit B_λ une famille d'ensembles dépendant d'un paramètre (positif) λ , et vérifiant la propriété :

$$(3,2) \quad B_\lambda \oplus B_\mu = B_{\lambda+\mu}$$

La proposition suivante montre qu'il est facile de former une famille B_λ vérifiant (3,2).

Proposition 6. — Les homothétiques λB ($\lambda \geq 0$) d'un ensemble convexe quelconque B vérifient la relation (3,2).

En effet, soient λ et μ deux nombres positifs. Si un point z appartient à la somme $\lambda B \oplus \mu B$, il est de la forme $\lambda b + \mu b'$, b et b' appartenant à B . Comme B est convexe, $\frac{\lambda b + \mu b'}{\lambda + \mu}$ appartient aussi à B et z appartient à $(\lambda + \mu)B$. On a donc

$$\lambda B \oplus \mu B \subset (\lambda + \mu)B$$

L'inclusion inverse se démontre immédiatement : on a donc l'égalité, c'est-à-dire (3,2).

Ainsi, dans l'espace à n dimensions, on pourra prendre pour B_λ la famille des boules de rayon λ , ou celle des cercles de rayon λ situés dans un plan passant par l'origine, ou encore des segments de droite de longueur 2λ parallèles entre eux. De même, encore, les homothétiques d'un cube, ou d'un carré etc...

Si (3,2) est vérifiée, il résulte de la propriété 4 que $B_{\lambda+\mu}$ est ouvert selon B_λ et par suite d'après la proposition 5 on a les inclusions :

$$A_{\omega_{\lambda+\mu}} \subset A_{\omega_\lambda} \subset A_\omega \subset A_{f_\lambda} \subset A_{f_{\lambda+\mu}}$$

Si A est borné, et si les ensembles A_{ω_λ} , A_{f_λ} sont mesurables et bornés (il en est toujours ainsi si B_λ est topologiquement ouvert, et borné), la fonction $F(\lambda)$ définie par :

$$(3,3) \quad \begin{cases} F(\lambda) &= \text{Mes } (A_{f_\lambda}) \\ F(-\lambda) &= \text{Mes } (A_{\omega_\lambda}) \end{cases}$$

est non décroissante, d'après les inclusions ci-dessus. On a donc :

$$F(-\lambda - \mu) \leq F(-\lambda) \leq F(0) \leq F(\lambda) \leq F(\lambda + \mu)$$

Lorsque λ tend vers l'infini, l'une au moins des dimensions de B_λ augmente indéfiniment, d'après la relation (3,2). Comme A est borné, aucun point de A ne peut appartenir à toutes les ouvertures A_{ω_λ} , de sorte que A_{ω_λ} tend vers l'ensemble vide \emptyset , et $F(-\lambda)$ tend vers 0. Par contre, on peut montrer que A_{f_λ} est toujours contenu dans l'enveloppe convexe de A , qui est bornée comme A (voir Annexe I). Lorsque λ tend vers l'infini, A_{f_λ} tend par conséquent vers un ensemble borné, qui sera souvent l'enveloppe convexe de A , et par suite $F(\lambda)$ admet une limite finie $F(+\infty)$.

Cette courbe $F(\lambda)$ représente en même temps la granulométrie des pores et celle des grains. La partie droite ($\lambda > 0$) concerne les pores, la partie gauche les grains.

Il est d'ailleurs facile de séparer ces deux composantes. La granulométrie des grains selon B_λ est représentée par la fonction non décroissante

$$G_1(\lambda) = \frac{F(0) - F(-\lambda)}{F(0)}$$

qui varie de 0 à 1, et celle des pores par la fonction non décroissante

$$G_2(\lambda) = \frac{F(\lambda) - F(0)}{F(\infty) - F(0)}$$

qui varie également de 0 à 1. Ces fonctions se présentent donc comme des courbes granulométriques cumulées. Elles en ont également la signification. Pour le voir, examinons les deux cas particuliers où la notion usuelle de granulométrie se définit sans ambiguïté.

Prenons d'abord pour B_λ la famille des boules de rayon λ . $F(-\lambda)$ représente le volume balayé par les sphères de rayon λ qu'il est géométriquement possible d'implanter dans A . Si A est constitué d'une sphère unique de rayon R , $F(-\lambda)$ est nulle pour $\lambda > R$ et égale au volume de A pour $\lambda < R$. De même $G_1(\lambda)$ est nulle ou égale à 1 selon que λ est inférieur ou supérieur à R : $G_1(\lambda)$ est donc bien la courbe granulométrique associée à ce grain unique de rayon R . Si maintenant on a plusieurs grains sphériques disjoints, de rayons différents, $F(-\lambda)$ représente le volume total occupé par les sphères de rayons supérieurs à λ . $G_1(\lambda)$ représente en pourcentage du volume total $F(0)$ des grains, le volume occupé

par les grains de rayons inférieurs à λ , et coïncide avec la courbe granulométrique cumulée habituelle.

La fonction $1 - G_2(\lambda)$ exprime, de son côté, en pourcentage du volume total des pores, le volume balayé par les sphères de rayon λ contenues dans les pores. Elle possède une signification très voisine de celle du diagramme de Purcell, utilisé dans l'industrie pétrolière, et représentant l'envahissement des pores par le mercure pour des pressions croissantes, ou des rayons de courbure décroissants. Elle exprime la répartition des intervalles d'espace séparant les différents grains, c'est-à-dire la manière dont ces grains se disposent vis-à-vis les uns des autres, ou, comme disent les pétrographes, la texture du milieu.

Prenons maintenant pour B_λ un segment de droite de longueur λ et de direction α donnée. Alors G_1 et G_2 représentent les granulométries des *traversées* des grains et des pores mesurées dans cette direction α . En effet, pour qu'un point z appartienne à A_{ω_λ} par exemple, il faut et il suffit qu'il appartienne à un segment de longueur λ , parallèle à la direction α et entièrement contenu dans A . Ainsi $F(-\lambda)$ est la mesure du volume engendré par les traversées des grains de longueur supérieure ou égale à λ , et $G_1(\lambda)$ représente, en pourcentage du volume total, le volume occupé par les traversées de longueurs $< \lambda$. C'est donc la granulométrie des traversées des grains, au sens usuel, exprimée *en longueur* et non en nombres (chaque traversée observée de longueur l est comptée non pas pour 1, mais pour un poids proportionnel à l). Il est d'ailleurs facile de passer d'une granulométrie en longueur à la granulométrie en nombre qui lui correspond, et inversement.

Ainsi se trouve achevée la construction du concept de granulométrie géométrique. La définition que nous avons donnée n'est pas liée à l'existence de grains individualisables, et coïncide avec la définition usuelle dans tous les cas où celle-ci est déterminée sans ambiguïté. On notera bien qu'à des familles B_λ différentes, correspondent des granulométries distinctes. On utilisera surtout les granulométries selon les sphères (à 3 dimensions), selon des cercles (à 2 dimensions) et celles des traversées (à une dimension). Au lieu de sphères et de cercles, on pourra aussi prendre des cubes et des carrés pour lesquels la programmation des calculs est plus facile.

CHAPITRE II

MILIEUX POREUX ALÉATOIRES

SOMMAIRE

Paragraphe 4. — *Définition d'un ensemble aléatoire à partir de sa loi spatiale et des moments fonctionnels. $P(B, B') = P(B \subset A, B' \cap A = \emptyset)$ est la probabilité pour que l'ensemble B soit contenu dans A et B' disjoint de A . Étude du cas stationnaire.*

Paragraphe 5. — *La surface spécifique σ d'un milieu poreux stationnaire (à 3 dimensions) ne dépend que des valeurs en $h = 0$ des dérivées de la covariance $C(h)$ — formule (5, 4). Même résultat pour le périmètre spécifique 2λ d'un milieu à 2 dimensions. Relation entre σ et 2λ . Notions de nombre et de longueur spécifiques d'un milieu à 3 dimensions.*

Paragraphe 6. — *Définition de granulométries selon une famille B_λ . La granulométrie des grains $G_1(\lambda)$ est la probabilité conditionnelle pour que x ne soit pas dans A_{ω_λ} lorsqu'on sait que $x \in A$. Application aux granulométries des traversées. Granulométrie en nombre et moment fonctionnel $P(t)$ se déduisent l'un de l'autre selon les relations (6,9) et (6,10).*

Paragraphe 7. — *Grain convexe isolé. La fonction $g(h)$, mesure de l'intersection du grain A et de son translaté par h , suffit à déterminer la granulométrie des traversées, et ses dérivées en $h = 0$ donnent la mesure du contour apparent. Diverses notions à caractère géométrique. Lorsque A est aléatoire, l'espérance $K(h) = E[g(h)]$ est l'intégrale du moment d'ordre 2, $P(x, x + h)$. Les dérivées de $K(h)$ en $h = 0$ donnent l'espérance de la mesure du contour apparent. Résultats géométriques pour le dilaté de A par un ensemble convexe B quelconque.*

4. — Loi spatiale et moments fonctionnels.

A partir de maintenant, nous allons considérer un milieu poreux, défini par la donnée de l'ensemble A des grains ou de l'ensemble complémentaire A^c des pores, comme aléatoire : plus précisément l'ensemble A des grains sera interprété comme une réalisation d'un ensemble aléatoire, ou, ce qui revient au même, sa fonction caractéristique $f(x)$, égale à 1 pour $x \in A$ et à 0 pour $x \in A^c$, sera considérée comme une réalisation d'une fonction aléatoire en tout ou rien (c'est-à-dire susceptible de prendre seulement les valeurs 0 ou 1). Rejetant dans l'Annexe II l'examen des fondements axiomatiques de la théorie des ensembles aléatoires, nous observerons ici une démarche plus intuitive.

Soient $x_1, x_2 \dots x_k$ et $y_1, y_2 \dots y_{k'}$, deux groupes de k et k' points quelconques de l'espace R^n . Nous désignerons par :

$$P(x_1, x_2 \dots x_k; y_1, y_2 \dots y_{k'}) = P(x_1, \dots x_k \in A, y_1, \dots y_{k'} \notin A)$$

la probabilité pour que les k points $x_1 \dots x_k$ appartiennent à A et que les k' points $y_1 \dots y_{k'}$ n'appartiennent pas à A . Cette probabilité est, naturellement, une fonction de ces $k + k'$ points (donc une fonction de $n(k + k')$ variables). L'ensemble de toutes ces fonctions, pour toutes les valeurs des entiers k et k' et tous les systèmes de points $x_1 \dots x_k$ et $y_1 \dots y_{k'}$ constitue la *loi spatiale* de l'ensemble aléatoire A . Nous admettrons (voir Annexe 2) que l'ensemble aléatoire A peut être considéré comme défini par la donnée de sa loi spatiale.

Pour $k' = 0$, la fonction

$$P(x_1 \dots x_k) = P(x_1, x_2 \dots x_k \in A)$$

représentant la probabilité pour que k points donnés appartiennent à A sera appelée *moment fonctionnel* d'ordre k de l'ensemble aléatoire A . L'origine de cette terminologie est la suivante : si l'on désigne par $f(x)$ la fonction caractéristique de A :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

qui est une fonction aléatoire en tout ou rien, la probabilité pour que les k points $x_1 \dots x_k$ appartiennent à A est égale à l'espérance mathématique du produit $f(x_1) \dots f(x_k)$:

$$P(x_1 \dots x_k) = E[f(x_1) f(x_2) \dots f(x_k)]$$

Les moments fonctionnels du *complémentaire* de A (les pores) seront désignés par la lettre Q :

$$Q(x_1 \dots x_k) = P(x_1 \notin A, \dots x_k \notin A) = E([1 - f(x_1)] \dots [1 - f(x_k)])$$

Les fonctions $P(x_1, \dots x_k; y_1 \dots y_{k'})$ ne peuvent pas être absolument quelconques. Elles sont soumises aux trois conditions suivantes :

a) on a nécessairement $0 \leq P \leq 1$, quels que soient les points $x_1 \dots$ et $y_1 \dots$

b) Lorsque $x_1 \dots x_k \in A$ et $y_1 \dots y_{k'} \notin A$ tout point supplémentaire z appartient soit à A , soit à son complémentaire. D'où la *condition de cohérence*.

$$(4,1) \quad P(x_1 \dots x_k; y_1 \dots y_{k'}) = P(x_1, \dots x_k, z; y_1 \dots y_{k'}) \\ + P(x_1 \dots x_k; y_1 \dots y_{k'}, z)$$

c) Enfin P est invariante pour toute permutation des points $x_1 \dots x_k$ ou $y_1 \dots y_{k'}$.

La condition de cohérence (4,1) laisse prévoir que la loi spatiale est entièrement déterminée par les moments fonctionnels. Effectivement, la fonction $P(x_1 \dots x_k; y_1 \dots y_{k'})$ peut s'exprimer à l'aide des seuls moments d'ordre $k, k+1, \dots, k+k'$. On le voit facilement grâce aux espérances mathématiques. De :

$$P(x_1 \dots x_k; y_1 \dots y_{k'}) = E(f(x_1) f(x_2) \dots f(x_k) [1 - f(y_1)] \dots [1 - f(y_{k'})])$$

on déduit, en effet le développement :

$$(4,2) \quad \left\{ \begin{aligned} P(x_1 \dots x_k; x_1, \dots, y_{k'}) &= P(x_1, \dots, x_k) - \sum_{i_1=1}^{k'} P(x_1 \dots x_k, y_{i_1}) \\ &+ \sum_{\substack{k' \geq i_1 > i_2 \geq 1}} P(x_1, x_2, \dots, x_k, y_{i_1}, y_{i_2}) - \dots \\ &+ (-1)^{k'} P(x_1, x_2, \dots, x_k, y_1 \dots y_{k'}) \end{aligned} \right.$$

En particulier, les moments fonctionnels Q des pores s'expriment à l'aide des moments fonctionnels P des grains (et réciproquement) :

$$(4,3) \quad Q(x_1, \dots, x_k) = 1 - \sum_{i_1=1}^k P(x_{i_1}) \\ + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq k} P(x_{i_1}, x_{i_2}) - \dots + (-1)^k P(x_1, x_2, \dots, x_k)$$

Ainsi, les *moments fonctionnels d'ordre 1* : $P(x)$ — probabilité pour que $x \in \Lambda$ — et $Q(x)$ — probabilité pour que $x \notin \Lambda$ — sont liés par :

$$Q(x) = 1 - P(x)$$

et les *moments fonctionnels d'ordre 2* : $P(x_1, x_2)$ — probabilité pour que x_1 et x_2 soient dans Λ — et $Q(x_1, x_2)$ — probabilité pour que x_1 et x_2 soient dans les pores — sont liés par :

$$(4,4) \quad \begin{cases} Q(x_1, x_2) = 1 - P(x_1) - P(x_2) + P(x_1, x_2) \\ P(x_1, x_2) = 1 - Q(x_1) - Q(x_2) + Q(x_1, x_2) \end{cases}$$

Par un léger abus de langage, le moment d'ordre 2 :

$$P(x_1, x_2) = E[f(x_1) f(x_2)]$$

sera désigné dans la suite comme la *covariance* de l'ensemble aléatoire Λ (à strictement parler, la covariance serait $P(x_1, x_2) - P(x_1) P(x_2)$).

Cas stationnaire. — On dira que l'ensemble aléatoire Λ possède le *caractère stationnaire* lorsque sa loi spatiale est invariante par translation, c'est-à-dire lorsque, pour tout vecteur h et tout groupe de points x_1, \dots, x_k on a :

$$P(x_1 + h, \dots, x_k + h; y_1 + h, \dots, y_k + h) = P(x_1, \dots, x_k; y_1, \dots, y_k)$$

D'après la relation (4,2), il suffit d'ailleurs de vérifier que les moments fonctionnels sont invariants par translation.

Ce caractère stationnaire de A signifie que les propriétés de A sont les mêmes dans tout l'espace. Il y a homogénéité spatiale. L'ensemble A se reproduit, statistiquement, dans tout l'espace, identiquement à lui-même. C'est, en principe, seulement dans le cas stationnaire que l'inférence statistique est possible (en pratique, il suffit que A puisse être considéré comme localement stationnaire, c'est-à-dire que ses caractéristiques ne varient que lentement dans l'espace). Pour procéder à l'estimation des moments fonctionnels, à partir des données expérimentales disponibles, on profitera du fait qu'il y a égalité entre les probabilités et les intégrales d'espace correspondantes, prises en espérance mathématique (voir Annexe 2).

Par exemple, le moment d'ordre 1, $P(x)$, est une constante p dans le cas stationnaire (puisque $P(x+h) = P(x)$ pour tout vecteur h). Pour estimer cette probabilité p constante, lorsque A est connu expérimentalement dans un domaine D , on utilise la relation :

$$p = \frac{1}{\text{Mes } D} E \left[\int_D f(x) dx \right] = \frac{E[\text{Mes } A \cap D]}{\text{Mes } D}$$

La probabilité $q = 1 - p$, constante également, pour qu'un point x soit dans les pores n'est pas autre chose que la porosité du milieu poreux aléatoire stationnaire (dans le cas non stationnaire la porosité $Q(x)$ varie dans l'espace).

De même, dans le cas stationnaire, la covariance

$$P(x_1, x_2) = P(x_1 + h, x_2 + h)$$

ne dépend que de la différence $x_2 - x_1$. Nous poserons souvent :

$$C(h) = P(x, x + h)$$

$C(h)$ est la covariance des points x et $x + h$, distants (vectoriellement) de h : elle ne dépend que du vecteur h et non du point d'appui x . On a

$$\begin{cases} C(h) = C(-h) \\ C(0) = p \\ 0 \leq C(h) \leq p \end{cases}$$

Pour estimer $C(h)$ à partir des observations faites dans un domaine D , on doit faire la statistique du nombre de couples de points $x, x + h$ appartenant tous deux à A .

D'un point de vue plus géométrique, on peut remarquer que $x + h$ appartient à A si, et seulement si, x appartient au translaté A_{-h} de A par le vecteur $-h$. Ainsi, la covariance $P(x, x + h)$ est aussi la probabilité pour que le point x appartienne à l'intersection $A \cap A_{-h}$ de A et de son translaté par $-h$. Dans le cas stationnaire, la covariance $C(h)$ pourra

être estimée à partir de la relation :

$$(4,5) \quad C(h) = \frac{1}{\text{Mes } D} E [\text{Mes } A \cap A_{-h} \cap D] = \frac{1}{\text{Mes } D} E [\text{Mes } (A \cap A_h \cap D)]$$

Moments fonctionnels généralisés. — Il est en général possible (voir Annexe 2) de définir la probabilité :

$$P(B, B') = P(B \subset A, B' \cap A = \emptyset)$$

pour que deux ensembles donnés B et B' soient contenus le premier dans les grains, le deuxième dans les pores. $P(B, B')$ généralise la loi spatiale $P(x_1, \dots, x_k; y_1, \dots, y_{k'})$: celle-ci correspond, en effet, au cas particulier où

$$B = \{x_1, \dots, x_k\} \quad \text{et} \quad B' = \{y_1, \dots, y_{k'}\}$$

sont des ensembles de points en nombre fini. En particulier, le *moment fonctionnel généralisé* de l'ensemble aléatoire A :

$$P(B) = P(B \subset A)$$

donnant la probabilité pour que l'ensemble B soit contenu dans les grains, et celui de l'ensemble complémentaire A^c

$$Q(B) = P(B \subset A^c) = P(A \cap B = \emptyset)$$

donnant la probabilité pour que B soit contenu dans les pores (ou, ce qui revient au même, disjoint de A) vont jouer un rôle primordial dans la construction de la notion probabiliste de la granulométrie.

Il faut noter que, lorsque B et B' ne sont pas finis, il n'existe plus de relation analogue à (4,3) qui permette de passer de $P(B)$ à $Q(B')$ ou réciproquement.

Pour donner un contenu plus géométrique à ces moments fonctionnels, prenons pour B un ensemble contenant l'origine O , et interprétons-le comme un échantillon implanté en O . L'échantillon égal à B implanté au point x , c'est-à-dire le translaté B_x , conduit à définir les probabilités $P(B_x)$ et $Q(B_x)$ pour que B_x soit contenu dans les grains (dans les pores). L'ensemble B étant choisi, ce sont des fonctions du point d'implantation x . Dans le cas stationnaire, ce sont des constantes. On a :

$$(4,6) \quad \begin{cases} P(B_x) = P(B_x \subset A) = P(x \in A \ominus \check{B}) \\ Q(B_x) = P(B_x \cap A = \emptyset) = P(x \notin A \oplus \check{B}) \end{cases}$$

Les relations (4,6) montrent comment ces moments fonctionnels généralisés se relient à la loi spatiale des transformés de Serra $A \ominus B$ et $A \oplus B$. Dans le *cas stationnaire*, $P(B_x)$ et $Q(B_x)$ ne dépendent pas de x et on peut les désigner simplement par $P(B)$ et $Q(B)$. Leur estimation pourra se faire à partir des relations :

$$\begin{cases} P(B) = \frac{1}{\text{Mes } D} E [\text{Mes } (A \ominus \check{B}) \cap D] \\ 1 - Q(B) = \frac{1}{\text{Mes } D} E [\text{Mes } (A \oplus \check{B}) \cap D] \end{cases}$$

5. — Les grandeurs spécifiques.

Dans un milieu poreux à trois dimensions, on appelle *surface spécifique* le rapport $\frac{S}{V}$, où S est la mesure de la surface de séparation des grains et des pores contenus dans un volume donné V . Cette notion prend une grande importance dans tous les problèmes physiques où des échanges de chaleur ou d'énergie se produisent à la surface de séparation. On a même essayé d'exprimer la perméabilité d'un milieu poreux à l'aide des deux seuls paramètres de porosité et de surface spécifique. Cette tentative s'est soldée par un échec, d'ailleurs prévisible *a priori* : d'une part, en effet, il n'est pas possible de représenter une grandeur tensorielle comme la perméabilité à l'aide de deux paramètres scalaires seulement, de l'autre la perméabilité dépend surtout des relations de connexité entre pores, et celles-ci ne sont représentées que très indirectement par des paramètres à signification ponctuelle comme la porosité et la surface spécifique. Quoi qu'il en soit, nous allons voir que cette *surface spécifique se relie de manière simple à la covariance* $C(h)$ du milieu poreux (supposé stationnaire), et, plus précisément, aux dérivées de $C(h)$ prises en $h = 0$. A ce titre, elle est accessible, directement et en vraie valeur, à partir de mesures effectuées sur lame mince.

En effet, dans le volume V , désignons par $dS(\omega)$ l'aire occupée par les portions de la surface de séparation dont les normales (orientées par exemple des grains vers les pores) ont des vecteurs unitaires contenus dans le petit angle solide $d\omega$ de direction moyenne ω . Pour alléger les notations nous supposerons (mais cette hypothèse n'est nullement indispensable) que la mesure définie par $dS(\omega)$ sur la sphère de rayon unité possède une densité $\sigma(\omega)$ telle que

$$dS(\omega) = \sigma(\omega) d\omega$$

La surface spécifique (mesurée pour le volume V) est, par définition :

$$(5,1) \quad \sigma = \frac{1}{V} \iint \sigma(\omega) d\omega$$

l'intégrale étant étendue à la sphère de rayon unité. Lorsque le volume V est occupé par une réalisation d'un milieu poreux stationnaire A , la définition (5,1) conduit à une variable aléatoire : toutefois, pourvu que le volume V soit suffisamment grand vis-à-vis des dimensions granulométriques, cette variable aléatoire coïncide ⁽¹⁾ avec son espérance mathématique $E(\sigma)$. C'est cette espérance $E(\sigma)$ qui constitue la vraie définition de la surface spécifique : elle ne dépend que de la loi spatiale de A .

De son côté, la covariance $C(h)$, égale à la probabilité $P(x, x + h)$

(1) Ce n'est pas autre chose que l'hypothèse habituelle d'ergodicité, selon laquelle les moyennes spatiales convergent vers leurs espérances mathématiques.

pour que deux points x et $x + h$ distants de h appartiennent tous deux aux grains A est aussi, d'après (4,5), égale à :

$$C(h) = \frac{1}{V} E[\text{Mes}(V \cap A \cap A_h)]$$

A_h désignant le translaté de A dans la translation h . Cherchons la limite :

$$(5,2) \quad C'_\alpha(0) = - \lim_{|h|} \frac{C(0) - C(h)}{|h|}$$

lorsque le vecteur h tend vers 0 en conservant une direction α fixe. Pour un vecteur δh de direction α et de module très petit, et pour V assez grand, la différence

$$\text{Mes}(V \cap A) - \text{Mes}(V \cap A \cap A_{\delta h})$$

représente la moitié du volume balayé par le vecteur δh lorsque son origine, décrit dans V , la surface de séparation des grains et des pores. Si l'on désigne par θ l'angle de la normale à la surface de séparation et du vecteur δh (angle des directions ω et α de l'espace), on a par conséquent

$$\text{Mes}(V \cap A) - \text{Mes}(V \cap A \cap A_{\delta h}) = \frac{|\delta h|}{2} \int \sigma(\omega) |\cos \theta| d\omega$$

Prenant les espérances mathématiques et passant à la limite, on obtient, compte tenu de (5,1) et (5,2) :

$$(5,3) \quad C'_\alpha(0) = - \frac{1}{2V} \int E[\sigma(\omega)] |\cos \theta| d\omega$$

Ainsi la dérivée de la covariance dans la direction α est apparentée à la surface spécifique. Pour éliminer l'influence de la direction α , intégrons l'expression (5,3) sur la sphère de rayon unité. On obtient, en intervertissant l'ordre des intégrations :

$$- \int C'_\alpha(0) d\alpha = \frac{1}{2V} \int E[\sigma(\omega)] d\omega \int |\cos \theta| d\alpha = \frac{\pi}{V} \int E[\sigma(\omega)] d\omega$$

D'où, compte tenu de (5,1), la relation cherchée :

$$(5,4) \quad E(\sigma) = - \frac{1}{\pi} \int C'_\alpha(0) d\alpha$$

Ainsi la surface spécifique $E(\sigma)$ se déduit directement des dérivées en $h = 0$ de la covariance $C(h)$. En général $C'_\alpha(0)$ dépend effectivement de la direction α (milieu anisotrope). Le calcul numérique approché de (5,4) sera donc possible (et facilement réalisable) pourvu que l'on dispose de plusieurs lames minces de directions différentes. Un petit nombre de lames minces suffira le plus souvent, d'autant plus qu'en général $C'_\alpha(0)$

pourra se représenter à l'aide d'une expression du second degré. En effet, la covariance $C(h)$ admettra souvent, autour de $h = 0$, un développement du type

$$C(h) = C(0) - \sqrt{\sum C_{ij} h^i h^j} + \dots$$

d'où

$$(5,5) \quad -C'_\alpha(0) = \sqrt{\sum C_{ij} \alpha^i \alpha^j}$$

et apparition d'une grandeur tensorielle C_{ij} qu'il serait intéressant de comparer à la perméabilité du milieu, ou plutôt à son inverse, bien qu'il n'existe certainement pas de relation strictement fonctionnelle entre ces deux tenseurs.

Lorsque le milieu est *isotrope* (5,4) se simplifie considérablement. En effet, $C(h)$ ne dépend alors que du module de h , et non de sa direction, et par suite $C'_\alpha(0)$ est une constante $C'(0)$ indépendante de α . On a donc simplement dans ce cas

$$(5,6) \quad E(\sigma) = -4C'(0)$$

(le coefficient numérique 4 provient de ce que la surface de la sphère de rayon unité est 4π , tandis que celle de son contour apparent est π).

REMARQUE. — Lorsque le milieu n'est pas isotrope, la surface spécifique, grandeur scalaire, donc indépendante de toute notion directionnelle, ne peut pas refléter l'anisotropie du milieu. Il conviendrait donc de lui substituer la densité $\sigma(\omega)$ donnant la répartition de la surface spécifique totale en fonction de la direction ω . Toutefois, $\sigma(\omega)$ est difficile à déterminer expérimentalement. Il y aura tout intérêt à lui substituer l'expression $-C'_\alpha(0)$, facilement accessible par mesures directes sur lames minces, et qui possède une signification directionnelle très voisine : elle représente, en effet, d'après (5,3), la somme des projections sur un plan perpendiculaire à la direction α de tous les éléments d'aire de la surface de séparation.

Relation entre surface spécifique et moment fonctionnel $Q_s(R)$ de la sphère. — On peut aussi définir directement la surface spécifique $E(\sigma)$ à partir d'une grandeur scalaire. Désignons, en effet, par $Q_s(R)$ la probabilité pour que la sphère S_R de rayon R soit contenue dans les pores.

$$Q_s(R) = P(S_R \cap A = \emptyset)$$

La surface spécifique $E(\sigma)$ est égale à la dérivée $-Q'_s(0)$ de $Q_s(R)$ prise en $R = 0$.

$$(5,7) \quad E(\sigma) = -Q'_s(0)$$

En effet, soit V un volume supposé assez grand et σV l'aire de la surface de séparation des grains et des pores contenus dans V . Pour qu'un point x des pores soit le centre d'une petite sphère de rayon δR rencontrant les grains, il faut et il suffit qu'il appartienne à $A \oplus S_{\delta R}$. Mais l'en-

semble des points x appartenant à $A \oplus S_{\delta R}$ sans appartenir à A a pour mesure $\sigma V \delta R$. Moyennant une hypothèse d'ergodicité, on voit que la probabilité $-Q'_s(0) \delta R$ pour qu'un point x appartienne aux pores et soit le centre d'une sphère $S_{\delta R}$ rencontrant A est

$$\frac{1}{V} E[\sigma V \delta R] = \delta R E(\sigma) = -Q'_s(0) \delta R$$

La relation (5,7) en résulte.

Outre la surface spécifique, il est intéressant, dans le milieu poreux à 3 dimensions, d'introduire deux autres notions, celle de longueur spécifique et celle de nombre spécifique.

Longueur spécifique. — Considérons un petit cylindre de révolution. Son axe, de longueur δx , a une direction ω , et son rayon est δh . Désignons par $\tau(\omega) \delta x \delta h$ la probabilité de l'événement suivant: « l'axe δx est contenu dans les pores, mais le petit cylindre contient au moins un point des grains admettant un plan tangent (plus généralement un plan limite) parallèle à la direction ω du petit axe ».

Nous appellerons *longueur spécifique* τ du milieu poreux à 3 dimensions la valeur moyenne de $\tau(\omega)$.

$$(5,8) \quad \tau = \frac{1}{4\pi} \int \tau(\omega) d\omega$$

Cette notion, introduite ici sans justification, sera éclaircie dans le prochain chapitre.

Nombre spécifique. — Soient maintenant dS un élément d'aire plane, prise dans un plan P dont la normale a la direction ω , et un petit cylindre droit de hauteur δh et de base dS . Désignons par $\nu(\omega) dS \delta h$ la probabilité de l'événement suivant: « l'aire dS est contenue dans les pores, mais le petit cylindre contient au moins un point des grains admettant un plan tangent (plus généralement un plan limite) parallèle au plan P de l'aire dS de base ». Nous appellerons *nombre spécifique* la valeur moyenne ν de $\nu(\omega)$:

$$(5,9) \quad \nu = \frac{1}{4\pi} \int \nu(\omega) d\omega$$

Lorsqu'un plan P balaye un volume V en restant parallèle à lui-même, on peut dire qu'il rencontre un point limite des grains A chaque fois que, dans l'intersection $A \cap P$, apparaît une nouvelle plage de la composante A disjointe des précédentes. Si $N(\omega)$ est le nombre des points limites ainsi rencontrés lorsque P balaye V , on a

$$\nu(\omega) = \frac{1}{V} E[N(\omega)]$$

Si A est composé de grains convexes disjoints, chacun de ces grains

fournit un point limite. Dans ce cas $\nu(\omega)$ est égal à ν , et νV représente le nombre de grains convexes effectivement contenus dans un volume V assez grand. Dans le cas général, on peut interpréter νV comme le nombre de « grains convexes équivalents » contenus dans V .

Dans le prochain chapitre, nous verrons que la longueur spécifique est liée à la courbure moyenne de la surface de séparation des grains et des pores, et le nombre spécifique à la courbure totale.

Cas de l'espace à 2 dimensions. — Dans l'espace à deux dimensions, la notion de surface spécifique σ doit être remplacée par celle de *périmètre spécifique* 2λ .

Désignons par $Q_C(R)$ la probabilité pour que le cercle C_R de rayon R soit contenu dans les pores. On voit, comme ci-dessus, que la probabilité — $Q'_C(0) \delta R$ pour que x soit dans les pores et que le cercle de centre x et de rayon δR rencontre les grains A , est égale à la probabilité pour que x appartienne à $A \oplus C_{\delta R}$ sans appartenir à A , et on en déduit

$$(5,10) \quad 2\lambda = -Q'_C(0)$$

On peut aussi rattacher 2λ à la covariance $C(h)$. Désignant par $2\lambda(\omega) d\omega$ la contribution au périmètre spécifique total des arcs dont la normale a une direction comprise entre ω et $\omega + d\omega$, on évalue l'aire — $C'_x(0) \delta h$ balayée par un petit vecteur de longueur δh et de direction α dont l'origine décrit la frontière des grains et des pores, et on obtient, en répétant le raisonnement déjà fait ci-dessus :

$$-C'_x(0) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 2\lambda(\omega) |\cos(\alpha - \omega)| d\omega$$

et, en intégrant en α , on trouve

$$(5,11) \quad -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} C'_x(0) d\alpha = \frac{1}{\pi} 2\lambda$$

Dans le cas isotrope, on a en particulier

$$(5,12) \quad 2\lambda = -\pi C'(0)$$

Relation entre surface spécifique et périmètre spécifique. — Soit un milieu à 3 dimensions, dont nous désignerons la surface spécifique par σ (au lieu de $E(\sigma)$ comme ci-dessus). Sur tout plan P , le milieu à 3 dimensions induit un milieu à 2 dimensions dont les grains sont définis comme l'intersection $A \cap P$. Le périmètre spécifique $2\lambda_\omega$ de ce milieu induit ne dépend que de la direction ω du vecteur normal à P . Il suffit de rapprocher (5,4) et (5,11) pour voir apparaître la relation suivante entre surface spécifique σ et valeur moyenne du périmètre spécifique induit :

$$(5,13) \quad \frac{1}{4\pi} \int 2\lambda_\omega d\omega = \frac{\pi}{4} \sigma$$

En particulier, si le milieu est isotrope, $2\lambda_\omega = 2\lambda$ ne dépend pas de l'orientation des sections planes, et on a :

$$(5,14) \quad 2\lambda = \frac{\pi}{4} \sigma$$

Nombre spécifique d'un milieu à 2 dimensions. — Désignons par $\nu'_x dx \delta h$ la probabilité de l'événement suivant, dans un milieu à 2 dimensions : « l'élément rectiligne dx , de direction α , est dans les pores, mais le rectangle élémentaire $dx \delta h$ contient au moins un point des grains admettant une tangente (plus généralement une droite limite) parallèle à la direction α de l'élément dx ». Nous appellerons nombre spécifique ν' la valeur moyenne ν'_x :

$$(5,15) \quad \nu' = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \nu'_x d\alpha$$

Lorsqu'une droite D balaye une portion de surface S du milieu à 2 dimensions, en conservant une direction α fixe, on peut dire qu'elle rencontre un point limite chaque fois que, dans l'intersection $A \cap D$, apparaît une nouvelle plage de la composante A disjointe des précédentes. Le nombre $N'(\alpha)$ des points limites ainsi rencontrés vérifie :

$$\frac{1}{S} E[N'(\alpha)] = \nu'_x$$

Si A est composé de grains convexes disjoints, $\nu'_x = \nu'$ ne dépend pas de α et représente le nombre des grains convexes contenus dans le volume unité. Dans le cas général, ν' représente un nombre de « grains convexes équivalents ».

Il doit exister une relation entre la *longueur spécifique* τ d'un milieu à 3 dimensions, et le nombre spécifique $\nu'(\omega)$ du milieu à 2 dimensions induit sur une section plane de vecteur normal ω . En effet, τ et $\nu'(\omega)$ sont liés tous deux à la longueur de l'ensemble curviligne constitué par les points de la surface de séparation admettant un plan tangent parallèle à une droite de direction donnée. Nous établirons au chapitre suivant la relation :

$$(5,16) \quad \frac{1}{4\pi} \int \nu'(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \tau$$

soit, dans le cas isotrope où $\nu'(\omega) = \nu'$ ne dépend pas de ω :

$$(5,17) \quad \nu' = \frac{1}{\pi} \tau$$

Milieu à une seule dimension. — On peut caractériser le milieu à une dimension par le nombre spécifique ν'' , égal à la valeur moyenne du nombre des grains disjoints contenus dans le segment de longueur unité. La probabilité $\nu'' \delta h$ pour que x soit dans les pores et $x + \delta h$ dans les grains

est aussi $-C'(0) \delta h$, $C(h)$ désignant la covariance. Ainsi :

$$(5,18) \quad v'' = -C'(0)$$

Dans un milieu isotrope à 3 dimensions, la connaissance du nombre spécifique v'' du milieu induit sur les droites permet de reconstituer le périmètre spécifique 2λ des sections planes et la surface spécifique σ du milieu originel. D'après (5,12) et (5,6), on a, en effet :

$$\begin{cases} 2\lambda = \pi v'' \\ \sigma = 4v'' \end{cases}$$

Mais elle ne permet pas de reconstituer le nombre spécifique v' des sections, ni le nombre v et la longueur τ spécifiques du milieu originel.

Lorsque l'on connaît les deux paramètres v' et 2λ des sections, on peut reconstituer la surface et la longueur spécifiques :

$$\begin{cases} \sigma = \frac{8\lambda}{\pi} \\ \tau = \pi v' \end{cases}$$

mais on ne peut pas retrouver le nombre spécifique originel v .

Nous reviendrons plus longuement, dans le chapitre IV, sur cette perte d'information qui accompagne nécessairement le passage du milieu originel à un milieu induit comportant un nombre inférieur de dimensions. Résumons ces résultats sous forme de tableau :

3 dimensions	2 dimensions	1 dimension
Surface Sp. $\sigma = 4v''$ longueur Sp. $\tau = \pi v'$ Nombre Sp. v	Périmètre Sp. $2\lambda = \pi v''$ Nombre Sp. v' —	Nombre spécifique v'' — —

6. — Définition des granulométries.

Dans le paragraphe 3 du premier chapitre, nous avons défini la granulométrie des grains A à partir de l'ouverture A_{ω_λ} de A selon une famille B_λ , et celle des pores à partir de la fermeture correspondante A_{f_λ} . Nous devons maintenant transposer cette définition en termes probabilistes. Lorsque A est un ensemble aléatoire, la notion de mesure de l'ensemble A_{ω_λ} doit être remplacée par celle de probabilité pour qu'un point donné x appartienne à l'ouverture A_{ω_λ} des grains. Il est donc naturel de définir la granulométrie à partir de la fonction $F(x; \lambda)$ non décroissante définie comme suit : (avec $\lambda > 0$)

$$(6,1) \quad \begin{cases} F(x; \lambda) = P(x \in A_{f_\lambda}) \\ F(x; -\lambda) = P(x \in A_{\omega_\lambda}) \end{cases}$$

Si l'ensemble aléatoire A n'est pas stationnaire, cette fonction dépend effectivement du point x . La granulométrie qu'elle définit n'a qu'une valeur locale, limitée au voisinage du point x . A strictement parler, elle n'a même qu'une valeur potentielle et échappe à l'inférence statistique : une estimation approchée reste cependant pratiquement possible, pourvu que $F(x; \lambda)$ ne varie que lentement en fonction du point x .

Dans le reste de ce paragraphe, nous nous placerons dans le cas où A est *stationnaire*. Alors les relations (6,1) définissent une fonction $F(\lambda)$ indépendante du point x , dont les valeurs peuvent être estimées, à partir des données expérimentalement connues dans un domaine D , selon les formules (voir Annexe II) :

$$(6,2) \quad \begin{cases} F(\lambda) = \frac{E(\text{Mes } D \cap A_{f\lambda})}{\text{Mes } D} \\ F(-\lambda) = \frac{E(\text{Mes } D \cap A_{\omega\lambda})}{\text{Mes } D} \end{cases}$$

Il s'agit donc bien de la transposition probabiliste de la définition (3,3). La fonction $F(\lambda)$ est non décroissante : cela résulte des inclusions

$$A_{\omega\mu} \subset A_{\omega\lambda} \subset A \subset A_{f\lambda} \subset A_{f\mu}$$

valable pour $\lambda \leq \mu$. Lorsque λ tend vers l'infini, B_λ ne reste pas borné (B_λ est l'homothétique λB d'un ensemble convexe B non réduit à un point), et on peut admettre, moyennant des conditions assez générales, que $A_{\omega\mu}$ et $A_{f\mu}$ tendent (presque sûrement) le premier vers l'ensemble vide, le deuxième vers l'ensemble plein, c'est-à-dire l'espace entier. Autrement dit, on a $F(-\infty) = 0$ et $F(+\infty) = 1$. La fonction non décroissante $F(\lambda)$ varie donc de 0 à 1, comme les fonctions de répartition du calcul des probabilités.

D'autre part, pour $\lambda > 0$ $F(\lambda)$ représente la granulométrie des pores, et celle des grains pour $\lambda < 0$. Nous pouvons donc, comme dans le paragraphe 3, séparer ces deux granulométries en posant :

$$(6,3) \quad \begin{cases} G_1(\lambda) = \frac{F(0) - F(-\lambda)}{F(0)} = \frac{p - F(-\lambda)}{p} \\ G_2(\lambda) = \frac{F(\lambda) - F(0)}{F(+\infty) - F(0)} = \frac{F(\lambda) - p}{q} \end{cases}$$

p et $q = 1 - p$ représentent les probabilités pour qu'un point x appartienne aux grains ou aux pores (q est la porosité).

G_1 représente la granulométrie des grains et G_2 celle des pores. Ces deux fonctions sont non-décroissantes et varient de 0 à 1 comme $F(\lambda)$. Elles admettent une interprétation probabiliste simple. En effet, $p - F(-\lambda)$ est la probabilité pour qu'un point x appartienne aux grains A sans appartenir à l'ouverture $A_{\omega\lambda}$. Ainsi $G_1(\lambda)$ est la probabilité conditionnelle pour que x n'appartienne pas à $A_{\omega\lambda}$ lorsque l'on sait que x est dans les grains. De même $G_2(\lambda)$ est la probabilité conditionnelle pour que x

appartienne à la fermeture A_{f_λ} des grains lorsque l'on sait que x est dans les pores. On peut donc écrire :

$$\begin{cases} G_1(\lambda) = P(x \notin A_{\omega_\lambda} | x \in A) \\ G_2(\lambda) = P(x \in A_{f_\lambda} | x \notin A) \end{cases}$$

Les granulométries les plus intéressantes correspondent aux cas où l'on prend comme famille B_λ des segments de droite, des cercles, des sphères, etc... ou encore des carrés, des cubes, etc... Grâce aux relations (6,2), leur détermination expérimentale est toujours possible. Du point de vue théorique, leur détermination explicite à partir de la loi spatiale pose un problème assez difficile, sauf dans le cas où B_λ est un segment de droite (granulométrie des traversées). Pour calculer $F(-\lambda)$ par exemple, on doit en effet évaluer la probabilité pour qu'il existe un translaté de B_λ contenant le point x et contenu dans les pores. La difficulté provient du fait qu'il n'est pas possible de soumettre à une relation d'ordre simple l'ensemble des translatés de B_λ contenant x , sauf dans le cas où B_λ est un segment de droite. Nous nous limiterons donc à ce dernier cas.

Granulométrie des traversées. — Soit un segment de droite de direction α fixe et de longueur l variable. La probabilité pour que ce segment soit contenu tout entier dans les grains, c'est-à-dire le moment fonctionnel $P([x, x + l\alpha])$ sera désigné, pour abréger, par $P(l)$. En raison du caractère stationnaire, $P(l)$ ne dépend pas du choix de l'origine x du segment $[x, x + l\alpha]$, mais dépend en général de la direction α .

La granulométrie des traversées des grains (selon la direction α), de son côté, dépend uniquement de la probabilité $F(-l)$ pour que x appartienne à l'ouverture A_{ω_l} des grains selon le segment de longueur l et de direction α . Montrons que $F(-l)$ ne dépend que de $P(l)$. En effet, $F(-l)$ est la probabilité de l'événement : « il existe un segment de longueur l et de direction α , contenant le point x et contenu dans les grains ». Cet événement est somme logique des événements incompatibles :

le segment $[x, x + l\alpha]$ est contenu dans A ;

le segment $[x + (h - l)\alpha, x + h\alpha]$ est contenu dans A , mais le point $x + (h + \delta h)\alpha$ n'est pas dans A (δh très petit, et h variant de 0 à l).

Le premier de ces événements possède la probabilité $P(l)$. Un événement du deuxième type possède la probabilité $-\frac{dP(l)}{dl} \delta h$ (nous admettons l'existence de cette dérivée $\frac{dP}{dl}$, qui est une dérivée prise dans la direction α du segment l). Ainsi on a :

$$F(-l) = P(l) - \int_0^l \frac{dP(l)}{dl} dh$$

Comme $\frac{dP}{dl}$ ne dépend pas de h , il reste la relation très simple :

$$(6,4) \quad F(-l) = P(l) - l \frac{dP}{dl}$$

Cette relation est classique dans la théorie des processus de renouvellement. De fait, le problème étudié ici ne fait intervenir qu'une seule dimension d'espace et relève bien de la théorie des processus stochastiques. En appliquant (6,3), nous déduisons de (6,4) l'expression de la fonction $G_1(l)$ représentant la granulométrie des traversées des grains :

$$(6,5) \quad 1 - G_1(l) = \frac{1}{p} \left[P(l) - l \frac{dP}{dl} \right]$$

Si $P(l)$ est deux fois dérivable, la fonction de répartition $G_1(l)$ admet une densité $g_1(l)$ donnée par :

$$g_1(l) = \frac{l}{p} P''(l)$$

comme on le voit immédiatement en dérivant (6,5).

Inversement, compte tenu de la condition $P(0) = p$, on peut exprimer $P(l)$ en fonction de la granulométrie $G_1(l)$ en résolvant l'équation différentielle (6,5), ce qui donne

$$(6,6) \quad P(l) = p \int_l^{\infty} \frac{y-l}{y} dG_1(y)$$

Cette équation (6,6) peut être retrouvée par le raisonnement rapide suivant : lorsque l'on sait que le point x appartient à une traversée des grains de longueur comprise entre y et $y + dy$, ce qui a lieu avec la probabilité $p dG_1(y)$, l'une des extrémités de cette traversée (par exemple son extrémité droite) peut tomber n'importe où sur le segment $[x, x + y]$ avec une égale probabilité. La probabilité pour que cette extrémité droite tombe à une distance de x supérieure à l est donc $\frac{y-l}{y}$ (pour $l \leq y$).

Le théorème des probabilités composées conduit alors immédiatement à (6,6).

Granulométrie exprimée en nombre. — La granulométrie $G_1(l)$ est exprimée *en longueur*, et non en nombre. Autrement dit, si l'on veut estimer G_1 à partir d'un certain nombre de traversées mesurées expérimentalement, on doit attribuer à chacune de ces traversées un poids proportionnel à sa longueur. Il est souvent plus commode d'attribuer le même poids à chacune des traversées observées, de manière à éviter ces calculs de pondération, et d'exprimer par conséquent la granulométrie en nombre, et non plus en longueur. Désignons par $N_1(l)$ la fonction de répartition correspondante. $N_1(l)$ représente, en pourcentage du nombre total des traversées mesurées, le nombre des traversées de longueurs inférieures à l .

On passe facilement de $N_1(l)$ à $G_1(l)$ en remarquant que $dG_1(l)$ (fréquence exprimée en longueur) est proportionnel à $l dN_1(l)$:

$$(6,7) \quad dG_1(l) = Cl dN_1(l)$$

En intégrant de 0 à l'infini, on obtient la constante C sous les deux formes suivantes :

$$C = \int_0^\infty \frac{1}{l} dG_1(l) = \frac{1}{\int_0^\infty l dN_1(l)}$$

Ainsi C est l'inverse de la moyenne des traversées, calculée à partir de la granulométrie en nombre N_1 . C'est aussi la moyenne des inverses $\frac{1}{l}$ des traversées, calculée à partir de la granulométrie en longueurs G_1 . Nous poserons

$$(6,8) \quad \left\{ \begin{array}{l} C = \frac{1}{m_1} \\ m_1 = \int_0^\infty l dN_1(l) \end{array} \right.$$

en introduisant la traversée moyenne m_1 calculée selon la granulométrie en nombre N_1 (et directement accessible à une détermination expérimentale).

Compte tenu de (6,7) et de (6,8), l'équation intégrale (6,6) donnant le moment fonctionnel $P(l)$ en fonction de la granulométrie prend la forme

$$P(l) = \frac{p}{m_1} \int_l^\infty (y - l) dN_1(y)$$

et, en intégrant par parties, on obtient :

$$(6,9) \quad P(l) = \frac{p}{m_1} \int_l^\infty [1 - N_1(y)] dy$$

Ainsi, lorsque l'on a déterminé expérimentalement la porosité du milieu et la granulométrie N_1 en nombre des traversées des grains, la relation (6,9) permet d'en déduire le moment fonctionnel. Inversement, si l'on dérive (6,9) en l , il vient :

$$(6,10) \quad \frac{p}{m_1} [1 - N_1(l)] = - \frac{dP(l)}{dl}$$

Si N_1 est dérivable, sa densité $n_1(l)$ est :

$$n_1(l) = \frac{m_1}{p} P''(l)$$

Si l'on connaît le moment fonctionnel $P(l)$, la relation (6,10) permet d'en déduire la granulométrie en nombre (on remarque, en faisant $l = 0$

que $\frac{p}{m_1}$ est égal à la valeur $-\frac{dP(0)}{dl}$ de $\frac{dP}{dl}$ en $l=0$). Dans les études théoriques, il est généralement plus facile d'obtenir $P(l)$ à partir de la loi spatiale, plutôt que la granulométrie, et cette relation (6,10) est alors très utile.

En ce qui concerne les traversées des pores, on formera de la même manière, à partir du moment fonctionnel $Q(l)$ donnant la probabilité pour que le segment de longueur l soit contenu dans les pores, les expressions des granulométries G_2 en longueur et N_2 en nombre.

7. — Théorie du grain convexe isolé.

En vue de préparer la théorie des schémas booléens à grains convexes, qui sera exposée au chapitre suivant, nous allons rassembler ci-dessous quelques notions sur les grains convexes.

Soit, tout d'abord, A un ensemble convexe (non aléatoire) et $f(x)$ sa fonction caractéristique égale à 1 pour $x \in A$ et à 0 pour $x \in A^c$. A est supposé mesurable et borné. Sa mesure (volume ou surface, selon que l'espace a 3 ou 2 dimensions) est

$$(7,1) \quad \text{Mes } A = \int f(x) dx$$

Le translaté A_{-h} de A par le vecteur $-h$ admet la fonction caractéristique $f(x+h)$, puisque x appartient ou non à A_{-h} selon que $x+h$ appartient ou non à A . L'intersection $A \cap A_{-h}$ admet donc la fonction caractéristique $f(x)f(x+h)$, et la mesure $g(h)$ de cette intersection est :

$$(7,2) \quad g(h) = \text{Mes } (A \cap A_{-h}) = \int f(x)f(x+h) dx$$

Pour $h=0$, on trouve $g(h) = \text{Mes } A$. D'autre part $g(-h) = g(h)$, comme on le voit en changeant x en $-x$ dans (7,2). Enfin, si l'on intègre $g(h)$ dans tout l'espace, on obtient $[g(0)]^2$, c'est-à-dire le carré de $\text{Mes } A$, comme on le voit en intégrant d'abord en h le 2^e membre de (7,2). Ainsi :

$$(7,3) \quad \left\{ \begin{array}{l} g(0) = \text{Mes } A \\ g(-h) = g(h) \leq g(0) \\ \int g(h) dh = [g(0)]^2 = [\text{Mes } A]^2 \end{array} \right.$$

Examinons maintenant la dérivée $g'_z(h)$ du $g(h)$ prise dans la direction α du vecteur h . Pour un vecteur δh de module très petit et de direction α , $\text{Mes } A - \text{Mes } (A \cap A_{-\delta h})$ est égale à la moitié de la mesure du domaine balayé par un vecteur équipollent à δh dont l'origine décrit la frontière de A . Comme A est convexe, cette mesure vaut $\delta h S_\alpha$, S_α désignant l'aire de la projection du contour apparent de A sur un plan

perpendiculaire à la direction α (dans l'espace à 3 dimensions) ou la longueur de la projection du diamètre apparent de A sur une droite perpendiculaire à α (dans l'espace à 2 dimensions). Par conséquent, on a :

$$(7,4) \quad -g'_\alpha(0) = S_\alpha$$

La dérivée de $g(h)$, en $h = 0$ et dans la direction α , est égale, au signe près, à l'aire du contour apparent ou à la longueur du diamètre apparent de A (selon que l'espace a 3 ou 2 dimensions).

De la même manière, on voit que la dérivée $-g'_\alpha(h)$ prise dans la direction α du vecteur h donne l'aire du contour apparent (ou la longueur du diamètre apparent) de l'intersection $A \cap A_h$ relativement à cette direction α . Ou encore, $-g'_\alpha(h)$ représente la portion de l'aire $-g'_\alpha(0)$ du contour apparent occupée par les pieds des traversées de A possédant une longueur supérieure à $|h|$. Par conséquent, la granulométrie (en nombre) de la population des traversées de A parallèles à la direction α possède la fonction de répartition

$$(7,5) \quad F(h) = 1 - \frac{g'_\alpha(h)}{g'_\alpha(0)}$$

Ainsi la granulométrie des traversées d'un ensemble convexe A (non aléatoire) ne dépend que de la fonction $g(h)$, introduite en (7,2), c'est-à-dire de la mesure de l'intersection de A et de son translaté A_h .

La valeur moyenne, relativement à la direction α , de la mesure du contour apparent possède une signification géométrique simple. Dans l'espace à 2 dimensions, on démontre que le diamètre apparent moyen D_0 d'un ensemble convexe quelconque A est égale au périmètre 2ℓ de A divisé par π :

$$(7,6) \quad D_0 = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g'_\alpha(0) d\alpha = \frac{2\ell}{\pi}$$

Dans l'espace à 3 dimensions, de même, on démontre que la valeur moyenne S_0 de l'aire $-g'_\alpha(0)$ du contour apparent relativement à la direction α est égale au quart de la surface de A :

$$(7,7) \quad S_0 = -\frac{1}{4\pi} \int g'_\alpha(0) d\alpha = \frac{1}{4} S$$

(l'intégration en α est ici étendue à la surface de la sphère de rayon unité).

Dans l'espace à 3 dimensions, on doit aussi introduire le diamètre apparent D_ω dans la direction ω (c'est la borne supérieure de la distance séparant deux plans rencontrant A et perpendiculaires à la direction ω). Si l'on introduit le paramètre α égal à l'intégrale de la courbure moyenne sur la surface S de A :

$$2\alpha = \int_S \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) dS$$

(R_1 et R_2 désignant les rayons de courbure), on démontre que le diamètre

apparent moyen D_0 ne dépend que de α . On a :

$$(7,8) \quad D_0 = \frac{1}{4\pi} \int D_\omega d\omega = \frac{\alpha}{2\pi}$$

Ces relations (7,6), (7,7) et (7,8) se retrouvent immédiatement dans le cas particulier où A est une sphère.

Dilatation. — Si l'on dilate l'ensemble convexe A par un segment de droite de longueur l et de direction α , sa mesure (son volume, ou sa surface) est augmenté de la mesure du domaine balayé par un vecteur de longueur l et de direction α dont l'origine décrit le contour apparent de A . Ainsi, on a :

$$(7,9) \quad \text{Mes}(A \oplus l) = \text{Mes} A + l g'_\alpha(0)$$

Dans l'espace à 2 dimensions, l'aire de $A \oplus B_r$, B_r désignant le cercle de rayon r , et $2\mathcal{L}$ le périmètre de A , est égale à :

$$(7,10) \quad \text{Mes}(A \oplus B_r) = \text{Mes} A + 2\mathcal{L}r + \pi r^2$$

A 3 dimensions, B_r désignant la sphère de rayon r , S la surface de A et α l'intégrale de la courbure moyenne, on obtient :

$$(7,11) \quad \text{Mes}(A \oplus B_r) = \text{Mes} A + Sr + \alpha r^2 + \frac{4}{3} \pi r^3$$

Grain convexe aléatoire. — Nous supposons maintenant que A est un ensemble aléatoire convexe (évidemment non stationnaire). Pour exprimer que A est convexe, on doit écrire que deux points x et y ne peuvent pas appartenir à A sans que la totalité du segment $[x, y]$ soit contenue dans A . Autrement dit, on doit avoir :

$$P(x, y) = P([x, y])$$

Plus généralement, si B est un ensemble quelconque, et C son enveloppe convexe (c'est-à-dire le plus petit ensemble convexe contenant B), on doit avoir

$$P(C) = P(B)$$

Inversement (du moins dans les conditions axiomatiques définies dans l'Annexe 2) on peut montrer que ces conditions caractérisent un ensemble aléatoire presque certainement convexe.

Enfin, nous supposons que l'ensemble A est presque certainement borné. Il suffit, pour cela, que la probabilité $P(x)$ pour que $x \in A$ décroisse suffisamment vite lorsque $|x|$ tend vers l'infini. Dans ces conditions, l'intégrale de $P(x)$ est toujours convergente, et représente l'espérance mathématique de la mesure du grain A :

$$(7,12) \quad E[\text{Mes} A] = \int P(x) dx$$

La relation (7,12) se déduit immédiatement de (7,1), en remarquant que $P(x)$ n'est autre que l'espérance $E[f(x)]$ de la fonction caractéristique de A . De même la probabilité $P(x, x + h)$ pour que les deux points x et $x + h$ soient dans A est égale à l'espérance de $f(x) f(x + h)$

$$P(x, x + h) = E[f(x) f(x + h)]$$

Intégrons cette relation en x , et désignons par $K(h)$ la fonction de h ainsi obtenue. D'après (7,2) on obtient

$$(7,13) \quad K(h) = \int P(x, x + h) dx = E[g(h)]$$

Cette fonction $K(h)$ généralise donc au cas de l'ensemble convexe aléatoire la fonction $g(h)$ précédemment introduite. En particulier, d'après (7,3), on a :

$$(7,14) \quad \left\{ \begin{array}{l} K(0) = E [\text{Mes } A] \\ K(h) = K(-h) \\ \int K(h) dh = E [(\text{Mes } A)^2] \end{array} \right.$$

Ainsi, on déduit de $K(h)$ à la fois la moyenne et la variance de la mesure du grain A .

De (7,4) on déduit en outre que la dérivée $-K'_\alpha(0)$ prise en $h = 0$ et dans la direction α représente l'espérance mathématique de l'aire du contour apparent (ou de la longueur du diamètre apparent) relatif à la direction α

$$(7,15) \quad -K'_\alpha(0) = E(S_\alpha)$$

De même, la dérivée $-K'_\alpha(h)$ possède une signification granulométrique sur laquelle nous reviendrons ultérieurement.

Dans l'espace à 2 dimensions, (7,6) permet d'évaluer l'espérance mathématique du périmètre 2ℓ de A :

$$E(2\ell) = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} K'_\alpha(0) d\alpha$$

De même, dans l'espace à 3 dimensions, l'espérance de la surface S de A se déduit de (7,7) :

$$E(S) = -\frac{1}{\pi} \int K'_\alpha(0) d\alpha$$

En ce qui concerne, enfin, les dilatations $A \oplus B$, on obtient des généralisations immédiates. Si B est le segment de longueur l et de direction α , on déduit de (7,9) :

$$(7,16) \quad E[\text{Mes } A \oplus B] = K(0) - lK'_\alpha(0)$$

De même, (7,10) et (7,11) se transposent sans peine. Ces relations se

généralisent même au cas où B est un ensemble convexe quelconque, pourvu que la loi spatiale de A soit invariante par rotation :

Cas où la loi spatiale est invariante par rotation. — Cette invariance par rotation de la loi spatiale signifie, de manière concrète, que le grain convexe aléatoire A ne manifeste aucune tendance à s'orienter parallèlement à une direction préférentielle. La fonction $K(h)$ ne dépend alors que du module $|h|$ de son argument h , et non de la direction α de ce vecteur.

Si, dans l'espace à 2 dimensions, on désigne par $2\mathcal{L}_A$, $2\mathcal{L}_B$, S_A et S_B les périmètres et les aires du grain A et d'un ensemble convexe B donné quelconque, et par $S_{A\oplus B}$ l'aire de $A\oplus B$, on peut montrer que l'on a :

$$(7,17) \quad E(S_{A\oplus B}) = E(S_A) + 2\mathcal{L}_B \frac{E(2\mathcal{L}_A)}{2\pi} + S_B$$

De même, dans l'espace à 3 dimensions, désignons par V_A , V_B , S_A , S_B , α_A et α_B le volume, la surface et l'intégrale de la courbure moyenne du grain A et d'un ensemble convexe B . Le dilaté $A\oplus B$ possède un volume $V_{A\oplus B}$ dont l'espérance est :

$$(7,18) \quad E(V_{A\oplus B}) = E(V_A) + \alpha_B \frac{E(S_A)}{4\pi} + S_B \frac{E(\alpha_A)}{4\pi} + V_B$$

Nous reviendrons plus longuement sur ces relations dans le prochain chapitre, et nous en donnerons une démonstration indirecte. Il ne serait d'ailleurs pas difficile de les établir par des raisonnements géométriques élémentaires.

CHAPITRE III

SCHÉMAS BOOLÉENS ET SCHÉMAS SEMI-MARKOVIENS

SOMMAIRE

Paragraphe 8. — *Définition des schémas booléens : on plante des germes dans l'espace avec une densité poissonnienne θ constante, on laisse un grain primaire se développer à partir de chaque germe, et on prend la réunion de tous les grains primaires. Expression (8,4) du moment $Q(B)$. Le nombre des grains primaires rencontrés par B obéit à une loi de Poisson. Si les grains primaires sont convexes, la granulométrie des traversées des pores est exponentielle.*

Paragraphe 9. — *Définition des schémas semi-markoviens : si E_1 et E_2 sont deux ensembles séparés par un ensemble C , indépendance conditionnelle des événements relatifs à E_1 et à E_2 lorsque C est dans les pores. Le schéma booléen à grains convexes est semi-markovien. Les granulométries des traversées des grains et des pores ne dépendent que de la covariance $C(h)$. Celle des pores est exponentielle.*

Paragraphe 10. — *Calcul du moment $Q(B)$ en schéma semi-markovien isotrope dans l'espace à 2 dimensions, lorsque B est convexe. Il ne dépend que de l'aire et du périmètre de B ainsi que du nombre et du périmètre spécifiques du schéma (10,2). Dans le cas booléen les paramètres figurant dans (10,2) sont la densité de germe et le diamètre apparent des grains primaires. Loi du rayon vecteur joignant un point des pores au point des grains le plus proche.*

Paragraphe 11. — *Calcul de $Q(B)$ en schéma semi-markovien isotrope dans l'espace à 3 dimensions, lorsque B est convexe. Il ne dépend que du volume, de la surface et de la courbure moyenne de B , ainsi que de la surface, de la longueur et du nombre spécifiques du schéma (11,3) Dans le cas booléen, les paramètres figurant dans (11,3) sont la densité de germe, le diamètre apparent moyen et le contour apparent moyen du grain primaire. Loi du rayon vecteur joignant un point des pores au point des grains le plus proche — Relations entre un schéma semi-markovien isotrope de l'espace à 3 dimensions et les schémas qu'il induit sur des plans ou des droites, et problème du passage inverse.*

8. — Les schémas booléens.

L'idée qui préside à la construction des schémas booléens consiste à meubler l'espace à l'aide de grains implantés au hasard, indépendamment les uns des autres et possédant les mêmes caractéristiques aléatoires (la même loi spatiale, à une translation près), et à prendre la réunion ensembliste de tous les grains ainsi obtenus. Explicitons cette démarche.

Soit tout d'abord A' un ensemble aléatoire non stationnaire, que nous appellerons *grain primaire*, et désignons par les lettres grecques ϖ et χ ses moments fonctionnels.

$$(8,1) \quad \begin{cases} \varpi(B) = P(B \subset A') \\ \chi(B) = P(B \cap A' = \emptyset) \end{cases}$$

Pour abréger le langage, nous dirons que le grain aléatoire A' est un grain primaire *germé à l'origine* (sans que cela implique d'ailleurs que l'origine 0 appartienne nécessairement à A'). Si nous remplaçons A' par son translaté A'_ξ dans la translation ξ , nous obtenons un *grain aléatoire germé au point* ξ . Les moments fonctionnels de A'_ξ se déduisent immédiatement de ceux de A' . En effet, l'inclusion $B \subset A'_\xi$ est équivalente $B_{-\xi} \subset A'$, $B_{-\xi}$ étant le translaté de B dans la translation réciproque $-\xi$. Ainsi, les moments ϖ_ξ et χ_ξ de A'_ξ sont :

$$(8,2) \quad \begin{cases} \varpi_\xi(B) = \varpi(B_{-\xi}) \\ \chi_\xi(B) = \chi(B_{-\xi}) \end{cases}$$

Implantons maintenant des germes dans tout l'espace selon un schéma poissonien de densité θ constante. Le nombre de germes présents dans un domaine V est une variable aléatoire obéissant à la loi de Poisson de paramètre $\theta \text{Mes } V$, et, si V_1, V_2, \dots sont des ensembles disjoints, les nombres N_1, N_2, \dots de germes tombés dans chacun d'eux sont des variables indépendantes.

Soient ξ_i les positions occupées par les différents germes obtenus selon ce schéma poissonien. A partir de chaque germe ξ_i , laissons se développer un grain aléatoire A'_{ξ_i} selon la loi spatiale écrite ci-dessus, étant bien entendu que ces différents grains se développent indépendamment les uns des autres (A'_{ξ_i} et A'_{ξ_j} sont indépendants pour $i \neq j$). Deux grains germés en des points différents peuvent, naturellement, se rencontrer : on admet ici que ces grains se rencontrent et, éventuellement, se traversent, sans que soit modifiée la loi de croissance de chacun d'eux. Désignons alors par A la réunion ensembliste de tous les grains A'_{ξ_i} ainsi obtenus. Nous dirons que l'ensemble aléatoire A s'obtient par passage en booléen à partir du grain primaire A' et de la densité poissonienne de germes θ .

La loi spatiale de A est évidemment stationnaire, puisque la densité de germe θ est constante dans tout l'espace. Explicitons l'expression du moment fonctionnel $Q(B)$ donnant la probabilité pour que l'ensemble B soit disjoint de l'ensemble aléatoire A , c'est-à-dire disjoint de chacun des grains primaires A'_{ξ_i} . Pour chaque élément de volume $\delta\xi$ centré en chacun des points ξ de l'espace, on doit écrire que :

— ou bien aucun grain primaire n'a germé dans $\delta\xi$, ce qui a lieu avec la probabilité $1 - \theta \delta\xi$;

— ou bien un grain primaire A'_ξ a germé dans cet élément de volume, mais il ne rencontre pas l'ensemble B . Ceci a lieu avec la probabilité $\theta \chi(B_{-\xi}) \delta\xi$.

La somme des probabilités de ces deux événements incompatibles est équivalente à $\exp(-\theta[1 - \chi(B_{-\xi})] \delta\xi)$. Comme les événements relatifs aux différents petits éléments de volumes $\delta\xi$ disjoints dont la réunion engendre l'espace entier sont indépendants les uns des autres, on obtient $Q(B)$ en faisant le produit de toutes ces exponentielles pour tous les éléments $\delta\xi$, d'où :

$$(8,3) \quad Q(B) = \exp\left[-\theta \int [1 - \chi(B_{-\xi})] d\xi\right]$$

Pour interpréter d'une manière plus géométrique cette expression (8,3), remarquons que $1 - \chi(B_{-\xi})$ est, d'après (8,1), la probabilité pour que l'ensemble $B_{-\xi}$ rencontre le grain primaire A' . Si nous nous reportons à (1,4) et à la proposition 1 du premier chapitre, nous voyons que c'est aussi la probabilité pour que le point $-\xi$ appartienne à l'ensemble $A' \oplus \check{B}$:

$$1 - \chi(B_{-\xi}) = P(-\xi \in A' \oplus \check{B})$$

Intégrons cette expression en ξ dans tout l'espace. L'intégrale de la probabilité pour qu'un point ξ appartienne à un ensemble aléatoire est égale à l'espérance mathématique de la mesure de cet ensemble :

$$\int [1 - \chi(B_{-\xi})] d\xi = E[\text{Mes}(A' \oplus \check{B})]$$

Ainsi (8,3) se met sous la forme plus géométrique :

$$(8,4) \quad Q(B) = e^{-\theta E[\text{Mes}(A' \oplus \check{B})]}$$

Il est commode d'introduire aussi la fonction $K(h)$

$$(8,5) \quad K(h) = \int \varpi(x, x+h) dx = E[\text{Mes } A' \cap A'_h]$$

qui représente l'espérance de la mesure de l'intersection du grain primaire A' et de son translaté A'_h . De (8,3), ou de (8,4) on déduit l'expression de la porosité q du milieu booléen A et du moment d'ordre 2, $Q(x, x+h)$, représentant la probabilité pour que deux points distants de h soient dans les pores :

$$(8,6) \quad \begin{cases} q = e^{-\theta K(0)} \\ Q(x, x+h) = q^2 e^{\theta K(h)} = q e^{-\theta[K(0) - K(h)]} \end{cases}$$

Le deuxième moment d'ordre 2, $P(x, x+h) = C(h)$, ou covariance de A , donnant la probabilité pour que deux points distants de h soient dans les grains, se déduit de (8,6) et de la relation générale (4,4) :

$$(8,7) \quad C(h) = 1 - 2q + q^2 e^{\theta K(h)}$$

Loi du nombre des grains primaires rencontrés par B . — Soit B un ensemble borné quelconque. On peut s'intéresser au nombre des grains

primaires A'_i qui rencontrent B . Ce nombre est une variable aléatoire obéissant à une loi de Poisson. En effet, si θ est la densité de germes du schéma booléen, on peut considérer l'ensemble aléatoire A comme la réunion de n ensembles aléatoires indépendants, obtenus en effectuant le passage en booléen avec les mêmes grains primaires A' et la densité de germes $\frac{\theta}{n}$. Le nombre de grains rencontrés par A est ainsi la somme de n variables indépendantes, représentant chacune le nombre des grains de chacun de ces schémas de densité $\frac{\theta}{n}$ qui rencontrent B . Lorsque n est très grand, chacun des schémas de densité $\frac{\theta}{n}$ fournit :

— soit 0 intersection, avec la probabilité $1 - \frac{\theta}{n} E [\text{Mes } A' \oplus \check{B}]$

— soit 1 intersection, avec la probabilité $\frac{\theta}{n} E [\text{Mes } A' \oplus \check{B}]$

(en négligeant les termes d'ordre supérieur en $\frac{1}{n}$). Par suite le nombre des intersections de B avec les grains primaires de A est une variable de Poisson de paramètre $\theta E [\text{Mes } A' \oplus \check{B}]$. L'expression (8,4) de $Q(B)$ est d'ailleurs égale à la probabilité pour qu'il n'y ait aucune intersection.

En particulier, q désignant la porosité, la probabilité pour qu'un point donné appartienne à n grains primaires distincts est $\frac{q}{n!} \left(\log \frac{1}{q}\right)^n$: c'est la loi de Poisson de paramètre $\log \frac{1}{q} = \theta K(0)$.

Schéma booléen à grains primaires convexes. — Nous allons maintenant supposer que le grain primaire aléatoire A' est convexe, et que sa loi spatiale vérifie, par conséquent, les propriétés énumérées au paragraphe 7. Alors la granulométrie des traversées des pores, exprimée en nombre, obéit à une loi exponentielle. C'est là une particularité assez caractéristique du schéma à grains convexes, et nous montrerons dans le paragraphe suivant qu'elle est liée à une propriété semi-markovienne. Le moment fonctionnel $Q(h)$, probabilité pour qu'un segment de longueur h et de direction α soit dans les pores, s'obtient ici en substituant (7,16) dans la formule générale (8,4), ce qui donne :

$$Q(h) = e^{-[K(0) - hK'_\alpha(0)]}$$

(α désigne la direction du segment de longueur h). Compte tenu de l'expression (8,6) de la porosité q , on a aussi :

$$(8,8) \quad Q(h) = qe^{\theta h K'_\alpha(0)}$$

Il suffit ensuite d'appliquer (6,10) pour obtenir la granulométrie $N_2(h)$ des traversées des pores (exprimées en nombre). On trouve :

$$1 - N_2(h) = e^{\theta h K'_\alpha(0)}$$

Selon (7,15) $K'_\alpha(0)$, qui est négatif, est égal au signe près à l'espérance mathématique $E(S_\alpha)$ de la mesure du contour apparent du grain convexe primaire A' . Ainsi, la granulométrie des traversées des pores est :

$$(8,9) \quad 1 - N_2(h) = e^{-\theta h E(S_\alpha)}$$

Elle obéit à une loi exponentielle de paramètre $\theta E(S_\alpha)$. On remarquera le caractère très géométrique de ce résultat. Il est en particulier notable que cette loi dépend uniquement de la densité de germe θ et de l'espérance $E(S_\alpha)$ du contour apparent du grain primaire.

Des relations (7,10) et (7,11) on déduira sans peine, par passage aux exponentielles, la probabilité $Q(B_r)$ pour qu'un cercle de rayon r (dans l'espace à 2 dimensions) ou une sphère de rayon r (dans l'espace à 3 dimensions) soit contenu dans les pores. Nous reviendrons plus longuement sur ces relations dans les paragraphes 10 et 11. De même, dans le cas isotrope, les relations (7,17) et (7,18) donnent, par exponentiation, la valeur de $Q(B)$ pour un ensemble convexe B quelconque. C'est en établissant directement l'expression de $Q(B)$ que nous retrouverons (7,17) et (7,18) dans les paragraphes (10) et (11).

9. — Les schémas semi-markoviens.

L'apparition de lois exponentielles pour les traversées des pores du schéma booléen à grains convexes est liée à une propriété semi-markovienne que nous allons maintenant définir.

Étant donnés 3 ensembles de points E_1 , E_2 et C , nous dirons que C sépare E_1 et E_2 si tout segment de droite $[x, y]$ joignant un point x de E_1 et un point y de E_2 rencontre C en un point au moins (situé entre x et y). Nous dirons qu'un ensemble aléatoire A est semi-markovien si, quels que soient les ensembles E_1 , E_2 et C séparant E_1 et E_2 , il y a indépendance conditionnelle entre tout événement intéressant E_1 et tout événement intéressant E_2 , lorsque l'on sait que C est contenu dans les pores A^c .

Montrons que le schéma booléen à grains primaires convexes vérifie la propriété semi-markovienne. Il suffit de le démontrer dans le cas où les ensembles E_1 et E_2 sont constitués d'un nombre fini de points : la proposition relative au cas général s'en déduit par passage à la limite (compte tenu de la séparabilité de A , voir Annexe II).

Soient donc E_1 et E_2 deux ensembles finis séparés par un ensemble C , et A'_ξ un grain convexe primaire germé au point ξ . L'événement $C \cap A'_\xi = \emptyset$ est somme des trois événements incompatibles suivants :

- ou bien $C \cup E_1 \cup E_2$ ne rencontre pas A'_ξ ;
- ou bien $C \cap A'_\xi = \emptyset$ et $E_1 \cap A'_\xi \neq \emptyset$ (et dans ce cas E_2 ne rencontre pas A'_ξ à cause de la convexité du grain primaire);
- ou bien $C \cap A'_\xi = \emptyset$ et $E_2 \cap A'_\xi \neq \emptyset$ (et dans ce cas E_1 ne rencontre pas A'_ξ à cause de la convexité). On a donc :

$$(9,1) \quad \chi_\xi(C) = \chi_\xi(C \cup E_1 \cup E_2) + P(E_1 \cap A'_\xi \neq \emptyset, C \cap A'_\xi = \emptyset) \\ + P(E_2 \cap A'_\xi \neq \emptyset, C \cap A'_\xi = \emptyset)$$

La notation χ_ξ est celle qui est définie en (8,2). Mais on a également :

$$\begin{cases} \chi_\xi(C) = \chi_\xi(E_1 \cup C) + P(E_1 \cap A_\xi \neq \emptyset, C \cap A_\xi = \emptyset) \\ \chi_\xi(C) = \chi_\xi(E_2 \cup C) + P(E_2 \cap A_\xi \neq \emptyset, C \cap A_\xi = \emptyset) \end{cases}$$

Retranchons de (9,1) la somme membre à membre de ces deux dernières relations. Il vient :

$$(9,2) \quad \chi_\xi(C \cup E_1 \cup E_2) + \chi_\xi(C) = \chi_\xi(E_1 \cup C) + \chi_\xi(E_2 \cup C)$$

Désignons par R_ξ la valeur commune des deux membres de (9,2), et effectuons l'opération $\exp\left[-\theta \int (2 - R_\xi) d\xi\right]$. Compte tenu de (8,3) on fait apparaître à gauche le produit $Q(C \cup E_1 \cup E_2)Q(C)$ et à droite le produit $Q(E_1 \cup C)Q(E_2 \cup C)$, la lettre Q désignant les moments du schéma obtenu après passage en booléen. On a donc l'égalité :

$$(9,3) \quad \frac{Q(C \cup E_1 \cup E_2)}{Q(C \cup E_1)} = \frac{Q(C \cup E_2)}{Q(C)}$$

Soient maintenant X et Y deux événements intéressant respectivement E_1 et E_2 . Comme E_1 et E_2 sont constitués d'un nombre fini de points, X est nécessairement soit de la forme : « les points $x_1, x_2 \dots x_k$ de E_1 (en nombre fini) sont dans A et les points $x'_1 \dots x'_k$, de E_1 (en nombre fini) sont dans A^c », soit somme logique d'un nombre fini d'événements de ce type, et Y se présente sous le même aspect.

Par conséquent, la probabilité pour que Y se réalise et que C soit dans les pores, qui est $P(Y, C \cap A = \emptyset)$ se déduit de $Q(C \cup E_2)$ par des opérations finies de différence et de somme qui ne portent que sur les points de E_2 . Ces mêmes opérations, appliquées à $Q(C \cup E_1 \cup E_2)$, conduisent à $P(Y, C \cap A = E_1 \cap A = \emptyset)$. Par suite, on tire de (9,3) :

$$\frac{P(Y, C \cap A = \emptyset)}{Q(C)} = \frac{P(Y, C \cap A = E_1 \cap A = \emptyset)}{Q(E_1 \cup C)}$$

ce qui s'écrit aussi :

$$(9,4) \quad \frac{P(Y, C \cap A = E_1 \cap A = \emptyset)}{P(Y, C \cap A = \emptyset)} = \frac{Q(E_1 \cup C)}{Q(C)}$$

Le raisonnement se réitère : une même suite d'opérations portant uniquement sur les points de E_1 fait passer :

$$\begin{array}{ccc} \text{de } Q(E_1 \cup C) & \text{à} & P(X, C \cap A = \emptyset) \\ \text{et de } P(Y, C \cap A = E_1 \cap A = \emptyset) & \text{à} & P(X, Y, C \cap A = \emptyset) \end{array}$$

Par conséquent, ces opérations, appliquées à (9,4) donnent :

$$(9,5) \quad \frac{P(X, Y, C \cap A = \emptyset)}{P(Y, C \cap A = \emptyset)} = \frac{P(X, C \cap A = \emptyset)}{Q(C)}$$

La relation (9,5) exprime que le schéma booléen A à grains primaires convexes possède la propriété semi-markovienne.

Nous allons déduire de la propriété semi-markovienne certaines conséquences pour les granulométries des traversées des pores et des grains.

Granulométries des traversées des pores. — Montrons qu'elle est exponentielle. Soit $Q(h)$ la probabilité pour que le segment de longueur h et de direction α soit contenu dans les pores, c'est-à-dire dans le complémentaire de A , A étant un ensemble aléatoire semi-markovien. Plaçons-nous sur une droite de direction α . Prenons, sur cette droite, deux segments jointifs de longueurs h_1 et h_2 séparés par un point x . Lorsque x est dans les pores, ce qui a lieu avec la probabilité q , les événements : « h_1 est dans les pores » et « h_2 est dans les pores » sont indépendants, d'après la propriété semi-markovienne. La relation (9,5) se réduit ici à :

$$\frac{Q(h_1 + h_2)}{Q(h_2)} = \frac{Q(h_1)}{q}$$

c'est-à-dire à :

$$Q(h_1 + h_2) = \frac{1}{q} Q(h_1) Q(h_2)$$

Il en résulte, comme on sait, que le moment $Q(h)$ est de la forme

$$(9,6) \quad Q(h) = qe^{-\mu h}$$

Par suite, la granulométrie en nombre est donnée par l'exponentielle $e^{-\mu h}$ (il suffit, pour le voir, de reprendre le raisonnement qui nous a fait passer de (8,8) à (8,9) au paragraphe précédent). Lorsque le schéma est booléen à grains convexes, on a vu plus haut la signification du paramètre μ : c'est le produit $\theta E(S_2)$ de la densité de germe par l'espérance de la mesure du contour apparent du grain primaire. Dans le cas d'un schéma semi-markovien quelconque, on a simplement :

$$\mu = -\frac{Q'(0)}{q}$$

On remarque que $-Q'(0) \delta h$ est la probabilité pour que le segment, très petit, δh contienne un point frontière de A . Si $P(h)$ désigne la probabilité pour que le segment h soit contenu dans A , $-P'(0) \delta h$ représente également la probabilité pour δh contienne un point frontière. On a donc :

$$P'(0) = Q'(0)$$

Soit enfin $C(h)$ la covariance, ou probabilité pour que les points x et $x + h$ soient dans A . La probabilité pour que x soit dans A et $x + \delta h$ dans A^c , qui est $C(0) - C(\delta h)$, est équivalente à $-C'(0) \delta h$. On a donc aussi

$$P'(0) = Q'(0) = C'(0)$$

et par suite

$$(9,7) \quad \mu = -\frac{1}{q} C'(0)$$

Ainsi, le paramètre μ dépend uniquement de la dérivée en $h = 0$ de la covariance $C(h)$. D'après le paragraphe 5, il est donc lié étroitement à la surface spécifique σ du milieu poreux A .

Granulométries des traversées des grains. — La granulométrie des traversées des grains n'est pas exponentielle, en général, mais nous allons montrer qu'elle ne dépend, comme celle des pores, que de la covariance $C(h)$, pourvu que le schéma soit semi-markovien. En effet, sur une droite de direction parallèle à α , l'événement : « $x \in A$ et $x + l \in A$ », de probabilité $C(l)$, est somme logique des événements incompatibles :

- l'intervalle $[x, x + l]$ est contenu dans A ,
- le point $x + l$ est dans A , l'intervalle $[x, x + h]$ est contenu dans A ($0 \leq h \leq l$), et il y a un point frontière entre $x + h$ et $x + h + \delta h$.

A cause du caractère semi-markovien, et puisque $x + h + \delta h$ est dans les pores, un événement de la deuxième catégorie possède la probabilité

$$- P'(h) \delta h \frac{p - C(l - h)}{q}$$

On en déduit l'équation intégrale suivante, reliant le moment fonctionnel $P(l)$ et la covariance $C(l)$:

$$(9,8) \quad C(l) = P(l) - \int_0^l P'(h) \frac{p - C(l - h)}{q} dh$$

Pour simplifier cette équation, dérivons en l , en remarquant que $C(0) = p$. Il vient :

$$(9,9) \quad C'(l) = P'(l) + \frac{1}{q} \int_0^l P'(h) C'(l - h) dh$$

Cette équation intégrale (que l'on peut résoudre à l'aide d'une transformation de Laplace) montre que $P'(l)$, c'est-à-dire, à un facteur près, selon (6,10), la granulométrie en nombre des traversées des grains (dans la direction α) ne dépend que de la dérivée $C'_\alpha(l)$ (prise dans cette direction) de la covariance $C(h)$.

La valeur moyenne m_1 de la traversée des grains (relativement à la granulométrie en nombre) se déduit de (6,10) : faisant $l = 0$, on obtient :

$$m_1 = -\frac{p}{P'(0)} = -\frac{p}{C'(0)}$$

De son côté, la traversée moyenne m_2 des pores (relativement à la granulométrie en nombre $e^{-\mu h}$) est $\frac{1}{\mu}$, c'est-à-dire, d'après (9,7) :

$$m_2 = -\frac{q}{C'(0)}$$

On voit que les traversées moyennes des grains et des pores sont, comme il était prévisible, dans le même rapport que p et q .

Dans les deux paragraphes qui suivent, nous allons établir quelques propriétés des schémas semi-markoviens isotropes (à loi spatiale invariante par rotation) dans les espaces à 2 et à 3 dimensions. Le cas d'un schéma semi-markovien à une seule dimension est particulièrement simple. C'est un cas particulier de la théorie des processus de renouvellement. La propriété semi-markovienne et l'équation intégrale (9,9) montrent que ce schéma à une dimension est entièrement défini par la donnée de la covariance $C(h)$ —ou, si l'on préfère, par celle du moment $P(h)$.

10. — Schéma semi-markovien isotrope (2 dimensions).

Soit A un ensemble aléatoire isotrope (à loi spatiale invariante par rotation) défini dans l'espace à 2 dimensions et possédant la propriété semi-markovienne. Nous nous proposons de calculer le moment fonctionnel $Q(S) = P(S \cap A = \emptyset)$ lorsque S est un ensemble convexe quelconque, et aussi la probabilité conditionnelle $\varphi(s) ds \delta h$ pour que l'élément d'aire $ds \delta h$, construit sur l'élément ds du contour C de S , rencontre A lorsque l'on sait que S est disjoint de A .

Comme l'arc ds sépare S et l'aire $ds \delta h$, la propriété semi-markovienne nous indique que cette probabilité conditionnelle $\varphi(s) ds \delta h$ ne peut dépendre que des caractéristiques de l'élément d'arc, c'est-à-dire de sa longueur ds et de son rayon de courbure $R = \frac{ds}{d\alpha}$ (α angle de la tangente orientée en s). Considérons d'abord les deux cas particuliers suivants :

1° $R = \infty$, $ds \delta h$ est un élément d'aire construit sur l'élément rectiligne ds d'une droite D . La probabilité conditionnelle pour que les grains A présentent, relativement à la direction de D , un point limite tombant dans $ds \delta h$, lorsque ds est dans les pores, est de la forme $\theta ds \delta h$, θ étant une constante indépendante de la direction de D , puisque le schéma est isotrope et stationnaire. Dans le cas particulier où A est un schéma booléen à grains convexes, θ coïncide avec la densité de germe (on peut, en effet, sans modifier le schéma final A obtenu par passage en booléen, imposer au grain convexe primaire A' une translation aléatoire amenant l'un de ses points limites relatifs à la direction de D en coïncidence avec l'origine des coordonnées, qui est le germe de A'). Dans le cas général, la constante θ se relie au nombre spécifique ν' introduit au paragraphe 5, par la relation :

$$\theta = \frac{\nu'}{q}$$

2° Prenons maintenant un cercle de rayon δh très petit. Lorsque le centre est dans les pores, la probabilité conditionnelle pour que ce petit cercle rencontre A est de la forme $\beta \delta h$, β étant une constante. Plus

précisément, et en raison de l'isotropie, la probabilité pour que le point des grains A le plus proche du centre tombe dans un petit secteur $d\alpha$ de ce petit cercle est $\frac{\beta}{2\pi} \delta h d\alpha$. Ce paramètre β est lié au *périmètre spécifique* 2λ défini au paragraphe 5 par la relation :

$$\beta = \frac{2\lambda}{q}$$

Plaçons-nous maintenant dans le cas général. L'ensemble convexe S est limite de polygones convexes, et l'élément d'arc ds peut être remplacé par deux éléments rectilignes de longueur totale ds faisant entre eux l'angle $d\alpha = \frac{ds}{R}$, R désignant le rayon de courbure en ds . Lorsque ds est dans les pores, la probabilité pour que le point de A le plus proche de ds (du côté de l'extérieur) tombe dans l'un ou l'autre des deux petits rectangles de longueur δh construits sur les deux éléments rectilignes est $\theta ds \delta h$. La probabilité pour que le point le plus proche tombe dans le petit secteur circulaire d'angle $d\alpha$ et de rayon δh construit sur le sommet anguleux de ds est $\frac{\beta}{2\pi} d\alpha \delta h$. Ainsi, on a :

$$(10,1) \quad \varphi(s) ds \delta h = \theta ds \delta h + \frac{\beta}{2\pi} d\alpha \delta h$$

c'est-à-dire

$$\varphi(s) = \theta + \frac{\beta}{2\pi R}$$

Prenons pour δh une fonction quelconque $\delta h(s)$ de l'arc s , et désignons par S' l'aire déduite de S par la dilatation $\delta h(s)$. La propriété semi-markovienne entraîne :

$$Q(S') = Q(S) \left[1 - \int_C \varphi(s) \delta h(s) ds \right]$$

l'intégrale étant étendue au contour C de S. Ainsi la variation de $Q(S)$, est :

$$\delta Q(S) = Q(S') - Q(S) = - Q(S) \int_C \varphi(s) \delta h(s) ds$$

Évaluons cette intégrale en tenant compte de (10,1). On a :

$$\int_C \varphi(s) \delta h(s) ds = \theta \delta S + \frac{\beta}{2\pi} \int_C \delta h(s) d\alpha$$

δS est la variation $S' - S$ de l'aire de S. D'autre part, si $2\mathcal{L}$ désigne le périmètre de S, la variation $\delta 2\mathcal{L}$ de ce périmètre est justement égale à $\int_C \delta h(s) d\alpha$. Par conséquent, on a :

$$- \delta Q = \left[\theta \delta S + \frac{\beta}{2\pi} \delta(2\mathcal{L}) \right] Q(S)$$

Ceci s'intègre immédiatement sous la forme

$$Q(S) = Ce^{-\theta S - \frac{\beta \mathcal{L}}{\pi}}$$

D'ailleurs $C = q$, comme on le voit en prenant une famille d'homothétiques de S de plus en plus petits. Finalement nous avons

$$(10,2) \quad Q(S) = qe^{-\theta S - \frac{\beta \mathcal{L}}{\pi}}$$

Signification des paramètres θ et β . — On notera le caractère très géométrique de ce résultat. Lorsque S est un ensemble convexe quelconque, le moment fonctionnel $Q(S)$ ne dépend que de l'aire et du périmètre de S . Les deux paramètres θ et β sont liés, d'autre part, à la porosité q , au nombre spécifique ν' et au périmètre spécifique 2λ du milieu semi-markovien à 2 dimensions. On a, en effet :

$$(10,3) \quad \theta = \frac{\nu'}{q} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{2\lambda}{q}$$

Dans le cas d'un schéma booléen à grains convexes, cette interprétation de θ et de β peut encore se préciser comme suit. Tout d'abord, comme on l'a déjà vu, θ est la densité des germes des grains primaires. Pour interpréter β , remarquons que si on prend pour S un segment de droite de longueur l , ($S = 0$, et $2\mathcal{L} = 2l$), une comparaison de (10,2) avec (9,6) donne $\frac{\beta}{\pi} = -\frac{1}{q} C'(0)$, relation qui résulte aussi de (10,3) et de $2\lambda = -\pi C'(0)$. Mais, le schéma étant booléen à grains convexes, on a également, selon (8,8) :

$$\frac{\beta}{\pi} = -\theta K'(0) = \theta E(D_0)$$

Ainsi, le paramètre $\frac{\beta}{\pi}$ est égal au produit de la densité de germes θ par l'espérance du diamètre apparent D_0 des grains convexes primaires.

Remarquons encore ceci : la relation géométrique (7,6) reliant le diamètre apparent moyen et le périmètre d'un ensemble convexe nous donne $E(D_0) = E\left(\frac{2\mathcal{L}_A}{\pi}\right)$, $2\mathcal{L}_A$ désignant le périmètre du grain convexe primaire. Compte tenu de (10,3), on trouve immédiatement :

$$2\lambda = q\theta E(\mathcal{L}_A) = \nu' E(\mathcal{L}_A)$$

Le périmètre spécifique du schéma booléen est le produit du périmètre moyen $E(\mathcal{L}_A)$ des grains primaires par le nombre spécifique ν' du schéma.

L'expression $\theta E(\mathcal{L}_A)$ représenterait le périmètre spécifique si les grains convexes primaires étaient disjoints les uns des autres. L'intervention de la porosité q provient de ce qu'un point appartenant au périmètre d'un grain

primaire donné a la probabilité q de n'être recouvert par aucun autre grain primaire, et donc d'appartenir au périmètre de la réunion A de tous les grains primaires.

Compte tenu de ces résultats, nous pouvons remplacer (10,2) par l'équation :

$$(10,4) \quad Q(S) = qe^{-\theta[S + \mathcal{L}_{E(D_0)}]}$$

Démonstration de (7,17). — De cette relation (10,4) nous allons maintenant déduire la formule (7,17) énoncée sans démonstration au paragraphe 7. En effet, tout d'abord, la porosité q , d'après (8,6) est :

$$q = e^{-\theta K^{(0)}} = e^{-\theta E[\text{Mes } A']}$$

Désignons par $S_{A'}$, et $2\mathcal{L}_{A'}$, l'aire et le périmètre (aléatoires) du grain convexe primaire A' . Selon (7,6), le périmètre $2\mathcal{L}_{A'}$, et le diamètre apparent moyen $E(D_0)$ vérifient

$$E(D_0) = \frac{E(2\mathcal{L}_{A'})}{\pi}$$

Soit B un ensemble convexe d'aire S_B et de périmètre $2\mathcal{L}_B$. Compte tenu de ce qui précède, (10,4) s'écrit :

$$Q(B) = \exp \left[-\theta \left(S_B + 2\mathcal{L}_B \frac{E(2\mathcal{L}_{A'})}{2\pi} + E(S_{A'}) \right) \right]$$

Identifions cette expression à la formule générale (8,4). On peut d'ailleurs remplacer \check{B} par B lui-même, puisque le schéma est invariant par rotation. Il vient :

$$E[\text{Mes}(A' \oplus B)] = S_B + \frac{2\mathcal{L}_B E(2\mathcal{L}_{A'})}{2\pi} + E(S_{A'})$$

Ce n'est pas autre chose que la formule (7,17) qui se trouve ainsi démontrée.

Lorsque B est le cercle B_r de rayon r , on déduit directement de la relation (7,10), relation purement géométrique, exprimant une propriété classique des courbes parallèles, et de la formule générale (8,4) :

$$(10,5) \quad Q(B_r) = e^{-\theta[E(S_{A'}) + rE(2\mathcal{L}_{A'}) + \pi r^2]}$$

Cette relation s'applique à tous les schémas booléens à grains convexes, isotropes ou non, puisqu'elle se déduit de (7,10) et de (8,4).

Loi du premier point de contact. — Soit x un point situé dans les pores. Désignons par R la distance du point des grains le plus proche de x , c'est-à-dire, si l'on veut, la distance du premier point de rencontre avec les grains A d'une famille de cercles de rayons croissants centrés en x . Si A est booléen à grains convexes (*isotrope ou anisotrope*), la probabilité conditionnelle $F(r)$ pour que R soit inférieur à r lorsque x est dans

les pores, ou fonction de répartition de la variable aléatoire R peut être appelée loi du premier point de contact. D'après (10,5), on a :

$$(10,6) \quad 1 - F(r) = P(R \geq r) = e^{-\theta[\pi r^2 + rE(2\mathcal{L}_A)]}$$

Ainsi la loi du premier point de contact est l'exponentielle d'une expression du second degré en r . Elle ne dépend que de deux paramètres seulement : la densité de germe θ et l'espérance $E(2\mathcal{L}_A)$ du périmètre du grain convexe primaire. On peut remplacer ce dernier périmètre par l'espérance $E(D_0)$ du diamètre apparent moyen D_0 du grain primaire, puisque l'on a toujours :

$$E[2\mathcal{L}_A] = \pi E(D_0)$$

Dans un schéma semi-markovien isotrope (non booléen) de *périmètre spécifique* 2λ , de *nombre spécifique* ν' et de *porosité* q , cette loi du premier point de contact, d'après (10,2) et (10,3), s'écrit :

$$(10,6 \text{ bis}) \quad 1 - F(r) = e^{-\frac{1}{q}[\nu'\pi r^2 + 2\lambda r]}$$

Cette expression de la loi du premier point de contact s'applique, en fait, à un schéma semi-markovien quelconque (non isotrope). En effet, une rotation aléatoire appliquée à ce schéma ne modifie ni $F(r)$, ni les paramètres scalaires 2λ , ν' et q et nous restitue un schéma isotrope auquel (10,6 bis) est applicable.

11. — Schéma semi-markovien isotrope (3 dimensions).

Soit maintenant A un schéma semi-markovien isotrope de l'espace à 3 dimensions. Soit B un ensemble convexe, V son volume, S sa surface, et α l'intégrale de la courbure moyenne de B étendue à la surface limite S . Nous nous proposons de calculer la probabilité $Q(B)$ pour que B soit contenu dans les pores, et aussi la probabilité conditionnelle $\varphi(x) dS \delta h$ pour que, B étant dans les pores, l'élément de volume $dS \delta h$ construit en un point x de la surface S de B rencontre les grains. Comme l'élément d'aire dS sépare B et le petit volume $dS \delta h$, et que le schéma vérifie la propriété semi-markovienne, cette probabilité conditionnelle ne peut dépendre que des propriétés de l'élément d'aire, c'est-à-dire de dS lui-même et des deux rayons de courbure R_1 et R_2 au point considéré. Considérons d'abord les 3 cas particuliers suivants :

1° dS est un élément d'aire plane appartenant à un plan P . La probabilité conditionnelle pour que, dS étant dans les pores, les grains A présentent, relativement à P , un point limite tombant dans $dS \delta h$ est de la forme $\theta dS \delta h$, θ étant une constante indépendante de la direction de P , puisque le schéma est isotrope et stationnaire. Dans le cas particulier où le schéma est booléen à grains convexes, on voit, comme au paragraphe précédent, que θ n'est autre que la densité de germes. Dans le cas

général, il se relie au nombre spécifique ν introduit au paragraphe 5 par la formule :

$$\theta = \frac{1}{q} \nu$$

2° Soit maintenant un petit cylindre de révolution, de rayon δR et de hauteur dx . Lorsque l'axe, de hauteur dx , est contenu dans les pores, la probabilité conditionnelle pour que les grains présentent, relativement à cet axe, un point limite qui tombe dans ce petit cylindre, est de la forme $\gamma dx \delta R$, la constante γ étant indépendante de la direction de l'axe, à cause de l'isotropie. Cette constante se rattache à la *longueur spécifique* τ , du milieu par la relation :

$$\gamma = \frac{1}{q} \tau$$

Plus précisément, le petit axe dx étant dans les pores, la probabilité pour que le point limite de A (point de A le plus proche de cet axe) tombe, à l'intérieur du cylindre, dans un petit secteur cylindrique donné d'angle $d\alpha$ est :

$$\frac{\gamma}{2\pi} dx \delta R d\alpha$$

3° Soit enfin une sphère de centre x et de rayon δR très petit. La probabilité conditionnelle pour que, x étant dans les pores, cette sphère rencontre les grains, est de la forme $\mu \delta R$, avec une nouvelle constante μ . Plus précisément, x étant dans les pores, la probabilité pour que le point de A le plus proche de x tombe, à l'intérieur de la sphère, dans un petit angle solide $d\omega$ donné est

$$\frac{\mu}{4\pi} \delta R d\omega$$

Cette constante μ est liée à la *surface spécifique* σ du milieu par la formule :

$$\mu = \frac{1}{q} \sigma$$

Revenons maintenant au cas général. Le volume convexe V est limité de polyèdres convexes. Soit $dS = ds_1 ds_2$ un élément d'aire, en un point x de sa surface limite S , construit sur les éléments d'arc ds_1 et ds_2 pris le long des deux lignes de courbure passant en x , et R_1 et R_2 les deux rayons de courbure correspondants. Soient aussi $d\alpha_1 = \frac{ds_1}{R_1}$ et $d\alpha_2 = \frac{ds_2}{R_2}$ la rotation de la normale lorsque l'on décrit ds_1 et ds_2 respectivement. On peut remplacer ds_1 par deux petits segments de droites xD_1 et xD'_1 de longueur totale ds_1 , faisant entre eux l'angle $d\alpha_1$. De même, on remplace ds_2 par deux segments xD_2 et xD'_2 de longueur totale ds_2 et faisant entre eux l'angle $d\alpha_2$. Le plan $xD_1D'_1$ est orthogonal au plan $xD_2D'_2$. Ainsi dS est remplacé par les quatre petits parallélogrammes

construits sur $(xD_1, xD_2)(xD_1, xD'_2)$, (xD'_1, xD_2) et (xD'_1, xD'_2) . L'élément de volume $dS \delta h$ comporte trois sortes de composantes :

1° Les quatre petits prismes de hauteur δh construits sur ces quatre parallélogrammes d'aire totale dS . La probabilité conditionnelle pour que, dS étant dans les pores, le point limite de A relativement à dS tombe dans l'un de ces prismes est $\theta dS \delta h$.

2° Les quatre secteurs cylindriques de rayon δh , d'axes xD_1, xD'_1, xD_2, xD'_2 et d'angle $d\alpha_2$ pour les deux premiers et dd_1 pour les deux derniers. La probabilité pour que le point limite tombe dans l'un de ces quatre secteurs est :

$$\frac{\gamma}{2\pi} \delta h (ds_1 d\alpha_2 + ds_2 d\alpha_1) = \frac{\gamma}{2\pi} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) ds_1 ds_2$$

3° Enfin le secteur sphérique centré en x , de rayon δh et d'angle solide $d\omega = \frac{dS}{R_1 R_2}$, d'après le théorème classique de Gauss reliant l'angle solide balayé par la normale et la courbure totale $\frac{1}{R_1 R_2}$. La probabilité pour que le point limite tombe dans ce secteur est $\frac{\mu}{4\pi} \delta h d\omega$.

Au total, la probabilité conditionnelle pour que, dS étant dans les pores, le volume $dS \delta h$ rencontre A est :

$$(11,1) \quad \varphi(x) dS \delta h = \left[\theta + \frac{\gamma}{2\pi} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + \frac{\mu}{4\pi R_1 R_2} \right] dS \delta h$$

On remarque que $\varphi(x)$ ne dépend que de la courbure totale et de la courbure moyenne au point x . Prenons maintenant pour δh une fonction $\delta h(x)$ définie sur la surface S, et désignons par V' le dilaté par $\delta h(x)$ du volume convexe V. La propriété semi-markovienne donne

$$Q(V') = Q(V) \left[1 - \int_S \varphi(x) \delta h(x) dS \right]$$

Ainsi la variation de $Q(V)$ est :

$$(11,2) \quad \delta Q(V) = - Q(V) \int_S \varphi(x) \delta h(x) dS$$

Remplaçons, dans (11,2) la densité $\varphi(x)$ par son expression (11,1). On voit apparaître 3 intégrales qui possèdent des significations géométriques simples :

La première intégrale représente simplement la variation du volume :

$$\int_S \delta h(x) dS = \delta V$$

Considérons la deuxième intégrale. Elle exprime la variation δS de l'aire de la surface limite de V. En effet, on a :

$$\delta dS = \delta (ds_1 ds_2) = ds_1 \delta ds_2 + ds_2 \delta ds_1$$

Mais $\delta ds_1 = \delta h d\alpha_1 = \delta h \frac{ds_1}{R_1}$ et de même $\delta ds_2 = \delta h \frac{ds_2}{R_2}$.

Ainsi :

$$\delta dS = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \delta h dS$$

et, en intégrant, on obtient bien :

$$\delta S = \int_S \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \delta h(x) dS$$

Enfin la troisième intégrale représente la variation $\delta\alpha$ de l'intégrale α de la courbure moyenne. En effet, cherchons la variation de :

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) dS = ds_1 d\alpha_2 + ds_2 d\alpha_1$$

Les angles $d\alpha_1$ et $d\alpha_2$ ne varient pas, tandis que les arcs ds_1 et ds_2 admettent les variations $\delta h d\alpha_1$ et $\delta h d\alpha_2$. Ainsi :

$$\delta \left[\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) dS \right] = 2 \delta h d\alpha_1 d\alpha_2 = 2 \delta h \frac{dS}{R_1 R_2}$$

En intégrant, on obtient bien :

$$\int_S \delta h(x) \frac{dS}{R_1 R_2} = \delta\alpha$$

Compte tenu des expressions obtenues pour ces trois intégrales, la variation (11,2) de $Q(V)$ peut s'écrire :

$$\delta Q(V) = - \left[\theta \delta V + \frac{\gamma}{2\pi} \delta S + \frac{\mu}{4\pi} \delta\alpha \right]$$

Ceci s'intègre immédiatement sous la forme :

$$Q(V) = C e^{-\nu - \frac{\gamma}{2\pi} S - \frac{\mu}{4\pi} \alpha}$$

D'ailleurs $C = Q(0) = q$, comme on le voit en faisant tendre homothétiquement le volume V vers 0. Finalement nous obtenons :

$$(11,3) \quad Q(V) = q e^{-[\theta V + \frac{\gamma}{2\pi} S + \frac{\mu}{4\pi} \alpha]}$$

On notera le caractère très géométrique de ce résultat. Pour un ensemble convexe V quelconque, *le moment fonctionnel $Q(V)$ ne dépend que du volume, de la surface et de l'intégrale de la courbure moyenne de V . Les trois paramètres θ , γ et μ ne dépendent que de la porosité q de la surface spécifique σ , de la longueur spécifique τ , et du nombre spécifique ν du milieu, selon les relations déjà écrites :*

$$\sigma = q\mu, \quad \tau = q\gamma \quad \text{et} \quad \nu = q\theta$$

Dans le cas booléen, cette interprétation des paramètres peut encore se préciser.

Signification des paramètres θ , γ et μ . dans le cas d'un schéma booléen à grains convexes. Nous connaissons déjà, dans ce cas, la signification de θ , qui est la densité de germes. Pour dégager celle de γ et de μ , considérons le cas particulier où le volume V est la sphère B_r de rayon r . On tire alors de (11,3) :

$$(11,4) \quad Q(B_r) = q \exp \left[-\frac{4}{3} \pi r^3 \theta - 2r^2 \gamma - \mu r \right]$$

Si l'on désigne par $V_{A'}$, $S_{A'}$ et $\alpha_{A'}$ le volume, la surface et l'intégrale de la courbure moyenne du grain convexe primaire A' , la relation purement géométrique (7,11) et la formule générale (8,4) nous donnent aussi :

$$Q(B_r) = \exp \left[-\theta \left(\frac{4}{3} \pi r^3 + r^2 E(\alpha_{A'}) + r E(S_{A'}) + E(V_{A'}) \right) \right]$$

D'ailleurs, on a toujours $q = \exp [-\theta E(V_{A'})]$. Il suffit donc d'identifier (11,4) et (11,5) pour obtenir :

$$(11,6) \quad \begin{cases} \gamma = \frac{\theta}{2} E(\alpha_{A'}) \\ \mu = \theta E(S_{A'}) \end{cases}$$

Il est peut être plus parlant d'introduire le diamètre apparent moyen $E(D_0)$ du grain primaire et son contour apparent moyen $E(S_0)$, dont les valeurs résultant immédiatement de (7,7) et (7,8) :

$$\begin{cases} E(S_0) = \frac{1}{4} E(S_{A'}) \\ E(D_0) = \frac{1}{2\pi} (\alpha_{A'}) \end{cases}$$

Ainsi, les deux paramètres γ et μ peuvent s'écrire :

$$(11,7) \quad \begin{cases} \gamma = \theta \pi E(D_0) \\ \mu = 4\theta E(S_0) \end{cases}$$

Ils se relient très simplement à la densité de germe θ , au diamètre apparent moyen $E(D_0)$ et au contour apparent moyen $E(S_0)$ des grains primaires. La formule (11,3) peut s'écrire :

$$(11,8) \quad Q(V) = q e^{-\theta \left[V + \frac{1}{2} S E(D_0) + \frac{1}{\pi} \alpha E(S_0) \right]}$$

Observons encore ceci : si l'on tient compte des relations existant entre les grandeurs spécifiques σ , τ et ν , et les paramètres μ , γ et θ , les relations (11,6) nous donnent encore :

$$(11,9) \quad \begin{cases} \nu = q\theta \\ \tau = \frac{1}{2} q\theta E(\alpha_{A'}) = \frac{1}{2} \nu E(\alpha_{A'}) \\ \sigma = q\theta E(S_{A'}) = \nu E(S_{A'}) \end{cases}$$

Ainsi, la surface spécifique est égale au produit de l'espérance de la surface $S_{A'}$ d'un grain primaire par le nombre spécifique $\nu = \theta q$, et la longueur spécifique τ est égale à la moitié du produit par ce même nombre spécifique de l'espérance du paramètre $\alpha_{A'}$, qui est l'intégrale de la courbure moyenne $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$ prise sur la surface du grain primaire (si A' est une sphère de rayon R , $\frac{1}{2} \alpha_{A'} = 2\pi R$ est le périmètre du contour apparent).

Le nombre spécifique ν lui-même peut se relier à la courbure totale. En effet, d'après le théorème de Gauss, l'intégrale :

$$\iint_{S_{A'}} \frac{ds}{R_1 R_2} = 4\pi$$

de la courbure totale sur la surface $S_{A'}$ du grain primaire vaut 4π , et on peut écrire :

$$\nu = q\theta E \left[\frac{1}{4\pi} \iint_{S_{A'}} \frac{dS}{R_1 R_2} \right]$$

Ainsi le nombre spécifique apparaît comme le produit de la surface spécifique σ par la valeur moyenne de la courbure totale. De même le double de la longueur spécifique, 2τ , apparaît comme le produit de σ par l'espérance de la courbure moyenne $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$. Nous ignorons dans quelle mesure cette interprétation géométrique peut s'étendre à des schémas plus généraux.

REMARQUE. — En identifiant (11,8) à la formule générale (8,4), on retrouve la formule (7,18) qui se trouve ainsi démontrée. Il est inutile d'expliciter ce raisonnement, qui est identique à celui que nous avons fait dans le paragraphe précédent pour établir (7,17).

Loi du premier point de contact. — Les formules générales (11,3) ou (11,8) ne s'appliquent qu'aux schémas isotropes. Mais, dans le cas particulier où le volume V est la sphère B_r de rayon r , (11,8) s'applique à tout schéma booléen à grains convexes, *isotrope ou non*. En effet, dans le cas de la sphère B_r , (11,5) se déduit directement de la relation purement géométrique (7,11) et de la formule générale (8,4), et aucune hypothèse d'isotropie n'est utilisée. On peut d'ailleurs aussi remarquer que, B_r étant une sphère, on ne modifie pas $Q(B_r)$ si l'on imprime à chacun des grains primaires A' une rotation aléatoire : une telle rotation ne modifie ni $E(D_0)$, ni $E(S_0)$ et conduit à un schéma isotrope auquel (11,8) est applicable.

Le point x étant dans les pores, désignons par R la distance de ce point avec le point des grains A le plus proche de x , qui est aussi le premier point de rencontre avec A d'une famille de sphères centrées en x et de rayons croissants. Soit $F(r)$ la probabilité (conditionnelle) d'avoir $R < r$ lorsque x est dans les pores. La fonction de répartition $F(r)$ est

la loi du premier point de contact. Lorsque A est un schéma booléen à grains convexes (isotrope ou non), il résulte de ce qui précède que l'on a :

$$(11,10) \quad 1 - F(r) = e^{-\theta \left[\frac{4}{3} \pi r^3 + 2\pi r^2 E(D_0) + 4r E(S_0) \right]}$$

De même, dans un schéma semi-markovien isotrope (non booléen) la loi du premier point de contact se déduit de la formule générale (11,3), que nous écrirons en utilisant les grandeurs spécifiques ν , τ et σ :

$$(11,11) \quad 1 - F(r) = e^{-\frac{1}{q} \left[\frac{4}{3} \pi r^3 \nu + 2\tau r^2 + \sigma r \right]}$$

Cette relation s'étend d'ailleurs à un schéma semi-markovien quelconque (non isotrope) : on le voit en utilisant une rotation aléatoire, qui laisse invariante $F(r)$, q , ν , τ et σ , et remplace le schéma donné par un schéma isotrope auquel on peut appliquer (11,11).

On pourra comparer (11,11) avec le résultat analogue (10,6) obtenu dans l'espace à 2 dimensions. La loi du premier point de contact apparaît ici comme l'exponentielle d'un polynôme du troisième degré en r . Elle ne dépend que de la porosité et des trois grandeurs spécifiques ν , τ et σ . Pour des raisons de similitude hydrodynamique, on peut penser que la perméabilité d'un milieu poreux isotrope est en corrélation avec l'expression $qE(R^2)$, produit de la porosité par l'espérance du carré du rayon vecteur R du premier point de contact. Dans le cas d'un milieu semi-markovien isotrope — c'est-à-dire dans le cas le plus simple que l'on puisse imaginer — cette expression ne dépend pas seulement de la porosité q et de la surface spécifique σ . Elle dépend aussi, d'après (11,11) du nombre ν et de la longueur τ spécifiques. Il serait hautement souhaitable que ces nouveaux paramètres fassent l'objet d'études expérimentales approfondies. La longueur spécifique τ peut être obtenue assez facilement à l'aide de mesures effectuées sur lames minces (sections planes), comme nous allons le montrer maintenant, en examinant les rapports entre un schéma semi-markovien (isotrope) et les schémas (évidemment semi-markoviens) qu'il induit sur des plans et des droites.

Schémas induits sur des plans et des droites. Pour passer du schéma semi-markovien isotrope de l'espace à 3 dimensions aux schémas qu'il induit sur des plans et des droites, nous utiliserons la formule générale (11,3) écrite en remplaçant θ , γ et μ par les grandeurs spécifiques ν , τ et σ , soit :

$$(11,12) \quad Q(V) = qe^{-\frac{1}{q} \left[\nu V + \frac{\tau S}{2\pi} + \frac{\sigma \mathcal{L}}{4\pi} \right]}$$

En particulier, prenons comme ensemble convexe V une surface plane convexe, d'aire S' et de périmètre $2\mathcal{L}$. Pour cet ensemble, on a $V = 0$ et :

$$S = 2S'$$

(car chacune des deux faces de S' intervient dans la définition de S).

Pour α , la formule générale

$$\alpha = \frac{1}{2} \iint_S \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) dS = \frac{1}{2} \iint (ds_2 d\alpha_1 + ds_1 d\alpha_2)$$

se simplifie ici. En effet, à l'intérieur de S' la courbure moyenne est nulle. L'intégration s'effectue, en réalité, sur le contour C de S' . L'un des rayons de courbure (R_1 par exemple) y est nul, l'autre infini. Le terme $ds_1 d\alpha_2$ donne 0, tandis que l'autre conduit à l'intégrale simple :

$$\frac{1}{2} \pi \int ds = \pi \ell$$

puisque la rotation de la normale est égale à π lorsque l'on passe d'une face de S' à la face opposée. Ainsi, on a simplement :

$$\alpha = \pi \ell$$

et (11,12) peut s'écrire ici :

$$(11,13) \quad Q(S') = qe^{-\frac{1}{q} \left[\frac{\tau}{\pi} S' + \frac{\sigma}{4} \ell \right]}$$

La porosité q et le moment $Q(S')$ ont évidemment la même valeur dans le schéma originel et dans le schéma qu'il induit sur le plan P contenant l'aire convexe S' . Soient ν' et 2λ le nombre et le périmètre spécifiques de ce schéma induit. La relation générale (10,2) écrite avec les grandeurs spécifiques ν' et 2λ , montre que l'on a aussi :

$$(11,14) \quad Q(S') = qe^{-\frac{1}{q} \left[\nu' S' + \frac{2\lambda}{\pi} \ell \right]}$$

Identifiant (11,13) et (11,14), nous obtenons :

$$(11,15) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2\lambda = \frac{\pi}{4} \sigma \\ \nu' = \frac{\tau}{\pi} \end{array} \right.$$

Ce sont les relations (5,14) et (5,17) déjà rencontrées au paragraphe 5. Utilisées en sens inverse, elles montrent que l'on peut retrouver la surface spécifique et la longueur spécifique du schéma originel à partir, respectivement, du périmètre spécifique et du nombre spécifique du schéma induit dans un plan. Par contre on ne peut pas retrouver le nombre spécifique ν du schéma originel. Il s'est perdu irrémédiablement pendant le passage au schéma induit : le coefficient du volume V dans la relation (11,12) ne peut pas être déterminé par les mesures faites dans un espace à 2 dimensions, c'est-à-dire à $V = 0$.

Examinons maintenant le schéma induit *sur une droite*. Si, dans (11,13), nous prenons comme surface S' convexe un segment de droite de longueur l , on a $S' = 0$ et $2\ell = 2l$ (le périmètre s'obtient en décrivant 2 fois, aller et retour, le segment de longueur l). on obtient donc le moment fonc-

tionnel $Q(l)$ sous la forme exponentielle :

$$(11,6) \quad Q(l) = qe^{-\frac{\sigma}{4q}l}$$

Par ailleurs, si l'on désigne par ν'' le nombre spécifique du schéma induit sur une droite, soit $\nu'' = -C'(0) = -Q'(0)$, on a déjà obtenu directement l'expression (9,6) de $Q(l)$, qui est :

$$Q(l) = qe^{-\frac{\nu''}{q}l}$$

Il suffit d'identifier à (11,6) et de tenir compte aussi de (11,15) pour obtenir :

$$(11,17) \quad \begin{cases} \sigma = 4\nu'' \\ 2\lambda = \pi\nu'' \end{cases}$$

Ces relations, déjà rencontrées dans le paragraphe 5, montrent que l'on peut reconstituer le périmètre spécifique ou la surface spécifique du milieu originel à 2 ou 3 dimensions, à partir du seul nombre spécifique ν'' du milieu induit sur une droite. Par contre, le nombre spécifique ν' du milieu à 2 dimensions, coefficient de l'aire S' dans les formules (11,13) ou (11,14), a été irrémédiablement perdu en route : on ne peut pas reconstituer ν' , ni à fortiori le nombre ν et la longueur τ spécifiques du milieu à 3 dimensions à partir d'observations faites sur une droite.

Dans le chapitre suivant, nous allons reprendre, d'un point de vue légèrement différent, l'étude des rapports existants entre un milieu originel à n dimensions et les milieux induits sur des sous-espaces à $n - k$ dimensions.

CHAPITRE IV

GRANULOMÉTRIE ORIGINELLE ET GRANULOMÉTRIES INDUITES

SOMMAIRE

Paragraphe 12. — *Problème consistant à reconstituer une granulométrie dans l'espace à n dimensions à partir de la granulométrie induite dans un sous-espace à $n - k$ dimensions (plan ou droite). Il est indéterminé en général. Si on se limite au cas de grains convexes sans orientation préférentielle (isotropie) des résultats partiels peuvent être obtenus. Densités des grains originels et des grains induits. De l'invariance de la covariance, on déduit que les moments d'ordre 1 et 2 de la granulométrie originelle (en nombre) peuvent se déduire de la granulométrie (en nombre) des traversées si l'on connaît par ailleurs le contour apparent moyen des grains originels. En ce qui concerne les granulométries en mesure (exprimées en volume pour des volumes, en surface pour des surfaces, etc..) le moment d'ordre 1 de la granulométrie originelle se déduit de la seule granulométrie des traversées. Comparaison avec les résultats analogues obtenus pour les grandeurs spécifiques (surface, longueur et nombre).*

Paragraphe 13. — *Dans le cas de grains sphériques, la reconstitution est toujours possible. Le passage de F_n à F_{n-k} , et inversement, s'effectue au moyen de montées et descentes. Pour $k = 2$, la granulométrie des sphères se déduit directement de l'histogramme de leurs traversées. Résultats analogues pour $k = 1$ (sphères et cercles ou cercles et droites), mais un peu moins simples. Formules de passage pour les moments des granulométries en nombre, puis en mesure. Les moments en mesure de même ordre se déduisent directement l'un de l'autre.*

12. — Granulométrie induites par des grains convexes.

Considérons un milieu poreux, constitué de grains individualisables (que nous appellerons grains primaires originels) disposés, dans l'espace à trois dimensions, d'une manière suffisamment uniforme pour que le milieu apparaisse comme statistiquement homogène, mais à cela près quelconque. Il ne s'agit donc pas d'un schéma booléen. En particulier les différents grains primaires peuvent être supposés disjoints. Sur un plan P , ou sur une droite D , ce milieu poreux induit un nouveau milieu poreux, à 2 ou à une seule dimension, pour lequel les nouveaux grains primaires (grains primaires induits) sont définis simplement comme les intersections par P

ou D des grains primaires du milieu originel. Il est très clair que toutes les propriétés de ces milieux induits peuvent se déduire des caractéristiques du milieu originel. Mais c'est le problème inverse qui présente le plus d'intérêt : connaissant des granulométries induites sur un plan P ou une droite D , est-il possible de reconstituer les granulométries du milieu originel. Autrement dit, dans quelle mesure des observations effectuées sur une lame mince suffisent-elles pour décrire convenablement un milieu à 3 dimensions? Indiquons tout de suite que ce problème, de grande importance pratique, est largement indéterminé dans le cas général. Il est facile de former des exemples de milieux, de caractéristiques bien différentes dans l'espace à 3 dimensions, induisant cependant les mêmes granulométries sur des plans ou sur des droites.

Pour réduire un peu cette marge d'indétermination, nous nous limiterons au cas où les grains primaires du milieu originel sont *convexes* et dépourvus d'orientation préférentielle (milieu *isotrope*). Les grains primaires induits sont évidemment eux aussi, convexes et dépourvus d'orientation préférentielle. D'autre part, nous nous intéresserons seulement aux propriétés granulométriques des grains primaires convexes eux-mêmes, et non à celles des pores. La manière dont sont implantés ces grains ne présente donc pas d'importance par elle-même, pourvu seulement qu'elle soit suffisamment uniforme. En particulier, nous pouvons supposer que cette implantation est poissonnienne et que l'on a affaire à un schéma booléen à grains convexes. Les résultats que cette hypothèse simplificatrice nous permettra d'établir en ce qui concerne les propriétés granulométriques des grains primaires auront une valeur plus générale, et s'appliqueront indépendamment du mode d'implantation.

Il est très clair qu'un schéma booléen à grains convexes primaires et loi isotrope défini dans l'espace à n dimensions induit dans tout sous-espace à $n - k$ dimensions un schéma également booléen à grains convexes et à loi isotrope. La loi spatiale du schéma booléen induit se déduit immédiatement de celle du schéma originel. Si B , en effet, est un ensemble contenu dans le sous-espace à $n - k$ dimensions, la probabilité $Q(B)$ pour que B soit contenu dans les pores est la même dans les deux schémas. En particulier la porosité q et la covariance $C(h)$ — celle-ci ne dépendant que du rayon vecteur $r = |h|$ — ont exactement les mêmes valeurs dans les deux schémas.

Inversement, cependant, la loi spatiale du schéma induit ne suffit pas pour reconstituer celle du schéma originel. On ne connaît, en effet, $Q(B)$ que pour des ensembles B à $n - k$ dimensions. Par exemple, on sait qu'un schéma booléen à une seule dimension est entièrement défini par la seule covariance $C(h)$. Mais la covariance $C(h)$ ne permet plus de déterminer le moment d'ordre 3, $Q(x_1, x_2, x_3)$ dès que les trois points x_1, x_2, x_3 ne sont plus alignés. A plus forte raison, on ne peut pas espérer reconstituer $Q(B)$ ou $P(B)$ pour des ensembles B non linéaires. Ainsi, même dans le cas de grains convexes à loi isotrope, il subsistera une large indétermination, et il ne sera pas possible de reconstituer complètement

la granulométrie originelle. On peut cependant espérer que certaines caractéristiques granulométriques — par exemple celles qui ne dépendent que de la covariance — pourront être reconstituées sans ambiguïté. C'est ce que nous allons examiner.

Densité des germes induits. — Soit θ_n la densité des germes des grains primaires originels de l'espace R_n à n dimensions. Il faut en tout premier lieu déterminer la densité θ_{n-k} des germes des grains primaires induits dans un sous-espace R_{n-k} à $n-k$ dimensions. Un grain primaire germé au point ξ_n de R_n induit un grain dans R_{n-k} si, et seulement si, il rencontre le sous-espace R_{n-k} . Ceci a lieu avec une probabilité $\Pi(\rho)$, qui ne dépend que de la distance ρ du point ξ_n au sous-espace R_{n-k} , à cause de l'isotropie du milieu. Désignons par ξ_{n-k} le pied de la perpendiculaire abaissée de ξ_n dans R_{n-k} . On a $\rho = |\xi_n - \xi_{n-k}|$. On peut convenir de fixer en ce point ξ_{n-k} la position du germe du grain induit dans R_{n-k} par le grain originel germé en ξ_n (ceci n'implique aucunement que ξ_{n-k} appartienne à ce grain induit).

Pour que l'élément de volume $d\xi_{n-k}$ de R_{n-k} , placé au point ξ_{n-k} contienne le germe d'un grain induit, il est nécessaire et suffisant qu'un grain originel soit tombé dans un élément de volume

$$d\xi = d\xi_{n-k} d\xi_k$$

centré en un point ξ_n se projetant en ξ_{n-k} dans R_{n-k} , et que ce grain rencontre R_{n-k} . Ceci a lieu avec la probabilité :

$$\theta_{n-k} d\xi_{n-k} = \theta_n d\xi_{n-k} \int_{R_k} \Pi(\rho) d\xi_k$$

Mais, en coordonnées polaires, l'élément de volume $d\xi_k$ de l'espace R_k complémentaire de R_{n-k} est :

$$d\xi_k = \Omega_k \rho^{k-1} d\rho$$

Ω_k représentant la surface de la sphère à k dimensions. On a donc :

$$(12,1) \quad \theta_{n-k} = \theta_n \Omega_k \int_0^\infty \Pi(\rho) \rho^{k-1} d\rho$$

Interprétons ce résultat. Soit V_k le volume (à k dimensions) du contour apparent d'un grain primaire relativement à R_{n-k} , c'est-à-dire le volume de la projection de ce grain dans l'espace complémentaire R_k . L'espérance de V_k est évidemment :

$$E(V_k) = \int_{R_k} \Pi(\rho) d\xi_k = \Omega_k \int_0^\infty \Pi(\rho) \rho^{k-1} d\rho$$

Ainsi, (12,1) s'écrit :

$$(12,2) \quad \theta_{n-k} = \theta_n E(V_k)$$

La densité θ_{n-k} des grains induits dans R_{n-k} est égale au produit de la densité originelle θ_n par le contour apparent moyen $E(V_k)$ du grain primaire en projection dans l'espace R_k complémentaire.

Exemples : pour $n = 3$ et $k = 1$, on a :

$$\theta_2 = \theta_3 E(D_0)$$

La densité induite sur un plan est le produit de la densité originelle θ_3 par le diamètre apparent moyen des grains primaires.

Pour $n = 3$ et $k = 2$, on a :

$$\theta_1 = \theta_3 E(S_0)$$

La densité induite sur une droite est le produit de la densité originelle θ_3 dans l'espace à 3 dimensions par l'aire moyenne du contour apparent des grains primaires.

Pour $n = 2$ et $k = 1$, enfin, on trouve :

$$\theta_1 = \theta_2 E(D_0)$$

La densité induite sur une droite est le produit de la densité θ_2 des germes dans l'espace à 2 dimensions par l'espérance du diamètre apparent des grains primaires.

REMARQUE. — Il n'existe, en général, aucun moyen de reconstituer le contour apparent moyen $E(V_k)$ des grains originels à partir d'observations faites sur la granulométrie induite dans R_{n-k} . En général, donc, on ne peut pas reconstituer θ_n à partir de θ_{n-k} (à moins de faire, comme dans le prochain paragraphe, des hypothèses plus précises encore sur la forme des grains).

Invariance de la covariance. — Nous avons déjà remarqué que la covariance $C(r)$ possède la même expression dans R_n et dans R_{n-k} . Désignons par $K_n(r)$ et $K_{n-k}(r)$ l'espérance de l'intersection d'un grain primaire et de son translaté, dans une translation h de module $|h| = r$, pour le schéma originel de R_n et le schéma induit dans R_{n-k} respectivement. De (8,6), ou (8,7) on déduit immédiatement :

$$(12,3) \quad \theta_n K_n(r) = \theta_{n-k} K_{n-k}(r)$$

De cette relation fondamentale nous allons déduire diverses conséquences.

1° Si nous faisons $r = 0$ dans (12,3), il vient :

$$\theta_n K_n(0) = \theta_{n-k} K_{n-k}(0)$$

Compte tenu de (12,2), on a aussi :

$$(12,4) \quad K_n(0) = K_{n-k}(0) E(V_k)$$

Ainsi l'espérance mathématique de la mesure du grain primaire originel est égale au produit des espérances de la mesure du grain induit dans R_{n-k} et de la mesure du contour apparent du grain originel en projection dans R_k .

Pour $n = 3$ et $k = 1$:

$$K_3(0) = K_2(0)E(D_0)$$

Pour $n = 3$ et $k = 2$:

$$K_3(0) = K_1(0)E(S_0)$$

Pour $n = 2$ et $k = 1$:

$$K_2(0) = K_1(0)E(D_0)$$

Si, par exemple, on connaissait l'espérance $E(S_0)$ du contour apparent du grain originel, on pourrait déterminer son volume moyen $K_3(0)$ à partir de la longueur moyenne $K_1(0)$ des grains primaires induits sur une droite.

De même, si l'on connaissait le diamètre apparent moyen $E(D_0)$ du grain originel, on reconstituerait le volume moyen $K_3(0)$ à partir de l'aire moyenne $K_2(0)$ des grains induits sur un plan.

Remarquons bien que ces diverses moyennes ou espérances sont relatives à des *granulométries exprimées en nombre de grains*.

2° Dérivons (12,3) en r avant de faire $r = 0$. On obtient :

$$\theta_n K'_n(0) = \theta_{n-k} K'_{n-k}(0)$$

et, compte tenu de (12,2), il vient :

$$(12,5) \quad K'_n(0) = K'_{n-k}(0)E(V_k)$$

Reportons-nous à (7,15). $K'_n(0)$ représente l'espérance du contour apparent du grain originel en projection dans l'espace à $n - 1$ dimensions (c'est ici le contour apparent pris au sens usuel). De même $K'_{n-k}(0)$ est l'espérance du contour apparent du grain induit, en projection dans R_{n-k-1} . Par exemple :

Avec $n = 3$, $k = 1$: le contour apparent moyen des grains originels à 3 dimensions est égal au produit du diamètre apparent $E(D_0)$ des grains originels par le diamètre apparent moyen des grains induits dans l'espace à 2 dimensions.

3° Intégrons maintenant (12,3). Les relations (7,14) nous montrent que l'intégrale d'une fonction $K(h)$ donne l'espérance du carré de la mesure d'un grain convexe. En coordonnées polaires, l'élément de volume dans R_n est :

$$\left\{ \begin{array}{l} d\xi_n = \Omega_n r^{n-1} dr \\ \Omega_n = \frac{n\pi^{n/2}}{\Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right)} = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 1 \\ 2\pi & \text{si } n = 2 \\ 4\pi & \text{si } n = 3 \end{cases} \end{array} \right.$$

Ω_n désignant la mesure de la surface de la sphère de rayon unité de R_n .

Si A'_n désigne le grain originel primaire de R_n , on a donc

$$E[(\text{Mes } A'_n)^2] = \Omega_n \int_0^\infty K_n(r) r^{n-1} dr$$

De (12,3) et (12,2) résulte ainsi :

$$E[(\text{Mes } A'_n)^2] = \Omega_n E(V_k) \int_0^\infty K_{n-k}(r) r^{n-1} dr$$

Plaçons-nous dans le cas $n - k = 1$ (granulométries induites *sur une droite*). $E(V_{n-1})$ est le contour apparent du grain primaire originel au sens habituel (c'est une surface si $n = 3$ et une longueur si $n = 2$). On obtient :

$$(12,6) \quad E[(\text{Mes } A'_n)^2] = \Omega_n E(V_{n-1}) \int_0^\infty K_1(r) r^{n-1} dr$$

Mais $K_1(r)$ représente la granulométrie des grains induits sur la droite, c'est-à-dire *la granulométrie des traversées des grains primaires*. En effet, si l'on désigne par $N(l)$ cette granulométrie *exprimée en nombre*, on a :

$$K_1(r) = \int_r^\infty (l - r) dN(l) = \int_r^\infty [1 - N(l)] dl$$

puisque $K_1(r)$ est l'espérance de la longueur $(l - r)$ de l'intersection d'un grain primaire (de longueur l aléatoire) avec son translaté dans une translation r ; d'où en dérivant :

$$(12,7) \quad 1 - N(l) = -K'_1(l)$$

Des intégrations par partie donnent successivement :

$$\int_0^\infty K_1(r) r^{n-1} dr = \int_0^\infty \frac{r^n}{n} [1 - N(r)] dr = \int_0^\infty \frac{r^{n+1}}{n(n+1)} dN(r)$$

Introduisons donc les moments de la granulométrie en nombre des traversées des grains primaires :

$$m_k = \int_0^\infty r^k dN(r)$$

La relation (12,6) peut alors s'écrire :

$$(12,8) \quad E[(\text{Mes } A'_n)^2] = \frac{\Omega_n}{n(n+1)} E(V_{n-1}) m_{n+1}$$

Pour $n = 3$, on a ainsi

$$E[(\text{Mes } A'_3)^2] = \frac{\pi}{3} E(S_0) m_4$$

Pour $n = 2$, de même :

$$E[(\text{Mes } A'_2)^2] = \frac{\pi}{3} E(D_0) m_3$$

4° La formule (12,8) ne permet pas de reconstituer le moment d'ordre 2 de $\text{Mes } A'_n$, parce que $E(V_{n-1})$ — contour apparent moyen — ne peut pas

se déduire de la granulométrie induite. Mais, pour $k = n - 1$, la relation (12,4) donne :

$$E [\text{Mes } A'_n] = E(V_{n-1})m_1$$

Cette relation permet d'éliminer $E(V_{n-1})$ de (12,8). On obtient :

$$(12,9) \quad \frac{E [(\text{Mes } A'_n)^2]}{E [\text{Mes } A'_n]} = \frac{\Omega_n}{n(n+1)} \frac{m_{n+1}}{m_1}$$

Pour $n = 2$, l'aire S du grain primaire à 2 dimensions se relie donc à la longueur L de la traversée de ce même grain par

$$(12,10) \quad \frac{E(S^2)}{E(S)} = \frac{\pi}{3} \frac{E(L^3)}{E(L)}$$

Pour $n = 3$, de même, le volume V du grain primaire se relie à la traversée L de ce grain par :

$$(12,11) \quad \frac{E(V^2)}{E(V)} = \frac{\pi}{3} \frac{E(L^4)}{E(L)}$$

On prendra bien garde que E désigne une valeur moyenne exprimée en nombre : $E(L^3)$ ou $E(L^4)$ se calculent sur la granulométrie en nombre $N(l)$ des traversées des grains primaires. Il peut être intéressant d'exprimer les mêmes résultats à l'aide de granulométries en mesure. Désignons par \mathfrak{N} la valeur moyenne associée à ces granulométries en mesure (exprimées en longueurs pour les traversées, en surface pour les surfaces, en volume pour les volumes). On a :

$$\frac{E(L^{n+1})}{E(L)} = \mathfrak{N}(L^n)$$

$$\frac{E(S^{n+1})}{E(S)} = \mathfrak{N}(S^n)$$

$$\frac{E(V^{n+1})}{E(V)} = \mathfrak{N}(V^n)$$

Ainsi, (12,9) prend la forme plus simple :

$$(12,12) \quad \mathfrak{N} (\text{Mes } A'_n) = \frac{\Pi^{\frac{n}{2}}}{(n+1)\Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right)} \mathfrak{N}(L^n)$$

La granulométrie des traversées, exprimées en longueur, permet donc de reconstituer la valeur moyenne de la surface ou du volume des grains originels, valeur moyenne calculée à l'aide d'une granulométrie exprimée en surface ou en volume respectivement. Ainsi, (12,10) et (12,11) s'écrivent :

$$(12,13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{N}(S) = \frac{\pi}{3} \mathfrak{N}(L^2) \\ \mathfrak{N}(V) = \frac{\pi}{3} \mathfrak{N}(L^3) \end{array} \right.$$

Ces paramètres — moyenne en surface $\mathfrak{M}(S)$ ou moyenne en volume $\mathfrak{M}(V)$ — sont les seuls que l'on puisse toujours reconstituer à l'aide de la seule granulométrie des traversées.

REMARQUE. — Dans les paragraphes 5 et 11, nous avons obtenu des relations beaucoup plus générales entre les grandeurs spécifiques caractérisant un milieu poreux isotrope quelconque et les milieux qu'il induit sur des sections planes ou sur des droites. Nous avons vu que, du nombre spécifique v'' du milieu induit sur une droite, on peut déduire le périmètre spécifique 2λ du milieu induit sur un plan et la surface spécifique σ du milieu originel, selon les relations :

$$(12,14) \quad v'' = \frac{1}{4} \sigma = \frac{2\lambda}{\pi}$$

Par contre, v'' ne permet pas de reconstituer les nombres spécifiques v et v' des milieux à 3 et 2 dimensions, ni la longueur spécifique τ du milieu à 3 dimensions.

De même, connaissant les paramètres spécifiques v' et 2λ du milieu induit sur un plan on peut retrouver surface σ et longueur τ spécifiques du milieu originel. Pour $\sigma = \frac{8\lambda}{\pi}$ cela résulte de la relation (12,14) ci-dessus. Pour τ nous avons établi la formule :

$$(12,15) \quad v' = \frac{\tau}{\pi}$$

Par contre, on ne peut pas reconstituer le nombre spécifique v du milieu originel à partir de v' et 2λ . Les indéterminations qui apparaissent, dans le cas général, pour la reconstitution des grandeurs spécifiques originales ont la même signification que celles que l'on observe dans le cas des grains convexes.

Compte tenu, d'ailleurs, des relations purement géométriques (7,6), (7,7) et (7,8) reliant diamètres et contours apparents d'un grain convexe à 2 ou 3 dimensions aux paramètres habituels $2\mathfrak{L}$, $2\mathfrak{C}$ et S , on vérifiera facilement que (12,14) et (12,15) se ramènent, dans le cas où l'on suppose l'existence de grains convexes individualisés et disjoints, aux résultats généraux obtenus dans ce paragraphe.

Ainsi, les résultats relatifs aux nombres spécifiques des milieux induits :

$$\left. \begin{array}{l} v'' = \frac{1}{4} \sigma = \frac{2\lambda}{\pi} \\ v' = \frac{\tau}{\pi} \end{array} \right\}$$

apparaissent, dans le cas des grains convexes, comme des conséquences

de (12,2), et de même la relation :

$$2\lambda = \frac{\pi}{4} \sigma$$

se ramène alors à (12,5). Par contre les relations (12,8), et leurs conséquences (12,12) et (12,13) ne se répercutent pas sur les grandeurs spécifiques. En effet, ces relations n'ont de sens que s'il existe des grains convexes individualisables, et ne peuvent pas s'étendre à des milieux poreux plus généraux.

Nous allons maintenant examiner le cas particulier où les grains primaires sont sphériques, et montrer que, dans ce cas, la reconstitution intégrale de la granulométrie originelle est toujours possible.

13. — Cas des grains sphériques.

Plaçons-nous maintenant dans le cas particulier très simple où les grains primaires originels de R_n sont des sphères. Tous les schémas induits sont évidemment sphériques eux aussi. Deux données seulement déterminent entièrement le problème : la densité θ_n des germes originels, et la granulométrie $F_n(r)$ des grains primaires originels. $F_n(r)$ est définie comme la probabilité pour que le rayon R d'un grain originel soit inférieur à r . C'est la fonction de répartition d'une granulométrie exprimée *en nombre* et non pas en mesure. Nous désignerons de même par θ_{n-k} et $F_{n-k}(r)$ la densité et la granulométrie (en nombre) du schéma sphérique induit dans le sous-espace R_{n-k} à $n - k$ dimensions. Nous utiliserons, pour les moments, les notations suivantes :

Moments en nombre. — Les moments associés à la granulométrie en nombre F_{n-k} seront désignés comme suit :

$$(13,1) \quad m_p(n - k) = \int_0^\infty r^p dF_{n-k}(r)$$

Moments en mesure. — Il sera utile aussi d'exprimer les granulométries en mesure G_{n-k} . On obtient dG_{n-k} en pondérant par r^{n-k} la fréquence (en nombre) de F_{n-k} , d'où les formules réciproques :

$$(13,2) \quad \begin{cases} dG_{n-k}(r) = \frac{r^{n-k}}{m_{n-k}(n - k)} dF_{n-k}(r) \\ dF_{n-k}(r) = \frac{r^{k-n}}{M_{k-n}(n - k)} dG_{n-k}(r) \end{cases}$$

Les moments $M_p(n - k)$ associés aux granulométries en mesure G_{n-k} sont définis par :

$$(13,3) \quad M_p(n - k) = \int_0^\infty r^p dG_{n-k}(r)$$

Entre les moments en mesure et les moments en nombre, on a les relations évidentes :

$$(13,4) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_p(n-k) = \frac{m_{p+n-k}(n-k)}{m_{n-k}(n-k)} \\ m_p(n-k) = \frac{M_{p+k-n}(n-k)}{M_{k-n}(n-k)} \end{array} \right.$$

Nous étudierons d'abord les règles de passage de F_n à F_{n-k} , et ensuite les règles que l'on peut en déduire pour les moments en nombre et en mesure.

Passage de K_n à K_{n-k} . — Nous utiliserons, comme au paragraphe précédent, l'invariance de la covariance, c'est-à-dire la relation (12,3). Mais ici $E(V_k)$ se calcule facilement. En effet, la sphère de rayon R de l'espace à k dimensions possède le volume :

$$V_k = \frac{\Omega_k}{k} R^k = \frac{\pi^{k/2}}{\Gamma\left(1 + \frac{k}{2}\right)} R^k$$

Par suite, on a :

$$(13,5) \quad E(V_k) = \frac{\pi^{k/2}}{\Gamma\left(1 + \frac{k}{2}\right)} \int r^k dF_n(r) = \frac{\pi^{k/2}}{\Gamma\left(1 + \frac{k}{2}\right)} m_k(n)$$

Et (12,2) donne ici

$$(13,6) \quad \theta_{n-k} = \frac{\pi^{k/2}}{\Gamma\left(1 + \frac{k}{2}\right)} m_k(n) \theta_n$$

Il suffit donc de connaître le moment $m_k(n)$ de la granulométrie originelle pour reconstituer la densité originelle θ_n à partir de la densité induite. Compte tenu de (13,6), la relation générale (12,3) se réduit à :

$$(13,7) \quad K_n(r) = \frac{\pi^{k/2}}{\Gamma\left(1 + \frac{k}{2}\right)} m_k(n) K_{n-k}(r)$$

Si donc nous pouvons exprimer $F_n(r)$ à l'aide de $K_n(r)$ et F_{n-k} à l'aide de K_{n-k} , il sera possible d'effectuer le passage de F_n à F_{n-k} .

Passage de F_n à F_{n-k} et inversement. — On sait que $-K'_n(r)$ est l'espérance mathématique de la mesure (volume à $n-1$ dimensions) du contour apparent de l'intersection du grain sphérique primaire de R_n et de son translaté dans la translation r . Si le grain sphérique admet le

rayon R cette mesure vaut :

$$\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(1 + \frac{n-1}{2}\right)} (R^2 - r^2)^{\frac{n-1}{2}} \quad \text{pour } R > r \quad (\text{et } 0 \text{ pour } R < r)$$

Par conséquent :

$$-K'_n(r) = \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(1 + \frac{n-1}{2}\right)} \int_r^\infty (R^2 - r^2)^{\frac{n-1}{2}} dF_n(R)$$

Effectuant une intégration par partie, nous obtenons :

$$(13,8) \quad -K'_n(r) = \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_r^\infty (R^2 - r^2)^{\frac{n-3}{2}} R[1 - F_n(R)] dR$$

On reconnaît en (13,8), l'expression d'une montée ⁽¹⁾ d'ordre $n - 1$ effectuée sur $1 - F_n(r)$. Désignons donc par I_μ l'opérateur de montée d'ordre μ . Le résultat (13,8) obtenu dans l'espace à n dimensions, et son analogue obtenu en remplaçant n par $n - k$ s'écrivent :

$$(13,9) \quad \begin{cases} -K'_n(r) = I_{n-1}[1 - F_n(r)] \\ -K'_{n-k}(r) = I_{n-k-1}[1 - F_{n-k}(r)] \end{cases}$$

La montée d'ordre 0, I_0 est l'opérateur identique, de sorte que, pour $n = 1$, (13,9) se réduit à l'équation (12,7) établie directement au paragraphe précédent. D'autre part, on sait ⁽¹⁾ que les montées forment un groupe, l'inverse de I_n étant la montée d'ordre $-n$, ou descente d'ordre n , noté I_{-n} , et que ce groupe vérifie la relation :

$$(13,10) \quad I_\lambda I_\mu = I_{\lambda+\mu}$$

Compte tenu de (13,10), on déduit successivement de (13,9) et (13,8) :

$$\begin{aligned} 1 - F_n(r) &= -I_{1-n}(K'_n) = -\frac{\pi^{k/2}}{\Gamma\left(1 + \frac{k}{2}\right)} m_k(n) I_{1-n}(K'_{n-k}) \\ &= \frac{\pi^{k/2}}{\Gamma\left(1 + \frac{k}{2}\right)} m_k(n) I_{-k}(1 - F_{n-k}) \end{aligned}$$

Finalement le passage de $1 - F_n$ à $1 - F_{n-k}$ et le passage inverse

⁽¹⁾ Voir par exemple, G. MATHERON : *Les variables régionalisées et leur estimation*, Paris. Masson, 1965, Chapitre I et notamment paragraphes 4 et 5.

sont donnés par les formules réciproques :

$$(13,11) \quad \begin{cases} 1 - F_{n-k} = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{k}{2}\right)}{\pi^{k/2} m_k(n)} I_k(1 - F_n) \\ 1 - F_n = \frac{\pi^{k/2} m_k(n)}{\Gamma\left(1 + \frac{k}{2}\right)} I_{-k}(1 - F_{n-k}) \end{cases}$$

Explicitons ces deux relations. La première permet de passer de la granulométrie originelle à la granulométrie induite. Elle s'écrit :

$$(13,12) \quad 1 - F_{n-k}(r) = \frac{k}{m_k(n)} \int_r^\infty R(R^2 - r^2)^{\frac{k}{2}-1} [1 - F_n(R)] dR$$

La deuxième équation permet le passage inverse : elle résoud complètement, dans le cas des grains sphériques, le problème qui consiste à reconstituer la granulométrie originelle à partir d'une granulométrie induite. On sait ⁽¹⁾ que l'opérateur I_{-k} de descente d'ordre k prend un aspect très différent selon la parité de k . Une descente d'ordre pair est une opération simple, qui se ramène toujours à des dérivations ordinaires. Au contraire, une descente d'ordre impair est une opération assez complexe. La manière la plus simple de réaliser la descente d'ordre impair $2k - 1$ consiste à utiliser la relation

$$I_{1-2k} = I_1 I_{-2k}$$

On effectue d'abord la descente d'ordre pair supérieur $2k$, ce qui n'entraîne que des dérivations, et ensuite une montée d'ordre 1, qui s'explique sous la forme d'une intégrale du type (13,8). Nous nous contenterons de traiter les deux cas $k = 1$ et $k = 2$ qui suffisent dans les applications.

1° $k = 2$ (reconstitution de la granulométrie à 3 dimensions à partir de celle des traversées). On prendra garde que la sphère de rayon R de l'espace à une dimension est un segment de longueur $2R$. $F_1(r)$ représente donc la granulométrie (en nombre) des *demi-traversées* observées.

Avec $k = 2$, (13,12) se réduit à :

$$1 - F_{n-2}(r) = \frac{2}{m_2(n)} \int_r^\infty R[1 - F_n(R)] dR$$

Il suffit de dériver en r pour obtenir la formule réciproque. Désignant par $f_{n-2}(r)$ la dérivée de F_{n-2} , c'est-à-dire la densité associée à cette fonction de répartition, on obtient immédiatement :

$$(13,13) \quad 1 - F_n(r) = \frac{m_2(n)}{2r} f_{n-2}(r)$$

Le moment d'ordre 2 de la granulométrie originelle, $m_2(n)$, peut égale-

⁽¹⁾ *Loc. cit.*, Chap. I et notamment formule (I, 4, 19).

ment être évalué à partir de $f_{n-2}(r)$. En effet, en $r = 0$ on doit avoir $F_n(r) = 0$, d'où résulte :

$$(13,14) \quad \frac{1}{m_2(n)} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{f_{n-2}(r)}{2r} = \frac{1}{2} f'_{n-2}(0)$$

On voit que la densité f_{n-2} de la granulométrie induite ne peut pas avoir un comportement quelconque à l'origine. Elle doit s'annuler en $r = 0$ et y admettre une dérivée à droite non nulle si $m_2(n)$ existe.

Les deux relations (13,13) et (13,14) montrent que *la granulométrie des sphères de l'espace à trois dimensions se déduit de manière remarquablement simple de l'histogramme de leurs demi-traversées.*

2° $k = 1$ (reconstitution de la granulométrie de sphères de R_3 à partir de celle des cercles induits sur un plan, ou reconstitution de la granulométrie de cercles de R_2 à partir de celles de leurs demi-traversées). On procède en deux étapes. La granulométrie F_n est tout d'abord considérée elle-même comme induite par une granulométrie F_{n+1} de l'espace à $n + 1$ dimensions (13,13) donne immédiatement :

$$1 - F_{n+1}(r) = \frac{m_2(n+1)}{2r} f_{n-1}(r)$$

Ensuite on passe de F_{n+1} à F_n à l'aide de l'équation (13,12) écrite pour $k = 1$, d'où :

$$1 - F_n(r) = \frac{m_2(n+1)}{2m_1(n+1)} \int_r^\infty \frac{1}{\sqrt{R^2 - r^2}} f_{n-1}(R) dR$$

Compte tenu de la relation (13,17) entre les moments (voir ci-dessous), le coefficient de l'intégrale du 2^e membre s'exprime à l'aide du moment d'ordre 1 de la granulométrie réelle F_n :

$$(13,15) \quad 1 - F_n(r) = \frac{2m_1(n)}{\pi} \int_r^\infty \frac{1}{\sqrt{R^2 - r^2}} f_{n-1}(R) dR$$

Pour évaluer $m_1(n)$ à l'aide de la seule granulométrie induite $f_{n-1}(R)$, il suffit de faire $r = 0$ dans (13,15), ce qui donne :

$$(13,16) \quad \frac{2m_1(n)}{\pi} = \frac{1}{\int_0^\infty \frac{1}{R} f_{n-1}(R) dR}$$

Ces deux relations permettent de reconstituer la granulométrie de sphères à partir de celle de cercles induits sur un plan, ou la granulométrie de cercles à partir de celles de leurs demi-traversées. Les calculs sont un peu plus difficiles que dans le cas précédent. On peut d'ailleurs souvent se contenter de représenter ces granulométries à l'aide de leurs deux ou trois premiers moments. Nous allons donc établir directement les formules de passage relatives aux moments en nombre et en mesure.

Formules de passage pour les moments en nombre. — Pour obtenir ces formules, multiplions les deux membres de (13,12) par $r^{\alpha-1}$, et intégrons de 0 à l'infini. A gauche, une intégration par partie nous donne :

$$\int_0^{\infty} r^{\alpha-1} [1 - F_{n-k}(r)] dr = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} r^{\alpha} dF_{n-k}(r) = \frac{1}{\alpha} m_{\alpha}(n-k)$$

A droite, en échangeant l'ordre des intégrations, nous trouvons :

$$\begin{aligned} & \frac{k}{m_k(n)} \int_r^{\infty} r^{\alpha-1} dr \int_0^{\infty} [1 - F_n(R)] (R^2 - r^2)^{\frac{k}{2}-1} R dR \\ &= \frac{k}{m_k(n)} \int_0^{\infty} [1 - F_n(R)] R dR \int_0^R (R^2 - r^2)^{\frac{k}{2}-1} r^{\alpha-1} dr \\ &= \frac{k}{m_k(n)} \frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{\alpha+k}{2}\right)} \int_0^{\infty} [1 - F_n(R)] R^{k+\alpha-1} dR \\ &= \frac{k}{m_k(n)} \frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{\alpha+k}{2}\right)} \frac{m_{k+\alpha}(n)}{k+\alpha} \end{aligned}$$

Égalant ces deux résultats, nous obtenons la relation cherchée :

$$(13,17) \quad m_{\alpha}(n-k) = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{k}{2}\right) \Gamma\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{\alpha+k}{2}\right)} \frac{m_{k+\alpha}(n)}{m_k(n)}$$

Pour $k = 2$, cette relation se simplifie considérablement. Il vient :

$$(13,18) \quad m_{\alpha}(n-2) = \frac{2}{\alpha+2} \frac{m_{\alpha+2}(n)}{m_2(n)}$$

Pour $k = 1$, les résultats sont un peu moins simples. Explicitons les valeurs des trois premiers moments de la granulométrie induite dans l'espace à $n-1$ dimensions. De (13,17), on tire :

$$(13,19) \quad \begin{cases} m_1(n-1) = \frac{\pi}{4} \frac{m_2(n)}{m_1(n)} \\ m_2(n-1) = \frac{2}{3} \frac{m_3(n)}{m_1(n)} \\ m_3(n-1) = \frac{3\pi}{16} \frac{m_4(n)}{m_1(n)} \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

(si $n-1 = 1$, on n'oubliera pas que ces moments sont ceux des demi-traversées).

REMARQUE. — Les relations (13,17) ou (13,18) et (13,19) ne résolvent pas entièrement le problème de la reconstitution des moments de la granulo-

métrie originelle. Elles ne permettent pas de déterminer $m_k(n)$ lui-même. Nous avons vu plus haut comment $m_1(n)$ pour $k = 1$ et $m_2(n)$ pour $k = 2$ pouvaient être déterminés directement à partir de l'histogramme des granulométries induites.

On reconnaîtra facilement que les formules (12,4), (12,5) et (12,8), écrites dans le cas de grains sphériques, apparaissent comme des cas particuliers de la relation (13,17). Le fait que les moments de la granulométrie induite ne permettent pas de déterminer $m_k(n)$ et donc de reconstituer complètement les moments de la granulométrie originelle s'est déjà manifesté au paragraphe précédent : l'espérance $E(V_{n-1})$ du contour apparent du grain originel ne pouvait pas, en effet, se déduire de la seule granulométrie induite. Par contre, les formules (12,13) montrent que cette reconstitution est possible en ce qui concerne le moment du premier ordre de la granulométrie originelle exprimée *en mesure*, et non plus en nombre. Ce résultat s'étend et se généralise à tous les moments en mesure lorsque les grains sont sphériques.

Formules de passage pour les moments en mesure. — Les granulométries en mesure G_{n-k} ont été définies en (13,2), et leurs moments $M_p(n-k)$ se relie aux moments en nombre par les relations (13,4), que l'on peut écrire

$$(13,20) \quad M_p(n) = \frac{m_{n+p}(n)}{m_n(n)}$$

Or, pour $\alpha = n - k$, la relation générale (13,17) se réduit à :

$$(13,21) \quad m_{n-k}(n-k) = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{k}{2}\right) \Gamma\left(1 + \frac{n-k}{2}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right)} \frac{m_n(n)}{m_k(n)}$$

Divisons membre à membre la relation (13,17) par (13,21). Il vient :

$$\frac{m_x(n-k)}{m_{n-k}(n-k)} = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(1 + \frac{n-k}{2}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right) \Gamma\left(1 + \frac{\alpha+k}{2}\right)} \frac{m_{k+\alpha}(n)}{m_n(n)}$$

Au premier membre, d'après (13,20), apparaît l'expression de $M_{\alpha+k-n}(n-k)$ et de même au deuxième membre celle de $M_{\alpha+k-n}(n)$. Autrement dit, les moments de même ordre se déduisent directement les uns des autres. En remplaçant $\alpha + k - n$ par α , l'équation écrite ci-dessus conduit à :

$$(13,22) \quad \frac{\Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{n+\alpha}{2}\right)} M_x(n) = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{n-k}{2}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{n-k+\alpha}{2}\right)} M_x(n-k)$$

Ces relations constituent bien la généralisation de (12,13) : *la reconstitution des moments en mesure des grains sphériques originels est toujours possible, et chaque moment originel ne dépend que du moment induit de même ordre.*

Pour $k = 2$ (moments des sphères comptées en volume en fonction des moments des demi-traversées comptées en longueur) on obtient le résultat très simple :

$$M_x(n) = \frac{n + \alpha}{n} M_x(n - 2)$$

Pour $k = 1$ et $n = 3$ (moments des sphères comptées en volume en fonction des moments des cercles comptés en surface), les résultats sont un peu moins simples. Nous expliciterons seulement les trois premiers moments.

$$\left\{ \begin{array}{l} M_1(3) = \frac{32}{9\pi} M_1(2) \\ M_2(3) = \frac{5}{4} M_2(2) \\ M_3(3) = \frac{64}{15\pi} M_3(2) \end{array} \right.$$

Pour $k = 1$ et $n = 2$ (moments des cercles, comptés en surface, en fonction des moments des demi-traversées, comptées en longueur). On trouve :

$$\begin{aligned} M_1(2) &= \frac{3\pi}{8} M_1(1) \\ M_2(2) &= \frac{4}{3} M_2(1) \\ M_3(2) &= \frac{15\pi}{32} M_3(1) \end{aligned}$$

DEUXIÈME PARTIE

HYDRODYNAMIQUE DES MILIEUX POREUX

CHAPITRE V

GENÈSE DE LA LOI DE DARCY

SOMMAIRE

Paragraphe 14. — *Un milieu poreux homogène est défini par sa porosité ponctuelle $\omega(x)$, égale à 0 dans les grains et à 1 dans les pores. On considère $\omega(x)$ comme une réalisation d'une fonction aléatoire ergodique et stationnaire. Toute propriété macroscopique de ce milieu, y compris sa perméabilité, doit pouvoir se déduire de la seule loi spatiale de $\omega(x)$. On passe du niveau granulométrique, caractérisé par les équations de Navier, au niveau macroscopique, où règne la loi de Darcy, par des opérations linéaires, qui se ramènent à des espérances mathématiques relatives à la loi spatiale de ω .*

Paragraphe 15. — *Toute solution stationnaire de l'équation de Navier est combinaison linéaire d'un système de n solutions privilégiées. On en déduit l'existence, au niveau macroscopique, d'une relation linéaire entre flux et gradient pour les écoulements uniformes ou quasi-uniformes: c'est la loi de Darcy. Exemple simple du milieu à canaux cylindriques disjoints: la perméabilité dépend uniquement de la porosité et de la loi du premier point de contact. Elle n : dépend pas de la surface spécifique. Critique de l'analogie électrique: la conductivité d'un milieu dont les pores sont remplis d'une solution conductrice ne permet pas de reconstituer la perméabilité de ce milieu.*

Paragraphe 16. — *Notions énergétiques: la densité moyenne de puissance consommée se déduit du produit scalaire du flux et du gradient évalué, indifféremment, au niveau granulométrique ou macroscopique. On en déduit l'existence d'un tenseur densité de puissance consommée W^{ls} , symétrique et défini positif, lié à la perméabilité K^{ls} par la relation $K^{ls} = \mu E(W^{ls})$. Ainsi K^{ls} est elle-même symétrique et définie positive.*

14. — Niveau granulométrique et niveau macroscopique.

Dans les quatre chapitres précédents, nous avons étudié la géométrie des milieux poreux, en essayant, non d'obtenir des résultats nouveaux et révolutionnaires, mais plutôt d'approfondir des notions aussi usuelles et bien connues que celles de granulométries ou de surface spécifique. Dans cette deuxième partie, consacrée à l'hydrodynamique des milieux poreux, nous nous proposons d'accomplir un travail analogue en ce qui concerne la notion de perméabilité. Nous ferons délibérément abstraction de toute la complexité des problèmes que pose l'étude physique des écoulements

réels dans les milieux poreux réels. En vue de simplifier au maximum notre analyse théorique, et de réduire la notion de perméabilité à son contenu le plus essentiel, nous nous limiterons à l'étude des écoulements permanents de filtration d'un fluide visqueux incompressible à travers un milieu poreux. Nous avons donné, dans l'introduction, quelques indications sur les différentes échelles auxquelles il convient de se placer pour observer ces phénomènes, et mentionné le rôle que doit jouer ici la théorie probabiliste des fonctions aléatoires : celui d'un instrument conceptuel permettant d'appréhender le passage d'une échelle à l'autre. Dans le présent chapitre, nous étudions le passage du niveau granulométrique au niveau macroscopique immédiatement supérieur, et l'apparition des perméabilités. Il s'agit donc d'une étude des milieux poreux homogènes. Les chapitres VI et VII nous feront accéder aux niveaux suivants. Il s'agira alors d'étudier comment des perméabilités à signification purement locale et variables dans l'espace peuvent se composer pour engendrer, à un niveau plus élevé, une nouvelle perméabilité macroscopique constante.

Hypothèses. — Pour décrire la géométrie d'un milieu poreux, nous introduirons une fonction en tout ou rien $\omega(x)$ que nous appellerons *porosité* (ponctuelle). Elle est définie comme suit :

$$\begin{cases} \omega(x) = 1 & \text{si } x \text{ est dans les pores} \\ \omega(x) = 0 & \text{si } x \text{ est dans les grains} \end{cases}$$

Un milieu poreux homogène se caractérise expérimentalement par l'apparition de propriétés macroscopiques constantes : porosité moyenne, perméabilité, etc..., pourvu qu'elles soient mesurées à l'échelle de volumes grands vis-à-vis des dimensions granulométriques, ne se modifient pas dans l'espace. Cette homogénéité est de nature purement statistique. Au niveau granulométrique, en effet, le milieu reste irréductiblement hétérogène. Pour traduire dans un langage mathématique précis cette notion d'homogénéité statistique, nous *supposerons que la porosité ponctuelle $\omega(x)$ du milieu peut être considérée comme une réalisation d'une fonction aléatoire (en tout ou rien) ergodique et stationnaire.*

On peut, naturellement, s'interroger sur la valeur et le sens d'une telle hypothèse. Il n'est jamais possible de démontrer à priori, par des voies purement déductives, qu'une théorie mathématique abstraite, construite sur des bases axiomatiques, s'applique à un phénomène concret donné. Cette difficulté n'est pas particulière au problème étudié ici. Si l'on y réfléchit bien, on verra qu'elle se présente avec la même force lorsque l'on veut, par exemple, interpréter une partie de pile ou face en disant : « il y a une chance sur deux d'obtenir pile » et se résout de la même manière, par un arbitrage souverain et sans appel : le recours à l'expérience. Nous sommes d'ailleurs certains, au départ, que le verdict de ce juge suprême nous sera favorable. Notre hypothèse ne fait rien d'autre, en effet, que d'énoncer en termes rationnels une donnée de l'expérience : l'existence réelle de milieux poreux homogènes.

La loi spatiale de la fonction aléatoire en tout ou rien $\omega(x)$ résume alors tout ce qu'il est possible et utile de connaître sur les propriétés du milieu envisagé à l'échelle granulométrique. Toute propriété macroscopique de ce milieu peut s'exprimer à l'aide de fonctionnelles faisant intervenir les valeurs prises par $\omega(x)$ à l'intérieur de volumes suffisamment grands. Grâce à l'ergodicité, ces fonctionnelles de $\omega(x)$ peuvent être remplacées par les espérances mathématiques correspondantes. Ainsi, ces propriétés macroscopiques ne dépendent que de la loi spatiale et peuvent, théoriquement, s'en déduire. La porosité moyenne, par exemple, qui est la valeur moyenne de $\omega(x)$ dans un volume V assez grand :

$$\frac{1}{V} \int_V \omega(x) dx$$

coïncide, par ergodicité, avec l'espérance mathématique (constante) $E(\omega)$. La perméabilité doit, elle aussi, se rattacher à la loi spatiale par l'intermédiaire d'espérances mathématiques, portant, il est vrai, sur des expressions plus complexes.

Notations. — Nous utiliserons, de manière systématique, les notations tensorielles ⁽¹⁾ classiques, et, notamment la convention d'Einstein, selon laquelle on doit sommer sur tout indice répété en position contravariante (supérieure) et covariante (inférieure).

Par exemple, on écrira :

$$h_{ij}q^iq^j \quad \text{au lieu de} \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_{ij}q^iq^j$$

La dérivée $\frac{\partial \varphi}{\partial x^i}$ d'une fonction φ par rapport à la coordonnée x^i sera notée $\partial_i \varphi$. Ainsi, avec la convention de sommation, une expression comme $\partial_i q^i$ représente la divergence du vecteur de composantes contravariantes q^i . Le tenseur métrique, donnant l'élément d'arc sous la forme $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$ sera toujours noté g_{ij} , et son inverse g^{ij} . Nous utiliserons aussi les symboles de Kronecker δ_j^i ($\delta_j^i = 0$ si $i \neq j$, $= 1$ si $i = j$), qui sont les composantes mixtes du tenseur métrique. Dans un système d'axes orthonormés, g_{ij} , g^{ij} et δ_j^i sont numériquement égaux, et la distinction entre composantes covariantes et contravariantes s'évanouit.

La perméabilité macroscopique, qui est un tenseur, sera notée K^{ij} , et son inverse, qui est la résistivité du milieu, sera notée H_{ij} . En ce qui concerne les écoulements, nous désignerons par ρ et μ la masse spécifique et la viscosité du fluide. Au niveau granulométrique, nous désignerons par les lettres minuscules v^i et p la vitesse et la pression en un point du fluide. Au niveau macroscopique nous utiliserons des notations majuscules. P sera la pression, et Q^i le vecteur représentant le flux exprimé en volume de fluide : le produit scalaire $Q^i \beta_i$ est égal au volume de fluide traversant

⁽¹⁾ Pour le calcul tensoriel, nous nous référons à A. LICHNEROWICZ : *Éléments de Calcul tensoriel*, Colin, Paris.

pendant un temps unité un élément de surface unité dont la normale admet les cosinus directeurs β_i .

Le niveau granulométrique et l'équation de Navier. — Le niveau granulométrique correspond à des éléments de volumes grands à l'échelle des particules élémentaires, mais petits à l'échelle de la granulométrie. C'est à ce niveau que la mécanique statistique permet, en tout point x appartenant aux pores, de définir la pression $p(x)$ et la vitesse $v^i(x)$ d'un écoulement, et d'établir l'équation de Navier :

$$(14,1) \quad \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \partial_j(\rho v^j v_i) - \mu \Delta v_i = -\partial_i p + f_i$$

à laquelle on doit ajouter l'équation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \partial_i(\rho v^i) = 0$$

ρ désignant la masse spécifique du fluide, p la pression, μ la viscosité, et f_i la densité de forces. Dans tous les cas usuels, $f_i = -\partial_i \Phi$ dérive d'un potentiel Φ . Si l'on remplace la pression p par la charge $p + \Phi$, le terme f_i disparaît du second membre de (14,1). Dans la suite de cette étude, nous prendrons donc $f_i = 0$, et nous désignerons par p la charge elle-même et non plus la pression.

L'équation (14,1) de Navier n'est pas linéaire, à cause de la présence du terme quadratique en v^j qui figure dans son premier membre. Mais on sait que les écoulements de filtration sont, le plus souvent, suffisamment lents pour que ce terme quadratique puisse être négligé. Si, de plus, l'écoulement est supposé permanent, et le fluide incompressible ($\rho = C^{te}$), l'équation de Navier et l'équation de continuité, toutes deux *linéaires*, s'écrivent :

$$(14,2) \quad \begin{cases} \partial_i p = \mu \Delta v_i \\ \partial_i v^i = 0 \end{cases}$$

On remarquera que (pour un fluide supposé incompressible) ces deux relations épuisent totalement le contenu de ce que la mécanique statistique est susceptible de nous apporter (1).

A ces équations, valables en tout point x des pores, on doit ajouter des conditions aux limites, d'ailleurs extraordinairement complexes,

(1) On voit ainsi qu'il n'est pas possible de déduire directement la *symétrie* des perméabilités du théorème général de mécanique statistique qui porte le nom d'Onsager. En effet, c'est au niveau granulométrique que ce théorème peut être appliqué. Mais, à ce niveau, il n'y a pas encore d'équation « phénoménologique » du type de la loi de Darcy, mais seulement l'équation de Navier, de sorte que le théorème est sans objet. Il n'est pas possible non plus de court-circuiter l'étape granulométrique, en passant directement de l'échelle des particules élémentaires au niveau macroscopique. En effet, la définition du milieu poreux homogène à partir d'une fonction aléatoire en tout ou rien ergodique et stationnaire [porosité $\omega(x)$, voir ci-dessus] relève d'un formalisme étranger à celui de la mécanique statistique, et rien ne prouve a priori que dans la synthèse de ces deux formalismes la validité du théorème d'Onsager reste assurée. C'est donc de l'équation de Navier elle-même qu'il convient de déduire comme nous le ferons ci-dessous, la symétrie des perméabilités.

exprimant que la vitesse v_i s'annule à la surface de séparation des grains et des pores. La géométrie des grains et des pores peut être représentée par la porosité ponctuelle $\omega(x)$, qui est une fonction en tout ou rien égale à zéro dans les grains et à 1 dans les pores. Si l'on connaît cette fonction $\omega(x)$ et si l'on se donne les conditions aux limites extérieures, le système (14,2) admet une solution unique, de sorte que le gradient $\partial_i p$ et la vitesse v^i apparaissent comme des fonctionnelles parfaitement déterminées (bien que nous ne soyons pas capables de les expliciter) de $\omega(x)$ et des conditions aux limites extérieures.

Enfin, de la linéarité du système (14,2) résulte un principe de superposition : si l'on connaît plusieurs solutions distinctes respectant la géométrie du milieu [définie par une même fonction $\omega(x)$], toute combinaison linéaire de ces solutions représente un écoulement possible dans ce même milieu.

On voit aussi que la viscosité μ n'intervient pas de façon essentielle. Si l'on connaît une solution du système (14,2), soit $p(x)$ et $v(x)$, correspondant à une viscosité μ , la même pression p et la vitesse $v' = \frac{\mu}{\mu'} v$ constituent la solution du même système, pour le même milieu et les mêmes conditions aux limites, lorsque la viscosité du fluide est μ' au lieu de μ . La masse spécifique ρ ne joue aucun rôle, sous réserve seulement que le fluide soit incompressible.

Le niveau macroscopique et la loi de Darcy. — Le niveau macroscopique, de son côté, correspond à des éléments de volume suffisamment grands, vis-à-vis des dimensions granulométriques, pour que le milieu poreux puisse être regardé comme homogène. Les grandeurs macroscopiques définies à cette échelle, la charge P et le flux Q^i se déduisent des quantités analogues déjà introduites au niveau granulométrique par des opérations *linéaires* que nous expliciterons dans un instant.

Dans un tel milieu homogène, on constate expérimentalement que ces grandeurs macroscopiques obéissent à la loi de Darcy. Cette loi complétée par l'équation de continuité, conduit au système suivant :

$$(14.3) \quad \begin{cases} Q^i = -\frac{1}{\mu} K^{ij} \partial_j P \\ \partial_i Q^i = 0 \end{cases}$$

où les K^{ij} sont les composantes du tenseur des perméabilités du milieu (le flux, ou débit Q^i est exprimé en volume de fluide et non en masse) et ne dépendent pas des caractéristiques μ et ρ du fluide.

On sait que la loi de Darcy — relation purement « phénoménologique » — ne peut, en aucune manière, se déduire de l'équation de Navier. Les systèmes (14,2) et (14,3) ne présentent aucun lien logique. Leur seul caractère commun est leur *linéarité*. On soupçonne que l'équation phénoménologique de Darcy doit être une conséquence, non pas de l'équation de Navier (14,2) elle-même, mais seulement du caractère linéaire de cette équation et de certaines

conditions, générales et formelles, auxquelles doit être soumise l'opération de changement d'échelle faisant passer du niveau granulométrique au niveau macroscopique ⁽¹⁾. C'est qu'en effet, n'importe quel écoulement microscopique ne correspond pas à un phénomène macroscopique observable. On peut penser que seuls seront observables macroscopiquement des écoulements pouvant être considérés comme *localement uniformes au niveau macroscopique*, ou, comme nous dirons, quasi uniformes, c'est-à-dire assimilables à des écoulements uniformes pour une échelle intermédiaire, correspondant à des dimensions, peut être petites au niveau macroscopique, mais suffisamment grandes au niveau granulométrique pour que les propriétés du milieu y soient statistiquement homogénéisées par effet d'ergodicité. Un écoulement qui ne serait pas de ce type se présenterait à l'expérimentateur comme la superposition de deux composantes : la première, localement uniforme, vérifierait les exigences formulées ci-dessus. La deuxième apparaîtrait comme une sorte de fourmillement aléatoire de résultante moyenne nulle, c'est-à-dire comme une sorte de turbulence. On sait que les écoulements de filtration sont toujours assez lents pour que de telles turbulences ne se manifestent pas.

Passage d'un niveau à l'autre. — Pour rendre concevable cette opération de changement d'échelle, nous devons recourir au langage des fonctions aléatoires. La porosité ponctuelle $\omega(x)$, dont la donnée définit la géométrie du milieu poreux, sera donc interprétée comme une *réalisation d'une fonction aléatoire en tout ou rien, ergodique et stationnaire*, et toutes les propriétés macroscopiques du milieu, y compris la perméabilité, devront se déduire de la seule loi spatiale de $\omega(x)$.

Nous avons déjà indiqué que le gradient $\partial_i p(x)$ et la vitesse $v^i(x)$ de l'écoulement au niveau granulométrique apparaissent comme des fonctionnelles très complexes de $\omega(x)$ et des conditions aux limites extérieures. Par l'intermédiaire de ces mêmes fonctionnelles, $\partial_i p$ et v^i deviennent elles-mêmes des fonctions aléatoires, lorsque $\omega(x)$ est considérée comme une réalisation d'une fonction aléatoire, et la loi spatiale de $\partial_i p$ et v^i ne dépend que de celle de $\omega(x)$.

Or le flux et le gradient macroscopique Q^i et $\partial_i P$ se déduisent de v^i et $\partial_i p$ par certaines opérations de moyennes spatiales qui, grâce à l'hypothèse d'ergodicité, se ramènent à des espérances mathématiques. Le flux Q^i , moyenne spatiale du flux « granulométrique » égal à v^i dans les pores

⁽¹⁾ On peut donc remarquer que seules les valeurs numériques des perméabilités dépendent du choix de l'équation de l'écoulement au niveau granulométrique, mais non la forme même de la loi de Darcy (relation linéaire entre gradient et flux). Cette forme subsistera si l'on remplace l'équation de Navier par une équation linéaire quelconque. Les considérations auxquelles on se livre ici expliquent donc aussi bien la genèse de la loi d'Ohm à partir des équations linéaires de l'électromagnétisme et d'autres phénomènes analogues. Cette identification ne concerne cependant que la forme linéaire de la loi et ne s'étend pas aux valeurs numériques des coefficients. On ne doit pas s'attendre à observer de relation simple entre le tenseur des perméabilités d'un milieu poreux et le tenseur des conductivités qui prend naissance dans ce même milieu lorsqu'on le sature d'une solution conductrice. Cette remarque sera éclaircie par l'exemple traité à la fin du paragraphe 15.

et nul dans les grains, sera donc donné par :

$$(14,4) \quad Q^i = E(\omega v^i)$$

La pression macroscopique P , de son côté, apparaît comme une moyenne spatiale de la pression p du fluide dans les pores, cette moyenne spatiale devant cette fois être rapportée au volume utile, c'est-à-dire au volume effectif des pores. Par ergodicité, on peut donc définir P comme l'espérance mathématique *conditionnelle* de $p(x)$ dans l'hypothèse où le point x appartient aux pores, ce qui s'écrit :

$$(14,5) \quad P = E[p(x)|\omega(x) = 1] = \frac{E(\omega p)}{E(\omega)}$$

et, pour le gradient :

$$(14,6) \quad \partial_i P = \frac{1}{E(\omega)} \partial_i E(\omega p)$$

Lorsque les conditions aux limites extérieures sont données, les relations (14,4) et (14,5) montrent que les grandeurs macroscopiques P et Q^i ne dépendent que de la loi spatiale de $\omega(x)$, puisque p et v^i sont des fonctionnelles parfaitement définies de $\omega(x)$. C'est donc bien de la seule loi spatiale de $\omega(x)$ que doivent être tirées les propriétés macroscopiques du milieu.

REMARQUE. — D'une manière générale, $p(x)$ et $v^i(x)$ sont définis uniquement dans les pores. Nous les supposons identiquement nuls dans les grains, de manière à étendre leur définition à l'espace entier, En raison des conditions aux limites imposées à l'équation de Navier, v^i s'annule à la surface de séparation des grains et des pores, et reste, par suite, continue dans tout l'espace. L'équation de continuité

$$(14,7) \quad \partial_i v^i = 0$$

est donc valable *dans l'espace entier*. Par contre $p(x)$ subit une discontinuité à la traversée de la surface de séparation. Ses dérivées doivent être prises au sens de la théorie des distributions. Nulles dans les grains, identiques dans les pores aux dérivées usuelles, elles coïncident, sur la surface de séparation, avec une mesure de Dirac portée par cette surface. Mais, comme les v^i s'annulent sur cette surface, toute expression du type $v^i \partial_i p$ coïncide avec la fonction usuelle, de même expression, définie dans les pores et nulle dans les grains.

Ainsi, l'équation de Navier (14,2), valable dans les pores au sens usuel, ne peut être étendue à l'espace entier qu'à une mesure de Dirac près portée par la surface de séparation. Par contre, l'équation

$$(14,8) \quad v^i \partial_i p = \mu v^i \Delta v_i$$

est vérifiée dans tout l'espace, et il est en particulier légitime d'égaliser les espérances mathématiques de ses deux membres.

15. — Passage à la loi de Darcy.

Parmi les solutions du système de Navier (14,2), intéressons-nous en premier lieu à celles qui correspondent à des écoulements macroscopiquement uniformes dans le milieu poreux supposé infini. Ces solutions sont caractérisées par un gradient $\partial_j P$ et un flux Q^i macroscopiques constants. Au niveau granulométrique, la vitesse $v^i(x)$ est une fonction aléatoire vectorielle, nécessairement stationnaire, que nous supposons en outre ergodique, de manière à ce que (14,4) représente effectivement le flux constant Q^i . La pression macroscopique (définie à une constante près) est une fonction linéaire. Si $\partial_j P$ désigne le gradient constant, nous prendrons

$$(15,1) \quad P(x) = x^j \partial_j P$$

Au niveau granulométrique, $p(x)$ ne peut évidemment pas être stationnaire, puisque son espérance n'est pas constante. En ce qui concerne le gradient $\partial_j p$, il apparaît une petite difficulté, déjà signalée dans le paragraphe précédent. Comme $p = \omega p$ est nulle dans les grains, le gradient

$$\partial_j p = \omega \partial_j p + p \partial_j \omega$$

ne peut pas être supposé stationnaire, puisque son expression contient le produit de p par une mesure de Dirac $\partial_j \omega$. Nous admettrons que p peut se mettre sous la forme :

$$(15,2) \quad p(x) = \omega x^j \partial_j P + \omega \lambda$$

$\omega \lambda$ étant une fonction aléatoire stationnaire nulle dans les grains et d'espérance nulle. Cette hypothèse (15,2) est manifestement compatible avec (14,5) et l'expression (15,1) de la pression macroscopique.

Cette petite difficulté disparaît, d'ailleurs, lorsque l'on considère le produit scalaire $v^i \partial_i p$ de la vitesse et du gradient. La vitesse v^i étant nulle dans les grains et sur la surface de séparation, on a $v^i \partial_i \omega = 0$, et l'expression $v^i \partial_i p$, qui possède une signification énergétique que nous examinerons plus loin, est une fonction aléatoire stationnaire définie sans ambiguïté.

Nous appellerons *solution stationnaire* du système de Navier une solution possédant les caractères envisagés ci-dessus : v^i fonction aléatoire stationnaire, et $p(x)$ de la forme (15,2). L'existence de telles solutions se conçoit assez bien d'un point de vue physique. D'un point de vue purement mathématique, cependant, une discussion assez délicate serait nécessaire. L'existence et l'unicité de la solution du système de Navier est assurée, en effet, lorsque l'on se donne des conditions aux limites sous la forme classique. Nous admettrons sans démonstration que l'existence d'une solution est encore assurée lorsque les conditions aux limites classiques sont remplacées

par les deux conditions suivantes :

1° $p(x)$ et $\nu^i(x)$ constituent une solution stationnaire (au sens défini ci-dessus).

2° L'espérance conditionnelle $\frac{1}{E(\omega)} E[\partial_j(\omega p)]$ est égale à un vecteur constant de composantes covariantes $\partial_j P$ données d'avance.

Nous admettrons également l'unicité de la solution soumise aux deux conditions précédentes. (Cette unicité ne signifie pas nécessairement que $\nu^i(x)$ et $p(x)$ s'expriment à l'aide de fonctionnelles déterminées de la réalisation de $\omega(x)$, bien qu'il en soit peut-être effectivement ainsi. Elle implique seulement que la loi spatiale des fonctions aléatoires $p(x)$ et $\nu^i(x)$ est déterminée de manière unique lorsque l'on se donne $\partial_j P$ et la loi spatiale de ω .) Autrement dit, nous admettons qu'il existe toujours une solution stationnaire correspondant à un gradient macroscopique constant $\partial_j P$ donné d'avance, et que la loi spatiale de cette solution est déterminée d'une manière unique.

Système de solutions privilégiées. — L'espace ayant n dimensions, on peut trouver alors n solutions stationnaires distinctes $p^l(x)$, $\nu^{il}(x)$, indexées par un indice l variant de 1 à n , vérifiant le système de Navier, et telles que les espérances conditionnelles

$$(15,3) \quad \frac{1}{E(\omega)} E[\partial_j(\omega p^l)] = \partial_j P^l$$

coïncident, pour chaque valeur de l , avec les composantes du $l^{\text{ème}}$ vecteur colonne d'une matrice $\partial_j P^l$ donnée d'avance et de déterminant non nul. L'ensemble de ces n solutions constitue ce que nous appellerons un système de solutions privilégiées.

Toute combinaison linéaire des solutions privilégiées, de la forme,

$$(15,4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \nu^i = \varpi_l \nu^{il} \\ \partial_j p = \varpi_l \partial_j p^l \end{array} \right.$$

avec des coefficients ϖ_l constants, est elle-même une solution stationnaire, à cause de la linéarité des équations de Navier. Elle correspond, selon (14,5) et (14,6) à un écoulement macroscopiquement uniforme caractérisé par le flux et le gradient constants :

$$(15,5) \quad \left\{ \begin{array}{l} Q^i = \varpi_l Q^{il} \\ \partial_j P = \varpi_l \partial_j P^l \end{array} \right.$$

$Q^{il} = E(\omega \nu^{il})$ représente, évidemment, le flux macroscopique associé à la solution privilégiée d'indice l . Et, inversement, tout écoulement macroscopiquement uniforme est de la forme (15,4), à cause de l'unicité de la solution du système de Navier assujettie aux conditions 1 et 2 posées ci-dessus.

Invariance tensorielle. — Un arbitraire assez large subsiste sur le choix d'un système de solutions privilégiées. En effet, toute combinaison linéaire de solutions stationnaires du système de Navier étant elle-même une solution stationnaire, il est possible d'effectuer, sur l'indice l des solutions privilégiées, une substitution linéaire quelconque. Ainsi, cet indice l ne présente au départ aucun caractère d'invariance tensorielle. Toutefois, une fois choisie la matrice des $\partial_j P^l$ qui figurent en (15,3), le système des ρ^{il} , $\partial_j p^l$ est parfaitement déterminé. Si nous convenons de choisir pour les $\partial_j p^l$ la matrice des composantes mixtes d'un tenseur donné, ρ^{il} , $\partial_j p^l$ et $Q^{il} = E(\omega \rho^{il})$ prennent, elles aussi, le caractère tensoriel.

En effet, si les π_l sont les composantes covariantes d'un vecteur constant quelconque, les quantités définies en (15,4) représentent les composantes de la vitesse et du gradient de l'écoulement unique caractérisé par son gradient macroscopique constant $\pi_l \partial_j P^l$, qui est un vecteur bien défini. Par suite $\pi_l \rho^{il}$ et $\pi_l \partial_j p^l$ représentent des vecteurs, et ρ^{il} et $\partial_j p^l$ sont les composantes de deux tenseurs.

En particulier, il sera souvent commode de choisir, pour $\partial_j P^l$, le tenseur δ_j^l de Kronecker ($\delta_j^l = 0$ si $l \neq j$, $= 1$ si $l = j$).

$$(15,6) \quad \partial_j P^l = \delta_j^l$$

Avec ce choix, (conventionnel) du système privilégié, tout écoulement macroscopiquement uniforme peut être mis sous la forme (15,4), avec des constantes π_l vérifiant :

$$\pi_j = \frac{1}{E(\omega)} E[\partial_j(\omega p)] = \partial_j P$$

Autrement dit, les constantes π_l ne sont autres, dans ce cas, que les composantes covariantes du gradient macroscopique.

Loi de Darcy. — Il résulte immédiatement de ce qui précède que les écoulements macroscopiques uniformes obéissent à la loi de Darcy. Il suffit, pour le voir d'éliminer les π_l entre les relations (15,5). En particulier, adoptons, ce qui est toujours loisible, le système privilégié dans lequel les composantes du gradient macroscopique $\partial_j P^l$ s'identifient aux composantes δ_j^l ($= 0$ si $l \neq j$, $= 1$ si $l = j$) du tenseur de Kronecker. La deuxième relation (15,5), comme nous venons de le voir, se réduit à :

$$(15,7) \quad \partial_j P = \pi_j$$

La première relation (15,5) conduit alors à la loi de Darcy. Posant, en effet,

$$(15,8) \quad K^{ij} = -\mu Q^{ij}$$

cette relation, compte tenu de (15,7) donne bien :

$$Q^i = -\frac{1}{\mu} K^{ij} \partial_j P$$

Par la manière même dont il a été formé, ce tenseur K^{ij} des perméabilités ne dépend pas des caractéristiques du fluide, mais seulement de celles du milieu poreux. En effet, pour un fluide de viscosité μ' différente, les tenseurs $\partial_j p^l$ et $\frac{\mu}{\mu'} \varphi^{il}$ représentent le système des solutions privilégiées du système de Navier relatif à la même matrice $\partial_j P^l$. Les nouveaux flux macroscopiques sont donc représentés par les $\frac{\mu}{\mu'} Q^i$, et la relation (15,8) conduit bien au même tenseur K^{ij} .

Examinons, maintenant, le cas des *écoulements quasi uniformes*, c'est-à-dire des écoulements localement uniformes au niveau macroscopique, tels qu'ils ont été définis au paragraphe précédent. Le gradient et la vitesse d'un écoulement de ce type peuvent encore se mettre sous la forme (15,4), à condition de remplacer les constantes π_l par des fonctions $\pi_l(x)$ variant très lentement dans l'espace à l'échelle de la granulométrie. En effet, les dérivées des $\pi_l(x)$ sont alors négligeables, vis-à-vis des dérivées correspondantes des solutions privilégiées, de sorte que ces combinaisons linéaires à coefficients lentement variables vérifient encore les équations (14,2) de l'écoulement. En passant aux espérances mathématiques, on obtient ensuite le gradient et le flux (variables) de l'écoulement macroscopique sous la forme :

$$\begin{cases} Q^i(x) = \pi_l(x) Q^{il} \\ \partial_j P(x) = \pi_l(x) \partial_j P^l \end{cases}$$

et l'élimination des $\pi_l(x)$ conduit à nouveau à la loi de Darcy, avec les mêmes perméabilités K^{ij} que dans le cas des écoulements uniformes.

Naturellement, les fonctions $\pi_l(x)$ ne peuvent pas être quelconques. Avec le choix particulier $\partial_j P^l = \delta_j^l$ des solutions privilégiées, la relation (15,7) montre que les $\pi_j(x)$ doivent être les composantes d'un gradient, et de plus $Q^i(x)$ doit vérifier la relation de conservation. Autrement dit, on obtient le système habituel :

$$\begin{cases} Q^i = -\frac{1}{\mu} K^{ij} \partial_j P \\ \partial_i Q^i = 0 \end{cases}$$

On voit ainsi que, si les écoulements quasi-uniformes vérifient le système de Darcy, c'est pour la simple raison que de tels écoulements se présentent comme des combinaisons linéaires à coefficients lentement variables des n solutions privilégiées. La loi de Darcy n'est donc pas une conséquence des équations de Navier. Elle résulte seulement de la linéarité de ces équations, et de la condition a priori, indiquée au paragraphe 14, selon laquelle seuls peuvent être observables, au niveau macroscopique, les écoulements localement uniformes à ce niveau.

REMARQUE. — Le résultat obtenu a un caractère très formel. Nous avons, en effet, rendu compte de la forme de la loi de Darcy, mais nous sommes incapables de calculer effectivement la perméabilité à partir de

la loi spatiale de $\omega(x)$: il faudrait pour cela que nous puissions former explicitement la loi spatiale des solutions privilégiées à partir de celle de $\omega(x)$, et les difficultés d'une telle entreprise semblent presque insurmontables. Pour atténuer un peu cette conclusion pessimiste, nous dégagerons, dans le prochain paragraphe, la signification énergétique de la loi de Darcy, et nous montrerons que les propriétés classiques du tenseur des perméabilités (symétrie $K^{ij} = K^{ji}$ et caractère défini positif) peuvent se déduire directement des équations de Navier. Auparavant, nous allons traiter un exemple simple, et un peu scolaire, pour lequel il est possible de rattacher explicitement la perméabilité à la loi spatiale.

Exemple: Milieu à canaux cylindriques disjoints. — Imaginons un milieu infini constitué par une masse imperméable perforée par des canaux, en forme de cylindres de révolution, admettant des orientations diverses et des rayons différents. On suppose que ces canaux cylindriques sont tous disjoints les uns des autres. Il n'est pas nécessaire de préciser davantage la manière dont ces canaux cylindriques sont implantés, pourvu qu'elle soit suffisamment uniforme. (On peut se représenter ce milieu sous la forme d'une pomme de terre perforée par des aiguilles à tricoter orientées dans tous les sens.) De la loi spatiale de ce milieu, nous extrayons les deux renseignements suivants, qui nous suffiront :

— la porosité $q = E(\omega)$, ou probabilité pour qu'un point donné x tombe dans les pores (dans un canal cylindrique);

— la loi de probabilité conditionnelle du rayon R et de la direction α du canal cylindrique unique auquel appartient un point x supposé implanté dans les pores. Nous admettrons, à seule fin de simplifier les notations, que cette loi conditionnelle possède une densité de probabilité $g(R, \alpha) dR d\alpha$ ($d\alpha$ est un élément d'angle solide centré sur la direction α , de cosinus directeurs α^i , de l'axe de ce cylindre).

Cette loi $g(R, \alpha)$, pour une direction α donnée, représente la granulométrie des cylindres de direction α . C'est une granulométrie *en mesure*. Pour obtenir une granulométrie en nombre, il conviendrait de pondérer la densité $g(R, \alpha)$ par un coefficient proportionnel à l'inverse de la surface πR^2 de la section du cylindre.

Évaluons la perméabilité. Dans un cylindre de révolution de rayon R et d'axe Ox_1 , on obtient facilement la solution permanente du système de Navier. La pression p est une fonction linéaire de la seule coordonnée x_1 : le gradient est un vecteur constant $\frac{dP}{dx_1}$ parallèle à Ox_1 . Les composantes v_2 et v_3 de la vitesse sont nulles, et la composante v_1 , qui ne dépend que des deux coordonnées x_2 et x_3 , a pour valeur :

$$v_1(x_2, x_3) = \frac{R^2}{4\mu} \frac{dP}{dx_1} \left[\frac{(x_2)^2}{R^2} + \frac{(x_3)^2}{R^2} - 1 \right]$$

Le débit unitaire (rapporté à la surface πR^2 de la section S du cylindre)

est donc :

$$q^1 = \frac{1}{\pi R^2} \iint_S v_1(x_2, x_3) dx_2 dx_3 = -\frac{R^2}{8\mu} \frac{dP}{dx_1}$$

Ainsi, ce canal cylindrique, envisagé isolément, obéit à une loi de Darcy de perméabilité $\frac{R^2}{8}$: plus exactement, on a pour ce cylindre un tenseur de perméabilité pour lequel la première perméabilité principale est $\frac{R^2}{8}$. les deux autres perméabilités principales étant nulles. Sous forme tensorielle, si le cylindre de rayon R est orienté dans la direction α^i , ce tenseur admet les composantes $\frac{1}{8} R^2 \alpha^i \alpha^j$. Le débit unitaire, dans ce cylindre, est représenté par le vecteur

$$(15,9) \quad q^i = -\frac{1}{8\mu} R^2 \alpha^i \alpha^j \partial_j P$$

Si nous considérons maintenant le milieu dans son ensemble, avec tous les canaux qui y sont implantés, et si nous le soumettons à un gradient macroscopique de pression $\partial_j P$ constant, un écoulement de ce type s'établit dans chaque canal. Le flux macroscopique constant Q^i s'obtient en multipliant la porosité q (probabilité pour que x soit dans les pores) par l'espérance conditionnelle de (15,9) prise dans l'hypothèse où x est dans les pores. On a ainsi :

$$Q^i = -\frac{q}{8\mu} E(R^2 \alpha^i \alpha^j) \partial_j P$$

Cette équation n'est pas autre chose que la loi de Darcy, avec l'expression suivante du tenseur K^{ij} des perméabilités :

$$(15,10) \quad K^{ij} = \frac{q}{8} E(R^2 \alpha^i \alpha^j) = \frac{q}{8} \int R^2 \alpha^i \alpha^j g(R, \alpha) dR d\alpha$$

La perméabilité K^{ij} se rattache directement à la *loi du premier point de contact*. Étant donné un point x des pores, considérons une famille de sphères centrées en x et de rayon croissant, et désignons par r et β^i le module et les cosinus directeurs du vecteur joignant x avec le premier point des grains rencontrés par les sphères. Calculons l'espérance conditionnelle $E(r^2 \beta^i \beta^j)$. Lorsque x appartient à un canal (R, α) , ce qui a lieu avec la probabilité $g(R, \alpha) dR d\alpha$, r et β^i sont indépendants. La direction β^i peut être, avec une égale probabilité, n'importe laquelle des directions perpendiculaires à α . Conditionnellement, donc, à R et α fixé, on a

$$E(\beta^i \beta^j) = \frac{1}{2} [g^{ij} - \alpha^i \alpha^j]$$

et on trouve facilement

$$E(r^2) = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R 2\pi(R-r)r^2 dr = \frac{1}{6} R^2$$

Pour R et α quelconques, on a donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} E(r^2 \beta^i \beta^j) = \frac{1}{12} [g^{ij} E(R^2) - E(R^2 \alpha^i \alpha^j)] \\ E(r^2) = \frac{1}{6} E(R^2) \end{array} \right.$$

Et la perméabilité se déduit de la loi du rayon vecteur (r, β^i) du premier point de contact par la formule :

$$(15,11) \quad K^{ij} = \frac{3}{4} q [g^{ij} E(r^2) - 2E(r^2 \beta^i \beta^j)]$$

Étant donné le caractère très simpliste de l'exemple traité, il n'y a guère d'espoir que le résultat obtenu puisse s'étendre à des cas plus généraux. La perméabilité doit dépendre des relations de connexité existant entre les pores, relations que l'on ne peut pas représenter à l'aide seulement de la porosité et de la loi du premier point de contact.

On sera peut-être aussi frappé par le fait que la perméabilité, telle qu'elle apparaît en (15,10) ou (15,11) n'est pas en relation directe avec la surface spécifique σ , contrairement à une croyance assez généralement admise. Calculons, en effet, σ , et, pour cela, cherchons, conformément à (5,7), la probabilité $-Q'_s(0) \delta r$ pour qu'un point x donné appartienne aux pores et soit le centre d'une petite sphère de rayon δr rencontrant les grains. Si x appartient à un canal (R, α) , ce qui a lieu avec la probabilité $qg(R, \alpha) dR d\alpha$, cette petite sphère rencontre la frontière de ce canal avec la probabilité $\frac{2\pi R}{\pi R^2} \delta r = \frac{2\delta r}{R}$. On en déduit :

$$\sigma = 2q \int \frac{1}{R} g(R, \alpha) dR d\alpha$$

La surface spécifique est liée au moment d'ordre -1 de la granulométrie en mesure des canaux (ou, si l'on préfère, au moment d'ordre $+1$ de la même granulométrie exprimée en nombre). La perméabilité, qui est liée au moment d'ordre $+2$ de la granulométrie en mesure, ne peut donc absolument pas se déduire de la surface spécifique.

L'analogie électrique. — Les conditions générales et formelles qui nous ont permis d'expliquer l'apparition de la loi de Darcy au niveau macroscopique, à partir de la seule linéarité des équations régissant l'écoulement au niveau granulométrique, conservent leur validité si l'on remplace l'équation de Navier par n'importe quelle autre équation linéaire. Elles expliquent, par exemple, l'apparition de la loi d'Ohm. Mais cette analogie ne s'étend pas jusqu'aux valeurs numériques des coefficients de proportionnalité. Par exemple, on peut remplir les pores d'un milieu poreux à l'aide d'une solution électrique de conductivité γ . Au niveau granulométrique, les

équations reliant le courant électrique J^i et le potentiel U sont linéaires :

$$(15,12) \quad \begin{cases} J_i = -\chi \partial_i U \\ \partial_i J^i = 0 \end{cases}$$

On en déduira que ce même milieu, envisagé au niveau macroscopique, se comporte comme s'il possédait une conductivité (en général tensorielle) χ^{ij} , et que les équations (15,12) se transportent au niveau macroscopique sous la forme :

$$(15,13) \quad \begin{cases} J^i = -\chi^{ij} \partial_j U \\ \partial_i J^i = 0 \end{cases}$$

Ce système possède bien la même structure que le système de Darcy. Mais, au niveau granulométrique, le système (15,12) n'est pas du tout équivalent aux équations de Navier. Les conditions aux limites, en particulier, sont très différentes. Le courant électrique J contourne les grains isolants, mais, à la surface d'un grain, on exige seulement que la composante normale J_n du grain s'annule, la composante tangentielle pouvant très bien différer de 0. Au contraire, les équations de Navier, qui sont d'un ordre plus élevé, sont soumises à des conditions aux limites plus sévères. C'est le vecteur vitesse lui-même, et non plus seulement sa composante normale, qui doit s'annuler à la surface de séparation. Les solutions de ces deux systèmes ne présenteront donc, tout au plus, qu'une ressemblance vague et lointaine. Les règles permettant de déduire de la loi spatiale de $\omega(x)$ les tenseurs macroscopiques χ^{ij} et K^{ij} , n'ont aucune chance de coïncider. On observera bien un vague rapport entre χ^{ij} et K^{ij} , dans la mesure où ces deux tenseurs reflètent grossièrement les mêmes propriétés d'anisotropie du milieu poreux, mais on ne peut rien espérer de plus. *Les règles de l'analogie électrique ne permettent donc pas de retrouver la perméabilité macroscopique.*

Vérifions qu'il en est bien ainsi dans l'exemple très simple du milieu à canalicules cylindriques disjoints. Les canaux étant remplis du fluide de conductivité χ , imposons un potentiel U de gradient constant $\partial_i U$. Dans un canal de direction α^i , la loi d'Ohm nous donne le courant électrique sous la forme :

$$J^i = -\chi \alpha^i \alpha^j \partial_j U$$

On note que le vecteur courant (rapporté à la section du canal) est indépendant du rayon R du cylindre de direction α^i . On en déduit, comme ci-dessus, l'expression de la conductivité macroscopique qui est :

$$(15,14) \quad \chi^{ij} = q \chi E(\alpha^i \alpha^j)$$

Elle ne dépend que de la porosité q et de la manière dont se distribuent les directions α des canaux. Elle est indépendante de la granulométrie, c'est-à-dire de la distribution des rayons R de ces mêmes canaux. On ne peut donc absolument pas déduire K^{ij} de χ^{ij} .

En particulier, supposons que le milieu soit isotrope. R est indépendant de α et $E(\alpha^i\alpha^j) = \frac{1}{3}g^{ij}$. Le milieu possède la conductivité macroscopique scalaire $\frac{1}{3}q\chi$, qui ne dépend que de la porosité. La perméabilité macroscopique scalaire est $\frac{1}{24}qE(R^2)$. Elle dépend de manière irréductible du moment d'ordre 2 de la granulométrie.

REMARQUE. — L'analogie électrique, inutilisable lorsqu'il s'agit de passer du niveau granulométrique au niveau macroscopique, peut s'appliquer au contraire au problème de la composition des perméabilités, que nous allons aborder dans le chapitre VI. Il s'agit alors, en effet, de passer d'un premier système de Darcy à perméabilités variables — analogues à (15,12), pourvu seulement que la conductivité χ soit variable dans l'espace — à un deuxième système de Darcy, caractérisé par des perméabilités constantes.

16. — Signification énergétique des perméabilités.

Partant de l'expression classique de la densité de puissance consommée par les forces de viscosité, nous allons en déduire l'existence d'un tenseur W^l , de densité de puissance, symétrique et défini positif, et montrer que ce tenseur se relie très simplement à la perméabilité du milieu, qui sera donc elle-même symétrique et définie positive.

La densité de puissance consommée. — En mécanique des fluides, le tenseur des déformations e_{ij} se définit classiquement, sous forme covariante, en symétrisant le gradient des vitesses :

$$(16,1) \quad e_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i v_j + \partial_j v_i)$$

et l'on sait que la densité W de puissance consommée par les forces de viscosité admet l'expression

$$(16,2) \quad W = 2\mu e^{ij}e_{ij} = 2\mu e^{ij}\partial_i v_j$$

Dans le problème étudié ici, ces relations s'appliquent au niveau granulométrique et en tout point x appartenant aux pores. D'autre part, on peut prendre, conventionnellement, $v^i(x)$ et $p(x)$ identiquement nuls à l'intérieur des grains. Comme les vitesses v^i s'annulent à la surface de séparation des grains et des pores, en raison des conditions aux limites imposées aux équations de Navier, les dérivées $\partial_i v_j$ sont définissables dans l'espace entier, et il en est de même du tenseur de déformation e_{ij} et de la densité de puissance W : ces expressions sont d'ailleurs identiquement nulles à l'intérieur des grains. Il en résulte que l'on peut prendre l'espérance mathématique des deux membres de (16,2), et que l'expres-

sion $E(W)$ ainsi obtenue va représenter la densité de puissance consommée évaluée au niveau macroscopique. On obtient ainsi :

$$E(W) = 2\mu E(e^{ij}\partial_i v_j) = 2\mu E[\partial_i(e^{ij}v_j)] - 2\mu E(v_j\partial_i e^{ij})$$

Comme les v_j sont supposés stationnaires, il en est de même des e_{ij} et par suite :

$$E[\partial_i(e^{ij}v_j)] = 0$$

D'autre part, compte tenu de la relation de continuité $\partial_i v^i = 0$, on a d'après (16,1) :

$$\partial_i e^{ij} = \frac{1}{2} \Delta v^j$$

Δ désignant le laplacien. Finalement, il vient :

$$E(W) = -\mu E(v_j \Delta v^j)$$

Pour évaluer le deuxième membre de cette relation, nous pouvons utiliser l'équation (14,8), puisque celle-ci (contrairement à l'équation de Navier elle-même) est valable dans l'espace entier. Nous obtenons ainsi la relation :

$$(16,3) \quad E(W) = -E(v^i \partial_i p)$$

Ainsi la densité de puissance consommée, évaluée au niveau macroscopique coïncide avec l'espérance du produit scalaire de la vitesse et du gradient, pris au niveau granulométrique. Nous allons montrer qu'en fait cette densité de puissance s'identifie au produit scalaire des mêmes grandeurs évaluées au niveau macroscopique.

En effet, si p et v^i constituent une solution stationnaire, au sens du paragraphe 15, la pression p est de la forme déjà écrite en (15,2). Désignant par $\partial_j P$ le gradient macroscopique constant, nous avons donc :

$$(16,4) \quad p = \omega[x^j \partial_j P + \lambda]$$

où $(\omega\lambda)$ est une fonction aléatoire stationnaire. Évaluons alors l'expression :

$$v^i \partial_i p = \partial_i (v^i p)$$

Comme $\omega v^i = v^i$ (puisque v^i est nul dans les grains) et compte tenu de $\partial_i v^i = 0$, on obtient :

$$v^i \partial_i p = \partial_j P \partial_i (v^i x^j) + \partial_i (\lambda v^i) = v^i \partial_i P + \partial_i (\lambda v^i)$$

Mais λv^i est stationnaire, de sorte que l'espérance de son gradient est nulle. Passant aux espérances, il vient donc :

$$(16,5) \quad E(v^i \partial_i p) = E(v^i) \partial_i P$$

D'après (14,4), $E(v^i)$ se rattache immédiatement au flux macroscopique Q^i , de sorte que la densité de puissance $E(W)$ s'exprime aussi

bien à l'aide du produit scalaire du flux et du gradient macroscopiques constants. La relation (16,3) se complète donc ainsi :

$$(16,6) \quad \boxed{E(W) = - E(\nu^i \partial_i p) = - Q^i \partial_i P}$$

Cette relation énergétique fondamentale apparaîtra également dans le chapitre VI. On remarque que $E(\nu^i \partial_i p)$ représente l'énergie consommée, localement, par les forces de viscosité, tandis que $Q^i \partial_i P$ représente l'énergie que l'on doit fournir de l'extérieur pour entretenir l'écoulement permanent. La relation (16,6) exprime donc un bilan énergétique.

Le tenseur densité de puissance. — Donnons-nous, maintenant, un système de solutions privilégiées $\nu^i, \partial_j p^l$ correspondant au flux et aux gradients macroscopiques constants Q^i et $\partial_j P^l$, et soit $e^{ij,l}$ le tenseur de déformation associé à la solution privilégiée d'indice l . Toute solution stationnaire se présente comme une combinaison linéaire de type (15,4) et son tenseur de déformation est de la forme :

$$e^{ij} = \varpi_l e^{ij,l}$$

D'après (16,2), la densité de puissance consommée W est donc de la forme

$$(16,7) \quad \begin{cases} W = \varpi_l \varpi_s W^{ls} \\ W^{ls} = 2\mu e^{ij,l} e_{ij}^s \end{cases}$$

Nous voyons ainsi apparaître un tenseur densité de puissance consommée, dont les composantes W^{ls} sont manifestement *symétriques* relativement aux indices l et s . A partir de l'expression (16,7) de W^{ls} , il suffit de reprendre point par point la chaîne de raisonnements qui nous a permis au paragraphe précédent de passer de (16,2) aux relations (16,6) pour obtenir de la même manière :

$$(16,8) \quad E(W^{ls}) = - E(\nu^i \partial_i p^s) = - Q^i \partial_i P^s$$

Le tenseur W^{ls} est d'ailleurs non seulement symétrique, mais également *défini positif*. En effet, la densité d'énergie consommée par les forces de viscosité est toujours positive, de sorte que la forme quadratique $\varpi_l \varpi_s W^{ls}$ est positive quelles que soient les constantes arbitraires ϖ_l . L'espérance $E(W^{ls})$ possède évidemment ces mêmes propriétés, ainsi par suite que les tenseurs qui figurent aux deuxième et troisième membres de (16,8).

Relation entre perméabilité et densité de puissance. — Au niveau macroscopique les solutions privilégiées vérifient la loi de Darcy, c'est-à-dire les relations

$$Q^i = - \frac{1}{\mu} K^{ij} \partial_j P^l$$

Portons cette expression de Q^i dans la deuxième relation (16,8).

Nous obtenons

$$(16,9) \quad E(W^{ls}) = \frac{1}{\mu} K^{ij} \partial_j P^l \partial_i P^s$$

Ainsi le tenseur des perméabilités se déduit directement de l'espérance du tenseur densité de puissance. En particulier, si les solutions privilégiées ont été choisies de telle manière que les $\partial_j P^l$ coïncident avec les composantes δ_j^l du tenseur de Kronecker, la relation (16,9) se réduit simplement à :

$$(16,10) \quad \boxed{K^{ls} = \mu E(W^{ls})}$$

Au paragraphe précédent, nous avons montré que le tenseur $E(W^{ls})$ est nécessairement *symétrique et défini positif* : Le tenseur K^{ls} des perméabilités possède donc les mêmes propriétés.

CHAPITRE VI

COMPOSITION DES PERMÉABILITÉS

SOMMAIRE

Paragraphe 17. — Exposition du problème de la composition des perméabilités, et présentation des résultats essentiels. Influence du nombre N des dimensions de l'espace. Recherche de règles de pondération.

Paragraphe 18. — Le passage à la perméabilité macroscopique constante K s'effectue comme au chapitre v. Tout écoulement macroscopiquement uniforme est combinaison linéaire d'un système de solutions privilégiées, d'où résulte une loi de Darcy qui s'étend aux écoulements quasi uniformes. Lorsque le tenseur des perméabilités ponctuelles k est conservatif, la règle de pondération arithmétique $K = E(k)$ s'applique. Si k est l'inverse d'un tenseur gradient, on a la règle de pondération harmonique $K^{-1} = E(k^{-1})$. Dans le cas général, k se met sous la forme $k = CA$ du produit de deux tenseurs stationnaires : l'un, C , est conservatif, l'autre, A , est l'inverse d'un tenseur gradient. La loi de composition s'écrit $K = E(C)[E(A^{-1})]^{-1}$. Exemples divers.

Paragraphe 19. — La densité de puissance consommée W est égale au produit scalaire $q^i \partial_i p$ du flux et du gradient. Son espérance $E(W) = -E(q^i \partial_i p) = -Q^i \partial_i P$ s'évalue indifféremment au niveau ponctuel ou macroscopique. Unicité de l'écoulement caractérisé par un gradient macroscopique donné. Tenseur densité de puissance W^{ls} et relation $K^{ls} = \mu E(W^{ls})$. On en déduit les inégalités matricielles $[E(k^{-1})]^{-1} \leq k \leq E(k)$: les perméabilités se composent toujours selon un mode intermédiaire entre les pondérations harmonique et arithmétique.

Paragraphe 20. — Dans l'espace à 2 dimensions, une rotation de 90° échange gradients et flux conservatifs. On en déduit que la règle de pondération géométrique s'applique aux écoulements plans lorsque $\frac{k}{E(k)}$ et $\frac{h}{E(h)}$ ont une même loi spatiale invariante par rotation. Cette condition est réalisée dans les milieux isotropes à perméabilités lognormales.

Paragraphe 21. — Méthode d'approximation de Schwydlar : on pose $k = k_0(1 + \varepsilon\gamma)$, et on évalue flux et gradient au 2^e ordre en ε . On met en évidence un tenseur S de Schwydlar vérifiant $0 \leq S \leq E(\gamma^2)$ tel que $K = k_0(1 - \varepsilon^2 S)$. Dans le cas subisotrope, on a $S = \frac{1}{N} E(\gamma^2)$, N nombre des dimensions de l'espace, et on en déduit, au 2^e ordre en ε :

$$K = \frac{N-1}{N} E(k) + \frac{1}{N} [E(k^{-1})]^{-1}$$

La perméabilité macroscopique est d'autant plus proche de sa limite supérieure $E(k)$ que l'espace comporte plus de dimensions.

17. — Généralités sur la composition des perméabilités.

Dans ce chapitre et le suivant, nous nous proposons d'étudier le dernier de ces changements d'échelle dont nous avons fait mention dans notre introduction. Après avoir étudié la genèse de la perméabilité d'un milieu poreux homogène, nous considérons maintenant le niveau auquel cette perméabilité est apparue comme un niveau ponctuel, et la perméabilité elle-même comme une propriété ponctuelle du milieu. Passant alors à une échelle d'observation encore plus élevée, nous constatons que le milieu ne peut plus être considéré comme homogène. Les perméabilités ponctuelles apparaissent maintenant comme des fonctions $k^{ij}(x)$, extrêmement variables, du point x de l'espace. Nous dirons qu'elles sont *régionalisées*. Cependant, cette hétérogénéité, observée au niveau ponctuel, dissimule souvent une homogénéité, de nature statistique, qui se manifeste à l'échelle supérieure. Pour énoncer cette homogénéité en grand dans un langage mathématique précis, nous admettrons que les perméabilités régionalisées $k^{ij}(x)$ peuvent être considérées comme *une réalisation d'une fonction aléatoire (tensorielle) ergodique et stationnaire*. La signification d'une hypothèse de ce genre a déjà été examinée dans le paragraphe 14, et il n'y a pas lieu d'y revenir ici. Dans ces conditions, on doit tout d'abord se demander s'il y a genèse d'une nouvelle loi de Darcy, et si les propriétés hydrodynamiques de ce milieu, envisagées à l'échelle supérieure, peuvent être complètement caractérisées par une perméabilité macroscopique constante K . En ce qui concerne les écoulements non uniformes, que nous étudierons dans le chapitre VII, la réponse à cette première question sera négative. On ne s'en étonnera pas, si l'on remarque que l'opération de changement d'échelle et le passage au niveau supérieur ne sont pas réellement effectués par de tels écoulements. Nous nous limiterons dans ce chapitre au cas des écoulements uniformes ou quasi uniformes (c'est-à-dire pouvant être considérés comme uniformes pour une échelle intermédiaire correspondant à des volumes de dimensions, peut-être petites au niveau macroscopique, mais suffisamment grandes au niveau ponctuel pour que les propriétés du milieu y apparaissent déjà comme homogénéisées par effet d'ergodicité). Vis-à-vis de ces écoulements, dont les lignes de courant se déploient en vastes nappes, il existe effectivement une perméabilité macroscopique constante K^{ij} . Nous le montrons, dans le paragraphe 18, au moyen de raisonnements étroitement apparentés à ceux qui ont été exposés dans le chapitre V.

On doit ensuite se demander de quelle manière les perméabilités ponctuelles régionalisées k vont se composer pour engendrer cette perméabilité macroscopique constante K , et rechercher s'il existe des règles suffisamment simples permettant le calcul effectif de K à partir de la loi spatiale des k . Dans le cas particulier d'un milieu stratifié, on sait que les règles de pondération arithmétique $K = E(k)$ et harmonique $K^{-1} = E(k^{-1})$

s'appliquent, respectivement, aux écoulements parallèles et perpendiculaires aux strates. Dans le cas général, on applique souvent une règle de pondération géométrique

$$(17,1) \quad \log K = E [\log k]$$

qui peut donner des ordres de grandeur raisonnable. Cette règle empirique, cependant, manque de justification théorique. On peut tout au plus remarquer que la moyenne géométrique est toujours comprise entre les moyennes harmonique et arithmétique, qui constituent les deux pôles extrêmes dans le cas des milieux stratifiés, et soupçonner par suite une proposition générale qui s'énonce ainsi: dans tous les cas, que le milieu soit stratifié ou non, *la perméabilité macroscopique K est toujours comprise entre les moyennes harmonique et arithmétique*. Ce résultat, qui s'écrit sous forme d'inégalités entre matrices :

$$(17,2) \quad [E(k^{-1})]^{-1} \leq K \leq E(k)$$

sera démontré, dans le paragraphe 19, grâce à des considérations énergétiques, et sera ensuite généralisé, dans le chapitre VII, au cas des écoulements non uniformes.

Cependant, les inégalités (17,2) ne nous donnent pas de valeur numérique précise, et ne nous indiquent même pas si K doit se trouver plutôt plus proche de l'une ou de l'autre de ces deux limites extrêmes. La règle empirique (17,1) suggère que l'on doit se trouver plutôt à mi-chemin. Mais une analyse plus approfondie nous montrera que la règle (17,1) ne peut pas, en fait, prétendre à une valeur universelle. Il est certain, en effet, que *le nombre N des dimensions de l'espace* doit exercer une grande influence sur la manière dont se composent les perméabilités ponctuelles. Toutes choses égales d'ailleurs, les filets de courant ont d'autant plus de facilité pour contourner les zones de mauvaises perméabilité que l'espace présente davantage de dimensions. Pour $N = 1$, il n'existe aucune possibilité de contournement, et K est toujours égal à la moyenne harmonique. La perméabilité résultante doit s'améliorer au fur et à mesure que N augmente et se rapprocher de la moyenne arithmétique. De fait, à l'aide d'une méthode d'approximation empruntée à Schwydlér, nous montrerons que K se situe à mi-chemin de ces deux limites pour $N = 2$, au deux tiers de ce chemin pour $N = 3$, et se rapprocherait asymptotiquement de la moyenne arithmétique s'il nous était permis d'envisager des espaces dont le nombre de dimensions augmenterait indéfiniment (paragraphe 21).

En particulier, la règle (17,1) ne peut être valable que pour $N = 2$, c'est-à-dire dans le cas d'écoulements plans. Nous démontrerons d'ailleurs, d'une manière rigoureuse, qu'elle s'applique effectivement dans le cas particulier intéressant d'un milieu à deux dimensions, macroscopiquement isotrope et à perméabilités lognormales (paragraphe 20).

Ce qu'il y a de plus remarquable, dans une règle du type (17,1), et qui, cependant, risque de passer inaperçu, tant cela semble aller de soi, ce n'est

pas l'apparition de la moyenne géométrique, mais le fait que l'on admet implicitement que K ne dépend que de la loi de probabilité des valeurs prises par les perméabilités ponctuelles *en un même point d'appui*. Convenons de dire qu'il existe *une règle de pondération* lorsqu'il en est ainsi, c'est-à-dire lorsque K ne dépend effectivement que de la loi des valeurs prises par les $k^{ij}(x)$ *en un même point d'appui* x . Dans le cas général, on ne doit pas s'attendre à ce qu'il existe une telle règle de pondération. L'étude de la composition des perméabilités montre, en effet, que K dépend de la loi spatiale de k , c'est-à-dire de la loi des valeurs prises simultanément *en tous les points de l'espace*. Toutefois, on voit facilement, à l'aide de considérations de similitude élémentaires, que K doit rester invariante si l'on transforme la loi spatiale des k par une homothétie. Or, parmi les fonctionnelles de la loi spatiale qui restent invariantes par homothétie, figure une classe particulièrement simple, celle précisément des fonctionnelles qui ne dépendent que de la loi de probabilité des valeurs prises par les k^{ij} en un même point d'appui. On peut donc espérer trouver au moins des cas particuliers où il existera effectivement une règle de pondération. Nous en rencontrerons plusieurs exemples, les uns très particuliers ou assez artificiels ⁽¹⁾, d'autres beaucoup plus intéressants, comme le cas du milieu macroscopiquement isotrope à 2 dimensions et à perméabilités lognormales, pour lequel la règle de pondération géométrique s'applique en toute rigueur. Les résultats de la méthode d'approximation de Schwydlar, d'autre part, nous inciteront à penser qu'il existe probablement encore une règle de pondération dans des cas plus généraux par exemple dans le cas d'un milieu macroscopiquement isotrope (tel que la loi spatiale des perméabilités soit invariante par rotation).

Les différents points que nous venons de mentionner, et qui feront l'objet de ce chapitre ne concernent en fait que les écoulements macroscopiquement uniformes ou quasi uniformes (c'est-à-dire pouvant être assimilés à des écoulements uniformes à l'échelle de volumes de dimensions assez grandes pour que le milieu y apparaisse comme homogénéisé par effet d'ergodicité). Il existe cependant une classe d'écoulements très importants pour les applications, à savoir les écoulements radiaux, qui ne peuvent absolument pas être considérés comme quasi uniformes, et auxquels par suite les résultats précédents ne sont pas applicables. Dans le chapitre VII, donc, nous entreprendrons directement l'étude de ces écoulements non uniformes : après avoir établi un théorème fondamental généralisant les inégalités (17,2), nous établirons les équations de l'approximation de Schwydlar et nous les appliquerons au cas des écoulements radiaux. Nous généraliserons ainsi un certain nombre de résultats établis par Schwydlar. La conclusion, un peu décevante, sera que la perméabilité macroscopique constante K des écoulements uniformes ne peut pas être utilisée pour représenter des écoulements non uniformes.

(1) Cas d'une perméabilité conservative, avec règle de pondération arithmétique; Cas où la perméabilité est l'inverse d'un tenseur gradient, avec règle de pondération harmonique; Cas des milieux stratifiés, etc...

18. — Genèse de la perméabilité macroscopique constante.

Dans tout ce qui suit, nous étudions un milieu, supposé infini, dont la perméabilité ponctuelle régionalisée (variable dans l'espace) $k^{ij}(x)$ peut être considérée comme une réalisation d'une fonction aléatoire (tensorielle) ergodique et stationnaire. Nous introduisons aussi l'inverse $h_{ij}(x)$ de k^{ij} , c'est-à-dire le tenseur des *résistivités* du milieu. Au niveau macroscopique, les tenseurs (constants) représentant la perméabilité et la résistivité seront notés K^{ij} et H_{ij} . D'une manière générale, nous utiliserons le même système de notations tensorielles qu'au chapitre V. Un écoulement permanent est défini par un gradient de pression (ou, plus généralement, de charge) $\partial_j p(x)$ et un vecteur flux $q^i(x)$. Le produit scalaire $q^i \beta_i$ représente le volume de fluide traversant, pendant un temps unité, un élément de surface unité placé au point x et dont la normale admet les cosinus directeurs β_i . Ce flux et ce gradient vérifient le système de Darcy :

$$(18,1) \quad \begin{cases} q^i = -\frac{1}{\mu} k^{ij} \partial_j p \\ \partial_i q^i = 0 \end{cases}$$

étant bien entendu que $k^{ij}(x)$ est une fonction de x . Au flux $q^i(x)$ et au gradient $\partial_j p(x)$, définis au niveau ponctuel, correspondent un flux Q^i et un gradient $\partial_j P$ macroscopiques, qui se déduisent des précédents, à l'aide de certaines moyennes spatiales effectuées dans des volumes assez grands pour que les propriétés du milieu y apparaissent comme homogénéisées. L'hypothèse d'ergodicité permet d'éliminer l'arbitraire qui préside à la définition de ces moyennes spatiales, en les remplaçant par des espérances mathématiques, dont l'expression peut s'explicitier à l'aide de la seule loi spatiale des perméabilités $k^{ij}(x)$.

En effet, lorsque les fonctions $k^{ij}(x)$ sont connues explicitement, le système de Darcy admet une solution et une seule pour des conditions aux limites données. Ainsi, le flux $q^i(x)$ et le gradient $\partial_j p(x)$ apparaissent comme des fonctionnelles — d'ailleurs assez complexes — de la fonction tensorielle $k^{ij}(x)$, et des conditions aux limites. Par l'intermédiaire de ces mêmes fonctionnelles, flux et gradient deviennent des fonctions aléatoires lorsque $k^{ij}(x)$ est lui-même considéré comme une fonction aléatoire tensorielle. De plus — c'est le point capital — les lois de probabilités des fonctions aléatoires $q^i(x)$ et $\partial_j p(x)$ ne dépendent que de la loi spatiale des perméabilités $k^{ij}(x)$ (et des conditions aux limites). En particulier, les espérances mathématiques $E(q^i)$ et $E(\partial_j p)$ sont parfaitement définies.

Parmi les solutions du système (18,1), nous nous intéressons tout d'abord à celles pour lesquelles le flux $q^i(x)$ et le gradient $\partial_j p(x)$ sont des *fonctions aléatoires stationnaires*. Nous montrerons plus loin que leur connaissance suffit pour déterminer les perméabilités macroscopiques K^{ij} . De telles solutions décrivent des *écoulements uniformes au niveau macroscopique*. En effet, flux Q^i et gradient $\partial_j P$ macroscopiques se déduisent de $q^i(x)$

et $\partial_j p(x)$ à l'aide de certaines moyennes spatiales qui, grâce à l'hypothèse ergodique, peuvent être remplacées par les espérances mathématiques correspondantes : soit

$$(18,2) \quad \begin{cases} Q^i = E(q^i) \\ \partial_j P = E(\partial_j p) \end{cases}$$

Lorsque q^i et $\partial_j p$ sont stationnaires, leurs espérances sont des *constantes*, et l'écoulement est caractérisé par un flux et un gradient *macroscopiques* uniformes.

Système de solutions privilégiées. — L'existence de telles solutions stationnaires se conçoit très bien, d'un point de vue physique. D'un point de vue purement mathématique, cependant, une discussion, assez délicate, serait nécessaire. L'existence et l'unicité de la solution du système (18,1) est assurée, en effet, lorsqu'on se donne les conditions aux limites sous la forme usuelle. Nous admettrons sans démonstration que l'existence d'une solution, sous forme de fonctions aléatoires $q^i(x)$ et $\partial_j p(x)$, est encore assurée lorsque les conditions aux limites classiques sont remplacées par les deux conditions suivantes :

1) $q^i(x)$ et $\partial_j p(x)$ sont des fonctions aléatoires *stationnaires*.

2) L'espérance $E(\partial_j p)$ est égale à un vecteur constant, de composantes covariantes données d'avance.

Autrement dit, nous admettons qu'il existe toujours une solution stationnaire correspondant à un gradient macroscopique constant $\partial_j P$ donné d'avance. Nous montrerons au paragraphe 19 que cette solution est nécessairement *unique*.

L'espace ayant n dimensions, on peut alors trouver n solutions *distinctes*, stationnaires, $q^{il}(x)$, $\partial_j p^l(x)$ ($l = 1, 2, \dots, n$), vérifiant le système de Darcy, et telles que les espérances

$$(18,3) \quad E(\partial_j p^l) = \partial_j P^l$$

coïncident, pour chaque valeur de l , avec les composantes du l vecteur colonne d'une matrice $\partial_j P^l$ donnée d'avance (et de déterminant non nul). L'ensemble de ces n solutions constitue ce que nous appellerons un système de *solutions privilégiées*.

Toute combinaison linéaire des solutions privilégiées, de la forme :

$$(18,4) \quad \begin{cases} q^i = \varpi_l q^{il} \\ \partial_j p = \varpi_l \partial_j p^l \end{cases}$$

avec des coefficients ϖ_l constants est évidemment elle-même une solution stationnaire du système de Darcy, et décrit un écoulement macroscopiquement uniforme caractérisé par le gradient et le flux macroscopiques constants :

$$(18,5) \quad \begin{cases} \partial_j P = \varpi_l \partial_j P^l \\ Q^i = \varpi_l Q^{il} \end{cases}$$

Et, inversement, *tout* écoulement macroscopiquement uniforme est de la forme (18,5) à cause de l'unicité de la solution du système de Darcy soumise aux conditions 1 et 2 ci-dessus.

Invariance tensorielle. — Un arbitraire assez large subsiste sur le choix d'un système de solutions privilégiées. En effet, toute combinaison linéaire de solutions stationnaires du système de Darcy étant elles-mêmes une solution stationnaire, il est possible d'effectuer, sur l'indice l des solutions privilégiées, une substitution linéaire quelconque. Ainsi, l'indice l ne présente au départ aucun caractère d'invariance tensorielle. Cependant, une fois choisie la matrice des $\partial_j P^l$ qui figure au deuxième membre de (18,3) le système des q^{ii} , $\partial_j p^l$ et Q^{ii} est déterminé sans ambiguïté. On montre alors, exactement comme au paragraphe 14, que, si l'on choisit comme $\partial_j P^l$ la matrice des composantes d'un tenseur donné d'avance, les q^{ii} , $\partial_j p^l$ et Q^{ii} prennent, elles aussi, le caractère tensoriel.

En particulier, il sera souvent commode de choisir, pour jouer le rôle des $\partial_j P^l$, les composantes δ_j^l du tenseur de Kronecker ($\delta_j^l = 0$ si $l \neq j$ et $\delta_j^l = 1$ si $l = j$). Avec ce choix conventionnel :

$$(18,6) \quad \partial_j P^l = \delta_j^l$$

du système des solutions privilégiées, la première relation (18,5) se réduit à :

$$\partial_j P = \varpi_j$$

Les constantes ϖ_l coïncident donc, dans ce cas avec les composantes covariantes du gradient de pression.

Passage à la loi de Darcy. — Toujours avec le choix (18,6) des solutions privilégiées, la deuxième relation (18,5) se réduit à :

$$(18,7) \quad Q^i = -\frac{1}{\mu} K^{ij} \partial_j P$$

c'est-à-dire à la loi de Darcy, à condition de prendre l'expression suivante pour le tenseur K^{ij} représentant la perméabilité macroscopique constante :

$$(18,8) \quad K^{ij} = -\mu Q^{ij}$$

Ainsi, les écoulements macroscopiquement uniformes obéissent à une loi de Darcy macroscopique. Cela résulte très simplement du fait que de tels écoulements se présentent comme des combinaisons linéaires, à coefficient ϖ_l constants, d'un système de solutions privilégiées. On voit, ensuite, exactement comme au paragraphe 15, que cette conclusion s'étend également aux écoulements *quasi uniformes*. En effet, si, dans (18,4) nous remplaçons les coefficients ϖ_l constants par des fonctions $\varpi_l(x)$ lentement variables dans l'espace, les dérivées des $\varpi_l(x)$ sont négligeables vis-à-vis des dérivées correspondantes des $q^{ii}(x)$ et des $\partial_j p(x)$, de sorte que (18,4) représente encore une solution du système de Darcy, solution correspondant

justement à un écoulement quasi uniforme. En passant aux espérances mathématiques, on voit que le flux $Q^i(x)$ et le gradient $\partial_j P(x)$ macroscopiques sont encore donnés par le système (18,5), qui représente cette fois, par l'intermédiaire des fonctions $\varpi_i(x)$, un flux et un gradient variables dans l'espace. L'élimination des $\varpi_i(x)$ conduit enfin à la loi de Darcy (18,7), avec la même expression (18,8) du tenseur des perméabilités.

Naturellement, les fonctions $\varpi_i(x)$ ne peuvent pas être absolument quelconques. Avec le choix (18,6) des solutions privilégiées, $\varpi_j(x) = \partial_j P(x)$ doit être un gradient, et, de plus, le flux macroscopique $Q^i(x)$ doit être conservatif. On obtient donc le système habituel

$$\begin{cases} Q^i = -\frac{K^{ij}}{\mu} \partial_j P \\ \partial_i Q^i = 0 \end{cases}$$

Ce passage à la loi de Darcy et à la perméabilité macroscopique K^{ij} constante a été effectuée, comme au paragraphe 15, d'une manière purement formelle. Nous devons maintenant essayer de mettre en évidence, de façon un peu plus précise, la loi selon laquelle les perméabilités ponctuelles k se composent pour engendrer K . Il est sans doute instructif de considérer, en premier lieu, les deux cas particuliers où le système de Darcy admet comme solutions soit des vecteurs flux constants, soit des gradients constants.

a) *Milieu admettant des écoulements à gradient constant.* — Pour que le système de Darcy (18,1) admette la solution $\partial_j p = \varpi_j$ pour tout vecteur covariant constant ϖ_j , il faut et il suffit que l'on ait

$$\partial_i k^{ij} = 0$$

c'est-à-dire que le tenseur des perméabilités soit *conservatif* (ait une divergence nulle). La solution

$$\begin{cases} \partial_j p = \varpi_j \\ q^i = -k^{ij} \varpi_j \end{cases}$$

est stationnaire, et décrit donc un écoulement macroscopique caractérisé par le flux et le gradient constants :

$$\begin{cases} \partial_j P = \varpi_j \\ Q^i = -\varpi_j E(k^{ij}) \end{cases}$$

Par suite, le tenseur des perméabilités macroscopiques K^{ij} est :

$$\boxed{K^{ij} = E(k^{ij})}$$

Ainsi, lorsque le tenseur des perméabilités est conservatif, la règle de pondération arithmétique $K = E(k)$ s'applique en toute rigueur.

EXEMPLE 1. — Soit, dans l'espace à trois dimensions, un milieu où le tenseur des perméabilités conserve des directions principales fixes. Ces directions étant prises comme axes des coordonnées x , y et z , supposons que les perméabilités principales correspondantes, k_1 , k_2 et k_3 , ne dépendent : la première que de y et z , la seconde de z et x , la troisième de x et y , soit

$$k = \begin{pmatrix} k_1(y, z) & 0 & 0 \\ 0 & k_2(z, x) & 0 \\ 0 & 0 & k_3(x, y) \end{pmatrix}$$

Ce tenseur étant conservatif, les perméabilités macroscopiques sont :

$$K = \begin{pmatrix} E(k_1) & 0 & 0 \\ 0 & E(k_2) & 0 \\ 0 & 0 & E(k_3) \end{pmatrix}$$

De fait, il est clair que, vis-à-vis d'un écoulement parallèle à l'axe des x , par exemple, ce milieu se comporte comme s'il était constitué des « strates » $k_1(y, z) = C^{te}$ parallèles à l'axe des x .

b) *Milieu admettant des écoulements à flux constants.* — De même, cherchons à quelle condition le système de Darcy admet comme solution n'importe quel vecteur flux q^i constant. Soit h_{ij} le tenseur des résistivités, inverses des k^{ij} . Le système de Darcy peut s'écrire :

$$\begin{cases} \partial_i q^i = 0 \\ \partial_j p = -h_{ij} q^i \end{cases}$$

Il admet comme solution tout vecteur q^i constant si, et seulement si, $h_{ij} q^i$ est un gradient quels que soient les q^i , donc si l'on peut trouver un vecteur V_i dont h_{ij} soit le gradient :

$$h_{ij} = \partial_j V_i$$

Compte tenu de la condition de symétrie $h_{ij} = h_{ji}$, V_i doit être lui-même un gradient, et h_{ij} est de la forme $\partial_i \partial_j \varphi$, ou φ est une fonction scalaire aléatoire. Au niveau macroscopique, on obtient pour de telles solutions :

$$\begin{cases} Q^i = q^i \\ \partial_j P = -q^i E(h_{ij}) \end{cases}$$

Par suite, la résistivité macroscopique H_{ij} est :

$$\boxed{H_{ij} = E(h_{ij})}$$

Ainsi, lorsque le tenseur des perméabilités est l'inverse d'un tenseur gradient, la règle de pondération harmonique $K^{-1} = E(k^{-1})$ s'applique en toute rigueur.

EXEMPLE 2. — Avec les mêmes notations que pour l'exemple 1, supposons que k soit de la forme :

$$k = \begin{pmatrix} k_1(x) & 0 & 0 \\ 0 & k_2(y) & 0 \\ 0 & 0 & k_3(z) \end{pmatrix}$$

Son inverse :

$$h = \begin{pmatrix} \frac{1}{k_1(x)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k_2(y)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{k_3(z)} \end{pmatrix}$$

est un gradient, et par suite les perméabilités macroscopiques sont :

$$K = \begin{pmatrix} \frac{1}{E\left(\frac{1}{k_1}\right)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{E\left(\frac{1}{k_2}\right)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{E\left(\frac{1}{k_3}\right)} \end{pmatrix}$$

De fait, il est clair que, vis-à-vis d'un écoulement parallèle à l'axe des x , ce milieu se comporte comme s'il était constitué de strates $k_1(x) = C^{\text{te}}$ perpendiculaires à l'axe des x .

c) *Cas général.* — Plaçons-nous maintenant, dans le cas général où le tenseur $k^{ij}(x)$ est simplement supposé stationnaire, et soient q^{il} et $\partial_j p^l$ un système de solutions privilégiées, correspondant à un fluide de viscosité unité $\mu = 1$. D'après la loi de Darcy, nous avons

$$(18,9) \quad \begin{cases} q^{il} = -k^{ij} \partial_j p^l \\ \partial_i q^{il} = 0 \end{cases}$$

Comme les p^l constituent des solutions indépendantes du système (18,1), leur jacobien, qui est le déterminant des $\partial_j p^l$, n'est pas identiquement nul. Soit donc A^l_j la matrice inverse des $\partial_j p^l$. L'équation (18,9) s'écrit :

$$k^{ij} = -q^{il} A^l_j$$

D'autre part, au niveau macroscopique, le flux et le gradient constants correspondant à la solution privilégiée d'indice l sont :

$$\begin{cases} Q^{il} = E(q^{il}) \\ \partial_j P^l = E(\partial_j p^l) \end{cases}$$

Par suite, la perméabilité macroscopique constante K^{ij} s'obtient en

résolvant le système :

$$E(q^{il}) = -K^{ij}E(\partial_j p^l)$$

Pour éviter la présence du signe moins, nous prendrons $C^{il} = -q^{il}$. Les résultats obtenus peuvent s'énoncer sous la forme d'une proposition et d'une loi de composition.

Proposition. — *Toute perméabilité $k^{ij}(x)$ aléatoire, stationnaire et ergodique peut être mise sous la forme :*

$$k^{ij} = C^{il} A_j^i$$

du produit d'un tenseur C conservatif ($\partial_i C^{il} = 0$) et stationnaire, et d'un tenseur A inverse d'un tenseur gradient stationnaire $\partial_j p^l$.

Loi de composition. — *Le tenseur des perméabilités macroscopiques constantes K^{ij} s'obtient en effectuant le produit de $E(C^{il})$ par l'inverse du tenseur $E(\partial_j p^l)$.*

Autrement dit, sous forme matricielle, on a :

(18,10)

$$\begin{array}{l} k = CA \\ K = E(C)[E(A^{-1})]^{-1} \end{array}$$

Cette loi de composition constitue une généralisation évidente des règles de pondération arithmétique et harmonique rencontrées dans les deux cas particuliers a et b . Dans le prochain paragraphe de cette étude, nous allons montrer, à l'aide de considérations énergétiques, que la règle (18,10) donne toujours un résultat intermédiaire entre les moyennes harmonique et arithmétique, qui apparaîtront ainsi comme deux cas limites. Au préalable, à titre d'illustration, nous allons traiter deux exemples simples.

EXEMPLE 3. — Avec les mêmes notations que dans les exemples 1 et 2, supposons que la matrice des perméabilités soit de la forme

$$k = \begin{pmatrix} f_1(yz)g_1(x) & 0 & 0 \\ 0 & f_2(zx)g_2(y) & 0 \\ 0 & 0 & f_3(xy)g_3(z) \end{pmatrix}$$

Le tenseur gradient $B = A^{-1}$ et le tenseur conservatif C sont :

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{g_1(x)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{g_2(y)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{g_3(z)} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} f_1(y, z) & 0 & 0 \\ 0 & f_2(z, x) & 0 \\ 0 & 0 & f_3(x, y) \end{pmatrix}$$

Par suite les perméabilités macroscopiques constantes sont :

$$K = E(C)[E(B)]^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{E(f_1)}{E\left[\frac{1}{g_1}\right]} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E(f_2)}{E\left(\frac{1}{g_2}\right)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E(f_3)}{E\left(\frac{1}{g_3}\right)} \end{pmatrix}$$

La composition s'effectue selon un mode intermédiaire entre les pondérations harmonique et arithmétique.

EXEMPLE 4 (*milieu à stratification horizontale*). — Soit, dans l'espace à 3 dimensions, un milieu stratifié où les perméabilités $k^{ij}(z)$ ne dépendent que de la coordonnée z (les composantes rectangulaires ne sont pas supposées nulles). On cherche à priori un tenseur gradient $\partial_j p^i$ de la forme

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ B_3^1(z) & B_3^2(z) & B_3^3(z) \end{pmatrix}$$

et un tenseur C vérifiant

$$\begin{cases} C^i = k^{ij} B_j \\ \partial_i C^i = 0 \end{cases}$$

On obtient sans peine la solution :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{k^{13}}{k^{33}} & -\frac{k^{23}}{k^{33}} & \frac{1}{k^{33}} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} k^{11} - \frac{\overline{k^{13^2}}}{k^{33}} & k^{12} - \frac{k^{13}k^{23}}{k^{33}} & \frac{k^{13}}{k^{33}} \\ k^{21} - \frac{k^{13}k^{23}}{k^{33}} & k^{22} - \frac{\overline{k^{23^2}}}{k^{33}} & \frac{k^{23}}{k^{33}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs colonnes de B et (au signe près) de C donnent le gradient et le flux de 3 solutions privilégiées. Il suffit ensuite de résoudre le système $KE(B) = E(C)$ pour obtenir une règle de pondération qui peut s'écrire :

$$\varphi(K) = E[\varphi(k)]$$

en désignant par $\varphi(k)$ la fonction matricielle admettant l'expression explicite :

$$\varphi(k) = \begin{pmatrix} k^{11} - \frac{(k^{13})^2}{k^{33}} & k^{12} - \frac{k^{13}k^{23}}{k^{33}} & \frac{k^{13}}{k^{33}} \\ k^{21} - \frac{k^{13}k^{23}}{k^{33}} & k^{22} - \frac{(k^{23})^2}{k^{33}} & \frac{k^{23}}{k^{33}} \\ \frac{k^{31}}{k^{33}} & \frac{k^{32}}{k^{33}} & \frac{1}{k^{33}} \end{pmatrix}$$

La règle de pondération harmonique s'applique, comme il se doit, à la composante k^{33} . Pour les deux autres termes diagonaux, on montre facilement que l'on a, par exemple :

$$K^{11} \leq E(k^{11})$$

l'égalité n'ayant lieu que si k^{13} est nul : les termes rectangles entraînent une détérioration des perméabilités horizontales relativement à la moyenne arithmétique que laissait prévoir le mode de couplage en parallèle.

19. — La densité de puissance, et les inégalités fondamentales.

La règle de composition donnée en (18,10) est assez formelle, en ce sens que, pour l'appliquer effectivement, il faudrait déjà connaître un système de solutions privilégiées, ce qui ne sera pour ainsi dire jamais le cas en pratique. Cependant, l'introduction de notions énergétiques va nous permettre de tirer de la seule forme des relations (18,10) des renseignements relativement précis sur les perméabilités macroscopiques, renseignements utilisables même si l'on ne connaît pas les solutions privilégiées.

Soit un écoulement macroscopiquement uniforme de flux q^i et de gradient $\partial_j p$, au niveau ponctuel, et $Q^i = E(q^i)$, $\partial_j P = E(\partial_j p)$ au niveau macroscopique, et proposons-nous d'évaluer la puissance consommée par les forces de viscosité.

Considérons, en premier lieu, un volume élémentaire $d\sigma$, sous la forme d'un petit tube de lignes de courant, limité par deux éléments de surface isobares $p = p_0$ et $p' = p_0 - dp$. Cet élément étant supposé extrait du milieu, nous imperméabilisons sa surface latérale, et nous plongeons ses deux faces terminales dans deux récipients contenant le même fluide, mais sous les pressions p_0 et $p_0 - dp$ respectivement. Un piston refoule le fluide du récipient soumis à la pression la plus forte p_0 , et son mouvement est réglé de telle manière que cette pression reste constante. En raison de l'unicité de la solution du système de Darcy, l'écoulement permanent qui s'établit possède le même flux q^i et le même gradient $\partial_j p$ que l'écoulement en place. La puissance consommée par les forces de viscosité s'évalue en calculant le travail fourni par le piston. On trouve aisément cette puissance sous la forme :

$$W d\sigma = - q^i \partial_i p d\sigma$$

Ainsi, dans l'écoulement dont le milieu réel est le théâtre, la densité de puissance consommée par les forces de viscosité ⁽¹⁾ est :

$$(19,1) \quad W = -q^i \partial_i p$$

Dans un volume V , la puissance consommée est donc $\int q^i \partial_i p \, dv$, et, si V a été choisi suffisamment grand pour que l'ergodicité V s'y manifeste, cette intégrale peut être remplacée par l'expression :

$$-VE(q^i \partial_i p)$$

Mais cette même puissance peut être évaluée directement au niveau macroscopique. Prenant, en effet, comme volume V un cylindre ayant ses génératrices parallèles au flux macroscopique constant Q^i et ses bases dans deux surfaces isobares $P = P_0$ et $P = P_1$, on voit, en répétant le même raisonnement que ci-dessus, que cette puissance est :

$$-VQ^i \partial_i P = -VE(q^i)E(\partial_i p)$$

Égalant ces deux expressions de la puissance, nous obtenons :

$$(19,2) \quad \boxed{E(q^i \partial_i p) = E(q^i)E(\partial_i p)}$$

Cette relation fondamentale exprime que, *vis-à-vis du produit scalaire, flux et gradient des solutions stationnaires se comportent comme s'ils étaient indépendants* : l'espérance du produit scalaire est égale au produit scalaire des espérances.

En fait, la relation (19,2), qui exprime un bilan énergétique, peut se déduire de la seule relation

$$(19,3) \quad \partial_i q^i = 0$$

qui exprime la conservation de la quantité de fluide. En effet, le gradient $\partial_j p$ étant stationnaire, la pression p peut se mettre sous la forme

$$(19,4) \quad p = x^j \partial_j P + \lambda$$

λ étant une fonction aléatoire stationnaire ⁽²⁾ d'espérance nulle. On a alors, compte tenu de (19,3) :

$$q^i \partial_i p = q^i \partial_i P + q^i \partial_i \lambda = q^i \partial_i P + \partial_i (\lambda q^i)$$

Passons aux espérances en remarquant que, λq^i étant stationnaire, on a $E[\partial_i (\lambda q^i)] = \partial_i E(\lambda q^i) = 0$. Il vient :

$$E(q^i \partial_i p) = Q^i \partial_i P$$

c'est-à-dire la relation (19,2).

⁽¹⁾ Cette relation (19,1) n'est pas autre chose que la relation (16,6) que nous avons tirée directement, dans le chapitre précédent, des équations de Navier.

⁽²⁾ En réalité, du fait que $\delta_j p$ est stationnaire d'ordre deux, on déduit seulement que p est à accroissements stationnaire d'ordre deux, et (19,4) constitue une hypothèse supplémentaire, qui n'est peut-être pas réellement indispensable, mais simplifie l'exposé.

Unicité des solutions privilégiées. — La densité de puissance consommée est obligatoirement positive. D'après (19,1) et la loi de Darcy, on a donc :

$$k^{ij}\partial_i p \partial_j p \geq 0$$

l'égalité n'ayant lieu que si $\partial_i p = 0$ (fluide au repos). Cette inégalité exprime, comme on sait, que la matrice des perméabilités est définie positive.

Supposons alors qu'il soit possible de trouver deux écoulements, macroscopiquement uniformes, de gradients $\partial_j p_1$ et $\partial_j p_2$ vérifiant :

$$E(\partial_j p_1) = E(\partial_j p_2)$$

On en déduit, par différence, un écoulement macroscopiquement uniforme de gradient

$$\partial_j p = \partial_j p_1 - \partial_j p_2$$

vérifiant

$$\partial_j P = E(\partial_j p) = 0$$

c'est-à-dire caractérisant un fluide en état de repos macroscopique. Si $\partial_j p$ n'est pas identiquement nul, $q^i \partial_i p$ est strictement négatif, et par suite aussi

$$E(q^i \partial_i p) = Q^i \partial_i P < 0$$

Mais cela est impossible puisque $\partial_i P$ est nul. Donc $\partial_j p$ est nul (le fluide est réellement en repos). Par suite $\partial_j p_1 = \partial_j p_2$, et la solution stationnaire de gradient macroscopique constant est nécessairement unique, comme nous l'avions annoncé.

Le tenseur densité de puissance. — Soit maintenant $q^i, \partial_j p^i$ un système de solutions privilégiées. Toute solution stationnaire est de la forme :

$$\begin{cases} q^i = \varpi_i q^{il} \\ \partial_j p = \varpi_i \partial_j p^i \end{cases}$$

et admet, d'après (19,1), la densité d'énergie :

$$W = W^{ls} \varpi_l \varpi_s$$

avec

(19,5)

$$W^{ls} = - q^{il} \partial_i p^s$$

W^{ls} est le tenseur densité de puissance. Il est symétrique et défini positif. En effet, utilisant la loi de Darcy, on obtient :

$$W^{ls} = \frac{1}{\mu} k^{ij} \partial_i p^l \partial_j p^s$$

Le tenseur k^{ij} étant lui-même symétrique et défini positif, il en est de même de W^{ls} .

Enfin, la relation (19,2) se généralise sans peine. Il suffit, en effet, de reprendre le raisonnement utilisant l'équation de continuité (19,3) pour obtenir :

$$(19,6) \quad E(q^i \partial_i p^s) = E(q^i) E(\partial_i p^s)$$

Ainsi, l'espérance mathématique du tenseur densité de puissance est :

$$(19,7) \quad E(W^{ts}) = - Q^i \partial_i P^s$$

Relation entre perméabilité macroscopique et densité de puissance. — Portons dans (19,7) la relation de Darcy exprimée au niveau macroscopique :

$$Q^i = - \frac{K^{ij}}{\mu} \partial_j p^i$$

Il vient :

$$(19,8) \quad \boxed{E(W^{ts}) = \frac{1}{\mu} K^{ij} \partial_i P^t \partial_j P^s}$$

Ainsi le tenseur des perméabilités macroscopiques peut se déduire de l'espérance du tenseur densité de puissance. En particulier, si les solutions privilégiées ont été choisies conformément à la règle (18,6) il vient simplement :

$$K^{ij} = \mu E(W^{ij})$$

On voit ainsi que le tenseur K^{ij} est symétrique et défini positif comme la densité de puissance W^{ij} .

20. — Les inégalités fondamentales.

Rappelons, tout d'abord, une définition : on dit qu'une matrice symétrique M^{ij} est définie positive si, quelles que soient les constantes α_i , on a toujours :

$$\alpha_i \alpha_j M^{ij} \geq 0$$

Le caractère défini positif entraîne, en particulier, les conséquences suivantes :

- les termes diagonaux sont positifs $M^{ii} \geq 0$
- les termes rectangulaires vérifient l'inégalité de Schwartz :

$$|M^{ij}| \leq \sqrt{M^{ii} M^{jj}}$$

- les valeurs propres et le déterminant sont positifs ou nuls.

Nous avons vu, dans le chapitre V, que la matrice (régionalisée) des k^{ij} est toujours symétrique et définie positive. D'après l'équation de Darcy,

et pour un fluide de viscosité unité $\mu = 1$, cela signifie que l'on a toujours :

$$q^i \partial_i p = - k^{ij} \partial_i p \partial_j p \leq 0$$

autrement dit que la pression va toujours en diminuant le long d'une ligne de courant, ou encore que les forces de viscosité consomment de l'énergie (et n'en fournissent pas). Il s'agit bien d'une condition de nature physique, imposée a priori de manière impérative. D'après les résultats du paragraphe précédent, il en résulte que les matrices des perméabilités macroscopiques K^{ij} et des densités de puissance W^{ls} sont également symétriques et définies positives.

Nous allons en déduire que les matrices $E(k) - K$ et $E(h) - H$ sont également définies positives. En effet, la relation (19,6) établie au paragraphe précédent s'écrit aussi bien (pour un fluide de viscosité unité) :

$$(19,9) \quad - E(q^{il} \partial_i p^s) = K^{ij} \partial_i P^l \partial_j P^s = H_{ij} Q^i Q^j$$

a) Les $\partial_i p^l$ peuvent se mettre sous la forme :

$$\partial_i p^l = \partial_i P^l + \partial_i \lambda^l$$

avec

$$E(\partial_i \lambda^l) = 0$$

On a alors, en utilisant la loi de Darcy au niveau ponctuel :

$$\begin{aligned} - q^{il} \partial_i p^s &= k^{ij} \partial_i p^l \partial_j p^s \\ &= k^{ij} (\partial_i P^l \partial_j P^s + \partial_i P^l \partial_j \lambda^s) - k^{ij} \partial_i P^l \partial_j P^s + k^{ij} \partial_i \lambda^l \partial_j \lambda^s \end{aligned}$$

Prenons l'espérance mathématique des deux membres de cette équation. A gauche, d'après (19,9), apparaît $K^{ij} \partial_i P^l \partial_j P^s$. A droite, on remarque que l'on a :

$$\partial_j P^s E(k^{ij} \partial_i p^l) = - \partial_j P^s Q^{il} = K^{ij} \partial_i P^l \partial_j P^s$$

Par suite, il vient :

$$K^{ij} \partial_i P^l \partial_j P^s = E(k^{ij}) \partial_i P^l \partial_j P^s - E(k^{ij} \partial_i \lambda^l \partial_j \lambda^s)$$

Avec le choix (18,6) les solutions privilégiées, il reste simplement :

$$(19,10) \quad E(k^{ls}) - K^{ls} = E(k^{ij} \partial_i \lambda^l \partial_j \lambda^s)$$

Or, k^{ij} étant symétrique et défini positif, il en est de même de $k^{ij} \partial_i \lambda^l \partial_j \lambda^s$, et par suite aussi du tenseur qui figure au deuxième membre de (19,10).

Par suite, le tenseur $E(k^{ij}) - K^{ij}$ est toujours défini positif.

b) De la même manière, les q^{il} peuvent se mettre sous la forme

$$q^{il} = Q^{il} + \theta^{il}$$

avec

$$E(\theta^{il}) = 0$$

Utilisant la loi de Darcy au niveau ponctuel, on obtient :

$$\begin{aligned} -q^{il} \partial_i p^s &= h_{ij} q^{il} q^{js} \\ &= h_{ij} (q^{il} Q^{js} + Q^{il} q^{js}) - h_{ij} Q^{il} Q^{js} + h_{ij} \theta^{il} \theta^{js} \end{aligned}$$

Prenons l'espérance des membres extrêmes de cette relation. A gauche, selon (19,9) apparaît $H_{ij} Q^{il} Q^{js}$. A droite, on remarque que l'on a :

$$Q^{js} E(h_{ij} q^{il}) = -Q^{js} \partial_j P^l = H_{ij} Q^{il} Q^{js}$$

Par suite, on obtient :

$$(19,11) \quad H_{ij} Q^{il} Q^{js} = E(h_{ij}) Q^{il} Q^{js} - E(h_{ij} \theta^{il} \theta^{js})$$

Comme h_{ij} est symétrique et défini positif, il en est de même du tenseur $E(h_{ij} \theta^{il} \theta^{js})$. Par suite, le tenseur

$$E(h_{ij}) Q^{il} Q^{js} - H_{ij} Q^{il} Q^{js}$$

est lui-même symétrique et défini positif. On en déduit sans difficulté que $E(h_{ij}) - H_{ij}$ possède la même propriété. Si α^i est un vecteur quelconque, on peut trouver β_i avec

$$\alpha^i = Q^{il} \beta_l$$

Par définition, on a :

$$[E(h_{ij}) - H_{ij}] Q^{il} Q^{js} \beta_l \beta_s \geq 0$$

Donc aussi :

$$[E(h_{ij}) - H_{ij}] \alpha^i \alpha^j \geq 0$$

Ainsi, le tenseur $E(h_{ij}) - H_{ij}$ est toujours défini positif.

c) Pour présenter ces résultats de manière plus frappante, introduisons une relation d'ordre entre matrices symétriques définies positives, en posant :

$$A \leq B$$

lorsque la matrice symétrique $B - A$ est définie positive. Les résultats obtenus ci-dessus s'écrivent ainsi :

$$K \leq E(k) \quad H \leq E(h)$$

D'autre part, si $A \leq B$ et si A est inversible, on vérifie immédiatement que B est également inversible et que l'on a $B^{-1} \leq A^{-1}$. Les deux inégalités ci-dessus entraînent par conséquent les deux suivantes :

$$[E(k)]^{-1} \leq H \quad [E(h)]^{-1} \leq K$$

Finalement, nous obtenons les deux systèmes d'inégalités équivalents suivants :

$$(19,12) \quad \boxed{\begin{aligned} [E(k^{-1})]^{-1} &\leq K \leq E(k) \\ [E(h^{-1})]^{-1} &\leq H \leq E(h) \end{aligned}}$$

Ces inégalités fondamentales expriment, comme nous l'avions annoncé,

que la perméabilité macroscopique K est toujours intermédiaire entre la moyenne harmonique $[E(k^{-1})]^{-1}$ et la moyenne arithmétique $E(k)$.

Géométriquement, les inégalités

$$\begin{aligned} K^{ij}\alpha_i\alpha_j &\leq \alpha_i\alpha_j E(k^{ij}) \\ H_{ij}\beta^i\beta^j &\leq \beta^i\beta^j E(h_{ij}) \end{aligned}$$

montrent que les ellipsoïdes traditionnels d'équations $K^{ij}x_ix_j = 1$ et $H_{ij}x^ix^j = 1$ contiennent les ellipsoïdes analogues construits sur les $E(k^{ij})$ et $E(h_{ij})$ respectivement. On verra de même que les ellipsoïdes représentatifs de K et de H sont contenus dans les ellipsoïdes représentatifs de $[E(h)]^{-1}$ et $[E(k)]^{-1}$ respectivement.

21. — Étude spéciale des écoulements plans.

Le cas des écoulements uniformes plans mérite une étude spéciale. Moyennant certaines hypothèses sur la loi spatiale des perméabilités, il est possible, en effet, comme nous allons le voir, de démontrer rigoureusement que la règle de pondération géométrique peut lui être appliquée.

Soit, dans l'espace à deux dimensions, un milieu infini caractérisé par une perméabilité $k^{ij}(x)$ aléatoire et stationnaire, dont la loi spatiale est supposée *invariante par rotation* ⁽¹⁾ et soient q^i et $\partial_j p$ un flux et un gradient stationnaires vérifiant le système de Darcy :

$$(20,1) \quad \begin{cases} q^i = -k^{ij} \partial_j p \\ \partial_i q^i = 0 \end{cases}$$

On sait que, dans l'espace à 2 dimensions, une rotation de 90° transforme un vecteur gradient en un vecteur conservatif (de divergence nulle) et réciproquement. Dans un système d'axes orthonormés, les vecteurs G et F de composantes :

$$G \quad \begin{cases} G_1 = -q^2 \\ G_2 = q^1 \end{cases} \quad \text{et} \quad F \quad \begin{cases} F^1 = -\partial_2 p \\ F^2 = \partial_1 p \end{cases}$$

sont donc, le premier un gradient, et le deuxième un flux conservatif. Si h_{ij} est la résistivité du milieu, inverse de k^{ij} , la loi de Darcy, qui peut s'écrire :

$$\partial_j p = -h_{ij} q^i$$

montre qu'il existe également une relation linéaire entre F et G . Si l'on désigne par P le tenseur déduit de h_{ij} par une rotation de 90° (P possède donc la même loi spatiale que h), soit

$$P = \begin{pmatrix} h_{22} & -h_{12} \\ -h_{21} & h_{11} \end{pmatrix}$$

⁽¹⁾ Cette invariance par rotation s'étend à toutes les propriétés macroscopiques de ce milieu (puisque'elles ne dépendent que de la loi spatiale) : Elle signifie que le milieu est macroscopiquement isotrope.

on obtient, en effet :

$$(20,2) \quad \begin{cases} F^i = -P^{ij}G_j \\ \partial_i F^i = 0 \end{cases}$$

Compte tenu du fait que G est un gradient, ce système (20,2) se présente comme un deuxième système de Darcy, d'ailleurs équivalent à (20,1). La perméabilité macroscopique constante K est un scalaire (puisque la loi spatiale est invariante par rotation) et a pour valeur

$$K = -\frac{E(q^i)}{E(\partial_i p)} \quad (\text{sans sommation en } i)$$

Elle se déduit de la loi spatiale des k^{ij} par un certain nombre d'opérations liées uniquement à la structure du système de Darcy. Comme les systèmes (20,1) et (20,2) ont la même structure, ces mêmes opérations, effectuées sur la loi spatiale des P^{ij} , vont conduire à la valeur numérique du rapport $-\frac{E(F^i)}{E(G^i)}$. Mais d'une part ce rapport ne diffère pas du rapport $-\frac{E(\partial_i p)}{E(q^i)}$, c'est-à-dire de la résistivité macroscopique $H = \frac{1}{K}$; d'autre part les P^{ij} ont la même loi spatiale que les h_{ij} . D'où la conclusion :

Proposition 1. — *Dans un milieu à 2 dimensions dont les perméabilités ont une loi spatiale invariante par rotation, la perméabilité macroscopique K et la résistivité macroscopique H s'obtiennent en effectuant les mêmes opérations sur les lois spatiales des perméabilités k et des résistivités h , respectivement.*

Désignons alors par k_0 et h_0 les espérances $E(k)$ et $E(h)$ de la perméabilité et de son inverse : ce sont des scalaires, puisque les lois spatiales sont invariantes par rotation. Dans le cas particulier où l'on suppose de plus que $\frac{k_{ij}}{k_0}$ et $\frac{h_{ij}}{h_0}$ ont la même loi spatiale, la proposition 1 ci-dessus entraîne immédiatement l'égalité :

$$\frac{K}{k_0} = \frac{H}{h_0}$$

d'où l'on déduit aussitôt la règle de pondération

$$(20,3) \quad K = \sqrt{\frac{k_0}{h_0}}$$

Du fait que $\frac{k}{k_0}$ et $\frac{h}{h_0}$ ont même loi spatiale, la règle (20,3) est d'ailleurs équivalente à la règle de pondération géométrique. En effet, remarquons tout d'abord que, la matrice k étant définie positive, son logarithme $\log k$ existe également : c'est la matrice admettant les mêmes vecteurs propres que k , et, comme valeurs propres les logarithmes des valeurs propres de k

(qui sont positives). De même $\log h$ existe, et on a $\log h = -\log k$. Par ailleurs, puisque $\frac{k}{k_0}$ et $\frac{h}{h_0}$ ont la même loi spatiale, leurs logarithmes ont la même espérance mathématique, soit :

$$E(\log k) - \log k_0 = E(\log h) - \log h_0 = -E(\log k) - \log h_0$$

D'où résulte immédiatement

$$E(\log k) = \frac{1}{2} \log \frac{k_0}{h_0}$$

Par suite la règle (20,3) est bien équivalente à la règle de pondération géométrique :

$$\log K = E(\log k)$$

La condition que $\frac{k}{k_0}$ et $\frac{h}{h_0}$ aient la même loi spatiale est toujours remplie dans le cas particulier très intéressant où cette loi spatiale est lognormale, c'est-à-dire dans le cas où la matrice des perméabilités k est de la forme

$$(20,4) \quad k = e^A$$

A étant une matrice symétrique, dont les composantes sont des fonctions aléatoires à loi spatiale gaussienne. (On notera qu'une matrice à loi lognormale est toujours définie positive : ses valeurs propres sont, en effet, les exponentielles des valeurs propres de A , donc toujours positives.)

Si k est de la forme (20,4), alors, $\frac{k}{k_0}$ et $\frac{h}{h_0}$ ont la même loi spatiale : en effet, posons

$$A = E(A) + \alpha$$

Comme α est gaussienne et de moyenne nulle, α et $-\alpha$ ont même loi spatiale, donc aussi e^α et $e^{-\alpha}$ et par suite également :

$$\frac{k}{k_0} = \frac{e^\alpha}{E(e^\alpha)} \quad \text{et} \quad \frac{h}{h_0} = \frac{e^{-\alpha}}{E(e^{-\alpha})}$$

Résumons ces divers résultats sous la forme d'une proposition :

Proposition 2. — *Si, dans un milieu à deux dimensions, les matrices aléatoires $\frac{k}{E(k)}$ et $\frac{h}{E(h)}$ possèdent la même loi spatiale, et si cette loi est invariante par rotation, les perméabilités se composent selon la règle de pondération géométrique $\log K = E(\log k)$ ou selon la règle équivalente*

$$K = [E(k)]^{\frac{1}{2}} [E(h)]^{-\frac{1}{2}}.$$

Ces conditions sont en particulier remplies lorsque la loi spatiale de k est lognormale et invariante par rotation.

REMARQUE. — Les résultats exprimés dans les deux propositions précédentes sont liés étroitement au nombre $N = 2$ des dimensions de l'espace et ne peuvent pas se généraliser au cas $N = 3$. En effet, leur démonstration repose essentiellement sur le fait qu'une rotation de 90° transforme un gradient en un vecteur conservatif. C'est là une propriété particulière à l'espace à 2 dimensions, qui n'a pas d'équivalent dans le cas $N \neq 2$. Nous verrons d'ailleurs, dans le prochain paragraphe, que la règle de pondération géométrique n'est possible que dans l'espace à 2 dimensions.

21. — Méthode d'approximation et tenseur de Schwydlér.

Dans ce qui suit, nous nous plaçons dans un milieu infini à N dimensions, dont les perméabilités régionalisées $k^{ij}(x)$ sont interprétées comme une réalisation d'une fonction aléatoire (tensorielle) ergodique et stationnaire. L'espace étant rapporté à des axes orthonormés, nous désignerons par g^{ij} le tenseur unité ($g^{ij} = 0$ si $i \neq j$, et $g^{ij} = 1$ si $i = j$). Nous supposons que l'espérance $E(k^{ij})$ est proportionnelle à ce tenseur unité : autrement dit, la perméabilité moyenne est un scalaire k_0 et l'on a :

$$E(k^{ij}) = k_0 g^{ij}$$

Il est alors possible de représenter la perméabilité sous la forme tensorielle :

$$(21,1) \quad k^{ij} = k_0(g^{ij} + \varepsilon \gamma^{ij})$$

ou sous la forme matricielle équivalente :

$$k = k_0(1 + \varepsilon \gamma)$$

le tenseur γ ayant une espérance nulle $E(\gamma^{ij}) = 0$. Le paramètre ε étant supposé petit, la méthode d'approximation de Schwydlér consiste à exprimer les solutions du système de Darcy sous forme de développements limités en ε .

Il est possible, par cette méthode, d'obtenir l'expression du terme général de ces développements, et par suite d'écrire les solutions de l'écoulement sous forme de développements en série entière. Mais d'une part, au delà du terme d'ordre 2, les fonctionnelles donnant le terme général deviennent trop complexes pour que l'on puisse les calculer effectivement, de l'autre la convergence d'un tel développement en série serait fort difficile à établir. C'est pourquoi nous nous contenterons (comme d'ailleurs Schwydlér ⁽¹⁾ lui-même) de développements limités arrêtés au terme d'ordre 2. Il s'agit donc, à strictement parler, d'une théorie des milieux à perméabilités faiblement variables. Mais, en fait, les résultats que nous obtiendrons auront une valeur indicative plus large, et nous permettront, soit de présenter ce qui peut se passer dans le cas général, soit au contraire de démontrer

(1) Sur les travaux de Schwydlér, voir bibliographie à la fin du chapitre VII.

que certaines circonstances sont exclues. Pour alléger les écritures, nous supposons toujours $\mu = 1$.

a) *Les équations de récurrence.* — Cherchons à exprimer la solution du système (18,1) au moyen de développements en ε de la forme :

$$(21,2) \quad \begin{cases} \partial_j p = \partial_j p_0 + \sum \varepsilon^n \partial_j p_n \\ q^i = q_0^i + \sum \varepsilon^n q_n^i \end{cases}$$

où les q_n^i et $\partial_j p_n$ sont des fonctions aléatoires stationnaires à déterminer.

Compte tenu de (21,1) la première équation (18,1) c'est-à-dire la loi de Darcy, donne, en identifiant les termes de même degré en ε :

$$(21,3) \quad \begin{cases} q_0^i = -k_0 g^{ij} \partial_j p_0 \\ q_n^i = -k_0 [g^{ij} \partial_j p_n + \gamma^{ij} \partial_j p_{n-1}] \end{cases}$$

Il suffit ensuite de porter ces expressions dans la deuxième équation (18,2) (c'est-à-dire l'équation de continuité) pour obtenir les équation de récurrence cherchées :

$$(21,4) \quad \begin{cases} \Delta p_0 = 0 \\ \Delta p_n + \partial_i [\gamma^{ij} \partial_j p_{n-1}] = 0 \end{cases}$$

Cherchons à résoudre (formellement) de telles équations. En premier lieu, on remarque que, pour $\varepsilon = 0$, $k = k_0$ est constant, et les solutions stationnaires correspondantes sont également des constantes. Ainsi le terme d'ordre 0 du gradient, ∂p_0 , et la composante correspondante du flux $q_0 = -k_0 \partial p_0$ sont des constantes. Le vecteur constant ∂p_0 peut d'ailleurs être choisi arbitrairement.

La deuxième équation (21,4) est du type de l'équation bien connue de Poisson :

$$(21,5) \quad \Delta f + \Phi = 0$$

dont la solution se construit à l'aide des potentiels harmoniques. Désignons par $\alpha(x)$ le potentiel harmonique (c'est-à-dire la solution élémentaire de l'équation $\Delta f = 0$) de l'espace à N dimensions, soit (r désignant le rayon vecteur)

$$\alpha = \frac{1}{2\pi} \log r \quad \text{pour } N = 2$$

$$\alpha = \frac{1}{4\pi r} \quad \text{pour } N = 3 \quad \text{etc...}$$

On sait que l'équation (21,5) admet la solution :

$$f(x) = \int \alpha(x - \xi) \Phi(\xi) d\xi$$

que l'on écrit aussi, sous forme plus simple, en introduisant le symbole * du produit de convolution :

$$f = \alpha * \Phi$$

Ainsi la solution de l'équation (21,4) peut s'écrire

$$p_n = \alpha * [\partial_i (\gamma^{ij} \partial_j p_{n-1})]$$

Enfin, on sait que pour dériver un produit de convolution il suffit de dériver l'un, quelconque, de ses facteurs. Le terme d'ordre n du gradient peut donc s'écrire :

$$(21,6) \quad \partial_j p_n = \partial_{ij} \alpha * (\gamma^{iu} \partial_u p_{n-1})$$

Prenons l'espérance mathématique des deux membres de l'équation (21,6). On sait que, pour toute constante C , on a dans l'espace à N dimensions

$$\partial_{ij} \alpha * C = -\frac{1}{N} g_{ij} C$$

Par suite nous obtenons l'espérance du terme d'ordre n sous la forme :

$$(21,7) \quad E(\partial_j p_n) = -\frac{1}{N} g_{ij} E(\gamma^{iu} \partial_u p_{n-1})$$

En ce qui concerne l'espérance du flux q_n^i , on tire de (21,3)

$$E(q_n^i) = -k_0 [g^{ij} E(\partial_j p_n) + E(\gamma^{iu} \partial_u p_{n-1})]$$

Il suffit de comparer à (21,7) pour obtenir :

$$(21,8) \quad E(q_n^i) = k_0 (N - 1) g^{ij} E(\partial_j p_n)$$

(sauf, évidemment, pour $n = 0$, puisque q_0^i est donné par la première équation (21,3)).

REMARQUE : Ce qui précède ne constitue pas une démonstration rigoureuse, mais seulement une indication générale. La question de l'existence d'un produit de convolution tel que (21,6) devrait, pour le moins, être examinée de près. Mais les résultats fondamentaux du paragraphe suivant peuvent être justifiés, en toute rigueur, à l'aide d'une méthode un peu plus longue, où l'on remplace les équations (21,4) de récurrence par des équations portant directement sur la fonction de covariance et non plus sur les fonctions aléatoires γ^{ij} elle-mêmes. On trouvera quelques indications sur ce point dans l'Annexe III.

b) *L'approximation d'ordre 2 et le tenseur de Schwydlar.* — En ce qui concerne, tout d'abord, les termes du premier ordre, on remarque que leurs espérances sont nécessairement nulles :

$$E(q_1^i) = E(\partial_j p_1) = 0$$

Cela résulte immédiatement de (21,7) et (21,8). En effet, $\partial_u p_0$ est une constante et l'espérance du tenseur γ est nulle. D'où ce premier résultat intéressant : *L'effet perturbateur de la variabilité des perméabilités ne se manifeste que par des termes du deuxième ordre en ε .*

Cherchons maintenant les termes d'ordre 2. Si, dans la relation (21,7)

nous remplaçons, au deuxième membre, $\partial_u p_1$ par son expression explicite (21,6) :

$$\partial_u p_1 = \int \partial_{uv} \alpha(\xi) \gamma^{vr}(x - \xi) \partial_r p_0 d\xi$$

nous voyons qu'il convient de prendre l'espérance de l'intégrale :

$$\partial_r p_0 \int \partial_{uv} \alpha(\xi) \gamma^{iu}(x) \gamma^{vr}(x - \xi) d\xi$$

Introduisons donc la matrice $R^{ij,ls}(h)$ des covariances de la fonction aléatoire tensorielle γ^{ij}

$$(21,9) \quad R^{ij,ls}(h) = E[\gamma^{ij}(x) \gamma^{ls}(x + h)]$$

On a d'ailleurs manifestement

$$(21,10) \quad R^{ij,ls}(h) = R^{ls,ij}(-h)$$

et $R^{ij,ls}$ est symétrique en i et j ainsi qu'en l et s . Avec cette notation, on voit que l'expression cherchée est :

$$(21,11) \quad E(\partial_j p_2) = -\frac{1}{N} g_{ju} \partial_r p_0 \int \partial_{iv} \alpha(\xi) R^{vr,iu}(\xi) d\xi$$

Nous mettons ainsi en évidence un nouveau tenseur, qui va jouer un rôle fondamental, et que nous appellerons *le tenseur de Schwyidler* S^{ij} :

$$(21,12) \quad S^{ij} = -\int \partial_{ls} \alpha(\xi) R^{il,js}(\xi) d\xi$$

Ce tenseur est manifestement *symétrique* en i et j . On le voit en changeant ξ en $-\xi$, en utilisant (21,10) et en remarquant que $\partial_{ls} \alpha(\xi)$ est paire vis-à-vis de ξ . Nous montrerons un peu plus loin que S^{ij} est également *défini positif*.

Les termes d'ordre 2 s'expriment très simplement à l'aide du tenseur de Schwyidler. De (21,11) et de (21,12) on tire, en effet :

$$(21,13) \quad \left\{ \begin{array}{l} E(\partial_j p_2) = \frac{1}{N} S_j^i \partial_i p_0 \\ E(q_2^i) = k_0 \frac{N-1}{N} S^{il} \partial_l p_0 \end{array} \right.$$

c) *La perméabilité macroscopique constante* K . — Nous allons maintenant évaluer, au deuxième ordre en ε , l'expression de la perméabilité macroscopique constante K^{ij} , et montrer qu'elle ne dépend que du tenseur de Schwyidler. Conformément à la méthodologie générale exposée dans le paragraphe 18, nous devons former un système de N solutions stationnaires $\partial_j p^l, q^{il}$, indexées par l'indice l , et effectuer le produit contracté de $E(q^{il})$ par l'inverse de $E(\partial_j p^l)$. Pour réaliser ce programme, nous remplacerons le terme constant $\partial_j p_0$ du gradient par le tenseur de Kronecker $\delta_j^l (= 1$ si $l = j, = 0$ si $l \neq j)$. Les solutions privilégiées cherchées

sont donc de la forme :

$$\begin{cases} q^{il} = -k_0[q_0^{il} + \varepsilon q_1^{il} + \varepsilon^2 q_2^{il} + \dots] \\ \partial_j p^l = \delta_j^l + \varepsilon \partial_j p_1^l + \varepsilon^2 \partial_j p_2^l + \dots \end{cases}$$

En exprimant les termes d'ordre 2 à l'aide de (21,13), on obtient au 2^e ordre en ε :

$$(21,14) \quad \begin{cases} E(\partial_j p^l) = \delta_j^l + \frac{1}{N} \varepsilon^2 S_j^l \\ E(q^{il}) = -k_0 \left[g^{il} - \frac{N-1}{N} \varepsilon^2 S^{il} \right] \end{cases}$$

Il suffit ensuite d'inverser $E(\partial_j p^l)$, ce qui donne au 2^e ordre en ε :

$$\delta_j^l - \frac{1}{N} \varepsilon^2 S_j^l$$

et de multiplier par $E(q^{il})$ pour obtenir, toujours au 2^e ordre :

$$(21,15) \quad K^{ij} = k_0 [g^{ij} - \varepsilon^2 S^{ij}]$$

ou, sous forme matricielle :

$$\boxed{K = k_0(1 - \varepsilon^2 S)}$$

Ainsi le tenseur de Schwydlar représente la détérioration des perméabilités, c'est-à-dire la différence relative

$$\frac{E(k) - K}{E(k)} = \varepsilon^2 S$$

entre la moyenne arithmétique et la perméabilité macroscopique.

Si nous inversons (au 2^e ordre) la relation (21,15), nous obtenons la résistivité macroscopique $H = K^{-1}$ sous la forme matricielle :

$$(21,16) \quad H = \frac{1}{k_0} (1 + \varepsilon^2 S)$$

Comparons H à la moyenne $E(h)$ des résistivités. Inversant (21,1) au deuxième ordre en ε , nous trouvons :

$$\begin{aligned} h &= \frac{1}{k_0} (1 - \varepsilon \gamma + \varepsilon^2 \gamma^2) \\ E(h) &= \frac{1}{k_0} [1 + \varepsilon^2 E(\gamma^2)] \end{aligned}$$

On notera que les composantes de $E(\gamma^2)$ s'expriment à l'aide de la matrice des covariances $R^{il,js}(h)$ prises en $h = 0$. $E(\gamma^2)$ est une variance matricielle. Elle a pour composantes :

$$g_{ls} E[\gamma^{il}(x) \gamma^{js}(x)] = g_{ls} R^{il,js}(0)$$

Finalement (21,16) se met sous la forme :

$$(21,17) \quad H = E(h) - \frac{\varepsilon^2}{k_0} [E(\gamma^2) - S]$$

Or nous avons démontré au paragraphe 19 que les tenseurs $E(k) - K$ et $E(h) - H$ sont toujours définis positifs. Les relations (21,15) et (21,17) que nous venons d'établir montrent donc que le tenseur de Schwydlér S , ainsi que le tenseur $E(\gamma^2) - S$ sont définis positifs ⁽¹⁾. Les inégalités fondamentales (19,12) se traduisent donc ici de la manière suivante :

$$0 \leq S \leq E(\gamma^2)$$

Indiquons encore (mais sans reproduire la démonstration) les résultats suivants qui montrent qu'au deuxième ordre en ε les fluctuations des isobares et des lignes de courant se rattachent également de manière simple au tenseur de Schwydlér :

$$\begin{cases} E(g^{ij} \partial_i p_1^l \partial_j p_1^s) = S^{ls} \\ E(g_{ij} q_1^i q_1^j) = g_{ij} R^{ij}(0) - S^{ls} \end{cases}$$

Ainsi les fluctuations des isobares sont liées au tenseur S et celles des lignes de courant au tenseur $E(\gamma^2) - S$.

d) *Cas où il existe une règle de pondération.* — Puisque, comme nous venons de le voir, la perméabilité macroscopique, au deuxième ordre en ε , ne dépend que du tenseur de Schwydlér S , l'existence d'une règle de pondération, au sens que nous avons donné à cette expression dans le paragraphe 17, doit se manifester par le fait que S ne dépend que de la matrice $R^{il,js}(0)$ des covariances des γ^{ij} prises au même point d'appui. L'examen de la formule (21,12) montre que cette circonstance ne se produit pas dans le cas général, puisque S dépend effectivement des valeurs prises par la matrice $R(\xi)$ pour toutes les valeurs de l'argument ξ et non pas seulement en $\xi = 0$. Toutefois les dérivées secondes $\partial_{ls} \alpha(\xi)$ sont étroitement apparentées à la mesure de Dirac δ , puisque l'on a toujours

$$\Delta \alpha = g^{ls} \partial_{ls} \alpha = -\delta$$

Autrement dit, $\partial_{ls} \alpha$ présente une composante égale à $-\frac{1}{N} g_{ls} \delta$, sans d'ailleurs se réduire pour autant à cette seule mesure de Dirac. Mais, si la fonction matricielle $R^{il,js}(\xi)$ possède des propriétés convenables de symétrie, il peut arriver que l'action de la distribution $\partial_{ls} \alpha$ sur cette fonction se réduise à celle de sa seule composante de Dirac. Lorsqu'une telle simplification se produit, nous dirons que nous sommes dans *le cas*

⁽¹⁾ Ces propriétés peuvent du reste se déduire directement de l'expression (21,12) du tenseur de Schwydlér. Il suffit d'utiliser la transformation de Fourier, et d'appliquer le théorème de Bochner.

sub-isotrope. Par définition, donc, dans le cas *sub-isotrope*, l'expression (21,12) du tenseur de Schwydlar se réduit à

$$(21,18) \quad S^{ij} = \frac{1}{N} g_{ls} R^{il,js}(0)$$

ou encore, sous une forme matricielle plus parlante, à :

$$(21,19) \quad \boxed{S = \frac{1}{N} E(\gamma^2)}$$

De ce qui précède résulte que *c'est seulement dans le cas sub-isotrope que nous pouvons espérer établir l'existence d'une règle de pondération*. Or, il existe au moins un cas où l'hypothèse de *sub-isotropie* est vérifiée, et où par suite on peut espérer trouver une règle de pondération, c'est le cas où la covariance $R^{il,js}(h)$ ne dépend que du rayon vecteur $r = |h|$. On montre, en effet, facilement à l'aide de considérations de symétrie élémentaires, que l'action de $\partial_{ls}\alpha$ sur une fonction possédant la symétrie sphérique, c'est-à-dire une fonction de la forme $f(r)$, se réduit à celle de sa seule composante de Dirac, c'est-à-dire à $-\frac{1}{N} g_{ls}f(0)$. Autrement dit, dans ce cas, la relation (21,19) est vérifiée.

Comme exemple encore plus particulier de cas où une telle simplification se produit, citons le cas (à l'étude duquel Schwydlar s'est d'ailleurs lui-même limité) où il existe une perméabilité scalaire $k(x)$ [c'est-à-dire $k^{ij} = g^{ij}k(x)$] possédant une fonction de covariance $C(r)$, ne dépendant que du rayon vecteur $|h| = r$. Dans ce cas, en effet, on a

$$R^{il,js}(h) = \frac{1}{k_0^2} g^{il}g^{js}C(r)$$

et les conditions requises ci-dessus sont bien remplies.

L'étude du cas *sub-isotrope* met bien en évidence le rôle déterminant que joue le nombre N des dimensions de l'espace. Pour $N = 1$, en effet, le tenseur de Schwydlar coïncide, selon (21,19), avec sa borne supérieure $E(\gamma^2)$. Au fur et à mesure que N augmente, on voit ensuite S se rapprocher davantage de sa limite inférieure, qui est 0. Ou encore, si nous nous reportons aux équations (21,15) et (21,17), nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} K = k_0 \left[1 - \frac{\varepsilon^2}{N} E(\gamma^2) \right] \\ H = E(h) - \frac{\varepsilon^2}{k_0} \frac{N-1}{N} E(\gamma^2) \end{array} \right.$$

Et, compte tenu de l'expression de $E(h)$ écrite plus haut, d'où l'on déduit :

$$\varepsilon^2 E(\gamma^2) = 1 - \frac{1}{k_0} [E(h)]^{-1}$$

on peut écrire (au 2^e ordre en ε) :

$$(21,20) \quad \boxed{K = \frac{N-1}{N} E(k) + \frac{1}{N} [E(k^{-1})]^{-1}}$$

ou, aussi bien :

$$H = \frac{1}{N} E(h) + \frac{N-1}{N} [E(h^{-1})]^{-1}$$

Bien qu'un tel résultat ne soit établi (quantitativement) qu'au 2^e ordre en ε , il semble légitime de penser que sa signification (qualitative) doit avoir une valeur générale. Cette signification est la suivante : Dans un milieu, possédant des propriétés d'isotropie suffisantes pour qu'une règle de pondération y soit applicable, *la perméabilité se situe à mi-chemin ou aux deux tiers du chemin entre moyenne harmonique et moyenne arithmétique selon que l'espace est à 2 ou 3 dimensions.*

Pour $N = 1$, K coïncide, comme il se doit, avec la moyenne harmonique. Lorsque le nombre N des dimensions de l'espace augmente, on voit la perméabilité macroscopique croître et se rapprocher asymptotiquement de sa limite supérieure, qui est la moyenne arithmétique.

Observons encore ceci : dans le cas sub-isotrope tout au moins, *la règle de pondération géométrique ne peut s'appliquer que dans un espace à $N = 2$ dimensions.* Elle est exclue à 3 dimensions. On vérifie, en effet, facilement que l'on a au 2^e ordre en ε :

$$\left\{ \begin{array}{l} E(\log k) = \log E(k) - \frac{\varepsilon^2}{2} E(\gamma^2) \\ \log K = \log E(k) - \frac{\varepsilon^2}{N} E(\gamma^2) \end{array} \right.$$

Ces expressions ne coïncident donc que pour $N = 2$.

REMARQUE. — Dans les conditions de la proposition 2 du paragraphe 20, nous avons obtenu une autre forme de la règle de pondération, qui était :

$$K = [E(k)]^{\frac{1}{2}} [E(k^{-1})]^{-\frac{1}{2}}$$

On peut se demander dans quelle mesure une règle de la forme

$$K = [E(k)]^{\frac{N-1}{N}} [E(k^{-1})]^{-\frac{1}{N}}$$

dont on peut vérifier qu'elle est compatible avec (21,20) au 2^e ordre en ε , ne pourrait pas s'appliquer dans un espace à N dimensions. Nous ne sommes malheureusement pas en mesure de donner une indication positive sur ce point.

CHAPITRE VII

LES ÉCOULEMENTS NON-UNIFORMES

SOMMAIRE

Paragraphe 22. — Dans une zone de drainage S , on impose la pression 0 sur le contour extérieur et $-P_0$ sur le contour intérieur. Le débit total Q se déduit de la relation énergétique

$$-QP_0 = \int_S q^i \partial_i p \, dx$$

On en déduit un principe d'extremum, et un théorème fondamental exprimant que l'espérance de la perméabilité apparente est toujours comprise entre les moyennes harmonique et arithmétique.

Paragraphe 23. — Développements de Schwyidler limités à l'ordre 2. Espérance et variance du débit se déduisent de la matrice des covariances par des intégrales où figure une fonction de Green.

Paragraphe 24. — Cas des écoulements radiaux, avec une perméabilité scalaire. On évalue les limites pour $R_0 \rightarrow 0$ ou $R_1 \rightarrow \infty$ de l'espérance et de la variance du débit. Pour $R_0 \rightarrow 0$, la perméabilité apparente converge, en moyenne quadratique, vers la valeur $k(0)$ de la perméabilité du puits. Pour $R_1 \rightarrow \infty$, elle converge en moyenne quadratique vers la moyenne harmonique générale. Dans le cas où R_0 et R_1 sont quelconques, l'espérance de la perméabilité apparente peut prendre n'importe quelle valeur comprise entre moyennes harmonique et arithmétique. On est plus près de $[E(k^{-1})]^{-1}$ ou de $E(k)$ selon que R_1 est grand ou R_0 petit. La perméabilité macroscopique constante des écoulements uniformes ne permet pas une description correcte des écoulements non uniformes.

23. — Les inégalités fondamentales.

On a vu que la perméabilité macroscopique K^{ij} , dont l'étude a fait l'objet du chapitre VI, permet une description correcte des écoulements localement uniformes au niveau macroscopique, c'est-à-dire des écoulements pouvant être considérés comme uniformes dans des domaines de dimensions peut-être petites à l'échelle macroscopique, mais suffisamment grandes cependant pour que les propriétés du milieu, liées aux perméabilités régionalisées $k^{ij}(x)$, y apparaissent comme homogénéisées par effet d'ergodicité. Or il existe des classes d'écoulements très importantes pour les applications,

comme les écoulements radiaux, qui ne vérifient nullement cette condition. Au voisinage d'un puits de pompage, l'écoulement n'est pas localement uniforme. La perméabilité apparente ⁽¹⁾ observée n'a donc pas de raison à priori de coïncider avec la perméabilité macroscopique constante des écoulements quasi-uniformes. La méthode de Schwyidler, cependant, peut s'appliquer aussi aux écoulements non uniformes. Dans ce qui suit, nous essayerons, en nous limitant au deuxième ordre, de déterminer les caractéristiques de cette perméabilité apparente (moyenne et variance, car il s'agira d'une quantité aléatoire, et non plus d'une constante, comme dans la première partie).

Après avoir défini les conditions aux limites et établi un théorème fondamental (paragraphe 22), nous déterminerons l'espérance et la variance de la perméabilité apparente par des formules générales où figurera une fonction de Green (paragraphe 23). Nous particulariserons ensuite au cas des écoulements radiaux, en examinant les cas de simplification et les limites $R_0 \rightarrow 0$ et $R_1 \rightarrow \infty$, R_0 et R_1 désignant les rayons intérieur et extérieur de la zone de drainage (paragraphe 24). Enfin nous évoquerons le cas où la perméabilité $k^{ij}(0)$ du puits de pompage est connue, et où par suite la loi spatiale des $k^{ij}(x)$ doit être remplacée par la loi liée (non stationnaire) correspondante.

Nous nous limiterons, en principe, *au cas d'un espace à 2 dimensions*. Mais les résultats des deux premiers paragraphes se transposent sans difficulté à l'espace à 3 dimensions.

La relation énergétique. — Avant d'exposer les résultats de la méthode de Schwyidler pour les écoulements non-uniformes, nous allons établir un théorème fondamental généralisant les inégalités (19,12) du chapitre précédent.

Considérons une zone de drainage S en forme de couronne limitée par un contour intérieur C_0 et un contour extérieur C_1 , de formes d'ailleurs quelconques ⁽²⁾. Dans S règne une perméabilité régionalisée

$$k^{ij} = k_0(g^{ij} + \varepsilon\gamma^{ij})$$

où γ^{ij} est une réalisation d'une fonction aléatoire tensorielle stationnaire d'espérance égale à 0.

Comme condition aux limites, nous nous imposons une pression nulle sur le contour extérieur C_1 , et une pression constante $-P_0$ sur le contour intérieur C_0 (le signe $-$ est introduit pour que $P_0 > 0$ corresponde à

⁽¹⁾ Rappelons que la perméabilité apparente est définie comme la perméabilité qu'il faudrait attribuer à un milieu homogène pour observer, avec les mêmes conditions aux limites, le même débit que dans le milieu réel.

⁽²⁾ Il serait également loisible de limiter latéralement l'aire S par deux parois imperméables joignant C_0 et C_1 .

un pompage). Soit Q le débit total traversant la couronne, et recueilli, par conséquent, à l'intérieur de C_0 . Désignons par $q^i(x)$ et $\partial_j p(x)$ le flux et le gradient de pression en tout point x de la zone drainée S . Le flux est conservatif ($\partial_i q^i = 0$) de sorte que l'on a :

$$q^i \partial_i p = \partial_i (p q^i)$$

Intégrons cette expression dans S et appliquons la formule d'Ostrogradsky :

$$\int_{s_0} q^i \partial_i p \, dx = \int_{C_1} p q^i n_i \, ds + \int_C p q^i n_i \, ds$$

On désigne, suivant l'usage, par n_i les cosinus directeurs de la normale extérieure aux contours C_0 et C_1 . Comme $p = 0$ sur C_1 et $p = -p_0$ sur C_0 il reste simplement :

$$(22,1) \quad \boxed{QP_0 = - \int_S q^i \partial_i p \, dx}$$

Cette relation fondamentale nous permettra de calculer le débit Q , et par suite la perméabilité apparente. Elle possède la même signification énergétique et la même structure que la relation analogue (19,2)

$$E(q^i)E(\partial_i p) = E(q^i \partial_i p)$$

que l'on a établi plus haut dans le cas d'un milieu infini et d'un écoulement macroscopique uniforme : A droite figure l'énergie consommée par les forces de viscosité, à gauche l'énergie que l'on doit fournir de l'extérieur pour entretenir l'écoulement. Cependant, grâce au choix des conditions aux limites, la relation (22,1) s'applique au flux et au gradient eux-mêmes, et non pas seulement à leurs espérances mathématiques comme dans le cas d'un écoulement uniforme.

Principe d'extremum. — Décomposons maintenant la pression ⁽¹⁾ $p(x)$ en deux termes

$$(22,2) \quad p(x) = \varpi(x) + \lambda(x)$$

dont le premier $\varpi(x)$ est une fonction déterminée (non aléatoire) vérifiant les conditions aux limites $\varpi = 0$ sur C_1 et $\varpi = -P_0$ sur C_0 , et à cela près quelconque. Le deuxième terme $\lambda(x)$ est par conséquent une fonction aléatoire qui s'annule sur les deux contours C_0 et C_1 . En utilisant la loi de Darcy, on peut écrire

$$\begin{aligned} - q^i \partial_i p &= k^{ij} \partial_i p \partial_j p \\ &= k^{ij} \partial_i p \partial_j \varpi + k^{ij} \partial_i \varpi \partial_j p - k^{ij} \partial_i \varpi \partial_j \varpi + k^{ij} \partial_i \lambda \partial_j \lambda \\ &= - 2q^i \partial_i \varpi - k^{ij} \partial_i \varpi \partial_j \varpi + k^{ij} \partial_i \lambda \partial_j \lambda \end{aligned}$$

⁽¹⁾ Dans tout ce chapitre, nous raisonnons dans le cas d'un fluide de viscosité unité $\mu = 1$. Cette hypothèse ne nuit pas à la généralité des résultats et permet d'alléger les écritures.

Intégrons dans S . A gauche apparaît QP_0 , selon (22,1). A droite, on remarque que l'on a

$$\int_S q^i \partial_i \varpi \, dx = \int_S \partial_i (\varpi q^i) \, dx = -QP_0$$

à cause du choix des conditions aux limites imposées à ϖ . Ainsi, nous obtenons :

$$(22,3) \quad QP_0 = \int_S k^{ij} \partial_i \varpi \partial_j \varpi \, dx - \int_S k^{ij} \partial_i \lambda \partial_j \lambda \, dx$$

Or, k^{ij} étant définie positive, la deuxième intégrale est toujours positive. Par conséquent, pour toute fonction ϖ vérifiant les conditions aux limites du problème posé, on a l'inégalité :

$$(22,4) \quad QP_0 \leq \int_S k^{ij} \partial_i \varpi \partial_j \varpi \, dx$$

Cette inégalité signifie que, *parmi tous les écoulements possibles compatibles avec les conditions aux limites, l'écoulement réel est celui qui réalise le minimum de la puissance consommée par les forces de viscosité*. On sait qu'une telle condition d'extremum s'exprime par la relation

$$\partial_i (k^{ij} \partial_j p) = 0$$

qui n'est autre chose que l'équation de continuité $\partial_i q^i = 0$.

La relation (22,3) va maintenant nous conduire à un théorème exprimant — comme dans le cas des écoulements uniformes — que la perméabilité apparente est toujours comprise entre les moyennes harmonique et arithmétique. Du fait qu'ici QP_0 est une variable aléatoire, le théorème ne s'énonce qu'en espérance mathématique.

Théorème fondamental. — *L'espérance de la perméabilité apparente est toujours comprise entre les moyennes arithmétique et harmonique, des perméabilités ponctuelles.*

Plus précisément, si l'on désigne par Q_H et Q_A les débits que l'on observerait, avec les mêmes conditions aux limites, si l'on remplaçait le milieu réel par des milieux homogènes de perméabilités constantes égales à $[E(k^{-1})]^{-1}$ et $E(k)$ respectivement, on a les inégalités fondamentales :

$$(22,5) \quad \boxed{Q_H \leq E(Q) \leq Q_A}$$

La deuxième inégalité (22,5) découle directement de (22,4). Prenons, en effet, pour $\varpi(x)$ la pression qui s'établit dans le milieu de perméabilité constante $E(k)$, et passons aux espérances. Il vient, compte tenu de la relation (22,1) :

$$E(QP_0) \leq \int_S E(k^{ij}) \partial_i \varpi \partial_j \varpi \, dx = Q_A P_0$$

Pour démontrer maintenant la première inégalité (22,5), nous mettrons

le flux q^i sous la forme :

$$q^i = \chi^i + \theta^i$$

χ^i et θ^i étant deux vecteurs conservatifs que nous précisons dans un instant. Si h_{ij} désigne la résistivité, inverse de k^{ij} , on a :

$$\begin{aligned} k^{ij} \partial_i p \partial_j p &= h_{ij} q^i q^j \\ &= h_{ij} \chi^i \chi^j + h_{ij} \chi^i \theta^j + h_{ij} \theta^i \chi^j + h_{ij} \theta^i \theta^j \\ &= -2\chi^i \partial_i p - h_{ij} \chi^i \chi^j + h_{ij} \theta^i \theta^j \end{aligned}$$

En intégrant dans S , et en désignant par χ le débit total du flux χ^i , on en tire :

$$2\chi P_0 - \int_S h_{ij} \chi^i \chi^j dx = QP_0 - \int_S \theta^i \theta^j h_{ij} dx$$

Comme h_{ij} est défini positif, on en déduit l'inégalité

$$2\chi P_0 - \int_S h_{ij} \chi^i \chi^j dx \leq QP_0$$

Prenons, maintenant, comme vecteur χ^i , le flux qui s'installe, pour les mêmes conditions aux limites, dans le milieu homogène de résistivité constante $E(h_{ij})$. On a $\chi = Q_{II}$ par définition, et aussi, d'après (22,1) :

$$\int_S E(h_{ij}) \chi^i \chi^j dx = Q_{II} P_0$$

Il suffit donc de prendre les espérances des deux membres de l'inégalité écrite ci-dessus pour obtenir

$$Q_{II} P_0 \leq P_0 E(Q)$$

ce qui achève de démontrer le théorème fondamental.

24. — Les développements de Schwydlar.

Comme dans le paragraphe 21, nous allons chercher des développements de la forme (21,2) vérifiant le système de Darcy : on obtient encore les relations (21,3) qui donnent le flux en fonction du gradient, et les équations de récurrence (21,4) qui vont permettre de déterminer la pression. Mais cette fois nous devons choisir comme fonction $p_0(x)$ la fonction harmonique égale à 0 sur le contour C_1 et à la constante $-P_0$ sur C_0 , c'est-à-dire la solution du problème posé dans le cas $\varepsilon = 0$. Pour $p_n(x)$ nous choisirons la fonction (unique) vérifiant (21,4) et s'annulant sur C_0 et C_1 . Ce sera une fonction aléatoire, mais son gradient ne sera pas stationnaire.

On doit ici introduire la fonction de Green $G(x, y)$ définie comme suit :

1) $G(x, y) - \alpha(x - y)$ est harmonique et régulière dans tout le domaine S . (α est le potentiel harmonique, soit $\frac{1}{2\pi} \log r$ dans l'espace à 2 dimensions.)

2) $G(x, y)$ est nulle lorsque x appartient au contour C_0 ou au contour C_1 .

On sait que ces conditions déterminent, d'une manière unique, la fonction de Green pour tout point y de S , et que de plus cette fonction est symétrique en x et y .

$$G(x, y) = G(y, x)$$

Compte tenu du choix des conditions aux limites, la solution $p_n(x)$ de l'équation (21,4) se met sous la forme :

$$p_n(x) = \int_S G(x, y) \partial_i [\gamma^{ij}(y) \partial_j p_{n-1}(y)] dy$$

Comme $G(x, y)$ s'annule, (d'après la condition 2 et la symétrie en x, y de la fonction de Green) lorsque y appartient à C_0 ou à C_1 , une intégration par parties nous donne :

$$p_n(x) = - \int_S \frac{\partial}{\partial y^i} G(x, y) \gamma^{ij}(xy) \partial_j p_{n-1}(y) dy$$

D'où l'expression du gradient :

$$(23,1) \quad \partial_i p_n(x) = - \int_S \gamma^{ij}(y) \partial_j p_{n-1}(y) \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial y^i} G(x, y) dy$$

Cette expression (dans laquelle la convention de sommation s'applique à l'indice i) peut être comparée à (21,6) : on voit que la fonction de Green joue ici exactement le même rôle que le potentiel harmonique α dans le cas des écoulements uniformes.

Développement de $P_0 Q$. — Pour évaluer simplement le développement de QP_0 limité à l'ordre 2, nous pouvons utiliser la relation (22,3) en posant

$$\begin{cases} \varpi(x) = p_0(x) \\ \lambda(x) = \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \dots \end{cases}$$

Compte tenu de (21,1), nous obtenons ainsi :

$$(23,2) \quad \begin{cases} \frac{P_0 Q}{k_0} = \int_S g^{ij} \partial_i p_0 \partial_j p_0 dx + \varepsilon \int_S \gamma^{ij} \partial_i p_0 \partial_j p_0 dx \\ - \varepsilon^2 \int_S g^{ij} \partial_i p_1 \partial_j p_1 dx + \dots \end{cases}$$

Le coefficient du terme en ε^2 , qui est $-\int \overline{\text{grad } p_1^2} dx$, donc toujours négatif, peut s'explicitier comme suit : on remarque d'abord qu'en raison du choix des conditions aux limites ($p_1 = 0$ sur C_0 et C_1) on a

$$\int_S q_i^i \partial_i p_1 dx = \int_S \partial_i (p_1 q_i^i) dx = 0$$

ensuite on remplace q_i^i par son expression (21,3), ce qui donne :

$$\int_S g^{ij} \partial_i p_1 \partial_j p_1 dx + \int_S \gamma^{ij} \partial_i p_0 \partial_j p_1 dx = 0$$

Enfin, on remplace $\partial_j p_1$ par son expression déduite de (23,1) et on obtient :

$$(23,3) \quad \int_S g^{ij} \partial_i p_1 \partial_j p_1 dx = \int_S \int_S \gamma^{ij}(x) \gamma^{ls}(y) \partial_i p_0(x) \partial_s p_0(y) \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial y^l} G(xy) dx dy$$

Espérance mathématique du débit. — Si nous prenons l'espérance des deux membres de (23,2), nous remarquons que le terme en ε disparaît, puisque $E(\gamma^{ij}) = 0$: la perturbation est ici encore du deuxième ordre en ε . Il reste donc :

$$(23,4) \quad E(P_0 Q) = P_0 Q_0 - k_0 \varepsilon^2 T_2$$

Le premier terme :

$$P_0 Q_0 = k_0 \int_S \overline{\text{grad } p_0^2} dx$$

est celui qui correspond au cas $\varepsilon = 0$ (perméabilité k_0 constante). Le coefficient T_2 du deuxième terme admet les deux expressions suivantes, qui résultent de (23,3) :

$$(23,5) \quad \left\{ \begin{aligned} T_2 &= \int_S E [\overline{\text{grad } p_1^2}] dx \\ &= \int_S \int_S R^{ij,ls}(y-x) \partial_i p_0(x) \partial_s p_0(y) \frac{\partial^2 G(x,y)}{\partial x^j \partial y^l} dx dy \end{aligned} \right.$$

La première expression montre que T_2 est positif. La deuxième, où figure la matrice des covariances telle que nous l'avons définie en (21,9), permet un calcul explicite, sous réserve que l'on sache former la fonction de Green et la solution $\partial_i p_0$ correspondant à une perméabilité constante.

Calcul de la variance $D^2(P_0 Q)$. — D'après (23,2) et au deuxième ordre en ε , la variance s'obtient en prenant l'espérance du carré du terme d'ordre 1 en ε du développement de $P_0 Q$. Ce carré se présente comme l'intégrale double

$$\varepsilon^2 k_0^2 \int_S \int_S \gamma^{ij}(x) \gamma^{ls}(y) \partial_i p_0(x) \partial_j p_0(x) \partial_l p_0(y) \partial_s p_0(y) dx dy$$

et l'on a par conséquent :

$$(23,6) \quad D^2(P_0 Q) = \varepsilon^2 k_0^2 \int_S \int_S R^{ij,ls}(y-x) \partial_i p_0(x) \partial_j p_0(x) \partial_l p_0(y) \partial_s p_0(y) dx dy$$

Cette expression est plus simple que celle de l'espérance mathématique, puisqu'elle ne fait pas intervenir la fonction de Green. Néanmoins, on ne manquera pas d'être frappé par la difficulté des calculs auxquels conduisent

les développements de Schwydlar, même limités à l'ordre 2. Pour essayer de rendre plus parlants les résultats obtenus, nous allons les particulariser au cas des écoulements radiaux.

25. — Cas des écoulements radiaux.

Nous supposons maintenant que les contours C_0 et C_1 sont deux cercles concentriques, centrés à l'origine, de rayons R_0 et R_1 . La zone S de drainage est donc la couronne circulaire comprise entre les deux cercles. C'est là le dispositif classique que l'on utilise pour étudier l'écoulement qui se produit lorsque l'on fait débiter un puits isolé. Le contour extérieur C_1 a, le plus souvent, un caractère purement conventionnel : on s'impose la condition $p = 0$ sur C_1 à seule fin qu'un écoulement permanent puisse s'établir. Il en résultera certaines difficultés, assez troublantes, dans l'interprétation de ce qui suit.

En vue de simplifier au maximum les formules tensorielles du paragraphe précédent, nous supposerons qu'il existe une *perméabilité scalaire*, autrement dit que l'on a

$$k^{ij} = k_0 g^{ij} (1 + \varepsilon \gamma)$$

$\gamma(x)$ étant une fonction aléatoire stationnaire d'espérance nulle. Nous supposerons de plus que la covariance de $\gamma(x)$ est de la forme $R(r)$, c'est-à-dire ne dépend que du rayon vecteur $r = |h|$. Dans ces conditions, la covariance matricielle qui intervient dans les formules générales prend la forme plus simple :

$$(24,1) \quad R^{ij,ls}(h) = g^{ij} g^{ls} R(r)$$

On notera que la valeur $R(0)$ de $R(r)$ en $r = 0$ n'est autre que la variance $D^2(\gamma)$ de γ .

Ces hypothèses sont celles-là mêmes qui figurent dans les travaux de Schwydlar. Nous nous permettrons, dans ce qui suit, de citer plusieurs résultats sans reproduire les calculs intermédiaires. D'une part, en effet, il s'agit de calculs assez longs et, pour tout dire, plutôt fastidieux, de l'autre on pourra toujours se reporter aux articles de Schwydlar.

Avec les pressions 0 sur C_1 et $-P_0$ sur C_0 , les termes d'ordre 0 du développement de Schwydlar s'obtiennent immédiatement. Si l'on désigne par $r = |x|$ le rayon vecteur du point courant, la pression $p_0(x)$ et le débit total Q_0 sont :

$$(24,2) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_0(x) = a \log \frac{r}{R_1} \\ Q_0 = 2\pi a k_0 \\ a = \frac{P_0}{\log R_1 - \log R_0} \end{array} \right.$$

Nous allons maintenant calculer, au 2^e ordre en ε , l'espérance mathématique et la variance du débit Q .

a) *Calcul de la variance du débit Q.* — Compte tenu des hypothèses faites, la formule générale (23,6) se simplifie. Comme on a

$$g^{ij} \partial_i p_0(x) \partial_j p_0(x) = \frac{a^2}{r^2}$$

on obtient, en portant dans (23,6) l'expression (24,1) de la covariance, et en passant en coordonnées polaires :

$$D^2(QP_0) = 2\pi a^4 \varepsilon^2 k_0^2 \int_{R_0}^{R_1} \frac{dr}{r} \int_{R_0}^{R_1} \frac{dr'}{r'} \int_0^{2\pi} R(\rho) d\theta$$

On a posé, pour abrégé

$$\rho = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta}$$

Nous considérerons plutôt la variance relative $D^2\left(\frac{Q}{Q_0}\right)$: elle sera, en effet, égale à la variance relative de la perméabilité apparente. Compte tenu de (24,2), on trouve :

$$(24,3) \quad D^2\left(\frac{Q}{Q_0}\right) = \frac{\varepsilon^2}{2\pi \left(\log \frac{R_1}{R_0}\right)^2} \int_{R_0}^{R_1} \frac{dr}{r} \int_{R_0}^{R_1} \frac{dr'}{r'} \int_0^{2\pi} R(\rho) d\theta$$

Étudions la limite de cette expression pour $R_0 \rightarrow 0$ et $R_1 \rightarrow \infty$ (dans les applications, en effet, R_0 est petit à l'échelle de la covariance $R(r)$, et R_1 est grand). Pour cela, nous allons encadrer la variance relative au moyen de l'inégalité de Schwarz. Tout d'abord, de

$$|R(\rho)| \leq R(0) = D^2(\gamma)$$

on déduit

$$(24,4) \quad D^2\left(\frac{Q}{Q_0}\right) \leq \varepsilon^2 D^2(\gamma)$$

Mais cette première inégalité est trop lâche. On obtient une majoration plus stricte en introduisant la fonction aléatoire auxiliaire définie en intégrant γ sur le cercle C_r de rayon r :

$$X(r) = \int_{C_r} \gamma(x) d\theta$$

Désignons par $C(r)$ et $C(r, r')$ la variance de $X(r)$ et la covariance de $X(r)$ et $X(r')$:

$$\begin{cases} C(r) = 2\pi \int_0^{2\pi} R\left(2r \sin \frac{\theta}{2}\right) d\theta \\ C(r, r') = 2\pi \int_0^{2\pi} R(\rho) d\theta \end{cases}$$

L'inégalité de Schwarz donne :

$$|C(r, r')| \leq \sqrt{C(r)C(r')}$$

Il suffit de porter cette inégalité dans (24,3) pour obtenir la majoration cherchée :

$$(24,5) \quad D^2\left(\frac{Q}{Q_0}\right) \leq \frac{\varepsilon^2}{4\pi^2 \left(\log \frac{R_1}{R_0}\right)^2} \left[\int_{R_0}^{R_1} \sqrt{C(r)} \frac{dr}{r} \right]^2$$

Pour les fonctions $R(r)$ usuelles (ergodiques), $C(r)$ décroît assez vite, lorsque r tend vers l'infini, pour que l'intégrale $\int_{R_0}^{\infty} \sqrt{C} \frac{dr}{r}$ soit convergente. Ainsi, lorsque l'on fait tendre R_0 vers 0 et R_1 vers l'infini, cette intégrale est équivalente à :

$$-\log R_0 \sqrt{C(0)} = -2\pi \log R_0 \sqrt{R(0)}$$

et par suite (24,5) nous donne

$$(24,6) \quad \lim D^2\left(\frac{Q}{Q_0}\right) \leq \varepsilon^2 \lim \left(\frac{\log R_0}{\log \frac{R_1}{R_0}}\right)^2 D^2(\gamma)$$

Nous allons maintenant établir l'inégalité inverse en cherchant à minorer (24,3). A cette fin, nous utiliserons la covariance de $\frac{Q}{Q_0}$ avec la valeur $\gamma(0)$ prise par $\gamma(x)$ à l'origine des coordonnées.

De (23,2) on déduit sans peine :

$$E\left[\gamma(0) \frac{Q}{Q_0}\right] = \frac{\varepsilon}{\log \frac{R_1}{R_0}} \int_{R_0}^{R_1} R(r) \frac{dr}{r}$$

et l'inégalité de Schwarz nous donne

$$(24,7) \quad \frac{\varepsilon^2}{D^2(\gamma)} \left[\frac{1}{\log \frac{R_1}{R_0}} \int_{R_0}^{R_1} R(r) \frac{dr}{r} \right]^2 \leq D^2\left(\frac{Q}{Q_0}\right)$$

Passant ensuite à la limite $R_0 \rightarrow 0$ et $R_1 \rightarrow \infty$, on obtient l'inégalité inverse de (24,6), d'où l'on conclut :

$$(24,8) \quad \lim D^2\left(\frac{Q}{Q_0}\right) = \varepsilon^2 D^2(\gamma) \lim \left(\frac{\log R_0}{\log \frac{R_1}{R_0}}\right)^2$$

On obtient ainsi la généralisation d'un résultat établi par Schwydlar dans le cas particulier d'une fonction de covariance de la forme :

$$(24,9) \quad R(r) = D^2(\gamma) e^{-\lambda r^2}$$

REMARQUE : On doit faire certaines réserves sur la formule (24,8). Cette formule ne peut pas, en effet, être utilisée numériquement, puisque, tant que R_0 et R_1 ont des valeurs finies, la valeur prise par l'expression

$\frac{\log R_0}{\log R_1 - \log R_0}$ dépend du choix des unités : il faut, au numérateur, remplacer R_0 par $\frac{R_0}{b}$, b représentant la « portée » de la covariance $R(r)$.

Dans le cas (24,9) étudié par Schwyidler on obtient, en effet, la formule approchée :

$$\left\{ \begin{aligned} D^2\left(\frac{Q}{Q_0}\right) &= \frac{1 + \left(\log \frac{b}{R_0}\right)^2}{\left(\log \frac{R_1}{R_0}\right)^2} \varepsilon^2 D^2(\gamma) \\ b &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} e^{-\frac{C}{2}} \quad (C = 0,577\ 216\dots) \end{aligned} \right.$$

Mais il y a plus grave. En effet, la limite (24,8) dépend de la manière dont on fait tendre simultanément R_0 vers 0 et R_1 vers l'infini. Selon la plus ou moins grande rapidité de la croissance de l'un et de la décroissance de l'autre, on obtient toute la gamme des valeurs comprises entre les deux bornes suivantes :

Si $R_1 \rightarrow \infty$, R_0 fixe :

$$\lim D^2\left(\frac{Q}{Q_0}\right) = 0$$

Si $R_0 \rightarrow 0$, R_1 fixe :

$$\lim D^2\left(\frac{Q}{Q_0}\right) = \varepsilon^2 D^2(\gamma)$$

Dans le premier cas, la perméabilité apparente converge donc en moyenne quadratique vers son espérance (qui est la moyenne harmonique comme nous le verrons bientôt). Dans le deuxième cas, au contraire, la perméabilité apparente reste aléatoire et sa variance tend vers celle des perméabilités ponctuelles. Or, en général, le choix du rayon R_1 du contour extérieur est purement conventionnel, comme nous l'avons déjà remarqué, et cependant ce choix exerce une assez grande influence sur la détermination de la variance et aussi sur celle de l'espérance, comme nous allons le voir :

b) Calcul de l'espérance du débit Q. — La formule générale (23,4) conduit facilement à la relation :

$$E\left(\frac{Q}{Q_0}\right) = 1 - \frac{\varepsilon^2}{\log \frac{R_1}{R_0}} \int_{R_0}^{R_1} dr \int_{R_0}^{R_1} dr' \int_0^{2\pi} R(\varrho) \frac{\partial^2 G(x, y)}{\partial r \partial r'} d\theta$$

En explicitant la fonction de Green sous forme de développements en série de Fourier, et après une discussion analytique assez longue, que nous ne reproduirons pas, il est possible d'établir la formule d'approximation suivante, valable lorsque R_0 est petit et R_1 grand à l'échelle de la covariance $R(r)$:

$$(24,10) \quad E\left(\frac{Q}{Q_0}\right) = 1 + D^2\left(\frac{Q}{Q_0}\right) - \varepsilon^2 D^2(\gamma)$$

Cette espérance est toujours inférieure à l'unité, comme on le voit facilement à l'aide de (24,4). Il y a donc toujours détérioration de la perméabilité apparente, relativement au cas d'un milieu homogène. L'espérance est toujours comprise entre les deux valeurs qui correspondent aux deux cas extrêmes suivants :

Si $R_1 \rightarrow \infty$, R_0 fixe :

$$\lim E \left(\frac{Q}{Q_0} \right) = 1 - \varepsilon^2 D^2(\gamma)$$

Si $R_0 \rightarrow 0$, R_1 fixe :

$$\lim E \left(\frac{Q}{Q_0} \right) = 1$$

Aucune de ces deux limites ne correspond à ce que l'on observerait avec un milieu homogène possédant la perméabilité macroscopique constante $K = k_0 \left[1 - \frac{\varepsilon^2}{2} D^2(\gamma) \right]$ que le milieu réel présente vis-à-vis des écoulements uniformes. Au lieu de

$$1 - \frac{\varepsilon^2}{2} D^2(\gamma)$$

en effet, on observe $1 - \varepsilon^2 D^2(\gamma)$ dans le cas $R_1 \rightarrow \infty$ avec R_0 fixe : cette valeur correspond à la *moyenne harmonique*, et au contraire on observe la valeur 1 pour $R_0 \rightarrow 0$ avec R_1 fixe, ce qui correspond à la *moyenne arithmétique*. Dans le cas général, on obtiendra n'importe quelle valeur comprise entre ces deux limites, selon la rapidité de la croissance de R_1 et de la décroissance de R_0 . On sera plus proche de la moyenne harmonique si R_1 croît plus vite que R_0 ne décroît, et inversement.

c) *Loi liée du débit lorsque l'on connaît la perméabilité à l'origine.* — Dans les applications, on connaît en général la perméabilité du puits de pompage, c'est-à-dire (pratiquement) $k(0)$. Avant donc de passer aux conclusions générales, il est intéressant de préciser ce que deviennent les résultats précédents lorsque l'on remplace la loi spatiale de $k(x)$ par la même loi prise conditionnellement, c'est-à-dire liée par la connaissance de la perméabilité $k(0)$ à l'origine. Nous avons effectué les calculs correspondants, qui sont fort longs et ne peuvent pas être reproduits ici, en supposant que cette loi spatiale est Gaussienne. Les résultats obtenus doivent cependant avoir une valeur indicative plus générale.

En ce qui concerne l'espérance liée du débit, on obtient une expression de la forme suivante :

$$(24,11) \quad E \left(\frac{Q}{Q_0} \middle| \gamma(0) \right) = 1 + \varepsilon \gamma(0) \frac{\log \frac{b}{R_0}}{\log \frac{R_1}{R_0}} + \varepsilon^2 [A D^2(\gamma) + \overline{B \gamma(0)^2}]$$

b est la portée de la covariance, dont nous avons explicité ci-dessus la

valeur dans le cas d'une covariance en $e^{-\lambda r^2}$. A et B sont des fonctions assez complexes de R_0 , R_1 et des paramètres de la loi. Pour R_1 grand ou R_0 petit on observe les circonstances suivantes :

Si $R_1 \rightarrow \infty$, R_0 fixe : la limite est $1 - \varepsilon^2 D^2(\gamma)$

Si $R_0 \rightarrow 0$, R_1 fixe : la limite est $1 + \varepsilon \gamma(0)$

Dans le premier cas (R_1 infini) la perméabilité apparente coïncide avec la moyenne harmonique, et n'est pas influencée par la connaissance de la perméabilité à l'origine.

Dans le deuxième cas (R_0 nul), au contraire, la perméabilité apparente coïncide avec la perméabilité à l'origine.

Ces résultats ne s'appliquent pas seulement en valeur probable, mais à la valeur elle-même de la perméabilité apparente. En effet, on obtient pour la variance liée l'expression suivante :

$$D^2 \left[\frac{Q}{Q_0} \middle| \gamma(0) \right] = \frac{\varepsilon^2}{\left(\log \frac{R_1}{R_0} \right)^2} D^2(\gamma)$$

Cette variance liée tend vers 0 lorsque l'on fait tendre, séparément ou simultanément, R_0 vers 0 et R_1 vers l'infini. Ainsi le débit Q converge en moyenne quadratique vers son espérance mathématique (24,11).

d) Conclusions générales sur les écoulements non uniformes. — Sans même parler de l'extrême complication des calculs auxquels conduit la méthode de Schwydlér, les résultats que nous avons indiqués font apparaître les écoulements non uniformes sous un aspect assez complexe. La perméabilité apparente, en effet, est une variable aléatoire, et ne coïncide même pas en valeur probable avec la perméabilité macroscopique constante K des écoulements uniformes. Son espérance, peut prendre n'importe quelle valeur comprise entre les limites habituelles $E(k)$ et $[E(k^{-1})]^{-1}$. Si le contour extérieur de la zone de drainage est très éloigné, elle est plutôt plus proche de la moyenne harmonique. Si, au contraire, le diamètre du puits est très petit, elle se rapproche davantage de la moyenne arithmétique. Lorsque la perméabilité du puits de pompage est connue, la perméabilité apparente elle-même (et non plus sa valeur probable) tend à se rapprocher de la perméabilité du puits, ou, au contraire, de la moyenne harmonique générale, selon que le diamètre du puits devient très petit ou que le contour extérieur s'éloigne indéfiniment. Si l'on ajoute à cela le caractère le plus souvent conventionnel du choix de ce contour extérieur, on conçoit l'embarras des utilisateurs, et la nécessité pour eux de recourir à une règle empirique simple, même grossièrement approchée, telle que la règle de pondération géométrique, qui a au moins l'avantage de tomber à mi-chemin des deux limites extrêmes possibles. Il faut malheureusement se rendre à l'évidence : dans un milieu à perméabilités régionalisées, il n'existe pas de loi de Darcy macroscopique permettant de décrire globalement les écoulements non-uniformes.

*BIBLIOGRAPHIE SOMMAIRE
POUR LA DEUXIÈME PARTIE*

- SCHWYDLER (M. I.). — « Les courants d'écoulement dans les milieux hétérogènes », *Izv. Akad. Nauk SSSR, mekh. i maš.*, 1962, n° 3, 185-190.
- « Courants d'écoulement plans dans les milieux à hétérogénéité aléatoire », *Izv. Akad. Nauk, Mekh. i Maš.*, 1962, n° 6, 65-71.
- « Sur les caractéristiques moyennes des courants d'écoulement dans les milieux à hétérogénéité aléatoire », *Izd. Akad. Nauk SSSR, mekh. i. maš.*, 1963, n° 4, 127-129.
- « Sur la précision de la prévision du débit des puits », *Izd. Akad. Nauk. SSSR, mekh. i mas.*, 1963, n° 5, 148-150.
- « Sur les calculs hydrodynamiques des écoulements de filtration dans les milieux poreux hétérogènes, *Dobyča nefti, teorija i praktika, Annuaire* 1963, 107-118, VNII.
- MATHERON G. — « Structure et composition des perméabilités, *Revue de l'I.F.P.*, Avril 1966.
- « Genèse et signification énergétique de la loi de Darcy, *Revue de l'I.F.P.*, (Nov. 1966).
- « Méthode de Schwydlér et règles de pondération, *Revue I.F.P.*
-

ANNEXE I

COMPLÉMENTS SUR LA TRANSFORMATION DE SERRA ET LES GRANULOMÉTRIES

1. — Propriétés algébriques.

a) Les opérations $A \oplus B$ et $A \ominus B$ ont été définies au premier chapitre par les formules équivalentes

$$(1) \quad \begin{cases} A \oplus B = \bigcup_{y \in A} B_y = \bigcup_{x \in B} A_x = \{z : A \cap \check{B}_z \neq \emptyset\} \\ A \ominus B = (A^c \oplus B)^c = \bigcap_{x \in B} A_x = \{z : \check{B}_z \subset A\} \end{cases}$$

On vérifie immédiatement que l'opération $A \oplus B$ est *associative* et *commutative*. Elle possède un *élément neutre* — l'ensemble $\{0\}$ constitué du vecteur nul — et un *élément permis*, l'ensemble vide. Elle n'admet pas d'opération inverse, et définit donc seulement sur $\mathfrak{F}(R^n)$ une structure de *demi-groupe* d'ailleurs abélien.

b) De (1) on déduit :

$$\begin{aligned} (A \oplus B) \ominus C &= \bigcap_{y \in C} \bigcup_{x \in B} A_{x+y} \\ (A \ominus C) \oplus B &= \bigcup_{x \in B} \bigcap_{y \in C} A_{x+y} \end{aligned}$$

D'où résulte l'inclusion, en général *stricte*

$$(A \ominus C) \oplus B \subset (A \oplus B) \ominus C$$

c) Par contre, on a l'égalité

$$(A \ominus B) \ominus C = (A \ominus C) \ominus B = A \ominus (B \oplus C)$$

En effet :

$$(A \ominus B) \ominus C = \bigcap_{x \in C} (A \ominus B)_x = \bigcap_{x \in C} \bigcap_{y \in B} A_{x+y} = \bigcap_{z \in B \oplus C} A_z$$

d) Rappelons les règles d'inclusion exposées dans le chapitre 1 :

$$B \subset B' \implies \begin{cases} A \oplus B \subset A \oplus B' \\ A \ominus B \supset A \ominus B' \\ B \ominus A \subset B' \ominus A \end{cases}$$

e) On a $B \ominus \check{B} \supset \{0\}$, mais non, en général, l'égalité. En effet, $B = B_0$ est inclus dans B , donc $0 \in B \ominus \check{B}$. Mais l'inclusion peut être stricte. Toutefois, si un point $z \neq 0$ appartient à $B \ominus \check{B}$, c'est-à-dire si $B_z \subset B$, on a aussi (par translation) $B_{2z} \subset B_z \subset B$ et, par récurrence $B_{nz} \subset B$, c'est-à-dire $nz \in B \ominus \check{B}$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Par exemple, si $B = \{0, 1, 2, \dots\}$ est constitué des points d'abscisses entières d'un axe de coordonnée, on a $B_z \subset B$ pour tout $z \in B$ et par suite $B = B \ominus \check{B}$.

Mais, si B est borné, on a l'égalité $B \ominus \check{B} = \{0\}$: en effet, $B \ominus \check{B}$ est également borné et ne peut pas contenir la suite des nz pour $z \neq 0$.

f) De même, si $B \subset C$, $B \ominus \check{C}$ n'est pas forcément vide. On voit comme ci-dessus que si $z \in B \ominus \check{C}$, alors tous les nz appartiennent à $B \ominus \check{C}$. Toutefois 0 n'appartient à $B \ominus \check{C}$ que si, et seulement si $B = C$, car :

$$0 \in B \ominus \check{C} \iff C \subset B$$

Donc, si B est borné et si l'inclusion $B \subset C$ est stricte, $B \ominus \check{C}$ est vide : en effet, 0 n'appartient pas à $B \ominus \check{C}$ et par ailleurs, $B \ominus \check{C}$, étant borné, ne peut pas contenir la suite des nz pour $z \neq 0$.

g) L'opération \oplus distribue la réunion. En effet :

$$A \oplus (B \cup C) = \bigcup_{x \in A} (B_x \cup C_x) = \left(\bigcup_{x \in A} B_x \right) \cup \left(\bigcup_{x \in A} C_x \right)$$

D'où la règle suivante, et deux autres qui s'en déduisent par passage aux complémentaires :

$$\begin{cases} A \oplus (B \cup C) = (A \oplus B) \cup (A \oplus C) \\ A \ominus (B \cup C) = (A \ominus B) \cap (A \ominus C) \\ (B \cap C) \ominus A = (B \ominus A) \cap (C \ominus A) \end{cases}$$

Relativement à l'intersection, on trouve seulement l'inclusion suivante (et les deux autres qui s'en déduisent par dualité)

$$\begin{cases} A \oplus (B \cap C) \subset (A \oplus B) \cap (A \oplus C) \\ A \ominus (B \cap C) \supset (A \ominus B) \cup (A \ominus C) \\ (B \cup C) \ominus A \supset (B \ominus A) \cup (C \ominus A) \end{cases}$$

h) Si A est convexe, $A \ominus B$ est convexe quel que soit B .

En effet $A \ominus B = \bigcap_{x \in B} A_x$ est convexe comme intersection de convexes.

i) Si A et B sont convexes, $A \oplus B$ est convexe.

En effet, soient $z_1 = a_1 - b_1$ et $z_2 = a_2 + b_2$ avec $a_1, a_2 \in A$ et $b_1, b_2 \in B$. $\lambda z_1 + (1 - \lambda)z_2 = \lambda a_1 + (1 - \lambda)a_2 + \lambda b_1 + (1 - \lambda)b_2$ ($0 \leq \lambda \leq 1$)

est somme d'un vecteur de A et d'un vecteur de B , donc appartient à $A \oplus B$.

j) Si A et B sont convexes, l'ouverture et la fermeture de A selon B sont également convexes.

Conséquence immédiate de h) et i).

k) Composition d'ouvertures ou de fermetures. Si B et C sont deux ensembles quelconques, on a les inclusions :

$$A_{\omega_{B \oplus C}} \subset (A_{\omega_B})_{\omega_C} \subset A_{\omega_B} \cap A_{\omega_C}$$

En effet $A_{\omega_{B \oplus C}} = [A \ominus (\check{B} \oplus \check{C})] \oplus B \oplus C$ est ouvert à la fois selon B et selon C et contenu dans A : Ouvert selon B , il est contenu dans A_{ω_B} ; ouvert selon C , il est contenu dans $(A_{\omega_B})_{\omega_C}$. La deuxième inclusion est évidente.

Si C est ouvert selon B on a $(A_{\omega_B})_{\omega_C} = A_{\omega_C}$. Si B est ouvert selon C , on a au contraire $(A_{\omega_B})_{\omega_C} = A_{\omega_B}$.

En effet, si B est ouvert selon C il est de la forme $B' \oplus C$. Alors $A_{\omega_B} = (A \ominus \check{B}) \oplus B' \oplus C$ est ouvert selon C , d'où $(A_{\omega_B})_{\omega_C} = A_{\omega_B}$.

Si C est ouvert selon B , il est de la forme $C' \oplus B$. On a :

$$(A_{\omega_B})_{\omega_C} = [(A_{\omega_B} \ominus \check{B}) \ominus \check{C}'] \oplus C$$

Mais $A_{\omega_B} \ominus \check{B} = [(A \ominus \check{B}) \oplus B] \ominus \check{B} = A \ominus \check{B}$. Il reste donc :

$$(A_{\omega_B})_{\omega_C} = [(A \ominus \check{B}) \ominus \check{C}'] \oplus C = [A \ominus (\check{B} \oplus \check{C}')] \oplus C = A_{\omega_C}$$

Par dualité on a des résultats analogues pour les fermetures :

$$\begin{cases} C_{\omega_B} = C \implies (\Lambda_{f_B})_{f_C} = \Lambda_{f_C} \\ B_{\omega_C} = B \implies (\Lambda_{f_B})_{f_C} = \Lambda_{f_B} \end{cases}$$

2. — Propriétés topologiques.

a) Si \dot{B} est un ouvert topologique, $\Lambda \oplus \dot{B}$ est ouvert et $\Lambda \ominus \dot{B}$ est fermé quel que soit A . Si \bar{C} est un fermé topologique, $\bar{C} \ominus A$ est fermé.

En effet, $A \oplus \dot{B} = \bigcup_{x \in \Lambda} \dot{B}_x$ est ouvert comme réunion d'ouverts. Les deux autres énoncés s'en déduisent par dualité.

b) \dot{B} étant ouvert, on peut remplacer A par son ouverture dans l'expression $A \ominus \dot{B}$.

En effet, $z \in A \ominus \dot{B} \iff \hat{B}_z \subset A \iff \hat{B}_z \subset \dot{A} \iff z \in \dot{A} \ominus \dot{B}$.

Par dualité, on obtient deux autres propositions :

$$\begin{cases} A \ominus \dot{B} = \dot{A} \ominus \dot{B} \\ A \oplus \dot{B} = \bar{A} \oplus \dot{B} \\ \bar{B} \ominus A = \bar{B} \ominus \bar{A} \end{cases}$$

c) Désignons par \dot{B}_λ et \bar{B}_λ les boules ouverte et fermée de centre 0

et de rayon λ . On a :

$$\begin{cases} \dot{A} = \bigcup_{\lambda > 0} A \oplus \dot{B}_\lambda = \bigcup_{\lambda > 0} A \oplus \bar{B}_\lambda \\ \bar{A} = \bigcap_{\lambda > 0} A \oplus \dot{B}_\lambda = \bigcap_{\lambda > 0} A \oplus \bar{B}_\lambda \end{cases}$$

Démonstration immédiate. On a, par exemple :

$$x \in \bigcup_{\lambda > 0} A \oplus \dot{B}_\lambda \iff \exists \lambda > 0 : \dot{B}_\lambda(x) \subset A \iff x \in \dot{A}$$

d) Si \bar{A} est fermé et K compact (donc fermé et borné) $\bar{A} \oplus K$ est fermé.

En effet, soit $z \notin \bar{A} \oplus K$, c'est-à-dire $\check{K}_z \cap \bar{A} = \emptyset$. \bar{A} étant fermé et K compact, il existe une boule B_ε de rayon $\varepsilon > 0$ telle que \bar{A} et $\check{K}_z \oplus B_\varepsilon$ soient disjoints. Mais :

$$(\check{K}_z \oplus B_\varepsilon) \cap \bar{A} = \emptyset \iff z \notin \bar{A} \oplus K \oplus B_\varepsilon \iff B_\varepsilon(z) \cap \bar{A} \oplus K = \emptyset$$

Par suite $\bar{A} \oplus K$ est fermé.

Si K est un fermé quelconque non compact, la propriété peut être fautive. Par dualité, K étant un compact, $\dot{A} \oplus K$ est ouvert et $K^c \oplus \bar{A}$ est ouvert.

e) Si B est borné, la fermeture de $A \oplus B$ est $\bar{A} \oplus \bar{B}$.

D'après d), $\bar{A} \oplus \bar{B}$ est fermé et contient $A \oplus B$. Donc :

$$\bar{A} \oplus \bar{B} \supset \overline{A \oplus B}$$

Montrons l'inclusion inverse. D'après c), on a :

$$\overline{A \oplus B} = \bigcap_{\lambda > 0} A \oplus B \oplus \dot{B}_\lambda$$

Mais, d'après b), $B \oplus \dot{B}_\lambda = \bar{B} \oplus \dot{B}_\lambda$ et, cet ensemble étant ouvert :

$$A \oplus \bar{B} \oplus \dot{B}_\lambda = \bar{A} \oplus (\bar{B} \oplus \dot{B}_\lambda) = \bar{A} \oplus \bar{B} \oplus \dot{B}_\lambda$$

$$\text{D'où : } \overline{A \oplus B} = \bigcap_{\lambda > 0} \bar{A} \oplus \bar{B} \oplus \dot{B}_\lambda = \overline{(\bar{A} \oplus \bar{B})} \supset \bar{A} \oplus \bar{B}$$

Par dualité, on obtient pour tout ensemble B borné :

$$\begin{cases} \overline{A \oplus B} = \bar{A} \oplus \bar{B} \\ \widehat{A \oplus B} = \dot{A} \oplus \bar{B} \\ \widehat{B^c \oplus A} = \bar{B}^c \oplus \bar{A} \end{cases}$$

Avec les boules B_λ , en particulier, on a pour $\lambda \geq \mu$

$$\begin{aligned} \dot{B}_\lambda \oplus \dot{B}_\mu &= \bar{B}_\lambda \oplus \dot{B}_\mu = \dot{B}_\lambda \oplus \bar{B}_\mu = \dot{B}_{\lambda+\mu} \\ \bar{B}_\lambda \oplus \bar{B}_\mu &= \bar{B}_{\lambda+\mu} \\ \bar{B}_\lambda \oplus \bar{B}_\mu &= \bar{B}_\lambda \oplus \dot{B}_\mu = \dot{B}_\lambda \oplus \bar{B}_\mu = B_{\lambda-\mu} \\ \dot{B}_\lambda \oplus \bar{B}_\mu &= \dot{B}_{\lambda-\mu} \end{aligned}$$

f) Si \bar{A} est un convexe topologiquement fermé, et si B est un ensemble borné quelconque, \bar{A}_f est fermé selon B :

$$\bar{A}_f = (\bar{A} \oplus \check{B}) \ominus B = \bar{A}$$

En effet, soit $z \in \bar{A}_f$, c'est-à-dire $\check{B}_z \subset \bar{A} \oplus \check{B}$, soit encore :

$$\forall u \in \check{B}, \exists a \in \bar{A}, b \in \check{B} : z + u = a + b$$

Partant de $u \in \check{B}$, on obtient deux suites $a_n \in \bar{A}$ et $b_n \in \check{B}$ définies par :

$$\begin{aligned} z + u &= a_1 + b_1 \\ z + b_1 &= a_2 + b_2 \\ &\dots\dots\dots \\ z + b_{n-1} &= a_n + b_n \end{aligned}$$

D'où

$$z + \frac{u}{n} = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} + \frac{b_n}{n}$$

B étant borné, $\frac{u}{n}$ et $\frac{b_n}{n}$ tendent vers 0 pour $n \rightarrow \infty$ et par suite $\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \rightarrow z$. Comme \bar{A} est convexe et fermé, $z \in \bar{A}$ et $\bar{A}_f \subset \bar{A}$,

d'où l'égalité puisque l'inclusion inverse est toujours vraie.

Si A est convexe, mais non topologiquement fermé, on obtient seulement :

$$A \subset A_f \subset \bar{A}$$

Mais, pour A convexe quelconque, si B est ouvert et borné on a encore $A_f = \bar{A}$.

En effet, A_f est alors un fermé topologique contenant A donc aussi \bar{A} .

g) Soient A un ensemble, C son enveloppe convexe fermée, et B un ensemble borné quelconque. La fermeture de A selon B est contenue dans C.

$$A_f = (A \oplus \check{B}) \ominus B \subset \bar{C}$$

En effet, on a $A \subset \bar{C}$ d'où $A_f \subset \bar{C}_f$. Mais $\bar{C}_f = \bar{C}$ d'après f).

Lorsque A est borné, il en est de même de son enveloppe convexe fermée C. Si les B_λ sont une famille d'ensembles bornés dont une dimension au moins augmente indéfiniment avec λ , la fermeture A_{f_λ} de A selon B_λ reste contenue dans l'ensemble borné fixe C, et par suite aussi la limite supérieure des A_{f_λ} :

$$\lim \text{Sup } A_{f_\lambda} \subset \bar{C}$$

h) Si A et B sont connexes, $A \oplus B$ est connexe.

En effet, soit $b \in B$. A_b est connexe et contenu dans $A \oplus B$, donc contenu dans une composante connexe C de $A \oplus B$: $A_b \subset C$. Pour tout $x \in A$, $x + b \in C$. Mais $(x + b) \in A_b \cap B_x$. Donc $A_b \cup B_x$ est connexe, comme union de deux connexes non disjoints, et ceci entraîne $B_x \subset C$.

D'où :

$$A \oplus B = \bigcup_{x \in A} B_x \subset C$$

ce qui montre que $A \oplus B$ est connexe.

On notera que $A \ominus B$ peut très bien ne pas être connexe.

i) Soit A un ensemble et $C_i, i \in I$, ses composantes connexes. Soit B un ensemble connexe. On a :

$$A \ominus B = \bigcup_{i \in I} (C_i \ominus B)$$

Tout d'abord, $C_i \subset A \implies C_i \ominus B \subset A \ominus B$ et

$$\bigcup_{i \in I} (C_i \ominus B) \subset A \ominus B$$

L'inclusion inverse — fautive en général — est vérifiée ici du fait que les C_i sont les composantes connexes de A . Soit, en effet, $z \in A \ominus B$ ou $\check{B}_z \subset A$. Étant connexe, \check{B}_z est contenu dans une composante connexe C_i particulière de A , soit $\check{B}_z \subset C_i$ ou $z \in C_i \ominus B$. On en déduit :

$$A \ominus B \subset \bigcup_{i \in I} (C_i \ominus B)$$

j) Vis-à-vis de l'ouverture selon une partie connexe B , les composantes connexes C_i d'un ensemble A se comportent indépendamment les unes des autres. On a :

$$A_{\omega_B} = \bigcup_i (C_i)_{\omega_B}$$

En effet, d'après i), on a d'abord $A \ominus \check{B} = \bigcup_i (C_i \ominus \check{B})$. Par suite :

$$(A \ominus \check{B}) \oplus B = \left(\bigcup_i C_i \ominus \check{B} \right) \oplus B = \bigcup_i ((C_i \ominus \check{B}) \oplus B) = \bigcup_i (C_i)_{\omega_B}$$

La signification de ce résultat est la suivante : les composantes connexes C_i figurent les grains individualisables d'un milieu poreux. L'ouverture de A selon B donne un renseignement granulométrique au sens strict, somme des renseignements que fournirait chaque grain ouvert isolément, et ne tenant pas compte, par conséquent, des relations entre les grains : c'est la granulométrie des grains.

Mais vis-à-vis de la fermeture, des interférences entre grains se produisent inévitablement. La fermeture des grains apporte un renseignement d'ordre textural. Comme la fermeture des grains est aussi l'ouverture des pores, chaque composante connexe des pores s'y comporte indépendamment. Ainsi, la granulométrie des pores renseigne sur la texture des grains, et réciproquement la granulométrie des grains renseigne sur la texture des pores.

ANNEXE II

COMPLÉMENTS SUR L'AXIOMATIQUE DES MILIEUX POREUX ALÉATOIRES

Un examen rapide des fondements sur lesquels repose la théorie des milieux poreux aléatoires comporte deux groupes de tâches distincts :

- construction d'un espace probabilisé (Ω, \mathcal{F}, P) ;
- examen des questions de mesurabilité.

L'espace Ω des événements élémentaires sera un sous-ensemble de l'ensemble $\mathfrak{F}(R^n)$ de toutes les parties de l'espace euclidien R^n . Tout $\omega \in \Omega$ est identifié à un ensemble $A_\omega \subset R^n$. Cet espace Ω ne coïncidera pas avec $\mathfrak{F}(R^n)$. Il ne devra contenir que des ensembles A_ω de structures relativement simple, susceptibles de représenter la réalité d'un milieu poreux. Par exemple, l'ensemble des points de coordonnées irrationnelles ne devra pas faire partie de Ω . Dans ce qui suit, nous prendrons pour Ω l'ensemble des ouverts-fermés (des ensembles A tels que $A = \overline{A}$).

La σ -algèbre \mathcal{F} sur Ω devra être suffisamment large pour que des propositions telles que « l'ensemble ouvert B est contenu dans A » ou « $B \cap A = \emptyset$ » définissent des événements de \mathcal{F} . Enfin, il faudra montrer qu'il est effectivement possible de construire une probabilité P sur (Ω, \mathcal{F}) et, notamment, examiner si une telle probabilité est entièrement définie par la donnée de sa loi spatiale.

Cette construction de l'espace (Ω, \mathcal{F}) conduit à une application

$$k(x, \omega) : (R^n \times \Omega) \rightarrow \{0, 1\}$$

qui, à tout élément (x, ω) du produit $R^n \times \Omega$ fait correspondre le nombre 0 ou 1 selon la règle :

$$k(x, \omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A_\omega \\ 0 & \text{si } x \notin A_\omega \end{cases}$$

Cette application doit être telle qu'à x_0 fixé $k(x_0, \omega)$ soit une variable aléatoire sur Ω . Autrement dit $k(x, \omega)$ doit être mesurable en ω . Lorsque cette condition est vérifiée, $k(x, \omega)$ est une fonction aléatoire en tout

ou rien. Nous nous imposerons, en fait, une condition plus forte exprimant que $k(x, \omega)$ est une *fonction aléatoire mesurable*: l'application $k(x, \omega)$ du produit $\mathbb{R}^n \times \Omega$ muni de la σ -algèbre produit $\mathcal{B} \otimes \mathcal{G}$ (\mathcal{B} , σ -algèbre de Borel sur \mathbb{R}^n) devra elle-même être mesurable. Moyennant cette condition de mesurabilité, l'intégrale :

$$X(\omega) = \int_{A_\omega} dF(x) = \int k(x, \omega) dF(x)$$

définie pour toute mesure positive F sera mesurable en ω (définira une variable aléatoire) et vérifiera :

$$E(X) = \int E[k(x, \omega)] dF(x) = \int P(x \in A) dF(x)$$

En particulier, la possibilité de *l'inférence statistique* découlera de la formule :

$$\int_{\mathbb{R}^n} P(x \in A) dx = E[\text{Mes } A \cap B]$$

valable pour tout ensemble B mesurable et de mesure finie.

1. — σ -algèbre $\sigma(\mathcal{V})$ sur $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$.

Désignons par $V_K^{K'}$ la famille des ensembles A de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ contenant un ensemble K et disjoints d'un ensemble K' .

$$V_K^{K'} = \{A : A \subset \mathbb{R}^n, K \subset A, K' \cap A = \emptyset\}$$

Lorsque $K = \{x_1, \dots, x_k\}$ et $K' = \{y_1, \dots, y_{k'}\}$ sont deux ensembles *finis* de \mathbb{R}^n , $V_K^{K'}$ est la famille des A telle que les points $x_1 \dots x_k \in A$ et $y_1 \dots y_{k'} \notin A$. C'est elle qui intervient dans la définition de la loi spatiale $P(K, K') = P(V_K^{K'})$ d'un ensemble aléatoire A . Elle doit nécessairement appartenir à toute σ -algèbre sur $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ permettant la construction d'une loi spatiale. Soit \mathcal{V} l'ensemble des $V_K^{K'}$ lorsque K et K' décrivent les parties finies de \mathbb{R}^n . La plus petite σ -algèbre à laquelle nous puissions nous intéresser est ainsi la σ -algèbre $\sigma(\mathcal{V})$ engendrée par \mathcal{V} . Inversement, on peut montrer que toute loi spatiale $P(V_K^{K'})$ ($V_K^{K'} \in \mathcal{V}$) définit de manière unique une probabilité sur $(\mathcal{F}(\mathbb{R}^n), \sigma(\mathcal{V}))$. Pour établir ce point, il suffit, d'après des résultats classiques ⁽¹⁾, de montrer que \mathcal{V} est à la fois une semi-algèbre de Boole et une classe compacte.

\mathcal{V} est une *semi-algèbre de Boole*. — En effet, pour $K = K'$, $V_K^{K'}$ est la famille vide, et V_\emptyset^\emptyset est $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$. En deuxième lieu, \mathcal{V} est stable pour

⁽¹⁾ Voir par ex. J. NEVEU *Bases mathématiques du calcul des probabilités*, Masson 1964, page 25 et suiv.

l'intersection finie, comme on le voit immédiatement :

$$(1) \quad V_{K_1}^{K'_1} \cap V_{K_2}^{K'_2} = V_{K_1 \cup K_2}^{K'_1 \cup K'_2}$$

Il reste à montrer que le complémentaire de tout $V_K^{K'} \in \mathcal{V}$ est réunion finie de $V_{K_i}^{K'_i} \in \mathcal{V}$ disjoints. D'après (1), d'ailleurs, on a :

$$V_K^{K'} = V_K^{\emptyset} \cap V_{\emptyset}^{K'}$$

et on voit facilement qu'il suffit d'établir la proposition pour V_K^{\emptyset} et $V_{\emptyset}^{K'}$. Prenons par exemple, V_K^{\emptyset} . Si K est constitué de k points x_1, \dots, x_k , on a :

$$V_K^{\emptyset} = V_{x_1}^{\emptyset} \cap V_{x_2}^{\emptyset} \dots \cap V_{x_k}^{\emptyset}$$

et le complémentaire de cet ensemble est :

$$\complement V_K^{\emptyset} = V_{\emptyset}^{x_1} \cup V_{\emptyset}^{x_2} \cup \dots \cup V_{\emptyset}^{x_1, x_2, \dots, x_{k-1}}$$

Il est bien réunion d'ensembles disjoints appartenant à \mathcal{V} .

\mathcal{V} est une classe compacte. — Montrons, en effet, que de toute famille $V_{K_i}^{K'_i}$, $i \in I$, d'intersection vide on peut extraire une famille finie d'intersection vide. Posons :

$$R = \bigcup_{i \in I} K_i, \quad R' = \bigcup_{i \in I} K'_i$$

et désignons encore par $V_R^{R'}$ l'ensemble des A contenant R et disjoints de R' (en général $V_R^{R'}$ n'appartient pas à \mathcal{V} puisque I n'est pas fini). Or, on a par hypothèse :

$$\bigcap_{i \in I} V_{K_i}^{K'_i} = V_R^{R'} = \emptyset$$

Pour que $V_R^{R'}$ soit vide, il faut et il suffit que R et R' ne soient pas disjoints. Soit donc $x \in R \cap R'$. On peut trouver deux indices i et j tels que $x \in K_i$ et $x \in K'_j$, et l'intersection finie

$$V_{K_i}^{K'_i} \cap V_{K_j}^{K'_j} = V_{K_i \cup K_j}^{K'_i \cup K'_j}$$

est nécessairement vide.

Ainsi est établi le résultat que nous avons en vue : toute loi spatiale se prolonge de manière unique en une probabilité sur $\mathcal{F}(R^n)$ munie de la σ -algèbre $\sigma(\mathcal{V})$. Mais on notera l'extrême maigreur de cette σ -algèbre. Lorsque B ou B' sont des ensembles infinis, V_B^{\emptyset} et $V_{\emptyset}^{B'}$ n'appartiennent pas à $\sigma(\mathcal{V})$: des propositions telles que : « B est contenu dans A » ou « B' est disjoint de A » ne définissent pas, en général, des événements de $\sigma(\mathcal{V})$. Pour lever cette difficulté, nous devons restreindre à un sous-ensemble Ω convenablement choisi de $\mathcal{F}(R^n)$ la classe des ensembles aléatoires A_{ω} considérés comme des événements élémentaires.

2. — La classe Ω des ensembles ouverts-fermés de R^n .

Un ensemble A sera dit ouvert-fermé s'il coïncide avec la fermeture de son ouverture topologique, c'est-à-dire si l'on a :

$$A = \overline{\overset{\circ}{A}}$$

et la famille des ensembles ouverts fermés sera désignée par Ω . La restriction à Ω de $\sigma(\mathcal{V})$ définit une σ -algèbre que nous noterons \mathcal{B} . C'est la σ -algèbre engendrée par les sous-ensembles de Ω de la forme :

$$S_K^{K'} = \{A : A \in \Omega, K \subset A, K' \cap A = \emptyset\}$$

où K et K' sont des parties finies de R^n .

On peut montrer, comme ci-dessus, que les $S_K^{K'}$ (K, K' finies) constituent une semi-algèbre de Boole. En particulier, la relation (1) reste valable

$$S_{K_1}^{K'_1} \cap S_{K_2}^{K'_2} = S_{K_1 \cup K_2}^{K'_1 \cup K'_2}$$

Mais les $S_K^{K'}$ ne constituent plus une classe compacte (lorsque R et R' ne sont pas finis, $S_R^{R'}$ peut être vide sans que R et R' se rencontrent : il suffit que la fermeture de R rencontre R'). Il n'est donc pas vrai que toute loi spatiale puisse se prolonger d'une manière unique en une probabilité sur (Ω, \mathcal{B}) , et, pour construire une probabilité sur (Ω, \mathcal{B}) , nous devons adopter une démarche moins directe. Par contre \mathcal{B} est beaucoup plus large que ne l'était la σ -algèbre $\sigma(\mathcal{V})$. Cela va résulter des propositions qui suivent :

a) Pour qu'un ensemble A soit ouvert-fermé, il faut et il suffit que A soit fermé et que tout point de A soit limite de points intérieurs de A . —

La condition est nécessaire (d'après la relation $A = \overline{\overset{\circ}{A}}$). Réciproquement, si tout point de A est limite de points intérieurs, on a $A \subset \overline{\overset{\circ}{A}}$, et si A est fermé, on a $\overline{\overset{\circ}{A}} \subset A$ d'où $\overline{\overset{\circ}{A}} \subset A$ et l'égalité.

b) D étant un ensemble dénombrable partout dense, un ensemble A est ouvert fermé si, et seulement si, on a :

$$(2) \quad A = \overline{\overset{\circ}{A} \cap D}$$

En effet, tout point de $\overline{\overset{\circ}{A}}$ est limite de points de $\overset{\circ}{A} \cap D$, d'où $\overline{\overset{\circ}{A}} \subset \overline{\overset{\circ}{A} \cap D}$ et

$$\overline{\overset{\circ}{A}} \subset \overline{\overset{\circ}{A} \cap D}$$

Mais, inversement, $\overline{\overset{\circ}{A} \cap D} \subset \overline{\overset{\circ}{A}}$ entraîne $\overline{\overline{\overset{\circ}{A} \cap D}} \subset \overline{\overset{\circ}{A}}$, d'où

$$\overline{\overset{\circ}{A}} = \overline{\overline{\overset{\circ}{A} \cap D}}$$

c) Si B et B' sont des ensembles ouverts, l'ensemble

$$S_B^{B'} = \{A : A \in \Omega, B \subset A, B' \cap A = \emptyset\}$$

appartient à la σ -algèbre \mathcal{G} .

En effet, si B est ouvert, tout point de B est limite de points de $B \cap D$ (D ensemble dénombrable partout dense quelconque), et $B \cap D \subset A$ entraîne $\overline{B} = \overline{B \cap D} \subset A$, d'où l'équivalence :

$$B \subset A \iff B \cap D \subset A$$

De même, si B' est ouvert et si $B' \cap D$ est disjoint de A , on a $B' \cap A = \emptyset$. En effet, si un point x appartenait à $B' \cap A$, il serait limite de points $y_n \in A \cap D$. Comme $x \in B'$ et que B' est ouvert, pour n assez grand, tous les y_n appartiendraient à B' donc aussi à $B' \cap D$, et $B' \cap D$ ne serait pas disjoint de A . Donc :

$$B' \cap A = \emptyset \iff B' \cap A \cap D = \emptyset$$

Par suite, on a l'égalité

$$(3) \quad S_B^{B'} = S_B^{B' \cap D}$$

Mais $B \cap D$ et $B' \cap D$ sont des ensembles dénombrables, de sorte que $S_B^{B' \cap D}$ appartient à la σ -algèbre \mathcal{G} .

La relation (3) exprime que l'ensemble aléatoire A défini sur (Ω, \mathcal{G}, P) est *séparable* quelle que soit la probabilité P .

d) Si B est un ensemble fermé vérifiant

$$(4) \quad B = \overline{B \cap D}$$

(D ensemble dénombrable partout dense) S_B^0 appartient à \mathcal{G} .

En effet, $B \cap D \subset A$ équivaut, d'après (4), à $\overline{B \cap D} = B \subset A$, d'où

$$S_B^0 = S_{B \cap D}^0$$

Comme $B \cap D$ est dénombrable, ce dernier ensemble appartient à \mathcal{G} .

e) Si B' est compact, $S_0^{B'}$ appartient à \mathcal{G} .

En effet, B' , étant compact, est disjoint de A , si, et seulement si il existe une boule ouverte \dot{B}_ε de rayon ε telle $B' \oplus \dot{B}_\varepsilon \subset A^c$. Donc :

$$S_0^{B'} = \bigcup_{n>0} S_0^{B' \oplus \dot{B}_{\frac{1}{n}}}$$

Mais $B' \oplus \dot{B}_{\frac{1}{n}}$ est ouvert et $S_0^{B' \oplus \dot{B}_{\frac{1}{n}}} \in \mathcal{G}$ d'après c), donc aussi $S_0^{B'}$.

f) Si B vérifie $B = \overline{B \cap D}$ et si B' est compact, $S_B^{B'}$ appartient à \mathcal{G} . Cela résulte de d) et e) et de

$$S_B^{B'} = S_B^0 \cap S_0^{B'}$$

3. — Construction d'une probabilité sur (Ω, \mathcal{B}) .

Considérons l'application α de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ dans Ω , qui à tout ensemble A fait correspondre l'ensemble

$$\alpha(A) = \overline{A \cap D}$$

D désignant l'ensemble des points de coordonnées rationnelles. Les relations

$$\begin{aligned} \overline{\overline{A}} &= \overline{A \cap D} \\ \overline{\overline{A}} &= \overline{\overline{A \cap D}} \end{aligned}$$

montrent que l'on a toujours

$$\overline{\overline{A}} \subset \alpha(A) \subset \overline{\overline{A}}$$

L'application α de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ muni de la σ -algèbre $\sigma(\mathcal{V})$ dans Ω muni de \mathcal{B} est *mesurable*. Comme \mathcal{B} est engendrée par les S_x^0 , montrons, en effet, que $\alpha^{-1}(S_x^0)$ appartient à $\sigma(\mathcal{V})$. Des équivalences :

$$\begin{aligned} x_0 \in \overline{A \cap D} &\iff \forall N > 0, \quad \exists x \in B_{\frac{1}{N}}(x_0) \cap D, \quad x \in \overline{A \cap D} \\ x \in \overline{A \cap D} &\iff \exists p > 0 : B_{\frac{1}{p}}(x) \subset \overline{A \cap D} \iff \exists p > 0 : B_{\frac{1}{p}}(x) \cap D \subset \overline{A \cap D} \\ B_{\frac{1}{p}}(x) \cap D \subset \overline{A \cap D} &\iff \forall y \in B_{\frac{1}{p}}(x) \cap D, \quad \forall k > 0, \quad \exists z \in B_{\frac{1}{k}}(y) \cap D : z \in A \end{aligned}$$

on déduit

$$\alpha^{-1}(S_{x_0}^0) = \bigcap_{N > 0} \bigcup_{x \in B_{\frac{1}{N}}(x_0) \cap D} \bigcup_{p > 0} \bigcap_{y \in B_{\frac{1}{p}}(x) \cap D} \bigcap_{k > 0} \bigcup_{z \in B_{\frac{1}{k}}(y) \cap D} V_z^0$$

ce qui établit la proposition.

Soit alors P' une probabilité sur $(\mathcal{F}(\mathbb{R}^n), \sigma(\mathcal{V}))$, obtenue par exemple en prolongeant une loi spatiale donnée $P(K, K')$. La formule

$$(5) \quad P(S) = P'[\alpha^{-1}(S)]$$

faisant correspondre à tout $S \in \mathcal{B}$ la probabilité de son image inverse (qui appartient à $\sigma(\mathcal{V})$) définit une probabilité P sur (Ω, \mathcal{B}) .

Cette probabilité, à son tour, conduit à la loi spatiale :

$$P(K, K') = P(S_K^{K'})$$

de l'ouvert-fermé $\overline{A \cap D}$, qui est, en général, distincte de la loi spatiale $P'(K, K')$ de A . Il serait intéressant de préciser sous quelles conditions ces deux lois spatiales coïncident. Nous n'aborderons pas ce point.

4. — Mesurabilité de (Ω, \mathcal{F}) .

Montrons maintenant que l'application $k(x, \omega)$ définie par :

$$k(x\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A_\omega \\ 0 & \text{si } x \notin A_\omega \end{cases}$$

est une application *mesurable* de $(\mathbb{R}^n \times \Omega, \mathcal{B} \otimes \mathcal{G})$ dans $\{0, 1\}$. Il faut montrer, par exemple, que l'image inverse de 0 par cette application appartient à la σ -algèbre produit $\mathcal{B} \otimes \mathcal{G}$. Comme $A_\omega \in \Omega$ son complémentaire est ouvert. Par suite, $x \notin A_\omega$ si et seulement si il existe une boule ouverte $B_\varepsilon(x)$ de rayon $\varepsilon > 0$ et de centre x disjointe de A_ω . On peut alors trouver un point y appartenant à un ensemble dénombrable dense D et une boule ouverte $B_{\frac{1}{N}}(y)$ contenant x et disjointe de A_ω . Par suite :

$$x \notin A_\omega \iff \exists N, \exists y \in D : x \in B_{\frac{1}{N}}(y), B_{\frac{1}{N}}(y) \cap A_\omega = \emptyset$$

D'où :

$$k^{-1}(0) = \bigcup_{N > 0} \bigcup_{y \in D} B_{\frac{1}{N}}(y) \times S_{\frac{1}{N}}^{B_1(y)}$$

Comme $B_{\frac{1}{N}}(y) \in \mathcal{B}$ et $S_{\frac{1}{N}}^{B_1(y)} \in \mathcal{G}$, $k^{-1}(0)$ appartient à $\mathcal{B} \otimes \mathcal{G}$.

Ainsi la fonction aléatoire en tout ou rien $k(x, \omega)$ est mesurable. Un résultat classique montre alors que, pour toute mesure positive sommable, l'intégrale

$$X(\omega) = \int k(x, \omega) dF(x) = \int_{A_\omega} dF(x)$$

est une *variable aléatoire* dont l'espérance mathématique existe et vérifie

$$E[X(\omega)] = \int E[k(x, \omega)] dF(x) = \int P(S_x^0) dF(x)$$

En particulier, pour tout ensemble mesurable B :

$$E \left[\int_B k(x, \omega) dx \right] = E [\text{Mes } B \cap A] = \int_B P(S_x^0) dx$$

Ces relations servent de fondement à l'inférence statistique. Mais ce résultat ne suffit pas encore. Nous devons également examiner dans quelles conditions les transformées $A \oplus B$ et $A \ominus B$, ainsi que l'ouverture A_ω et la fermeture A_f selon B possèdent la même propriété de mesurabilité : c'est dans ce cas seulement, en effet, que l'inférence statistique sera possible pour les granulométries.

Dans ce qui suit, nous nous limiterons au cas où B est un ensemble compact vérifiant la condition :

$$(6) \quad B = \overline{B \cap D}$$

où D est l'ensemble des points de coordonnées rationnelles (la condition (6) est moins stricte que (2) et n'entraîne pas $B \in \Omega$). Nous utiliserons les lemmes suivants :

a) Si $A \in \Omega$, $A \oplus B \in \Omega$.

En effet, de $\overset{\circ}{A} \oplus B \subset \widehat{(A \oplus B)} \subset A \oplus B$ on tire, en prenant la fermeture :

$$A \oplus B \subset \widehat{\overset{\circ}{A} \oplus B} \subset A \oplus B$$

b) Si $A \in \Omega$, $A \oplus B = \overline{[A \oplus (B \cap D)] \cap D}$

Il suffit de fermer l'inclusion $(\overset{\circ}{A} \cap D) \oplus (B \cap D) \subset [A \oplus (B \cap D)] \cap D \subset A \oplus B$ et d'appliquer la propriété e de l'Annexe 1,2.

c) Si A est fermé, $A \ominus B = A \ominus (B \cap D)$

Si $x \in A \ominus (B \cap D)$, on a $\widehat{(B \cap D)}_x \subset A$ et, en fermant $\check{B}_x \subset A$, soit $x \in A \ominus B$.

D'où $A \ominus (B \cap D) \subset A \ominus B$. L'inclusion inverse est évidente.

d) En particulier, si A est fermé, $(A \oplus \check{B}) \ominus B = (A \oplus \check{B}) \ominus (B \cap D)$.

Mesurabilité de $A \oplus B$. — Elle découle du lemme b). Si $k(x, \omega)$, $g(x, \omega)$ et $f(x, \omega)$ sont les fonctions caractéristiques de A , $A \oplus (B \cap D)$ et $A \oplus B$, on a d'abord :

$$g(x, \omega) = \sup_{y \in B \cap D} k(x - y, \omega)$$

d'où la mesurabilité de $g(x, \omega)$, puis

$$f(x, \omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{y \in \frac{B \cap D}{n}(x) \cap D} g(y, \omega)$$

d'où la mesurabilité de $f(x, \omega)$.

Mesurabilité de $A \ominus B$. — Soit $f(x, \omega)$ la fonction caractéristique de $A \ominus B$, et $k(x, \omega)$ celle de A . D'après le lemme c) on a :

$$f(x, \omega) = \prod_{y \in B \cap D} k(x - y, \omega)$$

d'où la mesurabilité.

Mesurabilité de $A_f = (A \oplus \check{B}) \ominus B$. — D'après le lemme d), la fonction caractéristique $f(x, \omega)$ de A_f se déduit de la fonction caractéristique g de $A \oplus B$ par :

$$f(x, \omega) = \prod_{y \in B \cap D} g(x - y, \omega)$$

Comme $g(x, \omega)$ est mesurable, il en est de même de f .

Mesurabilité de $(\dot{A} \ominus B) \oplus B$. — Soient $k(x, \omega)$ et $h(x, \omega)$ les fonctions caractéristiques de A et de \dot{A} . Montrons d'abord que $h(x, \omega)$ est mesurable. Cela résulte de l'équivalence :

$$x \in \dot{A} \Leftrightarrow \exists \varepsilon, y \in D : x \in \dot{B}_\varepsilon(y) \subset A$$

d'où l'on déduit :

$$h^{-1}(1) = \bigcup_{n > 0} \bigcup_{y \in D} \dot{B}_{\frac{1}{n}}(y) \times S_{B_{\frac{1}{n}}(y)}^0$$

Le complémentaire $(\dot{A})^c = \overline{(\dot{A}^c)}$ de \dot{A} appartient à Ω et sa fonction caractéristique $1 - h(x, \omega)$ est mesurable. La fermeture selon B de $(\dot{A})^c$ a donc une fonction caractéristique $g(x, \omega)$ mesurable. Alors $1 - g(x, \omega) = f(x, \omega)$, qui est la fonction caractéristique de $(\dot{A} \ominus \check{B}) \oplus B$, est également mesurable.

ANNEXE III

COMPLÉMENTS SUR LE TENSEUR DE SCHWYDLER

Donnons-nous, comme dans le chapitre VI, une perméabilité de la forme

$$\begin{cases} k^{ij} = g^{ij} + \varepsilon \gamma^{ij} \\ E(\gamma^{ij}) = 0 \end{cases}$$

et soit $\hat{c}_j p^l, q^{il}$ un système de solutions privilégiées vérifiant

$$(1) \quad E(\hat{c}_j p^l) = \delta_j^l$$

cherchons un développement de la forme

$$\begin{cases} \hat{c}_j p^l = \delta_j^l + \varepsilon \hat{c}_j p_1^l + \varepsilon^2 \hat{c}_j p_2^l + \dots \\ q^{il} = g^{il} + \varepsilon q_1^{il} + \varepsilon^2 q_2^{il} + \dots \end{cases}$$

on notera que les $\hat{c}_j p_n$ et q_n^{il} ainsi définis sont distincts de ceux que l'on obtient par la méthode de Schwydlér.

On a (en raison du choix (1) des solutions privilégiées.)

$$(2) \quad E(\hat{c}_j p_n^l) = 0$$

La loi de Darcy, de son côté, donne :

$$(3) \quad q_n^{il} = -g^{ij} \hat{c}_j p_n^l - \gamma^{ij} \hat{c}_j p_{n-1}^l$$

Mais ici la perméabilité macroscopique (puisque $\hat{c}_j p^l$ a une espérance unité) est :

$$K^{il} = -E(q^{il}) = g^{il} - \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n E(q_n^{il})$$

c'est-à-dire, d'après (2) :

$$(4) \quad K^{il} = g^{il} + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n E(\gamma^{ij} \hat{c}_j p_{n-1}^l)$$

D'autre part, les q_n^{il} sont conservatifs

$$\hat{c}_i q_n^{il} = 0$$

Par suite

$$E[q_n^{ii} \partial_i p_m^s] = E(q_n^{ii})E(\partial_i p_m^s)$$

En particulier, pour $m \neq 0$

$$E(q_n^{ii} \partial_i p_m^s) = 0$$

Compte tenu de (3), cette relation s'explique :

$$(5) \quad E(g^{ij} \partial_j p_n^l \partial_i p_m^s) + E(\gamma^{ij} \partial_j p_{n-1}^l \partial_i p_m^s) = 0$$

Avec $n = 1$, on obtient

$$(6) \quad E(g^{ij} \partial_j p_1^l \partial_i p_m^s) + E(\gamma^{il} \partial_i p_m^s) = 0$$

et, en portant dans (4) :

$$(7) \quad K^{il} = g^{il} - \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n E(g^{uv} \partial_u p_1^i \partial_v p_{n-1}^l)$$

Le terme correspondant à $n = 1$ est nul. Au deuxième ordre en ε il reste donc

$$(8) \quad \begin{cases} K^{il} = g^{il} - \varepsilon^2 S^{il} \\ S^{il} = E(g^{uv} \partial_u p_1^i \partial_v p_1^l) = - E[\gamma^{ij} \partial_j p_1^l] \end{cases}$$

Ainsi se trouve introduit le tenseur de Schwydlar. Il reste à expliciter son expression.

Exprimons que le tenseur q_1^{ii} est conservatif. En deux points quelconques x et y nous avons :

$$\begin{cases} \Delta p_1^l(x) = - \partial_i \gamma^{il}(x) \\ \Delta p_1^s(y) = - \partial_a \gamma^{as}(y) \end{cases}$$

Multiplions membre à membre et passons aux espérances mathématiques. Posant :

$$\begin{cases} T^{ls}(h) = E[p_1^l(x) p_1^s(x+h)] \\ R^{il,as}(h) = E[\gamma^{il}(x) \gamma^{as}(x+h)] \end{cases}$$

nous obtenons

$$(9) \quad \Delta^2 T^{ls}(h) = - \partial_{ia} R^{il,as}(h)$$

Introduisons le tenseur $S^{ls}(h)$ dont la valeur en $h = 0$ est le tenseur de Schwydlar

$$S^{ls}(h) = E[g^{ij} \partial_i p_1^l(x) \partial_j p_1^s(x+h)]$$

On a

$$S^{ls}(h) = - \Delta T^{ls}(h)$$

et l'équation (A. 9) s'écrit

$$(10) \quad \Delta S^{ls}(h) = \partial_{ia} R^{il,as}(h)$$

En désignant par α la solution de $\Delta\alpha + \delta = 0$, on obtient ainsi

$$S^{ls}(h) = -\alpha * \partial_{ia} R^{il,as} = -\partial_{ia} \alpha * R^{il,as}$$

et

$$(11) \quad S^{ls} = S^{ls}(0) = -\int \partial_{ia} \alpha(\xi) R^{il,as}(\xi) d\xi$$

On retrouve bien l'expression (21,12) du tenseur de Schwyidler. Mais la démonstration est plus satisfaisante, puisqu'elle n'utilise que le produit de convolution $\partial_{ij} \alpha * R^{il,js}$ qui existe, pourvu que la covariance soit régulière à l'origine et décroisse assez vite à l'infini. Dans le chapitre vi, les produits de convolution utilisés étaient du type $\partial_{ij} \alpha * \gamma^{ls}$, et leur existence n'est pas évidente a priori.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION	5
--------------------	---

PREMIÈRE PARTIE.

GÉOMÉTRIE DES MILIEUX POREUX

CHAPITRE PREMIER. — <i>Granulométrie en place</i>	13
1. — Érosion et dilatation	13
2. — Ouverture et fermeture	18
3. — Définition des granulométries	24
CHAPITRE II. — <i>Milieux poreux aléatoires</i>	25
4. — Loi spatiale et moments fonctionnels	25
5. — Les grandeurs spécifiques	30
6. — Définition des granulométries	36
7. — Théorie du grain convexe isolé	41
CHAPITRE III. — <i>Schémas booléens et schémas semi-markoviens</i>	46
8. — Les schémas booléens	46
9. — Les schémas semi-markoviens	50
10. — Schéma semi-markovien isotrope (2 dimensions)	54
11. — Schéma semi-markovien isotrope (3 dimensions)	58
CHAPITRE IV. — <i>Granulométrie originelle et granulométries induites</i>	67
12. — Granulométries induites par des grains convexes	67
13. — Cas des grains sphériques	75

DEUXIÈME PARTIE.

HYDRODYNAMIQUE DES MILIEUX POREUX

CHAPITRE V. — <i>Genèse de la loi de Darcy</i>	85
14. — Niveau granulométrique et niveau macroscopique	85
15. — Passage à la loi de Darcy	92
16. — Signification énergétique des perméabilités	100

CHAPITRE VI. — <i>Composition des perméabilités</i>	104
17. — Généralités sur la composition des perméabilités	105
18. — Genèse de la perméabilité macroscopique constante K	108
19. — La densité de puissance et les inégalités fondamentales	116
20. — Les inégalités fondamentales	119
21. — Étude spéciale des écoulements plans	122
22. — Méthode d'approximation et tenseur de Schwydlér.....	125
CHAPITRE VII. — <i>Les écoulements non uniformes</i>	133
23. — Les inégalités fondamentales	133
24. — Les développements de Schwydlér	137
25. — Cas des écoulements radiaux	140

ANNEXES

ANNEXE I. — <i>Compléments sur la transformation de Serra et les granulométries.</i>	147
ANNEXE II. — <i>Compléments sur l'axiomatique des milieux poreux aléatoires.</i> ...	153
ANNEXE III. — <i>Compléments sur le tenseur de Schwydlér.</i>	162