

**Les Cahiers du Centre de Morphologie Mathématique
DE FONTAINEBLEAU**

Fascicule 2

COURS DE GÉOSTATISTIQUE

par

G. MATHERON

1969



Ecole des Mines de Paris

COURS DE GEOSTATISTIQUE

Table des Matières

<u>0 - INTRODUCTION</u>	3
0-1 Notations	3
0-2 Produit de convolution (moyenne mobile)	4
0-3 Géostatistique et Théorie des V.R.	5
0-4 Méthode Transitive et Théorie Intrinsèque	6
 <u>1 - LES METHODES TRANSITIVES</u>	 8
1-1 Exemple introductif	8
1-2 Le covariogramme transitif	9
1-3 Régularisation d'une V.R., Montée	10
1-4 L'estimation des V.R.	11
1-4-1 Expression rigoureuse de la variance d'estimation	11
1-4-2 Formule d'approximation pour l'espace à une dimension	13
1-4-3 Formules d'approximation pour l'espace à deux ou trois dimensions	14
1-5 Application à l'estimation d'une surface S	14
 <u>2 - THEORIE DES F.A. INTRINSEQUES</u>	 16
2-1 Définitions générales	16
2-2 Propriétés de la covariance et du demi-variogramme	20
2-3 Régularisation d'une F.A. intrinsèque	22
2-3-1 Intégrale Stochastique	22
2-3-2 Convolution Stochastique	23
2-3-3 Montée	25
2-4 Variance d'extension, variance d'estimation	25
2-4-1 Variance d'extension ou d'estimation	25
2-4-2 Variance de v dans V	27
2-4-3 Mailles aléatoires et aléatoires stratifiées	29
2-5 Effet de pépité et phénomène de transition	30
2-6 Calcul des variances d'estimation	32
2-6-1 Cas de l'espace à une dimension	33
2-6-2 Cas de l'espace à deux dimensions	34
2-6-3 Cas de l'espace à trois dimensions	36
 <u>3 - LE SCHEMA DE WIJS</u>	 37
3-1 Equivalents linéaires	37

3-2 Schéma de Wijs à deux dimensions	39
3-3 Schéma de Wijs à trois dimensions	40
<u>4 - LE SCHEMA SPHERIQUE</u>	41
<u>5 - LE KRIGEAGE</u>	42
5-1 Le problème du krigeage et son intérêt	42
5-2 Les equations générales du krigeage	44
5-3 Krigeage complet, et comptabilité minéral et métal	47
<u>6 - RECHERCHE D'OPTIMA DANS LA RECONNAISSANCE ET LA MISE EN EXPLOITATION DES GISEMENTS</u>	49
6-0 Introduction	49
6-1 Choix d'une teneur de coupure et d'une cadence annuelle d'exploitation	52
6-1-1 Définition des paramètres (la relation tonnage-teneur)	52
6-1-2 Equations générales de l'optimum	56
6-2 Reconnaissance optimale pour le dimensionnement de l'exploitation	57
6-2-1 Position du problème	57
6-2-2 Cas des gisements de type "tout ou rien"	58
6-3 Optimisation séquentielle et arrêt des recherches	60
6-3-1 Le problème de l'arrêt des recherches	60
6-3-2 La relation d'additivité	63
6-3-3 Cas où la teneur intervient seule	64
<u>7 - EXERCICES</u>	67
7-1 Exercices sur les méthodes transitives	67
7-2 Exercices sur les F.A. intrinsèques	68
<u>8 - ABAQUES</u>	71
Figure 2 (Zitterbewegung)	72
Abaques pour le schéma de Wijs	73
Abaques pour le schéma sphérique	79
<u>BIBLIOGRAPHIE</u>	82

COURS DE GEOSTATISTIQUE

O - INTRODUCTION

O-1 NOTATIONS

Nous désignerons par $x, y, \dots$ des points de l'espace à n dimensions ($n = 1, 2$ ou 3), par $dx, dy, \dots$ des éléments de longueur ($n = 1$), de surface ($n = 2$) ou de volumes ($n = 3$) centrés en ces points, par $f(x), g(y)$ etc... des fonctions de ces points.

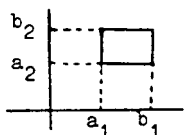
L'intégrale (étendue à tout l'espace) d'une fonction $f(x)$ se note :

$$\int f(x) dx$$

Par exemple, pour $n = 3$ dimensions, et en désignant par (x_1, x_2, x_3) les trois coordonnées du point x , cette notation s'explique ainsi :

$$\int f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3$$

De même, nous noterons $\int_A f(x) dx$ l'intégrale de la fonction $f(x)$ étendue à un domaine A de l'espace à n dimensions.



Pour $n = 2$, par exemple, et si A est le rectangle représenté ci-joint, on a explicitement :

$$\int_A f(x) dx = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} f(x_1, x_2) dx_2$$

Ces notations sont à la fois très condensées et très parlantes : en première lecture, on peut les interpréter dans le cas de l'espace à une seule dimension, où leur signification est, en général, très claire. La généralisation aux espaces à deux ou trois dimensions est ainsi rendue plus facile.

Exemple : Soit V un volume, et $g(h) = g(h_1, h_2, h_3)$ une fonction du vecteur h de coordonnées h_1, h_2, h_3 . Soient $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$ l'origine et l'extrémité de ce vecteur h , c'est-à-dire $h = y - x$. La valeur moyenne de la fonction $g(h)$ lorsque les deux extrémités x et y du vecteur h décrivent (chacune pour son propre compte) le volume V se note :

$$\frac{1}{V^2} \int_V dx \int_V g(y - x) dy$$

En notation explicite, ceci s'écrirait :

$$\frac{1}{V^2} \iiint_V dx_1 dx_2 dx_3 \iiint_V g(y_1 - x_1 ; y_2 - x_2 ; y_3 - x_3) dy_1 dy_2 dy_3$$

La première notation est un symbole, qui désigne directement le concept de valeur moyenne; la deuxième est un algorithme qui indique la marche à suivre pour calculer cette quantité, mais dont la signification n'apparaît plus au premier coup d'oeil.

0-2 PRODUIT DE CONVOLUTION (moyenne mobile)

Le produit de convolution de deux fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ est la fonction $g(x)$ définie par :

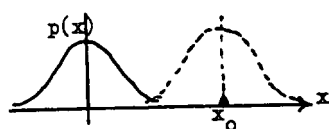
$$g(x) = \int f_1(y) f_2(x-y) dy = \int f_2(y) f_1(x-y) dy$$

On écrit en notation symbolique :

$$g = f_1 * f_2$$

Cette opération de convolution joue un rôle fondamental en géostatistique (comme aussi en probabilités et dans toute la physique théorique). On peut la rattacher à la notion intuitive de "moyenne mobile" :

Régularisée d'une fonction f (moyenne mobile pondérée de cette fonction)



Soit $p(y)$ une fonction de pondération. La valeur au point x_0 de la moyenne mobile de la fonction f pondérée par p est :

$$f_p(x_0) = \int p(y) f(x_0+y) dy = \int p(-y) f(x_0-y) dy$$

(on attribue le poids $p(y) dy$ à la valeur prise par f au point x_0+y , et on obtient la deuxième expression en changeant y en $-y$).

Soit $\check{p}$ la transposée de la fonction p (définition : $\check{p}(x) = p(-x)$). $f_p(x_0)$ est la valeur en x_0 de $f * \check{p}$:

$$f_p = f * \check{p}$$

Cette moyenne mobile f_p de la fonction f (pondérée par p) s'appelle régularisée (de f par p)

Exemple 1. (prélèvement d'un échantillon v implanté au point x)

Soit v l'échantillon implanté à l'origine des coordonnées, et $k(x)$ sa fonction indicatrice ($k(x) = 1$ si $x \in v$ et $k(x) = 0$ si $x \notin v$). Prenons comme fonction de pondération $p(x) = \frac{1}{v} k(x)$. La moyenne mobile correspondante

$$f_v = \frac{1}{v} f * k$$

représente la teneur moyenne de l'échantillon v prélevé au point x . Explicitement, on a :

$$f_v(x) = \frac{1}{v} \int_v f(x+y) dy$$

Exemple 2. (radioactivités)

Si l'on place à l'origine 0 des coordonnées une masse unité de substance radioactive, on observe à la distance d une radioactivité $A e^{-\lambda d}/d$. (A est une constante, λ le coefficient d'absorption du milieu). Soit alors $f(x)$ la teneur au point x en cette substance radioactive. Désignons par $d(x - x_0)$ la distance entre deux points x et x_0 . La masse $f(x) dx$ placée en x entraîne en x_0 une radioactivité $A e^{-\lambda d(x_0-x)}/d(x_0-x) f(x) dx$. Au total, on observe en x la radioactivité :

$$A \int f(x) \frac{e^{-\lambda d(x_0-x)}}{d(x_0-x)} dx$$

Ce n'est pas autre chose que le produit de convolution $A f * p$ (avec une fonction de pondération $p(x) = e^{-\lambda d}/d$, d'ailleurs symétrique : $p = \check{p}$)

O-3 GECSTATISTIQUE ET THEORIE DES VARIABLES REGIONALISEES

La Géostatistique est l'application de la théorie des variables régionalisées à l'estimation des gisements miniers (avec tous les tours de main que cela implique). Plus généralement, nous dirons d'un phénomène qui se déploie dans l'espace et y manifeste une certaine structure, qu'il est régionalisé. Les sciences de la terre, entre autres, en fournissent de nombreux exemples. Si $f(x)$ désigne la valeur au point x d'une caractéristique f de ce phénomène, nous dirons que $f(x)$ est une variable régionalisée, en abrégé V.R. C'est là un terme neutre, purement descriptif, antérieur, en particulier, à toute interprétation probabiliste.

Du point de vue mathématique, une V.R. est donc simplement une fonction $f(x)$ du point x , mais c'est, en général, une fonction fort irrégulière : ex. : une teneur dans un gisement minier.

Elle se présente sous deux aspects contradictoires (ou complémentaires) :

- un aspect aléatoire (haute irrégularité, et variations imprévisibles d'un point à l'autre).
- un aspect structuré (elle doit cependant refléter à sa manière les caractéristiques structurales du phénomène régionalisé)

La théorie des V.R. se propose donc deux objectifs principaux :

- sur le plan théorique, exprimer ces caractéristiques structurales sous une forme mathématique adéquate;
- sur le plan pratique, résoudre le problème de l'estimation d'une V.R. à partir d'un échantillonnage fragmentaire.

Ces deux objectifs sont liés : pour un même réseau de prélèvements, l'erreur d'estimation dépend des caractéristiques structurales; elle est, par exemple, d'autant plus élevée que la V.R. est plus irrégulière et plus discontinue dans sa variation spatiale.

Champ et Support d'une V.R.

Le champ V d'une V.R. est le domaine où celle-ci est différente de 0. Un panneau est un sous-ensemble V' de V .

Support. Souvent, on ne connaît pas $f(x)$ elle-même, mais seulement sa valeur moyenne $f_v(x)$ dans l'échantillon v prélevé au point x . Cette régularisée $f_v(x)$ est effectivement plus régulière que la V.R. $f(x)$. Le volume v s'appelle le support de la V.R. f_v , régularisée de f . Une autre tâche importante de la théorie des V.R. consistera donc à déterminer les caractéristiques de f_v connaissant celles de f . Ex : dans un gisement, prévoir les caractéristiques des panneaux V' (variable f_v'), connaissant celles de f ou de f_v (échantillons).

Plus généralement, on cherchera à relier les caractéristiques de f à celles d'une régularisée f_p par une fonction p donnée (exemple des radioactivités).

O-4 METHODES TRANSITIVES ET THEORIE INTRINSEQUE

Pour atteindre ces objectifs, nous disposons de deux groupes de méthodes :

- méthodes transitives : absolument générales, et ne nécessitant en particulier aucune hypothèse de nature probabiliste, et a fortiori aucune hypothèse de stationnarité
- théorie intrinsèque : c'est une application de la théorie des fonctions aléatoires; on introduit donc des interprétations probabilistes, et même une certaine hypothèse de stationnarité

(hypothèse intrinsèque)

Du point de vue théorique, ces deux groupes de méthodes conduisent à des résultats équivalents : c'est important pour la méthodologie, car cela montre que les résultats de la théorie intrinsèque ne sont pas réellement liés à l'hypothèse de la stationnarité (on peut d'ailleurs construire une théorie probabiliste affranchie de cette hypothèse et permettant de retrouver les principaux résultats de la géostatistique).

En pratique, la théorie intrinsèque est plus facile à mettre en oeuvre, et c'est toujours elle que l'on utilise, sauf toutefois dans le cas particulier très important de l'estimation d'une surface ou d'un volume (problème géométrique)

En ce qui concerne la bibliographie (voir références à la fin de ce fascicule), on trouvera dans [4] l'exposé complet de la théorie des variables régionalisées, et dans [5], un exposé abrégé de cette même théorie suivi d'un traité complet de Géostatistique appliquée, comprenant en particulier l'étude des problèmes d'optimisation économique (le texte français originel peut être consulté à la Bibliothèque de l'Ecole des Mines de Paris). La thèse de Serra [7] donne d'une part un exposé général très concret (et dépourvu de toute difficulté mathématique), de l'autre une étude détaillée du schéma sphérique. L'ancien traité [3] est en grande partie périmé, sauf en ce qui concerne le schéma de Wijs. La thèse de Carlier [1] étudie (uniquement en schéma de Wijsien) les problèmes spéciaux posés par les gisements de substances radioactives. Enfin, les problèmes d'optimisation économique sont traités dans deux articles des Annales des Mines [8], dont l'essentiel a été repris dans [5].

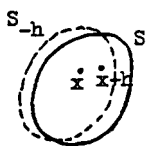
1 - LES METHODES TRANSITIVES

1-1 EXEMPLE INTRODUCTIF

Considérons le phénomène de "transition" le plus simple que l'on puisse imaginer : présence ou absence d'un caractère. Soit, par exemple, une formation géologique S d'extension limitée. Un sondage foré au point x la rencontre, ou ne la rencontre pas. Posons :

$$k(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin S \\ 1 & \text{si } x \in S \end{cases}$$

Il s'agit là d'un phénomène unique, pour lequel aucune formulation probabiliste n'est possible : parler de la probabilité pour qu'un point x donné appartienne à S n'aurait pas grand sens. On peut noter aussi que tout l'intérêt se concentre ici sur la frontière de S . En effet, $k(x)$ est constante à l'intérieur comme à l'extérieur de S , et c'est au franchissement de cette frontière seulement que $k(x)$ varie, passant de 1 à 0 ou de 0 à 1. De là le nom de phénomène de transition, et de méthodes transitives.



L'aire S de notre formation est évidemment donnée par :

$$S = \int k(x) dx$$

La valeur de S constitue un renseignement fort intéressant du point de vue pratique : le plus souvent, c'est elle que l'on cherche à estimer à partir d'un réseau de sondages. Toutefois, ce paramètre scalaire ne nous apporte encore aucune information de nature réellement structurale. On peut, en effet, définir la structure d'un ensemble comme le système des relations existant entre les éléments ou les parties de cet ensemble. Nous n'aurons donc d'information de nature structurale sur notre surface S qu'à la condition de faire intervenir simultanément au moins deux points.

Soient donc x et $x+h$ deux points (c'est-à-dire le plus petit ensemble structurant que nous puissions imaginer). Considérons alors l'expression $k(x) k(x+h)$: elle vaut 1 si x et $x+h$ appartiennent tous les deux à S , et 0 autrement. Mais dire que $x+h$ appartient à S équivaut à dire que x appartient au translaté S_{-h} de S dans la translation $-h$. On a donc :

$$k(x) k(x+h) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in S \cap S_{-h} \\ 0 & \text{si } x \notin S \cap S_{-h} \end{cases}$$

Intégrons en x cette expression : nous obtenons une fonction de h :

$$K(h) = \int k(x) k(x+h) dx = \text{Mes}(S \cap S_{-h})$$

qui représente la mesure (l'aire) de l'intersection de S et de son translaté par $-h$. Cette fonction est symétrique, car les deux intersections $S \cap S_{-h}$ et $S \cap S_h$ se déduisent l'une de l'autre par translation. Cette fonction $K(h)$ est le covariogramme géométrique associé à S . Il donne une certaine image de la forme de l'ensemble S :

Propriétés du covariogramme géométrique $K(h)$

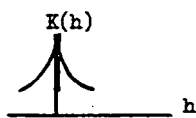
a/ Symétrie : $K(h) = K(-h)$; inégalités $0 \leq K(h) \leq K(0)$

Relations : $S = K(0)$

$$S^2 = \int K(h) dh$$

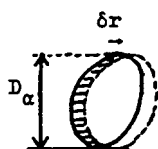
b/ Portées : la portée $a(\alpha)$ dans la direction α est la distance à partir de laquelle $K(h)$ s'annule dans cette direction. C'est donc la plus grande dimension de S dans cette direction.

c/ Pente à l'origine (dérivées à droite et à gauche)



Si le module δr de h est petit, on a :

$$K(h) = K(0) - \delta r D_\alpha$$



$\delta r D_\alpha$ est la moitié de la petite surface balayée par le vecteur δr dont l'origine décrit le contour de S . D_α est la variation diamétrale de S dans la direction α (si S est convexe c'est le diamètre apparent dans cette direction).

1-2 LE COVARIOGRAMME TRANSITIF (cas général)

Soit $f(x)$ une V.R. nulle en dehors d'un champ V borné. Le covariogramme transitif de cette V.R. est la fonction $g(h)$ définie par :

$$(1) \quad g(h) = \int f(x) f(x+h) dx$$

Propriétés du covariogramme transitif $g(h)$

a/ Symétrie : $g(h) = g(-h)$, inégalité $|g(h)| \leq g(0) = \int [f(x)]^2 dx$

Soit $Q = \int f(x) dx$ la quantité de métal. On a :

$$(2) \quad Q^2 = \int g(h) \, dh$$

(pour démontrer (2), remplacer g par son expression (1), et intégrer d'abord en h).

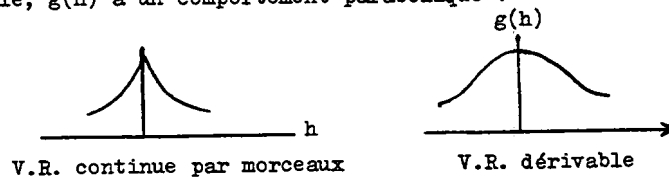
b/ Portée : $a(\alpha)$ est définie par la condition $g(h) = 0$ dès que $|h| > a(\alpha)$ pour le vecteur h de direction α : c'est une propriété du champ de la V.R.

c/ Comportement du $g(h)$ au voisinage de l'origine. La régularité de $g(h)$ au voisinage de l'origine reflète les propriétés de continuité de la V.R. dans sa variation spatiale. Cela résulte de :

$$g(0) - g(h) = \frac{1}{2} \int [f(x+h) - f(x)]^2 \, dx$$

Si $f(x)$ est continue par morceaux, $g(h)$ a un comportement linéaire au voisinage de l'origine.

Si $f(x)$ est dérivable, $g(h)$ a un comportement parabolique :



Cas isotrope. Si $g(h) = g(r)$ ne dépend que du module $r = |h|$ du vecteur h , son développement au voisinage de l'origine comporte une partie régulière (termes de degré entier pair) et une partie irrégulière (termes en r^λ avec λ différent d'un entier pair, ou encore termes en $r^{2\eta} \log r$) :

$$g(h) = g(0) + a_2 r^2 + \dots + \sum_{\lambda} c_{\lambda} r^{\lambda} + c_{2\eta} r^{2\eta} \log r$$

partie régulière
partie irrégulière

Le terme de plus bas degré de la partie irrégulière caractérise l'irrégularité de la V.R. dans sa variation spatiale. Ex. la V.R. géométrique associée à une surface S a un covariogramme en $K(h) = S - D|h| + \dots$: le terme de plus bas degré de la partie irrégulière est de degré 1.

1-3 REGULARISATION D'UNE V.R., ET MONTEES.

Soit $f(x)$ une V.R., $p(x)$ une fonction de pondération, $f_p = f * \check{p}$ la régularisée de f par p . La relation (1) peut déjà s'écrire :

$$g = f * \check{f}$$

et montre que le covariogramme transitif est l'autorégularisée de la V.R. f . Le covariogramme

$$g_p = f * \check{p} * \check{f} * p = f * \check{f} * p * \check{p} = f_p * \check{f}_p \text{ se met aussi sous la forme :}$$

$$g_p = g * P$$

avec $P = p * \check{p}$: on obtient le covariogramme de la régularisée en régularisant g par le covariogramme transitif P de la fonction de pondération p : c'est effectivement une fonction plus régulière que g , de même que f_p est plus régulière que la V.R. initiale f .

Montée. (cas limite de la régularisation). Si $f_3(x) = f_3(x_1, x_2, x_3)$ est une V.R. dans l'espace à trois dimensions, on dit que la V.R. :

$$f_2(x_1, x_2) = \int f_3(x_1, x_2, x_3) dx_3$$

définie dans l'espace à deux dimensions se déduit de f par montée. Par exemple, si $f_3(x)$ est une teneur ponctuelle, $f_2(x_1, x_2)$ est l'accumulation (quantité de métal au mètre carré) du sondage implanté au point (x_1, x_2) de la surface topographique.

On démontre (à l'aide, par exemple, de la transformation de Fourier), que le covariogramme $g_2(h_1, h_2)$ de la V.R. f_2 déduite de f_3 par montée s'obtient en effectuant cette même opération de montée sur le covariogramme $g_3(h_1, h_2, h_3)$ de f_3 .

Montée dans le cas isotrope. Si $g_3(h) = g_3(r)$ ne dépend que du module r du vecteur h , on peut effectuer la montée terme à terme sur la partie irrégulière de g_3 (ce principe de correspondance terme à terme détermine donc le covariogramme g_2 à une série entière paire près). A tout terme en r^λ correspond ainsi un terme en $r^{\lambda+1}$. Si λ est un entier impair, ou dans le cas d'un terme logarithmique, on obtient la séquence singulière :

$$\begin{aligned} \log r &\rightarrow \pi r \\ r &\rightarrow -r^2 \log r \end{aligned}$$

où alternent termes impairs et termes logarithmiques. On notera que, dans tous les cas, la montée a un effet régularisant.

1-4 L'ESTIMATION DES V.R.

1-4-1 Expression Rigoureuse de la variance d'Estimation. Nous raisonnons dans l'espace à une seule dimension, mais, les résultats se généralisent sans peine. Soit $f(x)$ une V.R. Pour

estimer la quantité de métal :

$$Q = \int f(x) dx$$

on dispose d'un réseau de prélèvements à maille régulière a . Si x_0 est l'implantation de l'un (quelconque) de ces prélèvements, on connaît donc les valeurs numériques des $f(x_0 + pa)$ pour p entier positif ou négatif. En fait, seul un nombre fini de ces valeurs est $\neq 0$, si le champ est borné, et il suffit donc en réalité que le réseau effectif ait quelque peu débordé ce champ. On prend comme estimateur :

$$Q^*(x_0) = a \sum_{p=-\infty}^{\infty} f(x_0 + pa)$$

L'erreur d'estimation est $Q - Q^*(x_0)$: c'est une fonction périodique de période a de x_0 , car il est manifestement indifférent de prendre comme origine du réseau l'un ou l'autre des prélèvements. Pour faire de cette erreur une variable aléatoire, il suffit donc d'admettre que l'"origine" x_0 du réseau est choisie au hasard avec une densité de probabilité uniforme sur le segment $(0, a)$. On a alors :

$$E[Q^*(x_0)] = \int_0^a \frac{dx_0}{a} \sum_p f(x_0 + pa) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = Q$$

et la variance d'estimation (variance de cette erreur aléatoire) est :

$$\sigma^2(a) = \frac{1}{a} \int_0^a [Q^*(x_0) - Q]^2 dx = \frac{1}{a} \int_0^a [Q^*(x_0)]^2 dx_0 - Q^2$$

Evaluons l'intégrale de $[Q^*(x_0)]^2$. On a :

$$[Q^*(x_0)]^2 = a^2 \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} f(x_0 + pa) f(x_0 + qa) = a^2 \sum_k \sum_p f(x_0 + pa) f(x_0 + pa + ka)$$

Intégrons de 0 à a . Il vient :

$$\begin{aligned} \int_0^a [Q^*(x_0)]^2 dx_0 &= a^2 \sum_k \int_0^a \sum_p f(x_0 + pa) f(x_0 + pa + ka) dx_0 = \\ &= a^2 \sum_k \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_0) f(x_0 + ka) dx_0 = a^2 \sum_k g(ka) \end{aligned}$$

Compte tenu aussi de la relation (2), on obtient donc la formule :

$$(3) \quad \sigma^2(a) = a \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(ka) - \int_{-\infty}^{+\infty} g(h) dh$$

Dans l'espace à n dimension, on a un résultat tout-à-fait analogue. Par exemple, pour $n = 3$, et une maille parallélépipédique a_1, a_2, a_3 , il vient :

$$\sigma^2(a_1, a_2, a_3) = (a_1, a_2, a_3) \sum_{k_1} \sum_{k_2} \sum_{k_3} g(k_1 a_1, k_2 a_2, k_3 a_3) - \int g(h) dh$$

Remarque. La variance d'estimation (3) est la différence entre une valeur approchée et la valeur exacte de l'intégrale $\int g(h) dh$. Elle est donc d'autant plus petite que :

- la maille a est plus petite,
- la fonction g , donc aussi la V.R. elle-même est plus régulière.

Si la maille a est petite vis-à-vis de la portée, la formule (3) comporte un grand nombre de termes. On est conduit à chercher des formules d'approximation.

1-4-2 Formules d'Approximation pour l'Espace à une Dimension.

Dans l'espace à une seule dimension, et pour une maille a petite vis-à-vis de la portée, on peut appliquer un principe de correspondance terme à terme entre la partie irrégulière du $g(h)$ et le développement limité de la variance d'estimation $\sigma^2(a)$ au voisinage de $a = 0$. A tout terme irrégulier en r^λ correspond un terme en $A_\lambda a^{\lambda+1}$ (A_λ constante ne dépendant que de λ). En particulier :

$$- r \rightarrow \frac{1}{6} a^2$$

$$r^2 \log r \rightarrow 0,0609 a^3$$

Remarque. Si $L = na$ est la longueur minéralisée, et n le nombre de prélèvements positifs, au covariogramme en r^λ correspond la variance d'estimation :

$$(4) \quad \sigma^2(a) = A_\lambda a^{1+\lambda} = (A_\lambda L^{1+\lambda}) \frac{1}{n^{1+\lambda}}$$

Elle est en raison inverse de $n^{1+\lambda}$ (et non en $1/n$ comme l'aurait suggéré une application maladroite de la statistique classique).

Zitterbewegung, ou terme fluctuant: Le principe de correspondance, énoncé ci-dessus ne constitue qu'une approximation. La valeur exacte de $\sigma^2(a)$ calculée à partir de (3) peut en différer nota-

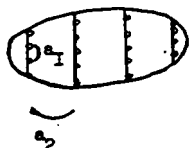
blement (Figure ci-jointe). La différence entre valeur exacte et valeur approchée peut être élevée, mais elle est nulle en moyenne : c'est le terme fluctuant, ou Zitterbewegung. Son amplitude peut aller de 1 à 3 sur la figure ci-jointe.

1-4-3 Formules d'Approximation pour l'Espace à deux ou trois Dimensions

A deux dimensions (toujours exclusion faite d'un Zitterbewegung) on a des formules d'approximation du type :

$$\sigma^2(a_1, a_2) = B_\lambda a_2^{2+\lambda} + C_\lambda a_1^{1+\lambda} a_2$$

pour un $g(h)$ en $|h|^\lambda$ et avec $a_1 \leq a_2$. Si $a_1 = 0$, on connaît parfaitement les accumulations des lignes, et le terme $B_\lambda a_2^{2+\lambda}$ est la variance de l'erreur que l'on commet en estimant Q à partir des résultats (supposés parfaitement connus) de ces lignes : c'est le terme de tranche (extension des lignes dans leurs tranches d'influence). On a des résultats analogues dans l'espace à 3 dimensions.



1-5 APPLICATION A L'ESTIMATION D'UNE SURFACE S

Appliquons la formule (4) à la V.R. $f(x) = k(x)$ égale à 1 ou à 0 selon que x appartient ou non à une surface S : il s'agit donc de l'estimation de l'aire de cette surface S à partir d'un réseau de sondages à maille rectangulaire a_1, a_2 ($a_1 \leq a_2$). Le covariogramme transiti-
f K(h) associé à S est linéaire au voisinage de l'origine, et on a :

$$K(h) = K(0) - |h| D_\alpha$$

D_α représentant, comme nous l'avons vu, la demi-variation diamétrale de S dans la direction α du vecteur h .

a/ Plaçons-nous tout d'abord, dans le cas isotrope, c'est-à-dire dans le cas où $D_\alpha = D$ est à peu près indépendant de la direction α . La formule (4) est directement applicable, et donne :

$$\frac{\sigma_S^2}{S^2} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \frac{D}{\sqrt{S}} \left(\frac{1}{6} \sqrt{\frac{a_1}{a_2}} + 0,0609 \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^{\frac{3}{2}} \right)$$

La variance est en $1/n^{\frac{3}{2}}$, n désignant le nombre des sondages positifs. Pour utiliser effectivement cette formule à partir des données disponibles expérimentalement, on peut estimer S en

attribuant à chaque sondage son rectangle d'influence, ce qui donne :

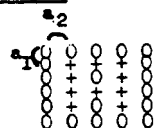
$$S = n a_1 a_2$$

On estimera D à partir du contour de la réunion de ces zones d'influence (voir figure ci-après). On comptera donc les nombres N_1 et N_2 des éléments parallèles à a_1 et a_2 respectivement qui constituent ce périmètre, et on aura $D = N_1 a_1 = N_2 a_2$ (puisque'il y a isotropie). Par suite, il vient :

$$(5) \quad \frac{\sigma_s^2}{S^2} = \frac{1}{n^2} \left[\frac{1}{6} N_2 + 0,061 \frac{(N_1)^2}{N_2} \right] \quad (N_2 \leq N_1)$$

b/ En général, cependant, le contour ne sera pas suffisamment isotrope pour que D_α puisse être regardée comme une constante D . Il présentera, par exemple, une direction principale d'allongement. Si l'un des côtés de la maille est parallèle à cette direction principale (ce qui sera souvent le cas), la formule (5) précédente reste applicable : en effet, prenant cette direction principale comme axe des x , et multipliant les ordonnées par un module convenable, nous obtenons une nouvelle figure, isotrope cette fois (au moins en première approximation) pour laquelle (5) est donc valable. Mais cette transformation linéaire n'a modifié ni N_1 ni N_2 , ni la variance relative σ^2/S^2 , de sorte que (5) est valable aussi dans le cas de la figure anisotrope initiale.

Exemple. Sur la figure ci-après, l'aire minéralisée est estimée à 10 fois le rectangle de maille



$a_1 a_2$. Elle comporte un trou (une lacune). Dans le décompte de N_1 et de N_2

doivent figurer aussi bien les éléments extérieurs que les éléments intérieurs. On lit donc sur la figure :

$$2 D_1 = 12 a_1 \quad \text{soit} \quad N_1 = 6$$

$$2 D_2 = 8 a_2 \quad \text{soit} \quad N_2 = 4$$

D'où, par conséquent :

$$\frac{\sigma_s^2}{S^2} = \frac{1}{100} \left[\frac{4}{6} + 0,061 \frac{36}{4} \right] = \frac{1,21}{100}$$

soit un écart type relatif $\sigma_s/S = 11/100$, et une fourchette d'erreur relative de $\pm 22\%$.

On se gardera toutefois d'oublier que ce calcul fait abstraction du terme fluctuant, ou

Zitterbewegung, dont nous savons que l'amplitude peut être énorme.

2 - THEORIE DES FONCTIONS ALEATOIRES INTRINSEQUES

2-1 DEFINITIONS GENERALES

Notion de Fonction Aléatoire. En théorie des probabilités, on définit la notion de variable aléatoire (V.A.) vectorielle $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_k)$ à k composantes : c'est une famille de k V.A. ordinaires $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$ (en général non indépendantes). Lorsque le nombre k de ces composantes devient infini, on obtient une famille infinie de variables aléatoires : c'est une fonction aléatoire. En particulier, si x est un point décrivant l'espace à n dimensions R^n , on peut définir une famille infinie $(Y_x)_{x \in R^n}$. A tout point x_0 de l'espace correspond ainsi une V.A. ordinaire Y_{x_0} , que l'on peut aussi bien noter $Y(x_0)$. $Y(x)$ est alors une fonction du point x , dont la "valeur" en x_0 n'est pas un nombre, mais une V.A. (à savoir $Y(x_0)$). On dit que $Y(x)$ est une fonction aléatoire (en abrégé, F.A.). On remarquera bien qu'en général les V.A. correspondant à deux points d'appui x_1 et x_2 , soient $Y(x_1)$ et $Y(x_2)$ ne sont pas indépendantes.

Si Y est une V.A. ordinaire, le résultat d'un tirage au sort effectué selon la loi de probabilité de Y est une valeur numérique particulière y . De même, si Y est une V.A. vectorielle $(Y_1, Y_2, \dots, Y_k)$, un tirage au sort selon la loi (à k variables) de Y donne un vecteur $y = (y_1, y_2, \dots, y_k)$, c'est-à-dire k valeurs numériques particulières. Enfin, si $Y(x)$ est une F.A. - c'est-à-dire une V.A. vectorielle à une infinité de composantes - un tirage au sort, effectué selon la loi (à une infinité de variables) de $Y(x)$ donne une fonction numérique particulière $y(x)$, en général extraordinairement irrégulière. On dit que $y(x)$ est une réalisation de la F.A. $Y(x)$.

On peut toujours considérer une réalisation $y(x)$ d'une F.A. $Y(x)$ comme une variable régionalisée. Inversement, on peut interpréter une V.R. donnée $y(x)$ comme une réalisation d'une certaine F.A. $Y(x)$: cette interprétation permet d'appliquer aux V.R. les résultats de la théorie probabiliste des F.A.

Remarques. 1/ On ne peut jamais dire qu'une V.R. donnée $y(x)$ est une F.A. Cela n'aurait pas plus de sens que de dire : le nombre 98 est une V.A. L'énoncé correct de l'hypothèse probabiliste de base que nous désirons introduire est : $y(x)$ est une réalisation d'une F.A. $Y(x)$.

2/ Pour que cette hypothèse probabiliste ait une signification réelle, il faut que l'on puisse reconstituer au moins en partie la loi de la F.A. $Y(x)$ dont la V.R. $y(x)$ est supposée

être une réalisation, et cela suppose que l'inférence statistique soit possible. Or, l'inférence statistique n'est en général pas possible si l'on ne dispose que d'une seule réalisation $y(x)$ de $Y(x)$ (de même, on ne peut pas reconstituer la loi d'une V.A. Y à partir du résultat numérique $y = 98$ d'une épreuve unique). Pour que l'inférence statistique soit possible, il est nécessaire d'introduire des hypothèses supplémentaires sur la F.A. $Y(x)$, de manière à réduire le nombre des "paramètres" dont dépend sa loi. Tel est le but de l'hypothèse stationnaire que nous allons définir: une F.A. stationnaire se répète en quelque sorte elle-même dans l'espace, et cette répétition rend à nouveau possible l'inférence statistique à partir d'une réalisation unique. Précisons donc cette hypothèse.

F.A. stationnaire. On dit qu'une F.A. $Y(x)$ est stationnaire si sa loi est invariante par translation : autrement dit, si $x_1, x_2, \dots, x_k$ sont k points d'appui arbitraires (k entier quelconque) et si h est un vecteur quelconque, les k V.A. $Y(x_1), Y(x_2), \dots, Y(x_k)$ ont la même loi (à k variables) que les k V.A. $Y(x_1+h), Y(x_2+h), \dots, Y(x_k+h)$. Dans ce qui suit, $Y(x)$ désignera une F.A. stationnaire.

Espérance mathématique. Considérons un point d'appui x_0 . Si la V.A. ordinaire $Y(x_0)$ admet une espérance mathématique, celle-ci est une fonction $m(x_0) = E[Y(x_0)]$ du point d'appui x_0 . Mais $Y(x)$ est stationnaire, et on a par suite $m(x_0+h) = m(x_0)$ pour tout vecteur h , et $m(x_0)$ est donc une constante m indépendante de x_0 :

$$m = E[Y(x)]$$

Quitte à remplacer $Y(x)$ par $Y(x) - m$, nous supposons toujours $m = 0$, (pourvu toutefois que cette espérance existe).

La covariance $K(h)$. Considérons maintenant deux points d'appui x_0 et x_0+h . Si les deux V.A. $Y(x_0)$ et $Y(x_0+h)$ admettent des variances finies (donc aussi une espérance m que nous supposons nulle), elles admettent aussi une covariance $K(x_0; h)$, qui dépend en principe du point d'appui x_0 et du vecteur h . Mais, $Y(x)$ étant stationnaire, on a $K(x_0+a; h) = K(x_0; h)$ pour tout vecteur a : $K(x_0; h)$ ne dépend donc pas de x_0 , et nous écrirons simplement $K(h)$:

$$(1) \quad K(h) = E[Y(x) Y(x+h)]$$

On comparera cette définition de la covariance avec celle du covariogramme transitif : $K(h)$ est la transposition probabiliste de $g(h)$.

Pour $h = 0$, on a $K(0) = E([Y(x)]^2)$: c'est la variance de la V.A. $Y(x_0)$. Pour que la F.A.

stationnaire $Y(x)$ admette une fonction de covariance $K(h)$, il faut et il suffit qu'elle admette une variance finie $K(0)$.

Hypothèse stationnaire d'ordre 2. Nous dirons qu'une F.A. $Y(x)$ est stationnaire d'ordre 2 si la V.A. $Y(x_0)$ admet une espérance m indépendante du point d'appui x_0 , et si pour tout vecteur h la covariance :

$$K(h) = E [Y(x_0 + h) Y(x_0)] - m_0^2$$

existe et ne dépend pas de x_0 . Cette hypothèse (qui n'entraîne pas la stationnarité au sens strict, telle que nous l'avons définie ci-dessus) est suffisante pour la théorie des V.R. Mais elle suppose l'existence d'une variance a priori finie $K(0)$

Variance a priori infinie. Or d'assez nombreux phénomènes présentent une capacité de dispersion illimitée, et ne peuvent être décrits correctement si on leur attribue une variance a priori finie : cette affirmation surprendra peut-être, mais il faut bien voir que la nature nous tend ici une sorte de piège. Lorsque l'on prélève des échantillons v dans un champ V , on obtient un histogramme à partir duquel on peut toujours calculer numériquement une variance, qui prend ainsi une valeur parfaitement définie. Mais cette variance expérimentale est en réalité une fonction $\sigma^2(v|V)$ du support v et du champ V . Elle augmente, en particulier, lorsque le champ V augmente. Si les échantillons de taille v possèdent une variance a priori finie, celle-ci doit apparaître comme la limite pour V infini de la variance expérimentale $\sigma^2(v|V)$.

C'est ainsi que les auteurs d'Afrique du Sud (D.G. Krige etc...), à partir de centaines de milliers d'échantillons prélevés dans le grand gisement d'or du Rand, ont pu calculer la variance de ces échantillons dans des panneaux de plus en plus grands, puis dans une concession entière, puis dans le gisement du Rand dans son ensemble : ils ont ainsi obtenu une relation expérimentale de la forme :

$$\sigma^2(v|V) = \alpha \log (V/v)$$

La croissance de la variance se poursuit sans défaillance selon cette loi logarithmique (formule de De Wijs) jusqu'au dernier point expérimental, pour lequel V/v est de l'ordre de la dizaine de milliards. On peut conclure en toute certitude qu'il n'existe pas ici de variance a priori finie.

On est donc conduit à remplacer l'hypothèse stationnaire d'ordre 2 par une hypothèse plus faible mais de signification analogue :

Hypothèse intrinsèque. Même lorsque la variance a priori $K(0)$ n'existe pas (est infinie), il peut arriver que les accroissements $Y(x_0+h) - Y(x_0)$ aient une variance finie. Nous dirons donc que la F.A. $Y(x)$ vérifie l'hypothèse intrinsèque si, pour tout vecteur h , l'accroissement $Y(x_0+h) - Y(x_0)$ admet une espérance et une variance indépendantes du point d'appui x (mais dépendant de h), soit :

$$E [Y(x+h) - Y(x)] = m(h)$$

$$E [(Y(x+h) - Y(x))^2] = 2 \gamma(h)$$

La fonction $m(h)$ est la dérive linéaire. Pour montrer qu'elle est linéaire en h , on part de la relation évidente :

$$Y(x + h'' + h') - Y(x) = [Y(x + h'' + h') - Y(x + h')] + [Y(x + h') - Y(x)]$$

et on passe aux espérances, d'où : $m(h' + h'') = m(h') + m(h'')$. On peut toujours supposer que cette dérive linéaire $m(h)$ est nulle, quitte à remplacer $Y(x)$ par $Y(x) - m(x)$.

La fonction $\gamma(h)$:

$$(2) \quad \gamma(h) = \frac{1}{2} E [(Y(x+h) - Y(x))^2]$$

s'appelle le demi-variogramme, ou fonction intrinsèque. Une F.A. vérifiant l'hypothèse intrinsèque constitue ce qu'on appelle un schéma intrinsèque, caractérisé par son demi-variogramme.

Remarque. Si $Y(x)$ vérifie l'hypothèse stationnaire d'ordre 2, elle vérifie aussi l'hypothèse intrinsèque, et l'on a dans ce cas :

$$(3) \quad \gamma(h) = K(0) - K(h)$$

Comme $|K(h)| \leq K(0)$, on a $\gamma(h) \leq 2 K(0)$, de sorte que le demi-variogramme d'une F.A. stationnaire d'ordre 2 est nécessairement borné. Il existe des schémas intrinsèques d'utilisation très courante dont le $\gamma(h)$ n'est pas borné, et qui par conséquent ne peuvent pas vérifier l'hypothèse stationnaire d'ordre 2 (ont une variance a priori infinie). Ex : schéma de De Wijs ($\gamma(h) = 3 \alpha \log |h|$), schéma linéaire ($\gamma(h) = A |h|$).

2-2 PROPRIETES DE LA COVARIANCE $K(h)$ et du demi-variogramme $\gamma(h)$

a/ Symétrie : $K(h) = K(-h)$; $\gamma(h) = \gamma(-h)$

Inégalités : $|K(h)| \leq K(0)$; $\gamma(h) \geq 0$ et $\gamma(0) = 0$

Ces conditions sont nécessaires, mais il ne suffit pas qu'une fonction K ou γ les vérifie pour qu'il existe une F.A. stationnaire ou intrinsèque admettant cette covariance ou ce demi-variogramme. En fait, il faut et il suffit que K appartienne à la classe des fonctions "de type positif" et γ à celle des fonctions de type positif conditionnel. Par exemple, les fonctions $\log r$ et r^λ avec $\lambda < 2$ peuvent servir de demi-variogramme, mais non r^λ pour $\lambda \geq 2$. Ces conditions expriment, entre autres, que les formules que nous établirons ci-dessous pour les variances d'extension ou d'estimation conduisent nécessairement à des valeurs positives (ce qui ne serait pas toujours le cas si l'on prenait une fonction quelconque comme demi-variogramme).

b/ On peut remarquer que le variogramme donne un contenu précis à la notion traditionnelle de zone d'influence d'un échantillon : sa croissance plus ou moins rapide reflète, en effet, la manière plus ou moins rapide dont se détériore l'influence d'un échantillon sur des zones de plus en plus lointaines du gisement.

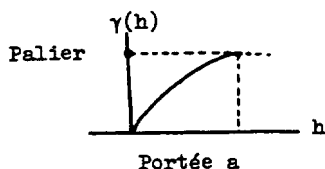
c/ Les anisotropies se manifestent par le comportement différent du variogramme dans les différentes directions de l'espace. En l'absence d'anisotropie, $\gamma(h) = \gamma(r)$ ne dépend que du module r de h , et non de la direction de ce vecteur. On dit qu'il y a anisotropie géométrique lorsqu'une simple transformation linéaire des coordonnées suffit à rétablir l'isotropie.

Il y a des types plus complexes d'anisotropies. Par exemple, dans l'espace à trois dimensions, il peut arriver que $Y(x)$ ne dépende que de la troisième coordonnée x , et reste par suite constante dans les plans parallèles aux deux premiers axes de coordonnées. Le demi-variogramme $\gamma(h) = \gamma(h_3)$ ne dépend que de la troisième composante de h . Le plus souvent, $Y(x)$ ne sera pas réellement constante dans les plans horizontaux, mais y variera moins vite ou plus régulièrement que dans la direction verticale. On prendra alors un demi-variogramme de la forme $\gamma(h) = \gamma_0(h_1, h_2, h_3) + \gamma_1(h_3)$ (anisotropie zonale).

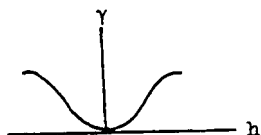
d/ Portée. Dans le cas stationnaire d'ordre 2, la portée $a(\alpha)$ dans une direction α est la valeur de la distance au-delà de laquelle, dans cette direction, $Y(x)$ et $Y(x+h)$ sont sans corrélation (ou en corrélation négligeable) : $K(h) = 0$ (ou $\neq 0$) pour $|h| \geq a(\alpha)$

D'après (3), $K(h) = 0$ équivaut à $\gamma(h) = K(0) = \gamma(\infty)$:

la portée est aussi la distance à partir de laquelle le demi-variogramme atteint sa valeur limite $\gamma(\infty)$ ou palier. Ainsi, une F.A. intrinsèque dont le variogramme n'est pas borné ne peut pas avoir de portée finie.



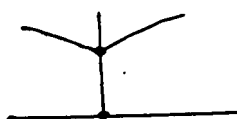
e/ Comportement au voisinage de l'origine. La continuité et la régularité dans l'espace de la F.A. $Y(x)$ s'expriment dans le comportement du $\gamma(h)$ au voisinage de l'origine. Par ordre de régularité décroissante, on peut distinguer quatre types :



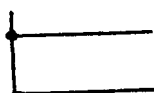
Comportement parabolique : $\gamma(h)$ est deux fois dérivable en $h = 0$, $Y(x)$ est alors elle-même dérivable (en moyenne quadratique), donc présente un haut degré de régularité dans l'espace.



Comportement linéaire (tangente oblique à l'origine) : $\gamma(h)$ est continu en $h = 0$, mais non dérivable, $Y(x)$ est continue en moyenne quadratique, mais non dérivable, donc déjà moins régulière.



Effet de pépite : $\gamma(h)$ ne tend pas vers 0 lorsque h tend vers 0 (discontinuité à l'origine). $Y(x)$ n'est même pas continue en moyenne quadratique, donc extraordinairement irrégulière.



Cas limite complètement aléatoire : $Y(x)$ et $Y(x')$ sont indépendantes pour deux points distincts quelconques, si rapprochés soient-ils.

Partie irrégulière. Dans le cas isotrope ($\gamma(h) = \gamma(r)$) et en l'absence d'effet de pépite, on caractérisera le comportement du $\gamma(h)$ par un développement limité de la forme :

$$\gamma(r) = \sum a_{2n} r^{2n} + \sum c_{\lambda} r^{\lambda} + \sum c_{2n} r^{2n} \log r$$

Exactement comme pour les covariogrammes transitifs, on distinguera une partie régulière (termes de degré entier pair), et une partie irrégulière (termes en r^{λ} avec λ différent d'un entier pair, et aussi termes logarithmiques du type $r^{2n} \log r$). En l'absence de partie irrégulière, la F.A. serait indéfiniment dérivable, donc parfaitement régulière. C'est donc la partie irrégulière seule qui représente le degré d'irrégularité de la F.A., et dans cette partie irrégulière c'est le terme de plus bas degré qui joue le rôle principal : on peut définir le degré de régularité de la F.A. comme le degré λ du terme irrégulier principal. Donnons quelques indications mathématiques complémentaires :

Continuité et dérivation en moyenne quadratique.

On dit que la F.A. $Y(x)$ est continue en moyenne quadratique (continue m.q.) si l'on a :

$$E \left([Y(x+h) - Y(x)]^2 \right) \rightarrow 0 \quad \text{pour } |h| \rightarrow 0$$

Il en est ainsi (par définition) si et seulement si $\gamma(h)$ est continu en $h = 0$, c'est-à-dire en l'absence d'effet de pépité.

Dans l'espace à une dimension, on dit que la F.A. $Y'(x)$ est la dérivée en moyenne quadratique (dérivée m.q.) de la F.A. $Y(x)$ si :

$$E \left(\left[\frac{Y(x+h) - Y(x)}{h} - Y'(x) \right]^2 \right) \rightarrow 0 \quad \text{pour } |h| \rightarrow 0$$

On a des définitions analogues dans l'espace à $n \neq 1$ dimensions.

On démontre qu'une F.A. intrinsèque $Y(x)$ admet une dérivée m.q. $Y'(x)$ si et seulement si $\gamma(h)$ est deux fois dérivable en $h = 0$. La dérivée seconde $\gamma''(h)$ existe alors pour tout h , $Y'(x)$ est stationnaire d'ordre 2 (même si $Y(x)$ est seulement intrinsèque) et admet comme covariance la fonction $-\gamma''(h)$. De même, $Y(x)$ est n fois dérivable m.q. si et seulement si la dérivée $\gamma^{(2n)}$ existe en $h = 0$ (elle existe alors pour tout h).

Si λ est le degré du terme irrégulier principal de $\gamma(h)$, $Y(x)$ admet donc une dérivée m.q. d'ordre n si et seulement si $\lambda > 2n$ (si ce terme irrégulier principal est $r^{2n} \log r$, $Y(x)$ est $n-1$ fois m.q. dérivable, mais non n fois).

2-3 REGULARISATION D'UNE F.A. INTRINSEQUE

Pour simplifier l'exposé, nous ferons les raisonnements dans le cas d'une F.A. stationnaire d'ordre 2 admettant une fonction de covariance $K(h)$, mais tous les résultats que nous exprimerons à l'aide de la fonction intrinsèque $\gamma(h) = K(0) - K(h)$ resteront valables dans le cas d'une F.A. intrinsèque (donc, même si $\gamma(h)$ n'est pas borné, et si par suite la covariance $K(h)$ n'existe pas).

2-3-1 Intégrale Stochastique

$$I = \int_V Y(x) p(x) dx$$

On définit l'intégrale I comme la limite en moyenne quadratique (si elle existe) des sommes discrètes :

$$I_n = \sum_{i=1}^n Y(x_i) p(x_i) \Delta x_i$$

(les Δx_i sont des petits éléments de volume disjoints dont la réunion est v , et x_i est un point de Δx_i). L'intégrale stochastique I est donc une variable aléatoire, comme les I_n .

On démontre que cette V.A. existe si et seulement si l'intégrale

$$(4) \quad D^2(I) = \int_V p(x) dx \int_V K(x-y) p(y) dy$$

est finie, et $D^2(I)$ est alors la variance (finie) de cette V.A. On retrouve facilement (4) par le calcul (non rigoureux) suivant :

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_V Y(x) p(x) dx \int_V Y(y) p(y) dy \\ E(I^2) &= \int_V p(x) dx \int_V E[Y(x) Y(y)] p(y) dy = \\ &= \int_V p(x) dx \int_V K(x-y) p(y) dy \end{aligned}$$

(le calcul n'est pas rigoureux, car il n'est pas tout-à-fait évident au départ que l'on a le droit d'intervertir les symboles E et $\int$: en fait, on montre que cette interversion est bien légitime).

2-3-2 Convolution Stochastique. Le produit de convolution $Y * f$ de la F.A. $Y(x)$ par une fonction ordinaire $f(x)$ est l'intégrale stochastique (si elle existe) :

$$\int Y(x - x') f(x') dx'$$

On peut ainsi définir la régularisée $Y_p = Y * p$ de la F.A. $Y(x)$ par une fonction de pondération $p(x)$. C'est la "moyenne mobile pondérée" :

$$Y_p(x) = \int Y(x + x') p(x') dx'$$

Attention : la régularisée $Y(x)$ est encore une fonction aléatoire (plus régulière que $Y(x)$, mais toujours aléatoire) : il ne suffit pas de lisser ou régulariser une F.A. par un procédé de moyenne mobile pour faire disparaître comme par magie le caractère aléatoire de cette fonction.

La variance de la régularisée Y_p est donnée par la formule (4) ci-dessus, et $Y_p(x)$ existe au sens de l'intégration m.q. si et seulement si $D^2(I) < \infty$. Calculons la covariance

$$E [Y(x_0) Y(x_0+h)] \text{ de } Y(x_0) \text{ et } Y(x_0+h).$$

On a :

$$Y_p(x_0) Y_p(x_0+h) = \iint p(x') p(x'') Y(x_0+x') Y(x_0+h+x'') dx' dx''$$

Passons aux espérances, en intervertissant E et $\int$. Il vient :

$$E[Y_p(x_0) Y_p(x_0+h)] = \iint K(h+x''-x') p(x') p(x'') dx' dx''$$

Cette covariance ne dépend pas de x_0 , mais seulement de h . Donc, la régularisée Y est stationnaire d'ordre 2, et admet la covariance :

$$(5) \quad K_p(h) = \int p(x) dx \int K(h+x-y) p(y) dy$$

Cette formule généralise (4). Pour la présenter sous forme plus synthétique, faisons le changement de variable $x = y + z$. Il vient :

$$K_p(h) = \int K(h+z) dz \int p(y+z) p(y) dy$$

Soit P le covariogramme transitif ($P = p * \check{p}$) de la fonction de pondération p . On a par définition $P(z) = \int p(y+z) p(y) dy$, et par suite :

$$K_p(h) = \int K(h+z) P(z) dz$$

c'est-à-dire, sous forme de produit de convolution (car $P = \check{P}$) :

$$(5) \quad K = K * P$$

On obtient la covariance K_p de la régularisée Y_p en régularisant la covariance $K(h)$ de Y par le covariogramme transitif de la fonction de pondération. On comparera ce résultat avec celui que l'on a obtenu dans le cas des méthodes transitives.

Le demi-variogramme γ_p de la régularisée Y_p est $K_p(0) - K_p(h)$. En remplaçant $K(h)$ par $K(0) - \gamma(h)$ dans (4) et (5), on constate que $K(0)$ s'élimine, et il reste :

$$(6) \quad \gamma_p(h) = \int \gamma(h+z) P(z) dz - \int \gamma(z) P(z) dz$$

On peut encore écrire :

$$(6') \quad \gamma_p = \gamma * P - A$$

avec une constante A déterminée par la condition $\gamma_p(0) = 0$. Ces relations (6) et (6') restent vraies pour toute F.A. intrinsèque (même si la covariance n'existe pas).

2-3-3 Montée. La montée constitue un cas particulier de la régularisation. Dans les méthodes transitives, nous pouvions intégrer la V.R. de $-\infty$ à $+\infty$ par rapport à l'une des coordonnées, par exemple x_3 , parce que cette V.R. était nulle à l'extérieur d'un champ borné. Ici, nous ne pouvons plus intégrer que sur une longueur finie ℓ . Nous appellerons donc montée sous puissance constante ℓ l'opération qui nous fait passer de la F.A. $Y_3(x_1, x_2, x_3)$ définie dans l'espace à trois dimensions à la F.A. (x_1, x_2) définie dans l'espace à deux dimensions par :

$$Y_2(x_1, x_2) = \int_0^{\ell} Y(x_1, x_2, x_3) dx_3$$

Si $Y_3(x)$ est la teneur ponctuelle dans une formation stratiforme de puissance ℓ , $Y_2(x_1, x_2)$ est encore l'accumulation du sondage implanté au point (x_1, x_2) de la surface topographique.

La montée a un effet régularisant. Dans le cas isotrope, on montre que le terme irrégulier principal du demi-variogramme de Y_2 est en $r^{1+\lambda}$ si celui de Y_3 était en r^λ . Plus précisément, on a les règles :

$$\left\{ \begin{array}{l} r^\lambda \rightarrow A_\lambda \frac{r^{1+\lambda}}{\ell} \\ \log r \rightarrow \frac{r}{\ell} \\ r \rightarrow -r^2 \log r \end{array} \right. \quad \left(A_\lambda = \sqrt{\pi} \operatorname{tg} \frac{\lambda \pi}{2} \frac{\Gamma(1 + \frac{\lambda}{2})}{\Gamma(1 + \frac{1+\lambda}{2})} \right)$$

2-4 VARIANCE D'EXTENSION ET VARIANCE D'ESTIMATION

2-4-1 Variance d'Extension

Définissons d'abord la notion capitale de variance d'extension. Soit $Y(x)$ une F.A. que nous supposons pour l'instant stationnaire d'ordre 2, et soit $K(h)$ sa covariance. Désignons par $Z(v)$ et $Z(v')$ les "teneurs moyennes" de deux domaines v et v' de l'espace à n dimensions, c'est-à-dire les intégrales stochastiques :

$$Z(v) = \frac{1}{v} \int_v Y(x) dx \quad ; \quad Z(v') = \frac{1}{v'} \int_{v'} Y(x) dx$$

La formule (5) montre que, si v et v' sont bornés, $Z(v)$ et $Z(v')$ ont des variances finies. La première, par exemple, a pour expression :

$$\sigma^2(v) = \frac{1}{v^2} \int_v dx \int_v K(x-y) dy$$

Calculons de même la covariance $\sigma(v, v')$ de $Z(v)$ et $Z(v')$. De :

$$Z(v) Z(v') = \frac{1}{vv'} \int_v Y(x) dx \int_{v'} Y(y) dy$$

on déduit, en passant aux espérances mathématiques :

$$\sigma(v, v') = \frac{1}{vv'} \int_v dx \int_{v'} E[Y(x) Y(y)] dy = \frac{1}{vv'} \int_v dx \int_{v'} K(x-y) dy$$

Nous appellerons variance d'extension de v à v' (ou de v' à v) la variance de l'erreur $Z(v') - Z(v)$ que l'on commet en attribuant à v' la teneur moyenne $Z(v)$ de v . Cette variance d'extension σ_E^2 est égale à :

$$\sigma_E^2 = \sigma^2(v) + \sigma^2(v') - 2 \sigma(v, v')$$

Compte tenu des valeurs calculées plus haut, on trouve donc :

$$\begin{aligned} \sigma_E^2 &= \frac{1}{v^2} \int_v dx \int_v K(x-y) dy + \frac{1}{v'^2} \int_{v'} dx \int_{v'} K(x-y) dy \\ &\quad - \frac{2}{vv'} \int_v dx \int_{v'} K(x-y) dy \end{aligned}$$

Remplaçons $K(h)$ par $K(0) - \gamma(h)$: on constate que la constante $K(0)$ disparaît de l'expression de σ_E^2 , et il vient la formule fondamentale :

$$(7) \quad \sigma_E^2 = \frac{2}{vv'} \int_v dx \int_{v'} \gamma(x-y) dy - \frac{1}{v^2} \int_v dx \int_v \gamma(x-y) dy - \frac{1}{v'^2} \int_{v'} dx \int_{v'} \gamma(x-y) dy$$

On peut montrer que (7) reste valable pour toute F.A. intrinsèque, donc même si la covariance $K(h)$ n'existe pas.

Variance d'Estimation : Supposons maintenant qu'au lieu de connaître la "teneur moyenne" $Z(v')$ de $Y(x)$ dans un volume v' , nous connaissons la teneur moyenne :

$$Z' = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y(x_i)$$

de N prélèvements effectués aux N points x_i . Z' est une variable aléatoire, dont les caractéristiques se déduisent sans peine de $K(h)$ ou de $\gamma(h)$. Nous appellerons variance d'estimation σ_N^2

(de v par les N prélèvements effectués aux N points x_i) la variance de la différence $Z(v) - Z'$.

Pour obtenir l'expression de σ_N^2 , on doit, à chacune des étapes du raisonnement qui nous a conduit

à (7), remplacer les intégrales étendues à v' par des sommes discrètes étendues aux N points x_i .
On trouve ainsi la seconde formule fondamentale :

$$(8) \quad \sigma_N^2 = \frac{2}{Nv} \sum_i \int_V \gamma(x_i - x) dx - \frac{1}{v^2} \int_V dx \int_V \gamma(x - y) dy - \frac{1}{N^2} \sum_i \sum_j \gamma(x_i - x_j)$$

Cette formule, où l'on voit alterner des expressions exactes et approchées de mêmes intégrales, présente une structure remarquable, analogue, quoique plus complexe, à celle de la formule (3) des méthodes transitives. On note, en particulier, que la variance d'estimation est d'autant plus faible :

- que le réseau des prélèvements x_i est plus serré et plus représentatif de la géométrie du volume v que l'on veut estimer,
- que la fonction $\gamma(h)$ est plus régulière, donc que la F.A. $Y(x)$ est elle-même plus continue dans sa variation spatiale.

En pratique, cependant, si N est grand, la formule (8) conduirait à des calculs assez longs. Nous donnerons plus loin des formules d'approximation beaucoup plus simples.

Remarque. Il n'y a aucune différence conceptuelle entre les notions de variances d'extension et d'estimation: la formule (8) est un cas particulier de (7), v' étant remplacé par la réunion des n points x_i . L'usage a réservé le terme de variance d'extension à l'extension d'un échantillon unique dans sa "zone d'influence", et celui de variance d'estimation à l'extension d'un plus grand nombre d'échantillons dans le gisement entier, ou dans un grand panneau.

2-4-2 Variance de v dans V .

La notion de variance $\sigma^2(v|V)$ d'un échantillon v dans un champ V semble de prime abord expérimentalement évidente. Elle n'a cependant un sens précis que dans les deux cas a/ et b/ ci-après :

a/ v est réduit à un point : la variance $\sigma^2(0|V)$ de la variable ponctuelle $Y(x)$ est l'espérance de $[Y(x) - Z(V)]^2$ lorsque x est tiré au sort dans V avec une densité de probabilité uniforme ($Z(V) = \frac{1}{V} \int_V Y(x) dx$ est la teneur moyenne de V). C'est donc la valeur moyenne en $x \in V$ de la variance d'extension du point x au volume V , qui est, d'après (7) ou (8) :

$$\frac{2}{V} \int_V \gamma(x-y) dy - \frac{1}{V^2} \int_V dy \int_V \gamma(y-y') dy'$$

En intégrant en x dans V , le premier terme donne le double de la valeur du second, et il reste :

$$\sigma^2(0|V) = \frac{1}{V^2} \int_V dx \int_V \gamma(x-y) dy$$

(valeur moyenne dans V de $\gamma(h)$ lorsque les deux extrémités x et y du vecteur h décrivent, chacune pour son propre compte, le volume V).

b/ Le volume V est réunion de N volumes v_i disjoints, égaux à un même volume v de référence (plus précisément, chacun des v_i se déduit de v par translation). Si Z_i est la "teneur moyenne" de $Y(x)$ dans v_i , on pose cette fois :

$$\sigma^2(v|V) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E[(Z_i - Z(V))^2]$$

C'est donc la moyenne arithmétique des variances d'extension des v_i dans V . La formule (7), après un calcul facile, conduit à :

$$(9) \quad \sigma^2(v|V) = \frac{1}{V^2} \int_V dx \int_V \gamma(x-y) dy - \frac{1}{v^2} \int_v dx \int_v \gamma(x-y) dy$$

En particulier, on a :

$$(9') \quad \sigma^2(v|V) = \sigma^2(0|V) - \sigma^2(0|v)$$

c/ Dans le cas général où v et V sont des volumes quelconques, non nécessairement géométriquement compatibles, on définit la variance par cette même formule (9) : cette quantité ne représente alors qu'un simple artifice de calcul. Elle peut même prendre des valeurs négatives ; en particulier, on a toujours $\sigma^2(v|V) = -\sigma^2(v|v)$.

d/ Relation d'additivité. Soient v , V et V' trois volumes, avec par exemple $v \subset V \subset V'$. De (9'), on tire :

$$\sigma^2(v|V) = \sigma^2(0|V) - \sigma^2(0|v)$$

$$\sigma^2(v|V') = \sigma^2(0|V') - \sigma^2(0|v)$$

et par différence :

$$\sigma^2(v|V') - \sigma^2(v|V) = \sigma^2(0|V') - \sigma^2(0|V) = \sigma^2(V|V')$$

c'est-à-dire :

$$(10) \quad \sigma^2(v|V') = \sigma^2(v|V) + \sigma^2(V|V')$$

La variance de l'échantillon v dans le champ V' est égale à la somme des variances de v dans le

panneau V et du panneau V dans le champ V' .

e/ Covariance de v et v' dans V . On définit d'une manière analogue la covariance $\sigma(v, v'|V)$ de deux échantillons v et v' (dont la distance et la disposition mutuelles restent fixes) dans le champ V . On trouve :

$$(11) \quad \sigma(v, v'|V) = \frac{1}{V^2} \int_V dx \int_V \gamma(x-y) dy - \frac{1}{VV'} \int_V dx \int_{V'} \gamma(x-y) dy$$

f/ En particulier, il est souvent commode d'exprimer la variance d'estimation (8) ou la variance d'extension (7) par l'intermédiaire des variances et covariances des échantillons dans un champ V arbitraire. On trouve, par exemple, identiquement :

$$(12) \quad \sigma_E^2 = \sigma^2(v|V) + \sigma^2(v'|V) - 2 \sigma(v, v'|V)$$

comme on le voit en substituant (9) et (11) : le terme $\frac{1}{V^2} \int_V \int_V$ disparaît, et les trois termes qui subsistent donnent le second membre de (7). On obtient ainsi une expression peut-être plus intuitive de la variance d'extension.

2-4-3 Application : Mailles aléatoires et aléatoires stratifiées.

Nous traiterons plus loin le cas des mailles régulières, qui est de loin le plus difficile, et nous allons examiner ici le cas des deux types usuels de mailles aléatoires.

a/ Maille aléatoire pure. Pour estimer la teneur $Z(V)$ d'un volume V , on dispose des valeurs $Y(x_i)$ de la F.A. en N points x_i implantés "n'importe où" dans V . Nous admettrons que tout se passe comme si chaque x_i avait été implanté au hasard dans V avec une densité de probabilité uniforme et indépendamment des autres prélèvements. On peut obtenir la variance d'estimation σ_N^2 en intégrant (8) dans V relativement à chacun des x_i . Ce calcul est facile, mais il est encore plus simple de remarquer que les erreurs partielles $Y(x_i) - Z(V)$ sont indépendantes les unes des autres et admettent la même variance $\sigma^2(0|V)$: l'erreur résultante, qui est $\frac{1}{N} \sum [Y(x_i) - Z(V)]$ admet donc la variance :

$$\sigma_N^2 = \frac{1}{N} \sigma^2(0|V)$$

La variance d'estimation, dans le cas d'une maille aléatoire pure, est donc égale à la variance d'un prélèvement dans le champ V divisée par le nombre N des prélèvements.

b/ Maille aléatoire stratifiée. Le volume V que l'on veut estimer est ici divisé en N zones d'influence égales et disjointes v_i , et dans chaque v_i on implante un prélèvement en un point x_i choisi au hasard dans la zone d'influence v_i avec une densité de probabilité uniforme, et indépendamment des autres prélèvements. On peut calculer σ_N^2 en intégrant (8) en x_i dans v_i pour chacune des v_i , mais il est plus simple de remarquer que l'erreur totale est $\frac{1}{N} \sum_i [Y(x_i) - Z(v_i)]$ et que chacune des erreurs partielles $Y(x_i) - Z(v_i)$ est indépendante des autres et admet la variance $\sigma^2(O|V)$. On en déduit aussitôt :

$$\sigma_N^2 = \frac{1}{N} \sigma^2(O|V)$$

La variance d'estimation, dans le cas d'une maille aléatoire stratifiée, est donc égale à la variance d'un prélèvement dans sa zone d'influence divisée par le nombre N des prélèvements.

Remarque. Il est clair que la maille aléatoire stratifiée donne toujours de meilleurs résultats que la maille aléatoire pure. D'après (9'), en effet, on a :

$$\frac{1}{N} [\sigma^2(O|V) - \sigma^2(O|v)] = \frac{1}{N} \sigma^2(v|V) \leq 0$$

2-5 EFFET DE PÉPITE ET PHÉNOMÈNES DE TRANSITION

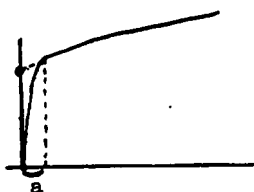
Un demi-variogramme de portée a finie caractérise ce que l'on appelle un phénomène de transition: au delà de la distance a , l'indépendance est atteinte, et la portée a donne l'échelle des structures élémentaires du phénomène régionalisé correspondant. Il y a souvent, d'ailleurs, superposition de plusieurs structures d'échelles bien différentes, emboîtées les unes dans les autres. Le variogramme expérimental montre alors une succession de seuils et de paliers, dont l'analyse permet de reconstituer la hiérarchie de ces "structures gigogne".

La notion d'échelle joue ici un rôle primordial. A l'échelle de la dizaine ou de la centaine de mètres, un phénomène de transition dont la portée est, par exemple, centimétrique ne se manifeste plus, sur le $\gamma(h)$ expérimental, que comme une discontinuité à l'origine, c'est-à-dire comme un effet de pépité. D'une manière générale, tout effet de pépité est une réminiscence d'une structure de transition dont les dimensions sont depuis longtemps dépassées à l'échelle à laquelle on travaille : les détails et les caractéristiques qualitatives de cette structure antérieure ont depuis longtemps cessé d'être perceptibles, et l'échelle supérieure n'a guère conservé qu'un paramètre unique - la constante de pépité - qui donne une sorte de mesure globale indifférenciée de l'"intensité" de cette structure dépassée.

Pour analyser la génèse d'un effet de p p te, plaçons-nous d'abord au niveau ponctuel, et supposons qu'à une structure primaire de dimension a se superpose une macror gionalisation, c'est-à dire une structure secondaire de dimensions beaucoup plus grandes. Si la structure primaire existait seule, on pourrait décrire la V.R. correspondante comme une réalisation d'une F.A. admettant une covariance $C(h)$ de portée a , ou un demi-variogramme :

$$\gamma_1(h) = C - C(h)$$

de portée a et vérifiant $\gamma_1(\infty) = C = C(0)$. Pour tenir compte de la macror gionalisation, on doit ajouter une deuxième composante $\gamma_2(h)$, qui représente la structure secondaire, et ne varie qu'avec une extrême lenteur à l'échelle a de la première structure :



$$\gamma(h) = C - C(h) + \gamma_2(h)$$

Ce $\gamma(h)$ présente donc au voisinage de l'origine une zone de croissance très rapide, dont la dimension est de l'ordre de a .   l'échelle de la macror gionalisation, ce $\gamma(h)$ présentera donc un effet de p p te d'amplitude C .

Examinons les conséquences de cet effet de p p te. Tout d'abord, au niveau macroscopique, les prélèvements ne seront plus ponctuels, mais seront des volumes v déjà grands vis-à-vis de a . Déterminons donc le demi-variogramme $\gamma_v(h)$ de ces prélèvements v (le seul qui sera expérimentalement accessible). γ_v est la somme de la composante très continue γ_2 (qui n' a pas été sensible-ment altérée dans cette régularisation) et de ce que l'on obtient en appliquant la formule (6)   la composante $C - C(h)$: cette composante pépitique est donc :

$$\gamma_p(h) = \frac{1}{v^2} \int_v dx \int_v C(x-y) dy - \frac{1}{v^2} \int_v dx \int_v C(h+x-y) dy$$

Etudions donc γ_p . On a $\gamma_p(0) = 0$, mais dès que h dépasse les dimensions du volume v , on a $|h+x-y| \geq a$ si $x \in v$ et $y \in v$, et $C(h+x-y) = 0$. Le premier terme subsiste donc seul dès que h n'est pas très petit, et l'on observe expérimentalement une discontinuité à l'origine, dont la valeur σ_p^2 (variance de p p te) est :

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{v^2} \int_v dx \int_v C(x-y) dy$$

D'autre part, les dimensions de v sont grandes, par hypothèse, vis-à-vis de a , et on a $\int_v C(x-y) dy = \int C(h) dh$ (intégrale étendue à tout l'espace) sauf si x est situé à une distance

inférieure à a de la frontière de v . Mais ces points occupent un volume négligeable, et l'on peut aussi négliger leur influence, qui est de l'ordre de a . Il reste donc :

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{v^2} \int_v dx \int_v C(h) dh = \frac{1}{v} \int_v C(h) dh$$

Ainsi, la constante de pépite σ_p^2 que l'on observe expérimentalement est en raison inverse du volume des prélèvements :

$$\sigma_p^2 = \frac{A}{v}$$

et le coefficient $A = \int_v C(h) dh$, qui est l'intégrale de la covariance $C(h)$ des microstructures, est le seul souvenir de celles-ci qui subsiste à l'échelle des volumes v .

L'effet de pépite majore de la même manière la variance de v dans V , les variances d'extension et les variances d'estimation. Pour $\sigma^2(v|V)$, par exemple, l'apport de l'effet de pépite sera :

$$\frac{1}{v^2} \int_v dx \int_v C(x-y) dy - \frac{1}{V^2} \int_v dx \int_v C(x-y) dy$$

c'est-à-dire, d'après le calcul précédent :

$$A \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{V} \right)$$

Dans la variance destination de V par N prélèvements de taille v , on trouverait de même une composante pépitique égale à :

$$A \left(\frac{1}{Nv} - \frac{1}{V} \right)$$

Dans tous les cas, la variance due à l'effet de pépite est en raison inverse du volume des prélèvements. Tout se passe donc bien comme si la V.R. elle-même admettait deux composantes indépendantes, l'une très régulière, correspondant au demi-variogramme γ_2 , l'autre complètement aléatoire et discontinue, prenant en charge l'effet de pépite.

2-6 CALCUL DES VARIANCES D'ESTIMATION

La formule générale (8) étant trop lourde à manipuler numériquement, nous allons dégager quelques principes d'approximation qui simplifieront le calcul des variances d'estimation (dans le cas des mailles régulières) et permettront de présenter les résultats sous forme d'abaques faciles à consulter.

2-6-1 Cas de l'espace à une seule dimension

a/ Les fonctions intrinsèques auxiliaires. Outre $\gamma(h)$, on utilise constamment dans les applications les fonctions suivantes :

$$\chi(h) = \frac{1}{h} \int_0^h \gamma(x) dx$$

$$F(h) = \frac{2}{h^2} \int_0^h x \chi(x) dx = \frac{2}{h^2} \int_0^h (h-x) \gamma(x) dx$$

$F(h)$ est la valeur moyenne de $\gamma(h')$ lorsque les deux extrémités de h' décrivent le segment $(0, h)$. Ainsi, la variance du segment h dans le segment L est :

$$\sigma^2(h|L) = F(L) - F(h)$$

$\chi(h)$ permet de même le calcul des covariances : la covariance dans L du segment h avec l'une de ses extrémités (ponctuelle) est :

$$\sigma(0, h|L) = F(L) - \chi(h)$$

b/ Variance d'extension élémentaire. On appelle ainsi la variance d'extension au segment h de l'échantillon ponctuel implanté au centre de ce segment. Elle est donnée par :

$$\begin{array}{c} \overleftrightarrow{\hspace{1cm}} \\ \bullet \end{array} \quad (13) \quad \sigma_E^2 = 2 \chi\left(\frac{h}{2}\right) - F(h)$$

On déduira (13) de (12) et des deux relations établies en a/

c/ Principe de composition des variances d'estension élémentaires.

Soit à estimer la teneur du segment $L = na$ divisé en n zones d'influences de longueur a , au centre de chacune desquelles on a effectué un prélèvement ponctuel. Soit Y_i la teneur du prélèvement i , Z_i celle de sa zone d'influence, et $Z = \frac{1}{n} \sum Z_i$ celle de L . L'erreur totale est la moyenne :

$$\frac{1}{n} \sum_i (Y_i - Z_i)$$

des erreurs partielles $Y_i - Z_i$. Le principe d'approximation consiste à admettre que ces erreurs partielles sont indépendantes les unes des autres (ce principe est vérifié avec une approximation très raisonnable pour les $\gamma(h)$ de type usuel). Comme la variance de $Y_i - Z_i$ est justement la variance d'extension élémentaire calculée en (13), on trouve :

$$(14) \quad \sigma_n^2 = \frac{1}{n} \sigma_E^2 = \frac{1}{n} [2 \chi(\frac{a}{2}) - F(a)]$$

On obtient donc la variance d'estimation en divisant la variance d'extension élémentaire d'un échantillon dans sa zone d'influence par le nombre n des échantillons.

d/ Cas du dispositif fermé. A partir de $n + 1$ prélèvements à maille régulière, a, on



on veut estimer le segment $L = na$ compris entre le premier et le dernier prélèvement. On montre que ce dispositif fermé est équivalent au disposi-

tif centré examiné en c/, et que la variance d'estimation est encore donnée par (14) (pourvu que n soit supérieur à 1) : le dispositif fermé à $n + 1$ échantillons est donc équivalent au dispositif centré à n échantillon.

Remarque. Pour $n = 1$, le dispositif fermé à deux échantillons donne la variance d'estimation :



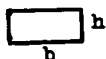
$$\sigma_E^2 = 2 \chi(h) - F(h) - \frac{1}{2} \gamma(h)$$

qui diffère de la variance d'extension élémentaire (13). On n'a pas le droit de diviser σ_E^2 par n , car les erreurs partielles commises dans l'estimation de deux segments fermés consécutifs ne sont pas du tout indépendantes (ces deux figures, en particulier, ont en commun l'échantillon central).

2-6-2 Cas de l'espace à deux dimensions

Nous supposons que le demi-variogramme est isotrope (ne dépend que de r). En cas d'anisotropie géométrique, il est aisé de se ramener à ce cas.

a/ Les fonctions auxiliaires. Il est commode d'introduire les fonctions suivantes :



$\gamma_b(h)$: moyenne de $\gamma(x-y)$ lorsque x et y décrivent les deux côtés parallèles de longueur b du rectangle $b \times h$ (à une constante près, $\gamma_b(h)$ se déduit de $\gamma(h)$ par montée d'ordre 1).

$\chi_b(h)$: moyenne de $\gamma(x-y)$, x décrivant l'un des côtés b du rectangle, et y le rectangle lui-même.

On a :

$$\chi_b(h) = \frac{1}{h} \int_0^h \gamma_b(x) dx$$

$F(b,h)$: moyenne de $\gamma(x-y)$ lorsque x et y décrivent le rectangle. Cette fonction est symétrique en b et h , et vérifie :

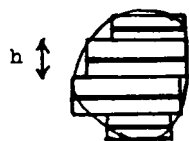
$$F(b,h) = \frac{2}{h^2} \int_0^h x \chi_b(x) dx = \frac{2}{h^2} \int_0^h (h-x) \gamma_b(x) dx$$

$Q(b,h)$: moyenne de $\gamma(x-y)$, x décrivant un côté b et y un côté h , ou encore, x décrivant le rectangle, y restant fixe en l'un des sommets

b/ Extension d'un segment médian dans son rectangle d'influence.

h  (15) $\sigma_E^2 = 2 \chi_b(\frac{h}{2}) - F(h,b) - \gamma_b(0)$

c/ Estimation de S par des tracages parallèles équidistants.



Soient $b_1, b_2, \dots, b_n$ les longueurs des n tracages, h leur équidistance. On assimile la surface S que l'on veut estimer à la réunion des rectangles d'influence des n tracages. La formule (15) donne l'extension de b_i à son rectangle d'influence, soit $\sigma_{E_i}^2$. Si Y_i est la teneur de b_i , Z_i celle de sa zone d'influence, on admet que les $(Y_i - Z_i)$ sont indépendantes, et l'erreur totale :

$$\frac{\sum b_i (Y_i - Z_i)}{b_i}$$

admet une variance que l'on peut calculer en pondérant par les carrés des b_i les variances d'extension $\sigma_{E_i}^2$. D'où la variance d'estimation :

(14)
$$\sigma_E^2 = \frac{\sum b_i^2 \sigma_{E_i}^2}{(\sum b_i)^2}$$

Remarque. Si les b sont égaux, il reste simplement $\sigma_E^2 = \frac{1}{n} \sigma_{E_i}^2$.

d/ Composition d'un terme de ligne et d'un terme de tranche.

Dans le cas c/ précédent, il arrive que l'on ne connaisse pas les teneurs réelles des tracages, mais seulement une estimation de ces teneurs à partir de prélèvements ponctuels à maille régulière a ($a < h$). On admet alors que les erreurs commises en estimant les lignes à partir des prélèvements et S elle-même à partir des lignes (supposées connues) peuvent être regardées comme indépendantes. La variance d'estimation est alors :

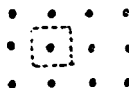
(15)
$$\sigma_E^2 = \frac{1}{N} \sigma^2(a) + \frac{\sum b_i^2 \sigma_{E_i}^2}{(\sum b_i)^2}$$

$\sigma^2(a)$ est la variance d'extension élémentaire (13) d'un prélèvement ponctuel dans son segment a d'influence, N est le nombre total des prélèvements. $\frac{1}{N} \sigma^2(a)$ est le terme de ligne, variance de l'erreur commise en estimant les lignes à partir des prélèvements.

Le deuxième terme, qui figure déjà en (14) est le terme de tranche : variance de l'erreur commise en étendant les teneurs des lignes à leurs tranches d'influence.

Ce principe (15) de composition est valable pourvu que a soit inférieur à h . Il s'applique, en particulier, au cas d'une reconnaissance à maille rectangulaire a, h .

e/ Cas d'une maille carrée. La variance d'extension d'un sondage à son carré d'influence, au centre duquel il est implanté, est :



$$\sigma_E^2 = 2 Q\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) - F(a, a) \quad (16)$$

Pour une maille carrée, on peut admettre que les erreurs commises en estimant chaque carré à partir de son sondage central sont indépendantes. La variance d'estimation par N sondages est alors :

$$\sigma_N^2 = \frac{1}{N} \sigma_E^2$$

avec un σ_E^2 donné par (16).

f/ Abaques. Pour chaque schéma isotrope, c'est-à-dire pour chaque fonction $\gamma(r)$, on doit présenter sous forme d'abaques :

- 1/ La fonction $F(a, b)$ définie en a/, qui sert au calcul de la variance d'un échantillon dans le rectangle a, b .
- 2/ La variance d'extension (15) d'un traçage médian de longueur b dans le rectangle b, h - avec le cas particulier $b = 0$, où l'on retrouve la variance d'extension élémentaire (13).
- 3/ La variance d'extension (16) d'un sondage dans son carré a, a d'influence.

Ces trois documents permettent le calcul rapide de toutes les variances d'estimation.

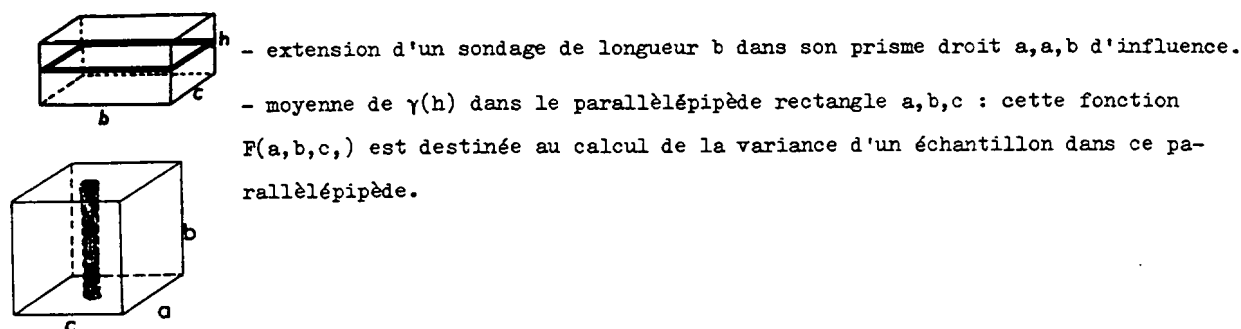
2-6-3 Cas de l'espace à trois dimensions.

On procèdera exactement comme dans le cas de l'espace à deux dimensions, en composant cette fois trois sortes de termes :

- terme de ligne : extension des prélèvements ponctuels dans les lignes.
- terme de section : extension des lignes dans les sections.
- terme de tranche : extension des sections dans les tranches.

On devra disposer des abaques suivants (en plus des précédents) :

- variance d'extension d'un plan b, c médian dans son parallélépipède rectangle d'influence.



3 - LE SCHEMA DE DE WIJS

Le schéma de De Wijs est défini par la fonction intrinsèque (isotrope)

$$\gamma(r) = 3 \alpha \log r$$

Le coefficient α est la dispersion absolue : elle caractérise la dispersion du phénomène à l'état pur, c'est-à-dire indépendamment de toute influence de la géométrie du champ ou du support.

3-1 EQUIVALENTS LINEAIRES

Posons :

$$F(v) = \frac{1}{2} \int_v dx \int_v \log |x-y| dy$$

(valeur moyenne de $\log |h|$ dans le volume v : c'est une fonction qui dépend non seulement de la mesure du volume v , mais aussi de sa forme). D'après la relation (9), on a :

$$(16) \quad \sigma^2(v|v) = 3 \alpha [F(v) - F(v)]$$

Dans un même gisement de Wijsien, si deux échantillons v et v' vérifient $F(v) = F(v')$, ils ont même variance dans n'importe quel panneau. Nous diront qu'ils sont équivalents. Si nous prenons comme ensemble v un segment de droite de longueur ℓ , nous avons :

$$F(\ell) = \log \ell - \frac{3}{2}$$

(le démontrer à l'aide des fonctions auxiliaires de 2-6-1, a/). Nous appellerons équivalent linéaire d'un échantillon v la longueur du segment ℓ équivalent à v , c'est-à-dire la longueur ℓ définie par :

$$\log \ell - \frac{3}{2} = F(v)$$

Soit, de même, L l'équivalent linéaire du champ V :

$$\log L - \frac{3}{2} = F(V)$$

Par différence, il vient :

$$F(V) - F(v) = \log (L/\ell)$$

et (16) donne alors :

$$(17) \quad \sigma^2(v|V) = 3 \alpha \log \left(\frac{L}{\ell} \right)$$

Cette formule permet un calcul rapide de la variance. On l'utilise souvent en sens inverse, pour évaluer la dispersion absolue à partir de la variance expérimentale des échantillons dans leur champ : si v et V sont géométriquement semblables, on a $V/v = (L/\ell)^3$, et (17) se réduit à la formule de de Wijs : $\sigma^2(v|V) = \alpha \log (V/v)$

Calcul approché des équivalents linéaires. Avec une excellente précision, l'équivalent linéaire du rectangle de côtés a et b est $a + b$.

Pour le parallélépipède rectangle (a, b, c) , c désignant le plus petit côté, on a, avec une approximation cette fois assez grossière, un équivalent linéaire de $a + b + 0,7 c$. Pour plus de précision, on consultera l'abaque 1.

Application : comportement du demi-variogramme des échantillons v pour h grand devant les dimensions de v . (On n'utilise jamais le schéma de De Wijs au niveau ponctuel, car $\log r$ est infini en $r = 0$, mais toujours ses régularisées¹). Soit γ_v le demi-variogramme d'échantillons v distants de h . $2 \gamma_v(h)$ est la variance d'extension de ces deux échantillons, et la formule (7) nous donne :

$$\gamma_v(h) = \frac{3\alpha}{v^2} \int_v \int_v \log |h+x-y| \, dx \, dy - 3 \alpha F(v)$$

Dès que h dépasse les dimensions de v , le premier terme ne diffère plus beaucoup de $3 \alpha \log r$. Le deuxième terme est $3 \alpha (\log \ell - 3/2)$, ℓ désignant l'équivalent linéaire de v . Pour h assez grand devant v , on a donc :

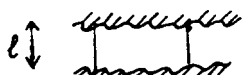
$$(18) \quad \gamma_v(r) = 3 \alpha \log \frac{r}{\ell} + 9 \frac{\alpha}{2}$$

1 - Au niveau ponctuel, le schéma de De Wijs ne représente plus une fonction, mais une distribution aléatoire [4] - Mais les régularisées de ce schéma sont, à nouveau, des F.A.

Cette formule est précieuse dans les applications expérimentales.

3-2 LE SCHEMA DE DE WIJS A DEUX DIMENSIONS

Dans l'application précédente, on peut prendre pour v un segment de longueur ℓ se déplaçant parallèlement à lui-même. D'après (18), on a :

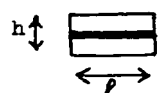


$$\gamma_{\ell}(h) = 3 \alpha \log \frac{r}{\ell} + \frac{9\alpha}{2} \quad \text{pour } h \gg \ell$$

Pour h petit, au contraire, la règle de montée $\log r \rightarrow \pi r/\ell$ donne

$$(19) \quad \gamma_{\ell}(h) = 3 \alpha \pi \frac{h}{\ell}$$

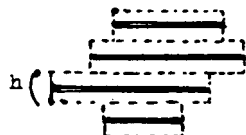
A partir de l'expression rigoureuse de $\gamma_{\ell}(h)$ (déduite de $\log r$ par montée) on calcule la variance d'extension d'un segment ℓ dans son rectangle ℓ, h d'influence : Abaque 2. Lorsque h est petit devant ℓ (en pratique, il suffit que h soit inférieur ou égal à ℓ), on peut utiliser (19) pour calculer directement cette variance d'extension, ce qui donne :



$$(20) \quad \sigma_E^2 = \alpha \frac{\pi}{2} \frac{h}{\ell}$$

Application : Gisement stratiforme reconnu par traçages parallèles.

a/ Supposons d'abord que les teneurs réelles des traçages soient connues, et calculons le terme de tranche. Si h est l'équidistance des traçages, on lit sur l'abaque 2 la variance d'extension $\sigma_{E_1}^2$ du traçage de longueur ℓ_1 dans sa tranche d'influence. Le terme de tranche est alors :



$$\sigma_E^2 = \frac{\sum \ell_i^2 \sigma_{E_1}^2}{(\sum \ell_i)^2}$$

Si chacun des traçages a une longueur ℓ_i supérieure à h , $\sigma_{E_1}^2$ est donnée par (20), et, en posant $L = \sum \ell_i$ (longueur tracée totale), on trouve :

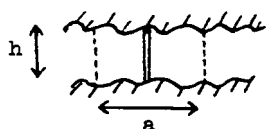
$$\sigma_E^2 = \alpha \frac{\pi}{2} \frac{\sum \ell_i^2 \frac{h}{\ell_i}}{L^2} = \alpha \frac{\pi}{2} \frac{h}{L}$$

ou encore, avec $S = L h$ (surface minéralisée totale) :

$$\sigma_E^2 = \alpha \frac{\pi}{2} \frac{S}{L^2}$$

Conséquence : un gisement 4 fois plus gros, toutes choses égales d'ailleurs, nécessite, à précision égale, deux fois moins de dépenses de reconnaissance à la tonne de minerai.

b/ Si les teneurs des traçages sont estimées à partir de rainurages implantés à maille régulière a , on doit ajouter un terme de ligne. Pour le calculer, il n'est plus possible de négliger la puissance p de la formation (p est petit, par hypothèse, devant h ou les longueurs ℓ_i des traçages, mais non devant a). C'est à nouveau l'abaque 2 qui donne la variance d'extension



sion $\sigma^2(a)$ de la rainure de longueur p dans son rectangle d'influence a, p . Le terme de ligne est alors :

$$\frac{1}{n} \sigma^2(a) = \frac{a}{L} \sigma^2(a)$$

Remarque. Dans la plupart des gisements stratiformes ou filoniens, la troisième dimension, celle des puissances, n'est pas équivalente aux deux autres. Il y a anisotropie. La longueur p que l'on doit attribuer au rainurage peut donc différer de la puissance réelle. On détermine cette puissance équivalente p en remarquant, d'après (18), que le demi-variogramme expérimental des rainurages a pour équation :

$$\gamma(h) = 3 \alpha \left[\log \left(\frac{h}{p} \right) + \frac{3}{2} \right] \quad \text{pour } h > p$$

C'est la valeur de p ainsi déterminée qui doit servir au calcul de $\sigma^2(a)$.

Couche mince reconnue par sondages à maille carrée.

Soit p la puissance équivalente de la formation, définie comme dans la remarque qui précède. On doit calculer la variance d'extension d'un sondage dans son carré (a, a) d'influence. En assimilant ce carré au cercle de même surface, on trouve (cf. Exercice 9) :

$$\sigma_E^2 = 3 \alpha \left(\log \frac{2a}{p} - \frac{1}{2} \right)$$

La variance d'estimation s'en déduit en divisant par le nombre n des sondages :

$$\sigma_n^2 = \frac{3\alpha}{n} \left(\log \frac{2a}{p} - \frac{1}{2} \right)$$

3-3 LE SCHEMA DE DE WIJS DANS L'ESPACE A TROIS DIMENSIONS.

L'abaque 1 donne l'équivalent linéaire du parallélépipède rectangle.

Estimation des amas. On calculera le terme de ligne et le terme de section comme ci-dessus (à partir de l'abaque 2). Pour le terme de tranche on utilisera, selon le cas, l'abaque 3, 4 ou 5 (variance d'extension des grandes sections ab , des sections moyennes ac et des petites sections bc ,

$a \geq b \geq c$).

Amas reconnu par sondages à maille carrée

On lit sur l'abaque XI-6 la variance d'extension $\sigma_{E_1}^2$ d'un sondage de puissance h_1 dans son prisme droit h_1, a, a d'influence. On a ensuite :

$$\sigma_E^2 = \frac{\sum h_i^2 \sigma_{E_i}^2}{(\sum h_i)^2}$$

(si les h_i sont égaux ou peu différents : $\frac{1}{n} \sigma_{E_1}^2$).

4 - LE SCHEMA SPHERIQUE

Pour représenter un phénomène de transition, on peut utiliser des schémas de la forme :

$$\gamma(h) = A [K(0) - K(h)]$$

où $K(h)$ est le covariogramme géométrique d'un volume v (cf exercice 7). Si l'on prend pour v la sphère de diamètre a , on a (cf. ex. 4 des méthodes transitives) :

$$K(h) = \begin{cases} \frac{\pi}{6} a^3 \left(1 - \frac{3}{2} \frac{h}{a} + \frac{1}{2} \frac{h^3}{a^3}\right) & (|h| < a) \\ 0 & (|h| \geq a) \end{cases}$$

Le schéma sphérique sera donc défini par le demi-variogramme :

$$\gamma(r) = \begin{cases} C \left(\frac{3}{2} \frac{r}{a} - \frac{1}{2} \frac{r^3}{a^3}\right) & \text{pour } r < a \\ C & \text{pour } r \geq a \end{cases}$$

La portée est a , le palier est $C = \gamma(\infty)$, la pente à l'origine $\frac{3}{2} \frac{C}{a}$.

Dans les applications, on déterminera a et C par approximations successives : on part de valeurs a_1 et C_1 obtenues par simple interpolation sur le demi-variogramme expérimental; on utilise l'abaque 7 pour calculer la variance théorique d'un échantillon dans son champ; si celle-ci est, par exemple, plus forte que la variance expérimentale des échantillons dans leur champ, on peut soit diminuer C_1 , soit augmenter a_1 . On arrive assez vite à l'ajustement cherché.

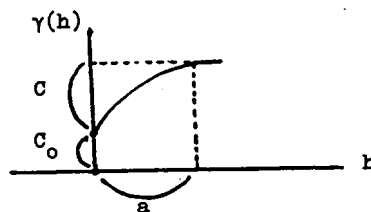
Nous ne disposons que des abaques relatifs aux problèmes à une et à deux dimensions :

Abaque 7 : variance d'un point dans un rectangle.

Abaque 8 : variance d'extension élémentaire d'un point dans son segment d'influence (pour le calcul du terme de ligne); variance d'extension d'un point dans son carré d'influence (pour les sondages à maille carrée).

Abaque 9 : variance d'extension d'un segment médian dans son rectangle d'influence (pour le calcul des termes de tranche).

Remarque. Dans les applications, les phénomènes transitifs sont très souvent accompagnés d'un effet de pépité : on les représentera donc par un schéma sphérique à effet de pépité C_0 :



5 - LE KRIGEAGE

5-1 LE PROBLEME DU KRIGEAGE ET SON INTERET.

Le problème du krigeage consiste à trouver la meilleure estimation possible de la teneur d'un panneau, compte tenu de l'information disponible, c'est-à-dire des teneurs des différents échantillons qui ont été prélevés, soit à l'intérieur, soit à l'extérieur du panneau que l'on veut estimer. Le krigeage revient à effectuer une pondération, c'est-à-dire à attribuer un poids à la teneur de chaque échantillon, ces poids étant calculés de manière à rendre minimale la variance d'estimation résultante, compte tenu des caractéristiques géométriques du problème (formes, dimensions et implantation relative du panneau et des échantillons). En gros, comme cela est naturel, le krigeage attribuera des poids faibles aux échantillons éloignés, et inversement. Mais cette règle intuitive peut être partiellement mise en défaut lorsqu'apparaissent des phénomènes plus complexes d'effet d'écran et de transfert d'influence. Il n'est naturellement possible de résoudre un problème de krigeage, c'est-à-dire de calculer effectivement le poids optimal qu'il convient d'attribuer à chaque échantillon, qu'à la condition de faire certaines hypothèses sur les caractéristiques géostatistiques du gisement que l'on étudie. Dans ce qui suit, nous supposons que le gisement est géostatistiquement homogène, autrement dit que les teneurs, à l'inté-

rieur de ce gisement, considérées comme une variable régionalisée $f(x)$, peuvent être interprétées comme une réalisation d'un schéma intrinsèque.

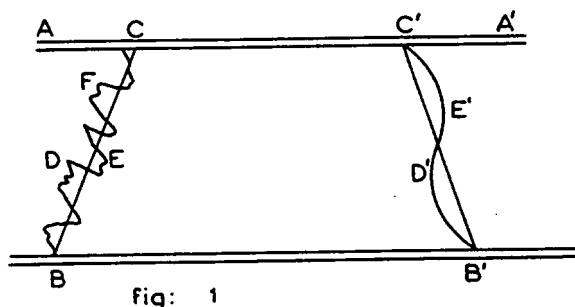
Cette condition d'homogénéité est fondamentale. Aucun krigeage n'est possible entre portions hétérogènes d'un même gisement, et plus particulièrement lorsque les échantillons et le panneau à estimer débordent les limites de la minéralisation géologiquement homogène. (Il s'agit alors, au sens strict, d'un salissage, et non pas d'un krigeage, et il n'est en général pas possible d'énoncer de règles a priori : les coefficients de salissages ne peuvent, le plus souvent, être déterminés que par l'expérience).

Le premier intérêt du krigeage découle de sa définition même. En minimisant la variance d'estimation, on est sûr de tirer le meilleur parti possible des informations disponibles ou, si l'on préfère, d'obtenir l'estimation la plus précise possible du panneau en cause. Cet avantage est souvent notable, mais ne justifierait cependant pas toujours les complications supplémentaires qu'introduit nécessairement une pondération. L'intérêt pratique le plus important - et de loin - du krigeage provient non pas de ce qu'il assure la meilleure précision possible, mais de ce qu'il permet d'éviter une erreur systématique. Dans la plupart des gisements métalliques, on est conduit à sélectionner pour l'exploitation un certain nombre de panneaux jugés rentables et à en abandonner d'autres jugés inexploitable. D. G. Krige a montré que, si cette sélection était faite au seul vu des échantillons intérieurs à chaque panneau, il en résultait nécessairement - en moyenne - une surestimation de la teneur des panneaux sélectionnés. La raison de ce phénomène très général est que la variance des teneurs réelles des panneaux est toujours plus faible que la variance des résultats d'un échantillonnage intérieur. Autrement dit, l'histogramme des teneurs réelles des panneaux comporte toujours moins de teneurs extrêmes (riches ou pauvres) et davantage de teneurs intermédiaires que l'histogramme déduit des échantillonnages intérieurs, et, si l'on calcule l'effet d'une sélection sur ce dernier histogramme, les panneaux éliminés seront en réalité moins pauvres qu'on ne l'avait prévu, et les panneaux conservés moins riches.

Notre notion de krigeage permet d'interpréter facilement ce phénomène, et d'en corriger les effets. Du fait même que l'on sélectionne un panneau riche, l'auréole des échantillons extérieurs est en général à teneur plus faible que les échantillons intérieurs, et cependant son influence sur le panneau à estimer n'est pas négligeable, puisque le krigeage lui attribue un poids non nul. En ne tenant pas compte de cette auréole extérieure, on introduit nécessairement une cause d'erreur systématique par excès. Pour illustrer cette notion, imaginons un gisement filonien reconnu par deux tracés AA' et BB'.

Les teneurs de BB' ont été jugées exploitables, tandis que celles de AA' n'ont été jugées intéressantes que sur un segment CC'. Si l'on se contente de faire la moyenne des teneurs de BB' et de CC', on est sûr de commettre une erreur par excès : car les tronçons AC et C'A' - pauvres,

par construction - ont une influence non négligeable sur le trapèze BB',CC' que l'on se propose d'exploiter. S'il était possible de tracer une frontière précise de teneur entre minerais exploitables et inexploitables, la frontière réelle, en général, ne coïnciderait pas avec les droites BC ou B'C', mais serait une courbe quelconque, le plus souvent très irrégulière, telle que la ligne brisée EDEF... De plus, des enclaves pauvres subsisteraient dans le panneau riche, et réciproquement. A l'exploitation, on serait contraint d'abandonner certaines portions riches, et de prendre certaines parties pauvres, et ce salissage traduit de façon concrète l'influence des tronçons pauvres AC et C'A' sur le panneau riche (comme 'il s'agit d'un gisement homogène, et que l'existence même d'une frontière précise de teneur est douteuse, nous parlons de krigeage, et non de salissage. Nous employons le mot salissage dans le cas où les minerais riches et pauvres sont géostatistiquement hétérogènes, et séparés par une frontière continue représentable par une courbe relativement régulière, telle que B', D'E'..., qui n'a d'ailleurs pas non plus de raison de



coïncider avec la droite B'C'). En pareil cas, le krigeage conduit à pondérer les teneurs de BB', CC' et des tronçons AC, C'A' par des coefficients convenables, qui seraient - par exemple - 60% pour BB', 27% pour CC' et 13% pour les deux tronçons.

L'effet essentiel d'une telle pondération est d'éliminer - en moyenne - une erreur systématique par excès, donc particulièrement redoutable. Vis-à-vis de cet objectif primordial, l'amélioration de la précision proprement dite apparaît comme relativement secondaire.

5-2 LES EQUATIONS GENERALES DU KRIGEAGE

Enoncé sous sa forme la plus générale, le problème du krigeage peut se formuler de la manière suivante : étant donné un gisement homogène doué d'un demi-variogramme (isotrope ou non, De Wijsien ou non), dans lequel on a prélevé n échantillons $S_1, S_2, \dots, S_n$, dont les teneurs (connues) sont $X_1, X_2, \dots, X_n$, on cherche à former le meilleur estimateur Z^* , soit :

$$(21) \quad Z^* = \sum_{i=1}^n a_i X_i$$

de la teneur réelle inconnue Z d'un panneau P , connaissant la forme, les dimensions et l'implantation relative de P , $S_1, S_2 \dots S_n$. On peut toujours résoudre ce problème en déterminant les coefficients a_i de l'équation par deux conditions. La première condition exprime que l'erreur $Z - Z^*$ doit avoir une espérance nulle. Elle s'écrit :

$$(22) \quad \sum_{i=1}^n a_i = 1$$

La deuxième condition est une condition de variance minimum. Elle exprime que les coefficients a_i du krigeage ont des valeurs telles - compte tenu de la condition impérative (22) - que la variance $D^2 (Z - Z^*)$ mesurant l'amplitude de l'erreur possible prenne sa valeur minimale. Or, compte tenu de (21), cette variance a pour expression :

$$(23) \quad D^2 (Z - Z^*) = \sigma_Z^2 - 2 \sum_i a_i \sigma_{ZX_i} + \sum_i \sum_j a_i a_j \sigma_{ij}$$

Les notations se comprennent d'elles-mêmes. σ_Z^2 est la variance de la teneur réelle du panneau, σ_{ZX_i} la covariance de Z avec la teneur X_i de l'échantillon S_i et σ_{ij} la covariance de X_i et X_j (en particulier σ_{ii} est la variance de X_i). Toutes ces variances et covariances sont calculées dans un grand gisement fictif, dont la dimension n n'intervient pas réellement : l'influence de ce gisement fictif se manifeste par une même constante λ qui majore toutes les variances et covariances, et s'élimine en vertu de (22). L'expression (23) ne dépend donc que du demi-vario-gramme $\gamma(h)$.

On exprimera que cette variance est minimale compte tenu de la condition de liaison (22) en écrivant :

$$(24) \quad \begin{cases} \sum_j a_j \sigma_{ij} = \sigma_{ZX_i} + \lambda \\ \sum_j a_j = 1 \end{cases}$$

On obtient donc un système de $n + 1$ équations linéaires à $n + 1$ inconnues (les a_i et le multiplicateur de Lagrange λ). Comme le paramètre de Lagrange λ ne présente pas d'intérêt par lui-même, on cherchera à l'éliminer. Pour cela, on fera jouer un rôle particulier à l'un des échantillons, par exemple S_n (en pratique, on choisira un échantillon occupant une position privilégiée vis-à-vis des $n - 1$ autres, par exemple une position centrale) et on écrira la condition (22) sous la forme :

$$(25) \quad a_n = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} a_i$$

et on remplacera dans (24) a_n par sa valeur, soit :

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n-1} a_j \sigma_{ij} + a_n \sigma_{in} = \sigma_{zx_i} + \lambda \\ \sum_{j=1}^{n-1} a_j \sigma_{nj} + a_n \sigma_{nn} = \sigma_{zx_n} + \lambda \end{cases}$$

On élimine λ en retranchant la dernière équation des $(n-1)$ précédentes, et on remplace a_n par sa valeur. Si l'on pose :

$$(26) \quad \begin{cases} R_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{nj} - \sigma_{ni} + \sigma_{nn} \\ N_i = \sigma_{zx_i} - \sigma_{zx_n} - \sigma_{in} + \sigma_{nn} \end{cases}$$

le système (24) se réduit à :

$$(27) \quad \sum_{j=1}^{n-1} a_j R_{ij} = N_i$$

La résolution de ce système de $n-1$ équations linéaires à $n-1$ inconnues permet le calcul effectif des n coefficients a_i du krigeage, a_n étant donné par (25).

En portant les valeurs ainsi obtenues dans l'expression (23) de la variance d'estimation, on obtient la valeur minimale σ_K^2 de celle-ci que nous appellerons variance de krigeage. On constate qu'elle prend la forme très simple suivante :

$$(28) \quad \sigma_K^2 = \sigma_z^2 - 2 \sigma_{zx_n} + \sigma_{x_n}^2 - \sum_{i=1}^{n-1} a_i N_i$$

La première partie de cette expression représente la variance d'extension

$$\sigma_E^2 = \sigma_z^2 - 2 \sigma_{zx_n} + \sigma_{x_n}^2$$

de l'échantillon S_n dans le panneau P. C'est la variance d'estimation que l'on obtiendrait si l'on ne disposait que de la teneur X_n du seul échantillon S_n . Chacun des autres échantillons $S_1 \dots S_{n-1}$ apporte une amélioration qui se traduit par la soustraction des termes $a_i N_i$ toujours positifs. Les équations (27) et (28) constituent les équations générales du krigeage. Les termes de la matrice R_{ij} et les deuxièmes membres N_i sont donnés par (26) et ne dépendent que de la fonction intrinsèque.

5-3 KRIGEAGE COMPLET, ET COMPTABILITE MINERAI ET METAL.

Outre leur caractère linéaire, les équations (27) du krigeage présentent une particularité remarquable, apparente sur les relations (26) : les coefficients de la matrice R_{ij} - c'est-à-dire les premiers membres des équations (27), ne dépendent que des variances et covariances des échantillons entre eux, et sont indépendants du panneau à estimer. Le panneau n'intervient que dans les deuxièmes membres N_i , par l'intermédiaire des covariances σ_{zx_i} de sa teneur avec celles des échantillons S_i . Il en résulte immédiatement un théorème de superposition des figures de krigeage. Supposons, en effet, que l'on ait krige à partir des mêmes échantillons $S_1, S_2 \dots S_n$ deux panneaux distincts, de taille P et P' et de teneurs réelles (inconnues) z et z' , c'est-à-dire que l'on ait formé les estimateurs :

$$z^* = \sum a_i X_i, \quad z'^* = \sum a'_i X_i$$

où les a_i et les a'_i sont les solutions du système (27), pour les valeurs des seconds membres N_i et N'_i correspondant aux panneaux P et P' . Si l'on désire kriger le panneau $P + P'$ constitué par la réunion des deux précédents (on suppose que P et P' sont disjoints), dont la teneur réelle est :

$$Z = \frac{P}{P + P'} z + \frac{P'}{P + P'} z'$$

on obtient les seconds membres du système en pondérant les covariances par la taille des panneaux :

$$\sigma_{zx} = \frac{P}{P + P'} \sigma_{zx_i} + \frac{P'}{P + P'} \sigma_{z'x_i}$$

c'est-à-dire en effectuant la même pondération sur les seconds membres eux-mêmes. Il résulte alors du caractère linéaire du système que les coefficients A_i du krigeage de $P + P'$ sont :

$$A_i = \frac{P}{P + P'} a_i + \frac{P'}{P + P'} a'_i$$

et l'estimateur lui-même prend la forme :

$$Z^* = \frac{P}{P + P'} z^* + \frac{P'}{P + P'} z'^*$$

Autrement dit, il y a superposition des figures de krigeage (avec pondération par les tonnages). Mais ce résultat suppose essentiellement que les deux panneaux différents P et P' soient krigés par les mêmes échantillons S_i . Cette condition est, en particulier, toujours remplie dans le cas d'un krigeage complet - c'est-à-dire dans le cas où l'on krige chaque panneau par la tota-

lité des échantillons prélevés dans le gisement entier. D'où le théorème : "les krigeages complets sont superposables".

En particulier, si l'on veut former le meilleur estimateur de la teneur globale d'un gisement entier, on a le droit de pondérer les estimateurs obtenus pour chacun des panneaux, sous réserve que ceux-ci aient été krigés complètement. L'estimation, panneau par panneau est alors équivalente à l'estimation globale, et la comptabilité minéral et métal est équilibrée.

En pratique, on ne fait presque jamais de krigeage complet, en raison de la complexité des calculs. On se limite toujours à un petit nombre d'auréoles extérieures - les plus proches - qui représentent la quasi totalité de l'influence des données extérieures. Comme ces auréoles constituent un écran presque parfait, le krigeage incomplet dont on se contente ne diffère pratiquement pas du krigeage complet théorique.

Le théorème de superposition est surtout utile, pour la théorie du krigeage continu, et sous une forme différentielle. Un panneau S à estimer sera considéré comme constitué par la réunion de panneaux élémentaires dS infiniment petits. Si $a_1(M)$ est le coefficient relatif au krigeage de l'élément dS de centre M , le coefficient relatif au panneau entier s'en déduira par intégration :

$$A_1 = \frac{1}{S} \iint_S a_1(M) dS$$

Si l'on sait résoudre un problème de krigeage ponctuel, cette formule permettra d'en déduire le krigeage d'un panneau S de forme quelconque.

Les équations du krigeage ponctuel, de leur côté, constituent un simple cas particulier des équations générales écrites ci-dessus. Ecrivons-les, cependant, explicitement, en fonction du demi-variogramme $\gamma(h)$, dans le cas où l'on veut estimer la teneur Z au point z à partir des teneurs X_1 observées aux points x_1 . L'estimateur est de la forme :

$$Z^* = \sum_{i=1}^n a_i X_i$$

et les coefficients a_i du krigeage vérifient le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n a_j \gamma(x_i - x_j) = \gamma(z - x_i) + \lambda \\ \sum a_i = 1 \end{array} \right.$$

Eliminant le coefficient a_n , on trouve également :

$$\sum_{j=1}^{n-1} a_j R_{ij} = N_i$$

avec :

$$\begin{cases} R_{ij} = \gamma(x_i - x_j) - \gamma(x_n - x_j) - \gamma(x_n - x_i) \\ N_i = \gamma(z - x_i) - \gamma(x_n - z) - \gamma(x_n - x_i) \end{cases}$$

Dans le cas où les données disponibles ne sont pas relatives à un nombre fini de points, mais à un ensemble continu (lignes, surfaces ou volumes), les équations du krigeage sont remplacées par une équation intégrale. Nous ne traiterons pas ici ce cas qui constitue ce que l'on appelle le krigeage continu (cf. [4], [5] ou [6]).

En vue des applications, de nombreuses configurations de krigeage ont été tabulées et présentées sous forme d'abaques dans le cas du schéma de Wijsien ([1], [3], [4]) et du schéma sphérique [7].

6 - RECHERCHE D'OPTIMUM DANS LA RECONNAISSANCE ET LA MISE EN EXPLOITATION DES GISEMENTS MINIERES

6 - O INTRODUCTION

Etant donnés l'ampleur des investissements mis en jeu dans l'industrie minière, et la gravité du risque de ruine, aucune Société, aucune autorité responsable, ne prennent la décision d'exploiter un nouveau gisement sans avoir procédé au préalable à une estimation aussi précise que possible de tous les paramètres géologiques, techniques et économiques qui conditionnent la rentabilité de la nouvelle mine. Ces paramètres sont nombreux et variés. Des études prévisionnelles de marché permettent de préciser les facteurs économiques (cours et débouché). Des essais de traitement en laboratoire, ou en laverie pilote, et l'étude détaillée de différents projets d'exploitation permettent de choisir et de chiffrer la meilleure solution technique. Enfin, des travaux de reconnaissance par sondages ou travaux miniers conduisent à une évaluation des réserves du gisement, en tonnage et en teneur. Il serait souhaitable, dans l'absolu, de connaître parfaitement ces différents paramètres. Mais l'information coûte cher. Les travaux de reconnaissance, en particulier, peuvent représenter un pourcentage non négligeable du total des investissements. Il arrive un moment où la valeur de l'information supplémentaire n'est plus en rapport avec son prix de revient. Entre les deux situations extrêmes, caractérisées, l'une par des dépenses de recherche

nelles et un risque de ruine maximum, l'autre par une sécurité parfaite et des dépenses de recherche infinies, il existe nécessairement une situation de compromis correspondant à un optimum. Où se situe cet optimum, et comment le déterminer, telles sont les questions auxquelles tente de répondre cette dernière section. Nous nous limiterons, en fait, au problème de la détermination du volume optimum des travaux de reconnaissance. Les données économiques (cours du minerai et possibilités de débouchés) sont supposées connues, de même que les caractéristiques techniques de la méthode d'exploitation et du procédé de traitement retenus. Nous devrons, par contre, étudier en détail l'influence du choix de deux paramètres techniques très importants : la cadence annuelle d'exploitation, et la teneur limite de coupure.

Il est clair que le problème ne peut pas se formuler dans l'absolu. Le niveau optimum de la reconnaissance dépend des caractéristiques du gisement lui-même, et ne peut être déterminé effectivement que si l'on dispose déjà de certains renseignements sur ces caractéristiques, c'est-à-dire, pratiquement, si l'on a déjà effectué une première phase de travaux de reconnaissance. On a un schéma séquentiel, où les décisions à prendre se présentent en cascade. A l'issue d'une première phase de reconnaissance, on se trouve placé en un point crucial C (Figure 1). :

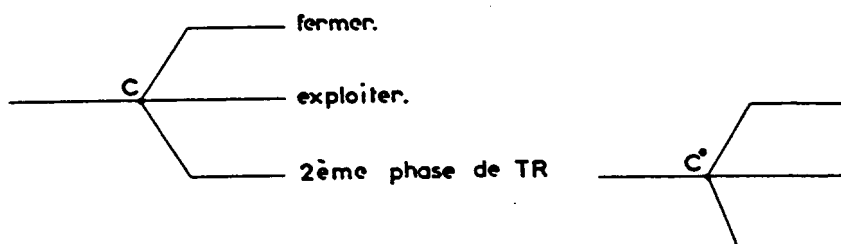


Figure 1

où l'on a le choix entre trois décisions possibles :

- 1/ - Fermer le chantier et abandonner le gisement,
- 2/ - Exploiter tout de suite,
- 3/ - Faire une deuxième phase de travaux de reconnaissance.

Si l'on adopte la troisième décision, on se trouvera à l'issue de la deuxième tranche de travaux de reconnaissance - en un nouveau point crucial C', où, théoriquement, les trois décisions sont à nouveau possibles, mais peuvent être prises sur la base d'informations plus complètes qu'en C. Entre ces trois décisions, le choix suppose un critère : nous adopterons le critère habituel, qui consiste à maximiser l'espérance mathématique du bénéfice futur. On choisit la décision qui

donne la meilleure espérance en aval du point C. La première décision conduit à une espérance nulle. Celle de la deuxième se calcule en faisant le bilan prévisionnel du projet d'exploitation construit à partir de l'information disponible à l'issue de la première phase. Celle de la troisième s'obtient en anticipant, en probabilité, les résultats de la deuxième phase de travaux et la décision à prendre qu'ils impliqueront en C' : elle met en balance la diminution du risque de ruine avec le coût des travaux supplémentaires. La Géostatistique fournit, à chaque étape, une mesure objective de l'information disponible sous la forme de variances d'estimation sur le tonnage et la teneur, auxquelles des raisonnements simples permettent d'attribuer une signification économique, et donc de calculer numériquement les diverses espérances mathématiques.

Mais ce n'est pas tout. Outre le risque de ruine, d'autres facteurs influent sur le volume optimum des travaux de reconnaissance. Si, en effet, la décision d'exploiter est prise, le risque de ruine ayant été jugé suffisamment faible, il reste à préparer un projet d'exploitation aussi bon que possible, comportant, en particulier, un choix optimum de la cadence annuelle d'exploitation et de la teneur limite. La cadence et la teneur limites optimales dépendent naturellement des réserves du gisement. Une erreur dans l'évaluation des tonnages et des teneurs conduit à un dimensionnement de l'exploitation qui s'écarte de l'optimum. Il en résulte une perte, dont la valeur probable peut être calculée, et doit être mise en balance avec le prix de revient de travaux supplémentaires. Même si l'on est certain de l'exploitabilité du gisement, il arrivera que l'on ait intérêt à faire des travaux de reconnaissance supplémentaires, non plus pour pallier un risque de ruine négligeable, mais pour choisir le meilleur programme d'exploitation.

Chronologiquement, le schéma séquentiel de la figure 1 se présente en premier lieu, les problèmes de dimensionnement n'intervenant qu'après la démonstration de l'exploitabilité. Mais un exposé théorique doit nécessairement observer l'ordre inverse, puisque c'est seulement lorsque l'on a défini les éventualités possibles en aval du point C, et chiffré leurs rapports, que l'on peut calculer les diverses espérances mathématiques : il faut, en premier lieu, approfondir le concept d'exploitabilité, et cela conduit obligatoirement à poser le problème du dimensionnement optimum. D'où le plan de cette section 6 : dans une première partie (6-1), on examinera la rentabilité d'un gisement dont les réserves sont connues, et les problèmes posés par le choix d'une teneur limite et d'une cadence annuelle d'exploitation. Dans une deuxième partie (6-2), on déterminera le niveau optimum de la reconnaissance d'un gisement dont la rentabilité est certaine, en mettant en balance le coût des travaux et la perte due à un mauvais dimensionnement de l'exploitation. La troisième partie (6-3), enfin, tiendra compte du risque de ruine et formulera, de façon précise, le schéma séquentiel de la figure 1. Les deux premières parties, en réalité, traitent du problème posé par le choix de paramètres techniques : cadence d'exploitation, teneur limite, et volume des travaux de reconnaissance, ces derniers n'intervenant ici que dans la mesure où ils servent à définir l'optimum des deux premiers. Corrélativement, nous verrons que les raisonnements doivent être faits

avec un taux d'actualisation nul, et qu'ils conduisent à des optima absolus. La troisième partie, au contraire, analyse des critères de décision : elle a pour objectif une optimisation séquentielle, ou relative (relative aux informations disponibles au point crucial C), et fait nécessairement intervenir un taux d'actualisation différent de zéro. On trouvera un exposé beaucoup plus détaillé en [5] et en [8].

6-1 CHOIX D'UNE TENEUR DE COUPURE ET D'UNE CADENCE ANNUELLE D'EXPLOITATION

6-1-1 Définition des paramètres (la relation tonnage/teneur).

Dans cette première partie, nous supposons que les caractéristiques du gisement sont parfaitement connues. En particulier, on a pu déterminer sans ambiguïté la meilleure méthode d'exploitation et le meilleur procédé de traitement possible. Il reste à choisir deux paramètres techniques essentiels :

- la cadence de production annuelle "t"
- la teneur de coupure "x"

La signification du deuxième paramètre doit être précisée. Dire que l'on prend x comme teneur de coupure signifie que l'on décide d'abandonner les panneaux dont la teneur moyenne est inférieure à x , et d'exploiter ceux dont la teneur est supérieure à x . Une telle notion n'a de sens que si l'on définit la taille des panneaux auxquels cette coupure s'appliquera, c'est-à-dire le niveau auquel opérera la sélection. Cette taille doit être considérée comme une donnée, puisqu'elle résulte des caractéristiques technologiques du mode d'exploitation que l'on a retenu.

Le tonnage de minerai "T(x)", et la teneur moyenne "m(x)" apparaissent comme deux fonctions, l'une décroissante et l'autre croissante, de la teneur de coupure x . Si $T(0) = T_0$ désigne le tonnage du gisement entier, la différentielle $-\frac{dT(x)}{T_0}$ représente, en pourcentage du tonnage total, le tonnage du minerai à teneur comprise entre x et $x + dx$. On l'interprète parfois comme la densité de fréquence $f(x) dx$ de la distribution statistique des teneurs en fonction des tonnages. Une telle interprétation n'est ni claire ni essentielle. Nous n'en ferons pas usage. La fonction $T(x)$ représente simplement le résultat d'une méthode donnée d'exploitation lorsqu'on l'applique, avec une teneur limite x , à un gisement, c'est-à-dire, à un phénomène naturel, déterminé.

On prendra bien garde, en particulier, de ne pas assimiler $\frac{T(x)}{T_0}$ à la distribution cumulée des teneurs des échantillons prélevés. La distribution des teneurs des échantillons n'est pas du tout identique à la distribution $T(x)$ des teneurs des panneaux au niveau desquels opère la sélection. Elle est toujours plus dispersée. La géostatistique permet, en général, de calculer la variance de la distribution $T(x)$ des panneaux, à partir de la variance expérimentale des échan-

tillons. Si les teneurs obéissent, au moins approximativement, à une loi de distribution simple, (normale, lognormale, etc...), il est aisé de reconstituer la fonction $T(x)$. En l'absence d'une loi simple, on pourra cependant construire l'histogramme des panneaux en resserrant l'histogramme des échantillons autour de sa valeur moyenne par une affinité de module égal au rapport des écarts types.

En pratique, on peut recommander la méthode suivante pour la détermination des fonctions $T(x)$ et $m(x)$: au vu du plan d'échantillonnage, adopter l'attitude naturelle du mineur, c'est-à-dire choisir et dessiner, pour une limite x donnée, le mode de découpage en panneaux techniquement possibles qui paraît devoir conduire au meilleur résultat prévisible, et évaluer la teneur moyenne $m(x)$ des panneaux sélectionnés, à l'aide d'un krigeage (si les conditions d'homogénéité sont vérifiées), ou, à défaut, d'un salissage empirique. En recommençant l'opération pour deux ou trois valeurs de x , on obtiendra une image de la variation de $T(x)$ dans la zone des coupures utiles, et cela suffira pour les applications pratiques.

Quelles que soient les difficultés que l'on rencontre en pratique dans leur détermination, les deux fonctions $T(x)$ et $m(x)$ existent, et représentent le résultat de l'application à un phénomène naturel déterminé (gisement) d'un procédé technologique défini (méthode d'exploitation). L'une, $T(x)$, est décroissante, et l'autre, $m(x)$, croissante. A toute teneur moyenne m (correspondant à une certaine coupure x) est donc associé un tonnage bien déterminé, dont la teneur moyenne est m . On peut donc aussi définir une fonction $T(m)$, donnant le tonnage en fonction de la teneur moyenne, et non plus de la teneur x de coupure.

On peut également définir une fonction $m(T)$ donnant la teneur moyenne en fonction du tonnage retenu. On remarque que l'on a nécessairement :

$$(1) \quad x = \frac{d(mT)}{dT} = m + \frac{dm}{d \log T}$$

En effet, $d(mT)$ représente le tonnage de métal dQ contenu dans la tranche marginale dT , dont la teneur est x . (Dans certains cas, cette relation (1) servira à définir le paramètre de coupure x . Il peut arriver, en effet, que les conditions d'exploitabilité ne soient pas les mêmes dans les différentes portions du gisement. Un même panneau de même teneur peut être payant s'il est situé au coeur d'une zone riche, et inexploitable s'il est entouré de zones pauvres et ne paye pas ses frais d'approche. En pareil cas, il n'y a pas de teneur limite universelle, mais la fonction $T(m)$ est toujours définie et, par dérivation, la relation (1) permet d'introduire le paramètre x de coupure).

La relation $m(T)$ pourra, parfois, être représentée par une équation très simple :

$$(2) \quad m = \alpha - \beta \log T$$

ou loi de LASKY. Cette relation empirique ne peut pas être extrapolée à zéro ou l'infini, sans conduire à des contradictions insurmontables. D'un point de vue purement pragmatique, elle constitue une excellente formule d'interpolation et permet, en particulier, de représenter le comportement de la courbe $m(T)$ entre deux points expérimentaux (connus, par exemple, à partir de deux projets d'exploitation différents). Compte tenu de (2), la teneur de coupure x se met sous la forme très simple :

$$(3) \quad x = m - \beta$$

Après avoir défini les paramètres techniques du problème :

- cadence annuelle d'exploitation t ,
- Teneur de coupure x ,
- Tonnage $T(x)$
- Teneur moyenne $m(x)$

il reste à préciser les paramètres économiques utiles. Parmi ceux-ci, nous en distinguerons trois principaux : le cours du marché, les dépenses d'exploitation annuelles, et le montant des investissements.

Le cours du marché, en tant qu'il ne dépend pas de la volonté de l'exploitant, peut être considéré comme une donnée. Pour simplifier, nous le supposons connu et constant. Il serait d'ailleurs possible de modifier les équations que nous proposons ici de manière à tenir compte de l'incertitude de l'avenir. Par l'intermédiaire de la formule de vente du concentré et du rendement des installations de traitement, le cours du marché permet de définir la valeur $V(m)$ du métal récupérable contenu dans une tonne de minerai de teneur m .

On pourra souvent utiliser une formule linéaire :

$$(4) \quad V(m) = bm - b_0$$

dans laquelle la constante de pénalisation b_0 pourra toujours être regroupée avec le terme constant de l'expression de $p(t)$ que nous allons définir.

Les frais annuels d'exploitation rapportés à la tonne de minerai représentent l'ensemble des dépenses annuelles (exploitation, traitement, transport et frais généraux) divisées par la production annuelle t . Ils dépendent de la production t . On les représente par une fonction

$p(t)$ que l'on suppose, en général, décroissante. On peut souvent admettre une relation de la forme :

$$(5) \quad p(t) = a_0 + \frac{a_1}{t}$$

Les investissements groupent l'ensemble des dépenses qu'il est nécessaire de consentir avant l'ouverture de l'exploitation (travaux miniers préparatoires, usine de traitement, éventuellement : cité, voirie, voie ferrée, etc...). Ils sont représentés par une fonction croissante de la cadence t , soit $I(t)$. Le rapport $\frac{I(t)}{t}$ des investissements à la production annuelle est, au contraire, une fonction décroissante de t . Pour les applications, on pourra utiliser soit une formule linéaire :

$$(6) \quad I(t) = C_0 + C_1 t$$

soit, plus généralement, une expression de la forme :

$$(7) \quad I(t) = C_0 + C_1 t^\gamma$$

l'exposant γ étant positif, et inférieur ou égal à 1. Pour $C_0 = 0$ et $\gamma = \frac{2}{3}$, on retrouve la loi empirique, utilisée dans différentes branches de l'industrie, et qui exprime que les investissements et la capacité de production varient, respectivement, comme le carré et le cube de la dimension des installations.

En résumé, nous utiliserons les trois fonctions économiques suivantes :

- $V(m)$: valeur contenue dans la tonne de minerai à teneur m
- $p(t)$: dépenses d'exploitation à la tonne de minerai
- $I(t)$: montant des investissements.

Il est commode d'introduire un paramètre supplémentaire, la durée de vie N de la mine, liée au tonnage $T(m)$ et à la cadence d'exploitation t par la relation évidente :

$$(8) \quad N = \frac{T(m)}{t}$$

Le bilan prévisionnel de l'exploitation future se représente, commodément, par l'expression de la valeur actualisée des bénéfices futurs. Nous désignerons par i le taux d'actualisation, et par B_1 la valeur des bénéfices futurs actualisés à ce taux. On a, évidemment :

$$(9) \quad B_1 = \left[V(m) - p(t) \right] t \frac{1-e^{-iN}}{i} - I(t)$$

et, dans le cas particulier très important où le taux i est pris égal à 0, le bénéfice non actualisé prend la forme très simple :

$$(10) \quad B = [V(m) - p(t)] T(m) - I(t)$$

Dans tous les cas, le bénéfice peut être considéré comme une fonction des deux paramètres m et t , ou, si l'on préfère (compte tenu de l'équation (1), de x et de t , teneurs de coupure et production annuelle. Un critère possible pour guider le choix des valeurs de ces deux paramètres consiste à maximiser ce bénéfice.

6-1-2 Equations de l'optimum.

Connaissant la relation tonnage/teneur $T(x)$, et les différents paramètres économiques examinés plus haut, on doit choisir pour la teneur de coupure x et la cadence annuelle t les valeurs x_0 et t_0 qui maximisent le bénéfice futur. Ici se pose une première question : doit-on chercher à optimiser le bénéfice futur actualisé B_1 de l'expression (9) (et dans ce cas, quel taux i doit-on adopter?), ou au contraire le bénéfice B non actualisé de l'expression (10)? Nous ne pouvons pas entrer ici dans une discussion détaillée (cf. [5] et [8]) qui relève des sciences économiques. Indiquons seulement que l'usage d'un taux d'actualisation non nul n'est légitime que si l'on compare entre elles des opérations de même durée. Mais précisément, si l'on compare deux projets d'exploitation d'un même gisement comportant des cadences annuelles différentes, il s'agit d'opérations de durées différentes, donc non comparables entre elles. Pour faire une comparaison significative, on doit se donner par la pensée un grand nombre de gisements admettant les mêmes caractéristiques que le gisement réel ; se fixer un objectif global qui serait, par exemple, la production annuelle d'un tonnage total donné de minerai ; et faire le bilan comparatif dans l'hypothèse où l'on exploite simultanément n_1 gisements à la cadence t_1 , ou n_2 gisements à la cadence t_2 ($n_1 t_1 = n_2 t_2$). On s'aperçoit alors que l'optimum correspond à la maximisation du bénéfice B non actualisé de l'expression (10)

Pour maximiser B , on doit annuler les dérivées partielles de B en t (cadence) et en x (teneur de coupure). D'après (4) et (1), on a :

$$\frac{d}{dx} (V(m) T(m)) = b \frac{d}{dx} (m T(m)) = bx \frac{dT}{dx}$$

et, en annulant les dérivées de l'expression (10), on obtient le système :

$$(11) \quad \begin{cases} T \frac{dp}{dt} + \frac{dI}{dt} = 0 \\ x = \frac{p}{b} \end{cases}$$

La première équation optimise la cadence (à teneur de coupure x donnée). La seconde équation montre que la teneur de coupure x doit être choisie selon la règle marginaliste, selon laquelle on exploite toute tonne de minerai qui paie ses frais en aval (les investissements étant amortis sur les parties riches du gisement).

Ce système se résout facilement par approximations successives. En particulier, si l'on adopte les expressions (5) et (7) de $p(t)$ et $I(t)$, ce système se particularise ainsi :

$$\begin{cases} t = \left(\frac{a_1 T(x)}{\gamma C_1} \right)^{\frac{1}{1+\gamma}} \\ x = \frac{1}{b} \left(a_0 + \frac{a_1}{t} \right) \end{cases}$$

Pour $\gamma = 1$, la première équation redonne une règle empirique, que l'on trouve parfois dans la littérature, selon laquelle la cadence annuelle d'exploitation doit être proportionnelle à la racine carrée du tonnage des réserves.

6-2 RECONNAISSANCE OPTIMALE POUR LE DIMENSIONNEMENT DE L'EXPLOITATION

6-2-1 Position du problème.

Comme nous l'avons indiqué au début de cette étude, nous n'introduisons pas encore, dans cette deuxième partie, le risque de ruine, c'est-à-dire le risque, jamais tout-à-fait nul, de mettre en exploitation un gisement qui ne serait en fait, pas rentable. Nous admettons que la preuve, ou du moins la quasi certitude, de cette rentabilité a pu être établie. Il faut alors dresser un projet précis et définitif d'exploitation et de traitement. Les paramètres de dimensionnement : production annuelle t , et teneur de coupure x , sont calculés à l'aide des équations (11). Cependant, pour résoudre ces équations, nous ne connaissons pas la véritable relation tonnage/teneur $T(x)$, mais seulement une estimation de celle-ci $T_E(x)$, qui en diffère plus ou moins, selon que la reconnaissance a été plus ou moins poussée. Par suite, les paramètres t_E et x_E que nous allons déterminer vont différer des valeurs t_0 et x_0 qui correspondraient à l'optimum pour la véritable fonction $T(x)$ inconnue. Ce désaccord entraîne une perte, dont nous allons essayer de chiffrer la valeur probable. On peut, naturellement, diminuer cette perte en effectuant des travaux de reconnaissance supplémentaires, qui permettront d'obtenir une meilleure estimation de $T(x)$. Mais ces travaux, eux aussi, coûtent cher. Il y a un optimum, correspondant à un volume de travaux de reconnaissance tel que la somme de la perte et du coût des travaux de recherche soit minimale. Cet optimum a le même caractère technique qu'au paragraphe précédent : les travaux de reconnaissance ne sont envisagés ici que comme un paramètre technique auxiliaire servant à déterminer

la taille optimale de l'exploitation. On devra donc raisonner avec un taux $i = 0$, comme dans la section 6-1. Comme la fonction approchée $T_E(x)$ conduit à une solution voisine de l'optimum réel (x_0, t_0) , on doit s'attendre à observer une perte du second ordre (ce qui ne signifie pas qu'elle soit négligeable) dont la valeur probable pourra s'exprimer en fonction des variances d'estimations sur le tonnage et la teneur.

La problème étant relativement délicat à formuler, nous examinerons seulement le cas particulier simple des gisements du type "tout ou rien", et nous renverrons à la bibliographie pour une étude plus complète([5], [8]).

6-2-2 Cas des gisements du type "tout ou rien".

Par gisement du type "tout ou rien", nous désignons un gisement, dont la teneur n'est pas nécessairement constante, mais dans lequel aucune sélection n'est possible : ou bien on exploite tout, ou bien on n'exploite pas.^{(1)*} La relation tonnage/teneur ne joue aucun rôle : tonnage et teneur sont ici imposés par la nature, et l'homme n'a aucun choix possible. Dans ce cas, l'erreur commise sur l'estimation de la teneur moyenne est sans incidence sur le dimensionnement : la coupure étant imposée, le seul paramètre technique que l'on ait à déterminer est la production annuelle t , qui ne dépend que du tonnage T . En différenciant la première équation (11), on voit qu'une erreur δT sur l'estimation du tonnage entraîne un écart δt entre la cadence adoptée et la véritable cadence optimale, écart dont l'expression est :

$$\delta t = \frac{p' \delta T}{T p'' + I''}$$

Relativement au bénéfice (non actualisé) optimal, cette divergence entraîne une perte, que l'on obtient par un développement limité :

$$P = -\delta [(V - p) T - I] = (T p' + I') \delta t + \frac{1}{2} (T p'' + I'') \delta t^2$$

Le terme du premier ordre est nul, d'après l'équation (11), puisque l'on est voisin de l'optimum. Compte tenu de l'expression de δt , on trouve :

$$P = \frac{1}{2} \frac{p'^2}{T p'' + I''} \delta T^2$$

(1)* - Ce type de gisement se rencontre, en pratique, plus souvent qu'on ne croit. Un gisement tout ou rien n'est pas, obligatoirement, limité par du stérile franc. Il peut être entouré d'une frange minéralisée inexploitable, géostatistiquement hétérogène avec lui. On observe alors le phénomène du seuil de teneur, que les mineurs connaissent bien : les calculs de tonnage faits avec différentes teneurs de coupure conduisent, pratiquement, à des résultats identiques, et, sur plan, les limites entre panneaux exploitables et inexploitables ne se déplacent pratiquement pas.

En valeur probable, $\overline{\delta T}^2$ donne la variance σ_T^2 sur l'estimation du tonnage, dont la Géostatistique permet de calculer la valeur en fonction des caractéristiques des travaux de reconnaissance. On a donc :

$$(12) \quad P = \frac{1}{2} \frac{p'^2}{Tp'' + I''} \sigma_T^2$$

Cette perte P doit être mise en balance avec le coût R des travaux de reconnaissance. R est une fonction décroissante de σ_T^2 . On obtiendra la volume optimum de la reconnaissance en résolvant l'équation :

$$(13) \quad \frac{dR}{d\sigma_T^2} + \frac{1}{2} \frac{p'^2}{Tp'' + I''} = 0$$

qui exprime que la somme P + R est minimum. En pratique, on exprimera R et σ_T^2 en fonction d'un même paramètre (nombre n de sondages, longueur ℓ tracée, etc...), ou, éventuellement, de plusieurs. Si les u_i désignent ces paramètres, on aura à résoudre le système :

$$(14) \quad \frac{\partial R}{\partial u_i} + \frac{1}{2} \frac{p'^2}{Tp'' + I''} \frac{\partial \sigma_T^2}{\partial u_i} = 0$$

Dans le cas où il y a effectivement plusieurs paramètres u_i (par exemple, dans la reconnaissance d'un filon par travaux miniers, la relevée entre niveaux et la maille des rainurages dans les traçages), la résolution du système (14) donne à la fois le volume global optimum des dépenses que l'on doit consacrer à la reconnaissance, et la meilleure ventilation de celles-ci entre les différentes catégories de travaux (traçages et rainurages).

A titre d'illustration, imaginons un grand gisement de fer sédimentaire, de forme à peu près elliptique ou rectangulaire reconnu par un réseau de sondages à maille adaptée, c'est-à-dire implantés aux noeuds d'un réseau rectangulaire, avec un rapport de maille égal au rapport des dimensions du gisement. La géostatistique nous indique que la variance relative σ_T^2/T^2 sur l'estimation du tonnage est la somme de deux termes : le premier représente l'effet de bordure, ou si l'on veut l'erreur sur l'estimation de la surface minéralisée, et admet une expression de la forme $\frac{0,244}{n^{3/2}} \sqrt{\frac{D_1 D_2}{S}}$, n étant le nombre de sondages utiles, S l'aire minéralisée, D_1 et D_2 les diamètres (plus généralement, les variations diamétrales si l'aire S n'est pas convexe) de l'aire minéralisée. Pour un contour elliptique, on prend $\sqrt{\frac{D_1 D_2}{S}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} = 1,13$ et le premier terme se réduit à $\frac{0,276}{n^{3/2}}$. Le deuxième terme représente l'erreur sur l'estimation de la puissance moyenne, et admet une expression de la forme $\frac{A}{n}$, où A est légèrement inférieure à la variance relative des puissances dans le gisement, et peut être considérée comme une constante (c'est, en réalité, une

fonction lentement décroissante de n). Nous prendrons une valeur plausible, telle que $A = 0,10$. En résumé, la variance relative a pour valeur :

$$\frac{\sigma_T^2}{T^2} = \frac{0,276}{n^{3/2}} + \frac{A}{n}$$

En ce qui concerne les données économiques, nous prendrons pour $p(t)$ et $I(t)$ des expressions de la forme (5) et (6), et nous désignerons par C le coût unitaire du sondage. La somme, que l'on veut minimiser, de la perte et du coût de la reconnaissance, s'écrit, en fonction du nombre N de sondages :

$$\frac{1}{4} \sqrt{a_1 c_1 T} \left[\frac{0,276}{n^{3/2}} + \frac{A}{n} \right] + Cn$$

En annulant la dérivée en n , on obtient :

$$\frac{1}{4} \sqrt{a_1 c_1 T} \left[\frac{0,414}{n^{5/2}} + \frac{A}{n^2} \right] = C$$

Numériquement, prenons T = un milliard de tonnes, $a_1 = 3 \cdot 10^6$, $c_1 = 10$ (exemple emprunté à F. BLONDEL, [9]), $A = 0,10$ et un coût unitaire C de 2.000 dollars par sondage. On trouve $n = 60$ environ.

6-3 OPTIMISATION SEQUENTIELLE ET ARRÊT DES RECHERCHES.

6-3-1 Le problème de l'arrêt des recherches.

Il convient maintenant de réintroduire le risque de ruine. Dans le chapitre précédent, nous avons admis que la rentabilité du gisement avait pu être établie, et nous avons déterminé le meilleur niveau de la reconnaissance, en tenant compte seulement de la perte entraînée par un mauvais dimensionnement des installations. Il s'agissait d'un optimum purement technique, ayant valeur absolue, et défini sans actualisation. La problème que nous abordons maintenant présente la plus haute importance pour la pratique de la recherche minière. Il se résume dans la question essentielle : a quel moment convient-il d'arrêter les recherches, et de prendre une décision - positive ou négative - quant à la mise en exploitation du gisement? Le problème ne peut plus se formuler dans l'absolu. On doit se contenter d'analyser les éléments qui commandent la décision relativement au passage d'une phase de la recherche à la phase suivante. Reprenant le schéma séquentiel de la figure 1, supposons qu'une première tranche TR_1 de travaux de reconnaissance ait été

exécutée. Elle a fourni des indications chiffrées sur le tonnage et la teneur du gisement reconnu, et les méthodes de la Géostatistique ont permis de fixer la précision avec laquelle ces informations représentent la réalité. Une étude d'exploitabilité, d'autre part, a pu définir pour quels tonnages et quelles teneurs une exploitation pouvait être payante. Au point crucial C de la figure 1, auquel on est ainsi parvenu, trois décisions sont possibles :

- 1 - On décide de ne pas exploiter et on abandonne le gisement (on ferme),
- 2 - On décide d'exploiter tout de suite^{(1)*}
- 3 - On décide de faire une deuxième tranche TR_2 de travaux de reconnaissance.

Si l'on adopte la troisième décision on se retrouve, après l'exécution des TR_2 , en un nouveau point crucial C', où, théoriquement, les trois décisions sont à nouveau possibles, mais peuvent être prises à la lumière d'une information améliorée. Dans de nombreux cas, en pratique, il sera hors de question, en réalité, d'envisager une troisième phase TR_3 de recherches. Nous nous limiterons, dans cette étude, au cas où le seul choix possible, en C', consistera à mettre, ou non, le gisement en exploitation.

Ce problème séquentiel se formule, nécessairement, de manière discontinue. En particulier, la deuxième phase de recherches TR_2 , envisagée dans la troisième décision, sera imposée par la technologie. Par exemple, si l'on a reconnu un gisement filonien par tracés équidistants de 60m, la deuxième phase consistera à tracer des sous-niveaux intermédiaires, de manière à ramener à 30m la relevée entre niveaux. Ou bien, pour un gisement stratiforme reconnu par sondages à maille carrée, elle consistera à centrer la maille, c'est-à-dire à doubler le nombre des sondages utiles. Cette deuxième phase ne dépend donc pas d'un paramètre variant de façon continue, et dont la valeur pourrait être choisie arbitrairement.^{(2)*} Elle est imposée.

(1)* - Si l'on n'actualise pas, il est indifférent d'exploiter tout de suite ou plus tard. Si l'on actualise, il est préférable d'exploiter tout de suite, sauf dans le cas où les cours seraient aujourd'hui, à un niveau anormalement bas, et où l'on espérerait leur redressement dans les années à venir. Comme nous ne prenons pas en compte, dans cette étude, la variabilité des cours, nous n'envisageons pas non plus la solution d'attente, dont la formulation sur des bases réalistes serait assez délicate.

(2)* - Nous supposons, essentiellement, que la reconnaissance du gisement a été exhaustive. On a pu se tromper dans l'évaluation du tonnage et de la teneur, mais la totalité du gisement a été reconnue. Les travaux de reconnaissance ont débordé sur les limites de la minéralisation dans l'espace, et il n'y a pas de problème d'extension. Il ne serait d'ailleurs pas possible de traiter, mathématiquement, un problème d'extension. Un filon peut se prolonger à l'aval du dernier niveau reconnu, et la géologie peut apporter des arguments en faveur de cette extension : mais ces arguments ne sont pas chiffrables. Ni la Géostatistique, ni aucun artifice probabiliste ne peuvent remplacer une information manquante. Dans le cas des filons, il est, en fait, très rare que les travaux miniers atteignent la terminaison aval. Les calculs de rentabilité, que l'on fait en pratique, ne tiennent pas compte d'un aval possible au-delà du dernier niveau. Le tonnage effectivement reconnu doit justifier, à lui seul, la mise en exploitation. Nous ferons exactement de même dans notre analyse théorique.

On aura parfois l'illusion qu'un choix continu est possible. Par exemple, ayant reconnu un gisement filonien puissant à trois niveaux, et échantillonné ces trois niveaux par des sondages percutants horizontaux, pris du toit au mur de la formation, on pourrait s'imaginer améliorer l'information disponible en resserrant la maille des percutants dans les niveaux déjà traités sans faire de travaux miniers supplémentaires. La maille des percutants apparaîtrait ainsi comme un paramètre à peu près continu. Mais on sait que l'amélioration apportée par des percutants supplémentaires serait presque toujours négligeable, la plus grande partie de la variance d'estimation provenant de l'extension des sections (supposées connues) à leurs tranches d'influence à trois dimensions, extension sur laquelle le resserrement de la maille des percutants reste sans action.

La géostatistique permet de calculer la précision avec laquelle les réserves sont connues à l'issue des TR_1 , mais elle permet aussi de prévoir à l'avance la nouvelle précision avec laquelle elles seront connues lorsque l'on aura exécuté la deuxième phase TR_2 , telle que la technologie l'impose. Pour formuler le problème séquentiel, il convient d'attribuer une valeur économique au supplément d'information apporté par les TR_2 , et de le comparer au prix de revient des TR_2 eux-mêmes. Parmi les trois décisions possibles, on devra choisir celle qui conduit à la plus grande valeur probable du bénéfice futur* en aval du point C (c'est-à-dire sans tenir compte des dépenses antérieures, mais en tenant compte, pour la troisième décision, du prix de revient de la deuxième tranche TR_2 , puisqu'en C celle-ci n'est pas encore exécutée.)

* Nous laisserons volontairement ouverte la question de savoir si le bénéfice doit, ou non, être actualisé. En économie collectiviste, on n'actualiserait sans doute pas. En économie concurrentielle, le raisonnement de la première partie s'applique encore, au moins théoriquement : une grande société, se fixant comme objectif de produire chaque année une quantité donnée de métal au moindre prix de revient, devrait chercher à minimiser la somme des dépenses consenties chaque année, et qui comprennent des dépenses d'exploitation, des investissements, pour remplacer les gisements venus à épuisement cette année-là, et des travaux de recherche, pour préparer le remplacement des gisements qui s'épuiseront les années suivantes. Ce point de vue conduirait, en bonne logique, à adopter l'expression non actualisée du bénéfice dans l'optimisation séquentielle des recherches (corrélativement d'ailleurs, le paramètre b ne correspondrait plus au prix du marché, mais à un prix interne, défini, par la Société de manière, précisément, à optimiser son programme de production global).

Ce raisonnement nous avait paru péremptoire, lors de l'étude de l'optimisation technique faite dans les deux premières parties, parce qu'il conduisait à une description correcte du comportement réel des exploitants. Dans l'optimisation séquentielle, au contraire, le comportement réel des exploitants, en économie concurrentielle, correspond à un taux non nul. On cherche, en effet, un critère de décision quant à une mise en exploitation éventuelle, et - en économie concurrentielle, - on ne décide d'exploiter un gisement que si la valeur actualisée du bénéfice futur doit être positive. Nous nous servirons donc de l'expression (9), correspondant à un taux i non nul. Il sera extrêmement facile de passer au cas $i = 0$ en remplaçant, dans les résultats obtenus, les exponentielles e^{-iN} par l'unité, et les expressions $1 - e^{-iN}$ par N .

Les économistes attachent, avec raison, une grande importance au choix du critère adopté. Outre l'expression (9), actualisée ou non, du bénéfice futur, bien d'autres critères peuvent être envisagés, conduisant à des pratiques plus ou moins malthusiennes et à diverses variétés d'écrémage. Par exemple, le point de vue strictement capitalistique se fixerait comme objectif de faire rendre à chaque action le plus fort revenu possible, et conduirait à maximiser le rapport B_1/I . De même, le point de vue, un peu naïf, du technicien pur conduirait à minimiser le prix de revient du kilo de métal etc... D'une manière générale, J. LESOURNE, [10] indique que les rapports, tels que B/I , constituent de mauvais critères économiques. Dans le problème qui nous occupe, le seul choix possible se limite donc à faire, ou non, $i = 0$ dans l'expression (9) du bénéfice.

5-3-2 La relation d'additivité.

Supposons qu'après une première phase de travaux nous soyons parvenus au point crucial C de la figure 1. Nous disposons alors d'une (première) estimation Z_1^* de la grandeur réelle inconnue Z qui nous intéresse (tonnage ou teneur du gisement). Si nous décidons d'effectuer une deuxième phase de travaux de reconnaissance, ces travaux ne seront pas implantés au hasard, mais occuperont une position géométrique préférentielle relativement aux travaux de la première phase. (On centrera une maille de sondages, on tracera un niveau supplémentaire à mi-hauteur entre deux traçages existant, etc...). Désignons par Y^* l'estimation à laquelle ces travaux de seconde phase nous conduiraient s'ils existaient seuls (si les travaux de première phase n'existaient pas), et introduisons les variances et la covariance d'extension suivantes :

$$\begin{cases} \sigma_1^2 = D^2 (Z_1^* - Z) \\ \sigma_Y^2 = D^2 (Y^* - Z) \\ \sigma_{1,Y} = E [(Z_1^* - Z)(Y^* - Z)] \end{cases}$$

qui ne dépendent que du variogramme et de la géométrie des travaux. A l'issue de la seconde phase (si nous décidons de l'exécuter), nous disposerons en réalité des résultats des deux phases de travaux, et nous formerons donc l'estimateur Z_2^* réalisant le krigeage de Z à partir de Z_1^* et de Y^* , soit :

$$Z_2^* = \lambda Y^* + (1-\lambda) Z_1^*$$

La variance d'estimation de Z par Z_2^* , qui est :

$$D^2 (Z_2^* - Z) = \lambda^2 \sigma_Y^2 + 2\lambda(1-\lambda) \sigma_{1,Y} + (1-\lambda) \sigma_1^2$$

est minimale pour :

$$\lambda = \frac{\sigma_1^2 - \sigma_{1,Y}}{\sigma_1^2 + \sigma_Y^2 - 2 \sigma_{1,Y}} = \frac{\sigma_1^2 - \sigma_{1,Y}}{D^2 (Z_1^* - Y^*)}$$

et vaut alors :

$$(15) \quad \sigma_2^2 = D^2 (Z_2^* - Z) = \sigma_1^2 - \lambda^2 D^2 (Z_1^* - Y^*)$$

Introduisons la variance

$$D^2 (Z_1^* - Z_2^*) = \lambda^2 D^2 (Z_1^* - Y^*)$$

qui représente l'erreur que l'on commet en estimant le futur estimateur Z_2^* (celui que l'on formera après avoir effectué la seconde phase) à l'aide du résultat Z_1^* des seuls premiers travaux. La relation (15) s'écrit :

$$(16) \quad D^2 (Z_1^* - Z_2^*) = \sigma_1^2 - \sigma_2^2$$

Ainsi, la variance $D^2 (Z_1^* - Z_2^*)$ représente exactement le gain d'information que doivent apporter les nouveaux travaux, et la géostatistique permet de la calculer avant que la seconde phase ne soit réalisée (puisque'elle ne dépend que du variogramme et de la géométrie des travaux). Il suffit donc de trouver l'équivalent économique de ce gain d'information pour réaliser l'optimisation séquentielle : on effectuera, ou non, la seconde phase de travaux selon que la valeur économique du supplément d'information qu'elle apporte dépasse, ou non, le prix de revient de son exécution.

On trouvera, dans la bibliographie déjà citée, la formulation de ce problème dans le cas général où le tonnage et la teneur interviennent tous les deux. Nous nous contenterons ici de traiter le cas simple où la teneur intervient seule.

6-3-3 Cas où la teneur intervient seule.

Plaçons-nous dans le cas où le tonnage T du gisement peut être considéré comme connu avec une approximation suffisamment bonne pour que la rentabilité ne dépende plus que de la teneur moyenne (inconnue) Z du gisement. Si m_0 désigne la teneur limite (limite de rentabilité, et non teneur de coupure : le gisement sera exploitable ou non selon que l'on aura $Z \geq m_0$ ou $Z < m_0$), le bénéfice futur (si l'on exploite) peut se mettre sous la forme :

$$B = bT (Z - m_0)$$

Désignons par B_1 , B_2 et B_3 le bénéfice correspondant à chacun des trois choix possibles : abandonner le gisement (B_1), exploiter tout de suite (B_2), différer la décision et exécuter une deuxième tranche de travaux (B_3).

Dans les deux premiers cas, on a évidemment :

$$(17) \quad \begin{aligned} E(B_1) &= 0 \\ E(B_2) &= bT (Z_1^* - m_0) \end{aligned}$$

On voit - comme on pouvait s'y attendre - que si le choix se limitait aux deux premières options

on exploiterait, ou non, suivant que les travaux de première phase auraient un résultat Z_1^* supérieur, ou non, à la teneur limite m_0 .

Le calcul de $E(B_3)$ est un peu plus complexe. Plaçons-nous par la pensée au second point crucial C' , et anticipons les résultats que doivent donner les travaux de la deuxième phase. En C' , on décidera d'exploiter si $Z_2^* \geq m_0$ (les travaux de deuxième phase étant alors réalisés, leur prix de revient ne devra pas influencer cette décision) et l'espérance du bénéfice (en aval de C') sera alors $bT(Z_2^* - m_0)$. Si, au contraire, $Z_2^* < m_0$, on abandonnera le gisement, et l'espérance sera nulle. Désignons par :

$$G(z) = P(Z_2^* < z)$$

la probabilité (évaluée au point crucial C) pour que les travaux de seconde phase (non encore exécutés) conduisent à une estimation Z_2^* inférieure à z , et par R le prix de revient des travaux de la deuxième phase (qui ne sont pas encore exécutés en C , et doivent donc entrer en ligne de compte). On voit que l'on a :

$$(18) \quad E(B_3) = bT \int_{m_0}^{\infty} (z - m_0) dG(z) - R$$

La comparaison de $E(B_1)$, $E(B_2)$ et $E(B_3)$ - formules (17) et (18) permet alors d'adopter la meilleure décision au point C .

Remarque. En réalité, on ne connaît pas la loi de probabilité $G(z)$ de la variable Z_2^* . On sait seulement qu'au point crucial C elle admet l'espérance Z_1^* et la variance $D^2(Z_2^* - Z_1^*)$ que l'on sait calculer par les méthodes de la géostatistique : cette variance est justement celle qui, d'après (16), mesure le gain d'information qu'apportera la seconde phase de travaux. Dans les applications, on pourra toujours obtenir un ordre de grandeur numérique en supposant, par exemple, que $G(z)$ est une loi de Gauss (ou une loi lognormale, ou toute autre loi dépendant de deux paramètres) admettant la moyenne Z_1^* et l'espérance $D^2(Z_2^* - Z_1^*)$.

Exemple : Pour illustrer ces diverses formules, donnons un exemple numérique. Un gisement de Plomb - Zinc a été reconnu à un niveau par travaux miniers, et par des travaux de surface. Le tonnage certain est de 400.000 tonnes. Il y a peut-être un aval, mais on n'en tient pas compte. La valeur du Pb, du Zn et de l'Ag. contenus dans une tonne de minerai a été estimée ^{(1)*} à 3.000

(1)* Comme il y a plusieurs métaux, il est plus simple de raisonner directement sur les valeurs contenues, et non sur les teneurs.

anciens francs. La teneur limite correspond à 3.000 anciens francs, de sorte que l'on est exactement dans le cas marginal. Compte tenu de l'incertitude des cours futurs, nous ferons cependant les calculs pour trois valeurs différentes de m_0 , soient 2.700, 3.000 et 3.300. La teneur moyenne est connue avec un écart-type (logarithmique) $\sigma_1 = 0,15$. Une deuxième campagne de reconnaissance, qui consisterait à tracer un sous-niveau intermédiaire, coûterait 40 millions, et donnerait un nouvel^{(2)*} écart-type $\sigma_2 = \frac{1}{2} \sigma_1$. On en déduit l'écart-type σ de l'estimation de m_2 à partir de m_1 :

$$\sigma = \sigma_1^2 - \sigma_2^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_1 = 0,13$$

Le calcul des espérances (17) et (18) pour les trois limites d'exploitabilité conduit aux résultats numériques suivants (en millions d'anciens francs), en raisonnant dans le cas d'une loi lognormale :

m_0	2.700	3.000	3.300
$E(B_1)$	0	0	0
$E(B_2)$	+ 120	0	- 120
$E(B_3)$	136-40 = + 96	56-40 = + 16	20-40 = - 20

Si la limite est fixée à 2.700 francs, on doit exploiter tout de suite. Si elle est de 3.300 francs, on doit abandonner. Si elle est de 3.000, c'est-à-dire dans le cas exactement marginal, il y a un avantage théoriquement non nul, mais numériquement assez faible (16 millions), à faire une deuxième campagne de reconnaissance. C'est là une circonstance assez générale : c'est dans le cas exactement marginal que les informations apportées par des travaux supplémentaires présentent le maximum d'intérêt. Cet intérêt décroît assez vite dès que l'on s'écarte du cas marginal par excès ou par défaut. Dès que l'on est pratiquement sûr que la teneur réelle est supérieure (ou inférieure) à la limite de rentabilité, on décide d'exploiter (ou de fermer), et le besoin de travaux nouveaux ne se fait nullement sentir.

(2)* On est dans la zone linéaire du variogramme, de sorte que la nouvelle variance est égale au quart de l'ancienne.

7 - EXERCICES

7-1 EXERCICES SUR LES METHODES TRANSITIVES.

Exercice 1. (Covariogramme exponentiel). Soit, dans l'espace à une seule dimension, une V.R. dont le covariogramme transitif est $g(h) = e^{-\lambda|h|}$. Former l'expression exacte de la variance d'estimation $\sigma^2(a)$, trouver sa partie principale, et conclure à l'absence de Zitterbewegung.

(solution : $\sigma^2(a) = a \left(\frac{2}{1 - e^{-\lambda a}} - 1 - \frac{2}{\lambda a} \right) + \frac{1}{6} \lambda a^2$)

Exercice 2. (Covariogramme triangulaire). Soit dans l'espace à une dimension la V.R. $f(x)$ égale à 1 sur l'intervalle $(0, b)$.

1°/ Former le covariogramme de $f(x)$. (sol.: $g(h) = b - |h|$ pour $|h| \leq b$ et 0 pour $|h| > b$; établir ce résultat par un raisonnement géométrique).

2°/ Calculer la variance d'estimation pour une maille a petite, par la formule d'approximation. (sol.: $1/6 a^2$).

3°/ On dispose de $n+2$ sondages $S_0, S_1, \dots, S_n, S_{n+1}$ à maille a régulière, dont le premier et le dernier sont négatifs et les autres positifs. On admet que chacune des deux extrémités de l'intervalle dont on veut estimer la longueur b peut tomber n'importe où sur le segment (S_0, S_1) et (S_n, S_{n+1}) respectivement, indépendamment l'une de l'autre et avec une probabilité uniforme. La longueur b devient ainsi une variable aléatoire. Montrer $E(b) = na$; $D^2(b) = a^2/6$: on retrouve bien ainsi la variance d'estimation telle que la donne la formule d'approximation, mais on n'atteint pas le terme fluctuant.

4°/ Calculer la valeur exacte de la variance d'estimation $\sigma^2(a)$ du 2°/. (sol.: poser $b = na + \epsilon a$, avec $0 \leq \epsilon < 1$. Si le premier prélèvement positif est en x ($0 \leq x < a$), on a l'estimation $(n+1)a$ pour $x \leq \epsilon a$, et na pour $\epsilon a < x < a$. Le point x étant implanté au hasard sur le segment $(0, a)$ avec une densité uniforme de probabilité, cette estimation est une variable aléatoire d'espérance b et de variance $(\epsilon - \epsilon^2) a^2$. Cette expression tient compte du Zitterbewegung. Lorsque ϵ (qui est toujours inconnu dans la pratique) est assimilé à une variable aléatoire uniformément distribuée sur $(0, 1)$, la valeur moyenne de cette expression coïncide avec l'expression approchée du 2°/ (Zitterbewegung exclu).

Exercice 3. (Variance d'estimation dans le cas aléatoire). Soit, dans l'espace à deux dimensions, une V.R. $f(x)$ de covariogramme $g(h)$ et de support S . Si le rectangle de maille (a_1, a_2)

est grand devant S , un prélèvement au plus est positif, et tout se passe comme si ce prélèvement unique était implanté au hasard dans un rectangle de côtés a_1, a_2 contenant S . Si ce prélèvement tombe en un point $x \in S$, on prend l'estimation $Q^*(x) = a_1 a_2 f(x)$, et 0 si $x \notin S$. $Q^*(x)$ est ainsi une variable aléatoire. Montrer directement $E(Q^*) = \int f(x) dx = Q$, $E[(Q^*)^2] = [\int [f(x)]^2 dx] a_1 a_2$ et $D^2(Q^*) = a_1 a_2 g(0) - \int g(h) dh$.

Exercice 4. (covariogramme transitif de la sphère). Dans l'espace à deux dimensions, calculer le covariogramme de la sphère de diamètre a .

(sol.: remarquer que $-g'(h)$ est l'aire du cercle d'intersection de la sphère et de sa translatée par h , intégrer, en déduire $g(h) = 0$ pour $|h| \geq a$ et $g(h) = \frac{\pi}{6} a^3 [1 - \frac{3}{2} \frac{h}{a} + \frac{1}{2} \frac{h^3}{a^3}]$ pour $|h| < a$. Application à l'estimation du volume de cette sphère.

7-2 EXERCICES SUR LES F.A. INTRINSEQUES.

Exercice 1. Une origine x_0 étant choisie au hasard sur $(0, a)$, on divise la droite en segments de longueur a au moyen des points de subdivision $x + k a$ (k entier, positif ou négatif). Soit $Y(x)$ la F.A. prenant sur chacun de ces segments de longueur a une valeur aléatoire constante Y , tirée au sort indépendamment d'un segment à l'autre selon une même loi de moyenne m et de variance σ^2 . Montrer que la probabilité pour que deux points x et $x+h$ appartienne au même segment a est $1 - |h|/a$ pour $|h| \leq a$ et 0 pour $|h| > a$. En déduire le demi-variogramme de $Y(x)$ ($\frac{|h|}{a} \sigma^2$ pour $|h| \leq a$ et σ^2 pour $|h| > a$).

Exercice 2. Même question que dans l'exercice précédent, mais les longueurs des segments successifs sont aléatoires, indépendantes les unes des autres, et obéissent à la même loi exponentielle $e^{-\lambda \ell}$.

(sol.: la probabilité pour que x et $x+h$ soit dans le même segment est $e^{-\lambda h}$. On en déduit $\gamma(h) = (1 - e^{-\lambda h}) \sigma^2$).

Exercice 3. On considère le demi-variogramme h^λ ($0 < \lambda < 2$) dans l'espace à une dimension. Calculer les fonctions auxiliaires χ et F , la variance d'extension élémentaire d'un point central à son segment d'influence, la variance d'extension à ce segment de ses deux extrémités (dispositif fermé). Comparer et discuter.

$$X(h) = \frac{h^\lambda}{\lambda+1} ; F(h) = \frac{2 h^\lambda}{(\lambda+1)(\lambda+2)} ; \frac{2 a^\lambda}{\lambda+1} \left[\frac{1}{2^\lambda} - \frac{1}{\lambda+2} \right] ; \left(\frac{2}{\lambda+2} - \frac{1}{2} \right) a^\lambda . \text{ On a } \sigma_E^2 > \sigma_B^2.$$

pour $\lambda > 1$ et inversement, avec égalité pour $\lambda = 1$: pour $\lambda > 1$, haute continuité, et l'échantillon unique mais bien placé est supérieur aux deux échantillons mal placés ; pour $\lambda < 1$, on est proche du cas aléatoire pur, et les deux échantillons, même mal placés, donnent toujours un meilleur résultat que l'échantillon unique ; pour $\lambda = 1$, les deux dispositifs sont équivalents).

Exercice 4. Avec le demi-variogramme h^λ dans l'espace à une dimension, calculer la variance d'estimation du segment $L = n a$ par n échantillons ponctuels, dans les trois cas suivants :

- maille régulière (dispositif centré) $(\frac{1}{n} \frac{2}{\lambda+1} [\frac{1}{2^\lambda} - \frac{1}{\lambda+2}] a^2)$
- maille aléatoire stratifiée $(\frac{1}{n} \frac{2 a^\lambda}{(\lambda+1)(\lambda+2)})$
- maille aléatoire pure $(\frac{1}{n} \frac{2}{(\lambda+1)(\lambda+2)} L^\lambda)$

Exercice 5. Soit, dans l'espace à deux dimensions, le demi-variogramme r^λ . Soit un gisement reconnu par traçages de longueurs supérieures à leur équidistance h .

a/ Calculer la variance d'extension d'un traçage de longueur ℓ dans son rectangle ℓ, h d'influence.

(la montée sous puissance ℓ transforme r^λ en $A r^{\lambda+1}/\ell$ (ou $\log r$ en $\pi r/\ell$); d'où :

$$\sigma_E^2 = A \frac{2}{\lambda+2} \left[\frac{1}{2^{1+\lambda}} - \frac{1}{\lambda+3} \right] \frac{h^{1+\lambda}}{\ell} = B \frac{h^{1+\lambda}}{\ell}$$

b/ En déduire la variance d'estimation (pondérer par les carrés des longueurs des traçages, poser $L = \sum \ell_i$ et $S = L h$, et mettre la variance d'estimation sous la forme $B \frac{S^{1+\lambda}}{L^{2+\lambda}}$. Cas de Wj-sien : $A = \pi$, $B = \frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6} \frac{S}{L^2}$.

Exercice 6. Même problème qu'en 5, mais on suppose de plus que les traçages sont estimés à partir de rainurages à maille a . Calculer le terme de ligne $(\frac{C}{L} a^{1+\lambda})$ avec $C = \frac{2}{\lambda+1} [\frac{1}{2^\lambda} - \frac{1}{\lambda+2}]$. Optimisation économique : soit ω le prix du mètre de galerie, p_0 le prix d'un prélèvement, et $\ell_0 = p_0/\omega$. Optimiser la précision à prix de revient donné, ou, ce qui revient au même, le prix de revient pour une précision donnée.

(Tout revient à minimiser $C h a^{1+\lambda} + B h^{2+\lambda}$ sous la condition $\frac{1}{h \ell_0} + \frac{1}{h a} = C$. On obtient la relation suivante :

$$B(2+\lambda) h^{1+\lambda} = \lambda C a^{1+\lambda} + C(1+\lambda) \frac{a^{2+\lambda}}{\ell_0}$$

qui donne l'équidistance h des niveaux en fonction de la maille a des rainurages.

Exercice 7. Effet de pépite à l'état pur. On se donne des pépites ponctuelles réparties dans l'espace selon un schéma de Poisson (définition : le nombre $N(v)$ des pépites dans un volume v est une variable de Poisson de moyenne λv ; si v et v' sont disjoints, $N(v)$ et $N(v')$ sont indépendants).

a/ On prélève des volumes v , et on pose $Y(x) = N(v_x)$, v_x désignant le translaté de v implanté au point x . Montrer que la covariance de $Y(x)$ et $Y(x+h)$ est la variance de $N(v_x \cap v_{x+h})$, soit $\lambda K(h)$, $K(h)$ désignant le covariogramme géométrique du volume v .

b/ On suppose maintenant que les pépites ont des poids aléatoires indépendants (moyenne p_0 , variance σ_p^2), et on prend pour $Y(x)$ la somme $P_1 + \dots + P_N$ des poids des $N = N(v_x)$ pépites contenues dans v . Calculer la moyenne et la variance de $Y(x)$ ($E(Y) = \lambda v p_0$, $D(Y) = \lambda v (p_0^2 + \sigma_p^2)$). En déduire la covariance de $Y(x)$ et $Y(x+h)$ (remplacer v par $K(h)$).

Exercice 8. Schéma de dilution. On a des germes poissoniens comme dans l'exercice 7. Soit $f(x)$ une fonction. On pose $Y(x) = \sum_i f(x-x_i)$, x désignant les implantations des différents germes. Il s'agit donc d'une dilution de ces germes par la fonction f . Former la covariance $K(h)$ de $Y(x)$. ($\lambda g(h)$, avec $g = f * \check{f}$).

Exercice 9. Soit dans le plan un schéma de de Wijs $\gamma(r) = \log r$. On rappelle que si g est une fonction harmonique à l'intérieur d'un cercle, sa valeur moyenne dans le cercle (ou sur sa circonférence) est égale à sa valeur au centre : $\log r$ est une fonction harmonique sauf en $r = 0$.

a/ On désigne par $C(R)$, $\chi(R)$, $F(R)$, $C_0(R)$ la valeur moyenne de $\log r$ sur la circonférence du cercle de rayon R , entre ce cercle et sa circonférence, dans ce cercle, entre ce cercle et son centre. Montrer $C(R) = \chi(R) = \log R$; $F(R) = \log R - 1/4$; $C_0(R) = \log R - 1/2$ (les deux premières relations résultent du théorème sur les fonctions harmoniques. Pour calculer $F(R)$, faire varier $R^4 F(R)$ et montrer $\frac{d}{dR} R^4 F(R) = 4 R^3 \chi(R)$. Pour $C_0(R)$, intégrer $2\pi r \chi(r)$).

b/ Calculer la variance d'estimation d'un panneau circulaire à partir de sa circonférence ($\sigma_E^2 = 2 \chi(R) - F(R) - C(R) = \frac{1}{4}$).

c/ Variance d'extension dans le cercle d'un petit élément central dont l'équivalent linéaire est ℓ ($\log R/\ell + 3/4$). Si L est l'équivalent linéaire du cercle, cette variance d'estimation est encore $\log(L/\ell) - 1/2$. En déduire que la variance d'extension d'un échantillon équivalent à ℓ dans le carré (a,a) au centre duquel il est implanté est approximativement $\log(\frac{2a}{\ell}) - 1/2$.

Exercice 10. Schéma sphérique à une dimension. Calculer les fonctions auxiliaires du schéma sphérique :

$$\gamma(\ell) = \frac{3}{2} \frac{\ell}{a} - \frac{1}{2} \frac{\ell^3}{a^3} \quad \text{pour } \ell \leq a, \quad 1 \text{ pour } \ell \geq a$$

$$\chi(\ell) = \frac{3}{4} \frac{\ell}{a} - \frac{1}{8} \frac{\ell^3}{a^3} \quad " \quad 1 - \frac{3}{8} \frac{a}{\ell}$$

$$F(\ell) = \frac{1}{2} \frac{\ell}{a} - \frac{1}{20} \frac{\ell^3}{a^3} \quad " \quad 1 - \frac{3}{4} \frac{a}{\ell} + \frac{1}{5} \frac{a^2}{\ell^2}$$

b/ Variance d'extension élémentaire d'un échantillon dans son segment b d'influence pour $b \leq a$ et $b \geq 2a$. Interpréter.

$$\left(\frac{1}{4} \frac{b}{a} + \frac{3}{160} \frac{b^3}{a^3} \right) \quad \text{et} \quad 1 - \frac{3}{4} \frac{a}{b} - \frac{1}{5} \frac{a^2}{b^2}$$

8 - ABAQUES

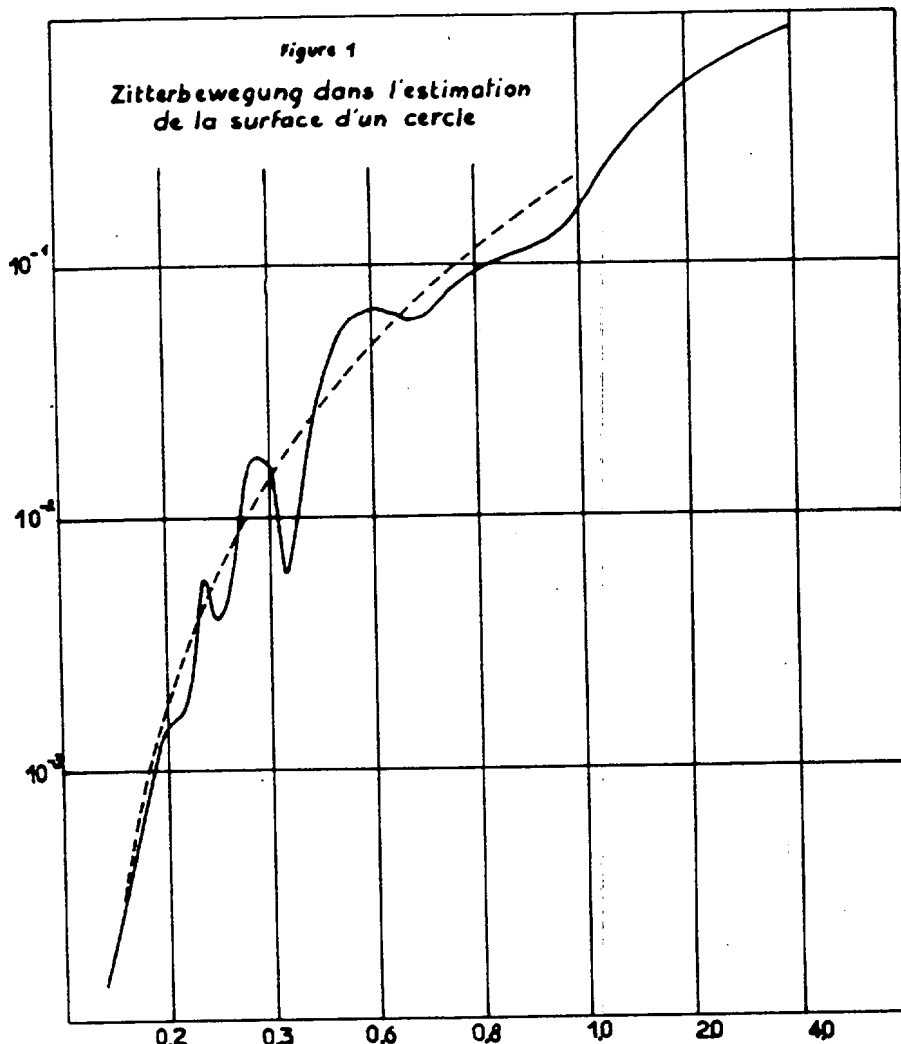


Fig 1. — Zitterbewegung dans l'estimation de la surface du cercle de diamètre unité à l'aide d'un réseau à maille carrée. En abscisse la maille a . En ordonnée la variance d'estimation correspondante $\sigma^2(a)$. la courbe en trait plein représente la valeur exacte, calculée à partir de la formule exacte (IV, 1, 12). la courbe en pointillé représente la formule $\sigma^2(a) = 0.2276 a^3 + 0.00477 a^5$ obtenue en négligeant le Zitterbewegung et en retenant les deux premiers termes du développement limité donné par le principe de correspondance.

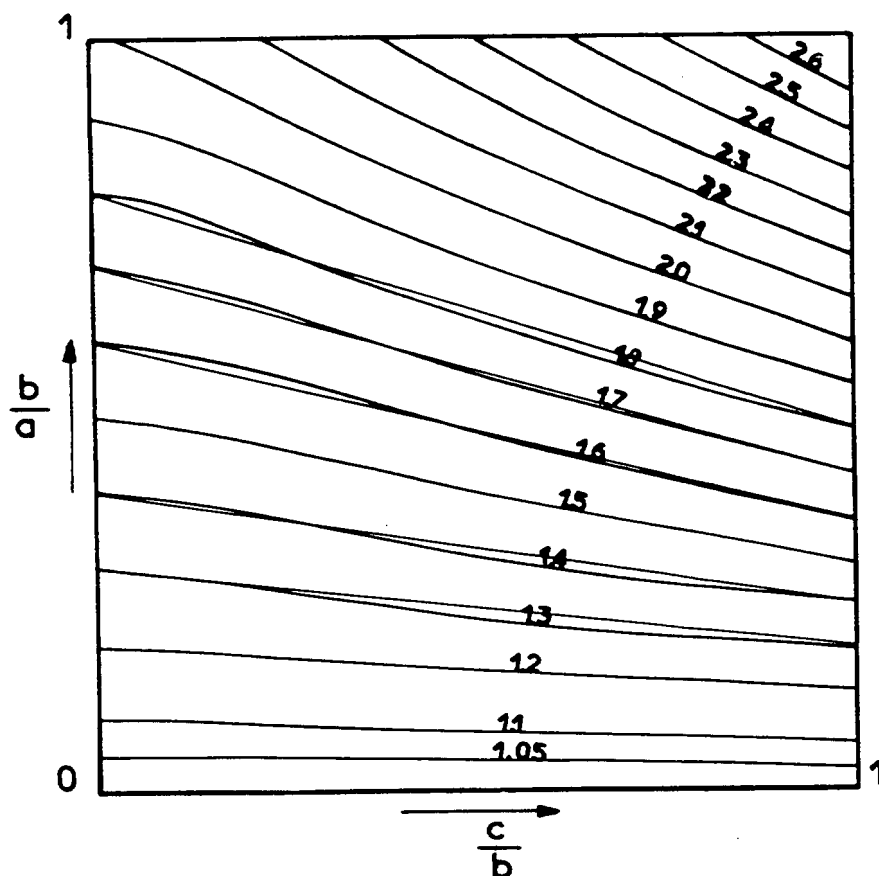
ABaque 1

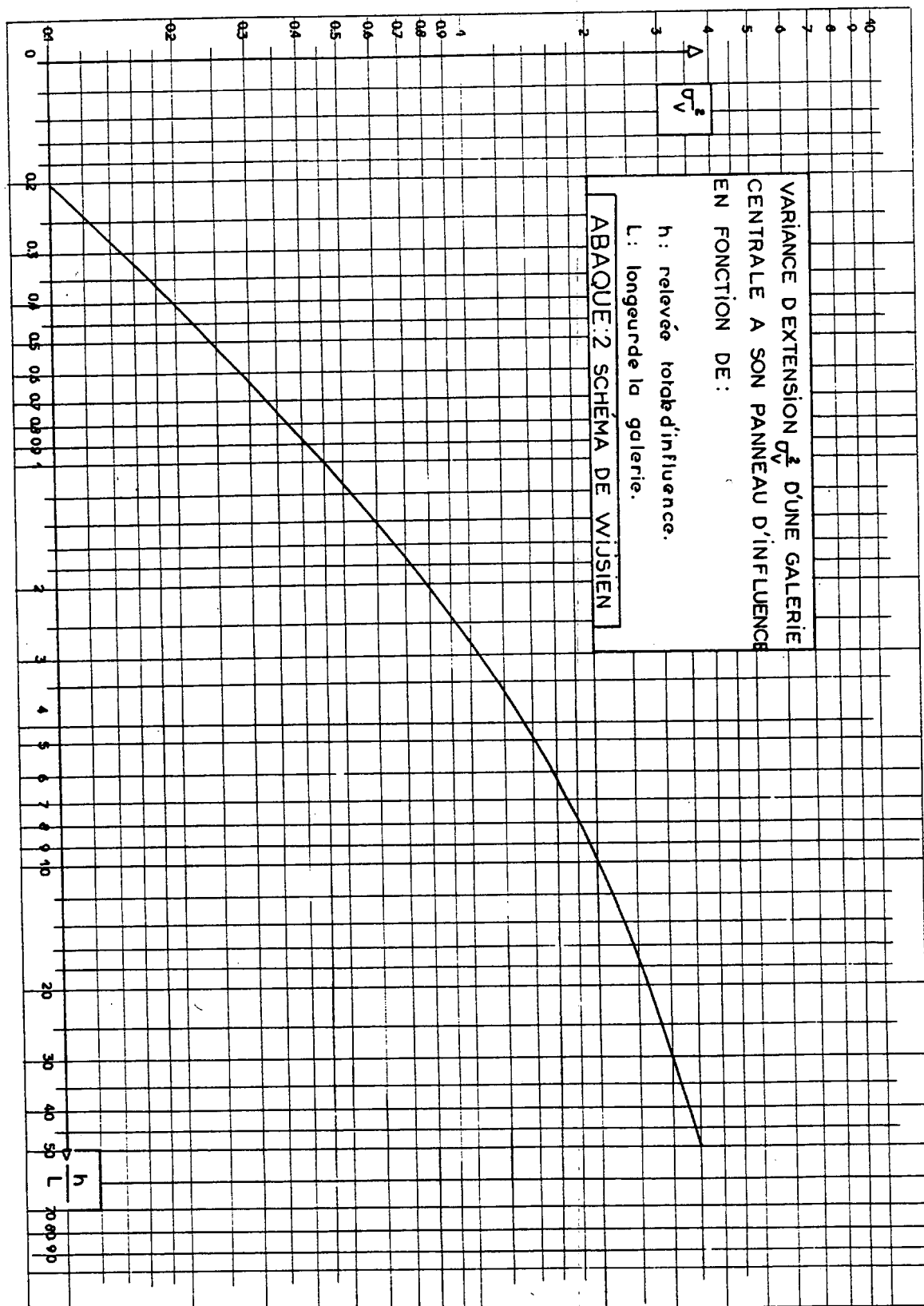
equivalence lineaire en schéma
de wijsien

le parallélépipède $a \times b \times c$ (a b c) est equivalent

a l'échantillon linéaire λa

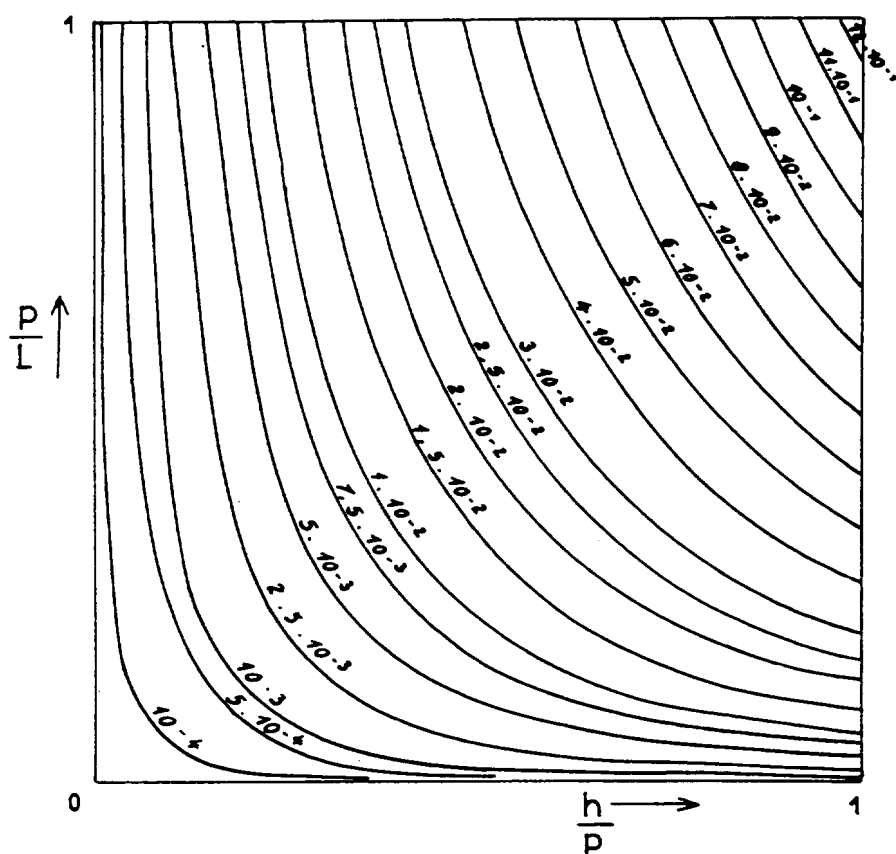
les courbes sont graduées en λ



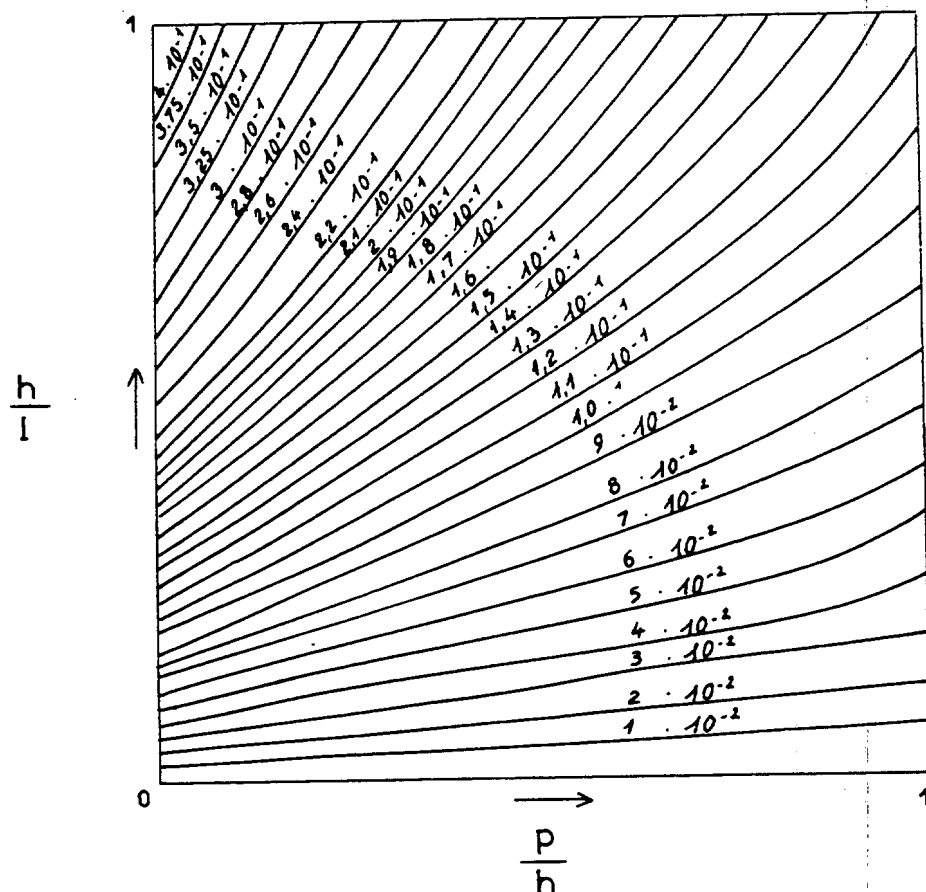


Abaque 3

schéma de wijsien



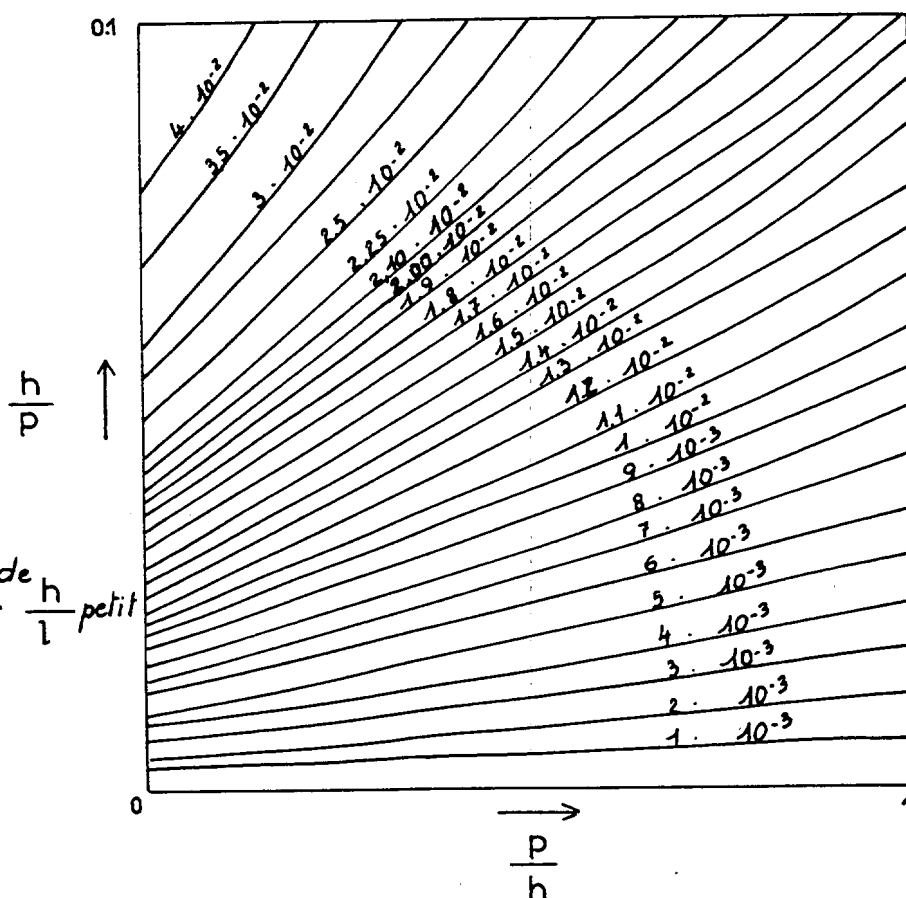
Abaque 3
 Variance d'extension
 d'une grande section
 d'influence de relevée
 $h: \ell \gg p \gg h$.
 les courbes sont
 graduées en $\frac{1}{3^4} \sigma_E^2$

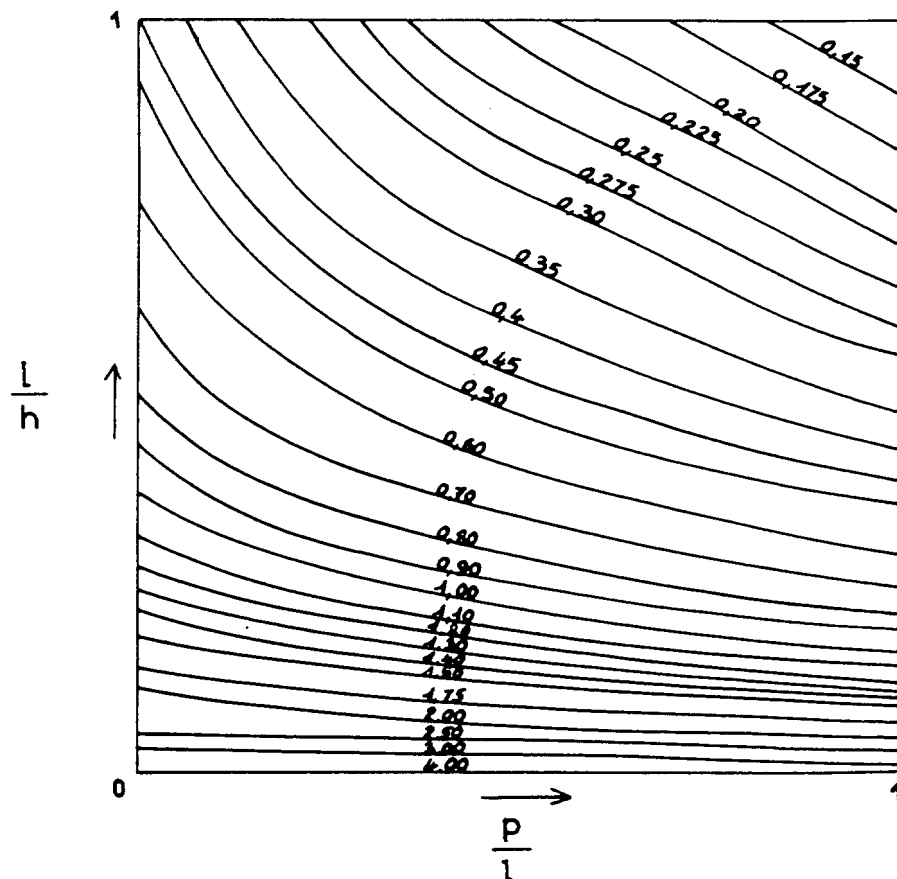


Abaque 4
schéma de wijsien

Abaque 4 . Variance
d'extension d'une
section intermediaire
 $l \times p$ dans sa zone
d'influence de relevee
 $h = l \geq h \geq p$
les courbes sont graduees
en $\frac{1}{3\alpha} \sigma_E^2$.

Abaque 4
Agrandissement de
l'abaque III pour $\frac{h}{l}$ petit

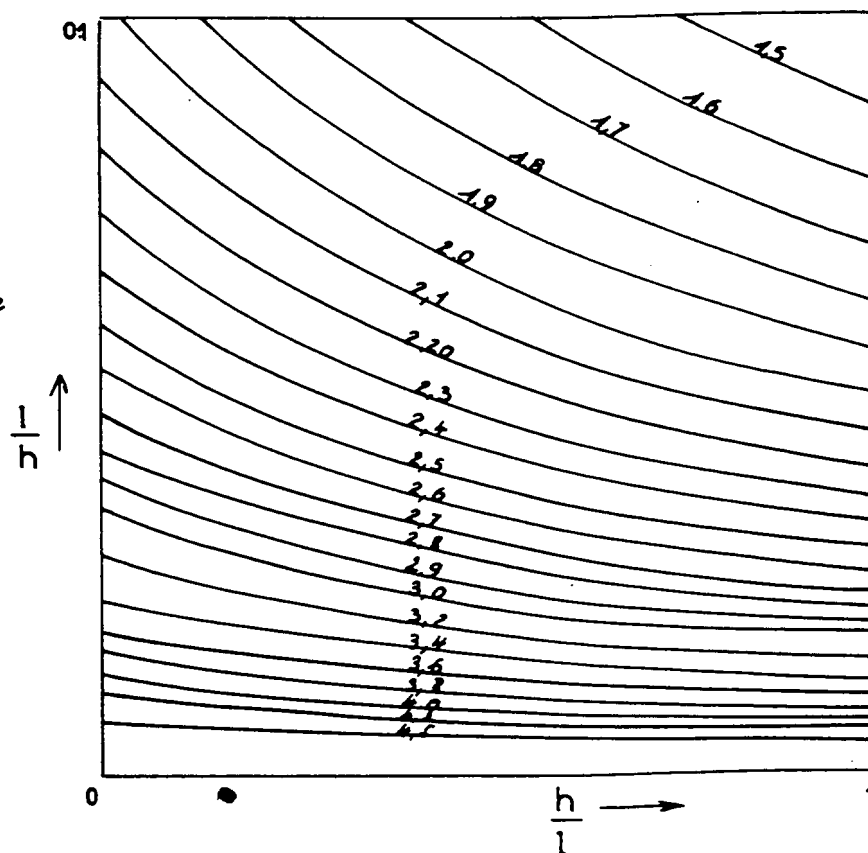


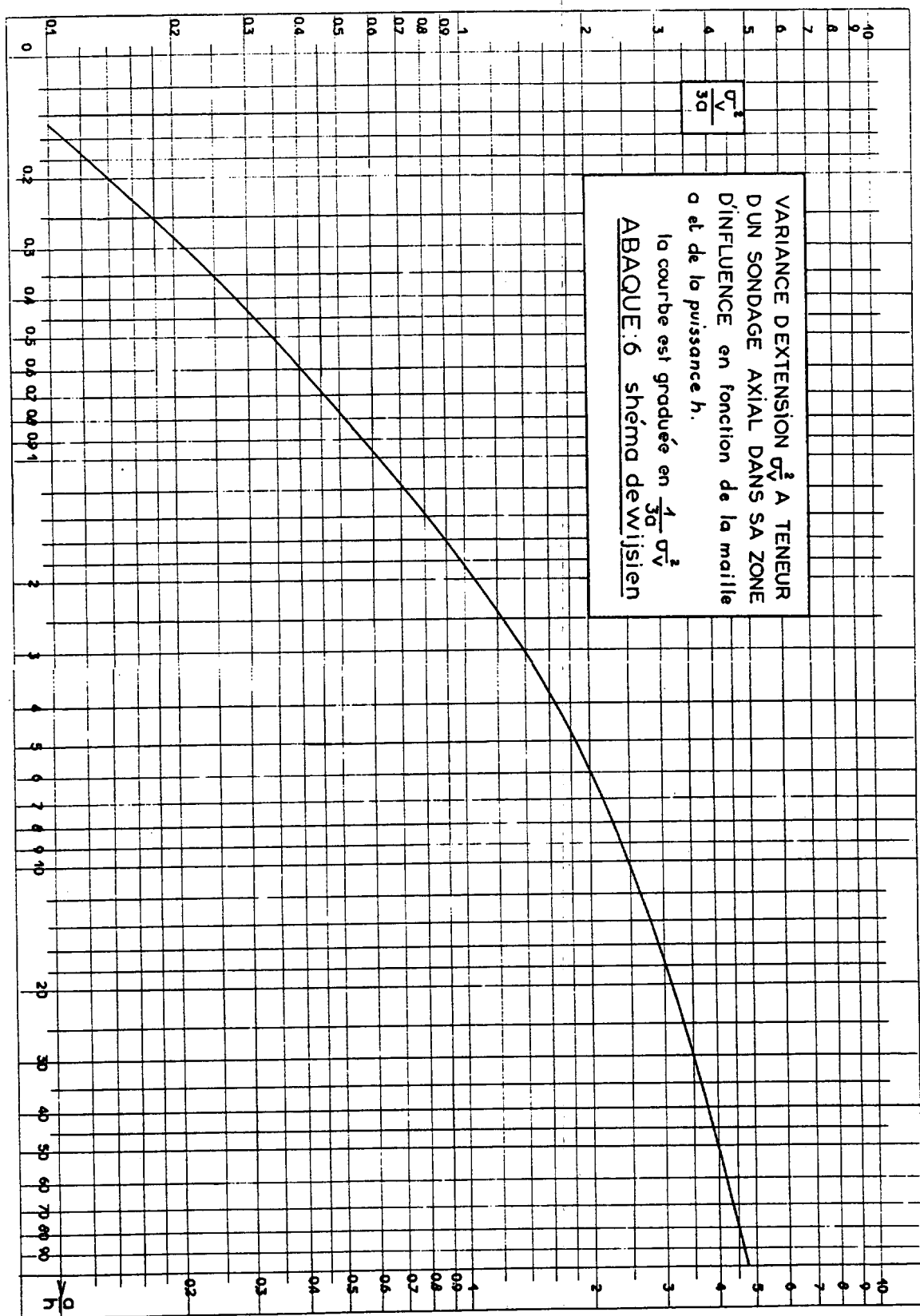


Abaque 5
schéma de wijsien

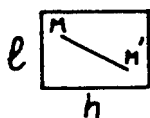
Abaque 5
Variance d'extension
d'une petite section
 $1 \times p$ dans sa zone
d'influence de relevée
 $h = h \gg l \gg p$
les courbes sont
graduées en $\frac{1}{39} \sigma^2 E$

Abaque 5
Agrandissement de
l'abaque IV
pour $\frac{l}{h}$ petit

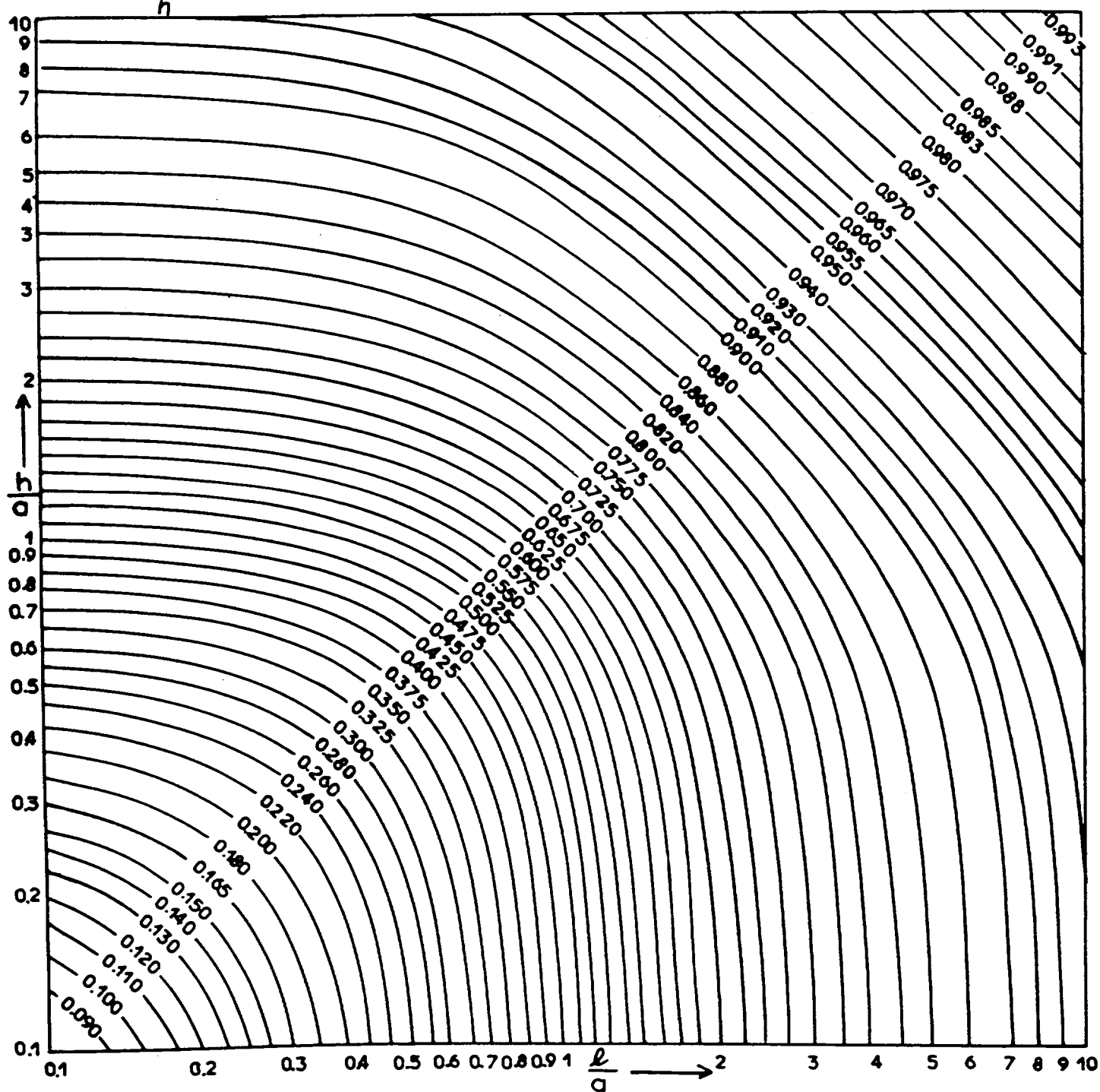




ABAQUE : 7 — SCHEMA SPHÉRIQUE —

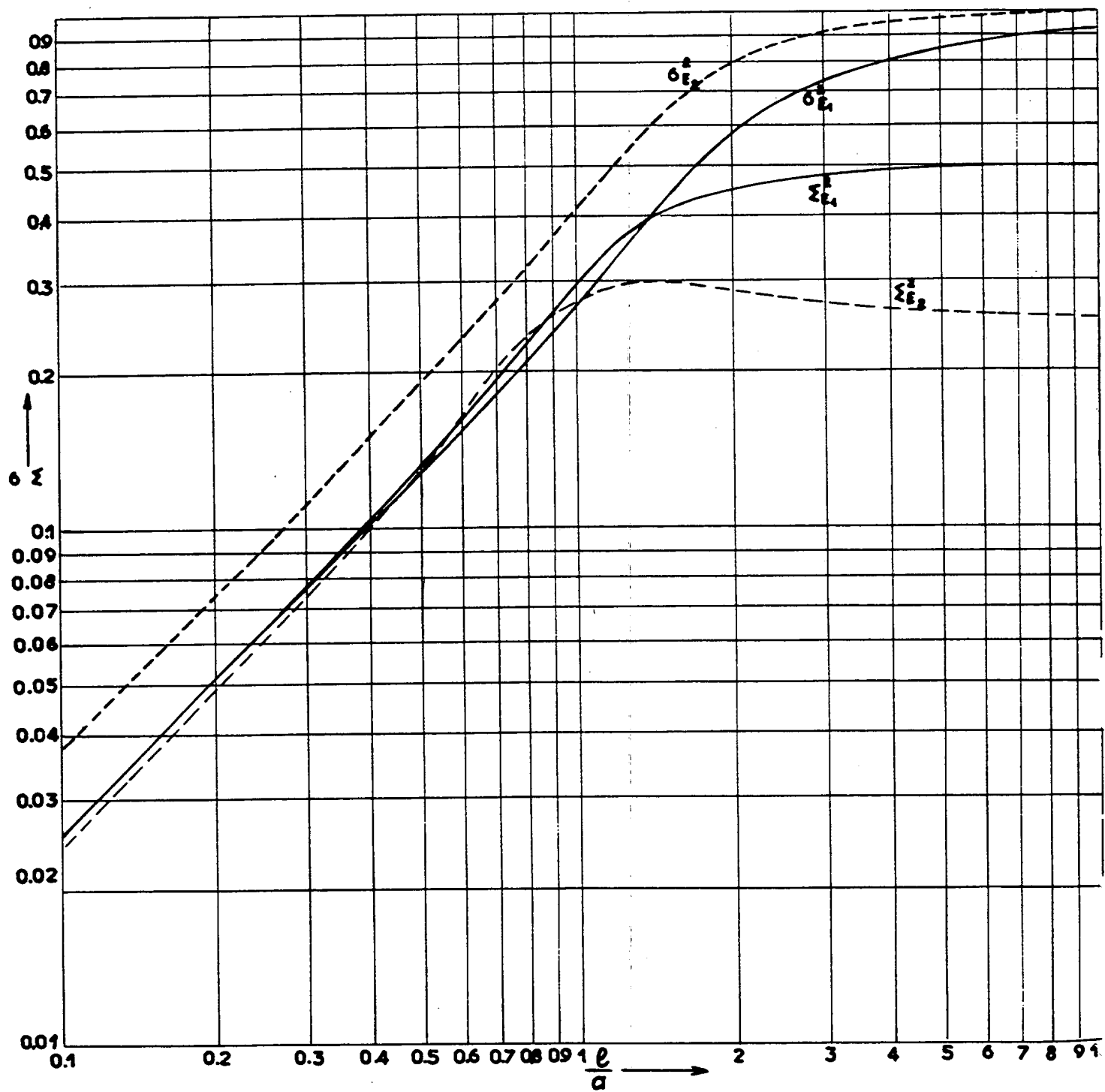


Fonction $\frac{1}{C} F\left(\frac{l}{a}, \frac{h}{a}\right)$ = Variance d'un point dans le rectangle $l \times h$



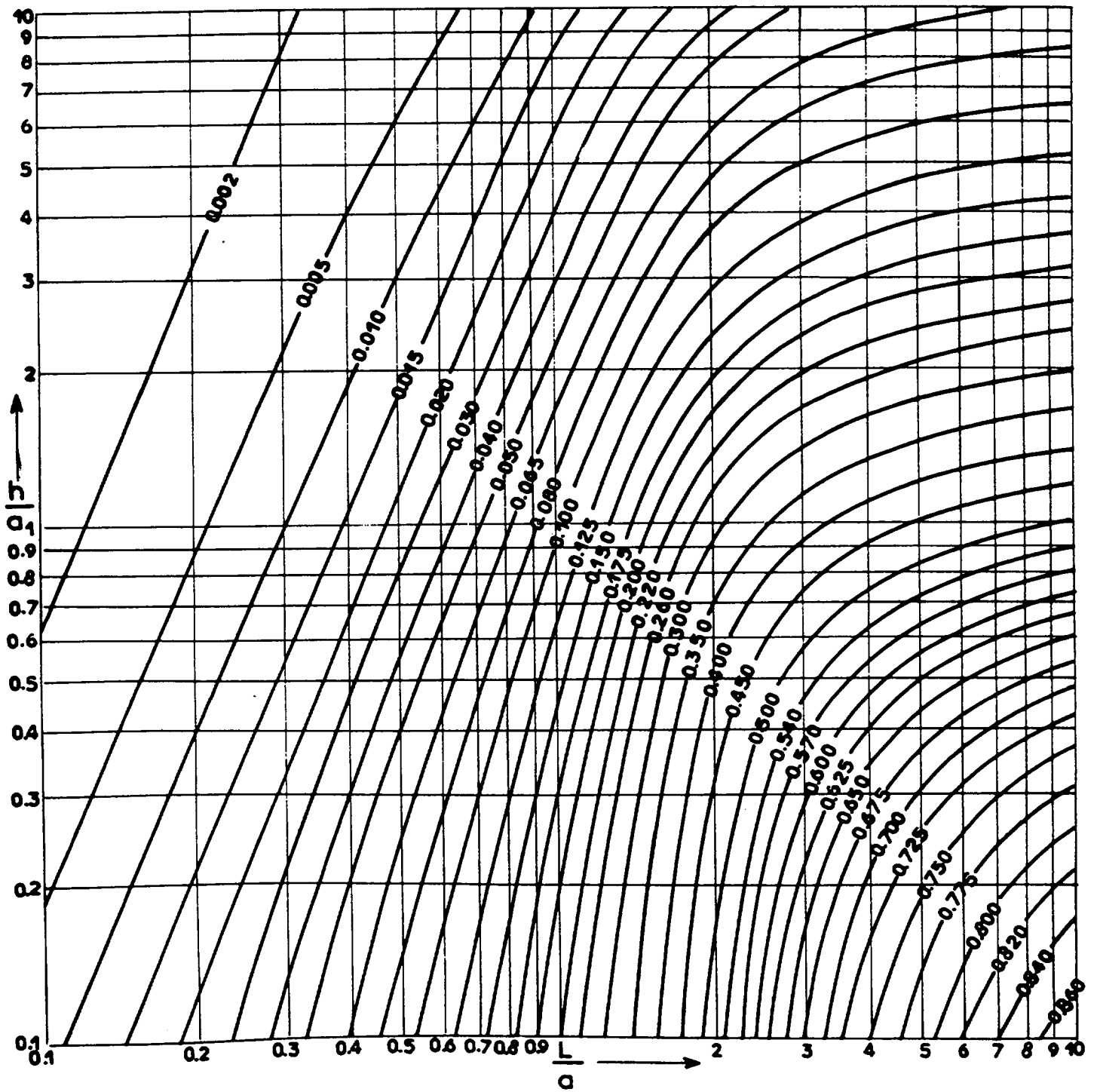
ABAQUE 8 schéma sphérique.

variance d'extension diverses.



ABAQUE : 9 SCHÉMA SPHÉRIQUE.

variance d'extension du tracé médian h
dans le rectangle $L \times h$



BIBLIOGRAPHIE

- [1] CARLIER, A. - Contribution aux méthodes d'estimation des Gisements d'Uranium. (Thèses) - Fontenay-aux-Roses, 1964.
- [2] FORMERY, Ph. - Cours de Géostatistique - Ecole des Mines de Nancy (non publié)
- [3] MATHERON, G. - Traité de Géostatistique Appliquée.- Tome 1 (1962), Tome 2 (1963) Editions Technip, Paris.
- [4] MATHERON, G. - Les Variables Régionalisées et leur estimation. (Thèse) - 1965, Masson et Cie, Paris.
- [5] MATHERON, G. - Osnovy Prikladnoi geostatistiki. 1968, Editions Mir, Moscou.
- [6] MATHERON, G. - Le Krigeage Universel - Les Cahiers du Centre de Morphologie Mathématique, Fascicule 1, 1969. - Fontainebleau.
- [7] SERRA, J. - Echantillonnage et Estimation locale des phénomènes miniers de transition - (Thèse) - Nancy, 1967.
- [8] FORMERY, Ph. et MATHERON, G.- Recherche d'Optima dans la Reconnaissance et la mise en exploitation des gisements miniers - Annales des Mines, Mai et Juin 1963.
- [9] BLONDEL, F.- Evolution de la notion de Réserves dans l'Industrie Minérale. - Freiberg, 1959.
- [10] LESOURNE, J. - Technique Economique de Gestion Industrielle. - Dunod, Paris.