

LES CAHIERS DU CENTRE DE MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

DE FONTAINEBLEAU

Fascicule 4

THÉORIE DES ENSEMBLES ALÉATOIRES

par

G. MATHERON

1969

—

Édité par l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris

THEORIE DES ENSEMBLES ALEATOIRES

Table des Matières

<u>INTRODUCTION</u>	3
<u>CHAPITRE 1 - ENSEMBLES ALEATOIRES</u>	4
1-1 Hypothèses et Notations	4
<u>A - TOPOLOGIES</u>	5
1-2 L'Espace compact $\mathcal{F}(E)$	5
<u>Théorème 1-2-1</u> (Critère de Convergence)	7
1-3 L'Espace compact $\mathcal{Q}(E)$	10
1-4 L'Espace compact $\mathcal{H} = \mathcal{P}(E)/\mathcal{R}$	10
1-5 L'Espace $\text{LCD}\mathcal{K}(E)$ et la topologie myope	11
1-6 Les fonctionnelles $\bar{X}$ et $\overset{\circ}{X}$	12
1-7 Cas où E est un espace métrique	15
1-8 Cas où E est l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$	16
<u>Théorème 1-8-1</u> (Caractérisation des ensembles indéfiniment divisibles - Granulométrie d'un compact selon les homothétiques d'un convexe.	20
<u>B - σ-ALGÈBRES ET PROBABILITES</u>	22
1-9 Lois spatiales et σ -algèbres maigres	22
1-10 Ensembles fermés aléatoires	23
1-11 Séparabilité, continuités p.s. et mesurabilité	25
1-12 Ensembles ouverts aléatoires	28
1-13 Ensembles aléatoires sur $(\mathcal{H}, \sigma(s))$	29
1-14 Erosions, dilatations et Granulométries	30
1-15 Schémas aléatoires de germes	33
<u>CHAPITRE 2 - PARTITIONS ALEATOIRES</u>	35
2-1 L'Espace compact $\Pi_g(E)$	35
2-2 σ -algèbres et probabilités sur Π et Π_g	38
<u>CHAPITRE 3 - FONCTIONS ALEATOIRES</u>	40
3-1 Notations	40
3-2 Les fonctionnelles $\overset{\circ}{X}$ et $\bar{X}$	40

3-3	Les espaces compacts Φ_f , Φ_g et Φ_h	42
	<u>Théorème 3-3-1</u> (Critère de convergence)	44
3-4	Fonctions aléatoires	45
 <u>CHAPITRE 4 - MESURES ET CAPACITES</u>		47
4-1	L'Espace compact $\Phi_c(E)$	47
4-2	L'Espace compact $\chi(E)$	49
4-3	L'Espace compact $\mathcal{M}(E)$	51
 <u>BIBLIOGRAPHIE</u>		53

INTRODUCTION

Ce travail se propose de donner un fondement aussi rigoureux que possible aux méthodes de la morphologie mathématique. En particulier, la théorie des ensembles et des partitions aléatoires (Chapitres 1 et 2) est issue directement d'une réflexion sur les techniques expérimentales de l'analyse des textures ([2], [4], [7]). Dans le cas le plus simple où l'on étudie un milieu à deux composantes (par exemple un milieu poreux), c'est-à-dire un ensemble A (la réunion des grains) et son complémentaire A^c (la réunion des pores), ces techniques consistent à déplacer dans le milieu une "figure informante" B et à noter la fréquence de la réalisation d'événements du type " $B \subset A$ " (B est contenu dans les grains) où " $B \cap A \neq \emptyset$ " (B rencontre les grains). Ces techniques impliquent donc que l'on considère A comme (une réalisation d') un ensemble aléatoire, dont la probabilité doit être définie sur la σ -algèbre engendrée par les événements ci-dessus. Pour éviter un excès de généralité, qui nous éloignerait des réalités expérimentales, on doit se limiter aux cas où l'ensemble structurant B est un compact ou un ouvert relativement compact. Il en résulte en particulier (ce qui est bien conforme aux conditions expérimentales) qu'on ne peut pas distinguer l'un de l'autre deux ensembles dès qu'ils ont même intérieur et même adhérence. Tel est le fil conducteur qui nous a servi de guide dans le choix de nos σ -algèbres et de nos topologies sur les familles d'ensembles.

D'autre part, il doit être possible d'associer à toute structure mathématique son équivalent sur le mode aléatoire. Toute structure, en effet, se définit par son graphe C qui est un sous-ensemble convenable (vérifiant les axiomes constitutifs) d'un certain espace E . Si donc on parvient à définir une σ -algèbre et une probabilité pour lesquelles ce graphe C devienne un ensemble aléatoire, on aura, par le fait même, défini la structure aléatoire correspondante. Il se trouve que les σ -algèbres et les topologies que nous avons choisies pour les ensembles permettent de réaliser ce programme dans les cas simples suivants : partitions aléatoires (chapitre 2), fonctions aléatoires (chapitre 3), mesures et capacités (chapitre 4). De même que deux ensembles ayant même intérieur et même adhérence ne peuvent pas être distingués l'un de l'autre et constituent une entité unique, cette formulation nous conduira à identifier deux fonctions ayant mêmes limites inférieure et supérieure en tout point, deux partitions dont les classes ont des ouvertures identiques, deux fonctions d'ensembles, enfin, prenant la même valeur sur tout ensemble ouvert. Ce point de vue nous conduira à travailler non pas sur $\mathcal{P}(E)$ lui-même, mais sur l'espace quotient $\mathcal{P}(E)/\mathcal{R}$, où $\mathcal{R}$ est la relation : $A \mathcal{R} A'$ si $\overset{\circ}{A} = \overset{\circ}{A'}$ et $\bar{A} = \bar{A'}$. Il se trouve qu'il est alors possible de munir $\mathcal{P}(E)/\mathcal{R}$ d'une topologie pour laquelle cet espace est compact, et aussi de construire effectivement des probabilités sur la σ -algèbre associée à cette topologie.

CHAPITRE 1 - ENSEMBLES ALEATOIRES

1-1 HYPOTHESES ET NOTATIONS

Dans tout ce qui suit, nous désignerons par :

E - Un espace localement compact de type dénombrable (LCD) sur lequel nous ferons l'hypothèse supplémentaire suivante : "Il existe une partie $D \subset E$ dense dans E ainsi que son complémentaire D^c ($\bar{D} = \bar{D}^c = E$)". Comme E est LCD, on peut toujours supposer D dénombrable. (Cette hypothèse est automatiquement vérifiée si les ouverts de E ont une puissance supérieure ou dénombrable).

$\mathfrak{B}$ - Une base de la topologie de E possédant les deux propriétés suivantes :

- tout $B \in \mathfrak{B}$ est un ouvert relativement compact
- tout ouvert $G \subset E$ est réunion dénombrable de compacts $\bar{B}_n$ avec $B_n \in \mathfrak{B}$ pour tout n .

On vérifie sans peine que tout espace LCD admet une base possédant ces deux propriétés.

$\mathcal{P}(E)$ - L'ensemble des parties de E .

$\mathcal{F}(E)$ - ou simplement $\mathcal{F}$ s'il n'y a pas ambiguïté, l'ensemble des parties fermées de E .

$\mathcal{Q}(E)$ - ou simplement $\mathcal{Q}$, l'ensemble des parties ouvertes de E .

$\mathcal{X}(E)$ - ou simplement $\mathcal{X}$, l'espace quotient $\mathcal{P}(E)/\mathcal{R}$, où $\mathcal{R}$ est la relation :

$A \mathcal{R} A' \Leftrightarrow \bar{A} = \bar{A}'$ et $\bar{A} = \bar{A}'$ - $\mathcal{X}$ sera identifié au sous-espace $\{G \subset F\}$ de $\mathcal{Q} \times \mathcal{F}$.

$\mathcal{K}(E)$ - ou simplement $\mathcal{K}$, l'ensemble des parties compactes de E .

V^K - L'ensemble $\{F, F \in \mathcal{F}, F \cap K = \emptyset\}$ ($K \in \mathcal{P}(E)$)

V_G - L'ensemble $\{F, F \in \mathcal{F}, F \cap G \neq \emptyset\}$ ($G \in \mathcal{P}(E)$)

$V_{G_1, \dots, G_n}^K$ - L'ensemble $V^K \cap V_{G_1} \cap \dots \cap V_{G_n}$

$\mathcal{V}$ - La famille $\{V_{G_1, \dots, G_n}^K, n \text{ entier}, K \in \mathcal{K}, G_1, \dots, G_n \in \mathcal{Q}\}$

$\mathcal{G}(\mathcal{V})$ - La topologie sur $\mathcal{F}$ engendrée par $\mathcal{V}$

$\sigma(\mathcal{V})$ - La σ -algèbre sur $\mathcal{F}$ engendrée par $\mathcal{V}$

W_K - L'ensemble $\{G, G \in \mathcal{Q}, G \supset K\}$ ($K \in \mathcal{P}(E)$)

W_B - L'ensemble $\{G, G \in \mathcal{Q}, G \not\supset B\}$ ($B \in \mathcal{P}(E)$)

$W_{K, B_1, \dots, B_n}^{B_1, \dots, B_n}$ - L'ensemble $W_K \cap W_{B_1} \cap \dots \cap W_{B_n}$

$\mathcal{W}$ - La famille $\{ \bigcap_{K=1}^n B_K, n \text{ entier}, K \in \mathcal{K}, B_1, \dots, B_n \in \mathcal{Q} \}$

$\mathcal{E}(\mathcal{W})$ - La topologie sur $\mathcal{Q}$ engendrée par $\mathcal{W}$

$\sigma(\mathcal{W})$ - La σ -algèbre sur $\mathcal{Q}$ engendrée par $\mathcal{W}$

A - TOPOLOGIES

1-2 - L'espace compact $\mathcal{H}(E)$

K étant compact et G ouvert dans E , considérons les sous-ensembles $V^K = \{F, F \cap K = \emptyset\}$ et $V_G = \{F, F \cap G \neq \emptyset\}$ de $\mathcal{H}(E)$. La famille $V^K, K \in \mathcal{K}$ est stable pour l'intersection finie ($V^K \cap V^{K'} = V^{K \cup K'}$); la famille $V_G, G \in \mathcal{Q}$ est stable pour la réunion, finie ou non

$$\left(\bigcup_{i \in I} V_{G_i} = V_{\bigcup_I G_i} \right)$$

On note $V^\emptyset = \mathcal{H}$ et $V_\emptyset = \emptyset$ (partie vide de $\mathcal{H}$). La famille $\mathcal{V}$ des $V_{G_1, \dots, G_n}^K$ ($K \in \mathcal{K}, G_1, \dots, G_n \in \mathcal{Q}$) est stable pour l'intersection finie, et constitue donc une base de la topologie $\mathcal{E}(\mathcal{V})$ qu'elle engendre sur $\mathcal{H}$. Sauf mention expresse du contraire, $\mathcal{H}(E)$ sera toujours muni de cette topologie.

Dans $\mathcal{V}$, les voisinages de $\emptyset \in \mathcal{H}$ sont les $V^K, K \in \mathcal{K}$; ceux de $E \in \mathcal{H}$ sont les $V_{G_1, \dots, G_n}$. Les filtres des voisinages de ces deux éléments de $\mathcal{H}$ sont donc particulièrement pauvres.

L'espace E' étant LCD, $\mathcal{H}(E)$ est compact et de type dénombrable, de sorte que ces propriétés se conserveront par itération : $\mathcal{H}(\mathcal{H}), \mathcal{H}(\mathcal{H}(\mathcal{H})) \dots$ seront encore compacts et dénombrables (Nous utiliserons cette propriété au chapitre 4 pour munir d'une topologie compacte certains espaces de fonctions d'ensembles, mesures ou capacités). Cela résulte des trois propositions suivantes :

Proposition 1-2-1 / La topologie $\mathcal{E}(\mathcal{V})$ de $\mathcal{H}(E)$ admet une base dénombrable.

En effet, soit $\mathcal{B}$ la base de la topologie $\mathcal{Q}$ de E introduite en 1-1, et $\mathcal{V}_{\mathcal{B}}$ la famille des parties de $\mathcal{H}$ de la forme $V_{B_1, \dots, B_n}^K$ avec $K = \overline{B'_1} \cup \dots \cup \overline{B'_k}$ et $B_1, \dots, B_n, B'_1, \dots, B'_k \in \mathcal{B}$. $\mathcal{V}_{\mathcal{B}}$ est dénombrable. Montrons qu'elle constitue une base de $\mathcal{E}(\mathcal{V})$.

Soit $F \in \mathcal{H}$ et $V_{G_1, \dots, G_n}^K \in \mathcal{V}$ un voisinage de F (éventuellement de la forme V^K , ou $V_{G_1, \dots, G_n}$). Pour chaque i ($i = 1, 2, \dots, n$) prenons $x_i \in F \cap G_i$, et soit $B_i \in \mathcal{B}$ avec :

$$x_i \in B_i \subset \overline{B_i} \subset G_i \cap K^c$$

Soit ensuite $B'_j \in \mathcal{B}$ ($j = 1, 2, \dots, p$) un recouvrement fini du compact K avec pour tout j :
 $\bar{B}'_j \cap \bar{B}'_i = \emptyset$ ($i = 1, 2, \dots, n$) et $\bar{B}'_j \cap F = \emptyset$. On a bien :

$$F \in \bigvee_{B_1, \dots, B_n} \bar{B}'_1, \dots, \bar{B}'_p \subset \bigvee_{G_1, \dots, G_n} K$$

Proposition 1-2-2 / L'espace $\mathcal{H}$ est séparé pour la topologie $\mathcal{C}(\mathcal{U})$.

En effet, soient F et F' deux fermés de E et $F \neq F'$. Il existe donc (par exemple) un $x \in F$ avec $x \notin F'$. Soit $\bar{B}_x$ un voisinage compact de x disjoint du fermé F' et B_x un ouvert tel que $x \in B_x \subset \bar{B}_x$. On a $F \in \bigvee_{B_x}$, $F' \in \bigvee_{B_x^c}$ et $\bigvee_{B_x} \cap \bigvee_{B_x^c} = \emptyset$: $\mathcal{H}$ est donc séparé.

Proposition 1-2-3 / $\mathcal{H}(E)$ est compact pour la topologie $\mathcal{C}(\mathcal{U})$

Les fermés de $\mathcal{C}(\mathcal{U})$ sont engendrés par la classe $\mathcal{C}$ des parties de $\mathcal{H}$ de la forme V_K , $K \in \mathcal{K}$, ou V^G , $G \in \mathcal{G}$. Montrons que la classe $\mathcal{C}$ possède la propriété de l'intersection finie, ce qui suffira, comme on sait, pour établir la compacité de l'espace séparé $\mathcal{H}$.

Soient donc une famille de compacts K_i , $i \in I$, et une famille d'ouverts G_j , $j \in J$ avec :

$$\left(\bigcap_{i \in I} V_{K_i} \right) \cap \left(\bigcap_{j \in J} V^{G_j} \right) = \emptyset$$

Posant $\Omega = \bigcup_{j \in J} G_j$, on a $\bigcap_{j \in J} V^{G_j} = V^\Omega$ et par suite $\bigcap_{i \in I} V_{K_i}^\Omega = \emptyset$. Or, cette intersection n'est vide que s'il existe un indice $i_0 \in I$ avec $K_{i_0} \subset \Omega$. En effet, dans le cas contraire, l'ensemble fermé :

$$\Omega^c \cap \left(\overline{\bigcup_{i \in I} K_i} \right) \in \mathcal{H}$$

(éventuellement vide si $I = \emptyset$) serait disjoint de Ω et rencontrerait tous les K_i , donc appartiendrait à $\bigcap_{i \in I} V_{K_i}^\Omega$.

Soit donc $i_0 \in I$ avec $K_{i_0} \subset \Omega = \bigcup_{j \in J} G_j$. La compact K_{i_0} est recouvert par un nombre fini de G_j , soient $G_{j_1}, G_{j_2}, \dots, G_{j_n}$, et l'intersection finie $V_{K_{i_0}} \cap V^{G_{j_1}} \cap \dots \cap V^{G_{j_n}}$ est vide.

Remarque : C'est pour assurer cette compacité qu'il faut considérer l'ensemble vide $\emptyset$ comme un élément de $\mathcal{H}$. Si, en effet, des $G_j \neq E$ recouvrent E , on a $\bigcap_{j \in J} V^{G_j} = V^E = \{\emptyset\}$. Mais, en général, on ne peut pas extraire une famille finie d'intersection vide (à moins que E ne soit lui-même compact). Ainsi, $\mathcal{H} - \{\emptyset\}$ n'est compact que si E est compact.

Indiquons encore, sans reproduire la démonstration, la propriété suivante (que nous n'utiliserons pas).

Proposition 1-2-4 / Si l'espace LDE est connexe et non compact, $\mathcal{H}(E)$ est connexe. Si E est compact et connexe, $\mathcal{H} - \{\emptyset\}$ est compact et connexe.

Etudions maintenant la convergence dans $\mathcal{H}(E)$, en nous limitant aux suites puisque $\mathcal{H}$ est de type dénombrable. La proposition suivante résulte des définitions mêmes :

Proposition 1-2-5 / Une suite F_n d'éléments de $\mathcal{H}$ converge vers $F \in \mathcal{H}$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

$$1 - F \cap G \neq \emptyset \Rightarrow \exists N \forall n \geq N \quad F_n \cap G \neq \emptyset \quad (G \in \mathcal{G})$$

$$2 - F \cap K = \emptyset \Rightarrow \exists N \forall n \geq N \quad F_n \cap K = \emptyset \quad (K \in \mathcal{K})$$

Passons au critère principal :

THEOREME 1-2-1

Pour qu'une suite F_n converge dans $\mathcal{H}$ vers $F \in \mathcal{H}$, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

1' - Tout $x \in F$ est limite dans E d'une suite de points $x_n \in F_n$ (n prenant toutes les valeurs entières, sauf au plus un nombre fini).

2' - Toute suite constituée d'éléments $x_{n_k} \in F_{n_k}$, où F_{n_k} est une suite partielle de F_n , a ses valeurs d'adhérence dans F .

De plus, la condition 1' est équivalente à la condition 1 de la proposition 1-2-5, et la condition 2' est équivalente à la condition 2 de cette même proposition.

Il suffit évidemment de démontrer la dernière partie de l'énoncé.

Montrons $1 \Rightarrow 1'$. Si F est vide, 1' est trivialement vérifiée. Supposons $F \neq \emptyset$, et soit $x \in F$. Soit $G_1 = E \supset G_2 \supset G_3 \dots$ un système fondamental de voisinages ouverts et décroissants de x . Tout G_k rencontre F , et, d'après 1, on peut trouver N_k avec $F_n \cap G_k \neq \emptyset$ pour $n \geq N_k$. Construisons une suite x_n dans E en prenant :

$$x_{N_1} \in F_1 \quad \dots \dots \dots x_{N_{2-1}} \in F_{n_{2-1}}$$

$$x_{N_k} \in F_{N_k} \cap G_k \dots x_{N_{k+1}} \in F_{N_{k+1}} \cap G_k$$

Cette suite converge vers x et vérifie la condition $x_n \in F_n$.

Montrons $1' \Rightarrow 1$. Si F est vide, 1 est vérifié. Soit donc x un point et G un ouvert avec $x \in F \cap G$. Par hypothèse, il existe $x_n \in F_n$, $x_n \rightarrow x$ dans E . Donc, G étant voisinage de x , il existe N avec $x_n \in F_n \cap G$ pour $n \geq N$.

Montrons $2 \Rightarrow 2'$. Si $F = E$, le résultat est acquis. Soit donc $x \notin F$ et K un voisinage compact de x , disjoint de F . D'après 2, il existe N avec $F_n \cap K = \emptyset$ pour $n \geq N$. Donc x n'est valeur d'adhérence pour aucune suite $x_{n_k} \in F_{n_k}$, ce qui prouve $2'$.

Montrons que la négation de 2 entraîne celle de $2'$. Autrement dit, supposons qu'il existe K compact dans E disjoint de F rencontrant une infinité de F_n , soient $F_{n_1}, \dots, F_{n_k}, \dots$. Pour tout k , prenons $x_{n_k} \in F_{n_k} \cap K$. Cette suite admet sur le compact K une valeur d'adhérence $x \in K$ qui n'appartient pas à F .

Corollaire 1 - L'application $(F, F') \rightarrow F \cup F'$ de $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}$ est continue.

En effet, soient F_n et F'_n deux suites convergeant vers F et F' respectivement. Montrons $F_n \cup F'_n \rightarrow F \cup F'$. Tout $x \in F \cup F'$ appartient à F (ou à F'), donc (critère $1'$) est limite d'une suite $x_n \in F_n \subset F_n \cup F'_n$ (ou $x_n \in F'_n$) et la suite $F_n \cup F'_n$ vérifie $1'$. Si x est valeur d'adhérence d'une suite $x_{n_k} \in F_{n_k} \cup F'_{n_k}$, il est valeur d'adhérence pour une suite partielle $x_{n_k} \in F_{n_k}$ (ou $\in F'_{n_k}$) extraite de x_{n_k} . On a donc (critère $2'$) $x \in F$ (ou $\in F'$), d'où $x \in F \cup F'$: la suite $F_n \cup F'_n$ vérifie $2'$.

On notera que l'intersection n'est pas une opération continue.

Corollaire 2 - Dans $\mathcal{A}$, toute suite F_n décroissante converge vers $\bigcap_n F_n$ et toute suite croissante F'_n converge vers $\bigcup_n F'_n$.

Soit $F_n \subset F_{n+1}$ une suite croissante. Si $\lim F_n = F$ existe, on a : $F' = \overline{\bigcup_n F_n}$. En effet, $F_n \subset F_{n+1}$ entraîne $F_n \subset F$ (critère $2'$), d'où $\overline{\bigcup_n F_n} \subset F$. Inversement, si $x \in F$, soit $x_n \in F_n$ et $x_n \rightarrow x$ (critère $1'$) : tout voisinage de x contient des x_n , donc rencontre $\bigcup_n F_n$, d'où $x \in \overline{\bigcup_n F_n}$ et $F \subset \overline{\bigcup_n F_n}$, et l'égalité. Il en résulte qu'une suite croissante F_n ne peut admettre d'autre valeur d'adhérence que $\overline{\bigcup_n F_n}$. Comme $\mathcal{A}$ est compact, on a donc $\lim F_n = \overline{\bigcup_n F_n}$.

Soit maintenant $F_n \supset F_{n+1}$ une suite décroissante. Si $F = \lim F_n$ existe, $F_n \supset F_{n+k}$ entraîne $F_n \supset F$, puis $\bigcap F_n \supset F$. Mais inversement $\bigcap F_n \subset F_k$ entraîne $\bigcap F_n \subset F$ et l'égalité. Ainsi une suite décroissante F_n n'a pas d'autre valeur d'adhérence que $\bigcap F_n$, donc converge vers $\bigcap F_n$.

Corollaire 3 Si F_n et F'_n sont deux suites décroissantes dans $\mathcal{F}$, $F = \bigcap F_n$ et $F' = \bigcap F'_n$ leurs intersections, la suite $F_n \cap F'_n$ converge vers $F \cap F'$.

Il suffit d'appliquer le corollaire 2 à la suite décroissante $F_n \cap F'_n$.

Définition de $\lim F_n$ et $\lim F_n$.

Soit F_n une suite quelconque dans l'espace compact $\mathcal{F}$. Désignons par $\lim F_n$ l'intersection des valeurs d'adhérence dans $\mathcal{F}$ de la suite F_n , et par $\lim F_n$ leur réunion. La suite F_n converge si et seulement si $\lim F_n = \lim F_n$, et cette valeur commune est alors $\lim F_n$. Du fait que l'on a séparément les équivalences $1 \Leftrightarrow 1'$ et $2 \Leftrightarrow 2'$, on peut établir les résultats suivants :

Proposition 1-2-6 /

a/ L'ensemble $\lim F_n$ est le plus grand des fermés $F \in \mathcal{F}$ vérifiant les propriétés équivalentes 1 et 1'. Autrement dit, $x \in \lim F_n$ si et seulement si x est limite dans E d'une suite $x_n \in F_n$ (pour n supérieur à un n_0 fixe) ; ou encore si et seulement si tout voisinage de x rencontre tous les F_n au-delà d'un certain rang.

b/ L'ensemble $\lim F_n$ appartient à $\mathcal{F}$, et c'est le plus petit (l'intersection) de tous les $F \in \mathcal{F}$ vérifiant les propriétés équivalentes 2 et 2'. Autrement dit, $x \in \lim F_n$ si et seulement si x est limite dans E d'une suite $x_{n_k} \in F_{n_k}$; ou encore, si et seulement si tout voisinage de x rencontre une infinité de F_n .

Montrons a/ - Soit F l'ensemble évidemment fermé défini par : $x \in F \Leftrightarrow$ tout voisinage de x rencontre tous les F_n sauf en plus un nombre fini. Si $x \in F$, x est limite d'une suite $x_n \in F_n$ (pour n supérieur à un entier fixe n_0), donc x appartient à toute valeur d'adhérence de la suite F_n , et $F \subset \lim F_n$. Si $x \notin F$, soit V un voisinage de x disjoint d'une infinité de F_n , soient $F_{n_1}, F_{n_2}, \dots$. La suite F_{n_k} admet une valeur d'adhérence A , et on a $x \notin A$, d'où $x \notin \lim F_n$, et $F \supset \lim F_n$.

Montrons b/ - Soit F l'ensemble évidemment fermé défini par : $x \in F$ si tout voisinage de x rencontre une infinité de F_n . Si $x \in F$, soit $x_{n_k} \in F_{n_k}$ une suite convergeant vers x , et A une valeur d'adhérence de la suite F_{n_k} . On a $x \in A$, d'où $F \subset \lim F_n$. Si $x \in \lim F_n$, soit F_{n_k} une suite partielle convergeant vers A avec $x \in A$: D'après le critère 1', x est limite d'une suite $x_{n_k} \in F_{n_k}$, d'où $x \in F$ et $\lim F_n \subset F$.

Corollaire - L'application $(F, F') \rightarrow F \cap F'$ de $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$ est semi-continue supérieurement (s.c.s). Autrement dit, $F_n \rightarrow F$ et $F'_n \rightarrow F'$ dans $\mathcal{F}$ entraîne $\varprojlim F_n \cap F'_n \subset F \cap F'$.

En effet, soit $x \in \varprojlim F_n \cap F'_n$, et x_{n_k} une suite convergeant vers x avec $x_{n_k} \in F_{n_k} \cap F'_{n_k}$. Le critère 2', appliqué aux suites F_n et F'_n , donne $x \in F$ et $x \in F'$, donc $x \in F \cap F'$. D'après la proposition, on a donc $\varprojlim F_n \cap F'_n \subset F \cap F'$.

1-3 - L'espace compact $Q(E)$

L'application $F \rightarrow F^c$ est un homéomorphisme de $\mathcal{F}$ sur Q si l'on munit Q de la topologie $\mathcal{C}(W)$ engendrée par les $W_K = \{G, G \in Q, G \supset K\}$, $K \in \mathcal{M}$ et les $W^B = \{G, G \in Q, G \not\supset B\}$, $B \in Q$. Cela résulte de $G \in W_K \Leftrightarrow G^c \in V^K$ et $G \in W^B \Leftrightarrow G^c \in V_B$. Les résultats de la section 1-2 se transposent alors d'eux-mêmes. Énonçons seulement le critère de convergence :

THEOREME 1-3-1

Pour qu'une suite G_n converge vers G dans Q , il faut et il suffit qu'elle vérifie les deux conditions suivantes :

1' - Tout $x \notin G$ est limite dans E d'une suite $x_n \notin G_n$ (n prenant toutes les valeurs entières sauf au plus un nombre fini).

2' - Toute suite $x_{n_k} \notin G_{n_k}$ d'éléments extraits d'une suite partielle $G_{n_k}^c$ a ses valeurs d'adhérence dans le complémentaire G^c de G .

Corollaire - L'application $(G, G') \rightarrow G \cap G'$ de $Q \times Q$ dans Q est continue.

(Par contre, la réunion n'est pas une opération continue).

1-4 - L'espace compact $\mathcal{H} = \mathcal{P}(E)/\mathcal{R}$

L'application $A \rightarrow (\overset{\circ}{A}, \bar{A})$ applique $\mathcal{P}(E)$ sur le sous-espace $\mathcal{H}$ de $Q \times \mathcal{F}$ constitué des couples (G, F) vérifiant $G \subset F$. Cela résulte de l'hypothèse supplémentaire introduite en 1-1 (il existe une partie $D \subset E$ avec $\bar{D} = \bar{D}^c = E$). En effet, si $G \in Q$ et $F \in \mathcal{F}$ vérifient $G \subset F$, l'ensemble :

$$A = G \cup ((\bar{G})^c \cap \overset{\circ}{F} \cap D) \cup (F \cap F)$$

admet comme ouverture $\overset{\circ}{A} = G$ et comme adhérence $\bar{A} = F$. La relation $\mathcal{R}(A \mathcal{R} A')$ si $\overset{\circ}{A} = \overset{\circ}{A}'$ et $\bar{A} = \bar{A}'$ associée canoniquement à cette application de $\mathcal{P}(E)$ sur $\mathcal{H}$ permet d'identifier à $\mathcal{H}$ l'espace quotient $\mathcal{P}(E)/\mathcal{R}$: la classe selon $\mathcal{R}$ de $A \in \mathcal{P}(E)$ est ainsi identifiée au couple $(\overset{\circ}{A}, \bar{A}) \in \mathcal{H}$.

Nous munirons $\mathcal{H}$ de la topologie induite par la topologie $\mathcal{E}(\mathcal{U}) \otimes \mathcal{E}(\mathcal{W})$ de l'espace produit $\mathcal{Q} \times \mathcal{F}$.

Proposition 1-4-1 / $\mathcal{H}(E)$ est compact et de type dénombrable.

$\mathcal{Q} \times \mathcal{F}$ étant déjà compact et de type dénombrable, il suffit de montrer que $\mathcal{H}$ est fermé dans $\mathcal{Q} \times \mathcal{F}$. Il suffit même de montrer que si deux suites G_n et F_n convergent vers G et F dans $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{F}$ respectivement en vérifiant $G_n \subset F_n$, on a $G \subset F$. Si G est vide, le résultat est acquis. Soit $x \in G$. Comme $W_{\{x\}}$ est un voisinage de G dans $\mathcal{Q}$, on a $x \in G_n \subset F_n$ pour n assez grand. Mais $V_{\{x\}}$ est fermé dans $\mathcal{F}$, et $x \in F_n$ entraîne $x \in F$, d'où $G \subset F$.

Il n'y a aucune difficulté à énoncer les critères de convergence dans $\mathcal{H}$, en combinant les Théorèmes 1-2-1 et 1-3-1.

1-5 - L'espace LCD $\mathcal{H}(E)$ et la topologie myope.

Nous allons munir l'espace $\mathcal{H}(E)$ des parties compactes de E de la topologie engendrée par les :

$$V_{K_0}^c = \{K, K \in \mathcal{H}, K \not\subset K_0\}, K_0 \in \mathcal{H}$$

$$V^{B^c} = \{K, K \in \mathcal{H}, K \subset B\}, B \text{ ouvert relativement compact -}$$

que nous appellerons la topologie myope. Si K' est un compact, $V^{K'^c}$ (ensemble des compacts contenus dans K') est un sous-espace fermé de $\mathcal{H}(E)$ (pour la topologie myope), et, aussi bien, de $\mathcal{F}(E)$ (pour la topologie $\mathcal{E}(\mathcal{U})$), comme on le vérifie sans peine, et, de plus, ces deux topologies coïncident sur $V^{K'^c}$. On en déduit facilement que la topologie myope admet une base dénombrable. De plus, si K est un compact, soit B un ouvert relativement compact avec $K \subset B \subset \bar{B}$. On a donc $K \in V^{B^c} \subset V^{(\bar{B})^c}$, et $V^{(\bar{B})^c}$ est un voisinage compact de K . Ainsi la topologie myope fait de $\mathcal{H}(E)$ un espace LCD.

Si E est compact, $\mathcal{H}(E)$ est identique à l'espace compact $\mathcal{F}(E)$. Par contre, si E n'est pas compact, $\mathcal{H}(E)$ n'est pas compact non plus. Pour le montrer, énonçons d'abord le critère de convergence dans $\mathcal{H}(E)$:

Proposition 1-5-1 / Une suite K_n converge dans $\mathcal{H}(E)$ pour la topologie myope si et seulement si elle vérifie les conditions suivantes :

- 1 - Les K_n sont contenus dans un même compact K_0 .
- 2 - La suite K_n est convergente pour la topologie de $\mathcal{F}(E)$.

La condition 1 est nécessaire, car, si $K_n \rightarrow K$ et si B est un ouvert relativement compact contenant K , on a $K_n \in V^{B^c}$ pour n assez grand, donc $K_n \subset B \subset \bar{B} = K_0$. Mais sur $V^{K_0^c}$ la topologie myope coïncide avec la topologie de $\mathcal{F}(E)$, ce qui établit le critère.

Corollaire 1 - Une suite K_n de compacts non vides ne peut pas converger vers $\{\emptyset\}$ pour la topologie myope - ($\mathcal{K} - \{\emptyset\}$ est fermé dans $\mathcal{K}$)

En effet, si la suite K_n converge, on a $K_n \subset K_0$ pour un compact K_0 non vide. Mais, sur $V^{K_0^c} = \mathcal{F}(K_0)$ la topologie myope coïncide avec celle de $\mathcal{F}(K_0)$. Or, d'après la remarque qui suit la proposition 1-2-3, $\mathcal{F}(K_0) - \{\emptyset\}$ est compact. Par suite $\lim K_n \neq \emptyset$.

Corollaire 2 - On peut compactifier $\mathcal{SB}(E)$ en lui adjoignant l'élément $\omega = E$ muni du système fondamental de voisinages $V_{K_0}^c = \{K, K \in \mathcal{K}, K \not\subset K_0\}$, $K_0 \in \mathcal{K}$.

En effet, si une suite K_n n'a pas de valeur d'adhérence dans $\mathcal{SB}(E)$, d'après le critère 1, on a $K_n \in V_{K_0}^c$ pour n assez grand, et K_n converge vers $\omega = E$ dans le compactifié de $\mathcal{K}$.

En particulier, si une suite $K_n \in \mathcal{K}$ converge dans $\mathcal{F}$ vers un fermé non compact F , elle converge vers $\omega = E$ dans le compactifié de $\mathcal{K}$: la topologie myope n'est pas capable de distinguer les uns des autres les fermés non compacts (d'où la terminologie).

1-6 - Les fonctionnelles $\bar{X}$ et $\overset{\circ}{X}$.

Si A est un ensemble quelconque dans E , et $k(x)$ son indicatrice, posons pour tout $G \in \mathcal{Q}$:

$$\bar{X}_A(G) = \sup_{x \in G} k(x) \quad , \quad \overset{\circ}{X}_A(G) = \inf_{x \in G} k(x)$$

On vérifie sans peine $\bar{X}_A = \bar{X}_{\bar{A}}$ et $\overset{\circ}{X}_A = \overset{\circ}{X}_{\overset{\circ}{A}}$, de sorte que ces fonctionnelles dépendent respectivement de $\bar{A}$ et de $\overset{\circ}{A}$, et non de A . Plus précisément:

Proposition 1-6-1 / Une application $\bar{X}$ (resp. $\overset{\circ}{X}$) de $\mathcal{Q}$ sur $\{0,1\}$ est la fonctionnelle $\bar{X}_A$ (resp. $\overset{\circ}{X}_A$) associée à un ensemble $A \in \mathcal{F}$ (resp. $\in \mathcal{Q}$) si et seulement si on a pour toute famille d'ouverts G_i $i \in I$:

$$1 - \bar{X} \left(\bigcup_I G_i \right) = \sup_I \bar{X}(G_i)$$

$$\text{(resp. } 1 - \overset{\circ}{X} \left(\bigcup_I G_i \right) = \inf_I \overset{\circ}{X}(G_i) \text{)}$$

L'élément nécessairement unique $A \in \mathcal{F}$ (resp. $\in \mathcal{Q}$) tel que $\bar{X} = \bar{X}_A$ (resp. $\overset{\circ}{X} = \overset{\circ}{X}_A$) admet alors l'indicatrice:

$$2 - k(x) = \inf_{G \in \mathcal{B}_x} \bar{X}(G)$$

$$(\text{resp. } 2' - k(x) = \sup_{G \in \mathcal{B}_x} \check{X}(G))$$

($\mathcal{B}_x$ désignant le filtre des voisinages ouverts de $x \in E$). Enfin, un couple $(\check{X}, \bar{X})$ de deux fonctionnelles sur $\mathcal{Q}$ prenant les valeurs 0 ou 1 est de la forme $(\check{X}_A, \bar{X}_A)$ pour un élément nécessairement unique, $(A, \bar{A}) \in \mathcal{H}$, si et seulement si $\bar{X}$ vérifie 1, $\check{X}$ vérifie 2 et $\check{X} \leq \bar{X}$.

Raisonnons dans le cas de $\bar{X}$. La condition 1 est évidemment nécessaire, et, si $\bar{X}_A$ est la fonctionnelle associée à $A \in \mathcal{H}$, on a bien $k(x) = \inf_{G \in \mathcal{B}_x} \bar{X}_A(G)$, puisque A est fermé.

Inversement, soit $\bar{X}$ une fonctionnelle vérifiant la condition 1. Définissons $k(x)$ par la relation 2. Si $k(x) = 0$, il existe $G \in \mathcal{B}_x$ avec $\bar{X}(G) = 0$. Mais $G \in \mathcal{B}_y$ pour tout $y \in G$, et par suite $k(y) = 0$ sur G : l'ensemble A dont l'indicatrice est $k(x)$ est fermé dans E .

Vérifions $\bar{X} = \bar{X}_A$. Si $\bar{X}_A(G) = 1$, on a $k(x) = 1$ pour un $x \in G$ et par suite, d'après 2, $\bar{X}(G') = 1$ pour tout $G' \in \mathcal{B}_x$, donc, en particulier, $\bar{X}(G) = 1$. Si, au contraire, $\bar{X}_A(G) = 0$, $k(x)$ est nul pour tout $x \in G$: pour tout $x \in G$, on peut alors trouver $B_x \in \mathcal{B}_x$ avec $\bar{X}(B_x) = 0$. Mais la condition 1 entraîne que la fonctionnelle $\bar{X}$ est croissante sur $\mathcal{Q}$, et $G \subset \bigcup_{x \in G} B_x$ montre alors :

$$\bar{X}(G) \leq \bar{X}\left(\bigcup_{x \in G} B_x\right) = \sup_{x \in G} \bar{X}(B_x) = 0$$

On a donc bien $\bar{X}(G) = \bar{X}_A(G)$.

Enfin, si $A \neq A'$, on peut trouver $G \in \mathcal{Q}$ avec (par exemple) $G \cap A \neq \emptyset$, $G \cap A' = \emptyset$. Donc $\bar{X}_A \neq \bar{X}_{A'}$, d'où résulte l'unicité de A .

Proposition 1-6-2 / La fonctionnelle $\bar{X}_A(G)$ ($\check{X}_A(G)$) est semi-continue inférieurement (resp. supérieurement) sur $\mathcal{Q}(E)$.

En effet, soit $G_0 \in \mathcal{Q}$. Si $\bar{X}_A(G_0) = 0$, on a $\bar{X}_A(G) \geq \bar{X}_A(G_0)$ pour tout $G \in \mathcal{Q}$. Si $\bar{X}_A(G_0) = 1$, soit $x \in A \cap G_0$. Pour tout $G \in \mathcal{W}_{\{x\}}$, on a $\bar{X}_A(G) = 1$, c'est-à-dire $\bar{X}_A(G) \geq \bar{X}_A(G_0)$. Donc $\bar{X}_A$ est s.c.i.

Corollaire - Pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, l'ensemble $V^A = \{G, G \in \mathcal{Q}, G \cap A = \emptyset\}$ est fermé dans $\mathcal{Q}$.

En effet, si $G_n \in V^A$ on a $\bar{X}_A(G_n) = 0$. Si $G_n \rightarrow G$ dans $\mathcal{Q}$, la semi-continuité inférieure donne $\bar{X}_A(G) \leq \liminf \bar{X}_A(G_n) = 0$; c'est-à-dire $A \cap G = \emptyset$.

Nous allons maintenant prolonger les fonctionnelles $\bar{X}_A$ et $\overset{\circ}{X}_A$ sur $\mathcal{K}(E)$, en posant :

$$\bar{X}_A(K) = \inf\{\bar{X}_A(G), G \in \mathcal{G}, G \supset K\} \quad (K \in \mathcal{K})$$

$$X_A^{\circ}(K) = \sup\{\bar{X}_A(G), G \in \mathcal{G}, G \supset K\} \quad (K \in \mathcal{K})$$

Proposition 1-6-3 / Si $A \in \mathcal{F}$ (resp. $\in \mathcal{G}$) et si $k(x)$ est l'indicatrice de A , on a pour tout $K \in \mathcal{K}(E)$: $\bar{X}_A(K) = \sup_{x \in K} k(x)$ (resp. $\overset{\circ}{X}_A(K) = \inf_{x \in K} k(x)$).

En effet, si $\sup_{x \in K} k(x) = 1$, A rencontre K , donc aussi tout ouvert contenant K , et $\bar{X}_A(K) = 1$. Si $\sup_{x \in K} k(x) = 0$, on peut trouver un ouvert $G \supset K$ disjoint du fermé A , et $\bar{X}_A(K) = 0$.

Proposition 1-6-4 : $\bar{X}_A(K)$ (resp. $\overset{\circ}{X}_A(K)$) est une fonction s.c.s. (resp. s.c.i.) sur (E) muni de la topologie myope.

En effet, soit K_n une suite convergeant vers K_0 dans $\mathcal{K}(E)$. On a $K_n \subset \bar{B}$ pour un compact $\bar{B}$ et n assez grand (prop. 1-5-1). Si $\lim \bar{X}_A(K_n) = 1$, d'après la proposition 1-6-3, une infinité de K_n , soient $K_{n_1}, K_{n_2}, \dots$ rencontrent $\bar{A}$. Soit $x_{n_k} \in \bar{A} \cap K_{n_k}$. Cette suite, contenue dans le compact $\bar{B}$, admet une valeur d'adhérence $x_0 \in \bar{A}$. On a alors $x_0 \in K_0$, d'après la proposition 1-5-1 et le critère 2' du théorème 1-2-1. Comme $x_0 \in \bar{A} \cap K_0$, $\bar{X}_A(K_0) = 1 \geq \lim \bar{X}_A(K_n)$. Donc $\bar{X}_A$ est s.c.s. sur $\mathcal{K}(E)$.

Proposition 1-6-5 / La fonctionnelle $\bar{X}_A(K)$ associée à $A \in \mathcal{F}$ est continue pour la topologie myope en $K_0 \in \mathcal{K}$ si et seulement si on a $A \cap K_0 = \emptyset$ ou $\bar{A} \cap K_0 \neq \emptyset$.

D'après la proposition 1-6-4, il suffit de trouver à quelles conditions $\bar{X}_A(K)$ est s.c.i. en K_0 . Pour $\bar{X}_A(K_0) = 0$, $\bar{X}_A$ est toujours s.c.i. en K_0 . Supposons donc $\bar{X}_A(K_0) = 1$, c'est-à-dire $A \cap K_0 \neq \emptyset$. Si $\bar{A} \cap K_0 \neq \emptyset$, et si K_n est une suite convergeant vers K_0 dans $\mathcal{K}$ (donc aussi dans $\mathcal{F}$), les K_n rencontrent tous l'ouvert $\overset{\circ}{A}$ pour n assez grand, et $\lim \bar{X}_A(K_n) = 1$, d'où la semi-continuité inférieure. Inversement, si $\bar{X}_A$ est s.c.i. en K_0 avec $A \cap K_0 \neq \emptyset$, on peut trouver un voisinage de K_0 de la forme $\bigvee_{G_1, \dots, G_n}^{B^C} (G_1, \dots, G_n, B \text{ ouverts relativement compacts})$ sur lequel on a $\bar{X}_A(K) = 1$. Autrement dit, on a :

$$K \subset B, K \cap G_1 \neq \emptyset, \dots, K \cap G_n \neq \emptyset \Rightarrow K \cap A \neq \emptyset, \forall K \in \mathcal{K}$$

On peut évidemment supposer $G_i \subset B$ ($i = 1, \dots, n$). Il s'ensuit que l'un des G_i est inclus dans A (dans le cas contraire, on prendrait un $x_i \notin A$, dans chaque G_i , et le compact $\{x_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ ne rencontrerait pas A , contrairement à l'implication ci-dessus). Soit donc i_0 un indice tel que $G_{i_0} \subset A$, donc aussi $G_{i_0} \subset \overset{\circ}{A}$. Comme $K_0 \in \bigvee_{G_1, \dots, G_n}^{B^C}$, on a $K_0 \cap G_{i_0} \neq \emptyset$, donc K_0 rencontre

bien $\overset{\circ}{A}$.

Proposition 1-6-6 / Les ouverts de $\mathcal{T}$ (de $\mathcal{Q}$) sont engendrés par les parties de $\mathcal{T}$ (de $\mathcal{Q}$) de la forme $\{\bar{X}_A(G) = 1\}$ ou $\{\bar{X}_A(K) = 0\}$ (resp. $\{\overset{\circ}{X}_A(G) = 0\}$ ou $\{\overset{\circ}{X}_A(K) = 1\}$), $G \in \mathcal{Q}$, $K \in \mathcal{K}$.

En effet, $\bar{X}_A(G) = 1 \Leftrightarrow A \in V_G$ et $\bar{X}_A(K) = 0 \Leftrightarrow A \in V^K$

1-7 - Cas où E est un espace métrique.

Supposons que la topologie de l'espace (LCD) E soit définie par une distance d . La topologie de $\mathcal{T}$ est alors engendrée par les $V_{B_\varepsilon(x)}$ et les $V_{\bar{B}_\varepsilon(x)}$, ($B_\varepsilon(x)$, boule ouverte de centre x et de rayon ε). Pour tout $A \in \mathcal{T}$, on pose $d(x, A) = \inf \{d(x, y), y \in A\}$ si $A \neq \emptyset$, et $d(x, A) = \infty$ si $A = \emptyset$. On vérifie sans peine les équivalences :

$$\begin{cases} A \in V_{B_\varepsilon(x)} \Leftrightarrow d(x, A) < \varepsilon \\ A \in V_{\bar{B}_\varepsilon(x)} \Leftrightarrow d(x, A) \geq \varepsilon \end{cases}$$

Par suite :

Proposition 1-7-1 / Pour qu'une suite A_n converge vers A dans $\mathcal{T}$ il faut et il suffit que, pour tout $x \in E$, la suite $d(x, A_n)$ converge vers $d(x, A)$ pour la topologie de la demi-droite compacte $\bar{\mathbb{R}}_+$.

Corollaire 1 - Pour qu'une suite A_n soit convergente dans $\mathcal{T}$ il faut et il suffit que la suite $d(x, A_n)$ soit convergente dans $\bar{\mathbb{R}}_+$ pour tout $x \in E$.

La condition est nécessaire d'après la proposition. Inversement, supposons que pour tout $x \in E$, $d(x, A_n)$ converge dans $\bar{\mathbb{R}}_+$ vers une limite $f(x)$. Comme $\mathcal{T}$ est compact, il existe une suite partielle A_{n_k} convergeant vers un $A \in \mathcal{T}$, et, d'après la proposition, $d(x, A_{n_k})$ converge vers $d(x, A)$. On a donc $d(x, A) = f(x)$, et la suite A_n converge vers A d'après la même proposition.

Corollaire 2 - Si, pour tout $x \in E$, $d(x, A_n)$ converge dans $\bar{\mathbb{R}}_+$ vers une limite $f(x)$, cette limite $f(x)$ est une fonction continue. Si $f(x) = \infty$ en un point x , on a $f(y) = \infty$ en tout point $y \in E$.

On munit souvent $\mathcal{C}(E) - \{\emptyset\}$ de la topologie localement compacte définie par la métrique de Hausdorff :

$$d(K, K') = \text{Max} \left\{ \sup_{x \in K} d(x, K'), \sup_{x \in K'} d(x, K) \right\}$$

Proposition 1-7-2 / Sur $\mathcal{B}(E) - \{\emptyset\}$, la topologie définie par la métrique de Hausdorff coïncide avec la topologie myope.

Pour le voir, on remarque d'abord que, pour $\varepsilon > 0$, un compact K' donné admet un recouvrement fini par des boules ouvertes $B_\varepsilon(x_i)$ de centres $x_i \in K'$ ($i = 1, 2, \dots, n$) et de rayon ε , d'où résultent les inclusions :

$$\{K, \sup_{x \in K'} d(x, K) < \varepsilon\} \subset \bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon(x_i) \subset \{K, \sup_{x \in K'} d(x, K) < 2\varepsilon\}$$

et d'autre part, (K' étant compact) on a l'égalité

$$\{K, \sup_{x \in K} d(x, K') < \varepsilon\} = \{K, K \subset \bigcup_{y \in K'} B_\varepsilon(y)\}$$

On en déduit sans peine que tout compact K' non vide admet les mêmes voisinages dans $\mathcal{K}(E)$ pour les deux topologies.

1-8 - Cas où E est l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$

Dans $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, on définit les opérations suivantes ([3], [4]) :

L'addition de Minkowski : $A \oplus B = \{a+b, a \in A, b \in B\}$, ou dilatation de A par B . C'est une opération associative et commutative, qui fait de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ un demi-groupe abélien. En désignant par $\check{B} = \{-x, x \in B\}$ le transposé de B , on voit que $x \in A \oplus B$ équivaut à $(\check{B} \oplus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$. On remarque $A \oplus \emptyset = \emptyset$.

La soustraction de Minkowski : $A \ominus B = (A^c \oplus B)^c$, ou érosion de A par B , duale de l'addition relativement à la complémentation. On a :

$$x \in A \ominus B \Leftrightarrow \check{B} \oplus \{x\} \subset A$$

L'homothétie (de centre O) : $\lambda A = \{\lambda a, a \in A\}$ (λ réel positif)

L'ouverture A_B et la fermeture A^B d'un ensemble A selon un ensemble B , définies par :

$$A_B = (A \ominus \check{B}) \oplus B, \quad A^B = (A \oplus \check{B}) \ominus B$$

Ces opérations sont duales l'une de l'autre pour la complémentation et constituent une ouverture et une fermeture de Moore :

$$(A^c)_B = (A^B)^c, \quad A_B \subset A, \quad A \subset A^B$$

$$A \subset A' \Rightarrow A_B \subset A'_B, \quad A^B \subset A'^B$$

$$(A_B)_B = A_B, \quad (A^B)^B = A^B$$

Proposition 1-8-1 / Un ensemble A est ouvert selon un ensemble B si et seulement si il existe $C \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ tel que $A = B \oplus C$. De plus : l'ouverture de A selon B est la réunion des translatés de B contenus dans A.

$$x \in A_B \Leftrightarrow \exists y \in \mathbb{R}^n : x \in B \oplus \{y\} \subset A$$

Cette propriété confère à l'ouverture de A selon B une signification granulométrique que nous expliciterons ci-dessous.

Dans ce qui suit, nous nous intéresserons seulement aux érosions, dilatations, ouvertures ou fermetures d'un fermé $F \in \mathcal{F}$ (ou d'un compact $K' \in \mathcal{K}$) par, ou selon, un compact $K \in \mathcal{K}$. Nous désignerons par $\mathcal{K}_0$ l'ensemble des compacts non vides de $\mathbb{R}^n$. D'après le corollaire 1 de la proposition 1-5-1, $\mathcal{K}_0$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{K}$, et nous le munirons de la topologie LCD induite par la topologie myope. On établit facilement les implications suivantes :

$$F \in \mathcal{F}, K \in \mathcal{K}_0 \Rightarrow F \oplus K, F \ominus K, F_K, F^K \in \mathcal{F}$$

$$K \in \mathcal{K}, K_0 \in \mathcal{K}_0 \Rightarrow K \oplus K_0, K \ominus K_0, K_{K_0}, K_{K_0}^K \in \mathcal{K}$$

Proposition 1-8-2 / Les applications : $(F, K) \rightarrow F \oplus K$ de $\mathcal{F} \times \mathcal{K}$ sur $\mathcal{F}$; $(K, K') \rightarrow K \oplus K'$ de $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$ sur $\mathcal{K}$; $F \rightarrow \check{F}$ de $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{F}$; $K \rightarrow \check{K}$ de $\mathcal{K}$ sur $\mathcal{K}$; $(\lambda, F) \rightarrow \lambda F$ de $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{F}$ sur $\mathcal{F}$; et $(\lambda, K) \rightarrow \lambda K$ de $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{K}$ sur $\mathcal{K}$ sont continues.

Montrons, par exemple, la continuité de la première application. Soient F_n et K_n deux suites convergeant vers F et K dans $\mathcal{F}$ et $\mathcal{K}$ respectivement. Il faut montrer que $F_n \oplus K_n$ converge vers $F \oplus K$. Si $K = \emptyset$, on a $K_n = \emptyset$ pour n assez grand (Proposition 1-5-1), donc aussi $F_n \oplus K_n = \emptyset$ et le résultat est acquis. Supposons donc $K \neq \emptyset$ et montrons que la suite $F_n \oplus K_n$ vérifie les critères 1' et 2' du Théorème 1-2-1.

Critère 1' : Si $F \oplus K \neq \emptyset$, soit $x = f + k \in F \oplus K$ avec $f \in F$ et $k \in K$. Il existe (critère 1' appliqué à la suite F_n) une suite $f_n \in F_n$ avec $f_n \rightarrow f$ et (Proposition 1-5-1) une suite $k_n \in K_n$

avec $k_n \rightarrow k$. On a donc $f_n + k_n \in F_n \oplus K_n$ et $f_n + k_n \rightarrow f + k = x$.

Critère 2' : Soient $f_{n_i} \in F_{n_i}$ et $k_{n_i} \in K_{n_i}$ deux suites partielles telles que $(f_{n_i} + k_{n_i})$ converge vers un point x . Comme les K_{n_i} sont contenus dans un compact fixe (Proposition 1-5-1), la suite k_{n_i} admet une valeur d'adhérence $k_0 \in K$. Le point $x - k_0$ est alors valeur d'adhérence pour la suite f_{n_i} , et on a $x - k_0 \in F$ (critère 2' pour la suite F_n). Donc $x = k_0 + x - k_0 \in F \oplus K$, et la suite $F_n \oplus K_n$ vérifie le critère 2'.

Proposition 1-8-3 / Les applications $(A, K) \rightarrow A \oplus K$, $(A, K) \rightarrow A_K$ et $(A, K) \rightarrow A^K$ de $\mathcal{F} \times \mathcal{K}_0$ dans $\mathcal{F}$ (ou de $\mathcal{K} \times \mathcal{K}_0$ dans $\mathcal{K}$) sont semi-continues supérieurement.

Soient, en effet, A_n et K_n deux suites convergeant vers A et K dans $\mathcal{F}$ et dans $\mathcal{K}_0$. Montrons que toute valeur d'adhérence de la suite $A_n \oplus K_n$ est contenue dans $A \oplus K$, soit $\overline{\lim} A_n \oplus K_n \subset A \oplus K$ (Proposition 1-2-6). Soit $x_{n_k} \in A_{n_k} \oplus K_{n_k}$ une suite partielle convergeant vers x . On a : $\check{K}_{n_k} \oplus \{x_{n_k}\} \subset A_{n_k}$ par définition, et cette inclusion passe à la limite d'après la Proposition 1-8-2, d'où : $\check{K} \oplus \{x\} \subset A$, c'est-à-dire $x \in A \oplus K$ et $\overline{\lim} A_n \oplus K_n \subset A \oplus K$. Désignons par $A'_n = (A_n \oplus \check{K}_n) \oplus K_n$ et $A''_n = (A_n \oplus \check{K}_n) \oplus K_n$ l'ouverture et la fermeture de A_n selon K_n . On a $\overline{\lim} A'_n \subset A_K$ et $\overline{\lim} A''_n \subset A^K$. En effet, si A'_{n_k} converge vers C , et si A' est une valeur d'adhérence de la suite $A_{n_k} \oplus \check{K}_{n_k}$, on a d'après ce qui précède $A' \subset A \oplus \check{K}$, et la continuité de $\oplus$ (Proposition 1-8-2) donne $C = A' \oplus K \subset (A \oplus \check{K}) \oplus K = A_K$. Même démonstration pour A''_n .

Si A_n converge vers A dans $\mathcal{K}$, on voit sans peine que les suites $A_n \oplus K_n$, A'_n et A''_n restent contenues dans des compacts fixes, et le reste de la démonstration subsiste sans changement.

Corollaire- Soit A un fermé (resp. compact) fixe et K_n une suite croissante pour $\subset$ dans $\mathcal{K}_0$. Si $K = \bigcup K_n$ est compact, K_n converge vers K dans $\mathcal{K}_0$, et la suite $A \oplus K_n$ converge vers $A \oplus K$ dans $\mathcal{F}$ (resp. dans $\mathcal{K}$).

En effet, $\lim K_n = K$ résulte du corollaire 2 du Théorème 1-2-1 (compte tenu du fait que la suite K_n est contenue dans le compact fixe K). L'inclusion $K_n \subset K_{n+1} \subset K$ donne :

$$A \oplus K_n \supset A \oplus K_{n+1} \supset A \oplus K$$

On en déduit $\overline{\lim} A \oplus K_n \supset A \oplus K$. D'après la proposition, on a aussi $\overline{\lim} A \oplus K_n \subset A \oplus K$, d'où résulte le corollaire.

Désignons par $C(A)$ l'enveloppe convexe d'un ensemble $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, et par $C(\mathcal{F})$ et $C(\mathcal{K})$ les familles des fermés convexes et des compacts convexes. En particulier, $C(\mathcal{K}_0)$ est stable pour

$\oplus$ et constitue donc un demi-groupe.

Proposition 1-8-4 / Si $A \in C(\mathcal{F})$ et si B est un ensemble borné non vide, A est fermé selon B
 $(A^B = A)$. En particulier, la règle de simplification $(A \oplus B = A \oplus C \Rightarrow B = C)$
s'applique dans le demi-groupe localement compact $C(\mathcal{K}_0)$

En effet, si $x \notin A$, il existe un demi-plan fermé E contenant A et ne contenant pas x, et l'on peut alors trouver un translaté de l'ensemble borné B contenant x et disjoint de E, donc aussi de A. Mais cela signifie $x \notin A^B$. On a donc $A^B \subset A$, et $A^B = A$ puisque l'inégalité inverse est toujours vérifiée. Si A, B, C $\in C(\mathcal{K}_0)$ vérifient $A \oplus B = A \oplus C$, on a aussi $(A \oplus B) \oplus \check{A} = (A \oplus C) \oplus \check{A}$, c'est-à-dire $B^{\check{A}} = C^{\check{A}}$, donc $B = C$ d'après ce qui précède.

Proposition 1-8-5 / L'application $K \rightarrow C(K)$ associant à tout compact non vide K son enveloppe
convexe $C(K)$ est une application continue de $\mathcal{K}_0$ sur $C(\mathcal{K}_0)$.

En effet, soit K_n une suite convergeant vers K dans $\mathcal{K}_0$. Les K_n sont contenus dans un compact fixe K_0 (Proposition 1-5-1), et par suite $C(K_n) \subset C(K_0)$. D'après la Proposition 1-5-1, la suite $C(K_n)$ convergera vers $C(K)$ pour la topologie myope si elle converge vers $C(K)$ dans $\mathcal{F}$. Vérifions le critère 1 du théorème 1-2-1. Soit $x \in C(K)$ et

$$x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k, \quad x_i \in K, \quad \sum \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geq 0$$

une représentation de cet élément. D'après le critère 1' appliqué à la suite K_n , chaque x_i est limite d'une suite $x_{n(i)} \in K_n$. Les $x_n = \sum \lambda_i x_{n(i)}$ appartiennent donc à $C(K_n)$ et convergent vers x, et la suite $C(K_n)$ vérifie le critère 1'.

Vérifions maintenant le critère 2'. Si E est un demi-plan ouvert contenant K, on a $K_n \subset E$ pour n assez grand, d'après la définition de la topologie myope, donc aussi $C(K_n) \subset E$. Si donc x est valeur d'adhérence pour une suite $x_{n_k} \in C(K_{n_k})$, x est contenu dans le demi-plan fermé E. Mais $C(K)$ est l'intersection des $\bar{E}$ tels que $E \supset K$. Par suite $x \in C(K)$, et le critère 2' est vérifié.

Corollaire - La famille $C(\mathcal{K}_0)$ des compacts convexes non vides est fermée dans $\mathcal{K}_0$.

En effet, $K_n \rightarrow K$ et $K_n = C(K_n)$ entraîne $K = \lim K_n = \lim C(K_n) = C(K)$ d'après la proposition.

En ce qui concerne l'homothétie $(\lambda, B) \rightarrow \lambda B$ ($\lambda \geq 0$), elle vérifie évidemment $\lambda B \oplus \mu B \supset (\lambda + \mu)B$. Si B est convexe, cette inclusion devient une égalité:

$$\lambda B \oplus \mu B = (\lambda + \mu)B \quad (B \text{ convexe})$$

(car $\frac{\lambda}{\lambda+\mu} B \oplus \frac{\mu}{\lambda+\mu} B$ est alors contenu dans B), et la famille $B_\lambda = \lambda B$ constitue alors un demi-groupe à un paramètre. Si B est un compact convexe non vide, on déduit facilement de la Proposition 1-8-2 que ce demi-groupe est continu. Inversement, nous allons voir que tout demi-groupe continu $\{B_\lambda, \lambda \geq 0\} \subset C(\mathcal{K}_0)$ est constitué des homothétiques λB d'un compact B convexe non vide.

Nous dirons qu'un compact $A \in \mathcal{K}$ est indéfiniment divisible si, pour tout entier n , il existe $B_n \in \mathcal{K}$ tel que $A = B_n^{\oplus n}$ (somme de Minkowski de n termes égaux à B_n).

Théorème 1-8-1 - Un compact $A \in \mathcal{K}$ est indéfiniment divisible si et seulement si il est convexe.

Si $A \in C(\mathcal{K})$, on vérifie immédiatement que A est indéfiniment divisible, en prenant $B_n = \frac{1}{n} A$.

Inversement, supposons que pour tout n il existe $B_n \in \mathcal{K}$ avec $A = B_n^{\oplus n}$. On a évidemment $n B_n \subset A$. Etant contenue dans le compact fixe A , la suite $n B_n$ admet une valeur d'adhérence $B \subset A$ dans $\mathcal{K}$.

Montrons $C(A) = C(B)$. En effet, pour n et k entiers > 0 , on a $n B_n \subset A = B_k^{\oplus k} \subset k C(B_k)$, d'où $n C(B_n) \subset k C(B_k)$, et l'inclusion inverse étant vraie également, l'égalité $n C(B_n) = k C(B_k) = C(A)$. Mais cette égalité passe à la limite (pour une suite partielle $n_k B_{n_k}$ convergeant vers B), d'après la proposition 1-8-5. D'où $C(B) = C(A)$.

Montrons maintenant $C(B) \subset A$. Soit $x \in C(B)$ et :

$$x = \sum_{i=1}^r \lambda_i x_i, \quad x_i \in B, \quad \lambda_i \geq 0, \quad \sum \lambda_i = 1$$

une représentation de cet élément. Soit aussi $n_k B_{n_k}$ une suite partielle convergeant vers B dans $\mathcal{K}$. Pour chaque i , il existe (critère 1' de convergence) une suite $y_{n_k}(i) \in n_k B_{n_k}$ convergeant vers x_i . Choisissons alors des entiers $N(i, k) \geq 0$ vérifiant :

$$\sum_i N(i, k) = n_k, \quad \lim_k \frac{N(i, k)}{n_k} = \lambda_i$$

et posons :

$$x_k = \frac{1}{n_k} \sum_i N(i, k) y_{n_k}(i)$$

On a $x_k \in B_{n_k}^{\oplus n_k} = A$, et la suite x_k converge vers x . Donc $x \in A$, et $C(B) \subset A$.

Les relations $C(B) \subset A \subset C(A) = C(B)$ que nous avons obtenues montrent que l'on a $A = C(A)$,

ce qui établit la convexité de A . (Remarquons que les B_n eux-mêmes ne sont pas nécessairement convexes, mais on peut toujours les remplacer par leurs enveloppes convexes qui vérifient $n C(B_n) = A$).

Corollaire - Dans $\mathcal{K}_0$, une famille B_λ , $\lambda \geq 0$ constitue un demi-groupe continu à un paramètre si et seulement si B_λ est l'homothétique λB d'un ensemble compact B convexe et non vide.

On a déjà vu que les λB , pour $B \in C(\mathcal{K}_0)$ et $\lambda \geq 0$, constituent un demi-groupe continu. Réciproquement, soit B_λ , $\lambda \geq 0$ une famille vérifiant la relation $B_\lambda \oplus B_\mu = B_{\lambda+\mu}$. On en déduit, pour n entier :

$$B_\lambda = \left(B \frac{\lambda}{n} \right)^{\oplus n}$$

donc B_λ est indéfiniment divisible $\forall \lambda \geq 0$, et les B_λ sont tous convexes d'après le théorème. Pour n et k entiers positifs quelconques, la relation des demi-groupes donne alors :

$$B_\lambda = n B \frac{\lambda}{n} = \frac{n}{k} B \frac{\lambda k}{n}$$

Si donc le demi-groupe est de plus continu, on a $\mu B_\lambda = B_{\lambda\mu}$ pour tout réel $\mu \geq 0$, et, pour $\lambda = 1$, $B_\mu = \mu B_1$, ce qui établit le corollaire.

Granulométrie d'un compact selon les homothétiques de $B \in C(\mathcal{K}_0)$. Soit B_λ , $\lambda \geq 0$ un demi-groupe continu à un paramètre dans $C(\mathcal{K}_0)$, c'est-à-dire, d'après le théorème précédent, la famille $B_\lambda = \lambda B$ des homothétiques d'un $B \in C(\mathcal{K}_0)$. Quitte à remplacer B par $B \oplus \{-b_0\}$ pour un $b_0 \in B$, on peut supposer $0 \in B_\lambda$, d'où résulte $\lambda \leq \mu \Rightarrow B_\lambda \subset B_\mu$. Soit $A \in \mathcal{K}_0$ un compact non vide, $A_\lambda = A_{B_\lambda}$ et $A^\lambda = A_{B_\lambda}^\lambda$ son ouverture et sa fermeture selon B_λ . La relation des demi-groupes montre alors que A_μ est ouvert selon B_λ et A^μ fermé selon B_λ dès que $\mu \geq \lambda$, d'où résulte aussi $A_\mu \subset A_\lambda$ et $A^\mu \supset A^\lambda$. Ainsi A_λ est une fonction décroissante pour $\subset$, et A^λ une fonction croissante. On a d'ailleurs $A^\lambda \subset C(A)$ quel que soit $\lambda \geq 0$ (d'après la Proposition 1-8-4), de sorte que A^λ est contenu dans un compact fixe.

Montrons que A_λ est continue à gauche et A^λ continue à droite. Si $\lambda_n \uparrow \lambda_0$, la suite décroissante $A_{\lambda_n} \supset A_{\lambda_0}$ converge vers $\bigcap_{\lambda > \lambda_0} A_\lambda = A'$ (corollaire 2 du théorème 1-2-1), d'où $A' \supset A_{\lambda_0}$. Mais, d'après la Proposition 1-8-3, on a aussi $A' \subset A_{\lambda_0}$, d'où l'égalité, et la continuité à gauche de A_λ . On démontre de même la continuité à droite de A^λ .

Désignons par V la mesure de Lebesgue, et posons :

$$F_-(\lambda) = V(A_\lambda) \quad , \quad F_+(\lambda) = V(A^\lambda)$$

La fonction F_- est non croissante et continue à gauche, la fonction F_+ est non décroissante, continue à droite et bornée (par $V(C(A))$).

En effet, les propriétés de monotonie découlent des propriétés correspondantes de A_λ et A^λ . Montrons que $V(A_\lambda)$ est continue à gauche. La restriction à $\mathcal{K}$ de la mesure de Lebesgue est s.c.s. pour la topologie myope (voir, par exemple, Section 4, et notamment, la Proposition 4-1-2). Pour $\lambda \uparrow \lambda_0$, on a $A_\lambda \rightarrow A_{\lambda_0}$ (puisque A_λ est continu à gauche), donc $\lim_{\lambda \uparrow \lambda_0} V(A_\lambda) \leq V(A_{\lambda_0})$, puisque V est s.c.s. Mais $A_\lambda \supset A_{\lambda_0}$ entraîne aussi $\lim_{\lambda \uparrow \lambda_0} V(A_\lambda) \geq V(A_{\lambda_0})$ pour $\lambda \uparrow \lambda_0$, d'où $\lim_{\lambda \uparrow \lambda_0} V(A_\lambda) = V(A_{\lambda_0})$. On a une démonstration analogue pour la continuité à droite de F_+ . Enfin, $F_+(\lambda) \leq V(C(A))$ résulte de la Proposition 1-8-4.

La fonction $F_-(\lambda)$ représente la granulométrie de A selon les homothétiques λB de $B \in C(\mathcal{K}_0)$, et la fonction $F_+(\lambda)$ la granulométrie du complémentaire A^c de A selon la même famille.

B - σ -ALGÈBRES ET PROBABILITES

1-9 - Lois spatiales et σ -algèbres maigres.

D'une manière générale, nous utiliserons la notation $S_B^{B'}$ pour désigner le sous-ensemble $\{A : A \subset E, A \supset B, A \cap B' = \emptyset\}$ de $\mathcal{P}(E)$. Lorsque I et I' décrivent les parties finies de E , les $S_I^{I'}$ constituent manifestement une semi-algèbre de Boole. Nous appellerons σ -algèbre maigre et désignerons par $\sigma(\mathcal{K})$ la σ -algèbre engendrée par les $S_I^{I'}$, qui est celle de la loi spatiale. Mais la formule :

$$\bigcap_{j \in J} S_{I_j}^{I'_j} = S_{\bigcup_j I_j}^{\bigcup_j I'_j}$$

montre que les $S_I^{I'}$ constituent également une classe compacte. Ainsi, d'après un théorème classique, toute fonction d'ensemble P simplement additive appliquant la semi-algèbre des $S_I^{I'}$ sur $[0,1]$ - c'est-à-dire toute loi spatiale de la forme :

$$P(x_1 \in A, \dots, x_n \in A; y_1 \notin A, \dots, y_k \notin A)$$

se prolongera en une probabilité sur la σ -algèbre maigre et permettra de définir un ensemble aléatoire A sur $\mathcal{P}(E)$ muni de $\sigma(\mathcal{K})$.

Toutefois des propositions aussi utiles que : "l'ouvert G est contenu dans A " n'appartiennent pas à $\sigma(\mathcal{K})$, et nous devons construire des σ -algèbres plus riches.

Il est également possible de munir $\mathcal{P}(E)$ de la topologie maigre $\mathcal{C}(\mathcal{K})$ engendrée par les

S_I et les $S^{I'}$, I et I' parties finies de E . On note que S_I et $S^{I'}$ sont complémentaires, donc à la fois ouverts et fermés dans $\mathcal{P}(E)$ pour $\mathcal{C}(\mathcal{A})$.

Proposition 1-9-1 / L'espace $\mathcal{P}(E)$ est compact pour la topologie maigre $\mathcal{C}(\mathcal{A})$.

En effet, c'est un espace séparé : si $A \neq A'$, soit (par exemple) $x \in A$ et $x \notin A'$ on a $A \in S_{\{x\}}$, $A' \in S^{\{x\}}$ et $S_{\{x\}} \cap S^{\{x\}} = \emptyset$.

On note ensuite que les S_I et les $S^{I'}$ constituent une classe compacte, et qu'il en est de même de la classe stable pour la réunion finie et pour l'intersection engendrée par les S_I et les $S^{I'}$, c'est-à-dire de la classe des fermés de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$.

De même, on démontrera facilement la :

Proposition 1-9-2 / La convergence dans $\mathcal{P}(E)$ pour la topologie maigre s'identifie à la convergence usuelle des familles d'ensembles.

1-10 - Ensembles fermés aléatoires

Pour définir un ensemble fermé aléatoire, nous allons munir $\mathcal{F}(E)$ de la σ -algèbre $\sigma(\mathcal{V})$ engendrée par les ouverts de $\mathcal{F}$, c'est-à-dire par les V^K et les V_G . Mais la topologie de E possède une base dénombrable, et tout compact K possède un système fondamental dénombrable de voisinages ouverts G_n : dire " $K \cap F = \emptyset$ " pour $F \in \mathcal{F}$ équivaut à : " $\exists n, G_n \cap F = \emptyset$ ", et l'on a $V^K = \bigcup_{n>0} V^{G_n}$. Autrement dit, $\sigma(\mathcal{V})$ est engendrée par les seuls événements $V_G = "F \cap G \neq \emptyset"$.

Il est possible également de munir $\mathcal{P}(E)$ lui-même de la σ -algèbre engendrée dans $\mathcal{P}(E)$ par les $V_G = "A : A \in \mathcal{P}(E), A \cap G \neq \emptyset"$. Mais les équivalences :

$$A \cap G \neq \emptyset \Leftrightarrow \bar{A} \cap G \neq \emptyset$$

montrent que V_G a le même sens dans $\mathcal{F}$ et dans $\mathcal{P}(E)$. Etudier un ensemble A quelconque à l'aide de $\sigma(V_G)$ équivaut à l'étudier par l'intermédiaire de sa seule fermeture $\bar{A}$ $\bar{A} \in \mathcal{F}$, et ce point de vue revient à identifier deux ensembles A et A' ayant même fermeture dans E . Ainsi :

Proposition 1-10-1 / Si $\mathcal{R}_f$ est la relation " $A \equiv A'$ si $\bar{A} = \bar{A}'$ " dans $\mathcal{P}(E)$, l'espace quotient $\mathcal{P}(E)/\mathcal{R}_f$ muni de la σ -algèbre engendrée par les V_G est isomorphe à $\mathcal{F}$ muni de $\sigma(\mathcal{V})$.

La fonctionnelle $\bar{X}(A; G)$ introduite en 1-6 est, pour tout $G \in \mathcal{G}$, une variable aléatoire sur $\mathcal{F}$, $\sigma(V_G)$. Cela résulte de sa définition même. Cette fonctionnelle est donc une fonction aléatoire. $(\bar{X}(G))_{G \in \mathcal{G}}$.

Proposition 1-10-2 / La σ -algèbre $\sigma(V_G)$ sur $\mathcal{F}$ est engendrée par la famille des variables aléatoires $(\bar{X}(G))_{G \in \mathcal{G}}$ vérifiant les conditions : $\bar{X}(G) = 0$ ou 1 , et $\bar{X}(\bigcup_{i \in J} G_i) = \sup_{i \in J} \bar{X}(G_i)$.

On peut, en effet (Prop. 1-6-1) identifier $\mathcal{F}$ avec l'ensemble des fonctionnelles vérifiant ces conditions, et V_G est le sous-ensemble " $\bar{X}(G) = 1$ " de $\mathcal{F}$.

Examinons maintenant s'il est possible de probabiliser l'espace $(\mathcal{F}, \sigma(\mathcal{V}))$.

Soit $\mathcal{B}$ la base dénombrable de la topologie de E constituée d'ouverts relativement compacts et vérifiant les propriétés énoncées en 1-1. On voit facilement que la famille des parties de $\mathcal{F}$ de la forme

$$\bigcap_{j=1}^k C'_j \cap \bigcap_{i=1}^n C_i$$

où chaque C_i, C'_j est dans $\mathcal{B}$ ou est la fermeture d'un élément de $\mathcal{B}$ constitue une semi-algèbre $\mathcal{C}_0$ et que cette semi-algèbre contient une classe compacte $\mathcal{C}_0$ définie par :

$$\mathcal{C}_0 = \left\{ \bigcap_{i=1}^n \overline{B_i} \cap \bigcap_{j=1}^k B'_j, \quad n, k \text{ entiers, } B_i, B'_j \in \mathcal{B} \right\}$$

Soit $\mathcal{C}$ l'algèbre engendrée par $\mathcal{C}_0$, et $\mathcal{C}$ la classe stable pour la réunion finie engendrée par $\mathcal{C}_0$. D'après les théorèmes classiques ([6]), une fonction P appliquant $\mathcal{C}$ sur $[0, 1]$ se prolonge en une probabilité sur $\sigma(\mathcal{V})$ si pour tout $A \in \mathcal{C}$ on a la propriété d'approximation :

$$P(A) = \sup \{ P(C), C \subset A, C \in \mathcal{C}_0 \}$$

On peut même montrer que cette condition suffisante est également nécessaire ici. Nous nous contenterons de donner un procédé permettant la construction effective d'une probabilité sur $\sigma(\mathcal{V})$. Posons d'abord un lemme :

Lemme 1-10-1 : Si D est une partie dénombrable dense dans E , l'application $\alpha : A \rightarrow \overline{A \cap D}$ de $(\mathcal{P}(E), \sigma(\mathcal{C}))$ dans $(\mathcal{F}, \sigma(\mathcal{V}))$ est mesurable.

En effet, cherchons l'image inverse de $V_G, G \in \mathcal{G}$. De l'équivalence :

$$\overline{A \cap D} \cap G \neq \emptyset \Leftrightarrow A \cap D \cap G \neq \emptyset$$

résulte aussitôt $\alpha^{-1}(V_G) = \{A, A \in \mathcal{P}(E), A \cap D \cap G \neq \emptyset\}$, et cet ensemble est dans $\sigma(\mathcal{M})$, puisque D est dénombrable.

Proposition 1-10-3 / Si P' est une probabilité sur $(\mathcal{P}(E), \sigma(\mathcal{M}))$ obtenue par exemple en prolongeant une loi spatiale, la formule $P(V) = P'(\alpha^{-1}(V))$ $V \in \sigma(V_G)$, α désignant l'application : $A \rightarrow \overline{A \cap D}$, définit une probabilité sur $(\mathcal{P}(E), \sigma(V_G))$, ou, ce qui revient au même, sur $(\mathcal{F}, \sigma(\mathcal{V}))$.

Si l'ensemble aléatoire A défini par $(\mathcal{P}(E), \sigma(\mathcal{M}))$, est continu en probabilité pour P' , la probabilité P ne dépend pas du choix de la partie dénombrable dense D . Si, de plus, pour tout $x \in E$, l'ensemble aléatoire A est continu en x presque sûrement pour P' , la restriction de P à $\sigma(\mathcal{M}) \subset \sigma(V_G)$ coïncide avec P' .

La première partie de l'énoncé résulte du lemme 1-10-1. Si A est continu en probabilité pour P' , $x_n \rightarrow x$ entraîne $P'(V_{x_n}^{x_n}) \rightarrow 0$ et $P'(V_{x_n}^x) \rightarrow 0$. Si G désigne un ouvert contenant $x \in E$, on a donc $V_x^{G \cap D} = \emptyset$, presque sûrement pour P' , donc aussi $V_{G \cap D}^{G \cap D} = \emptyset$ (p.s. pour P') pour une autre partie dénombrable dense D' . On a donc $V_{G \cap D'} \subset V_{G \cap D}$ (p.s. pour P') d'où l'égalité, puisque l'inclusion inverse est vraie aussi. Mais $V_{G \cap D} = V_{G \cap D'}$ p.s. signifie que la probabilité P ne dépend pas du choix de D .

Si A est presque sûrement continue en x , on a presque sûrement $x \in \overset{\circ}{A}$ ou $x \notin \bar{A}$. Si G_n désigne un système fondamental dénombrable de voisinage de x , on a par suite $V_x = \lim_{n \rightarrow \infty} \downarrow V_{G_n \cap D}$ (p.s. pour P'). Mais cela signifie que la loi spatiale est la même pour P' et pour P .

1-11 - Séparabilité, continuité p.s., mesurabilité.

Séparabilité. Une partie dénombrable D dense dans E est séparante pour l'ensemble aléatoire A défini par $(\mathcal{F}, \sigma(\mathcal{V}), P)$ s'il y a une probabilité unité pour que tout point de A soit limite de points de $A \cap D$, autrement dit si $A = \overline{A \cap D}$ p.s. (Lorsque P est construite comme dans la proposition 1-10-3 à partir d'une partie D dénombrable et dense, A est séparable pour D).

Vérifions $\{A = \overline{A \cap D}\} \in \sigma(\mathcal{V})$. Si $\mathcal{B}$ est une base dénombrable de la topologie de E , on a :

$$\{A = \overline{A \cap D}\} = \bigcap_{B \in \mathcal{B}} (\{A \cap B = \emptyset\} \cup \{A \cap B \cap D \neq \emptyset\})$$

et cet ensemble est mesurable.

Proposition 1-11-1 / Soit $\mathcal{B}$ une base dénombrable de la topologie de E . Une partie dénombrable D dense dans E est séparante pour l'ensemble fermé aléatoire $(\mathcal{F}, \sigma(\mathcal{V}), P)$ si et seulement si $P(V_B^{\mathcal{H}\mathcal{D}}) = 0$ pour tout $B \in \mathcal{B}$, ou encore si et seulement si $V_B = V_{B \cap D}$ p.s. pour tout $B \in \mathcal{B}$. On a alors $V_G = V_{G \cap D}$ pour tout ouvert $G \in \mathcal{Q}$.

Cela résulte aussitôt de $\{A \neq \overline{A \cap D}\} = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} V_B^{\mathcal{H}\mathcal{D}}$.

Nous utiliserons dans ce qui suit la notation

$$S_G = \{A, A \in \mathcal{F}, A \supset G\}, \quad G \in \mathcal{Q}$$

Cet ensemble S_G est mesurable : pour $A \in \mathcal{F}$, $G \subset A$ équivaut à $\bar{G} \subset A$. Mais $\bar{G} = \overline{G \cap D}$ pour toute partie dénombrable dense D ($G \in \mathcal{Q}$). Ainsi $S_G = S_{G \cap D} \in \sigma(\mathcal{V})$.

Continuité presque sûre : L'ensemble fermé aléatoire A défini par $(\mathcal{F}, \sigma(\mathcal{V}), P)$, est presque sûrement continu en $x_0 \in E$ si $P(x_0 \in \text{Fr} A) = 0$.

Il faut toutefois vérifier que $\{A, x_0 \notin \text{Fr} A\}$ est mesurable. Cela résulte de :

$$\{x_0 \notin \text{Fr} A\} = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_{x_0}} (S_B \cup V_B^{\mathcal{B}}) \in \sigma(\mathcal{V})$$

$(\mathcal{B}_{x_0}, \text{ système fondamental dénombrable de voisinages ouverts de } x_0)$.

Proposition 1-11-2 / Pour qu'en tout $x \in E$ l'ensemble fermé aléatoire A soit presque sûrement continu, il faut et il suffit que l'on ait $P(A \cap D \subset \overset{\circ}{A}) = 1$ pour toute partie dénombrable D .

Si, en tout point $x \in E$, A est presque sûrement continu, on a $D \subset \overset{\circ}{A} \cup \bar{A}^c$ p.s., et par suite $A \cap D \subset \overset{\circ}{A}$ p.s. Inversement, si cette condition est remplie pour toute partie dénombrable D , il suffit de prendre $D \ni x$ pour avoir $P(x \in \text{Fr} A) = 0$.

Proposition 1-11-3 / Si l'ensemble fermé aléatoire A admet une partie séparante D_0 et s'il est p.s. continu en x , $\forall x \in E$, toute partie dénombrable dense D est alors séparante, et de plus on a p.s. $A = \bar{\bar{A}}$.

En effet, d'après la Proposition 1-11-2, la continuité p.s. donne pour tout ouvert G :

$$\{A \cap G \cap D \neq \emptyset\} \underset{\text{p.s.}}{=} \{\overset{\circ}{A} \cap G \neq \emptyset\} \underset{\text{p.s.}}{=} \{A \cap G \cap D_0 \neq \emptyset\}$$

Comme D_0 est séparante, ce dernier ensemble est presque sûrement égal à V_G (Proposition 1-11-1), et on a bien $V_G = V_{G \cap D}$ p.s. : D est séparante. On a alors $A = \overline{A \cap D}$ (p.s.), et aussi $A \cap D \subset \overset{\circ}{A}$ (p.s.), d'après la Proposition 1-11-2, donc $A \subset \overline{\overset{\circ}{A}}$ p.s., c'est-à-dire $P(A = \overline{\overset{\circ}{A}}) = 1$.

Remarque : Le sous-ensemble $\{A = \overline{\overset{\circ}{A}}\}$ de $\mathcal{F}$ est mesurable pour $\sigma(\mathcal{U})$.

En effet, si $\mathcal{B}$ est une base dénombrable de la topologie de E , on a :

$$\{A = \overline{\overset{\circ}{A}}\} = \bigcap_{B \in \mathcal{B}} \left(V^B \cup \left(\bigcup_{\substack{B' \subset B \\ B' \in \mathcal{B}}} S_{B'} \right) \right) \in \sigma(\mathcal{U})$$

puisque $A = \overline{\overset{\circ}{A}}$ si et seulement si tout ouvert rencontre $\overset{\circ}{A}$ ou est disjoint de A .

Continuité p.s. en tout compact. On dira que l'ensemble fermé aléatoire A est presque sûrement continu en un compact $K_0 \in \mathcal{K}$ s'il y a une probabilité unité pour que la fonctionnelle $\overline{X}_A(K)$ de la section 1-6 soit continue en K_0 pour la topologie myope.

Il faut toutefois vérifier que $\{\overline{X}_A \text{ est continue en } K_0\} \in \sigma(\mathcal{U})$. D'après la proposition 1-6-5, cet ensemble est la réunion :

$$\{A \cap K_0 = \emptyset\} \cup \{\overset{\circ}{A} \cap K_0 \neq \emptyset\}$$

Or, $\overset{\circ}{A} \cap K_0 \neq \emptyset$ équivaut à : il existe $B \in \mathcal{B}$ (base dénombrable de la topologie de E) avec $B \subset A$, $B \cap K_0 \neq \emptyset$. L'ensemble ci-dessus est donc :

$$V^{K_0} \cup \left(\bigcup_{\substack{B \in \mathcal{B} \\ B \cap K_0 \neq \emptyset}} S_B \right) \in \sigma(\)$$

Proposition 1-11-3 / Pour que l'ensemble aléatoire A soit continu p.s. en $\overline{B}$ pour tout ouvert B relativement compact, il faut et il suffit que l'on ait p.s. $A = \overline{\overset{\circ}{A}}$ et $V_{\overline{B}} = V_B$ pour tout ouvert relativement compact B . Toute partie dénombrable dense est alors séparante.

En effet, soit B un ouvert relativement compact et D une partie dénombrable dense. Considérons la chaîne d'inclusions et d'égalités :

$$\begin{aligned} V_{\bar{B}} \supset V_B \supset V_{B \cap D} &\supset \{\bar{A} \cap B \cap D \neq \emptyset\} = \{B \cap \bar{A} \neq \emptyset\} = \\ &= \{B \cap \bar{\bar{A}} \neq \emptyset\} = \{\bar{B} \cap \bar{A} \neq \emptyset\} \end{aligned}$$

Si A est p.s. continu en $\bar{B}$ pour tout ouvert B relativement compact, on a $V_{\bar{B}} = \{\bar{B} \cap \bar{A} \neq \emptyset\}$ d'après la proposition 1-6-5, et les inclusions ci-dessus deviennent des égalités p.s. On a donc p.s. $V_{\bar{B}} = V_B$ et $V_B = \{B \cap \bar{A} \neq \emptyset\}$, c'est-à-dire $A = \bar{A}$. De plus $V_B = V_{B \cap D}$ p.s. montre que D est séparante (Proposition 1-11-1).

Inversement, si l'on a $V_{\bar{B}} = V_B$ et $A = \bar{A}$ p.s., les inclusions ci-dessus sont à nouveau des égalités p.s. La relation $V_B = \{\bar{B} \cap \bar{A} \neq \emptyset\}$ p.s. exprime alors (Proposition 1-6-5) que A est p.s. continu en tout $\bar{B}$.

Remarque: La continuité p.s. en $\bar{B}$ pour tout ouvert B relativement compact n'entraîne pas la continuité p.s. en tout $K \in \mathcal{K}$, ni, en particulier, la continuité p.s. en tout point x .

Examinons maintenant la mesurabilité des ensembles fermés aléatoires.

Proposition 1-11-4 / (Mesurabilité de A) : L'application $k(x, A) : E \times \mathcal{H} \rightarrow \{0, 1\}$ définie par $k(x, A) = 1$ si $x \in A$ et $k(x, A) = 0$ si $x \notin A$ est mesurable pour la σ -algèbre produit $\sigma(\mathcal{Q}) \otimes \sigma(\mathcal{V})$.

En effet, montrons que $k^{-1}(0)$ est dans la σ -algèbre produit. Si $\mathcal{B}$ est une base dénombrable de la topologie de E , on a $x \notin A$ si et seulement si il existe $B \in \mathcal{B}$ avec $x \in B$ et $A \in V^B$. Ainsi :

$$k^{-1}(0) = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \times V^B \in \sigma(\mathcal{Q}) \otimes \sigma(\mathcal{V})$$

Corollaire - Si M est une mesure positive bornée sur $[E, \sigma(\mathcal{Q})]$, l'application $X(A) = \int_A M(dx) = \int k(x, A) M(dx)$ de $\mathcal{H}$ dans $\mathbb{R}_+$ est une variable aléatoire admettant l'espérance :

$$E[X(A)] = \int P(x \in A) M(dx)$$

1-12 - Ensembles ouverts aléatoires

L'homéomorphisme $F \rightarrow F^c$ de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{G}$ est évidemment aussi un isomorphisme des σ -algèbres $\sigma(\mathcal{V})$ et $\sigma(\mathcal{W})$, de sorte que les propositions des sections 1-10 et 1-11 se transposent, par dualité, aux ensembles ouverts aléatoires. Nous donnerons seulement quelques résultats complé-

mentaires.

Proposition 1-12-1 / Les applications $\varphi: F \rightarrow \overset{\circ}{F}$ de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{Q}$, et $\gamma: G \rightarrow \overline{G}$ de $\mathcal{Q}$ dans $\mathcal{H}$, sont mesurables.

En effet, cherchons, par exemple, l'image inverse $\gamma^{-1}(V_B)$ de $V_B \subset \mathcal{H}$, B ouvert dans E , par l'application γ . Comme $\overline{G} \cap B \neq \emptyset$ équivaut à $G \cap B \neq \emptyset$, on a $\gamma^{-1}(V_B) = V_B \subset \mathcal{Q}$. Mais le corollaire de la proposition 1-6-2 montre que V_B est ouvert dans $\mathcal{Q}$, d'où $V_B \in \sigma(\mathcal{W})$.

Corollaire 1 : L'application $F \rightarrow \overset{\circ}{F}$ de $\mathcal{F}$, $\sigma(\mathcal{W})$ dans lui-même, et l'application $G \rightarrow \overline{G}$ de $\mathcal{Q}$, $\sigma(\mathcal{W})$ dans lui-même sont mesurables.

Corollaire 2 : Mesurabilité de $\overset{\circ}{F}$ - L'application $\overset{\circ}{k}(x, F)$ de $E \times \mathcal{F}$ dans $\{0, 1\}$ définie par $\overset{\circ}{k}(x, F) = 1$ si $x \in \overset{\circ}{F}$ et $\overset{\circ}{k}(x, F) = 0$ si $x \notin \overset{\circ}{F}$ est mesurable pour $\sigma(\mathcal{H}) \otimes \sigma(\mathcal{W})$. Pour toute mesure M positive bornée sur E , $\sigma(\mathcal{H})$, l'intégrale $\int_{\overset{\circ}{A}} M(dx)$ est une variable aléatoire d'espérance $\int P(x \in \overset{\circ}{A}) M(dx)$.

En effet, $\overset{\circ}{k}$ est le produit des applications mesurables $(x, F) \rightarrow (x, \overset{\circ}{F})$ de $E \times \mathcal{F}$ dans $E \times \mathcal{Q}$, et $k(x, G)$ de $E \times \mathcal{Q}$ dans $\{0, 1\}$. De même :

Corollaire 3 : Mesurabilité de $\overline{G}$. L'application $\overline{k}$ de $E \times \mathcal{Q}$ dans $\{0, 1\}$ définie par : $\overline{k}(x, G) = 1$ si $x \in \overline{G}$ et $\overline{k}(x, G) = 0$ si $x \notin \overline{G}$ est mesurable pour $\sigma(\mathcal{Q}) \otimes \sigma(\mathcal{W})$. Pour toute mesure positive bornée M sur E , $\sigma(\mathcal{Q})$, l'intégrale $\int_{\overline{A}} M(dx)$ est une variable aléatoire de $\mathcal{Q}$, $\sigma(\mathcal{W})$ d'espérance $\int P(x \in \overline{A}) M(dx)$. La mesurabilité de $\overset{\circ}{A}$ et celle de $\overline{A}$ font l'objet d'énoncés analogues.

1-13 - Ensembles aléatoires sur $(\mathcal{H}, \sigma(\mathcal{S}))$

La restriction à $\mathcal{H} \subset \mathcal{Q} \times \mathcal{H}$ de la σ -algèbre $\sigma(\mathcal{W}) \otimes \sigma(\mathcal{W})$ est engendrée par les $W_G \times \Psi^{G'} = S_G^{G'}$ ($G, G' \in \mathcal{Q}$) qui s'explicitent ainsi :

$$S_G^{G'} = \{A \supset G, A \cap G' = \emptyset\} = \{\overset{\circ}{A} \supset G, \overline{A} \cap G' = \emptyset\}$$

Il est donc indifférent de définir cette σ -algèbre $\sigma(\mathcal{S})$ sur $\mathcal{P}(E)$ lui-même, ou seulement sur l'espace quotient $\mathcal{P}(E)/\mathcal{R} = \mathcal{H}$, $\mathcal{R}$ désignant la relation : $A \mathcal{R} A'$ si $\overset{\circ}{A} = \overset{\circ}{A'}$ et $\overline{A} = \overline{A'} : \mathcal{P}(E)$ muni de $\sigma(\mathcal{S})$ est isomorphe à $\mathcal{H}$ muni de $\sigma(\mathcal{W}) \otimes \sigma(\mathcal{W})$, et les deux points de vue conduisent à travailler uniquement sur l'ouverture et l'adhérence de l'ensemble aléatoire A .

Les résultats des sections précédentes se transposent sans peine. En particulier, si D est une partie dénombrable dense, l'application $\alpha : A \rightarrow (\overline{A \cup D^c}, \overline{A \cap D})$ de $(\mathcal{P}(E), \sigma(\mathcal{C}))$ dans $(\mathcal{H}\sigma(\mathcal{S}))$ est mesurable, et, si P' est une probabilité sur $(\mathcal{P}(E), \sigma(\mathcal{C}))$, obtenue, par exemple, en prolongeant une loi spatiale, la formule

$$P(S) = P'(\alpha^{-1}(S)) \quad , \quad S \in \sigma(\mathcal{S})$$

définit une probabilité sur $(\mathcal{H}, \sigma(\mathcal{S}))$. Si, de plus, P' vérifie la propriété de continuité en probabilité, la probabilité P ainsi construite ne dépend pas du choix de la partie séparante D .

Une partie dénombrable dense D est séparante pour l'ensemble aléatoire A défini par $(\mathcal{H}, \sigma(\mathcal{S}), P)$ si on a p.s. $\bar{A} = \overline{A \cap D}$ et $\bar{A}^c = \overline{A^c \cap D}$, ou encore si l'on a, pour tout $G \in \mathcal{G}$, $V_G = V_{G \cap D}$ et $W_G = W_{G \cap D}$ p.s. De même, l'ensemble aléatoire A est p.s. continu en $x \in E$ si on a $P(x \in F_x A) = 0$. Pour que A soit p.s. continu en tout point, il faut et il suffit que pour toute partie D dénombrable on ait p.s. $A \cap D \subset \overset{\circ}{A}$ et $A^c \cap D \subset \bar{A}^c$. Lorsqu'il en est ainsi, on a p.s. $\overline{A \cap D} \subset \bar{A}$ et $\overline{A^c \cap D} \subset (\bar{A})^c$. Par suite :

Proposition 1-13-1 / Si l'ensemble aléatoire A défini par $(\mathcal{H}, \sigma(\mathcal{S}), P)$ est à la fois séparable et p.s. continu en tout $x \in E$, on a p.s. :

$$\bar{A} = \bar{\bar{A}} \quad \text{et} \quad \overset{\circ}{A} = \overset{\circ}{\bar{A}}$$

Ces relations caractérisent des ensembles bien construits, sans points isolés ni lacunes ponctuelles : on peut penser qu'un milieu poreux, par exemple, se laissera décrire comme une réalisation d'un ensemble aléatoire séparable et p.s. continu pour $(\mathcal{H}, \sigma(\mathcal{S}), P)$.

1-14 - Erosions, Dilatations et Granulométries.

Les questions que nous abordons dans cette section sont en rapport étroit avec les techniques de la Morphologie Mathématique [2], [4]. Nous supposons que l'espace E , toujours LCD, est de plus muni d'une structure de groupe abélien compatible avec sa topologie. (Dans la plupart des applications, E est simplement l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$).

On a vu dans la section 1-8 la définition des opérations $A \oplus B$ (dilatation de A par B) et $A \ominus B$ (érosion de A par B). L'opération $\oplus$ munit $\mathcal{P}(E)$ d'une structure de demi-groupe abélien (érosion et dilatation ne sont pas des opérations réciproques). D'après la Proposition 1-8-2, la dilatation (mais non l'érosion) par un compact K est une opération continue dans $\mathcal{H}$. Par dua-

lité, l'érosion par K (mais non la dilatation) est continue dans $\mathcal{G}$.

Proposition 1-14-1 / (Mesurabilité des dilatations). Soit A un ensemble aléatoire pour $(\mathcal{F}, \sigma(\mathcal{V}))$.

Pour tout compact K , $A \oplus K$ est un ensemble aléatoire sur $(\mathcal{F}, \sigma(\mathcal{V}))$, et l'application de $E \times \mathcal{F}$ sur $\{0,1\}$ définie par $k(x) = 1$ si $x \in A \oplus K$ et $k(x) = 0$ si $x \notin A \oplus K$ est mesurable pour $\sigma(\mathcal{F}) \otimes \sigma(\mathcal{V})$.

En effet, cette application est le produit de l'application continue $(x, F) \rightarrow (x, F \oplus K)$ de $E \times \mathcal{F}$ dans lui-même par l'application mesurable de la Proposition 1-11-4.

Corollaire : Pour toute mesure positive M bornée sur E , $\sigma(\mathcal{F})$, l'intégrale $\int_{A \oplus K} M(dx)$ est une variable aléatoire d'espérance $\int P(x \in A \oplus K) M(dx)$.

Proposition 1-14-2 / Soit $K \in \mathcal{K}$ un compact. L'application $\alpha : A \rightarrow A \oplus K$ est une application mesurable de $\mathcal{F}$ dans lui-même.

On vérifie immédiatement $\alpha(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}$. Comme les $V_{K'}$, $K' \in \mathcal{K}$ engendrent $\sigma(\mathcal{V})$, il faut montrer $\alpha^{-1}(V_{K'}) \in \sigma(\mathcal{V})$. Soit B_n une suite d'ouverts relativement compacts vérifiant $B_n \supset \bar{B}_{n+1}$ et $\bigcap_n B_n = \{0\}$ (élément neutre de E). D'après le corollaire 2 du Théorème 1-2-1, la suite décroissante $(A \oplus \bar{B}_n) \ominus K$ converge vers

$$\bigcap_n [(A \oplus \bar{B}_n) \ominus K] = [\bigcap_n (A \oplus \bar{B}_n)] \ominus K = A \ominus K$$

Si K' est un compact, on en déduit :

$$\alpha^{-1}(V_{K'}) = \bigcap_n \{(A \oplus \bar{B}_n) \ominus K \in V_{K'}\} = \bigcap_n \{[(A \oplus B_n) \ominus K] \cap K' \neq \emptyset\}$$

Soit alors D' une partie dénombrable dense dans K' . L'ouvert $(A \oplus B_n) \ominus K$ rencontre K' si et seulement si il rencontre D' . Par suite

$$\alpha^{-1}(V_{K'}) = \bigcap_n \bigcup_{x \in D'} \{x \in (A \oplus B_n) \ominus K\} = \bigcap_n \bigcup_{x \in D'} \{x \in (A \oplus \bar{B}_n) \ominus K\}$$

Mais l'ensemble $\{x \in (A \oplus \bar{B}_n) \ominus K\} = \{K' \oplus \{x\} \subset A \oplus \bar{B}_n\}$ est fermé dans $\mathcal{F}$, d'après la continuité de $\oplus$, d'où résulte $\alpha^{-1}(V_{K'}) \in \sigma(\mathcal{V})$ et la mesurabilité de l'application α .

Corollaire 1 : (Mesurabilité des érosions) Si A est un ensemble aléatoire sur $\mathcal{F}$, $\sigma(\mathcal{U})$, pour tout compact K , $A \ominus K$ est un ensemble aléatoire sur $\mathcal{F}$, $\sigma(\mathcal{U})$, et l'application de $E \times \mathcal{F}$ sur $\{0,1\}$ définie par $k(x) = 1$ si $x \in A \ominus K$ et $k(x) = 0$ si $x \notin A \ominus K$ est mesurable pour $\sigma(\mathcal{F}) \otimes \sigma(\mathcal{U})$.

Corollaire 2 : Dans les mêmes conditions, pour toute mesure M positive bornée sur E , $\sigma(\mathcal{F})$, l'intégrale $\int_{A \ominus K} M(dx)$ est une variable aléatoire d'espérance $\int P(x \in A \ominus K) M(dx)$.

Définition - A tout $A \in \mathcal{F}$ et à tout compact $K \subset E$ on associe les ensembles $A^K = (A \ominus \check{K}) \ominus K$ et $A_K = (A \ominus \check{K}) \ominus K$. On dit que A_K est l'ouverture de A selon le compact K , et A^K la fermeture de A selon le compact K .

On a vu dans la section 1-8 certaines propriétés de A^K et de A_K .

Proposition 1-14-3 / Mesurabilité des granulométries. Si A est un ensemble aléatoire sur $(\mathcal{F}, \sigma(\mathcal{U}))$, il en est de même de A^K et de A_K pour tout compact K non vide. De plus, les applications de $E \times \mathcal{F}$ sur $\{0,1\}$ définies par $k_F(x) = 1$ si $x \in A^K$ et 0 si $x \notin A^K$, et par $k_w(x) = 1$ si $x \in A_K$ et 0 si $x \notin A_K$ sont mesurables pour $\sigma(\mathcal{F}) \otimes \sigma(\mathcal{U})$.

En effet, ces applications se mettent sous la forme de produits d'applications mesurables.

Corollaire : Pour toute mesure positive bornée M sur E , $\sigma(\mathcal{F})$, les intégrales $\int_A M(dx)$ et $\int_{A_K} M(dx)$ sont des variables aléatoires admettant respectivement les espérances $\int P(x \in A^K) M(dx)$ et $\int P(x \in A_K) M(dx)$.

Définition des Granulométries - Si B_λ est un demi-groupe continu dans K_0 , c'est-à-dire (Théorème 1-8-1) si B_λ est l'homothétique λB , $\lambda \geq 0$ d'un compact convexe B non vide, posons :

$$F_-(\lambda) = 1 - P(x \in A_{B_\lambda}), \quad F_+(\lambda) = P(x \in A^{B_\lambda})$$

On vérifie alors que $F_-(\lambda)$ et $F_+(\lambda)$ sont des fonctions non décroissantes et continues à droite de $\lambda > 0$. Elles constituent les fonctions de répartition des variables aléatoires :

$$\Lambda = \sup \{ \lambda : \exists y \in \mathbb{R}_n, x \in B_\lambda \ominus \{y\} \subset A \}$$

$$\Lambda' = \sup \{ \lambda : \exists y \in \mathbb{R}_n, x \in B_\lambda \ominus \{y\} \subset A^c \}$$

et représentent donc les granulométries (au point x) de l'ensemble aléatoire A et de son complé-

mentaire A^c selon le compact convexe B .

Dans le cas stationnaire ($P(V \oplus \{x\}) = P(V)$ pour tout $V \in \sigma(\mathcal{V})$), ces granulométries ne dépendent plus du point d'appui x , et les propositions ci-dessus fondent la possibilité de l'inférence statistique.

1-15 - Schémas aléatoires de Germes.

Dans beaucoup d'applications, on doit introduire des ensembles aléatoires dont l'intersection avec un ensemble borné contient au plus un nombre fini de points distincts (germes d'un processus de cristallisation, etc...). Pour tout ouvert $G \in \mathcal{G}$, nous désignerons par $\mathcal{H}^{(n)}(G)$ le sous-espace de $\mathcal{H}(E)$ constitué de fermés $A \in \mathcal{H}$ contenant au plus n points distincts appartenant à G .

Proposition 1-15-1 / $\mathcal{H}^{(n)}(G)$ est un sous-espace compact de $\mathcal{H}(E)$ ($G \in \mathcal{G}$)

En effet, soit A_k une suite de fermés avec $A_k \in \mathcal{H}^{(n)}(G)$. Il faut montrer que, si la suite A_k converge vers A dans l'espace compact $\mathcal{H}(E)$, on a $A \in \mathcal{H}^{(n)}(G)$. En effet, supposons qu'il existe $n+1$ points distincts $x_i \in A \cap G$ ($i = 1, 2, \dots, n+1$). Soient G_i des ouverts disjoints, avec $x_i \in G_i \subset G$. Pour k assez grand, A_k rencontre chacun des G_i et contient donc au moins $n+1$ points distincts. Mais cela contredit $A_k \in \mathcal{H}^{(n)}(G)$. Donc $A \in \mathcal{H}^{(n)}(G)$.

Corollaire : Si A est l'ensemble aléatoire défini par $(\mathcal{H}, \sigma(\mathcal{V}))$, les sous-ensembles suivants de $\mathcal{H}(E)$ sont mesurables (appartiennent à $\sigma(\mathcal{V})$) :

$$\begin{aligned} \sim \mathcal{H}^{(n)}(G) &= \{ \text{l'ouvert } G \text{ rencontre } A \text{ en } n \text{ points distincts au plus} \} \\ \sim \mathcal{H}^{(\omega)}(G) &= \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{H}^{(n)}(G) = \{ A \cap G \text{ contient un nombre fini de points} \} \end{aligned}$$

En particulier, si $\mathcal{B}$ désigne une base dénombrable de la topologie de E , constituée d'ouverts relativement compacts, l'ensemble $\{ \text{pour tout compact } K \in \mathcal{C}, A \cap K \text{ contient au plus un nombre fini de points distincts} \}$ est mesurable. En effet, cet ensemble est :

$$\bigcap_{B \in \mathcal{B}} \mathcal{H}^{(\omega)}(B) \in \sigma(\mathcal{V})$$

Appelons schéma de germes un ensemble A dénombrable et sans points d'accumulation.

Proposition 1-15-2 / $A \in \mathcal{H}$ est un schéma de germes si et seulement si $A \in \bigcap_{B \in \mathcal{B}} \mathcal{H}^{(\omega)}(B)$, et l'ensemble des schémas de germes est un sous-ensemble mesurable de $\mathcal{H}$ pour $\sigma(\mathcal{V})$.

En effet, les ouverts relativement compacts $B \in \mathcal{B}$ recouvrant E , $A \in \mathcal{H}$ admet un point d'accumulation si et seulement si l'ensemble $A \cap B$ est infini pour un $B \in \mathcal{B}$. D'autre part, tout $A \in \bigcap_{B \in \mathcal{B}} \mathcal{H}^{(\omega)}(B)$ est dénombrable, puisque $\mathcal{B}$ est dénombrable.

Nous dirons que l'ensemble fermé aléatoire A défini par $(\mathcal{H}, \sigma(\mathcal{V}), P)$ est un schéma aléatoire de germe si A est p.s. un schéma de germe, c'est-à-dire si $P\left(A \in \bigcap_{B \in \mathcal{B}} \mathcal{H}^{(\omega)}(B)\right) = 1$.

Proposition 1-15-3 / Si A est un schéma aléatoire de germe, le nombre $N(B)$ des points de A contenu dans un ouvert B relativement compact est une variable aléatoire pour $(\mathcal{H}, \sigma(\mathcal{V}))$. Lorsque B décrit une base $\mathcal{B}$ de la topologie de E , les variables aléatoires $N(B)$ engendrent la restriction de la σ -algèbre $\sigma(\mathcal{V})$ à l'ensemble $\{A \text{ est un schéma aléatoire de germe}\}$.

Cela résulte aussitôt de la Proposition 1-15-2, puisque les ensembles $\{N(B) = 0\} = V_B$ engendrent déjà $\sigma(\mathcal{V})$ pour $B \in \mathcal{B}$.

CHAPITRE 2 - PARTITIONS ALEATOIRES

Dans ce chapitre et dans les suivants, l'exposé sera plus concis, et nous omettrons souvent certaines démonstrations qui se reconstituent sans peine à partir des propositions du chapitre 1. En ce qui concerne les notations (autre celles de la section 1-1), nous désignerons ici par :

$\Pi(E)$ - ou Π , l'ensemble des partitions de l'espace $(LCD)E$.

$\Pi_g(E)$ - ou Π_g , l'ensemble des partitions de E dont les classes sont ouvertes ou réduites à un point.

R_A - le sous-ensemble de Π_g constitué des partitions $\omega \in \Pi_g$, telles que $A \subset E$ soit contenu dans une classe modulo ω .

R^A - le complémentaire dans Π_g de R_A .

2-1 - L'ESPACE COMPACT $\Pi_g(E)$

Une partition $\omega \in \Pi(E)$ de l'espace E peut être définie par la famille $(\Gamma_i)_{i \in I}$ des classes modulo ω ($\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$ pour $i \neq j$, et $\bigcup_I \Gamma_i = E$); ou encore par son graphe

$$C = \bigcup_I \Gamma_i \times \Gamma_i \subset E \times E$$

qui vérifie les trois axiomes constitutifs suivants :

$$1 - \forall x \in E, (x, x) \in C$$

$$2 - \forall (x, y) \in E \times E, (x, y) \in C \Rightarrow (y, x) \in C$$

$$3 - \forall x, y, z \in E, (x, y) \in C \text{ et } (y, z) \in C \Rightarrow (x, z) \in C$$

L'espace Π_g - D'un point de vue physique, on ne pourra en général vérifier expérimentalement une proposition relative à une partition $\omega \in \Pi$ que si son énoncé ne fait pas intervenir les frontières des classes modulo ω : l'attribution des points frontières restera douteuse, et l'on ne pourra affirmer que deux points x et y sont équivalents modulo ω que si l'on peut trouver deux voisinages ouverts de ces points contenus dans une même classe Γ_i (donc aussi dans $\overset{\circ}{\Gamma}_i$). On devra donc considérer comme identiques deux partitions dont les classes admettent les mêmes ouvertures. Ce point de vue revient à remplacer $\omega \in \Pi$ par la partition ω_g dont les classes sont :

- celles des $\overset{\circ}{\Gamma}_1$ qui ne sont pas vides.
- les $\{x\}$, pour x appartenant à l'ensemble frontière (fermé) :

$$F = \bigcap_I (\overset{\circ}{\Gamma}_1)^c = \bigcup_I \text{Fr } \Gamma_1$$

On passe de ω à ω_g en ouvrant les classes et en atomisant les frontières. Nous désignerons par $\Pi_g(E)$ l'espace des partitions ainsi obtenues, dont les classes sont ouvertes ou réduites à un point.

Proposition 2-1-1 / Si C est le graphe de $\omega \in \Pi$, et Δ la diagonale de $E \times E$, l'ensemble $\overset{\circ}{C} \cup \Delta$ est le graphe de la partition $\omega_g \in \Pi_g$ déduite de ω en ouvrant les classes et en atomisant les frontières. Pour qu'une partition $\omega \in \Pi$ de graphe C soit dans Π_g , il faut et il suffit que l'on ait $C = \overset{\circ}{C} \cup \Delta$, ou encore que $C \cap \Delta^c$ soit ouvert dans $E \times E$.

La première partie et l'équivalence $C = \overset{\circ}{C} \cup \Delta \Leftrightarrow \omega \in \Pi_g$ se démontrent immédiatement. La condition $\overset{\circ}{C} \cup \Delta = C$ entraîne que $C \cap \Delta^c = \overset{\circ}{C}$ est ouvert. Inversement, si $C \cap \Delta^c$ est ouvert, on a $C \cap \Delta^c \subset \overset{\circ}{C}$, d'où $\overset{\circ}{C} \subset C \subset \overset{\circ}{C} \cup \Delta$, et $C = \overset{\circ}{C} \cup \Delta$, puisque $C \cup \Delta = C$.

Corollaire : Si $\overset{\circ}{C}$ est un ensemble ouvert dans $E \times E$, $\overset{\circ}{C} \cup \Delta$ est le graphe d'une partition $\omega \in \Pi_g$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

$$2' - G_1 \times G_2 \subset \overset{\circ}{C} \Rightarrow G_2 \times G_1 \subset \overset{\circ}{C}, \quad G_1, G_2 \in \mathcal{Q}.$$

$$3' - G_1 \times G_2 \subset \overset{\circ}{C} \Rightarrow G_1 \times G_1 \subset \overset{\circ}{C}, \quad G_1, G_2 \in \mathcal{Q}.$$

Lorsque $\overset{\circ}{C}$ est ouvert, on vérifie facilement, en effet, que ces deux conditions sont équivalentes aux axiomes 2 et 3 ci-dessus.

Il existe ainsi une correspondance bijective entre Π_g et le sous-ensemble de $\mathcal{Q}(E \times E)$ constitué des ouverts $\overset{\circ}{C} \subset E \times E$ vérifiant les conditions 2' et 3'. Nous identifierons Π_g avec ce sous-ensemble, et nous le munirons de la topologie induite par celle de $\mathcal{Q}(E \times E)$, qui est la topologie $\mathcal{C}(\mathcal{W})$ compacte et dénombrable. Cette topologie de $\mathcal{Q}(E \times E)$ est engendrée par les $W_{K \times K'}$ ($K, K' \in \mathcal{K}(E)$) et les $W^{G \times G'}$ ($G, G' \in \mathcal{Q}(E)$). Mais les axiomes 2' et 3' montrent que $W_{K \times K'}$ et $W_{(K \cup K') \times (K \cup K')} = R_{K \cup K'}$ (resp. $W^{G \times G'}$ et $W^{(G \cup G') \times (G \cup G')} = R^{G \cup G'}$) admettent la même restriction sur Π_g . Ainsi, la topologie de Π_g est engendrée par les R_K et les R^G ($K \in \mathcal{K}(E)$, $G \in \mathcal{Q}(E)$).

Proposition 2-1-2 / L'espace $\Pi_g(E)$ est compact et de type dénombrable.

Il suffit de montrer que Π_g est fermé dans $\mathcal{G}(E \times E)$. Soit donc $\overset{\circ}{C}_n$ une suite d'éléments de $\mathcal{G}(E \times E)$ vérifiant 2' et 3' et convergeant vers $\overset{\circ}{C}$ dans $\mathcal{G}(E \times E)$. Montrons que $\overset{\circ}{C}$ vérifie les axiomes 2 et 3 des graphes (d'où résultera que $\overset{\circ}{C} \cup \Delta$ est le graphe d'une partition ω , et la proposition 2-1-1 donnera $\omega \in \Pi_g$).

Soient donc x, y et z trois points de E , avec $x \neq y$ et $y \neq z$, $(x, y) \in \overset{\circ}{C}$ et $(y, z) \in \overset{\circ}{C}$. Soient B_x, B_y, B_z des voisinages ouverts relativement compacts de ces points vérifiant :

$$\overline{B}_x \times \overline{B}_y \subset \overset{\circ}{C}, \quad \overline{B}_y \times \overline{B}_z \subset \overset{\circ}{C}$$

Comme $\overset{\circ}{C}_n$ converge vers $\overset{\circ}{C}$ dans $\mathcal{G}(E \times E)$, on a $\overline{B}_x \times \overline{B}_y \subset \overset{\circ}{C}_n$ et $\overline{B}_y \times \overline{B}_z \subset \overset{\circ}{C}_n$, donc a fortiori $B_x \times B_y \subset \overset{\circ}{C}_n$ et $B_y \times B_z \subset \overset{\circ}{C}_n$ pour n assez grand. Comme $\overset{\circ}{C}_n$ vérifie 2' et 3', on a aussi $B_y \times B_x \subset \overset{\circ}{C}_n$ et $B_x \times B_z \subset \overset{\circ}{C}_n$. Mais $W_{B_y \times B_x}$ et $W_{B_x \times B_z}$ sont fermés dans $\mathcal{G}(E \times E)$. Or a donc $B_y \times B_x \subset \overset{\circ}{C}$ et $B_x \times B_z \subset \overset{\circ}{C}$, et $\overset{\circ}{C}$ vérifie les axiomes 2 et 3 des graphes, ce qui achève la démonstration.

On note qu'une partition $\omega \in \Pi_g$ contient au plus une infinité dénombrables de classes non réduites à un point (puisque E est LCD). Désignons par $\Pi_g^{(n)} \subset \Pi_g$ l'ensemble des partitions $\omega \in \Pi_g$ admettant au plus n classes ouvertes. ($n = 0, 1, 2, \dots$)

Proposition 2-1-3 / $\Pi_g^{(n)}$ est un sous-espace compact de Π_g .

Montrons, en effet, que $\Pi_g^{(n)}$ est fermé dans l'espace compact Π_g . Soient $\omega_k \in \Pi_g^{(n)}$ une suite de partitions dont les graphes $\overset{\circ}{C}_k$ convergent vers $\overset{\circ}{C}$ dans $\mathcal{G}(E \times E)$. $\overset{\circ}{C} \cup \Delta$ est le graphe d'une partition $\omega \in \Pi_g$, et il faut montrer $\omega \in \Pi_g^{(n)}$. Si $\overset{\circ}{C}$ est vide, on a $\omega \in \Pi_g^{(0)} \subset \Pi_g^{(n)}$. Si $\overset{\circ}{C}$ n'est pas vide, soient $x_1, \dots, x_{n+1}$ $n+1$ points appartenant à des classes ouvertes de ω (c'est-à-dire $(x_i, x_i) \in \overset{\circ}{C}$). Soit, pour chaque i , B_i un voisinage ouvert relativement compact de x_i avec $\overline{B}_i \times \overline{B}_i \subset \overset{\circ}{C}$. Pour k assez grand, on a donc $\overline{B}_i \times \overline{B}_i \subset \overset{\circ}{C}_k$ ($i = 1, 2, \dots, n+1$). Comme ω_k admet au plus n classes ouvertes distinctes, on peut, pour chaque k assez grand, trouver deux indices i_k, j_k avec $i_k \neq j_k$ et $B_{i_k} \times B_{j_k} \subset \overset{\circ}{C}_k$. Comme il n'y a que $n(n-1)$ couples (i, j) , l'un de ces couples, soit (i_0, j_0) figure une infinité de fois dans la suite (i_k, j_k) , et on en déduit $B_{i_0} \times B_{j_0} \subset \overset{\circ}{C}$. Or $B_{i_0} \times B_{j_0} \subset \overset{\circ}{C}$ entraîne que x_{i_0} et x_{j_0} appartiennent à la même classe ouverte modulo ω , d'où $\omega \in \Pi_g^{(n)}$ - ce qui établit la proposition.

Un élément $(\overset{\circ}{A}, \overline{A})$ de $\mathcal{H}(E)$ peut aussi bien être représenté par le couple $(\overset{\circ}{A}, \overline{A}^c) \in \mathcal{G}(E) \times \mathcal{G}(E)$. Plus précisément, l'application $(\overset{\circ}{A}, \overline{A}) \rightarrow (\overset{\circ}{A}, \overline{A}^c)$ est un homéomorphisme de $\mathcal{H}$ sur le sous-

ensemble de $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$ constitué des couples (G, G') d'ouverts G et G' disjoints. Mais $(\overset{\circ}{A}, \overline{A}^c)$ définit aussi une partition $\omega \in \Pi_g^{(2)}$ de E comportant au plus deux classes ouvertes $\overset{\circ}{A}$ et $\overline{A}^c$. Inversement, si une partition $\omega \in \Pi_g$ possède au plus deux classes ouvertes G_1 et G_2 , il lui correspond deux éléments possibles (G_1, G_2) et (G_2, G_1) de $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$, puisqu'on ne sait pas laquelle de ces deux classes ouvertes doit être appelée $\overset{\circ}{A}$. Désignons donc par $\mathcal{R}_c$ la relation d'équivalence $A \mathcal{R}_c A'$ si $A = A'$ ou $A^c = A'$:

Proposition 2-1-4 / L'espace $\Pi_g^{(2)}$ est isomorphe à l'espace quotient $\mathcal{H}/\mathcal{R}_c$.

En effet, dans $\mathcal{H}$, les ouverts saturés pour la relation $\mathcal{R}_c$ sont engendrés par les $(W_K \times \mathcal{H}) \cup (G \times V_K)$ et les $(W^G \times \mathcal{H}) \cup (G \times V_G)$, qui correspondent bijectivement aux R_K et aux R^G .

2-2 - σ -ALGÈBRES ET PROBABILITÉS SUR Π et Π_g .

Sur $\Pi(E)$, la plus petite σ -algèbre compatible avec une loi spatiale est engendrée par les événements $\{x \text{ équivalent à } y \text{ modulo } \omega\}$ pour $x, y \in E$, c'est-à-dire par les R_I , I partie finie de E .

Les $R_{I_1, \dots, I_n}^{I_1', \dots, I_n'}$ constituent une semi-algèbre de Boole, soit $\mathcal{M}$, qui engendre la σ -algèbre maigre $\sigma(\mathcal{M}) = \sigma(R_I)$. Mais $\mathcal{M}$ engendre aussi une topologie $\mathcal{C}(\mathcal{M})$, ou topologie maigre.

Proposition 2-2-1 / $\Pi(E)$ est compact pour la topologie maigre.

D'après la Proposition 1-9-1, $\mathcal{P}(E \times E)$ est compact pour la topologie maigre. Il faut vérifier que les axiomes 1, 2 et 3 des graphes définissent des sous-ensembles fermés de $\mathcal{P}(E \times E)$. Or, ces ensembles sont :

$$\text{Pour l'axiome 1 : } \bigcap_{x \in E} S_{\{x, x\}}$$

$$\text{Pour l'axiome 2 : } \bigcap_{x \in E} (S_{\{x, y\}} \cup S_{\{y, x\}})_{y \in E}$$

$$\text{Pour l'axiome 3 : } \bigcap_{x \in E} \bigcap_{y \in E} \bigcap_{z \in E} (S_{\{x, y\}} \cup S_{\{y, z\}} \cup S_{\{x, z\}})$$

Ces trois ensembles sont fermés dans $\mathcal{P}(E \times E)$, donc aussi leur intersection Π .

Corollaire : La semi-algèbre maigre $\mathcal{M}$ est une classe compacte dans Π et toute loi spatiale $P(R_{I_1, \dots, I_n}^{I'_1, \dots, I'_k})$ se prolonge en une probabilité sur la σ -algèbre maigre.

Nous allons maintenant munir Π_g de la σ -algèbre engendrée par les ouverts de cet espace compact. On vérifie sans peine que cette σ -algèbre est également engendrée par les R_G , $G \in \mathcal{G}(E)$, et nous la désignerons en général par $\sigma(R_G)$. La compacité de Π_g permet de construire des probabilités sur $\sigma(R_G)$. En raisonnant comme nous l'avons fait à propos de la Proposition 1-10-3, on peut démontrer la proposition suivante, qui permet de construire effectivement des probabilités sur $\sigma(R_G)$.

Proposition 2-2-1 / Soit D_0 une partie dénombrable et dense de E , et posons $D = D_0 \times D_0 \subset E \times E$. Soit α l'application : $\alpha(c) = \overline{C \cup D^c}$ de $\mathcal{P}(E \times E)$ dans $\mathcal{P}(E \times E)$. Si C est le graphe d'une partition $\omega \in \Pi$, $\alpha(c) \cup \Delta$ est le graphe d'une partition que nous noterons $\alpha(\omega)$ et qui est dans Π_g . $\alpha : \omega \rightarrow \alpha(\omega)$ est une application mesurable de $(\Pi, \sigma(\mathcal{M}))$ dans $(\Pi_g, \sigma(R_G))$. Si P' est une probabilité sur Π muni de la σ -algèbre maigre, la formule $P(R) = P'(\alpha^{-1}(R))$, $R \in \sigma(R_G)$ définit alors une probabilité sur $(\Pi_g, \sigma(R_G))$.

Une partie D dénombrable et dense dans E est séparante pour la partition aléatoire $(\Pi_g, \sigma(R_G), P)$ si et seulement si on a pour tout ouvert $G \in \mathcal{G}(E)$: $R_G = R_{G \cap D}$ p.s. De même, une partition aléatoire est p.s. continue en $x_0 \in E$ si $P(x_0 \in F) = 0$, F désignant la réunion des classes d'équivalence réduites à un point. Enfin, pour $x \in E$ donné, l'on désigne par $\overset{\circ}{\Gamma}_x$ l'ouverture de la classe de x modulo une partition aléatoire $(\Pi_g, \sigma(R_G), P)$, l'application de $E \times \Pi_g$ sur $\{0,1\}$, définie par $k(x,y) = 1$ si $y \in \overset{\circ}{\Gamma}_x$, $k(x,y) = 0$ si $y \notin \overset{\circ}{\Gamma}_x$ est mesurable pour $\sigma(\mathcal{H}) \otimes \sigma(R_G)$. M désignant une mesure positive sur $(E, \sigma(\mathcal{G}))$, $\int_{\overset{\circ}{\Gamma}_x} M(dy)$ est alors une variable aléatoire sur $(\Pi_g, \sigma(R_G))$ et admet l'espérance $\int P(y \in \overset{\circ}{\Gamma}_x) M(dy)$.

CHAPITRE 3 - FONCTIONS ALÉATOIRES

3-1 - NOTATIONS

Dans ce qui suit, on désigne par :

$\Phi(E)$ - l'ensemble des fonctions sur E (applications de E dans la droite achevée $[-\infty, +\infty]$).

$\Phi_f(E)$ - le sous-espace de Φ constitué des fonctions semi-continues supérieurement (s.c.s.).

$\Phi_g(E)$ - le sous-espace de Φ constitué des fonctions semi-continues inférieurement (s.c.i.).

$\Phi_h(E)$ - l'ensemble des couples $(\overset{\circ}{\varphi}, \overline{\varphi})$ vérifiant $\overset{\circ}{\varphi} \in \Phi_g$, $\overline{\varphi} \in \Phi_f$ et $\overset{\circ}{\varphi} \leq \overline{\varphi}$.

Conformément à la méthodologie du premier chapitre, nous identifierons deux fonctions dès qu'elles auront mêmes régularisées inférieure et supérieure, et Φ_h sera ainsi lui-même identifié à l'espace quotient $\Phi/\mathcal{R}$ ($\varphi \mathcal{R} \varphi'$ si $\overset{\circ}{\varphi} = \overset{\circ}{\varphi}'$ et $\overline{\varphi} = \overline{\varphi}'$). Nous munirons Φ_f , Φ_g et Φ_h de topologies compactes, ce qui n'est possible qu'à la condition de renoncer à la structure d'espace vectoriel, mais permet, en contrepartie, de construire facilement des probabilités sur les σ -algèbres associées à ces topologies.

3-2 - LES FONCTIONNELLES $\overset{\circ}{X}$ et $\overline{X}$

A toute fonction $\varphi \in \Phi$, nous associerons les fonctionnelles sur $\mathcal{G}$:

$$\overset{\circ}{X}_{\varphi}(G) = \inf_{x \in G} \varphi(x) \quad , \quad \overline{X}_{\varphi}(G) = \sup_{x \in G} \varphi(x) \quad , \quad G \in \mathcal{G}$$

que nous prolongerons sur $\mathcal{K}$ en posant :

$$\overset{\circ}{X}_{\varphi}(K) = \sup_{G \supset K} \overset{\circ}{X}_{\varphi}(G) \quad , \quad \overline{X}_{\varphi}(K) = \inf_{G \supset K} \overline{X}_{\varphi}(G) \\ G \in \mathcal{G} \qquad \qquad \qquad G \in \mathcal{G}$$

Proposition 3-2-1 / Pour une fonction $\varphi \in \Phi$ donnée, la fonction $\overline{X}_{\varphi}(G)$ (resp. $\overset{\circ}{X}_{\varphi}(G)$) est s.c.i. (resp. s.c.s.) sur $\mathcal{G}(E)$; la fonction $\overline{X}_{\varphi}(K)$ (resp. $\overset{\circ}{X}_{\varphi}(K)$) est s.c.s. (resp. s.c.i.) sur $\mathcal{K}(E)$ muni de la topologie myope. Pour $K = \{x\}$, $x \in E$, en particulier, on pose

$\bar{\varphi}(x) = \bar{X}_{\varphi}(\{x\})$ et $\bar{\varphi}^{\circ}(x) = \bar{X}_{\varphi}^{\circ}(\{x\})$: $\bar{\varphi} \in \Phi_f$ est la régularisée supérieure (plus petite majorante s.c.s.) de φ et $\bar{\varphi}^{\circ} \in \Phi_g$ sa régularisée inférieure (plus grande minorante s.c.i.). On a alors $\bar{X}_{\varphi} = \bar{X}_{\bar{\varphi}}$ et $\bar{X}_{\varphi}^{\circ} = \bar{X}_{\bar{\varphi}^{\circ}}$.

Montrons que $\bar{X}_{\varphi}$ est s.c.i. sur $\mathcal{G}$. Soit $\varepsilon > 0$ et $x \in G$ avec $\varphi(x) \geq \bar{X}_{\varphi}(G) - \varepsilon$. Pour tout ouvert $G' \in \mathcal{W}_{\{x\}}$ on a alors $\bar{X}_{\varphi}(G') \geq \varphi(x) \geq \bar{X}_{\varphi}(G) - \varepsilon$, et $\bar{X}_{\varphi}$ est s.c.i. sur $\mathcal{G}$. Montrons que $\bar{X}_{\varphi}$ est s.c.s. sur $\mathcal{K}$. Pour $K \in \mathcal{K}$ et $\varepsilon > 0$, soit G un ouvert avec $G \supset K$ et $\bar{X}_{\varphi}(G) \leq \bar{X}(K) + \varepsilon$. Pour tout compact $K' \subset G$, on a alors $\bar{X}_{\varphi}(K') \leq \bar{X}(K) + \varepsilon$, ce qui établit la semi-continuité supérieure. Pour $K = \{x\}$, on a :

$$\bar{\varphi}(x) = \inf_{G \ni x} \sup_{x' \in G} \varphi(x') \\ G \in \mathcal{G}$$

de sorte que $\bar{\varphi}$ est la régularisée supérieure de φ . On vérifie sans peine l'égalité $\bar{X}_{\varphi} = \bar{X}_{\bar{\varphi}}$. Les énoncés relatifs à $\bar{X}_{\varphi}^{\circ}$ résultent ensuite de $-\bar{X}_{\varphi}^{\circ} = \bar{X}_{-\varphi}$.

Corollaire : Inversement, on a :

$$\bar{X}_{\varphi}(G) = \sup \{ \bar{X}_{\varphi}(K) , K \in \mathcal{K} , K \subset G \} , \quad G \in \mathcal{G}$$

En effet, on a évidemment $\sup_{K \subset G} \bar{X}_{\varphi}(K) \leq \bar{X}_{\varphi}(G)$. Inversement, considérons une suite croissante d'ouverts relativement compacts avec $\bar{B}_n \subset B_{n+1}$ et $\bigcup_n B_n = G$. Les B_n convergent vers G dans $\mathcal{G}$. On a $\bar{X}_{\varphi}(B_n) \leq \bar{X}_{\varphi}(G)$, mais aussi $\lim \bar{X}_{\varphi}(B_n) \geq \bar{X}_{\varphi}(G)$ ($\bar{X}_{\varphi}$ étant s.c.i.), d'où $\bar{X}_{\varphi}(G) = \lim \bar{X}_{\varphi}(B_n)$. Les inégalités $\bar{X}_{\varphi}(B_n) \leq \bar{X}_{\varphi}(\bar{B}_n) \leq \bar{X}_{\varphi}(G)$ donnent alors $\lim \bar{X}_{\varphi}(\bar{B}_n) = \bar{X}_{\varphi}(G)$, d'où $\bar{X}_{\varphi}(G) = \sup_{K \subset G} \bar{X}_{\varphi}(K)$.

Proposition 3-2-2 / Une application $\bar{X}$ de $\mathcal{P}_f$ dans $[-\infty, +\infty]$ est la fonctionnelle $\bar{X}_{\varphi}$ associée à une fonction (nécessairement unique) $\varphi \in \Phi_f$ si et seulement si elle vérifie la condition :

$$1 - \quad \bar{X} \left(\bigcup_i G_i \right) = \sup_i \bar{X}(G_i)$$

pour toute famille $(G_i)_{i \in I}$ d'ouverts $G_i \in \mathcal{G}$. La fonction $\varphi \in \Phi_f$ telle que $\bar{X} = \bar{X}_{\varphi}$ est alors définie par :

$$2 - \quad \varphi(x) = \inf \{ \bar{X}(G) , G \in \mathcal{G} , G \ni x \}$$

La condition est manifestement nécessaire, et pour $\varphi \in \Phi_f$, l'égalité $\bar{\varphi} = \varphi$ montre que X_φ vérifie 2 - ce qui établit aussi l'unité de φ -.

Inversement, soit $\bar{X}$ une fonction sur $\mathcal{Q}$ vérifiant 1. Définissons $\varphi(x)$ par la formule 2. On vérifie immédiatement $\varphi \in \Phi_f$. Il reste à montrer $\bar{X}_\varphi = \bar{X}$. D'après 2, pour tout ouvert $B \in \mathcal{Q}$ et tout $x \in B$, on a $\varphi(x) \leq \bar{X}(B)$, d'où $\bar{X}_\varphi(B) \leq \bar{X}(B)$. Montrons l'inégalité inverse. Par définition, on a $\bar{X}_\varphi(B) \geq \varphi(x)$ pour tout $x \in B$. $\bar{X}$ est (d'après 1) une fonction croissante sur $\mathcal{Q}$. Etant donné $\varepsilon > 0$, on peut donc, d'après 2, trouver pour chaque $x \in B$ un voisinage ouvert $B_x \subset B$ avec $\bar{X}(B_x) \leq \varphi(x) + \varepsilon \leq \bar{X}_\varphi(B) + \varepsilon$. Mais $B = \bigcup_{x \in B} B_x$, et la condition 1 donne :

$$\bar{X}(B) = \sup_{x \in B} \bar{X}(B_x) \leq \bar{X}_\varphi(B) + \varepsilon$$

d'où $\bar{X}(B) \leq \bar{X}_\varphi(B)$ et l'égalité.

Corollaire : Pour $K \in \mathcal{K}$, on a $\bar{X}_\varphi(K) = \sup_{x \in K} \bar{\varphi}(x)$

On a évidemment $\sup_{x \in K} \bar{\varphi}(x) \leq \bar{X}_\varphi(K)$. Si l'inégalité est stricte, chaque $x \in K$ admet un voisinage B_x avec $\bar{X}_\varphi(B_x) \leq a < \bar{X}_\varphi(K)$. On déduit de 1 $\bar{X}_\varphi(G) < \bar{X}_\varphi(K)$, avec $G = \bigcup_{x \in K} B_x$, mais cela est impossible puisque $G \supset K$.

3-3 - LES ESPACES COMPACTS Φ_f , Φ_g , et Φ_h .

Dans ce qui suit $\bar{R}$ désignera la droite achevée $[-\infty, +\infty]$. Dans l'espace produit $E \times \bar{R}$, considérons un ensemble C vérifiant la condition :

$$1 - \forall x \in E, \forall r \in \bar{R}, (x, r) \in C \Rightarrow \{x\} \times [-\infty, r] \subset C$$

A cet ensemble $C \in \mathcal{P}(E \times \bar{R})$ est associée la fonction $\varphi \in \Phi$ définie par $\varphi(x) = \sup \{r, (x, r) \in C\}$ ou $\varphi(x) = -\infty$ si $\{x, (x, r) \in C\} = \emptyset$. Nous dirons que C est un graphe de φ . Inversement, si $\varphi \in \Phi$ est une fonction donnée, pour tout $x \in E$, considérons l'ensemble C_x défini (indifféremment) par $C_x = \{r \in \bar{R}, r < \varphi(x)\}$ ou $C_x = \{r \in \bar{R}, r \leq \varphi(x)\}$. L'ensemble $C = \bigcup_{x \in E} \{x\} \times C_x$ vérifie 1 et constitue un graphe de φ . Deux graphes C et C' sont associés à une même fonction $\varphi \in \Phi$ si et seulement si leurs coupes C_x et C'_x ont même ouverture et même fermeture dans $\bar{R}$ pour tout $x \in E$. (Cette coupe est l'intervalle $[-\infty, \varphi(x)]$ indifféremment ouvert ou fermé à droite, réduit à $\emptyset$ ou à $[-\infty]$ si $\varphi(x) = -\infty$). En remplaçant les fonctions par leurs graphes, nous allons munir Φ_f et

Φ_g des topologies définies dans le chapitre 1.

Proposition 3-3-1 / Si une fonction $\varphi \in \Phi$ admet un graphe $C \in \mathcal{P}(E \times \bar{R})$, sa régularisée supérieure $\bar{\varphi} \in \bar{\Phi}_f$ (resp. sa régularisée inférieure $\check{\varphi} \in \check{\Phi}_g$) admet le graphe $\bar{C}$, fermeture de C dans $E \times \bar{R}$ (resp. le graphe $\check{C}$, ouverture de C dans $E \times \bar{R}$).

En effet, $\mathcal{B}_x$ désignant le filtre des voisinages ouverts de $x \in E$, on a les équivalences :

$$(x, r) \notin \bar{C} \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0, \exists B \in \mathcal{B}_x : \bar{X}_\varphi(B) < r - \varepsilon \Leftrightarrow \bar{\varphi}(x) < r$$

Pour éviter toute indétermination relativement aux points à l'infini, posons :

$$E_{-\infty} = \bigcup_{x \in E} \{x\} \times \{-\infty\}, \quad E_{+\infty} = \bigcup_{x \in E} \{x\} \times \{+\infty\}$$

On a alors le résultat suivant :

Corollaire : Si φ est une fonction s.c.s. (resp. s.c.i.), et C l'un de ses graphes, le plus grand (resp. le plus petit) des graphes de φ est $\bar{C} \cup E_{-\infty}$ (resp. $\check{C} \cap E_{+\infty}^c$). L'application de Φ_f dans $\mathcal{H}(E \times \bar{R})$ (resp. de Φ_g dans $\mathcal{Q}(E \times \bar{R})$) défini par $\varphi \rightarrow \bar{C} \cup E_{-\infty}$ (resp. $\varphi \rightarrow \check{C} \cap E_{+\infty}^c$) est une bijection de Φ_f (resp. Φ_g) sur le sous-espace de $\mathcal{H}(E \times \bar{R})$ (resp. $\mathcal{Q}(E \times \bar{R})$) défini par l'axiome 2 et la condition $C \supset E_{-\infty}$ (resp. $C \cap E_{+\infty} = \emptyset$).

En effet, si $\varphi \in \Phi_f$ admet le graphe C , $\bar{\varphi} = \varphi$ admet le graphe $\bar{C}$, d'après la proposition, donc aussi le graphe $\bar{C} \cup E_{-\infty}$. Il est clair que tout autre graphe C' de φ vérifie alors $\bar{C}' \cup E_{-\infty} = \bar{C} \cup E_{-\infty}$. Inversement, si $\bar{C} \in \mathcal{H}(E \times \bar{R})$ contient $E_{-\infty}$ et vérifie 1, $\bar{C}$ est le graphe d'une fonction $\varphi \in \Phi$, donc aussi (d'après la proposition) de sa régularisée $\bar{\varphi} \in \Phi_f$, et l'on vérifie sans peine que $\bar{\varphi}$ est l'unique élément de Φ_f admettant le graphe $\bar{C}$.

Nous pouvons donc identifier Φ_f au sous-espace de $\mathcal{H}(E \times \bar{R})$ constitué des $C \in \mathcal{H}(E \times \bar{R})$ vérifiant $C \supset E_{-\infty}$ et la condition 1, et Φ_g au sous-espace des $C \in \mathcal{Q}(E \times \bar{R})$ disjoints de $E_{+\infty}$ et vérifiant 1. Nous munirons toujours Φ_f et Φ_g des topologies induites par celles de $\mathcal{H}(E \times \bar{R})$ et $\mathcal{Q}(E \times \bar{R})$. On vérifie sans peine, compte tenu de la condition 1, que la topologie de Φ_f , par exemple, est engendrée par les $V^{K'}$, $K' = K \times [a, +\infty]$, $K \in \mathcal{K}(E)$, $a \in \bar{R}$ et les $V_{G'}$, $G' = G \times]b, +\infty]$, $G \in \mathcal{G}(\bar{E})$, $b \in \bar{R}$. On en déduit :

Proposition 3-3-2 / Les ouverts de Φ_f (resp. de Φ_g) sont engendrés par les parties de Φ_f (resp.

de Φ_g) de la forme $\{\bar{X}_\varphi(G) > b\}$ et $\{\bar{X}_\varphi(K) < a\}$ (resp. $\{\dot{X}_\varphi(G) < b\}$ et $\{\dot{X}_\varphi(K) > a\}$), $G \in \mathcal{G}(E)$, $K \in \mathcal{K}(E)$, $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$.

En effet, si $G' = G \times]b, +\infty]$, $\varphi \in V_{G'}$, dans Φ_f équivaut à $\varphi(x) > b$ pour un $x \in G$, donc à $\bar{X}(G) > b$. Si $K' = K \times [a, +\infty]$, $\varphi \in V^{K'}$ équivaut à $\varphi(x) < a$ pour tout $x \in K$. Mais φ est s.c.s. et atteint sa borne supérieure sur le compact K , et $\varphi(x) < a \forall x \in K$ équivaut à $\bar{X}_\varphi(K) < a$ (corollaire de la proposition 3-2-2).

Corollaire : Une suite φ_n converge vers φ dans Φ_f (resp. dans Φ_g) si et seulement si elle vérifie les deux conditions suivantes :

$$1 - \bar{X}_\varphi(G) \leq \underline{\lim} \bar{X}_{\varphi_n}(G) \quad (\text{resp. } \dot{X}_\varphi(G) \geq \underline{\lim} \dot{X}_{\varphi_n}(G)), \quad G \in \mathcal{G}$$

$$2 - \bar{X}_\varphi(K) \geq \underline{\lim} \bar{X}_{\varphi_n}(K) \quad (\text{resp. } \dot{X}_\varphi(K) \leq \underline{\lim} \dot{X}_{\varphi_n}(K)), \quad K \in \mathcal{K}$$

De même, φ est valeur d'adhérence dans Φ_f de la suite φ_n si et seulement si

$$\bar{X}_\varphi(G) \leq \underline{\lim} \bar{X}_{\varphi_n}(G) \text{ et } \bar{X}_\varphi(K) \geq \underline{\lim} \bar{X}_{\varphi_n}(K)$$

En utilisant le Théorème 1-2-1, en tenant compte de l'axiome 1 des graphes, et en utilisant la semi-continuité supérieure (resp. inférieure) on obtient le critère de convergence suivant :

Théorème 3-3-1 (Critère de convergence) Une suite φ_n converge vers φ dans Φ_f (resp. dans Φ_g) si et seulement si elle vérifie les deux conditions suivantes :

1' - Pour tout $x \in E$, il existe une suite x_n convergeant vers x dans E telle que la suite $\varphi_n(x_n)$ converge vers $\varphi(x)$ dans $\bar{\mathbb{R}}$.

2' - Si une suite x_{n_k} converge vers x dans E , la suite $\varphi_{n_k}(x_{n_k})$ vérifie $\underline{\lim} \varphi_{n_k}(x_{n_k}) \leq \varphi(x)$ (resp. $\underline{\lim} \varphi_{n_k}(x_{n_k}) \geq \varphi(x)$).

Proposition 3-3-3 / Les espaces Φ_f et Φ_g sont compacts.

Montrons, par exemple, que Φ_f est fermé dans $\mathcal{F}(E \times \bar{\mathbb{R}})$. D'après la proposition 3-3-1 et son corollaire, il suffit de montrer que, dans $\mathcal{F}(E \times \bar{\mathbb{R}})$, les C contenant E_∞ forment un ensemble fermé, ainsi que les $C \in \mathcal{F}(E \times \bar{\mathbb{R}})$ vérifiant l'axiome 1. Le premier point est immédiat. Soit C_n une suite

convergeant vers C dans $\mathcal{H}(E \times \bar{R})$, chaque C_n vérifiant l'axiome 1 des graphes. Montrons que C vérifie cet axiome. Si $(x, r) \in C$, le critère 1' du Théorème 1-2-1 montre que (x, r) est limite d'une suite $(x_n, r_n) \in C_n$. On a alors (axiome 1) : $\{x_n\} \times [-\infty, r_n] \subset C_n$. Mais les $\{x_n\} \times [-\infty, r_n]$ convergent vers $\{x\} \times [-\infty, r]$, et l'inclusion ci-dessus passe à la limite (comme on le vérifie sans peine à l'aide du Théorème 1-2-1), d'où $\{x\} \times [-\infty, r] \subset C$, ce qui achève la démonstration.

Passons maintenant à la définition de l'espace Φ_h : nous désignerons par Φ_h le sous-espace de $\Phi_g \times \Phi_f$ constitué des couples $(\overset{\circ}{\varphi}, \bar{\varphi})$ vérifiant $\overset{\circ}{\varphi} \in \Phi_g$, $\bar{\varphi} \in \Phi_f$ et $\overset{\circ}{\varphi} \leq \bar{\varphi}$. Compte tenu de l'hypothèse supplémentaire introduite en 1-1 (il existe une partie D dense dans E ainsi que son complémentaire $D^c : \bar{D} = \overline{D^c} = E$), on montre, en raisonnant comme en 1-4, que l'application :

$$\Phi \rightarrow \Phi_g \times \Phi_f : \varphi \rightarrow (\overset{\circ}{\varphi}, \bar{\varphi})$$

de Φ dans $\Phi_g \times \Phi_f$ associant à tout $\varphi \in \Phi$ le couple formé de ses régularisées inférieure et supérieure est une application surjective de Φ sur Φ_h . Autrement dit, si $\mathcal{R}$ désigne la relation d'équivalence $\varphi \mathcal{R} \varphi' \Leftrightarrow \overset{\circ}{\varphi} = \overset{\circ}{\varphi}'$ et $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}'$, Φ_h peut être identifié à l'espace quotient $\Phi/\mathcal{R}$.

Proposition 3-3-4 / L'espace $\Phi_h = \Phi/\mathcal{R}$ est compact.

En effet, Φ_h est l'intersection dans $\mathcal{G}(E \times \bar{R}) \times \mathcal{H}(E \times \bar{R})$, qui est compact, des sous-espaces fermés $\mathcal{H}(E \times \bar{R})$ et $\Phi_g \times \Phi_f$.

3-4 - FONCTIONS ALEATOIRES

La semi-algèbre maigre $\mathcal{M}$, dans Φ , est constituée des parties de la forme :

$$\{\varphi(x_1) < r_1, \dots, \varphi(x_n) < r_n ; \varphi(x'_1) \geq r'_1, \dots, \varphi(x'_k) \geq r'_k\}$$

$(x_1, \dots, x'_k \in E, r_1, \dots, r'_k \in \bar{R})$. Comme $\mathcal{M}$ est une classe compacte, toute fonction additive appliquant $\mathcal{M}$ sur $[0, 1]$ se prolonge en une probabilité sur la σ -algèbre maigre $\sigma(\mathcal{M})$.

En munissant Φ_f et Φ_g des σ -algèbres engendrées par leurs topologies (compactes et dénombrables), nous définissons par là même les notions de fonctions aléatoires s.c.s. ou s.c.i. De même, en munissant Φ_h de sa σ -algèbre borélienne, on obtient le couple aléatoire $(\overset{\circ}{\varphi}, \bar{\varphi})$ constitué des régularisées inférieure et supérieure d'un élément de Φ . On vérifie sans peine que la σ -algèbre borélienne de Φ_f est engendrée par les variables aléatoires $\bar{X}(G)$, $G \in \mathcal{G}$ vérifiant la condition

1 de la proposition 3-2-2 ; celle de Φ_g par les variables aléatoires $\overset{\circ}{X}(G)$, $G \in \mathcal{G}$, et celle de Φ_h par les couples $(\overset{\circ}{X}(G), \bar{X}(G))$ vérifiant 1 et $\overset{\circ}{X} \leq \bar{X}$, $G \in \mathcal{G}$. On notera que les $\bar{X}(K)$, (ou $\overset{\circ}{X}(K)$) $K \in \mathcal{K}$ sont aussi des variables aléatoires sur Φ_f (Φ_g) munie de ses boréliens. Ces σ -algèbres contiennent donc les événements $\{\sup_{x \in K} \varphi(x) < a\}$ (ou $\{\inf_{x \in K} \varphi(x) < a\}$).

Il est possible de construire effectivement des probabilités sur ces σ -algèbres. Dans le cas de Φ_f , par exemple, si D est une partie dénombrable dense dans E , l'application $\alpha : C \rightarrow \overline{C \cap (D \times \mathbb{R})}$ de Φ dans Φ_f qui associe à la fonction $\varphi \in \Phi$ de graphe C la fonction $\alpha(\varphi) \in \Phi_f$ de graphe $\overline{C \cap (D \times \mathbb{R})}$ est une application mesurable de $(\Phi, \sigma(\mathcal{M}))$ dans Φ_f muni de sa σ -algèbre borélienne. Par suite, si P' est une probabilité sur $(\Phi, \sigma(\mathcal{M}))$, obtenue par exemple en prolongeant une loi spatiale, la formule $P(V) = P'(\alpha^{-1}(V))$, où V est un borélien de Φ_f , définit une probabilité sur Φ_f muni de ses boréliens.

En transposant de même les résultats du chapitre 1, on obtient sans difficultés les définitions de la séparabilité, de la continuité p.s., etc...

CHAPITRE 4 - MESURES ET CAPACITES

Nous désignerons par :

- $\Phi_g(\mathcal{Q})$ - l'ensemble des fonctions s.c.i. définies sur $\mathcal{Q}(E)$
- $\Phi_c(E)$ - ou simplement $\Phi_c \subset \Phi_g(\mathcal{Q})$ l'ensemble des fonctions s.c.i. non décroissantes définies sur $\mathcal{Q}(E)$
- $\chi(E)$ - ou $\chi \subset \Phi_c$, l'ensemble des fonctions s.c.i. non décroissantes et fortement sous-additives sur $\mathcal{Q}(E)$ (χ sera identifié à un espace de capacités)
- $\mathcal{M}(E)$ - ou $\mathcal{M} \subset \chi$, l'ensemble des fonctions s.c.i. non décroissantes et fortement additives sur $\mathcal{Q}$ ($\mathcal{M}$ sera identifié à un espace de mesures).

4-1 - L'ESPACE COMPACT $\Phi_c(E)$

L'espace $\mathcal{Q}(E)$ étant compact et de type dénombrable pour sa topologie $\mathcal{C}(\mathcal{W})$, il est possible de construire l'espace compact $\Phi_g(\mathcal{Q})$ des fonctions s.c.i. définies sur $\mathcal{Q}(E)$ (voir chapitre 3).

Proposition 4-1-1 / L'espace Φ_c des fonctions non décroissantes et s.c.i. sur $\mathcal{Q}(E)$ est compact et de type dénombrable.

Vérifions, en effet, que Φ_c est fermé dans $\Phi_g(\mathcal{Q})$. Soit donc T_n une suite de fonctions convergeant vers T dans $\Phi_g(\mathcal{Q})$ et vérifiant $T_n(G) \leq T_n(G')$ pour $G \subset G'$. Il faut montrer $T(G) \leq T(G')$. On peut trouver (critère 1' du Théorème 3-3-1) une suite G'_n convergeant vers G' dans $\mathcal{Q}(E)$ telle que $T(G'_n) \rightarrow T(G')$. La continuité de l'intersection dans $\mathcal{Q}$ (corollaire du Théorème 1-3-1) donne $G'_n \cap G \rightarrow G' \cap G = G$ dans $\mathcal{Q}(E)$, et le critère 2' du Théorème 3-3-1 montre alors :

$$T(G) \leq \liminf T_n(G'_n \cap G) \leq \lim T_n(G'_n) = T(G')$$

d'où résulte la proposition.

Proposition 4-1-2 / Pour $T \in \Phi_c$, la formule

$$(a) - T(K) = \inf \{T(G), G \in \mathcal{Q}, G \supset K\}, K \in \mathcal{K}(E)$$

défini une fonction non décroissante et s.c.s. sur $\mathcal{K}(E)$ muni de la topologie myope, et on a alors :

$$(b) - T(G) = \sup \{T(K), K \in \mathcal{K}, K \subset G\}, G \in \mathcal{Q}$$

Inversement, si T est une fonction non décroissante et s.c.s. sur $\mathcal{K}(E)$, la formule (b) définit sur $\mathcal{Q}$ une fonction $T \in \Phi_c$ qui vérifie la relation (a).

Pour établir la proposition directe, il suffit de reprendre la démonstration de la proposition 3-2-1 et de son corollaire. Inversement, si T est une fonction non décroissante sur $\mathcal{K}$, la fonction $T(G)$ définie sur $\mathcal{Q}$ par la formule (b) est non décroissante et s.c.i. Si $T(K)$ est de plus s.c.s. pour la topologie myope, des raisonnements analogues permettent d'établir la relation (a).

Proposition 4-1-3 / Les ouverts de Φ_c sont engendrés par les parties de Φ_c de la forme $\{T(G) > b\}$, $G \in \mathcal{Q}$, $b \in \bar{\mathbb{R}}$ et $\{T(K) < a\}$, $K \in \mathcal{K}$ et $a \in \bar{\mathbb{R}}$.

En effet, les ouverts du type W^G , dans $\Phi_c(\mathcal{Q})$, sont de la forme : $\{\inf_{G \in W_K^i} T(G) < a\}$ (Proposition 3-3-2). Mais, dans Φ_c , T est croissante, les G_i de W_K^i sont superflus, et les ouverts de ce type sont donc de la forme $\{\inf_{G \supset K} T(G) < a\}$, $K \in \mathcal{K}$. De même, dans Φ_c , les ouverts du type W_K sont de la forme $\{\inf_{G' \in W_G^i} T(G') > b\}$ et se réduisent, dans Φ_c , à $\{\inf_{G' \supset G} T(G') > b\} = \{T(G) > b\}$, $G \in \mathcal{Q}$.

Corollaire (critère de convergence): Une suite T_n converge vers T dans Φ_c si et seulement si elle vérifie les deux conditions suivantes :

$$1 - T(G) \leq \liminf T_n(G), \quad \forall G \in \mathcal{Q}$$

$$2 - T(K) \geq \limsup T_n(K), \quad \forall K \in \mathcal{K}$$

Le théorème 3-3-1 donne un autre critère :

Théorème 4-1-1 (critère de convergence) : Une suite T_n converge vers T dans Φ_c si et seulement si elle vérifie les deux conditions suivantes :

1' - Pour tout $G \in \mathcal{Q}$, on peut trouver une suite G_n convergeant vers G dans $\mathcal{Q}$ et telle que $T_n(G_n) \rightarrow T(G)$.

2' - Pour toute suite G_{n_k} convergeant dans $\mathcal{G}$ vers un ouvert G , on a

$$T(G) \leq \varliminf T_{n_k}(G_{n_k}).$$

Le lemme suivant permet de renforcer la condition 1' :

Lemme 4-1-1 : Si une suite T_n converge vers T dans Φ_c , pour tout $G \in \mathcal{G}$, on peut trouver une suite G_n convergeant vers G dans $\mathcal{G}$ et vérifiant :

$$G_n \subset G, \quad T_n(G_n) \rightarrow T(G)$$

D'après 1', en effet, on peut trouver une suite $G'_n \rightarrow G$ avec $T_n(G'_n) \rightarrow T(G)$. Posons $G_n = G \cap G'_n$. D'après la continuité de $\cap$, les G_n convergent encore vers G . D'après 2' et la croissance des T_n , on a alors :

$$T(G) \leq \varliminf T_n(G_n) \leq \varlimsup T_n(G_n) \leq \varliminf T_n(G'_n) = T(G)$$

Donc $T_n(G_n)$ converge vers $T(G)$.

4-2 - L'ESPACE COMPACT $\chi(E)$

Nous dirons qu'une fonction $T \in \Phi_g(\mathcal{G})$ est fortement sous-additive si elle vérifie $T(G \cup G') + T(G \cap G') \leq T(G) + T(G')$ pour $GG' \in \mathcal{G}$. Nous désignerons par $\chi(E)$ le sous-espace de Φ_c constitué des fonctions s.c.i., non décroissantes et fortement sous-additives sur $\mathcal{G}$.

Lemme 4-2-1 : Si deux suites G_n et G'_n convergent respectivement vers G et G' dans $\mathcal{G}$ en vérifiant $G_n \subset G$ et $G'_n \subset G'$, les suites $G_n \cap G'_n$ et $G_n \cup G'_n$ convergent dans $\mathcal{G}$ vers $G \cap G'$ et $G \cup G'$ respectivement.

La convergence de $G_n \cap G'_n$ vers $G \cap G'$ résulte de la continuité de $\cap$. Si K est un compact tel que $K \subset G \cup G'$, on sait que l'on peut trouver deux compacts $K_1 \subset G$ et $K'_1 \subset G'$ avec $K = K_1 \cup K'_1$. Pour n assez grand, on a $K_1 \subset G_n$ et $K'_1 \subset G'_n$, d'où $K_1 \cup K'_1 \subset G_n \cup G'_n$, la suite $G_n \cup G'_n$ vérifie le critère 2 déduit par dualité de la Proposition 1-2-5. Si un ouvert G_0 n'est pas contenu dans $G \cup G'$, il n'est pas non plus contenu dans $G_n \cup G'_n$, et cette suite vérifie aussi le critère 1, donc converge vers $G \cup G'$.

Proposition 4-2-1 / L'espace $\chi(E)$ est compact.

Montrons que χ est fermé dans l'espace compact Φ_c . Soit $T_n \in \chi$ une suite convergeant vers T dans Φ_c . Il faut montrer $T \in \chi$, c'est-à-dire que T est fortement sous-additive. Soient G et G' deux ouverts. Le critère 1' de convergence (Théorème 4-1-1) et les lemmes 4-1-1 et 4-2-1 montrent que l'on peut trouver deux suites G_n, G'_n vérifiant :

$$G_n \subset G, G_n \rightarrow G \text{ dans } \mathcal{G}, T_n(G_n) \rightarrow T(G)$$

$$G'_n \subset G', G'_n \rightarrow G' \text{ dans } \mathcal{G}, T_n(G'_n) \rightarrow T(G')$$

$$G_n \cap G'_n \rightarrow G \cap G' \text{ et } G_n \cup G'_n \rightarrow G \cup G' \text{ dans } \mathcal{G}.$$

Le critère 2' donne alors :

$$T(G \cap G') \leq \underline{\lim} T_n(G_n \cap G'_n)$$

$$T(G \cup G') \leq \underline{\lim} T_n(G_n \cup G'_n)$$

Les T_n étant fortement sous-additives, on en déduit :

$$\begin{aligned} T(G \cap G') + T(G \cup G') &\leq \underline{\lim} T_n(G_n \cap G'_n) + \underline{\lim} T_n(G_n \cup G'_n) \\ &\leq \underline{\lim} (T_n(G_n \cap G'_n) + T_n(G_n \cup G'_n)) = \\ &= \underline{\lim} (T_n(G) + T_n(G')) = T(G) + T(G') \end{aligned}$$

Donc $T \in \chi$, et la proposition est démontrée.

Proposition 4-2-2 / $\chi(E)$ s'identifie à un espace de capacités de Choquet.

Soit $T \in \chi(E)$. Cette fonction définie sur $\mathcal{G}(E)$ se prolonge sur $\mathcal{P}(E)$ en posant :

$$T(A) = \inf \{T(G), G \in \mathcal{G}, G \supset A\} \quad (A \in \mathcal{P}(E))$$

En utilisant la sous-additivité de T , on démontre que $A_n \uparrow A$ dans $\mathcal{P}(E)$ entraîne $T(A_n) \uparrow T(A)$ (cf. par exemple [1]).

La proposition 4-1-2 montre, en particulier, que $T(K)$ est s.c.s. sur $\mathcal{K}(E)$ et vérifie $T(G) = \sup \{T(K), K \in \mathcal{K}, K \subset G\}, G \in \mathcal{G}$. Cette semi-continuité supérieure sur $\mathcal{K}(E)$ montre ensuite que

$K_n \downarrow K$ dans $\mathcal{K}$ entraîne $T(K_n) \downarrow T(K)$. Le théorème des capacités donne alors

$$T(A) = \sup \{T(K), K \in \mathcal{K}, K \subset A\}$$

pour tout A appartenant à la classe de Souslin engendrée par les compacts, donc, en particulier (E étant L.C.D.) pour tout ensemble A appartenant à la σ -algèbre de Borel $\sigma(\mathcal{Q})$ sur E . Ainsi, T est une capacité, et tous les boréliens de E sont capacitables.

Remarque : $\Phi_f(E)$ s'identifie à un sous-espace compact de $\chi(E)$.

En effet, tout $\varphi \in \Phi_f$ est caractérisée par sa fonctionnelle $\bar{X}_\varphi$ associée, qui est s.c.i. sur $\mathcal{Q}$ (Proposition 3-2-1) et vérifie :

$$1 - \bar{X} \left(\bigcup_I G_i \right) = \sup_I \bar{X}(G_i)$$

pour toute famille $(G_i)_{i \in I}$ dans $\mathcal{Q}$. La relation 1 entraîne que $\bar{X}$ est non décroissante et fortement sous-additive, car on en déduit :

$$\bar{X}(G \cup G') \leq \sup \{ \bar{X}(G), \bar{X}(G') \}, \quad \bar{X}(G \cap G') \leq \inf \{ \bar{X}(G), \bar{X}(G') \}$$

d'où la sous-additivité et $\bar{X} \in \chi$. Les propositions 3-3-2 et 4-1-3 montrent enfin que la topologie de Φ_f coïncide avec la topologie induite par celle de $\chi(E)$.

4-3 - L'ESPACE COMPACT $\mathcal{MK}(E)$

Nous dirons que $\mu \in \chi$ est additif si $\mu(G \cup G') = \mu(G) + \mu(G')$ pour G, G' ouverts disjoints, et nous désignerons par $\mathcal{MK}(E) \subset \chi(E)$ l'ensemble des $\mu \in \chi$ additifs et vérifiant de plus $\mu(\emptyset) = 0$.

Proposition 4-3-1 / L'espace $\mathcal{MK}(E)$ est compact.

En effet, soit $\mu_n \in \mathcal{MK}$ une suite convergeant vers μ dans χ . De $\mu_n(\emptyset) = 0$, le critère 2' du Théorème 4-1-1 déduit $\mu(\emptyset) \leq 0$. Mais (critère 1'), on peut trouver $G_n \rightarrow \emptyset$ dans $\mathcal{Q}$ avec $\mu_n(G_n) \rightarrow \mu(\emptyset)$. Comme $\mu_n \in \Phi_c$ et la condition $\mu_n(\emptyset) = 0$ entraînent $\mu_n(G_n) \geq 0$, on a aussi $\mu(\emptyset) \geq 0$, d'où $\mu(\emptyset) = 0$.

Soit G et G' deux ouverts disjoints, et soit S_n une suite convergeant vers $G \cup G'$ et vérifiant $\mu_n(S_n) \rightarrow \mu(G \cup G')$. On a $S_n \cap G \rightarrow G$ et $S_n \cap G' \rightarrow G'$ (continuité de $\cap$), et le critère 2' donne alors :

$$\mu(G) \leq \varprojlim \mu_n(S_n \cap G)$$

$$\mu(G') \leq \varprojlim \mu_n(S_n \cap G')$$

D'où, d'après l'additivité des μ_n :

$$\mu(G) + \mu(G') \leq \varprojlim \mu_n(S_n \cap (G \cup G')) \leq \varprojlim \mu_n(S_n) = \mu(G \cup G')$$

L'inégalité inverse est vraie, puisque $\mu \in \chi$. Donc μ est additif, ce qui achève la démonstration.

La proposition 4-2-2 permet d'identifier $\mathcal{M}(E)$ avec l'espace des mesures positives définies sur $(E, \sigma(\mathcal{Q}))$ vérifiant les conditions :

$$1 - \mu(\emptyset) = 0$$

$$2 - \mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n \mu(A_n) \quad (A_n \in \sigma(\mathcal{Q}), A_n \cap A_m = \emptyset \text{ si } n \neq m)$$

$$3 - \mu(K) = \inf \{ \mu(G), G \in \mathcal{Q}, G \supset K \}, K \in \mathcal{K}$$

La topologie de $\mathcal{M}(E)$, engendrée par les $\{ \mu(G) > b \}$, $G \in \mathcal{Q}$ et les $\{ \mu(K) < a \}$, $K \in \mathcal{K}$, n'est autre que la topologie vague. Les critères de convergence 1 et 2 (corollaire de la proposition 4-1-3) sont classiques, mais le théorème 4-1-1 apporte un nouveau critère de convergence pour la topologie vague.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] - BRELOT, M. (1965) - Eléments de la Théorie Classique du Potentiel - C.D.U., Paris.
- [2] - HAAS, A., MATHERON, G., SERRA, J. - (1967) - Morphologie Mathématique et Granulométrie en Place - Annales des Mines XI, 735-753 et XII, 768-782.
- [3] - HADWIGER, H. (1957) - Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie - Springer, Berlin.
- [4] - MATHERON, G. (1967) - Eléments pour une Théorie des Milieux Poreux - Masson, Paris.
- [5] - MEYER, P.A. (1966) - Probabilités et Potentiel - Hermann, Paris.
- [6] - NEVEU, J. (1964) - Bases Mathématiques du Calcul des Probabilités - Masson, Paris.
- [7] - SERRA, J. (1967) - But et Réalisation de l'Analyseur de Textures - Revue de l'Industrie Minérale, 49 (9), 14 pages.
- [8] - SERRA, J. (1969) - Cours de Morphologie Mathématique - Cahiers du Centre de Morphologie Mathématique, Fasc. 3, Fontainebleau.

