Les Cahiers du Centre de Morphologie Mathématique
DE FONTAINEBLEAU

Fascicule 6

TOME I

ENSEMBLES ALÉATOIRES ET GÉOMÉTRIE INTÉGRALE

par

G. MATHERON

1972

Édité par l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris

ENSEMBLES ALEATOIRES ET GEOMETRIE INTEGRALE

- TOME I -

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE I - LES ESPACES TOPOLOGIQUES $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$.		1
1-1	Hypothèses générales et notations.	1
1-2	L'espace compact $\mathcal{F}$(E).	3
1-3	Les espaces $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$.	11
1-4	L'espace $\mathcal{K}$(E) et la topologie myope.	12
	La métrique de Hausdorff.	15
1-5	Cas de l'espace euclidien $E = \mathbb{R}^d$.	16
	Addition de Minkowski.	17
	Ouvertures et fermetures.	19
	La convexité.	21
	Les granulométries.	24
CHAPITRE II - LES ENSEMBLES FERMES ALEATOIRES (E.F.A.).		27
2-1	La fonctionnelle T associée à un EFA.	27
2-2	Le théorème de Choquet.	30
2-3	EFA conditionnels, limite inductive d'EFA.	36
	EFA indépendants.	41
	Limite inductive d'EFA.	41
2-4	Point de vue de la loi spatiale.	42
2-5	Continuité p.s., P-continuité, mesurabilité.	47
2-6	Ouverts aléatoires, ensembles aléatoires sur $\mathcal{H}$.	50
2-7	Exemples.	51
	Les fonctionnelles P et Q.	52
	La Covariance.	52
	La surface spécifique.	53
	Les granulométries.	53

CHAPITRE III - LES FERMES ALEATOIRES INDEFINIMENT DIVISIBLES (E.F.A.I.D.). 55

3-1 Caractérisation de la fonctionnelle Q associée à un EFAID. 55

3-2 Processus de Poisson et mesures σ-finies sur $C(\mathcal{F}')$. 58

3-3 Schémas booléens stationnaires dans $\mathbb{R}^d$ 63

3-4 EFA stables pour la réunion. 65

La capacité newtonienne et le fermé harmonique. 67

3-5 Les variétés linéaires poissoniennes. 68

Sécante aléatoire d'un compact. 73

Réseaux poissoniens induits sur les variétés linéaires. 75

Processus ponctuels induits sur les variétés de dimension d-k. 76

Réseaux induits sur les variétés de dimension $p > d-k$. 77

CHAPITRE IV - LA CONVEXITE. 79

4-1 Les fonctionnelles de Minkowski. 79

La formule de Steiner. 85

4-2 Les EFA p.s. convexes. 86

4-3 Les granulométries linéaires. 89

Granulométrie des traversées. 91

4-4 Le cone convexe $\mathcal{R} = C_o(\mathcal{K})$. 93

Prolongement d'une fonctionnelle positivement linéaire sur $\mathcal{R}$. 96

4-5 Le cone réticulé $\mathcal{R}_1$ et les compacts de Steiner. 97

Le théorème d'unicité. 98

Interprétation géométrique. 102

Caractérisation des droites et des hyperplans poissoniens. 102

La mesure superficielle G^K_{d-1}. 103

La formule de Steiner généralisée. 104

Lois des variables aléatoires $|S, S_p|$. 109

4-6 Cas du plan euclidien. 112

4-7 Les mesures de Minkowski. 118

L'anneau convexe $\mathcal{C}$. 124

La caractéristique d'Euler-Poincaré. 124

Le nombre de convexité et le prolongement des mesures de Minkowski. 125

BIBLIOGRAPHIE

[1] - ALFSEN, E.M. - Compact convex sets, and Boundary integrals.- Springer, Berlin, 1971.

[2] - AHMAD, S.- Elements aléatoires dans les espaces vectoriels topologiques.- Ann. I.H.P., B, II-2, 95-135, 1965.

[3] - AUMANN, R.J.- Integrals of set valued functions.- J. Math. An. Appl., 12, 1-12, 1965.

[4] - BERGE, C.- Espaces topologiques et fonctions multivoques.- Dunod, Paris, 1959.

[5] - BLASCHKE, W.- Vorlesungen über integral Geometrie.- Teubner, Leipzig, 1936-37.

[6] - BONNESEN, T.- and FENCHEL, W.- Theorie der konvexen Körper.- Springer, Berlin, 1934.

[7] - BOURBAKI, N.- Eléments de Mathématique, Fasc. XIII - Intégration. Hermann, Paris, 1965.

[8] - BROTHERS, J.E.- Integral geometry in homogeneous spaces.- Trans. Am. Math. Soc., Vol. 124, p. 480-517, 1966.

[9] - CHOQUET, G.- Theory of Capacities.- An. Inst. Fourier, V, p. 131-295, Grenoble, 1953-54.

[10] - CHOQUET, G.- Le théorème de représentation intégrale dans les ensembles convexes compacts.- Annales Inst. Fourier, 10, p. 333-444, 1960.

[11] - DATKA, R.- Measurability properties of set valued mappings in Banach spaces.- SIAM J. Control, Vol. 8, N° 2, p. 226-238, 1970.

[12] - DEBREU, G.- Integration of correspondences.- 5th Berkeley Symp. on Math. Stat. Prob., Vol. II, Part I, p. 351-372.

[13] - DELFINER, P.- A generalization of the concept of size.- 3rd Int. Cong. for Stereology, Bern, 1970.

[14] - DELFINER, P.- Etude morphologique des milieux poreux, et automatisation des mesures en lames minces. Thèse, Nancy 1971.

[15] - DELTHEIL, R.- Probabilités Géométriques.- Gauthier-Villars, Paris, 1926.

[16] - DELLACHERIE, C.- Ensembles aléatoires.- Séminaires de Probabilités III.- Springer, Berlin, N° 88.

[17] - FEDERER, H.- Geometric measure theory.- Springer, Berlin, 1969.

BIBLIOGRAPHIE (Suite)

[18] - FELLER, W.- An introduction to probability theory and its applications.- J. Wiley and Sons, New York, 1966.

[19] - GUELFAND, I.M. and VILENKIN, Y.- Generalized functions.- V, Moscou, 1961.

[20] - HADWIGER, H.- Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie.- Springer, Berlin, 1957.

[21] - HALMOS, P.- Measure Theory.- Van Nostrand, New York, 1950.

[22] - HÖRMANDER, L.- Sur la fonction d'appui des ensembles convexes dans un espace localement convexe.- Arkiv för Math., 3-12, p. 181-186, 1954.

[23] - HUKUHARA, M.- Sur l'application semi-continue dont la valeur est un convexe compact.- Funkcialoj Ekvacioj, Vol. 10, p. 43-66, 1967.

[24] - JOLY, J.L.- Une famille de topologies et de convergences sur l'ensemble des fonctionnelles convexes.- Thèse, Grenoble, 1970.

[25] - KENDALL, M.G. and MORAN, P.A.P.- Geometrical probabilities.- Hafner, New York, 1963.

[26] - LANDKOFF, N.S.- Osnovy Sovremennoï teorii potentziala,-Izd. Nauka, Moscou, 1966

[27] - MATHERON, G.- Eléments pour une théorie des milieux poreux.- Masson, Paris, 1967.

[28] - MATHERON, G.- Théorie des ensembles aléatoires.- Cahiers du Centre de Morph. Math., Fasc. 4, Fontainebleau, 1969.

[29] - MATHERON, G.- Ensembles aléatoires, ensembles semi-markoviens et polyèdres poissoniens.- Adv. in Appl. Prob., December 1972.

[30] - MEYER, P.A.- Probabilités et potentiel.- Hermann, Paris, 1966.

[31] - MICHAEL, E.- Topologies on spaces of subsets.- Tr. A.M.S., 71, p. 152-182, 1951.

[32] - MILES, R.E.- Random polygons determined by random lines in a plane.-Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 52, p. 901-907, II, p. 1157-1160, 1964.

[33] - MILES, R.E.- Poisson flats in euclidean space.- Adv. in Appl. Prob., 1, p. 211-237, 1969.

[34] - MILES, R.E.- A synopsis of Poisson flats in euclidean spaces.- Izv. Akad. Nauk. Arm. SSR, 3, p. 263-285, 1970.

BIBLIOGRAPHIE (Suite et Fin)

[35] - MILES, R.E.- Poisson flats in euclidean spaces, Part II.- Adv. in Appl. Prob., 3, p. 1-43, 1971.

[36] - MORAN, P.A.P.- A note on recent research in geometric probability.- J. Appl. Prob., 3, p. 453-463, 1966.

[37] - MORAN, P.A.P.- A second note on recent research in geometric probability.- Adv. in Appl. Prob., 1, p. 73-89, 1969.

[38] - MOREAN, J.J.-Fonctionnelles convexes.- College de France, 1966-67.

[39] - MOSCO, U.- Convergence of convex sets and of solutions of variational inequalities.- Adv. in Math., 3, Fasc.4, p. 510-585.

[40] - NACHBIN, L.- The Haar Integral.- Van Nostrand, Princeton, 1965.

[41] - NEVEU, J.- Bases mathématiques du calcul des probabilités.- Masson, Paris, 1964.

[42] - ROCKAFELLAR, R.T.- Integrals which are convex functionals.- Pacific J. Math., 24-3, p. 525-539, 1968.

[43] - ROCKAFELLAR, R.T.- Convex Analysis.- Princeton, 1970.

[44] - SANTALO, L.A.- Introduction to integral geometry.- Hermann, Paris, 1953.

[45] - SERRA, J.- Introduction à la morphologie mathématique.- Cahiers du Centre de Morph. Math., Fasc. N° 3, Fontainebleau, 1969.

[46] - STOKA, M.I.- Geometrie Integrala.- Bucarest, 1967.

[47] - VALADIER, M.- Contribution à l'analyse convexe.- Thèse , Paris, 1970.

[48] - VAN CUTSEM, B.- Eléments aléatoires à valeurs cobvexes compactes.- Thèse, Grenoble, 1971.

[49] - WIJSMAN, R.A.- Convergence of sequences of sets, cones and functions.- Part I, Bull. Am. Math. Soc., 70, p. 186-188, 1964.- Part II, Trans. A.M.S., Vol. 123, p. 32-45, 1966.

[50] - YOSIDA, K.- Functional analysis.- Springer, Berlin, 1968.

- INTRODUCTION -

La notion d'ensemble aléatoire est suggérée avec force par certains phénomènes naturels, comme, par exemple, les milieux poreux. C'est de cette intuition initiale que le présent ouvrage tire l'essentiel de sa motivation. Bien qu'il s'agisse d'un traité purement mathématique , la formulation et le choix même des problèmes à résoudre sont directement inspirés des techniques expérimentales de l'analyse des textures, grâce auxquelles l'étude approfondie d'un milieu de ce genre est aujourd'hui possible (voir, par exemple, J. Serra, [45]). Réciproquement, d'ailleurs, un assez grand nombre de résultats théoriques que l'on trouvera établis ci-dessous ont été à l'origine de techniques expérimentales nouvelles et fructueuses. C'est ainsi par exemple que le fait d'avoir donné un statut mathématique précis à la notion usuelle plutôt confuse de granulométries a conduit à des applications pratiques for intéressantes (voir, par exemple, P. Delfiner, [13] et [14]).

Reprenons l'exemple du milieu poreux évoqué ci-dessus. Pour des raisons pratiques évidentes, il n'est pas possible d'examiner un par un les grains qui constituent ce milieu, ni d'étudier en détail leurs formes et leurs dimensions individuelles. Bien souvent, d'ailleurs, ces "grains" sont plus ou moins soudés entre eux, de sorte qu'à la limite la notion même de grain individualisable peut cesser d'être utilisable. D'autre part, la composante solide de ce milieu n'est pas forcément la plus intéressante, et le réseau poreux lui-même, avec son incroyable complexité et les multiples possibilités qu'il offre au cheminement d'un fluide, est directement responsable d'une propriété aussi importante en pratique que la perméabilité de ce milieu. C'est pourquoi, dans un ouvrage qui remonte à 1967 (G. Matheron, [28]), j'avais esquissé une première interprétation des milieux poreux en termes d'ensembles aléatoires, avec comme objectif de résumer les propriétés essentielles de leurs structures incroyablement complexes sous la forme d'un petit nombre de paramètres statistiquement représentatifs et expérimentalement accessibles. Autrement dit, dès cette époque, il apparaissait que l'étude morphologique d'un milieu poreux nécessitait la mise en oeuvre d'un certain nombre de concepts à caractère géométrico-probabilistes, qui, à leur tour, se laissaient rattacher à la notion centrale d'ensemble aléatoire.

Mais, au point de départ de cette "morphologie mathématique" doit prendre place une réflexion sur la notion même de forme, ou de structure. On définit en général la structure d'un objet comme l'ensemble des relations existant entre les éléments ou les parties constitutives de cet objet. Pour déterminer expérimentalement cette structure, on doit donc essayer l'une après l'autre chacune des relations considérées comme possibles, et, pour chacune d'elles, examiner si elle est vérifiée ou non. Naturellement, l'image que l'on va ainsi se construire dépendra au plus haut point du choix que l'on aura fait du système $\mathcal{R}$ des relations considérées comme possible. Ce choix a priori joue donc un rôle constitutif (au sens Kantien du terme), et détermine la plus ou moins grande richesse de la notion de structure à laquelle on aboutira.

Dans le cas d'un milieu poreux, par exemple, on désignera par A la composante solide (la réunion des grains) et par A^c le réseau poreux, et on enverra dans ce milieu une figure B appelée figure structurante, à la manière d'une sonde chargée d'en ramener de l'information. Cette opération est réalisable expérimentalement, et même avec une assez grande facilité, au moins en ce qui concerne les sections planes du milieu. Naturellement, cette figure B ne pourra pas être absolument quelconque, mais devra être choisie par nous dans une famille $\mathcal{B}$ que nous préciserons dans un instant. Les relations les plus simples que nous puissions alors envisager pour recueillir des informations sur la structure du milieu poreux sont de la forme $B \subset A$ (B est contenu dans les grains) ou $B \cap A \neq \emptyset$ (B rencontre les grains). Naturellement, nous devrons aussi nous intéresser aux relations que l'on peut former à partir des précédentes au moyen des opérations logiques "et", "ou", et "non". Autrement dit, la famille $\mathcal{R}$ des relations possibles sur laquelle nous aurons à travailler sera la σ-algèbre engendrée par les relations simples $B \subset A$ et $B \cap A \neq \emptyset$, B parcourant $\mathcal{B}$. Du point de vue déterministe, nous pouvons donc considérer la structure de l'ensemble A comme connue si pour chaque relation possible $R \in \mathcal{R}$ nous savons si R est vraie ou non pour l'ensemble A. Du point de vue probabiliste, de la même manière, nous considérerons que nous connaissons tout ce qu'il est intéressant (ou pratiquement possible) de savoir si nous connaissons pour chaque $R \in \mathcal{R}$ la probabilité $P(R)$ pour que cette relation R soit vérifiée. Autrement dit, un ensemble aléatoire A sera très classiquement défini par la donnée d'une probabilité P sur la σ-algèbre $\mathcal{R}$.

Mais il apparaît vite que la notion mathématique d'ensemble est trop riche pour que l'on puisse l'appliquer telle quelle à une réalité expérimentale comme un milieu poreux. En effet, si l'on définit A comme l'ensemble des points de l'espace qui appartiennent aux grains, doit-on considérer A comme un ensemble ouvert, ou fermé, ou comme quelquechose de topologiquement plus compliqué? Autrement dit, un point de la frontière de A appartient-il ou non aux grains? Or, d'un point de vue expérimental, cette question est parfaitement dépourvue de sens, car il n'existe aucune réalité physique correspondant à la notion de point appartenant à la frontière des grains. Pour un expérimentateur, en effet, il n'existe pas de points, mais tout au plus des plages, de dimensions petites, mais jamais nulles, dont les contours restent mal définis. En première approximation, nous pouvons donner un statut mathématique à ce flou expérimental en imposant à nos figures structurantes B d'être des ensembles ouverts.

Ainsi donc, la famille $\mathcal{B}$ à partir de laquelle nous engendrons notre σ-algèbre $\mathcal{R}$ des relations considérées comme possible sera (tout au plus) la famille des ensembles ouverts. Mais si B est ouvert, B est inclus dans A si et seulement si il est inclus dans l'intérieur $\mathring{A}$ de A, et de même B rencontre A si et seulement si il rencontre l'adhérence $\overline{A}$ de A. Ainsi, la logique de l'intersection, fondée sur la σ-algèbre engendrée par les évènements du type $B \cap A \neq \emptyset$ conduit naturellement à la notion d'ensemble fermé aléatoire, et de même la logique de l'inclusion est liée à la notion d'ensemble ouvert aléatoire. Si l'on utilise simultanément ces deux logiques (ce qui est en général le cas dans les applications), on voit que les relations $R \in \mathcal{R}$ expriment des propriétés possibles non de l'ensemble A lui-même (qui est une simple abstraction mathém atique à laquelle ne correspond aucune réalité physique) mais seulement du couple $(\mathring{A}, \overline{A})$ constitué de l'intérieur et de l'adhérence de cet ensemble A. Autrement dit, deux ensembles A et A' sont indiscernables pour la σ-algèbre $\mathcal{R}$, et doivent être considérés comme représentant la même réalité physique, dès qu'ils ont même intérieur et même adhérence. C'est vraiment là la concession minimale que le physicien soit en droit d'exiger du mathématicien.

Or, il se trouve que ces σ-algèbres, adaptées directement aux possibilités expérimentales, se laissent identifier aux tribus boréliennes associées aux topologies dont il est naturel de munir l'espace $\mathcal{F}$ des fermés, l'espace $\mathcal{G}$ des ouverts ou l'espace $\mathcal{K}$ des compacts. Dès lors, le thème probabiliste initial s'infléchit en direction de la géométrie intégrale (conçue, par exemple, à la manière de H. Hadwiger, [20]). On verra que bien des fonctionnelles classiques en géométrie intégrale - et ce sera notamment le cas des célèbres fonctionnelles de Minkowski - admettent une interprétation probabiliste simple en termes d'ensembles fermés aléatoires. Ce sera là l'un des thèmes majeurs de l'ouvrage, thème que viendra encore souligner le rôle important que joue la convexité dans un certain nombre de questions, sans liens apparents entre elles, qui se posent à propos de l'espace euclidien.

En gros, l'ouvrage peut être divisé en trois parties de trois chapitres chacune : la première est consacrée aux définitions et aux propriétés générales des fermés aléatoires dans un espace E, non nécessairement euclidien, mais que nous supposons toujours localement compact de type dénombrable (en vue d'éviter des difficultés mathématiques sans rapport avec notre propos). Le premier chapitre est consacré aux préliminaires topologiques absolument indispensables pour la suite. Le choix des définitions et des problèmes examinés, qui pourra paraître arbitraire en première lecture, est en fait puissamment motivé par les applications probabilistes ultérieures. Par exemple, l'étude relativement poussée de la semi-continuité se justifie du fait que toute application s.c.i. ou s.c.s. est automatiquement mesurable, et permet donc de construire (par exemple) de nouveaux fermés aléatoires à partir d'un EFA initial. Tel sera le cas de la réunion, de l'intersection, et aussi, dans le cas euclidien, de l'addition et de la soustraction de Minkowski, ainsi que de l'opération appelée ouverture de A selon un ensemble B - opération qui conduit à d'intéressantes notions à caractère granulométrique. Le chapitre suivant utilise ces résultats topologiques pour définir la notion générale d'ensemble fermé aléatoire (EFA). Le résultat essentiel est ici le théorème du à Choquet, [9], selon lequel une fonction T sur l'espace $\mathcal{K}$ peut être associée à un EFA A selon la formule $T(K) = P(A \cap K \neq \emptyset)$ si et seulement si T est une capacité alternée d'ordre infini vérifiant $0 \leq T \leq 1$. On notera aussi certains résultats importants relatifs aux EFA conditionnels, et au point de vue de la loi spatiale (c'est-à-dire au maximum d'information concernant un EFA que l'on peut recueillir à partir d'une infinité dénombrable d'observations ponctuelles). Vient ensuite la classe des fermés aléatoires indéfiniment divisibles pour la réunion : cette classe s'identifie aux processus de Poisson sur l'espace $\mathcal{F}'$ des fermés non vides, et aussi à une classe de capacités de Choquet.

Les trois chapitres qui suivent étudient les relations entre les EFA dans un espace euclidien et la géométrie intégrale. C'est ici surtout que la convexité joue un rôle capital, et notamment dans le très long chapitre IV qui lui est entièrement consacré. Après un exposé rapide sur les fonctionnelles classiques de Minkowski, ce chapitre identifie la convexité presque sûre d'un EFA avec la C-additivité de sa fonctionnelle T, puis examine les questions également classiques concernant les sécantes aléatoires et le cone convexe $C_0(\mathcal{K})$ constitué des compacts convexes contenant l'origine. Ce cone admet un sous-ensemble $\mathcal{R}_1$, ou <u>classe de Steiner</u>, constitué des compacts convexes symétriques qui sont somme de Minkowski finie de segments de droites, ou limite de telles sommes finies. La classe de Steiner $\mathcal{R}_1$ est également un cone convexe, et même un <u>simplexe</u>, et cette propriété conduit à un important théorème d'unicité. D'après ce théorème, par exemple, un processus poissonien stationnaire d'hyperplans est déterminé dès que l'on connaît les densités induites sur chacune des droites de l'espace. Enfin, on associe aux fonctionnelles de Minkowski des mesures chargées de représenter les propriétés de courbure de la frontière d'un compact convexe, et on généralise leur définition sur divers sous-espaces de $\mathcal{F}$ et de $\mathcal{K}$, et finalement sur $\mathcal{F}$ entier. Dans le cas d'un EFA, les mesures correspondantes deviennent des mesures aléatoires. C'est en ce sens, en particulier, que l'on peut parler de la surface spécifique d'un EFA. Le chapitre IV donne une théorie des EFA semi-markoviens, et, en particulier, une caractérisation complète des EFA semi-markoviens indéfiniment divisibles et stationnaires, dont les deux prototypes sont les variétés linéaires poissoniennes et les schémas booléens à grains primaires convexes. A titre d'application, le chapitre suivant donne une étude assez détaillée des hyperplans Poissoniens. On notera que la notion de compact de Steiner A associé à un tel réseau permet de résoudre en une seule fois le problème du calcul des caractéristiques des réseaux induits sur les variétés linéaires.

La troisième partie est consacrée aux applications à valeurs dans un espace $\mathcal{F}$ ou $\mathcal{K}$. Nous n'avons absolument pas cherché la généralité. C'est ici, au contraire, que les motivations expérimentales de cet ouvrage théorique ont joué le plus grand rôle, et nous ont conduit à sélectionne un nombre relativement petit de structures algébriques ou topologiques (dont l'intérêt mathématique n'était pas évident au départ). Le chapitre VII, qui est de loin le plus important pour les applications pratiques, est consacré aux <u>granulométries</u>. Il s'agissait de donner un statut axiomatique précis à la notion usuelle (et pas toujours clairement définie) de manière, en particulier, à ce que cette notion de granulométrie soit applicable aux pores aussi bien qu'aux grains d'un milieu poreux, c'est-à-dire au cas d'un ensemble qu'il n'est pas nécessairement possible ou intéressant de décomposer en ses composantes connexes. L'axiomatique est d'ailleurs simple, ainsi quel'étude purement algébrique qui suit. Mais si l'on désire appliquer ces notions aux ensembles ouverts ou fermés aléatoires, il faut au préalable s'assurer de la mesurabilité des applications correspondantes. Cela conduit à une certaine définition des "bonnes" granulométries dont l'étude nécessite des investigations topologiques assez poussées. C'est pourquoi (et contrairement à l'ordre logique) nous étudions d'abord le cas particulier plus simple (le seul utile du point de vue pratique) des granulométries euclidiennes. Ici encore la convexité intervient de manière inattendue, en ce sens que les meilleures granulométries euclidiennes se révèlent être, tout simplement, les ouvertures selon les homothétiques d'un compact convexe. Le chapitre suivant étudie les applications croissantes, et particulièrement celles qui sont compatibles avec les translations dans un espace euclidien. Son objet est surtout d'éclairer certains résultats observés dans le cas particulier des granulométries. Le dernier chapitre, enfin, est consacré aux intégrales et aux mesures à valeur dans un espace $\mathcal{K}$ de compacts ou $C(\mathcal{K})$ de convexes compacts dans un espace euclidien.

- CHAPITRE 1 -

LES ESPACES TOPOLOGIQUES $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$.

Ce premier chapitre est consacré à d'indispensables préliminaires topologiques. On peut définir un grand nombre de topologies différentes sur les divers espaces $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ etc... auxquels nous allons nous intéresser. Nous avons retenu celles qui se sont révélées les mieux adaptées à l'usage probabiliste que nous comptons en faire. Pour un inventaire des topologies possibles, on pourra consulter E. Michael ([31]).

1-1 HYPOTHESES GENERALES ET NOTATIONS.

Dans tout cet ouvrage, E désignera un espace localement compact de type dénombrable (LCD). Ceci implique les propriétés suivantes, qui seront utilisées constamment dans la suite, le plus souvent sans référence spéciale :

a/ - Tout compact $K \subset E$ admet un système fondamental dénombrable de voisinages ouverts G_n ($n = 1,2...$). On peut même supposer la suite G_n décroissante. Autrement dit, si $G \subset E$ est un ouvert contenant K, on a $G_n \subset G$ pour n assez grand. Il en résulte en particulier $K = \cap G_n$. Si F est un fermé disjoint de K, il existe deux ouverts G et G' disjoints avec $G \supset K$, $G' \supset F$.

b/ - Si $G \subset E$ est un ouvert, il existe une suite croissante $\{B_n\}$ d'ouverts relativement compacts vérifiant $\overline{B}_n \subset B_{n+1}$ et $G = \cup B_n = \cup \overline{B}_n$. En particulier, tout compact $K \subset G$ est contenu dans B_n pour n assez grand.

c/ - Il existe une famille dénombrable $\mathcal{B}$ d'ouverts de E (appelée base de la topologie de E) telle que tout ouvert $G \subset E$ soit réunion d'éléments de $\mathcal{B}$. On peut même choisir $\mathcal{B}$ de manière à ce que tout $B \in \mathcal{B}$ soit relativement compact et que tout ouvert G soit réunion des $B \in \mathcal{B}$ vérifiant $\overline{B} \subset G$.

Si A est un sous-ensemble de E, A^c ou parfois $\complement A$ désignera son complémentaire, $\mathring{A}$ son intérieur, $\overline{A}$ son adhérence et $\partial A = \overline{A} \cap \complement \mathring{A}$ sa frontière. Si $B \subset A$, on désignera par $A \setminus B$ la "différence" $B \cap A^c$. Les notations $A_n \uparrow A$ (resp. $A_n \downarrow A$) signifieront que $\{A_n\}$ est une suite croissante (resp. décroissante) de sous-ensembles de E vérifiant $A = \cup A_n$ (resp. $A = \cap A_n$).

On désignera par $\mathcal{F}(E)$, $\mathcal{G}(E)$ et $\mathcal{K}(E)$ ou, (s'il n'y a pas d'ambiguité) simplement par $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ et $\mathcal{K}$ les familles des sous-ensembles respectivement fermés, ouverts et compacts dans E . De même, $\mathcal{P}(E)$ est l'ensemble des parties de E. D'une manière générale (et dans la mesure du possible) les lettres minuscules x, y etc... désigneront les éléménts de E ($x \in E$), les capitales d'imprimerie A, F, K etc... des sous-ensembles de E ($A \subset E$), et les majuscules rondes $\mathcal{A}$, $\mathcal{F}$ etc... des <u>classes de sous-ensembles</u> de E ($\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$).

Ainsi, dans l'espace $\mathcal{F}$ (où prévaut la logique de l'intersection), pour tout $B \subset E$ on désignera par $\mathcal{F}_B$ la classe des fermés rencontrant B et par $\mathcal{F}^B$ son complémentaire dans $\mathcal{F}$, c'est-à-dire la classe des fermés disjoints de B :

$$\mathcal{F}_B = \{F,\ F \in \mathcal{F}\ ,\ F \cap B \neq \emptyset\}$$

$$\mathcal{F}^B = \{F,\ F \in \mathcal{F}\ ,\ F \cap B = \emptyset\}$$

Si $(B_i)_{i\in I}$ est une famille de parties de E, on a évidemment les égalités :

(1-1-1) $$\bigcup_{i\in I} \mathcal{F}_{B_i} = \mathcal{F}_{\bigcup_I B_i} \quad , \quad \bigcap_{i\in I} \mathcal{F}^{B_i} = \mathcal{F}^{\bigcup_I B_i}$$

mais seulement les inclusions :

$$\bigcap_{i\in I} \mathcal{F}_{B_i} \supset \mathcal{F}_{\cap B_i} \quad ; \quad \bigcup_{i\in I} \mathcal{F}^{B_i} \subset \mathcal{F}^{\cap B_i}$$

Toutefois, si K est un <u>compact</u> et $\{G_n\}$ un <u>système fondamental de voisinages de K</u> on a les égalités

(1-1-2) $$\cap\ \mathcal{F}_{G_n} = \mathcal{F}_K \quad ; \quad \cup\ \mathcal{F}^{G_n} = \mathcal{F}^K$$

Dans l'espace $\mathcal{G}$ (où prévaut la logique de l'inclusion), on posera de même pour tout $B \in \mathcal{P}(E)$:

$$\mathcal{G}_B = \{G,\ G \in \mathcal{G}\ ,\ G \supset B\}$$

$$\mathcal{G}^B = \{G,\ G \not\in \mathcal{G}\ ,\ G \not\supset B\}$$

Il est clair que $G \in \mathcal{G}_B$ équivaut à $G^c \in \mathcal{F}^B$, de sorte qu'à toute propriété de l'espace $\mathcal{F}$ correspond par dualité (par passage au complémentaire) une propriété de l'espace $\mathcal{G}$ et inversement. Le plus souvent, nous donnerons seulement les énoncés relatifs à $\mathcal{F}$, et laisserons au lecteur le soin de former les énoncés duaux.

Dans l'espace $\mathcal{K}$, enfin, on utilisera (comme dans $\mathcal{F}$) les notations :

$$\mathcal{K}_B = \{K,\ K \in \mathcal{K},\ K \cap B \neq \emptyset\}$$

$$\mathcal{K}^B = \{K,\ K \in \mathcal{K},\ K \cap B = \emptyset\}$$

1-2 L'ESPACE COMPACT $\mathcal{F}$(E).

Dans tout cet ouvrage, l'espace $\mathcal{F}$ sera muni de la topologie $\mathcal{T}_f$ engendrée par les familles $\mathcal{F}^K$, $K \in \mathcal{K}$ et $\mathcal{F}_G$, $G \in \mathcal{G}$. D'après la relation (1-1-1), la famille $\mathcal{F}^K$, $K \in \mathcal{K}$ est stable pour la réunion finie. Si donc nous posons

$$(1\text{-}2\text{-}1) \qquad \mathcal{F}^K_{G_1,G_2,\ldots G_n} = \mathcal{F}^K \cap \mathcal{F}_{G_1} \cap \ldots \cap \mathcal{F}_{G_n}$$

pour $K \in \mathcal{K}$, n entier ≥ 0 et $G_1,\ldots G_n$ dans $\mathcal{G}$, la classe de sous-ensembles de $\mathcal{F}$ ainsi définis constitue une base de la topologie $\mathcal{T}_f$. On note $\mathcal{F}^{\emptyset}_G = \mathcal{F}_G$, et pour n = 0, l'ensemble (1-2-1) est de la forme $\mathcal{F}^K$, de sorte que les $\mathcal{F}_G$ et les $\mathcal{F}^K$ appartiennent à cette base, ainsi que $\mathcal{F}^{\emptyset} = \mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_{\emptyset} = \emptyset$. On remarque aussi que les $\mathcal{F}^K$, $K \in \mathcal{K}$ constituent un système fondamental de voisinages de l'élément $\emptyset \in \mathcal{F}$, et de même les $\mathcal{F}_{G_1,\ldots G_n}$ $(G_1,\ldots G_n \in \mathcal{G})$ constituent un système fondamental de voisinages de $E \in \mathcal{F}$: l'ensemble vide $\emptyset$ et l'ensemble plein E se singularisent dans $\mathcal{F}$ par la pauvreté des filtres de leurs voisinages. Venons-en maintenant à la propriété principale de l'espace $\mathcal{F}$:

THEOREME 1-2-1 - L'espace $\mathcal{F}$(E) est compact et de type dénombrable.

a/ Montrons que la topologie $\mathcal{T}_f$ admet une base dénombrable. Soit $\mathcal{B}$ une base dénombrable de la topologie $\mathcal{G}$ de E possédant la propriété suivante : tout $B \in \mathcal{B}$ est un ouvert relativement compact, et tout $G \in \mathcal{G}$ est réunion des $B \in \mathcal{B}$ tels que $\overline{B} \subset G$. Désignons par $\mathcal{T}_b$ la famille des parties de $\mathcal{F}$ de la forme :

$$\mathcal{F}^{\overline{B}'_1\cup\ldots\cup\overline{B}'_k}_{B_1,B_2,\ldots B_n} \qquad (n \text{ et } k \text{ entiers} \geq 0,\ B_1,\ldots B_n,\ B'_1,\ldots B'_k \in \mathcal{B})$$

$\mathcal{E}_b$ est dénombrable, et il suffit de montrer que $\mathcal{E}_b$ est une base de $\mathcal{E}_f$. Si F est un élément de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^K_{G_1,\ldots G_n}$ ($K \in \mathcal{K}$, $G_1,\ldots G_n \in \mathcal{G}$) un voisinage ouvert de F de la forme (1-2-1), il faut donc montrer qu'il existe $\mathcal{O} \in \mathcal{E}_b$ avec $F \in \mathcal{O} \subset \mathcal{F}^K_{G_1,\ldots G_n}$. Si $F = \emptyset$, on a $n = 0$. Si l'on choisit $B \in \mathcal{B}$ tel que $B \supset K$, l'élément $\mathcal{F}^{\overline{B}} \in \mathcal{E}_b$ vérifie bien $F \subset \mathcal{F}^{\overline{B}} \subset \mathcal{F}^K$. Supposons $F \neq \emptyset$. Pour chaque $i = 1,2\ldots n$, choisissons un point $x_i \in F \cap G_i$ et un ouvert $B_i \in \mathcal{B}$ tel que $x_i \in \overline{B}_i \subset G_i \cap K^c$. Le compact K admet alors un recouvrement fini par des ouverts $B'_j \in \mathcal{B}$ ($j = 1,2,\ldots k$) vérifiant pour tout $j = 1,2,\ldots k$: $\overline{B}'_j \cap \overline{B}_i = \emptyset$ ($i = 1,2,\ldots n$) et $F \cap \overline{B}'_j = \emptyset$. On a alors :

$$F \in \mathcal{F}^{\overline{B}'_1\cup\ldots\cup\overline{B}'_k}_{B_1,\ldots B_n} \subset \mathcal{F}^K_{G_1,\ldots G_n}$$

b/ Montrons que $\mathcal{F}$ est séparé pour la topologie $\mathcal{E}_f$. Si F et F' sont deux fermés de E tels que $F \neq F'$, il existe (par exemple) un $x \in F$ avec $x \notin F'$. On peut alors trouver un ouvert B relativement compact avec $x \in B$ et $F' \cap \overline{B} = \emptyset$. On a alors $F \in \mathcal{F}_B$, $F' \in \mathcal{F}^{\overline{B}}$ et $\mathcal{F}_B \cap \mathcal{F}^{\overline{B}} = \emptyset$: $\mathcal{F}$ est donc séparé.

c/ Il reste à montrer la compacité de $\mathcal{F}$. La classe des fermés de $\mathcal{F}$ est la classe stable pour la réunion finie et l'intersection infinie engendrée par la classe $\mathcal{C}$ constituée des parties de $\mathcal{F}$ de la forme $\mathcal{F}_K$, $K \in \mathcal{K}$ ou $\mathcal{F}^G$, $G \in \mathcal{G}$. D'après un résultat classique en topologie, il suffit de montrer que la classe $\mathcal{C}$ possède la propriété de l'intersection finie pour établir la compacité de $\mathcal{F}$.

Soient donc K_i, $i \in I$ une famille de compacts, et G_j, $j \in J$ une famille d'ouverts avec :

$$\left(\bigcap_{i\in I} \mathcal{F}_{K_i}\right) \cap \left(\bigcap_{j\in J} \mathcal{F}^{G_j}\right) = \emptyset$$

Si l'on pose $\Omega = \bigcup_J G_j$, on a $\bigcap_J \mathcal{F}^{G_j} = \mathcal{F}^{\Omega}$, de sorte que la relation précédente s'écrit $\bigcap_I \mathcal{F}^{\Omega}_{K_i} = \emptyset$. Mais cette intersection n'est vide que s'il existe un indice $i_o \in I$ avec $K_{i_o} \subset \Omega$. En effet, dans le cas contraire, le fermé $\Omega^c \cap (\overline{\bigcup_I K_i})$ (éventuellement vide si $I = \emptyset$) serait disjoint de Ω et rencontrerait chaque K_i, donc appartiendrait à $\bigcap_I \mathcal{F}^{\Omega}_{K_i}$.

Soit donc $i_o \in I$ avec $K_{i_o} \subset \Omega = \bigcup_J G_j$. Le compact K_{i_o} est recouvert par un nombre fini d'ouverts de la famille G_j, soient $G_{j_1}, G_{j_2}, \ldots G_{j_n}$, et l'intersection finie $\mathcal{F}_{K_{i_0}} \cap \mathcal{F}^{G_{j_1}} \cap \ldots \cap \mathcal{F}^{G_{j_n}}$ est vide. QED.

REMARQUE - C'est pour assurer cette compacité qu'il faut considérer l'ensemble vide $\emptyset$ comme un élément de $\mathcal{F}$. Si, en effet, G_j, $j \in I$ est une famille d'ouverts relativement compacts recouvrant E, on a $\bigcap\limits_J \mathcal{F}^{G_j} = \mathcal{F}^E = \{\emptyset\}$, mais on ne peut en extraire une famille finie dont l'intersection soit $\{\emptyset\}$ que si l'espace E est lui-même compact (et non pas seulement localement compact). Inversement, si E est compact, on a $E \in \mathcal{K}$, donc $\{\emptyset\} = \mathcal{F}^E$ est ouvert dans $\mathcal{F}$, et l'espace $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \setminus \{\emptyset\}$ est compact. $\{\emptyset\}$ est alors à la fois ouvert et fermé dans $\mathcal{F}$, et $\emptyset$ est isolé dans $\mathcal{F}$. Ainsi :

Proposition 1-2-1.- L'éspace $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \setminus \{\emptyset\}$ est compact si et seulement si l'espace E est lui-même compact.

La proposition suivante relative à la connexité de $\mathcal{F}$ ne sera pas utilisée dans la suite, mais mérite d'être mentionnée :

Proposition 1-2-2.- Si E est connexe et non compact, $\mathcal{F}(E)$ est connexe. Si E est connexe et compact, $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \setminus \{\emptyset\}$ est connexe.

En effet, supposons E connexe, et soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ fermés dans $\mathcal{F}$ tels que $\mathcal{A} \cap \mathcal{A}' = \emptyset$, $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}' = \mathcal{F}$. L'application $x \to \{x\}$ de E dans $\mathcal{F}$ étant continue, les ensembles $A = \{x, \{x\} \in \mathcal{A}\}$ et $A' = \{x, \{x\} \in \mathcal{A}'\}$ sont fermés dans E, et vérifient $A \cap A' = \emptyset$, $A \cup A' = E$. Comme E est connexe, l'un d'eux est vide, soit par exemple, $A' = \emptyset$. Ainsi, tout ensemble ponctuel est dans $\mathcal{A}$. Montrons que tout ensemble fini non vide est dans $\mathcal{A}$. Pour celà, raisonnons par récurrence en supposant que tout ensemble non vide comprenant au plus n points distincts est dans $\mathcal{A}$, et montrons que tout ensemble de la forme $\{x_1, \ldots x_n, x_{n+1}\}$ est dans $\mathcal{A}$. L'application $y \to \{x_1, \ldots x_n, y\}$ de E dans $\mathcal{F}$ étant continue, les ensembles A_n (resp. A'_n) constitués des $y \in E$ tels que $\{x_1, \ldots x_n, y\} \in \mathcal{A}$ (resp. $\in \mathcal{A}'$) sont fermés et vérifient $A_n \cup A'_n = E$, $A_n \cap A'_n = \emptyset$. L'un d'eux est donc vide. Comme $\{x_1, \ldots x_n, x_n\} \in \mathcal{A}$, on a $A'_n = \emptyset$, et par suite $\{x_1, \ldots x_n, y\} \in \mathcal{A}$ quel que soit $y \in E$. Mais les ensembles finis non vides constituent une partie de $\mathcal{F}$ dense dans $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \setminus \{\emptyset\}$ si E est compact, et dense dans $\mathcal{F}$ lui-même si E n'est pas compact. (Cette propriété se déduit sans difficulté du théorème 1-2-1 ci-dessous). Comme $\mathcal{A}$ est fermé, on a $\mathcal{A}' = \emptyset$ si E n'est pas compact, et $\mathcal{A}' = \emptyset$ ou $\{\emptyset\}$ si E est compact, d'où la proposition.

Etudions maintenant la convergence dans $\mathcal{F}$. Comme $\mathcal{F}$ est de type dénombrable, nous pouvons nous limiter à la convergence séquentielle. Il est clair qu'une suite $\{F_n\}$ converge vers F dans $\mathscr{F}$ si et seulement si elle vérifie les deux conditions suivantes :

1/ - Si un ouvert G rencontre F, il rencontre tous les F_n sauf au plus un nombre fini.

2/ - Si un compact K est disjoint de F, il est disjoint de tous les F_n sauf au plus un nombre fini.

Le théorème suivant fournit un critère analytique plus maniable.

THEOREME 1-2-2 - Une suite $\{F_n\}$ dans $\mathscr{F}$ converge vers $F \in \mathscr{F}$ si et seulement si elle vérifie les deux conditions suivantes :

1'- Pour tout $x \in F$, il existe pour chaque entier n (sauf au plus un nombre fini) un $x_n \in F_n$ tel que la suite $\{x_n\}$ converge vers x dans E.

2'- Si $\{F_{n_k}\}$ est une suite partielle, toute suite $\{x_{n_k}\}$ telle que $x_{n_k} \in F_{n_k}$ a ses valeurs d'adhérence dans F.

De plus, la condition 1' (resp. 2') est équivalente à la condition 1 (resp. 2) ci-dessus.

Il suffit évidemment d'établir la dernière affirmation de l'énoncé.

Montrons $1 \Rightarrow 1'$. Si F est vide, 1' est trivialement vérifié. Si $F \neq \emptyset$, soit $x \in F$, et soit $G_1 = E \supset G_2 \supset \dots$ un système fondamental dénombrable de voisinages ouverts de x. Chaque G_k rencontre F, et, d'après 1, il existe un entier N_k avec $F_n \cap G_k \neq \emptyset$ pour $n \geq N_k$. On peut donc construire une suite $\{x_n\}$, $n \geq N_1$, vérifiant : $x_p \in F_p \cap G_k$ pour $p = N_k, N_k + 1, \dots N_{k+1} - 1$, et cette suite converge vers x.

Montrons $1' \Rightarrow 1$. Si $F = \emptyset$, 1 est vérifié. Si $F \neq \emptyset$, soit G un ouvert rencontrant F, et x un point de $F \cap G$. D'après 1', il existe une suite $\{x_n\}$, $(n \geq n_0)$ avec $x_n \in F_n$ et $x_n \to x$ dans E. Comme G est un voisinage de x, on a $x_n \in G \cap F_n$ pour n assez grand, et G rencontre F_n.

Montrons $2 \Rightarrow 2'$. Si $F = E$, 2' est vraie. Si $F \neq E$, soit $x \notin E$, et K un voisinage compact de x. D'après 2, ce voisinage K est disjoint de F_n pour n assez grand, et x ne peut être valeur d'adhérence pour une suite $\{x_{n_k}\}$ telle que $x_{n_k} \in F_{n_k}$. Donc 2' est vraie.

Enfin, si 2 n'est pas vérifiée, il existe un compact K disjoint de F, une suite partielle

$\{F_{n_k}\}$ et, pour chaque entier k, un point $x_{n_k} \in K \cap F_{n_k}$. La suite $\{x_{n_k}\}$ admet sur le compact K une valeur d'adhérence $x \in K$ qui n'appartient pas à F, donc 2' n'est pas vérifiée. QED.

<u>COROLLAIRE 1</u> - L'application $(F,F') \to F \cup F'$ de $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$ est continue.

<u>COROLLAIRE 2</u> - Soient $\mathcal{T}$ l'ensemble des parties finies de E, et $\mathcal{T}' = \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$ l'ensemble des parties finies non vides de E. $\mathcal{T}$ est dense dans $\mathcal{F}$, $\mathcal{T}'$ est dense dans $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \setminus \{\emptyset\}$ et, si E n'est pas compact, $\mathcal{T}'$ est dense dans $\mathcal{F}$.

<u>COROLLAIRE 3</u> - Soient $\{F_n\}$, $\{F'_n\}$ deux suites dans $\mathcal{F}$. Alors :

a/ $F_n \downarrow F$ entraîne $\lim F_n = F$ dans $\mathcal{F}$.

b/ $F_n \uparrow A$ entraîne $\lim F_n = \overline{A}$ dans $\mathcal{F}$.

c/ $F_n \downarrow F$ et $F'_n \downarrow F'$ entraîne $\lim (F_n \cap F'_n) = F \cap F'$ et $\lim (F_n \cup F'_n) = F \cup F'$ dans $\mathcal{F}$.

d/ $F_n \uparrow A$ et $F'_n \uparrow A$ entraine $\lim (F_n \cup F'_n) = \overline{A \cup A'} = \overline{A} \cup \overline{A'}$ et $\lim (F_n \cap F'_n) = (\overline{A \cap A'}) \subset \overline{A} \cap \overline{A'}$ dans $\mathcal{F}$.

e/ $\lim F_n = F$, $\lim F'_n = F'$ et $F_n \subset F'_n$ pour tout n entraîne $F \subset F'$.

<u>COROLLAIRE 4</u> - Pour tout $B \in \mathcal{P}(E)$, l'ensemble des fermés F contenant B est fermé dans $\mathcal{F}$. Pour tout $F_o \in \mathcal{F}$, l'ensemble des fermés F contenus dans F_o est fermé dans $\mathcal{F}$.

Donnons, à titre d'exemple, la démonstration du premier corollaire. Soient $\{F_n\}$ et $\{F'_n\}$ deux suites convergeant dans $\mathcal{F}$ vers les limites F et F' respectivement. Il faut montrer que $\{F_n \cup F'_n\}$ converge vers $F \cup F'$. Si $x \in F \cup F'$, ce point appartient (par exemple) à F, donc (d'après le critère 1' appliqué à la suite $\{F_n\}$), il existe $x_n \in F_n$ avec $\lim x_n = x$. A fortiori, on a $x_n \in F_n \cup F'_n$, et la suite $\{F_n \cup F'_n\}$ vérifie le critère 1'. Si x est valeur d'adhérence pour une suite $\{x_{n_k}\}$ telle que $x_{n_k} \in F_{n_k} \cup F'_{n_k}$, il est aussi valeur d'adhérence pour une suite partielle $\{x_{n_p}\} \subset \{x_{n_k}\}$ avec (par exemple) $x_{n_p} \in F_{n_p}$. D'après le critère 2' appliqué à $\{F_n\}$, on a $x \in F$, et a fortiori $x \in F \cup F'$. Donc, la suite $\{F_n \cup F'_n\}$ vérifie le critère 2'.

On notera que l'intersection, contrairement à la réunion, n'est pas une opération continue.

<u>Définition 1-2-1</u> - Si $\{F_n\}$ est une suite dans $\mathcal{F}$, on désignera par $\underline{\lim}\, F_n$ l'intersection des valeurs d'adhérence dans $\mathcal{F}$ de cette suite, et par $\overline{\lim}\, F_n$ leur réunion.

Il est clair qu'une suite $\{F_n\}$ converge dans $\mathcal{F}$ si et seulement si $\overline{\lim}\, F_n = \underline{\lim}\, F_n = F$, et cette valeur commune F est alors égale à $\lim F_n$.

La proposition suivante donne la caractérisation de ces deux ensembles.

Proposition 1-2-3.- Si $\{F_n\}$ est une suite dans $\mathcal{F}$, alors :

a/ - $\underline{\lim}\, F_n$ est le plus grand des fermés $F \in \mathcal{F}$ vérifiant les propriétés équivalentes 1 et 1'. Autrement dit, on a $x \in \underline{\lim}\, F_n$ si et seulement si pour tout entier n (sauf au plus un nombre fini) il existe $x_n \in F_n$ tel que la suite $\{x_n\}$ converge vers x dans E. Ou encore, $x \in \underline{\lim}\, F_n$ si et seulement si tout voisinage de x rencontre tous les F_n, sauf au plus un nombre fini.

b/ - l'ensemble $\overline{\lim}\, F_n$ est fermé, et c'est le plus petit (l'intersection) de tous les fermés F vérifiant les propriétés équivalentes 2 et 2'. Autrement dit, on a $x \in \overline{\lim}\, F_n$ si et seulement si x est limite dans E d'une suite $\{x_{n_k}\}$ avec $x_{n_k} \in F_{n_k}$, pour une suite partielle $\{F_{n_k}\}$. Ou encore, $x \in \overline{\lim}\, F_n$ si et seulement si tout voisinage de x rencontre une infinité d'ensembles F_n. De plus, on a la relation :

$$\text{(b)} \qquad \overline{\lim}\, F_n = \bigcap_{N>0} \overline{\bigcup_{n\geq N} F_n}$$

Pour montrer a/, désignons par F l'ensemble (évidemment fermé) défini par : $x \in F$ si et seulement si tout voisinage de x rencontre tous les F_n, sauf au plus unnnombre fini. Tout $x \in F$ est limite d'une suite $\{x_n\}$ avec $x_n \in F_n$ pour n assez grand, donc x appartient à toute valeur d'adhérence de la suite $\{F_n\}$, et par suite $F \subset \underline{\lim}\, F_n$. Si $x \notin F$, il existe un voisinage V de x et une suite partielle $\{F_{n_k}\}$ avec $V \cap F_{n_k} = \emptyset$ pour tout k. La suite $\{F_{n_k}\}$ admet dans l'espace compact $\mathcal{F}$ une valeur d'adhérence $A \supset \underline{\lim}\, F_n$. On a $x \notin A$, d'où $x \notin \underline{\lim}\, F_n$, et $\underline{\lim}\, F_n \subset F$.

Pour montrer b/, désignons par F' l'ensemble (évidemment fermé) défini par : $x \in F'$ si tout voisinage de x rencontre une infinité de F_n. Si $x \in F'$, on peut donc trouver une suite partielle $\{F_{n_k}\}$ et, pour chaque k, un point $x_{n_k} \in F_{n_k}$ tel que la suite $\{x_{n_k}\}$ converge vers x. Mais $\{F_{n_k}\}$ admet dans l'espace compact $\mathcal{F}$ une valeur d'adhérence A, et on a $x \in A$, donc $F' \subset \overline{\lim}\, F_n$. Inversement, si $x \in \overline{\lim}\, F_n$, soit $\{F_{n_k}\}$ une suite partielle admettant dans F une limite $A' \ni x$. D'après le critère 1', x est limite d'une suite $\{x_{n_k}\}$ avec $x_{n_k} \in F_{n_k}$ pour k assez grand, donc $x \in F'$ et $\overline{\lim}\, F_n \subset F'$.

Examinons maintenant les applications à valeurs dans $\mathcal{F}$.

<u>Définition 1-2-2</u> - Soit Ω un espace topologique, et ϕ une application de Ω dans $\mathcal{F}$. On dit que ϕ est semi-continus supérieurement (s.c.s.) si pour tout $K \in \mathcal{K}$ l'image inverse $\phi^{-1}(\mathcal{F}^K)$ de $\mathcal{F}^K$ est ouverte dans Ω. On dit que ϕ est semi-continue inférieurement (s.c.i.) si pour tout $G \in \mathcal{G}$ l'image inverse $\phi^{-1}(\mathcal{F}_G)$ de $\mathcal{F}_G$ est ouverte dans Ω.

Il est clair que l'application ϕ est continue si et seulement si elle est à la fois s.c.i. et s.c.s.

Dans le cas où la topologie de l'espace Ω admet une base dénombrable, on a le critère plus simple suivant :

<u>Proposition 1-2-4</u>.- Soit Ω un espace topologique de type dénombrable et ϕ une application de Ω dans $\mathcal{F}$. Alors :

a/ ϕ est s.c.s. si et seulement si on a $\phi(\omega) \supset \overline{\lim}\ \phi(\omega_n)$ pour toute suite $\{\omega_n\}$ convergeant vers un $\omega \in \Omega$.

b/ ϕ est s.c.i. si et seulement si on a $\phi(\omega) \subset \underline{\lim}\ \phi(\omega_n)$ pour toute suite $\{\omega_n\}$ convergeant vers un $\omega \in \Omega$.

En effet, Ω étant de type dénombrable, $\phi^{-1}(\mathcal{F}_K)$ (resp. $\phi^{-1}(\mathcal{F}^G)$) est fermé dans Ω pour tout $K \in \mathcal{K}$ (resp. tout $G \in \mathcal{G}$) si et seulement si $\omega_n \to \omega$ dans ω et $\phi(\omega_n) \in \mathcal{F}_K$ (resp. $\in \mathcal{F}^G$) entraîne $\phi(\omega) \in \mathcal{F}_K$ (resp. $\in \mathcal{F}^G$) c'est-à-dire, d'après le critère 2 (resp. le critère 1) si et seulement si $\overline{\lim}\ \phi(\omega_n) \subset \phi(\omega)$ (resp. $\underline{\lim}\ \phi(\omega_n) \supset \phi(\omega)$).

<u>COROLLAIRE 1</u> - L'application $(F,F') \to F \cap F'$ de $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$ est s.c.s.

En effet, soient $\{F_n\}$ et $\{F'_n\}$ deux suites convergeant respectivement vers F et F' dans $\mathcal{F}$, et montrons $\overline{\lim}\ (F_n \cap F'_n) \subset F \cap F'$. Si $\overline{\lim}\ (F_n \cap F'_n)$ n'est pas vide,,soit $x \in \overline{\lim}\ (F_n \cap F'_n)$ et (Proposition 1-2-3) $\{x_{n_k}\}$ une suite convergeant vers x avec $x_{n_k} \in F_{n_k} \cap F'_{n_k}$. D'après le critère 2', $x_{n_k} \in F_{n_k}$ entraîne $x \in F$, et de même $x_{n_k} \in F'_{n_k}$ entraîne $x \in F'$, donc $x \in F \cap F'$ et $\overline{\lim}\ (F_n \cap F'_n) \subset F \cap F'$.

<u>COROLLAIRE 2</u> - L'application $F \to \overline{F^c}$ de $\mathcal{F}$ dans lui-même est s.c.i.

En effet, $\overline{F^c} \cap G = \emptyset$ pour $G \in \mathcal{G}$ équivaut à $F^c \cap G = \emptyset$, donc à $F \supset G$. Par suite, d'après le corollaire 4 du Théorème 1-2-2, l'image inverse de $\mathcal{F}^G$ est fermée dans $\mathcal{F}$.

COROLLAIRE 3 - Si E est localement connexe, l'application frontière $\partial : \mathscr{F} \to \mathscr{F}$ est s.c.i.

Si G est un ouvert connexe, la frontière $\partial F = F \cap \overline{F^c}$ d'un fermé F rencontre G si et seulement si G rencontre F et F^c. On a donc $\partial^{-1}(\mathscr{F}_G) = \mathscr{F}_G \cap \{F \not\supset G\}$, et cet ensemble est ouvert dans $\mathscr{F}$ d'après le corollaire 4 du Théorème 1-2-2. Si G est un ouvert quelconque, ses composantes connexes G_i, $i \in I$ sont ouvertes, puisque E est localement connexe. On a $\partial^{-1}(\mathscr{F}_G) = \partial^{-1}(\bigcup_I \mathscr{F}_{G_i}) = \bigcup_I \partial^{-1}(\mathscr{F}_{G_i})$, et cet ensemble est ouvert dans $\mathscr{F}$.

COROLLAIRE 4 - Soient E et E' deux espaces LCD et ϕ une application croissante de $\mathscr{F}(E)$ dans $\mathscr{F}(E')$ (c'est-à-dire telle que $F \subset F'$ entraîne $\phi(F) \subset \phi(F')$). Alors ϕ est s.c.s. si et seulement si $F_n \downarrow F$ dans $\mathscr{F}(E)$ entraîne $\phi(F_n) \downarrow \phi(F)$ dans $\mathscr{F}(E')$.

Supposons ϕ s.c.s. Si $F_n \downarrow F$, on a $\lim F_n = F$ dans $\mathscr{F}(E)$ (Th. 1-2-2, corollaire 3), donc $\overline{\lim}\, \phi(F_n) \subset \phi(F)$. Mais $F_n \supset F$ entraîne $\underline{\lim}\, \phi(F_n) \supset \phi(F)$, d'où $\phi(F_n) \to \phi(F)$ dans $\mathscr{F}(E')$. Par ailleurs, ϕ étant croissante, on a aussi $\phi(F_n) \downarrow \cap\, \phi(F_n)$, donc (Th. 1-2-2 corollaire 3) $\phi(F_n) \to \cap\, \phi(F_n)$ et par suite $\phi(F_n) \downarrow \phi(F)$.

Inversement, supposons vérifiée la condition de continuité monotone séquentielle de l'énoncé, et soit $\{F_n\}$ une suite dans $\mathscr{F}(E)$ admettant la limite F. D'après la relation (b) de la Proposition 1-2-3, on a $F = \cap A_N$ avec $A_N = \overline{\bigcup_{n \geq N} F_n}$. Comme $\{A_N\}$ est une suite décroissante, on a $\phi(A_N) \downarrow \phi(F)$, et $F_N \subset A_N$ donne $\overline{\lim}\, \phi(F_n) \subset \overline{\lim}\, \phi(A_N) = \lim \phi(A_N) = \phi\, (F)$. Donc ϕ est s.c.s.

COROLLAIRE 5 - Une application croissante T de $\mathscr{F}(E)$ dans la droite réelle achevée $[-\infty, +\infty]$ est s.c.s. si et seulement si $F_n \downarrow F$ dans $\mathscr{F}$ entraîne $T(F_n) \downarrow T(F)$.

Cet énoncé se déduit du corollaire 4 si l'on identifie tout $x \in [-\infty, +\infty]$ au fermé $\{y : y \leq x\}$ de la droite achevée.

Examinons maintenant le cas où E est un espace métrique.

Supposons donc que E soit muni d'une distance $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$ (et soit un espace LCD pour la topologie définie par cette distance). Si l'on désigne par $B_\varepsilon(x)$ (resp. $\overline{B_\varepsilon(x)}$) la boule ouverte (resp. fermée) de centre x et de rayon $\varepsilon > 0$, la topologie de $\mathscr{F}(E)$ est alors engendrée par les $\mathscr{F}_{B_\varepsilon(x)}$ et les $\mathscr{F}^{\overline{B}_\varepsilon(x)}$. Pour tout $F \in \mathscr{F}$ et tout $x \in E$, on posera $d(x,F) = \operatorname{Inf}\{d(x,y),\ y \in F\}$ si $F \neq \emptyset$, et $d(x,\emptyset) = \infty$. On vérifie sans peine les équivalences :

$$F \in \mathcal{F}_{B_\varepsilon(x)} \Leftrightarrow d(x,F) < \varepsilon$$

$$F \in \mathcal{F}^{\overline{B}_\varepsilon(x)} \Leftrightarrow d(x,F) > \varepsilon$$

Par conséquent, une suite $\{F_n\}$ converge vers F dans $\mathcal{F}$ si et seulement si pour tout $x \in E$, la suite $\{d(x,F_n)\}$ converge vers $d(x,F)$ pour la topologie de la demi-droite compacte. Plus précisément :

Proposition 1-2-5.- Lorsque la topologie de E est définie par une distance d, une suite $\{F_n\}$ dans $\mathcal{F}$ est convergente si et seulement si pour tout $x \in E$ la suite $\{d(x,F_n)\}$ est convergente dans la demi-droite compacte $[0,\infty]$.

Cette condition est nécessaire d'après ce qu'on vient de voir. Inversement, supposons que pour tout $x \in E$, $\{d(x,F_n)\}$ admette une limite $f(x) \in [0,\infty]$. Comme $\mathcal{F}$ est compact, il existe une suite partielle $\{F_{n_k}\}$ convergeant vers $F \in \mathcal{F}$, et $d(x,F_{n_k}) \to d(x,F)$, d'après ce qui précède, d'où $f(x) = d(x,F)$. Par suite $\{F_n\}$ converge vers F.

1-3 LES ESPACES $\mathcal{G}$ et $\mathcal{K}$.

Nous munissons l'espace $\mathcal{G}$ de la topologie $\mathcal{T}_g$ engendrée par la famille constituée des $\mathcal{G}_K$, $K \in \mathcal{K}$ et des $\mathcal{G}^G$, $G \in \mathcal{G}$. Il est clair que l'application β de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{G}$ définie par : $\beta F = F^c$ est alors un homéomorphisme, de sorte que tous les résultats du paragraphe précédent se transposent par dualité. Par exemple, le critère de convergence du théorème 1-2-2 prend la forme suivante :

THEOREME 1-3-1 - Une suite $\{G_n\}$ converge vers G dans $\mathcal{G}$ si et seulement si elle vérifie les deux conditions suivantes :

1°/ Tout $x \in G$ est limite d'une suite $\{x_n\} \subset E$ avec $x_n \notin G_n$ pour tout entier n sauf au plus un nombre fini.

2°/ Pour toute suite partielle $\{G_{n_k}\}$ toute suite $\{x_{n_k}\}$ vérifiant $x_{n_k} \notin G_{n_k}$ a ses valeurs d'adhérence dans G^c.

Si ϕ est une application d'un espace topologique Ω dans $\mathcal{G}$, on dira que ϕ est s.c.i. (resp. s.c.s.). Si l'image inverse de $\mathcal{G}_K$ (resp. de $\mathcal{G}^G$) est ouverte dans Ω pour tout $K \in \mathcal{K}$ (resp. pour tout $G \in \mathcal{G}$). Autrement dit :

<u>Proposition 1-3-1</u>.- Une application ϕ d'un espace topologique Ω dans $\mathcal{G}$ est s.c.i. (resp. s.c.s.) si et seulement si l'application $\beta \circ \phi$ de Ω dans $\mathcal{F}$ est s.c.s. (resp. s.c.i.).

Passons maintenant à l'espace $\mathcal{H}$.

<u>Définition 1-3-1</u> - On appelle $\mathcal{H}$ le sous-espace de l'espace produit $\mathcal{G} \times \mathcal{F}$ image de $\mathcal{P}(E)$ par l'application $A \to (\mathring{A}, \overline{A})$.

Il est évidemment contenu dans le sous-espace $\{(G,F) : G \subset F\}$ de $\mathcal{G} \times \mathcal{F}$. En général, si G est un ouvert et F un fermé tels que $G \subset F$, il n'existe pas nécessairement de sous-ensemble $A \subset E$ tel que $G = \mathring{A}$ et $F = \overline{A}$. Il en est toutefois ainsi lorsque l'espace E vérifie l'axiome suivant (toujours vérifié, en particulier, lorsque les ouverts de E ont une puissance supérieure au dénombrable) :

<u>Axiome 1-3</u> - E admet un sous-ensemble D dense dans E ainsi que son complémentaire D^c.

En effet, si $G \in \mathcal{G}$ et $F \in \mathcal{F}$ vérifient $G \subset F$, l'ensemble :

$$A = G \cup ((\overline{G})^c \cap \mathring{F} \cap D) \cup \partial F$$

admet l'intérieur $\mathring{A} = G$ et l'adhérence $\overline{A} = F$.

<u>Proposition 1-3-1</u>.- Lorsque l'axiome 1-3 est vérifié, l'espace $\mathcal{H}$ est compact et de type dénombrable pour la topologie $\mathcal{T}_h$ induite par la topologie produit $\mathcal{T}_f \otimes \mathcal{T}_g$.

Comme $\mathcal{G} \times \mathcal{F}$ est déjà compact et de type dénombrable, il suffit de montrer que $\mathcal{H}$ est fermé dans $\mathcal{G} \times \mathcal{F}$, et même, d'après ce qui précède, de montrer que si deux suites $\{G_n\}$ et $\{F_n\}$ convergent dans $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ respectivement vers G et F en vérifiant $G_n \subset F_n$, on a $G \subset F$. Si $G = \emptyset$, le résultat est acquis. Sinon, soit $x \in G$. Comme $\mathcal{G}_{\{x\}}$ est ouvert dans $\mathcal{G}$, on a $x \in G_n \subset F_n$ pour n assez grand. Mais $\mathcal{F}_{\{x\}}$ est fermé dans $\mathcal{F}$, et $x \in F_n$ entraîne $x \in F$, d'où $G \subset F$.

<u>1-4 L'ESPACE $\mathcal{K}(E)$ ET LA TOPOLOGIE MYOPE.</u>

Nous munirons l'espace $\mathcal{K}(E)$ de la topologie $\mathcal{T}_k$ engendrée par les familles $\mathcal{K}^F$, $F \in \mathcal{F}$ et $\mathcal{K}_G$, $G \in \mathcal{G}$, et nous dirons que $\mathcal{T}_k$ est la <u>topologie myope</u> sur $\mathcal{K}$. Si l'espace E est compact, les espaces topologiques $\mathcal{K}$ et $\mathcal{F}$ sont identiques. Par contre, lorsque E n'est pas compact, la topologie myope est strictement plus fine que la topologie induite sur $\mathcal{K}$ par celle de $\mathcal{F}$, de sorte que $\mathcal{K}$ n'est pas un sous-espace topologique de $\mathcal{F}$. En effet, la topologie induite par $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{K}$ est engendrée par les $\mathcal{F}^K \cap \mathcal{K} = \mathcal{K}^K$, $K \in \mathcal{K}$ et les $\mathcal{F}_G \cap \mathcal{K} = \mathcal{K}_G$, $G \in \mathcal{G}$, qui sont des ouverts de $\mathcal{C}_k$, mais, si F est un fermé non compact, $\mathcal{K}^F$ n'est pas ouvert pour la topologie induite. L'injection $K \to K$ de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{F}$ étant continue, une partie compacte $\mathcal{O}$ de $\mathcal{K}(E)$ est compacte, donc fermée dans $\mathcal{F}$ et tout sous-ensemble $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$ fermé, donc compact pour la topologie myope est également fermé dans $\mathcal{O}$. Ainsi, la topologie myope et la topologie $\mathcal{C}_f$ coïncident sur les parties compactes de $\mathcal{K}$. Inversement, d'ailleurs, si un sous-ensemble $\mathcal{O} \subset \mathcal{K}$ est fermé (donc compact) pour la topologie de $\mathcal{F}$, et si la topologie myope coïncide sur $\mathcal{O}$ avec la topologie $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{O}$ est compact dans $\mathcal{K}(E)$. On voit facilement que cette condition est vérifiée par $\mathcal{K}^{K^c}$, (ensemble des compacts contenus dans K) dès que $K \in \mathcal{K}$. D'autre part, lorsque B parcourt la famille des ouverts relativement compacts dans E, les $\mathcal{K}^{B^c}$ constituent un recouvrement ouvert de $\mathcal{K}(E)$. On en déduit aussitôt que toute partie compacte $\mathcal{O}$ de $\mathcal{K}(E)$ est contenue dans l'un des $\mathcal{K}^{B^c}$, et donc, a fortiori (en prenant $K = \bar{B}$) dans $\mathcal{K}^{K^c}$ pour un $K \in \mathcal{K}$. Autrement dit, une partie $\mathcal{O}$ de $\mathcal{K}(E)$ est compacte pour $\mathcal{C}_k$ si et seulement si elle est fermée dans $\mathcal{F}$ et contenue dans $\mathcal{K}^{K^c}$ pour un $K \in \mathcal{K}$. On en déduit sans difficulté que $\mathcal{K}$ est localement compact et de type dénombrable pour la topologie myope.

Proposition 1-4-1.- La topologie myope est plus fine que la topologie induite sur $\mathcal{K}$ par celle de $\mathcal{F}$, et même strictement plus fine si E n'est pas compact. Toutefois ces deux topologies coïncident sur les parties de $\mathcal{K}$ compactes pour la topologie myope. Pour qu'une partie $\mathcal{O}$ de $\mathcal{K}$ soit compacte pour la topologie myope, il faut et il suffit qu'elle soit fermée dans $\mathcal{F}$ et que tous les $K \in \mathcal{K}$ soient contenus dans un compact fixe $K_o \in \mathcal{K}$.

COROLLAIRE - $\mathcal{K}$ est localement compact et de type dénombrable.

Il suffit d'appliquer cette proposition au cas particulier des suites dans $\mathcal{K}$ pour obtenir le critère de convergence suivant :

THEOREME 1-4-1 - Une suite $\{K_n\}$ dans $\mathcal{K}$ est convergente pour la topologie myope si et seulement si elle vérifie les deux conditions suivantes :

1/ - Il existe un compact fixe K_o contenant tous les K_n.

2/ - La suite K_n est convergente pour la topologie de $\mathcal{F}$.

COROLLAIRE 1 - L'ensemble vide $\emptyset$ est un point isolé dans $\mathcal{K}(E)$.

COROLLAIRE 2 - (Continuité de la réunion) - Les applications $(K,K') \to K \cup K'$ de $\mathcal{K} \times \mathcal{K}'$ dans $\mathcal{K}$ et $(K,F) \to (K \cup F)$ de $\mathcal{K} \times \mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$ sont continues.

COROLLAIRE 3 - Soit $\{K_n\}$ une suite dans $\mathcal{K}$. Si $K_n \downarrow K$, $\{K_n\}$ converge vers K dans $\mathcal{K}$. Si $K_n \uparrow A$ et si A est relativement compact, $\{K_n\}$ converge vers $\bar{A}$ dans $\mathcal{K}$.

COROLLAIRE 4 - L'ensemble $\mathcal{J}' = \mathcal{J} \setminus \{\emptyset\}$ des parties finies non vides de E est dense dans $\mathcal{K}' = \mathcal{K} \setminus \{\emptyset\}$.

REMARQUE - Lorsque E n'est pas compact, les résultats précédents s'interprètent facilement si l'on introduit l'espace compact $\bar{E} = E \cup \{\omega\}$ déduit de E par adjonction d'un point à l'infini ω (dont les voisinages ouverts sont les complémentaires dans $\bar{E}$ des compacts $K \in \mathcal{K}(E)$). Les compacts $K \in \mathcal{K}(E)$ sont alors les fermés de $\mathcal{F}(\bar{E})$ ne contenant pas ω, et $\mathcal{K}(E) = \mathcal{F}^{\{\omega\}}(\bar{E})$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathcal{F}(\bar{E})$. On vérifie immédiatement que la topologie myope coïncide avec la topologie induite par $\mathcal{F}(\bar{E})$ sur l'ouvert $\mathcal{K}(E)$. Autrement dit, $\mathcal{K}(E)$ est un sous-espace topologique de $\mathcal{F}(\bar{E})$ ouvert dans $\mathcal{F}(\bar{E})$. D'autre part, le complémentaire de $\mathcal{K}(E)$ dans $\mathcal{F}(\bar{E})$ est le fermé $\mathcal{F}_{\{\omega\}}(\bar{E})$. On vérifie immédiatement que l'application $F \to F \cup \{\omega\}$ est un homéomorphisme de $\mathcal{F}(E)$ sur $\mathcal{F}_{\{\omega\}}(\bar{E})$. Ainsi, $\mathcal{F}(\bar{E})$ est réunion des deux sous-espaces disjoints $\mathcal{F}^{\{\omega\}}$ et $\mathcal{F}_{\{\omega\}}$ homéomorphes respectivement à $\mathcal{K}(E)$ et à $\mathcal{F}(E)$.

En ce qui concerne les applications définies sur $\mathcal{K}$ ou à valeurs dans $\mathcal{K}$, le théorème 1-4-1 permet de montrer qu'elles vérifient des propriétés analogues à celles que nous avons déjà rencontrées dans le cas de l'espace $\mathcal{F}$. Nous examinerons seulement le cas des fonctions sur $\mathcal{K}$ à valeurs réelles (finies ou non) croissantes et s.c.s.

Proposition 1-4-2.- Soit T une fonction définie sur $\mathcal{K}$, à valeurs réelles (finies ou non), et croissante, c'est-à-dire vérifiant $K \subset K'$ dans $\mathcal{K} \Rightarrow T(K) \leq T(K')$. Pour que T soit s.c.s., il faut et il suffit que $K_n \downarrow K$ dans $\mathcal{K}$ entraîne $T(K_n) \downarrow T(K)$.

Compte tenu du théorème 1-4-1, cela résulte aussitôt du corollaire 5 de la Proposition 1-2-4.

Proposition 1-4-3.- Soit T une fonction croissante définie sur $\mathcal{K}$, à valeurs réelles (finies ou non). Pour tout $G \in \mathcal{G}$, on pose $T_g(G) = \operatorname{Sup} \{T(K),\ K \in \mathcal{K},\ K \subset G\}$, et pour tout $K \in \mathcal{K}$, $T_k(K) = \operatorname{Inf} \{T_g(G),\ G \in \mathcal{G},\ G \supset K\}$. Alors, T_g est s.c.i. sur $\mathcal{G}$ et T_k s.c.s. sur $\mathcal{K}$. Plus présisément, T_k est la plus petite majorante s.c.s. de T sur $\mathcal{K}$, et, en particulier, on a $T_k = T$ si et seulement si T est elle-même s.c.s. De plus, on a la formule réciproque $T_g(G) =$

Sup $\{T_k(K),\ K \in \mathcal{K},\ K \subset G\}$ pour $G \in \mathcal{G}$.

De même, st T' est une fonction croissante définie sur $\mathcal{G}$, à valeurs réelles finies ou non, on pose $T'_k(K) = \text{Inf}\ \{T'(G),\ G \in \mathcal{G},\ G \supset K\}$ pour $K \in \mathcal{K}$ et $T'_g(G) = \text{Sup}\ \{T'_k(K),\ K \in \mathcal{K},\ K \subset G\}$. Alors T'_k est s.c.s. sur $\mathcal{K}$ et T'_g est la plus grande minorante s.c.i. de T' sur $\mathcal{G}$. En particulier, on a $T' = T'_g$ si et seulement si T'_g est s.c.i. De plus, pour $K \in \mathcal{K}$, on a la formule réciproque $T'_k(K) = \text{Inf}\ \{T'(G),\ G \in \mathcal{G},\ G \supset K\}$ pour $K \in \mathcal{K}$.

Démontrons par exemple le premier énoncé. Soit $G \in \mathcal{G}$, et ε un réel ≥ 0. On peut trouver $K \in \mathcal{K}$ tel que $K \subset G$ et $T_g(G) \leq T(K) + \varepsilon$. Pour tout ouvert $G' \in \mathcal{G}_K$, c'est-à-dire vérifiant $G' \supset K$, on a alors $T_g(G') \geq T(K) \geq T_g(G) - \varepsilon$, et par suite T_g est s.c.i. Si maintenant K est un compact, on peut trouver $G \in \mathcal{G}$ avec $G \supset K$ et $T_k(K) \geq T_g(G) - \varepsilon$. Pour tout $K' \in \mathcal{K}^{G^c}$, c'est-à-dire vérifiant $K' \subset G$, on a alors $T_k(K') \leq T_g(G) \leq T_k(K) + \varepsilon$, et T_k est s.c.s.

On a évidemment $T_k \geq T$ sur $\mathcal{K}$. Montrons que si T est s.c.s., on a en fait l'égalité $T_k = T$. Soit K un compact, et $\{G_n\}$ un système fondamental de voisinages ouverts de K vérifiant $G_n \downarrow K$ et $T_g(G_n) \downarrow T_k(K)$. Si ε est un réel positif, on peut pour chaque n trouver un compact K_n vérifiant $K \subset K_n \subset G_n$ et $T(K_n) \geq T_g(G_n) - \varepsilon$. Mais la suite $\{K_n\}$ converge vers K dans $\mathcal{K}$, comme on le déduit sans peine du théorème 1-4-1, d'où $\overline{\lim}\ T(K_n) \leq T(K)$, puisque T est s.c.s. Comme T est croissante, on a aussi $\underline{\lim}\ T(K_n) \geq T(K)$, donc $T(K) = \lim T(K_n) \geq \lim T_g(G_n) - \varepsilon = T_k(K) - \varepsilon$. Par suite $T(K) = T_k(K)$.

Si T n'est pas s.c.s., et si T' est une majorante s.c.s. de T, la même construction donnera $T'_g \geq T_g$, puis $T'_k \geq T_k$, mais $T'_k = T'$, d'après ce qui précède, puisque T' est s.c.s. Donc $T' \geq T_k$, et T_k est bien la plus petite majorante s.c.s. de T. Enfin, si l'on pose $T'_g(G) = \text{Sup}\ \{T_k(K),\ K \in \mathcal{K},\ K \subset G\}$, on a pour tout compact $K \subset G$: $T(K) \leq T_k(K) \leq T_g(G)$, et, en passant au Sup, $T_g(G) \leq T'_g(G) \leq T_g(G)$, donc $T'_g = T_g$.

<u>La métrique de Hausdorff</u>.- Lorsque la topologie de l'espace E est définie par une distance d, on peut introduire sur $\mathcal{K}' = \mathcal{K} \setminus \{\emptyset\}$ une distance ρ définie par la formule :

$$\rho(K,K') = \text{Max}\left\{\sup_{x \in K} d(x,K'),\ \sup_{x' \in K'} d(x',K)\right\}$$

et appelée distance de Hausdorff.

<u>Proposition 1-4-4</u>.- Sur $\mathcal{K}' = \mathcal{K} \setminus \{\emptyset\}$, la topologie définie par la métrique de Hausdorff est équivalente à la topologie myope.

En effet, si K est un compact, $d(x,K)$ est une fonction continue de $x \in E$, donc atteint son sup sur tout compact K'. Si donc on désigne par $B_\varepsilon(y)$ la boule ouverte de centre $y \in E$ et de rayon $\varepsilon > 0$, on a les équivalences

$$\sup_{x \in K'} d(x,K) < \varepsilon \Leftrightarrow K' \subset \bigcup_{y \in K} B_\varepsilon(y)$$

$$\sup_{y \in K} d(y,K') < \varepsilon \Leftrightarrow K' \in \bigcap_{y \in K} \mathcal{K}_{B_\varepsilon(y)}$$

Montrons que la boule $\mathcal{B}_\varepsilon(K) = \{K' : K' \in \mathcal{K}, \rho(K,K') < \varepsilon\}$ est un voisinage de K pour la topologie myope. K étant compact admet un recouvrement fini par des boules ouvertes $B_1, B_2, \ldots B_n$ de rayon inférieur à $\varepsilon/2$, et on a $\mathcal{K}_{B_1, B_2, \ldots B_n} \subset \bigcap_{y \in K} \mathcal{K}_{B_\varepsilon(y)}$. Donc si l'on désigne par $F \in \mathcal{F}$ le complémentaire de l'ouvert $\bigcup_{y \in K} B_\varepsilon(y)$, $\mathcal{K}^F_{B_1, \ldots B_n}$ est un voisinage ouvert de K pour la topologie myope contenu dans la boule $\mathcal{B}_\varepsilon(K)$.

Inversement, si F est un fermé disjoint de $K \in \mathcal{K}$, et si l'on pose $\varepsilon = \operatorname{Inf}_{x \in K} d(x,F)$, la relation $\rho(K',K) < \varepsilon$ entraîne $K \subset \bigcup_{y \in K} B_\varepsilon(y)$ et par suite $K' \cap F = \emptyset$. Donc $\mathcal{K}^F$ est ouvert pour la topologie de Hausdorff. Si maintenant le compact K rencontre un ouvert G, on peut trouver $y \in K \cap G$ et $\varepsilon > 0$ tel que $B_\varepsilon(y) \subset G$. La relation $\rho(K,K') < \varepsilon$ entraîne alors $K' \in \mathcal{K}_{B_\varepsilon(y)} \subset \mathcal{K}_G$. Donc $\mathcal{K}_G$ est ouvert pour la métrique de Hausdorff.

<u>REMARQUE</u> - Si E est un espace euclidien, on définit dans $\mathcal{P}(E)$ une opération $\oplus$ appelée addition de Minkowski ($A \oplus B = \{a + b, a \in A, b \in B\}$, voir ci-dessous. La <u>distance de Hausdorff</u> sur $\mathcal{K}'$ s'exprime alors à l'aide de la formule très commode suivante, où B_ε désigne la boule de dentre 0 et de rayon ε :

$$\rho(K,K') = \operatorname{Inf} \{\varepsilon : K \subset K' \oplus B_\varepsilon , K' \subset K \oplus B_\varepsilon\} \tag{1-4-1}$$

<u>1-5 CAS DE L'ESPACE EUCLIDIEN $E = \mathbb{R}^d$.</u>

Dans cette section, nous allons examiner le cas particulier où E est l'espace euclidien

$\mathbb{R}^d$ à d dimensions. La structure d'espace vectoriel de E permet de définir de nouvelles opérations dans $\mathcal{P}(E)$. Dans ce qui suit, A, B, C etc... désignent des sous-ensembles quelconques de E.

Addition de Minkowski. - L'opération $\oplus$, appelée addition de Minkowski, est définie par la relation $A \oplus B = \{a + b,\ a \in A,\ b \in B\}$. C'est une opération associative et commutative, qui fait de $\mathcal{P}(E)$ un demi-groupe abélien. On remarque que l'on a $A \oplus \emptyset = \emptyset$ d'après la définition même, $\{o\}$ est un élément neutre, mais (E) n'est pas un groupe. Si x est un point de $E = \mathbb{R}^d$, $A \oplus \{x\}$ est le translaté de l'ensemble A dans la translation x. Nous écrirons souvent A_x au lieu de $A \oplus \{x\}$. Si l'on désigne par $\check{B} = \{-x,\ x \in B\}$ le symétrique de B par rapport à l'origine, on remarque que l'on a $y \in A \oplus B$ si et seulement si $(\check{B})_y$ est contenu dans A. Ainsi, on a les règles de calcul :

(1-5-1) $$A \oplus B = \bigcup_{y \in A} B_y = \bigcup_{x \in B} A_x = \{z : A \cap (\check{B})_z \neq \emptyset\}$$

On appelle dilaté de l'ensemble A par un ensemble B l'ensemble des points z tels que B_z rencontre A. Le dilaté de A par B est donc $A \oplus \check{B}$.

Par dualité, on définit une opération $\ominus$ appelée soustraction de Minkowski en posant $A \ominus B = (A^c \oplus B)^c$. D'après la formule (1-5-1), on a les règles de calcul suivantes :

(1-5-2) $$A \ominus B = (A^c \oplus B)^c = \bigcap_{x \in B} A_x = \{z : (\check{B})_z \subset A\}$$

On appelle érodé de l'ensemble A par un ensemble B l'ensemble des $z \in E$ tels que B_z soit contenu dans A. D'après la règle (1-5-2), l'érodé de A par B est donc l'ensemble $A \ominus \check{B}$.

Les relations suivantes se démontrent sans difficulté :

(1-5-3) $$\begin{cases} (A \ominus C) \oplus B \subset (A \oplus B) \ominus C \\ \\ (A \ominus B) \ominus C = (A \ominus C) \ominus B = A \ominus (B \oplus C) \end{cases}$$

De même, si B est contenu dans C, on a $A \oplus B \subset A \oplus C$, $A \ominus B \supset A \ominus C$, $B \ominus A \subset C \ominus A$.

On note que l'on a toujours l'inclusion $\{o\} \subset A \ominus \check{A}$, mais non nécessairement l'égalité. Toutefois, si un point $x \neq 0$ appartient à $A \ominus \check{A}$, on a $A_x \subset A$, donc aussi $A_{nx} \subset A$ pour tout entier $n > 0$: la suite $\{nx\}$ est donc contenue dans A. Par conséquent, si A est borné, on a l'égalité stricte :

$$A \ominus \check{A} = \{o\} \tag{1-5-4}$$

L'addition de Minkowski $\oplus$ distribue la réunion. En effet, on peut écrire :

$$A \oplus (B \cup C) = \bigcup_{x \in A} (B_x \cup C_x) = \left(\bigcup_{x \in A} B_x\right) \cup \left(\bigcup_{x \in A} C_x\right)$$

On obtient donc la règle suivante, et deux autres qui s'en déduisent par dualité:

$$\left\{\begin{array}{l} A \oplus (B \cup C) = (A \oplus B) \cup (A \oplus C) \\ A \ominus (B \cup C) = (A \ominus B) \cap (A \ominus C) \\ (B \cap C) \ominus A = (B \ominus A) \cap (C \ominus A) \end{array}\right. \tag{1-5-5}$$

Par contre, les inclusions suivantes sont en général strictes :

$$A \oplus (B \cap C) \subset (A \oplus B) \cap (A \oplus C)$$

$$A \ominus (B \cap C) \supset (A \ominus B) \cup (A \ominus C)$$

$$(B \cup C) \ominus A \supset (B \ominus A) \cap (C \ominus A)$$

Si A est convexe, $A \ominus B$ est convexe (quel que soit B). Si A et B sont convexes, $A \oplus B$ est convexe.

En effet, $A \ominus B = \bigcap_{x \in B} A_x$ est convexe comme intersection de convexes si A est lui-même convexe. Le deuxième énoncé est évident.

Si A et B sont connexes, $A \oplus B$ est connexe.

En effet, soit $b \in B$. A_b est connexe et contenu dans $A \oplus B$, donc contenu dans une composante connexe C de $A \oplus B$, soit $A_b \subset C$. Pour tout $x \in A$, on a donc $x + b \in C$. Mais $(x+b) \in A_b \cap B_x$. Donc $A_b \cup B_x$ est connexe, comme réunion de deux connexes non disjoints, et par suite $B_x \subset C$ pour tout $x \in A$. Il en résulte $A \oplus B \subset C$.

Si B est connexe, et si les composantes connexes de A sont les C_i, $i \in I$, on a :

$$A \ominus B = \bigcup_{i \in I} C_i \ominus B \tag{1-5-6}$$

En effet, $C_i \subset A$ entraîne $C_i \ominus B \subset A \ominus B$ et $\bigcup_{i \in I} C_i \ominus B \subset A \ominus B$. Inversement, si $z \in A \ominus B$, on a $(\check{B})_z \subset A$, donc $(\check{B}_z) \subset C_i$ pour un $i \in I$, soit $z \in C_i \ominus B$. Donc $A \ominus B \subset \bigcup_{i \in I} C_i \ominus B$.

En combinant érosion et dilatation, on obtient deux autres opérations appelées <u>ouverture</u> A_B et <u>fermeture</u> A^B de l'ensemble A par l'ensemble B, définies comme suit :

(1-5-7)
$$A_B = (A \ominus \check{B}) \oplus B \quad ; \quad A^B = (A \oplus \check{B}) \ominus B$$

Lorsque l'ensemble B est fixé, les applications $A \to A_B$ et $A \to A^B$ sont <u>croissantes</u> ($A \subset A' \Rightarrow A_B \subset A'_B$ et $A^B \subset A'^B$), <u>idempotentes</u> ($(A_B)_B = A_B$ et $(A^B)^B = A^B$) et <u>duales</u> l'une de l'autre pour la complémentation ($(A^c)_B = (A^B)^c$). Enfin la fermeture est <u>extensive</u>, et l'ouverture <u>anti-extensive</u> ($A_B \subset A \subset A^B$). Il s'agit donc bien d'une fermeture et d'une ouverture au sens algébrique.

On dit qu'un ensemble A est <u>ouvert</u> (resp. <u>fermé</u>) <u>selon B</u> si $A_B = A$ (resp. $A^B = A$). Il en est ainsi si et seulement si on a $A = C \oplus B$ (resp. $A = C \ominus B$) pour un $C \in \mathcal{P}(E)$.

<u>L'ouverture de A selon B est la réunion des translatés de B contenus dans A</u>. En effet, $x \in (A \ominus \check{B}) \oplus B$ équivaut à $(\check{B})_x \cap (A \ominus \check{B}) \neq \emptyset$, donc à $\exists y \in E : B_y \subset A$, $x \in B_y$. Ainsi, nous pouvons écrire :

(1-5-8)
$$A_B = \bigcup \left\{B_y,\ y \in E,\ B_y \subset A\right\}$$

Si A et B sont <u>convexes</u>, A_B et A^B sont convexes.

Si B est <u>connexe</u> et si A admet les composantes connexes C_i , $i \in I$, on a :

(1-5-9)
$$A_B = \bigcup_{i \in I} (C_i)_B$$

Ces deux propriétés se déduisent des résultats analogues établis dans le cas des opérations $\oplus$ et $\ominus$.

Dans ce qui suit nous nous intéresserons surtout aux dilatations, érosions, ouvertures ou fermetures par un <u>compact non vide</u>. Pour $K \in \mathcal{K}' = \mathcal{K} \setminus \{\emptyset\}$, les règles suivantes sont valables :

Si $F \in \mathcal{F}$, $F \oplus K$, $F \ominus K$, F_K et F^K sont fermés

Si $G \in \mathcal{G}$, $G \oplus K$, $G \ominus K$, G_K et G^K sont ouverts

Si $K' \in \mathcal{K}$, $K' \oplus K$, $K' \ominus K$, K'_K et K'^K sont compacts

En effet, montrons par exemple les règles relatives à $F \in \mathcal{F}$. Soit $\{x_n\}$ une suite dans $F \oplus K$ convergeant dans E vers une limite x. Pour chaque n, x_n est de la forme $x_n = f_n + k_n$ avec $f_n \in F$ et $k_n \in K$. Comme K est compact, il existe une suite partielle $\{k_{n_p}\}$ convergeant vers une limite $k \in K$. Alors la suite $\{f_{n_p}\}$ converge vers la limite $f = x - k \in F$, et $x = f + k \in F \oplus K$. Donc $F \oplus K$ est fermé. Si G est ouvert, $G \oplus K = \bigcup_{x \in K} G \oplus \{x\}$ est ouvert comme réunion d'ouverts. Donc $F \ominus K = (F^c \oplus \check{K})^c$ est fermé. Enfin, $F \oplus \check{K}$ et $F \ominus \check{K}$ étant fermés, il en est de même de $F_K = (F \ominus \check{K}) \oplus K$ et de $F^K = (F \oplus \check{K}) \ominus K$. Certaines de ces applications sont continues :

<u>Proposition 1-5-1</u>.- Les applications suivantes sont continues :

$$(F,K) \to F \oplus K \text{ de } \mathcal{F} \times \mathcal{K} \text{ sur } \mathcal{F}$$

$$(K,K') \to K \oplus K' \text{ de } \mathcal{K} \times \mathcal{K} \text{ sur } \mathcal{K}$$

$$F \to \check{F} \text{ de } \mathcal{F} \text{ sur } \mathcal{F} \text{ et } K \to \check{K} \text{ de } \mathcal{K} \text{ sur } \mathcal{K}$$

$$(\lambda,F) \to \lambda F \text{ de } \mathbb{R}_+ \times \mathcal{F} \text{ sur } \mathcal{F} \text{ et } (\lambda,K) \to \lambda K \text{ de } \mathbb{R}_+ \times \mathcal{K} \text{ sur } \mathcal{K} \text{ (homothétie)}$$

Montrons, par exemple, la continuité de l'application $(F,K) \to F \oplus K$. Soient $\{F_n\}$ et $\{K_n\}$ deux suites convergeant vers F et K dans $\mathcal{F}$ et $\mathcal{K}$ respectivement. Si $K = \emptyset$, on a $K_n = \emptyset$ pour n assez grand (Théorème 1-4-1, corollaire 1), donc $F_n \oplus K_n = \emptyset$ et $\{F_n \oplus K_n\}$ converge vers $F \oplus K = \emptyset$. Supposons donc $K \neq \emptyset$, et montrons que $\{F_n \oplus K_n\}$ converge vers $F \oplus K$ en vérifiant les critères 1' et 2' du Théorème 1-2-2.

Critère 1' : Si $F \oplus K \neq \emptyset$, soit $x = f + k \in F \oplus K$ avec $f \in F$ et $k \in K$. D'après le critère 1' appliqué à $\{F_n\}$ et à $\{K_n\}$, il existe pour chaque n (sauf au plus un nombre fini) $f_n \in F_n$ et $k_n \in K_n$ avec $f = \lim f_n$, $k = \lim k_n$. Donc $x = \lim x_n$ avec $x_n = f_n + k_n \in F_n \oplus K_n$.

Critère 2' : Soit $x = \lim (f_{n_p} + k_{n_p})$ avec $f_{n_p} \in F_{n_p}$ et $k_{n_p} \in K_{n_p}$. Comme les K_{n_p} sont contenus dans un compact fixe (Théorème 1-4-1), la suite $\{k_{n_p}\}$ admet une valeur d'adhérence $k \in K$. Le point $f = x - k$ est alors valeur d'adhérence pour $\{f_{n_p}\}$, donc appartient à F (critère 2' appliqué à $\{F_n\}$). Donc $x = k + f \in F \oplus K$.

<u>Proposition 1-5-2</u>.- Les applications $(A,K) \to A \ominus K$, $(A,K) \to A_K$ et $(A,K) \to A^K$ de $\mathcal{F} \times \mathcal{K}'$ (ou de $\mathcal{K} \times \mathcal{K}'$) dans $\mathcal{F}$ (ou dans $\mathcal{K}$) sont semi-continues supérieurement.

En effet, soient $\{A_n\}$ et $\{K_n\}$ deux suites convergeant vers A et K respectivement dans $\mathcal{F}$ et dans $\mathcal{K}'$. D'après la Proposition 1-2-4, $(A,K) \to (A \ominus K)$ sera s.c.s. si $A \ominus K \supset \overline{\lim} (A_n \ominus K_n)$. Soit $\{x_{n_k}\}$ une suite convergeant vers un $x \in E$ en vérifiant $x_{n_k} \in A_{n_k} \ominus K_{n_k}$. On a $\check{K}_{n_k} \oplus \{x_{n_k}\} \subset A_n$.

et cette inclusion passe à la limite, d'après la Proposition 1-5-1, et le corollaire 3 du Théorème 1-2-2. On a donc $\check{K} \oplus \{x\} \subset A$, c'est-à-dire $x \in A \ominus K$. Par suite (Proposition 1-2-3) $\overline{\lim}\,(A \ominus K_n) \subset A \ominus K$. Démonstration analogue pour A_K et A^K.

<u>COROLLAIRE</u> - Soit A un fermé (resp. un compact), et $\{K_n\}$ une suite croissante dans $\mathcal{K}'$. Si $\overline{\bigcup K_n} = K \in \mathcal{K}'$, on a $A \ominus K_n \downarrow A \ominus K$ et $\lim A \ominus K_n = A \ominus K$ dans $\mathcal{F}$ (resp. dans $\mathcal{K}$).

En effet, on a $\lim K_n = K$ dans $\mathcal{K}$ (Théorème 1-4-1, corollaire 3), et la semi-continuité supérieure de $A \ominus K$ donne $A \ominus K \supset \overline{\lim}\,(A \ominus \overline{K}_n)$. Mais $A \ominus K_n \supset A \ominus K$ entraîne alors $A \ominus K = \lim(A \ominus K_n)$, donc aussi $A \ominus K_n \downarrow A \ominus K$ puisqu'il s'agit d'une suite décroissante.

<u>La convexité</u>. Les propriétés liées à la <u>convexité</u> dans l'espace euclidien $E = \mathbb{R}^d$ joueront un rôle capital dans la suite de cet ouvrage, et notamment dans les chapitres 4, 5 et 6. Indiquons dès maintenant quelques résultats. Si $A \in \mathcal{P}(E)$ est un sous-ensemble de E, on appelle <u>enveloppe convexe</u> de A, et on désigne par $C(A)$, l'ensemble des points de la forme $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, n entier > 0, λ_i réel vérifiant $0 \leq \lambda_i \leq 1$ et $\sum \lambda_i = 1$ et $x_i \in A$ pour $i = 1, 2, \ldots n$. Si F est fermé, $C(F)$ est fermé. De même, si K est compact, $C(K)$ est compact. Notons aussi la relation suivante valable pour des ensembles A, A' quelconques dans E :

$$C\,(A \oplus A') = C(A) \oplus C(A') \tag{1-5-9}$$

<u>Proposition 1-5-3</u>.- Si $F \in \mathcal{F}$ et si B est un ensemble borné quelconque, on a $F^B \subset C(F)$. Si de plus F est convexe, F est fermé selon B. Si F et F' sont convexes et fermés et vérifient $F \oplus B = F' \oplus B$, on a $F = F'$.

En effet, lorsque F est fermé, $C(F)$ est l'intersection des demi-espaces contenant F. Si $x \notin C(F)$, il existe donc un demi-espace fermé $H \supset F$ avec $x \notin H$, et on peut trouver un translaté B_y de B disjoint de H et contenant x. Mais d'après (1-5-8) cela entraîne $x \in (F^c)_B = (F^B)^c$. Donc $F^B \subset C(F)$. Si F est convexe, on a de plus $C(F) = F \subset F^B$, donc $F = F^B$, et F est ouvert selon B. Si F et F' sont convexes et fermés, $F \oplus B = F' \oplus B$ entraîne $F^{\check{B}} = F'^{\check{B}}$, d'après la définition de la fermeture, donc $F = F'$ d'après ce qui précède.

<u>Proposition 1-5-4</u>.- L'application $K \to C(K)$ associant à tout compact K son enveloppe convexe $C(K)$ est continue sur $\mathcal{K}$. De même, l'application $F \to C(F)$ est s.c.i. sur $\mathcal{F}$.

Montrons que $F \to C(F)$ est s.c.i. en utilisant le critère b/ de la Proposition 1-2-4. Soit donc

$\{F_n\}$ une suite convergeant vers F dans $\mathcal{F}$, et soit $x \in C(F)$. Ce point admet une représentation de la forme $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$, $x_i \in F$, $\sum \lambda_i = 1$, $\lambda_i \geq 0$ $(i = 1,2,\ldots k)$. D'après le critère de convergence 1' du Théorème 1-2-2 appliqué à la suite $\{F_n\}$, chaque x_i est limite d'une suite $\{x_n(i)\}$, $x_n(i) \in F_n$. Si l'on pose $x_n = \sum \lambda_i x_n(i)$, on a $x_n \in C(F_n)$ et $x = \lim x_n$. Donc $x \in \underline{\lim}\, C(F_n)$ (Prop. 1-2-3), d'où $\underline{\lim}\, C(F_n) \supset C(F)$. Par suite C est s.c.i. sur $\mathcal{F}$.

Si $\{K_n\}$ converge vers K dans $\mathcal{K}$, les K_n sont contenus dans un compact fixe K_o. On a donc $C(K_n) \subset C(K_o)$, et la suite $\{C(K_n)\}$ vérifie la première condition du Théorème 1-3-1. D'après la première partie de la démonstration, on a $\underline{\lim}\, C(K_n) \supset C(K)$. Il suffit donc de montrer $\overline{\lim}\, C(K_n) \subset C(K)$ pour établir la continuité de C sur $\mathcal{K}$. Si H est un demi-espace ouvert contenant K, on a $K_n \subset H$ pour n assez grand (d'après la définition de la topologie myope), donc aussi $C(K_n) \subset H$. Si donc x est valeur d'adhérence d'une suite $\{x_{n_k}\}$ vérifiant $x_{n_k} \in C(K_{n_k})$ on a $x \in \overline{H}$. Mais $C(K)$ est l'intersection des demi-plans fermés $\overline{H}$ tels que $H \supset K$. Donc $x \in C(K)$, et par suite $\overline{\lim}\, C(K_n) \subset C(K)$ d'après le critère a/ de la Proposition 1-2-4.

<u>COROLLAIRE</u> - L'ensemble $C(\mathcal{F})$ des fermés convexes est fermé dans $\mathcal{F}$. L'ensemble $C(\mathcal{K})$ des compacts convexes est fermé dans $\mathcal{K}$.

En effet, soit $\{F_n\}$ une suite convergeant vers F dans $\mathcal{F}$ en vérifiant $F_n \in C(\mathcal{F})$, c'est-à-dire $F_n = C(F_n)$. Comme C est s.c.i. sur $\mathcal{F}$, on a $C(F) \subset \underline{\lim}\, C(F_n) = \lim F_n = F$, et par suite $F = C(F)$, et $C(\mathcal{F})$ est fermé. Même démonstration pour $C(\mathcal{K})$.

<u>L'homothétie</u> $(\lambda, B) \to \lambda B$ $(\lambda \geq 0)$ vérifie manifestement la propriété $\lambda B \oplus \mu B \supset (\lambda+\mu)B$. Si B est <u>convexe</u>, cette inclusion devient une égalité, de sorte que la famille $B_\lambda = \lambda B$ constitue un demi-groupe à un paramètre (soit $B_\lambda \oplus B_\mu = B_{\lambda+\mu}$). Si B est de plus compact, ce demi-groupe est continu dans $\mathcal{K}$ d'après la Proposition 1-5-1. Nous allons montrer la réciproque. Pour cela, convenons de noter $A^{\oplus n}$ la somme de Minkowski de n termes tous égaux à l'ensemble A, et convenons de dire qu'un ensemble A est <u>indéfiniment divisible pour l'addition de Minkowski</u> si pour tout entier n il existe un ensemble B_n tel que $A = B_n^{\oplus n}$.

<u>THEOREME 1-5-1</u> - Un compact $A \in \mathcal{K}$ est indéfiniment divisible pour l'addition de Minkowski si et seulement si il est convexe.

Si $A \in C(\mathcal{K})$, il suffit de prendre $B_n = \frac{1}{n} A$ pour vérifier que A est indéfiniment divisible. Inversement, supposons que pour tout n il existe un ensemble B_n tel que $A = B_n^{\oplus n}$. A étant compact, B_n est borné. Quitte à remplacer B_n par son adhérence $\overline{B}_n$, on peut même supposer $B_n \in \mathcal{K}$ (cela résulte de la relation $\overline{B \oplus B'} = \overline{B} \oplus \overline{B'}$ valable dès que B et B' sont des ensembles bornés). On a évidemment $n\, B_n \subset A$. Etant contenue dans un compact fixe, la suite $\{n\, B_n\}$ admet une suite partielle $\{n_k\, B_{n_k}\}$ convergeant dans $\mathcal{K}$ vers une limite B.

Montrons $C(A) = C(B)$. En effet, pour n et k entiers > 0, on a $n\, B_n \subset A \subset B_k^{\oplus k} \subset k\, C(B_k)$, donc aussi $n\, C(B_n) \subset k\, C(B_k)$. L'inclusion inverse étant vraie également, on a $n\, C(B_n) = k\, C(B_k) = C(A)$. D'après la proposition 1-5-4, cette égalité passe à la limite pour la suite partielle $\{n_k\, B_{n_k}\}$ convergeant vers B, d'où $C(B) = C(A)$.

Montrons maintenant $C(B) \subset A$. Soit $x \in C(B)$ et

$$x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i\, x_i \quad , \quad x_i \in B \quad , \quad \lambda_i \geq 0 \quad , \quad \sum \lambda_i = 1$$

une représentation de cet élément. D'après le critère 1' de convergence appliquée à la suite $\{n_k\, B_{n_k}\}$, il existe pour chaque i une suite $\{y_{n_k}(i)\}$ convergeant vers x_i en vérifiant $y_{n_k}(i) \in n_k B_{n_k}$. Choisissons des entiers $N(i,k) \geq 0$ vérifiant :

$$\sum_{i=1}^{r} N(i,k) = n_k \quad , \quad \lim_k \frac{N(i,k)}{n_k} = \lambda_i$$

et posons $x_k = \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{r} N(i,k)\, y_{n_k}(i)$. On a $x_k \in B_{n_k}^{\oplus n_k} = A$, et $\lim x_k = x$. Donc $x \in A$, et $C(B) \subset A$.

Les relations $C(B) \subset A$ et $C(A) = C(B)$ entraînent alors $A = C(A)$, donc A est convexe.

<u>COROLLAIRE</u> - Dans $\mathcal{K}'$, une famille B_λ, $\lambda \geq 0$ constitue un demi-groupe continu à un paramètre (c'est-à-dire vérifie la relation $B_\lambda \oplus B_\mu = B_{\lambda+\mu}$) si et seulement si B_λ est l'homothétique λB d'un compact convexe B.

On a déjà vu que les λB constituent un demi-groupe continu si $B \in C(\mathcal{K})$. Inversement, si une famille B_λ vérifie la relation des demi-groupes, on en déduit pour n entier $B_\lambda = (B_{\frac{\lambda}{n}})^{\oplus n}$. D'après le théorème; les B_λ sont donc convexes. La relation des demi-groupes donne ensuite $B_\lambda = n\, B_{\frac{\lambda}{n}} = \frac{n}{k}\, B_{\frac{\lambda k}{n}}$ pour n et k entiers, d'où par continuité $B_\lambda = \lambda\, B_1$.

On peut améliorer ce résultat en remplaçant l'hypothèse de continuité par une hypothèse plus faible (par exemple $\bigcup_{\lambda \le 1} B_\lambda$ borné, ou même simplement $0 \in B_\lambda$), mais nous n'insisterons pas ici sur ce point. Dans le même ordre d'idées, notons la proposition suivante :

Proposition 1-5-5.- Pour tout compact $A \in \mathcal{K}'$, la suite $\{\frac{1}{n} A^{\oplus n}\}$ converge dans $\mathcal{K}$ vers $C(A)$.

D'après l'inclusion $\frac{1}{n} A^{\oplus n} \subset C(A)$, il suffit de vérifier la convergence dans $\mathcal{F}$. On a évidemment $\overline{\lim} \frac{1}{n} A^{\oplus n} \subset C(A)$. Il reste à montrer $\underline{\lim} \frac{1}{n} A^{\oplus n} \supset C(A)$. Soit $x \in C(A)$ avec $x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i$, $x_i \in A$, $\lambda_i \ge 0$, $\sum \lambda_i = 1$. Pour tout $n \ge r$, on peut trouver des entiers $N(n,i)$ vérifiant :

$$\sum_{i=1}^{r} N(n,i) = n \quad , \quad \lim_{n\to\infty} \frac{N(n,i)}{n} = \lambda_i$$

Si l'on pose $y_n = \sum_i \frac{N(n,i)}{n} x_i$, on a $y_n \in \frac{1}{n} A^{\oplus n}$ et $\lim y_n = x$, d'où $x \in \underline{\lim} \frac{1}{n} A^{\oplus n}$, et $C(A) \subset \underline{\lim} \frac{1}{n} A^{\oplus n}$.

Granulométries.- Soit B_λ un demi-groupe continu à un paramètre $\lambda \ge 0$ sur $\mathcal{K}'$, c'est-à-dire d'après ce qui précède, une famille $B_\lambda = \lambda B$ constituée des homothétiques d'un compact convexe $B \in C(\mathcal{K}')$. Pour tout ensemble $A \in \mathcal{P}(E)$, nous poserons :

$$\psi_\lambda(A) = A_{\lambda B} = \bigcup \{\lambda B_x, x \in E, \lambda B_x \subset A\}$$

et nous dirons que l'application $\lambda \to \psi_\lambda(A)$ est la granulométrie de l'ensemble A selon le compact convexe B. On trouvera au Chapitre VII une théorie générale des granulométries. Cette application vérifie les propriétés suivantes :

1/ - $\psi_0(A) = A$, et $\lambda \ge \mu \Rightarrow \psi_\lambda(A) \subset \psi_\mu(A)$

2/ - Pour $\lambda \ge 0$ et $A \subset A'$, on a $\psi_\lambda(A) \subset \psi_\lambda(A')$

3/ - Pour $\lambda \ge \mu \ge 0$, on a $\psi_\lambda \circ \psi_\mu = \psi_\mu \circ \psi_\lambda = \psi_\lambda$

La propriété 2 résulte de ce que toute ouverture est une application croissante. Démontrons 3. Soit $\lambda = \mu + \nu$ avec $\nu \ge 0$. On a $\psi_\lambda(A) = C \oplus \mu B$ avec $C = (A \ominus \lambda\check{B}) \oplus \nu B$. Donc $\psi_\lambda(A)$ est ouvert selon μB, et par suite $\psi_\mu \circ \psi_\lambda = \psi_\lambda$. L'ouverture étant idempotente, on en déduit : $\psi_\lambda \circ \psi_\mu \circ \psi_\lambda = \psi_\lambda$. Comme l'ouverture est anti-extensive ($\psi_\lambda(A) \subset A$), et croissante, on en déduit $\psi_\lambda \circ \psi_\mu(A) \supset \psi_\lambda \circ \psi_\mu \circ \psi_\lambda(A) = \psi_\lambda(A)$. Mais $\psi_\mu(A) \subset A$ donne aussi $\psi_\lambda \circ \psi_\mu(A) \subset \psi_\lambda(A)$. On a donc l'égalité $\psi_\lambda \circ \psi_\mu = \psi_\lambda$. L'inclusion $\psi_\lambda \subset \psi_\mu$ en résulte aussitôt.

Relativement aux translations $A \to A_x$ et aux homothéties $A \to \mu A$ ($\mu \geq 0$), la granulométrie ϕ_λ présente les propriétés suivantes (que nous exprimerons dans le Chapitre VII en disant qu'il s'agit d'une <u>granulométrie euclidienne</u>):

4/ - $\phi_\lambda(A_x) = (\phi_\lambda(A)) \oplus \{x\}$

5/ - $\phi_\lambda(\mu A) = \mu\, \phi_{\frac{\lambda}{\mu}}(A)$

L'application $(\lambda, F) \to \phi_\lambda(F)$ de $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$ est <u>s.c.s.</u> (d'après la Proposition 1-5-2 et la continuité de l'homothétie). De même, l'application $(\lambda, G) \to \phi_\lambda(G)$ de $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}$ est s.c.i. Comme de plus ϕ_λ est décroissante en λ, on en déduit les propriétés suivante de continuité monotone séquentielle :

6/ - Si $F \in \mathcal{F}$, $\lambda \uparrow \mu$ entraîne $\phi_\lambda(F) \downarrow \phi_\mu(F)$, et $\lim \phi_\lambda(F) = \phi_\mu(F)$ dans $\mathcal{F}$.

7/ - Si $G \in \mathcal{G}$, $\lambda \downarrow \mu$ entraîne $\phi_\lambda(G) \uparrow \phi_\mu(G)$, et $\lim \phi_\lambda(G) = \phi_\mu(G)$ dans $\mathcal{G}$.

Si V désigne une mesure positive sur E telle que $V(F)$ ou $V(G)$ soit finie (par exemple, V pourra être la mesure de Lebesgue pourvu que F et G soient bornés), la fonction $V_A : \lambda \to V_A(\lambda) = V(\phi_\lambda(A))$ est donc <u>décroissante et continue à gauche</u> si $A \in \mathcal{F}$, et de même <u>décroissante et continue à droite</u> si $A \in \mathcal{G}$. Par définition, $V_A(\lambda)$ représente la mesure du volume occupé par les translatés de l'homothétique λB contenus dans A. Il s'agit donc d'une véritable distribution granulométrique.

On peut aussi donner un sens local à la notion de granulométrie de A selon B en posant pour tout $x \in A$:

(1-5-10) $$A_A(x) = \operatorname{Sup}\{\lambda : \exists\, y \in E,\ x \in (\lambda B)_y \subset A\}$$

On peut compléter cette définition en posant $A_A(x) = 0$ pour $x \notin A$.

$A(x)$ représente donc la taille de l'ensemble A en tant que mesurée au point $x \in A$ selon l'étalon B. Si $A \in \mathcal{F}$, le Sup est atteint, de sorte qu'il existe effectivement un translaté de $A(x)\, B$ contenant x et contenu dans A. Au contraire, si $A \in \mathcal{G}$, le Sup n'est pas atteint. Plus précisément :

<u>Proposition 1-5-6</u>.- La fonction $(F, x) \to A_F(x)$ est s.c.s. sur $\mathcal{F} \times E$, et on a $\phi_\lambda(F) = \{x : A_F(x) \geq \lambda\}$.
La fonction $(G, x) \to A_G(x)$ est s.c.i. sur $\mathcal{G} \times E$, et on a $\phi_\lambda(G) = \{x : A_G(x) > \lambda\}$.

La relation $\psi_\lambda(F) = \{x : \Lambda_F(x) \geq \lambda\}$ résulte de ce que le Sup est atteint dans la relation (1-5-10) lorsque $A = F$ est fermé. Pour montrer que l'application $(F,x) \to \Lambda_F(x)$ est s.c.s., il faut montrer que l'ensemble des couples (F,x) vérifiant $\Lambda_F(x) \geq \lambda$, c'est-à-dire $x \in \psi_\lambda(F)$ est fermé dans $\mathcal{F} \times E$. Mais cela résulte immédiatement du fait que l'application $F \to \psi_\lambda(F)$ de $\mathcal{F}$ dans lui-même est s.c.s. Démonstration analogue dans le cas de l'espace $\mathcal{G}$.

Notons encore le résultat suivant, qui nous sera utile ultérieurement :

<u>Proposition 1-5-7</u>.- Soit K un compact convexe d'intérieur non vide, et F un fermé. On a alors

$C(F) = \overline{\bigcup_{\rho>0} F^{\rho K}} = \lim_{\rho\to\infty} F^{\rho K}$, la limite ayant lieu dans $\mathcal{F}$, et même dans $\mathcal{K}$ lorsque K est compact.

On a déjà vu l'inclusion $F^{\rho B} \subset C(F)$ (Proposition 1-5-3). Si donc nous désignons par $F' = \overline{\bigcup_{\rho>0} F^{\rho K}}$ la limite dans $\mathcal{F}$ de la famille croissante $F^{\rho K}$, on a $F' \subset C(F)$. Si $F \in \mathcal{K}$, $C(F)$ est compact et F' est également limite dans $\mathcal{K}$ de la famille $F^{\rho K}$. Il reste à montrer $F' \supset C(F)$. Soit x un point n'appartenant pas à F'. Ce point admet donc un voisinage compact V disjoint de F'. Si l'on suppose $0 \in \mathring{K}$ (ce qui est toujours loisible), on peut prendre comme voisinage V le translaté $(\varepsilon K)_x$ d'un homothétique de K. On a donc $(\varepsilon K)_x \subset (F^c \ominus \rho\check{K}) \oplus \rho K$ pour tout ρ, c'est-à-dire $x \in (F^c \ominus \rho\check{K}) \oplus (\rho-\varepsilon)K$ dès que $\rho > \varepsilon$, donc, en changeant ρ en $\rho+\varepsilon$: $x \in (F^c \ominus (\rho+\varepsilon)\check{K}) \oplus \rho K = (F^c \ominus \varepsilon\check{K})_{\rho K}$. Si $\{\rho_n\}$ est une suite de réels > 0 tels que $\rho_n \uparrow \infty$, il existe donc pour chaque n un $y_n \in E$ tel que $x \in (\rho_n K)_{y_n} \subset F^c \ominus \varepsilon\check{K}$, ce qui entraîne $x \in (\varepsilon\mathring{K})_x \subset ((\rho_n+\varepsilon)\mathring{K})_{y_n} \subset F^c$. La suite $(\rho_n+\varepsilon)\mathring{K}$ admet donc dans $\mathcal{G}$ une valeur d'adhérence G vérifiant $x \in (\varepsilon\mathring{K})_x \subset G \subset F^c$. Mais G est un demi-espace ouvert H, comme on le vérifie immédiatement. On a $x \in H$ et $F \subset H^c$, donc $C(F) \subset H^c$, et $x \notin C(F)$. Par suite, $F' \supset C(F)$.

<u>COROLLAIRE</u> - Soit $K \in \mathcal{K}'$ un compact non vide et B_r la boule de centre 0 et de rayon r. Pour tout $\varepsilon > 0$, on a $K \oplus B_{r+\varepsilon} \supset C(K) \oplus B_r$ pour r assez grand.

En effet, d'après la proposition, K^{Br} converge dans $\mathcal{K}$ vers $C(K)$. D'après la définition (1-4-1) de la distance de Hausdorff, on a donc $C(K) \subset K^{Br} \oplus B_\varepsilon$ pour r assez grand. Mais l'inclusion $K^{Br} \oplus B_\varepsilon \subset (K \oplus B_{r+\varepsilon}) \ominus B_r$ entraîne alors $C(K) \oplus B_r \subset (K \oplus B_{r+\varepsilon})_{Br} \subset K \oplus B_{r+\varepsilon}$ d'où le corollaire.

- CHAPITRE II -

LES ENSEMBLES FERMES ALEATOIRES (E.F.A.)

Ce chapitre est consacré à la définition des ensembles fermés aléatoires (en abrégé EFA) et à l'établissement de leurs propriétés les plus générales. Le premier paragraphe introduit la fonctionnelle T sur $\mathcal{K}$ qui joue vis-à-vis d'un EFA le même rôle qu'une fonction de répartition vis-à-vis d'une variable aléatoire, et le second caractérise la classe des fonctionnelles T ainsi associées aux EFA comme une classe de capacités de Choquet alternées d'ordre infini. On examine ensuite la notion d'EFA conditionnel (paragraphe 2-3), puis les questions de séparabilité, de continuité et de mesurabilité (2-4 et 2-5). Après un paragraphe 2-6 consacré à des généralisations faciles, le chapitre s'achève sur des exemples relatifs au cas où E est un espace euclidien.

2-1 LA FONCTIONNELLE T ASSOCIEE A UN E.F.A.

Soit E un espace localement compact de type dénombrable, et $\mathcal{F} = \mathcal{F}(E)$ l'espace des fermés de E, muni de la topologie $\mathcal{T}_f$ étudiée au chapitre précédent. A cette topologie, nous associerons la tribu borélienne σ_f, qui est la σ-algèbre engendrée par les ouverts de l'espace $\mathcal{F}(E)$. D'après les définitions, σ_f est donc la σ-algèbre engendrée par les familles $\mathcal{F}^K$, $K \in \mathcal{K}$ et $\mathcal{F}_G$, $G \in \mathcal{G}$. En fait, σ_f est engendrée par la seule famille des $\mathcal{F}_G$, $G \in \mathcal{G}$ ou, aussi bien, par la seule famille des $\mathcal{F}^K$, $K \in \mathcal{K}$. En effet, si $\{K_n\}$ est une suite de compacts tels que $K_n \uparrow G \in \mathcal{G}$, on a $\mathcal{F}_{K_n} \uparrow \mathcal{F}_G$. Inversement, si $\{G_n\}$ est un système fondamental dénombrable de voisinages ouverts d'un compact K vérifiant $G_n \downarrow K$, on a vu (formule (1-1-2)) que l'on a alors $\mathcal{F}_{G_n} \downarrow \mathcal{F}_K$.

On peut alors définir un <u>ensemble fermé aléatoire</u> (EFA) comme une application mesurable A d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{a}, P)$ dans $(\mathcal{F}, \sigma_f)$. On se ramène facilement au cas où A est l'application identique de $\mathcal{F}$: un EFA est alors simplement défini par la donnée d'une probabilité P sur $(\mathcal{F}, \sigma_f)$. Dans ce cas, nous écrirons symboliquement $A = (\mathcal{F}, \sigma_f, P)$, et nous dirons que A est le fermé aléatoire canonique associé à la probabilité P sur σ_f. La compacité de l'espace topologique $\mathcal{F}$ nous garantit qu'il existe effectivement des probabilités P sur σ_f , c'est-à-dire des EFA. On peut de même définir des familles (A_i), $i \in I$ de fermés aléatoires sur les espaces-produit correspondants. Nous examinerons au paragraphe 2-4 consacré au point de vue de la loi spatiale les rapports qui peuvent exister entre la notion d'EFA et la notion plus générale d'ensemble aléatoire (non nécessairement fermé) sur $\mathcal{P}(E)$.

On a vu que la σ-algèbre σ_f sur $\mathcal{F}$ est engendrée par la seule famille $\mathcal{F}_G$; $G \in \mathcal{G}$, ou aussi bien $\mathcal{F}_K$, $K \in \mathcal{K}$. Par conséquent, si Ω est un espace topologique muni de sa tribu borélienne, et α une application s.c.s ou s.c.i. de Ω dans $\mathcal{F}$, l'application α est mesurable pour σ_f , et définit donc un EFA dès qu'une probabilité est définie sur la tribu borélienne de Ω. Par conséquent, d'après les résultats du chapitre précédent, si A et A' sont deux EFA, $A \cup A'$, $A \cap A'$, ∂A, $\complement \mathring{A}$, $\bar{\mathring{A}}$ etc... sont des EFA. De même, lorsque E est un espace euclidien, si K est un compact non vide $A \oplus K$, $A \ominus K$, A_K , A^K etc... sont des EFA.

On sait que la loi de probabilité d'une variable aléatoire ordinaire est entièrement définie par la donnée de la fonction de répartition qui lui est associée. Il existe une notion analogue pour les EFA. En effet, soit A l'EFA canonique associée à la probabilité P sur σ_f. Pour tout $K \in \mathcal{K}$ ou, aussi bien, pour tout $G \in \mathcal{G}$, posons :

$$T(K) = P(\mathcal{F}_K) = P(A \cap K \neq \emptyset)$$

$$T(G) = P(\mathcal{F}_G) = P(A \cap G \neq \emptyset)$$

La donnée de la fonction T ainsi définie sur $\mathcal{K}$ (ou sur $\mathcal{G}$) suffit à déterminer complètement la probabilité P. Il n'est pas très difficile de démontrer directement ce résultat, mais il est encore plus simple de le considérer comme un corollaire immédiat du Théorème de Choquet qui sera établi dans le paragraphe suivant.

Cette fonction T (sur $\mathcal{K}$ ou sur $\mathcal{G}$) ne peut évidemment pas être tout-à-fait quelconque. Elle doit manifestement être croissante, vérifier $T(\emptyset) = 0$, puisqu'aucun fermé ne rencontre l'ensemble vide, et aussi : $0 \leq T \leq 1$, puisqu'il s'agit d'une probabilité. Si $G \in \mathcal{G}$ et si $K \in \mathcal{K}$, on a en particulier $T(K) \leq T(G)$ dès que $K \subset G$. Si $K_n \uparrow G$, on a $\mathcal{F}_{K_n} \uparrow \mathcal{F}_G$ et par suite (continuité monotone séquentielle) $T(K_n) \uparrow T(G)$. De même, si $\{G_n\}$ est un système fondamental dénombrable de voisinages ouverts d'un compact K, on a vu que $G_n \downarrow K$ entraîne $\mathcal{F}_{G_n} \downarrow \mathcal{F}_K$, donc aussi $T(G_n) \downarrow T(K)$. Par conséquent, la fonction T vérifie les deux propriétés suivantes :

$$(2\text{-}1\text{-}1) \quad \begin{cases} T(G) = \operatorname{Sup}\{T(K),\ K \in \mathcal{K},\ K \subset G\} & (G \in \mathcal{G}) \\ T(K) = \operatorname{Inf}\{T(G),\ G \in \mathcal{G},\ G \supset K\} & (K \in \mathcal{K}) \end{cases}$$

Si nous nous reportons à la proposition 1-4-3, nous voyons que cela implique pour la fonction T d'être s.c.s. sur $\mathcal{K}$ et s.c.i. sur $\mathcal{G}$. D'après le corollaire 5 de la Proposition 1-2-4, ces propriétés de semi-continuité supérieure et inférieure sur $\mathcal{K}$ et $\mathcal{G}$ sont respectivement équivalentes aux conditions suivantes de continuité monotone séquentielle :

(2-1-2)
$$\begin{cases} K_n \downarrow K \text{ dans } \mathcal{K} & \text{entraîne } T(K_n) \downarrow T(K) \\ G_n \uparrow G \text{ dans } \mathcal{G} & \text{entraîne } T(G_n) \uparrow T(G) \end{cases}$$

Enfin, si K, K_1, K_2... sont des compacts, définissons par récurrence les fonctions S_1, S_2,... en posant :

(2-1-3)
$$\begin{cases} S_1(K\,;\,K_1) = T(K \cup K_1) - T(K) \\ S_n(K\,;\,K_1,\dots K_n) = S_{n-1}(K\,;\,K_1,\dots K_{n-1}) - S_{n-1}(K \cup K_n\,;\,K_1,\dots K_{n-1}) \end{cases}$$

Il est clair que $S_n(K\,;\,K_1,\dots K_n)$ représente la probabilité $P(\mathcal{F}^K_{K_1,\dots K_n})$ pour que l'EFA A rencontre les compacts $K_1,\dots K_n$ et soit disjoint du compact K. Par suite, ces fonctions S_n doivent être ≥ 0 pour K, $K_1 \dots \in \mathcal{K}$, ainsi que les fonctions construites de manière analogue à partir d'ouverts G, $G_1 \dots \in \mathcal{G}$.

Ces propriétés nous incitent donc à caractériser la fonction T comme une <u>capacité</u> ([9],[30]). Rappelons d'abord la définition générale : si E est un espace localement compact, on appelle capacité sur E une application de $\mathcal{P}(E)$ dans $[-\infty, +\infty]$ vérifiant les trois axiomes suivants :

1/ - $A \subset A' \Rightarrow T(A) \leq T(A')$ $\qquad (A, A' \in \mathcal{P}(E))$

2/ - $A_n \uparrow A \Rightarrow T(A_n) \uparrow T(A)$ $\qquad (A_n, A \in \mathcal{P}(E))$

3/ - $K_n \downarrow K \Rightarrow T(K_n) \downarrow T(K)$ $\qquad (K_n, K \in \mathcal{K}(E))$

Dans le cas où E est un espace LCD, l'axiome 3 équivaut comme on l'a vu à la semi-continuité supérieure de T sur $\mathcal{K}$. On dit qu'un ensemble $B \subset E$ est <u>capacitable</u> s'il vérifie la propriété d'approximation :

(2-1-4
$$T(B) = \operatorname{Sup} \{T(K),\ K \in \mathcal{K},\ K \subset B\}$$

On démontre alors (Théorème des capacités) que tous les boréliens de E sont capacitables si E est LCD ([30]).

Si maintenant T est une fonction s.c.s. sur $\mathcal{K}$ telle que les fonctions S_n définies par la relation (2-1-3) soient ≥ 0 quel que soit l'entier n, on peut définir une fonction T^*sur $\mathcal{G}$ en posant $T^*(G) = \mathrm{Sup}\ \{T(K),\ K \in \mathcal{K},\ K \subset G\}$ et on prolonge T^* sur $\mathcal{P}(E)$ en posant $T^*(A) = \mathrm{Inf}\ \{T^*(G),\ G \in \mathcal{G},\ G \supset A\}$ pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$. On démontre alors que T^* vérifie les axiomes 1, 2 et 3 ci-dessus, avec d'ailleurs $T^*(K) = T(K)$ si $K \in \mathcal{K}$ (cf. Proposition 1-4-3), donc constitue une capacité. De plus, les fonctions $S_n(A\ ;\ A_1,\dots A_n)$ définies par récurrence selon les relations (2-1-3) sont alors ≥ 0 lorsque A, A_1.... sont des sous-ensembles quelconques de E. Comme T^* et T coïncident sur $\mathcal{K}$, nous écrirons T au lieu de T^*. La capacité T ainsi construite est dite <u>capacité de Choquet alternée d'ordre infini</u>, ou, plus brièvement, capacité de Choquet.

On peut procéder à une construction analogue à partir d'une fonction T s.c.i. sur $\mathcal{G}$ telle que les fonctions S_n qui lui sont associées soient positives. Les formules de transformation (2-1-1) conservent, en effet, la positivité des fonctions S_n, comme on le vérifie sans peine, de sorte que ces deux points de vue sont strictement équivalents.

Si maintenant B est un borélien de E, ou, plus généralement, un sous-ensemble de E capacitable pour la capacité T, il n'est pas absolument évident que l'ensemble $\mathcal{F}_B$ soit mesurable pour σ_f, de sorte qu'il n'est pas certain que l'on ait le droit d'écrire $T(B) = P(\mathcal{F}_B)$. Toutefois, d'après la définition des capacités de Choquet, il existe une suite décroissante d'ouverts $\{G_n\}$ vérifiant $T(G_n) \downarrow T(B)$ et $G_n \supset B$, et aussi, d'après la relation (2-1-4), une suite croissante de compacts $\{K_n\}$ vérifiant $K_n \subset B$ et $T(K_n) \uparrow T(B)$. Si donc nous posons $\mathcal{U} = \bigcup \mathcal{F}_{K_n} = \mathcal{F}_{\bigcup K_n}$ et $\mathcal{U}' = \bigcap \mathcal{F}_{G_n}$, nous trouvons $\mathcal{U} \in \sigma_f$, $\mathcal{U}' \in \sigma_f$, $\mathcal{U} \subset \mathcal{F}_B \subset \mathcal{U}'$ et $P(\mathcal{U}) = P(\mathcal{U}') = T(B)$. Par conséquent $\mathcal{F}_B$ est mesurable pour la σ-algèbre $\tilde{\sigma}_f$ complétée de σ_f pour la probabilité P, et vérifie $T(B) = P(\mathcal{F}_B)$.

De ce qui précède, résulte que la fonction T associée à un EFA est une capacité de Choquet (alternée d'ordre infini) vérifiant $T(\emptyset) = 0$ et $0 \leq T \leq 1$. Nous allons consacrer le prochain paragraphe à établir la réciproque de cet important résultat.

<u>2-2 LE THEOREME DE CHOQUET</u>.

Le théorème énoncé ci-dessous a été établi par G. Choquet ([9]) à partir de la théorie des représentations intégrales sur les cones convexes. En raison de son importance fondamentale pour la théorie des EFA, nous en donnerons une démonstration directe, purement probabiliste.

<u>THEOREME 2-2-1</u> (G. Choquet) - Soit E un espace LCD, et T une fonction définie sur $\mathcal{K}(E)$ (resp. sur $\mathcal{G}(E)$). Il existe une probabilité P sur σ_{f}, nécessairement unique, vérifiant $P(\mathcal{F}_K) = T(K)$ pour $K \in \mathcal{K}$ (resp. $P(\mathcal{F}_G) = T(G)$ pour $G \in \mathcal{G}$) si et seulement si T est une capacité de Choquet alternée d'ordre infini vérifiant $0 \leq T \leq 1$ et $T(\emptyset) = 0$.

On rappelle que la condition "T est une capacité de Choquet" signifie, d'après le paragraphe précédent, que T vérifie les deux conditions suivantes :

1/ - Les fonctions S_n construites selon les relations (1-2-3) sont ≥ 0 pour $K, K_1, \ldots \in \mathcal{K}$ (resp. $G, G_1 \ldots \in \mathcal{G}$).

2/ - T est s.c.s. sur $\mathcal{K}$ (resp. s.c.i. sur $\mathcal{G}$) ou, ce qui revient au même, vérifie la condition de continuité monotone séquentielle : $K_n \downarrow K$ dans $\mathcal{K}$ entraîne $T(K_n) \downarrow T(K)$ (resp. $G_n \uparrow G$ dans $\mathcal{G}$ entraîne $T(G_n) \uparrow T(G)$).

Ces conditions sont nécessaires, comme on l'a déjà vu dans le paragraphe précédent. Il reste à montrer qu'elles sont suffisantes. Il suffit d'ailleurs d'établir l'énoncé relatif à l'espace $\mathcal{K}$ (par exemple), car les relations (2-1-1) échangent les fonctions s.c.s. sur $\mathcal{K}$ et s.c.i. sur $\mathcal{G}$, et concervent la positivité des fonctions S_n. Commençons par établir deux lemmes.

<u>LEMME 2-2-1</u>.- Soit $\mathcal{V}$ une classe de sous-ensembles de E contenant $\emptyset$ et stable pour la réunion finie, et soit $\mathcal{S}$ la famille stable pour l'intersection finie engendrée dans $\mathcal{P}(\mathcal{F})$ par les classes $\mathcal{F}_V$, $V \in \mathcal{V}$ et $\mathcal{F}^V$, $V \in \mathcal{V}$. Alors S est une semi-algèbre, et tout $S \in \mathcal{S}$ non vide admet une représentation de la forme $S = \mathcal{F}^V_{V_1,\ldots V_n}$ ($n \geq 0$, $V, V_1, \ldots V_n \in \mathcal{V}$) telle que $V_i \not\subset V \cup V_j$ pour $i \neq j$. Une telle représentation de S est appelée représentation réduite. Si $\mathcal{F}^{V'}_{V'_1,\ldots V'_k}$ est une autre représentation réduite de S, on a $V = V'$, $k = n$, et on peut trouver une permutation $(i_1, i_2, \ldots i_n)$ des n premiers entiers telle que $V_j \cup V = V'_{i_j} \cup V$ pour $j = 1, 2, \ldots n$.

On rappelle que $\mathcal{S}$ est une semi-algèbre si $\mathcal{S}$ contient $\emptyset$, est stable pour l'intersection finie, et si le complémentaire de tout $S \in \mathcal{S}$ est réunion d'un nombre fini d'éléments de $\mathcal{S}$ disjoints. Or $\mathcal{S}$ est stable pour $\cap$ par construction, $\emptyset = \mathcal{F}_{\emptyset}$ est dans $\mathcal{S}$, puisque $\emptyset \in \mathcal{V}$, et le complémentaire d'un élément $S = \mathcal{F}^V_{V_1,\ldots,V_n}$ de $\mathcal{S}$ se met sous la forme :

$$\complement S = \mathcal{F}_V \cup \mathcal{F}^{V\cup V_1} \cup \mathcal{F}_{V_1}^{V\cup V_2} \cup \dots \cup \mathcal{F}_{V_1, V_2, \dots V_{n-1}}^{V\cup V_n}$$

Donc $\mathcal{S}$ est une semi-algèbre.

Soit $S \in \mathcal{S}$ un élément non vide de $\mathcal{S}$ de la forme $S = \mathcal{F}_{V_1,\dots V_n}^{V}$. Si V_i est contenu dans $V \cup V_j$ pour deux indices $i \neq j$, V_j est superflu et peut être supprimé dans la représentation de S, d'où l'existence de la représentation réduite. Soit alors $\mathcal{F}_{V'_1,\dots V'_k}^{V'}$ une seconde représentation réduite du même élément $S \in \mathcal{S}$. On a $V = V'$. En effet, supposons (par exemple) qu'il existe $x \in V' \cap V^c$. Comme S n'est pas vide, aucun V'_j n'est contenu dans V', et on peut trouver k points $x_1, x_2, \dots x_k$ tels que $x_j \in V'_j$ et :

$$\{x_1, \dots x_k\} \in \mathcal{F}_{V'_1,\dots V'_k}^{V'} = S = \mathcal{F}_{V_1,\dots V_n}^{V}$$

Comme $x \notin V$, l'ensemble $\{x, x_1, \dots x_k\}$ est encore dans $\mathcal{F}_{V_1,\dots V_n}^{V}$, mais n'appartient pas à $\mathcal{F}_{V'_1,\dots V'_k}^{V'}$ (puisque $x \in V'$), d'où une contradiction. Par suite $V = V'$.

Pour $i = 1, 2, \dots (n-1)$, on a $V_i \not\subset V_n \cup V$, puisqu'il s'agit de représentations réduites. Soient donc $y_1, \dots y_{n-1}$ $n-1$ points tels que $y_i \in V_i \cap V_n^c \cap V^c$, et y un point de $V_n \cap V^c$. On a

$$\{y_1, \dots y_{n-1}\} \notin S \quad \text{et} \quad \{y, y_1, \dots y_{n-1}\} \in S$$

On peut donc trouver un indice j_n $(0 < j_n \leq k)$ tel que $y \in V'_{j_n}$ tandis qu'aucun des y_i, $i = 1,2,\dots (n-1)$ n'est dans V'_{j_n}. Si y' est un autre point de $V_n \cap V^c$, le même raisonnement montre $y' \in V'_{j_n}$. Par suite, on a $V_n \cap V^c \subset V'_{j_n}$, c'est-à-dire $V_n \subset V \cup V'_{j_n}$. Mais, de la même manière, on voit qu'il existe un indice i_n $(0 < i_n < n)$ tel que $V'_{j_n} \cap V^c \subset V_{i_n}$. Comme $V_n \not\subset V_{i_n} \cup V$ si $i_n \neq n$, on a $i_n = n$ et $V_n \cap V^c = V'_{j_n} \cap V^c$. Le même raisonnement s'applique à chacun des V_i, et le lemme en résulte.

<u>LEMME 2-2-2</u>.- Avec les mêmes notations que dans le lemme précédent, soit T une fonction définie sur $\mathcal{V}$ vérifiant $T(\emptyset) = 0$ et telle que les fonctions S_n définies par récurrence en posant :

(a) $$\begin{cases} S_o(V) = 1 - T(V) \\ S_n(V ; V_1, \dots V_n) = S_{n-1}(V ; V_1, \dots V_{n-1}) - S_{n-1}(V \cup V_n ; V_1, \dots V_{n-1}) \end{cases}$$

soient ≥ 0 pour tout entier $n \geq 0$ et $V, V_1 \dots \in \mathcal{V}$. Alors il existe une (et une seule) application additive P de $\mathcal{S}$ dans $[0,1]$ vérifiant $P(\emptyset) = 0$, $P(\mathcal{F}_V) = T(V)$ et :

(b) $$P(\mathcal{F}_{V_1,\dots V_n}^{V}) = S_n(V; V_1, \dots V_n)$$

Montrons d'abord que la relation (b) définit une fonction sur $\mathcal{S}$, autrement dit que $\mathcal{F}^{V}_{V_1,..V_n} = \mathcal{F}^{V'}_{V'_1,...V'_k}$ entraîne $S_n(V ; V_1,...V_n) = S_k(V';V'_1,...V'_k)$. Pour cela, désignons par S l'élément de $\mathcal{S}$ admettant ces deux représentations. Si $S = \emptyset$, l'un des V_i vérifie $V_i \subset V$ et l'un des V'_j vérifie $V'_j \subset V'$. Or, on voit facilement par récurrence que $V_i \subset V$ entraîne $S_n(V; V_1,...V_n) = 0$, et de même $V'_j \subset V'$ entraîne $S_k(V; V_1,...V_k) = 0$, de sorte que l'on a bien l'égalité.

Supposons donc $S \neq \emptyset$. On peut mettre la représentation $\mathcal{F}^{V}_{V_1,...V_n}$ sous forme réduite sans modifier la valeur de $S_n(V; V_1,...V_n)$. En effet, si par exemple, on a $V_1 \subset V \cup V_n$, d'où $\mathcal{F}^{V}_{V_1,..V_n} = \mathcal{F}^{V}_{V_1,...V_{n-1}}$, on déduit sans peine des relations (a) que l'on a aussi $S_n(V; V_1,...V_n) = S_{n-1}(V; V_1,...V_{n-1})$. Nous pouvons donc supposer que les deux représentations de S sont mises sous forme réduite. D'après le lemme 2-2-1, on a $V = V'$, $k = n$ et (moyennant une permutation des V'_j qui ne modifie pas la valeur de S_n) $V_i \cup V = V'_i \cup V$ $(i = 1,2,...n)$. Or, on déduit facilement des relations (a) l'égalité $S_n(V; V_1,...V_n) = S_n(V; V_1 \cup V, ...V_n \cup V)$. Par suite, on a bien $S_n(V; V_1,..V_n) = S_n(V; V'_1,...V'_n)$, et la relation (b) définit une fonction sur $\mathcal{S}$.

La fonction P ainsi définie sur $\mathcal{S}$ est ≥ 0, puisque les fonctions S_n sont ≥ 0, et vérifie $P(\emptyset) = P(\mathcal{F}_{\emptyset}) = T(\emptyset) = 0$. D'après les relations (a) et la positivité des fonctions S_n, d'autre part, on a :

$$0 \leq P(\mathcal{F}^{V}_{V_1,...V_n}) \leq P(\mathcal{F}^{V}_{V_1,...V_{n-1}}) \leq ... \leq P(\mathcal{F}^{V}) \leq 1$$

Donc la fonction P applique $\mathcal{S}$ dans $[0,1]$.

Il reste enfin à montrer que P est <u>additive</u> sur $\mathcal{S}$. Pour cela, soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ deux éléments non vides de S, admettant les représentations réduites :

$$\mathcal{A} = \mathcal{F}^{V}_{V_1,...V_n} \quad ; \quad \mathcal{A}' = \mathcal{F}^{V'}_{V'_1,...V'_k}$$

Il faut montrer que $\mathcal{A} \cap \mathcal{A}' = \emptyset$ et $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}' \in \mathcal{S}$ entraîne la relation $P(\mathcal{A} \cup \mathcal{A}') = P(\mathcal{A}) + P(\mathcal{A}')$. Or, on a manifestement :

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{A}' = \mathcal{F}^{V \cup V'}_{V_1,...V_n,\ V'_1,...V'_k}$$

et cette intersection est vide si et seulement si l'un des V_i ou l'un des V'_j est contenu dans $V \cup V'$. Supposons, par exemple :

(c) $$V_n \subset V \cup V'$$

Si $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ est dans $\mathcal{S}$, cette réunion admet une représentation de la forme :

$$\mathcal{A} \cup \mathcal{A}' = \mathcal{F}^{V''}_{V''_1,\ldots V''_p}$$

Si $V^c = \emptyset$, on a $\mathcal{A} = \{\emptyset\}$ ou $\mathcal{A} = \varphi$, et la relation d'additivité se vérifie sans difficulté. Si $V^c \neq \emptyset$, soit $x \in V^c$, et $x_i \in V_i \cap V^c$ $(i = 1, 2,\ldots n)$ n points tels que le fermé $F = \{x, x_1,\ldots x_n\}$ soit dans $\mathcal{A}$. Comme $F \in \mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$, on a $F \cap V'' = \emptyset$, donc $x \notin V''$. Donc V'' est inclus dans V et, de la même manière, inclus dans V'. Ainsi, on a :

(d) $$V'' \subset V \cap V'$$

Montrons maintenant que l'on a soit $V \subset V''$, soit $V' \subset V''$. En effet, s'il existe $x \in V \cap \complement V''$ et $x' \in V' \cap \complement V''$, le fermé $\{x,x'\}$ est disjoint de V''. En prenant p points $x''_i \in V''_i \cap \complement V''$, $i = 1, 2,\ldots p$, on a $\{x,x',x''_1,\ldots x''_p\} \in \mathcal{F}^{V''}_{V''_1,\ldots V''_p} = \mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$. Mais cela implique que $\{x,x'\}$ est disjoint soit de V, soit de V' contrairement à l'hypothèse.

Ainsi, l'une des inclusions $V \subset V''$ ou $V' \subset V''$ est vraie. En réalité, $V' \subset V''$ entraînerait $V' = V''$, d'après (d), mais cela est exclu : car on aurait alors $V' \subset V$, puis, d'après (c), $V_n \subset V$, d'où $\mathcal{A} = \emptyset$ contrairement à l'hypothèse. On a donc nécessairement :

(e) $$V = V'' \quad ; \quad V \subset V' \quad ; \quad V_n \subset V'$$

Soit alors $F \in \mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$. Si $F \in \mathcal{F}_{V_n}$, on a $F \notin \mathcal{A}'$ (puisque $V_n \subset V'$), donc $F \in \mathcal{A}$. Si au contraire $F \in \mathcal{F}^{V_n}$, on a $F \notin \mathcal{A}$, donc $F \in \mathcal{A}'$. On en déduit les relations :

$$\mathcal{A} = (\mathcal{A} \cup \mathcal{A}') \cap \mathcal{F}_{V_n} = \mathcal{F}^{V}_{V''_1,\ldots V''_p,\, V_n}$$

$$\mathcal{A}' = (\mathcal{A} \cup \mathcal{A}') \cap \mathcal{F}^{V_n} = \mathcal{F}^{V \cup V_n}_{V''_1,\ldots,V''_p}$$

La relation de récurrence :

$$S_{p+1}(V \,;\, V''_1,\ldots,V''_p, V_n) = S_p(V \,;\, V''_1,\ldots V''_p) - S_p(V \cup V_n \,;\, V''_1,\ldots V''_p)$$

donne alors $P(\mathcal{A}) = P(\mathcal{A} \cup \mathcal{A}') - P(\mathcal{A}')$, et P est bien additive sur $\mathcal{S}$.

Démonstration du Théorème 2-2-1.- Revenons maintenant a la démonstration du Théorème de Choquet. Soit donc T une fonction sur $\mathcal{K}$ vérifiant les conditions de l'énoncé. Nous devons établir l'existence d'une probabilité P unique sur σ_f vérifiant $P(\mathcal{F}_K) = T(K)$ pour tout compact K, ce qui suffira comme on l'a vu pour achever la démonstration. Désignons par $\mathcal{V}$ la classe des sous-ensembles de E de la forme $V = G \cup K$, $G \in \mathcal{G}$, $K \in \mathcal{K}$, et par $\mathcal{S}$ la semi-algèbre sur $\mathcal{F}$ constituée des $\mathcal{F}^{V}_{V_1,\dots V_n}$, n entier ≥ 0, $V, V_1,\dots V_n \in \mathcal{V}$. En tant que capacité de Choquet, T se prolonge sur $\mathcal{V}$, et les fonctions S_n associées à T sont ≥ 0 sur $\mathcal{V}$. D'après les deux lemmes ci-dessus, la relation :

$$P(\mathcal{F}^{V}_{V_1,\dots V_n}) = S_n(V \; ; \; V_1,\dots V_n)$$

définit une fonction P additive sur $\mathcal{S}$, vérifiant $P(\emptyset) = 0$ et $0 \leq P \leq 1$. D'autre part, la semi-algèbre $\mathcal{S}$ engendre la σ-algèbre σ_f. D'après les théorèmes classiques (cf. par exemple [41], p. 27, Proposition 1-6-2), P sera σ-additive sur $\mathcal{S}$ et se prolongera sur σ_f par une probabilité nécessairement unique si l'on peut trouver dans $\mathcal{S}$ une classe compacte $\mathcal{C}$ vérifiant pour tout $\mathcal{A} \in \mathcal{S}$ la propriété d'approximation

$$P(\mathcal{A}) = \text{Sup}\,\{P(C),\ C \in \mathcal{C},\ C \subset \mathcal{A}\} \tag{2-2-1}$$

Considérons donc dans $\mathcal{S}$ la classe $\mathcal{C}$ constituée des $\mathcal{F}^G$, $\mathcal{F}_K$, $\mathcal{F}^G_{K_1,\dots K_n}$ ($G \in \mathcal{G}$, $K, K_1, \dots \dots \in \mathcal{K}$). Ces ensembles étant compacts dans $\mathcal{F}$, et la classe $\mathcal{C}$ étant stable pour l'intersection, il s'agit bien d'une classe compacte dans $\mathcal{S}$. Il reste donc à établir la relation (2-2-1) - et cela achèvera la démonstration.

Soit donc $\mathcal{A} = \mathcal{F}^{V}_{V_1,\dots V_k}$ un élément de $\mathcal{S}$. L'ensemble V est de la forme $V = G_o \cup K_o$ pour un ouvert G_o et un compact K_o. On peut trouver une suite $\{G_n\}$ d'ouverts relativement compacts vérifiant $G_n \supset \overline{G}_{n+1}$ et $G_n \downarrow K_o$. On en déduit sans peine $\mathcal{F}^{G_n} \uparrow \mathcal{F}^{K_o}$ et $\mathcal{F}^{G_o \cup G_n} \uparrow \mathcal{F}^{V}$. De même, pour chaque $i = 1, 2,\dots k$, V_i est réunion d'un ouvert et d'un compact, et on peut trouver une suite $\{K_n(i)\}$ de compacts vérifiant $K_n(i) \uparrow V_i$, donc aussi $\mathcal{F}_{K_n(i)} \uparrow \mathcal{F}_{V_i}$. Posons alors :

$$\mathcal{A}_n = \mathcal{F}^{G_o \cup G_n}_{K_n(1),\dots K_n(k)}$$

On a $\mathcal{A}_n \in \mathcal{C}$ et $\mathcal{A}_n \uparrow \mathcal{A}$. Il reste à montrer $P(\mathcal{A}_n) \uparrow P(\mathcal{A})$. Or $P(\mathcal{A})$ et $P(\mathcal{A}_n)$ s'explicitent sans difficulté de la manière suivante :

$$P(\mathcal{A}) = - T(V) + \sum_i T(V \cup V_i) - \sum_{i_1<i_2} T(V \cup V_{i_1} \cup V_{i_2}) - \dots$$

$$P(\mathcal{A}_n) = - T(G_o \cup G_n) + \sum_i T(G_o \cup G_n \cup K_n(i)) -$$

$$- \sum_{i_1<i_2} T(G_o \cup G_n \cup K_n(i_1) \cup K_n(i_2)) + \dots$$

Comme il s'agit de sommes finies, il suffit de démontrer que chacun des termes figurant dans l'expression de $P(\mathcal{A}_n)$ converge vers le terme correspondant de l'expression de $P(\mathcal{A})$. Mais cela résulte du lemme ci-dessous :

LEMME 2-2-3.- Soient T une capacité de Choquet, G et G_o deux ouverts, K un compact, $\{K_n\}$ une suite dans $\mathcal{K}$ vérifiant $K_n \uparrow G$, et $\{G_n\}$ une suite d'ouverts relativement compacts vérifiant $G_n \supset \overline{G}_{n+1}$ et $G_n \downarrow K$. Alors on a $T(G_o \cup K \cup G) = \lim_n T(G_o \cup G_n \cup K_n)$.

En effet, T étant croissante, on a d'abord :

(f) $\qquad T(G_o \cup G_n \cup G) \geq T(G_o \cup G_n \cup K_n) \geq T(G_o \cup K \cup K_n)$

Montrons $T(G_o \cup G_n \cup G) \downarrow T(G_o \cup G \cup K)$. Comme T est une capacité, on a en effet $T(G_o \cup G \cup K) = \operatorname{Inf} \{T(G'),\ G' \in \mathcal{G},\ G' \supset G_o \cup G \cup K\}$. Mais si $G' \in \mathcal{G}$ vérifie $G' \supset K \cup G \cup G_o$, on a $G_n \subset G'$ pour n assez grand, et $T(G') \geq T(G_o \cup G \cup G_n)$, d'où la convergence annoncée. Mais, de même, $K \cup K_n \cup G_o \uparrow K \cup G \cup G_o$ entraîne $T(K \cup K_n \cup G_o) \uparrow T(K \cup G \cup G_o)$, d'après l'axiome 2 des capacités. Ces deux convergences jointes aux inégalités (f) entraînent la convergence numérique de $T(G_o \cup G_n \cup K_n)$ vers $T(G_o \cup K \cup G)$. QED.

En géométrie intégrale, on attache une grande importance aux fonctionnelles définies sur l'espace $\mathcal{K}$ (cf, par exemple, [20]). L'un des intérêts du théorème de Choquet est de préciser la classe des fonctionnelles sur $\mathcal{K}$ qui admettent une interprétation probabiliste, et d'établir ainsi des correspondances entre la géométrie intégrale et la théorie des EFA. Nous en remontrerons de nombreux exemples dans les chapitres suivants.

2-3 EFA CONDITIONNELS, LIMITE INDUCTIVE D'EFA.

La proposition suivante est un simple corollaire du Théorème de Choquet.

Proposition 2-3-1.- Soit $\mathcal{B}$ une base dénombrable de la topologie de E constituée d'ouverts relativement compacts, et $\mathcal{B}' = \{\overline{B},\ B \in \mathcal{B}\}$ la famille des adhérences des ensembles de $\mathcal{B}$. On suppose que $\mathcal{B}$ est stable pour la réunion finie, et que l'on a pour tout $K \in \mathcal{K}$ et pour tout $G \in \mathcal{G}$:

$$\text{(a)} \qquad K = \bigcap \{\overline{B}\ ;\ B \in \mathcal{B},\ B \supset K\} \quad ; \quad G = \bigcup \{B\ ;\ B \in \mathcal{B},\ \overline{B} \subset G\}$$

Soit alors T une fonction définie sur $\mathcal{B}'$. Il existe une probabilité P sur σ_f, nécessairement unique, vérifiant $T(B') = P(\mathcal{F}_{B'})$ pour tout $B' \in \mathcal{B}'$ si et seulement si T vérifie les conditions suivantes :

1/ - $T(\emptyset) = 0$ et $0 \leq T \leq 1$ sur $\mathcal{B}'$.

2/ - Les fonctions S_n construites à partir de T selon la relation (2-1-3) sont $\geq$ sur $\mathcal{B}'$.

3/ - T est s.c.s. pour la restriction à $\mathcal{B}'$ de la topologie myope.

Ces conditions sont évidemment nécessaires. Inversement, supposons-les vérifiées. Définissons une fonction T^* sur $\mathcal{G}$ en posant pour tout $G \in \mathcal{G}$: $T^*(G) = \text{Sup}\ \{T(B'),\ B' \in \mathcal{B}',\ B' \subset G\}$, et prolongeons T^* sur $\mathcal{K}$ en posant $T^*(K) = \text{Inf}\ \{T^*(G),\ G \in \mathcal{G},\ G \supset K\}$. Compte tenu des relations (a) et de la condition 3, on peut reprendre la démonstration de la Proposition 1-4-3 pour établir que T^* est s.c.i. sur $\mathcal{G}$, s.c.s. sur $\mathcal{K}$ et coïncide avec T sur $\mathcal{B}'$. Nous écrirons donc T au lieu de T^*. Manifestement, T vérifie $T(\emptyset) = 0$ et $0 \leq T \leq 1$ sur $\mathcal{G}$. Il reste donc à prouver que les fonctions S_n sont positives sur , autrement dit à établir les inégalités :

$$\text{(b)} \qquad \sum_{i=1}^{k} T(G \cup G_i) + \sum_{i_1 < i_2 < i_3} T(G \cup G_{i_1} \cup G_{i_2} \cup G_{i_3}) + \ldots\ldots \geq T(G) + \sum_{i_1 < i_2} T(G \cup G_{i_1} \cup G_{i_2}) + \ldots\ldots$$

pour $G, G_1, \ldots G_k$ ouverts ~~quelconques~~. On peut trouver dans $\mathcal{B}$ des suites $\{B_n\}$ et $\{B_n(i)\}$ telles que $\overline{B}_n \subset B_{n+1}$, $\overline{B}_n(i) \subset B_{n+1}(i)$, $\overline{B}_n \uparrow G$ et $\overline{B}_n(i) \uparrow G_i$ $(i = 1, 2, \ldots k)$. D'après la condition 2, on a :

$$\sum_i T(\overline{B}_n \cup \overline{B}_n(i) + \ldots \geq T(\overline{B}_n) + \sum_{i_1 < i_2} T(\overline{B}_n \cup \overline{B}_n(i_1) \cup \overline{B}_n(i_2) + \ldots$$

et cette inégalité passe à la limite pour n infini, d'où la relation (b).

T vérifie donc sur $\mathcal{G}$ les conditions du théorème de Choquet, d'où l'existence de la probabil

P vérifiant $P(\mathcal{F}_{B'}) = T(B')$ sur $\mathcal{B}'$. L'unicité de P se déduit de la condition (a) : si K est un compact, il existe d'après cette condition une suite $\{B'_n\}$ telle que $B'_n \downarrow K$ et $B'_n \in \mathcal{B}'$, donc $T(B'_n) \downarrow P(\mathcal{F}_K) = T(K)$, d'où l'unicité de P. Q.E.D.

L'espace E étant LCD, on sait que l'on peut toujours trouver une base $\mathcal{B}$ dénombrable de sa topologie vérifiant les conditions de l'énoncé. Par exemple, dans un espace euclidien, on pourra prendre la famille des réunions finies des boules ouvertes de centres et de rayons rationnels.

Il est alors possible de définir la notion de <u>fermé aléatoire conditionnel en u</u>. En effet, soit $A = (\mathcal{F}, \sigma_f, P)$ un EFA, u une application mesurable de $\mathcal{F}$ dans un espace $(\Omega, \mathcal{H})$, et F la probabilité sur la σ-algèbre $\mathcal{H}$ définie par $F(H) = P[u^{-1}(H)]$, $H \in \mathcal{H}$. Soit également $\mathcal{B}$ une base de la topologie de E vérifiant les conditions de la proposition. Comme $\mathcal{B}' = \{\overline{B}, B \in \mathcal{B}\}$ est dénombrable, on peut pour F-presque tout $\omega \in \Omega$ définir sur $\mathcal{B}'$ une fonction $B' \to T_u(B'; \omega)$ en posant :

$$T_u(B'; .) = E\,(1_{\mathcal{F}_{B'}} | u)$$

Autrement dit $T_u(B';\omega)$ est une version de l'espérance conditionnelle en u de l'indicatrice $1_{\mathcal{F}_{B'}}$. Par définition, on a pour tout $B' \in \mathcal{B}'$ et tout $H \in \mathcal{H}$:

$$\text{(c)} \qquad P(u^{-1}(H) \cap \mathcal{F}_{B'}) = \int_H T_u(B'; \omega)\, F(d\omega)$$

D'après les propriétés de l'espérance conditionnelle, pour F presque tout ω, la fonction $B' \to T_u(B'; \omega)$ vérifie les conditions de la Proposition 2-3-1, comme on le vérifie sans peine. Il existe donc une probabilité $P_u(. ; \omega)$ sur σ_f vérifiant $P_u(\mathcal{F}_{B'}, \omega) = T_u(B', \omega)$. Désignons par $A_u(\omega)$ l'EFA $(\mathcal{F}, \sigma_f, P_u(. ;\omega))$ ainsi défini pour F presque tout ω.

D'après les conditions (a) de la proposition, la relation (c) subsiste si l'on remplace B' par un ouvert ou un compact quelconque. Pour tout $H \in \mathcal{H}$ et tout $\mathcal{O} \in \sigma_f$, on a alors :

$$\text{(2-3-1)} \qquad P(u^{-1}(H) \cap \mathcal{O}) = \int_H P_u(\mathcal{O}; \omega)\, F(d\omega)$$

En effet, cette relation est vraie lorsque $\mathcal{O}$ est un élément de la classe compacte dénombrable $(\mathcal{F}^{B}_{\overline{B}_1, \ldots \overline{B}_n})$, n entier ≥ 0, $B, B_1, \ldots B_n \in \mathcal{B}$, et il suffit d'utiliser la propriété d'approximation (2-2-1) pour obtenir la relation (2-3-1).

Nous dirons que l'EFA $A_u(\omega) = (\mathcal{F}, \sigma_f, P_u(. ; \omega))$ ainsi défini pour F-presque tout ω est l'EFA A <u>conditionnel en u</u>. Il est caractérisé par la relation (2-3-1). Notons les propriétés suivantes :

α/ - Si $\mathcal{O} \in \sigma_f$ vérifie $P(\mathcal{O}) = 1$, on a $P_u(\mathcal{O} ; \omega) = 1$ pour F-presque tout ω.

β/ - $P_u(\{u^{-1}(\omega)\} ; \omega) = 1$ pour F-presque tout ω (autrement dit, on a $u\,(A_u(\omega)) = \omega$ p.s. pour F-presque tout ω).

En effet, pour H et H' dans $\mathcal{H}$, la relation (2-3-1) donne :

$$\int_{H'} P_u(u^{-1}(H) ; \omega)\, F(d\omega) = F(H \cap H') = \int_{H'} 1_H(\omega)\, F(d\omega)$$

d'où l'on déduit $P_u(u^{-1}(H) ; \omega) = 1_H(\omega)$ F-presque partout.

γ/ - Soit φ une application mesurable de $\mathcal{F}$ dans lui-même, et v l'application composée $v = u \circ \varphi$. Désignons par P' la probabilité sur σ_f associée à l'EFA $A' = \varphi(A)$, et par F la probabilité sur $\mathcal{H}$ associée à la variable aléatoire $x = u \circ \varphi$, conformément au diagramme ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{F}, \sigma_f, P) \arrow[rr, "v"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & (\Omega, \mathcal{H}, F) \\
& (\mathcal{F}, \sigma_f, P') \arrow[ur, "u"'] &
\end{tikzcd}$$

Alors l'EFA conditionnel $A'_u(\omega) = (\varphi(A))_u(\omega)$ est équivalent à $\varphi(A_v(\omega))$ pour F presque tout ω.

En effet, soient $P_v(. , \omega)$ et $P'_u(.,\omega)$ les probabilités associées F presque partout aux EFA conditionnels A_v et A'_u. On a d'une part :

$$P'(\mathcal{O} \cap u^{-1}(H)) = \int_H P'_u(\mathcal{O} ; \omega)\, F(d\omega)$$

pour tout $H \in \mathcal{H}$ et tout $\mathcal{O} \in \sigma_f$, mais d'autre part aussi :

$$P'(\mathcal{O} \cap u^{-1}(H)) = P(\varphi^{-1}(\mathcal{O}) \cap v^{-1}(H)) = \int_H P_v(\varphi^{-1}(\mathcal{O}) ; \omega)\, F(d\omega)$$

On en déduit pour tout $\mathcal{O} \in \sigma_f$:

(2-3-2) $$P'_u(\mathcal{O} ; \omega) = P_v(\varphi^{-1}(\mathcal{O}) ; \omega) \qquad \text{(p.s. pour F)}$$

Autrement dit, $A'_u(\omega)$ est équivalent à $\varphi(A_v(\omega))$.

δ/ - Dans les mêmes conditions que ci-dessus, supposons de plus qu'il existe une bijection γ de Ω sur lui-même, mesurable ainsi que son inverse, et telle que l'on ait p.s. pour P $u \circ \varphi = \gamma \circ u$:

$$\begin{tikzcd}
 & (\mathcal{F}, \sigma_f, P') \arrow[dr, "u"] & \\
(\mathcal{F}, \sigma_f, P) \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[rr, "v = u \circ \varphi = \gamma \circ u"] \arrow[dr, "u"'] & & (\Omega, \mathcal{H}, F) \\
 & (\Omega, \mathcal{H}, F') \arrow[ur, "\gamma"'] &
\end{tikzcd}$$

Soit F' la probabilité sur $\mathcal{H}$ définie par $F'(H) = P(u^{-1}(h))$. On trouve cette fois :

$$P'(\mathcal{O} \cap u^{-1}(H)) = P(\varphi^{-1}(\mathcal{O}) \cap u^{-1}(\gamma^{-1}(H)) = \int_{\gamma^{-1}(H)} P_u(\varphi^{-1}(\mathcal{O})\ ;\ \omega)\ F'(d\omega) =$$

$$= \int_H P_u(\varphi^{-1}(\mathcal{O})\ ;\ \gamma^{-1}(\omega))\ F(d\omega)\ .$$

On trouve par conséquent cette fois :

(2-3-3) $$P'_u(\mathcal{O}\ ;\ \omega) = P_u(\varphi^{-1}(\mathcal{O})\ ;\ \gamma^{-1}(\omega)) \qquad \text{(p.s. pour F)}$$

Autrement dit, les EFA conditionnels $A'_u(\omega)$ et $\varphi(A_u(\gamma^{-1}(\omega))$ sont équivalents. En particulier :

<u>Proposition 2-3-2</u>.- Soit $A = (\mathcal{F}, \sigma_f, P)$ un EFA, φ une application mesurable de $\mathcal{F}$ dans lui-même laissant invariante la probabilité P. Soient aussi u une application mesurable de $\mathcal{F}$ dans un espace $(\Omega, \mathcal{H})$, et F la probabilité sur $\mathcal{H}$ associée à la variable aléatoire $v = u \circ \varphi$. S'il existe une bijection γ de Ω sur lui-même, mesurable ainsi que son inverse γ et telle que $u \circ \varphi = \gamma \circ u$ p.s., alors pour F presque tout ω l'EFA conditionnel $A_u(\omega)$ est équivalent à $\varphi(A_u(\gamma^{-1}(\omega))$. Autrement dit, on a pour tout $\mathcal{O} \in \sigma_f$:

(2-3-4) $$P_u(\mathcal{O}\ ;\ \omega) = P_u(\varphi^{-1}(\mathcal{O})\ ;\ \gamma^{-1}(\omega)) \qquad \text{(p.s. pour F)}$$

En effet, A et $A' = \varphi(A)$ étant équivalents, on a aussi $P'_u(\mathcal{O}\ ;\ \omega) = P_u(\mathcal{O}\ ;\ \omega)$, et il suffit d'appliquer la relation (2-3-3).

<u>EXEMPLE</u> - Supposons que E soit l'espace euclidien et que φ soit la translation $F \to \varphi(F) = F_h$, pour

un vecteur h donné. Si K est un compact, nous pouvons prendre pour u l'application de $\mathcal{F}$ dans lui-même définie par $u(F) = F \oplus K$ (ou, de même, $F \ominus K$, ou F^K , ou F_K). Ces applications sont compatibles avec les translations : $u(F_h) = (u(F))_h$. On a donc $v(F) = u(F_h) = (u(F))_h$, donc γ est la même translation h, soit $\gamma(F) = F_h$. Si le fermé aléatoire A est stationnaire, la relation (2-3-4) s'applique, et montre que $A_u(F)$ (l'EFA A pris conditionnellement à $u(A) = F$ fixé) est équivalent à $(A_u(F_{-h}))_h$, c'est-à-dire au translaté par h de A pris conditionnellement en $u(A) = F_{-h}$.

Fermés aléatoires indépendants.- Il n'y a aucune difficulté à définir un couple (A_1, A_2) de fermés aléatoires au moyen d'une probabilité P sur la σ-algèbre-produit $\sigma_f \otimes \sigma_f$. En particulier, on peut parler de l'EFA A_1 conditionnel en A_2, et définir l'indépendance de deux EFA A_1 et A_2 . La condition d'indépendance, soit $P(\mathcal{O} \times \mathcal{O}') = P(\mathcal{O} \times \mathcal{F})\, P(\mathcal{F} \times \mathcal{O}')$ pour $\mathcal{O}, \mathcal{O}' \in \sigma_f$ est réalisée si et seulement si on a :

$$P(\mathcal{F}_K \times \mathcal{F}_{K'}) = T_1(K)\; T_2(K') \qquad (K,\ K' \in \mathcal{K}) \tag{2-3-5}$$

avec $T_1(K) = P(\mathcal{F}_K \times \mathcal{F})$ et $T_2(K') = P(\mathcal{F} \times \mathcal{F}_{K'})$.

Limite inductive de fermés aléatoires.- Considérons dans E une suite croissante $\{B_n\}$ d'ouverts relativement compacts vérifiant $\overline{B}_n \not\subset B_{n+1}$ et $B_n \uparrow E$. Pour chaque entier n, donnons-nous un EFA A_n p.s. contenu dans $\overline{B}_n$. A_n est défini par la fonction T_n sur $\mathcal{K}$ telle que $T_n(K) = P(A_n \in \mathcal{F}_K)$, $K \in \mathcal{K}(\overline{B}_n)$. On peut aussi bien, d'ailleurs, prolonger T_n sur $\mathcal{K}(E)$ entier en posant $T_n(K) = T_n(K \cap \overline{B}_n)$ si $K \subset \overline{B}_n$. Si les fonctionnelles T_n vérifient la condition :

$$T_{n+m}(K) = T_n(K) \qquad (n,\ m > 0,\ K \in \mathcal{K},\ K \subset \overline{B}_n) \tag{2-3-6}$$

l'ensemble $A_{n+m} \cap \overline{B}_n$ est équivalent à A_n (c'est-à-dire admet la même probabilité que lui). Il est alors possible de définir un fermé aléatoire A de $\mathcal{F}(E)$ tel que, pour tout n, $A \cap \overline{B}_n$ soit équivalent à A_n . On dira que ce fermé aléatoire A est la limite inductive des fermés aléatoires A_n dont les fonctionnelles T_n vérifient la condition (2-3-6).

Pour établir l'existence de A, considérons un compact $K \in \mathcal{K}$. Comme les ouverts B_n recouvrent E, K est contenu dans $\overline{B}_n$ dès que n est supérieur à un n_o, et on a $T_n(K) = T_{n_o}(K)$ pour $n \geq n_o$ d'après la condition (2-3-6). On peut donc définir une fonctionnelle T sur $\mathcal{K}$ entier en posant $T(K) = T_{n_o}(K)$. On a évidemment $T(\emptyset) = 0$ et $T \leq 1$ sur $\mathcal{K}$. T est s.c.s., car si $K_n \downarrow K$ dans $\mathcal{K}$, les K_n

sont contenus dans un $\overline{B}_{n_o}$ et T_{n_o} est s.c.s. De même, les fonctions S_n associées à T sont ≥ 0, puisque toute famille finie de compacts est contenue dans un $\overline{B}_{n_o}$ et que T_{n_o} est une capacité. D'après le théorème de Choquet, il existe donc un fermé aléatoire A dont la probabilité P vérifie $P(\mathcal{F}_K) = T(K)$ sur $\mathcal{K}$. Le fermé aléatoire $A \cap \overline{B}_n$ admet la fonctionnelle $T_{\overline{B}_n}$ définie par $T_{\overline{B}_n}(K) = T(K \cap \overline{B}_n) = T_n(K)$. Par suite, $A \cap \overline{B}_n$ est bien équivalent au fermé aléatoire A_n.

2-4 POINT DE VUE DE LA LOI SPATIALE.

Définissons maintenant une notion plus générale d'ensemble aléatoire. Un ensemble $A' \in \mathcal{P}(E)$ est parfaitement déterminé par son indicatrice $1_{A'}$ ($1_{A'}(x) = 1$ si $x \in A'$, $1_{A'}(x) = 0$ si $x \notin A'$). Si cette indicatrice devient une fonction aléatoire à valeurs dans $\{0,1\}$, il lui correspond donc un ensemble aléatoire A' sur $\mathcal{P}(E) = \{0,1\}^E$ (qui n'est plus un EFA). Nous désignerons par $\mathcal{I}$ la famille des parties finies de E et nous poserons :

$$M_I^{I'} = \{A' : A' \in \mathcal{P}(E),\ I \subset A',\ I' \cap A' = \emptyset\}$$

Soit $\mathcal{M}$ la σ-algèbre engendrée par les $M_I^{I'}$ lorsque I et I' décrivent $\mathcal{I}$. Si P' est une probabilité sur $\mathcal{M}$, nous poserons

$$P'(I, I') = P'(M_I^{I'})$$

et

$$T'(I) = P(\complement M^I) = P(\{A' \cap I \neq \emptyset\})$$

En fait, la donnée de la fonction T' sur $\mathcal{I}$ suffit à reconstituer $P'(I,I')$. Cela résulte des formules de récurrence :

$$(2\text{-}4\text{-}1)\qquad \begin{cases} P'(\emptyset, I') = 1 - T'(I') \\ \\ P'(I \cup \{x\}, I') = P'(I,I') - P'(I, I' \cup \{x\}) \end{cases}$$

La fonctionnelle T' vérifie évidemment les deux conditions :

1/ - $T'(\emptyset) = 0$, et $0 \leq T' \leq 1$

2/ - Pour $I, I' \in \mathcal{I}$, la fonction $P(I, I')$ définie par les relations (2-4-1) est ≥ 0.

Inversement, si une fonction T' sur $\mathcal{I}$ vérifie ces deux conditions, il lui correspond une probabilité P' unique sur $\mathcal{M}$ vérifiant $P'(M^I) = 1 - T'(I)$ pour tout $I \in \mathcal{I}$. Cela résulte du théorème classique de Kolmogorov appliqué au cas particulier des indicatrices aléatoires. On peut aussi le vérifier en remarquant que les $M_I^{I'}$ constituent une semi-algèbre $\mathcal{S}$ engendrant $\mathcal{M}$. Les conditions 1/ et 2/ expriment que la fonction P' sur $\mathcal{S}$ définie par les relations (2-4-1) est simplement additive sur $\mathcal{S}$ et vérifie $0 \leq P' \leq 1$. Enfin, la relation :

$$\bigcap_{j \in J} M_{I_j}^{I'_j} = M_{\bigcup_j I_j}^{\bigcup I'_j}$$

montre que $\mathcal{S}$ constitue également une classe compacte. Les théorèmes classiques (Voir par exemple [41]) indiquent alors qu'il existe une probabilité unique prolongeant T' sur $\mathcal{M}$.

Nous dirons qu'une fonction T' sur $\mathcal{I}$ vérifiant les conditions 1/ et 2/ ci-dessus est une <u>loi spatiale</u> et nous énoncerons :

<u>Proposition 2-4-1</u>.- Si T' est une loi spatiale, il existe une probabilité unique P' sur $\mathcal{M}$ telle que l'ensemble aléatoire $A' = (\mathcal{P}(E), \mathcal{M}, P')$ vérifie $T'(I) = P(A' \cap I \neq \emptyset)$ pour toute partie finie I de E.

Si maintenant $A = (\mathcal{F}(E), \sigma_f, P)$ est un EFA et T la fonction définie sur $\mathcal{K}$ par $T(K) = P(\mathcal{F}_K)$, il est clair que la restriction de T à I vérifie les conditions 1/ et 2/ donc constitue une loi spatiale. A cette loi spatiale est associée la probabilité P' sur $\mathcal{M}$ vérifiant : $P'(M_I^{I'}) = P(\{I \subset A\} \cap \{I' \cap A = \emptyset\})$, et si l'on désigne par $\varphi : (\mathcal{F}, \sigma_f) \to (\mathcal{P}(E), \mathcal{M})$ l'injection $\varphi(A) = A$, on voit que $\varphi(A)$ est un ensemble aléatoire équivalent à $A' = (\mathcal{P}(E), \mathcal{M}, P')$.

La question qui se pose alors naturellement est la suivante : à quelle condition une loi spatiale T' quelconque peut-elle ainsi être associée à un EFA? La proposition suivante apporte une première réponse.

<u>Proposition 2-4-2</u>.- Soit T' une loi,spatiale, c'est-à-dire une fonction sur $\mathcal{I}$ vérifiant les conditions 1/ et 2/ ci-dessus. Il existe un EFA dont la loi spatiale est T' si et seulement si T' est s.c.s. pour la restriction à $\mathcal{I}$ de la topologie myope.

La condition est nécessaire, car si A est un tel EFA et T la fonction sur $\mathcal{K}$ définie par $T(K) = P(\mathcal{F}_K)$, T est s.c.s. et coïncide sur $\mathcal{I}$ avec T'. Inversement, supposons T' s.c.s. et posons

$$T(G) = \text{Sup}\ \{T'(I),\ I \in \mathcal{I}\ ,\ I \subset G\} \qquad (G \in \mathcal{G}\ )$$

$$T(K) = \text{Inf}\ \{T(G),\ G \in \mathcal{G}\ ,\ G \supset \mathcal{K}\} \qquad (K \in \mathcal{K})$$

On vérifie sans peine que T est s.c.i. sur $\mathcal{G}$, s.c.s. sur $\mathcal{K}$ et satisfait aux conditions du théorème de Choquet. Il suffit donc de montrer $T(I) = T'(I)$ pour $I \in \mathcal{I}$. On a évidemment $T(I) \geq T'(I)$. Inversement, soit $\{G_n\}$ une suite dans $\mathcal{G}$ telle que $G_n \downarrow I$ et $T(G_n) \downarrow T(I)$, et soit $\varepsilon > 0$. Pour chaque n, on peut trouver $I_n \in \mathcal{I}$ avec $I \subset I_n \subset G_n$ et $T'(I_n) + \varepsilon \geq T(G_n)$. Lorsque $n \to \infty$, I_n converge vers I dans $\mathcal{K}$, d'où $T'(I) \geq \overline{\lim}\ T'(I_n)$, puisque T' est s.c.s. Mais $T'(I_n) \geq T'(I)$ donne $\underline{\lim}\ T'(I_n) \geq T'(I)$ et $T'(I_n) \to T'(I)$. Par suite $T'(I) + \varepsilon \geq T(I)$, et, ε étant quelconque, $T'(I) = T(I)$.

<u>REMARQUE</u> - L'EFA A admettant la loi spatiale T' <u>n'est jamais unique</u>. Si en effet A' est un autre EFA indépendant de A dont la loi spatiale est nulle (par exemple un processus de Poisson ponctuel), l'EFA $A \cup A'$ admet la même loi spatiale T'. Nous allons améliorer le résultat de la Proposition 2-4-2, et montrer qu'il existe un EFA unique (à une équivalence près) admettant la loi spatiale T' et séparable au sens de la définition suivante :

<u>Définition 2-4-1</u>.- On dit qu'un EFA $A = (\mathcal{F}, \sigma_f,\ P)$ est séparable s'il existe une partie D dénombrable et dense dans E telle que $A = \overline{A \cap D}$ p.s. On dit alors que D est une partie séparante pour A.

Pour justifier cette définition, montrons que $\{A = \overline{A \cap D}\}$ est mesurable. Pour tout $G \in$, $\overline{A \cap D} \cap G \neq \emptyset \Leftrightarrow A \cap D \cap G \neq \emptyset$. Si donc $\mathcal{B}$ est une base dénombrable de la topologie de E, on a bien :

$$\{A = \overline{A \cap D}\} = \bigcap_{B \in \mathcal{B}} (\mathcal{F}^B \cup \mathcal{F}_{B \cap D}) \in \sigma_f$$

De plus, on note que A est séparable et admet D comme partie séparante si et seulement si $\mathcal{F}_G = \mathcal{F}_{G \cap D}$ p.s. pour chaque $G \in \mathcal{G}$ (ou chaque $G \in \mathcal{B}$). Notons aussi que si D est séparante, toute partie dénombrable D' telle que $D' \supset D$ est encore séparante.

<u>THEOREME 2-4-1</u> - Soit T' une loi spatiale sur $\mathcal{I}$, et T la fonction définie sur $\mathcal{G}$ et $\mathcal{K}$ par $T(G) = \text{Sup}\ \{T'(I),\ I \in \mathcal{I},\ I \subset G\}$, si $G \in \mathcal{G}$ et $T(K) = \text{Inf}\ \{T(G),\ G \in \mathcal{G}\ ,\ G \supset K\}$ pour $K \in \mathcal{K}$. Alors :

a/ - Il existe un EFA $A = (\mathcal{F}, \sigma_f,\ P)$ vérifiant $P(\mathcal{F}_K) = T(K)$ sur $\mathcal{K}$, et T est la plus petite fonction sur $\mathcal{K}$ vérifiant les conditions du théorème de Choquet et majorant T' sur $\mathcal{I}$.

b/ - L'EFA A est séparable. Si D est une partie séparante pour A et si A' = $(\mathcal{P}(E),\mathcal{M},P')$ est l'ensemble aléatoire sur $\mathcal{M}$ associée à la loi T', A est équivalent à $\overline{A' \cap D}$.

c/ - Il existe un EFA admettant la loi spatiale T' si et seulement si on a pour tout $x \in E$:

$$\text{(c)} \qquad T'(\{x\}) = T(\{x\})$$

$\overline{A' \cap D}$ est alors (à une équivalence près) l'unique EFA séparable admettant la loi spatiale T'.

a/ - On vérifie sans peine que T satisfait aux conditions du théorème de Choquet et majore T' sur $\mathcal{I}$. Si T" vérifie ces conditions et majore T'sur $\mathcal{I}$, la relation $T"(G) = \operatorname{Sup}\{T"(K),\ K \in \mathcal{K},\ K \subset G\}$ donne $T" \geq T$ sur $\mathcal{G}$, donc aussi sur K.

b/ - Soit $\mathcal{B} \subset \mathcal{G}$ une base dénombrable de la topologie de E <u>stable pour la réunion finie</u>. Pour chaque $B \in \mathcal{B}$, soit $I_n(B) \subset B$ une suite croissante dans $\mathcal{I}$ avec $T'(I_n(B)) \uparrow T(B)$. L'ensemble $D(B) = \cup I_n(B)$ est dénombrable. Comme $I_n(B) \uparrow D(B)$ entraîne $T'(I_n(B)) \uparrow P'(A' \cap D(B) \neq \emptyset)$, on a $T(B) = P'(A' \cap D(B) \neq \emptyset)$. Considérons alors l'ensemble dénombrable $D = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} D(B)$. De $D \cap B \supset D(B)$ résulte $T(B) \leq P'(A' \cap D \cap B \neq \emptyset)$, donc :

$$\text{(b)} \qquad T(B) = P'(A' \cap D \cap B \neq \emptyset) \qquad (B \in \mathcal{B})$$

puisque l'inégalité inverse est toujours vraie d'après la définition de T(B). Si maintenant $G \in$ est un ouvert quelconque, il existe une suite $\{B_n\}$ dans $\mathcal{B}$ avec $B_n \uparrow G$ (car $\mathcal{B}$ est stable pour la réunion finie). Comme T est s.c.i. sur $\mathcal{G}$,on a $T(B_n) \uparrow T(G)$ (Théorème 1-2-2, Corollaire 3). D'autre part, $B_n \uparrow G$ implique $\{A' \cap D \cap B_n \neq \emptyset\} \uparrow \{A' \cap D \cap G \neq \emptyset\}$ dans $\mathcal{P}(E)$, donc $P'(A' \cap D \cap B_n \neq \emptyset) \uparrow P'(A' \cap D \cap G \neq 0)$. . La relation (b) entraîne ainsi :

$$\text{(b')} \qquad T(G) = P'(A' \cap D \cap G \neq \emptyset) \qquad (G \in \quad)$$

L'application $\alpha : (\mathcal{P}(E),\mathcal{M}) \to (\mathcal{F},\sigma_f)$ définie par $\alpha(A') = \overline{A' \cap D}$ est mesurable, car $\overline{A' \cap D} \cap G \neq \emptyset \Leftrightarrow A' \cap D \cap G \neq \emptyset$ pour $G \in \mathcal{G}$, d'où $\alpha^{-1}(\mathcal{F}_G) = \{A' \cap D \cap G \neq \emptyset\} \in \mathcal{M}$, et le fermé aléatoire $\alpha(A')$ ainsi défini vérifie $P(\alpha(A') \in \mathcal{F}_G) = T(G)$, donc est équivalent à A. Il est séparable et admet D comme partie séparante, car $\alpha(A') \cap D \supset A' \cap D$ entraîne $\overline{\alpha(A') \cap D} \supset \alpha(A')$ et par suite $\overline{\alpha(A') \cap D} = \alpha(A')$. Il reste à montrer que, si D' est une autre partie séparante pour A, $\overline{A' \cap D'}$ est encore équivalent à A. Il suffit pour cela d'établir la relation :

$$\text{(b")} \qquad \overline{A' \cap D'} = \overline{A' \cap D} \quad \text{p.s. pour } P'$$

Pour cela, remaruqons que $D'' = D \cup D'$ est encore une partie séparante pour A. On a donc pour tout $G \in \mathcal{G}$:

$$T(G) = P'(A' \cap G \cap D'' \neq \emptyset) = P'(A' \cap G \cap D' \neq \emptyset) = P'(A' \cap G \cap D \neq \emptyset)$$

Les inclusions $\{A' \cap G \cap D' \neq \emptyset\} \subset \{A' \cap G \cap D'' \neq \emptyset\}$ et $\{A' \cap G \cap D \neq \emptyset\} \subset \{A' \cap G \cap D'' \neq \emptyset\}$ donnent alors p.s. $\{A' \cap G \cap D''\} = \{A' \cap G \cap D\} = \{A' \cap G \cap D'\}$, et la relation (b") en résulte aussitôt.

c/ - D'après a/, T' est la loi spatiale d'un EFA si et seulement si $T = T'$ sur $\mathcal{J}$. Cette condition entraîne évidemment la relation (c). Inversement, supposons (c) vérifiée. Soit $x \in E$ et $D' = D \cup \{x\}$ une partie séparante pour A contenant x. D'après (b"), on peut écrire :

$$\{x \in A'\} \subset \{x \in \overline{A' \cap D'}\} \overset{\text{p.s.}}{=} \{x \in \overline{A' \cap D}\}$$

Mais la condition (c) donne $P'(x \in A') = P'(x \in \overline{A' \cap D})$. Par suite $\{x \in A'\} = \{x \in \overline{A' \cap D}\}$ p.s. pour P', et ceci entraîne que $\overline{A' \cap D}$ admet T' comme loi spatiale.

Enfin, soit $A'' = (\mathcal{F}, \sigma_f, P'')$ un autre EFA séparable admettant la loi T', et soit D" une partie séparante pour A". Pour tout $G \in \mathcal{G}$, on a $P''(\mathcal{F}_G) = P''(\mathcal{F}_{G \cap D''}) = \text{Sup}\ \{T'(I),\ I \in \mathcal{J},\ I \subset G \cap D''\}$ d'où $P''(\mathcal{F}_G) \leq T(G)$. Mais l'inégalité stricte est impossible, d'après a/, donc $P''(\mathcal{F}_G) = T(G)$ et $P'' = P$: A est bien unique à une équivalence près.

<u>REMARQUE</u> - Soit $A = (\mathcal{F}, \sigma_f, P)$ un EFA non séparable, $A_1 = (\mathcal{F}, \sigma_f, P_1)$ l'EFA séparable admettant la même loi spatiale que A et D une partie séparante pour A_1. Considérons l'application mesurable $\alpha : (\mathcal{F}, \sigma_f) \to (\mathcal{F}, \sigma_f)$ définie par $\alpha(A) = \overline{A \cap D}$. Cet EFA α est équivalent à A_1. D'après le paragraphe 2-3 on peut (pour P_1 presque tout α) définir un EFA $A_\alpha = (F, \sigma_f, P_\alpha)$ vérifiant :

$$\int_H P_\alpha(\mathcal{U})\ P_1(d\alpha) = P(\mathcal{U} \cap \{\alpha(A) \in H\})$$

pour tout H et tout $\mathcal{U}$ dans σ_f A_α est une version de l'EFA A pris conditionnellement en $\alpha = \overline{A \cap D}$. Comme la σ-algèbre $\alpha^{-1}\ \sigma_f$ coïncide avec la σ-algèbre engendrée par les $\mathcal{F}_{\{x\}}$, $x \in A$, la probabilité P_α représente l'indétermination résiduelle qui subsiste sur A lorsque l'on dispose de toutes les informations qu'il est possible d'obtenir à l'aide d'une infinité au plus dénombrable d'observations ponctuelles. On a évidemment $P_\alpha(A_\alpha \supset \alpha) = 1$ et $P_\alpha(x \in A_\alpha,\ x \notin A) = 0$ pour tout $x \in E$ (P_1 p.s. pour tout α).

2-5 CONTINUITE P.S., P-CONTINUITE, MESURABILITE

Definition 2-5-1.- On dit que l'EFA $A = (\mathcal{F}, \sigma(\mathcal{G}), P)$ est continu en probabilité en $x \in E$, ou P-continu en x si :

$$\lim_{y \to x} P(\{x \in A\} \cap \{y \notin A\}) = \lim_{y \to x} P(\{x \notin A\} \cap \{y \in A\}) = 0$$

On dit que A est P-continu s'il est P-continu en tout $x \in E$.

La définition de la P-continuité ne fait intervenir que la loi spatiale de A. On peut donc, plus généralement, définir la P-continuité d'une loi spatiale quelconque.

Proposition 2-5-1.- a/ - Une loi spatiale T' est P-continue en $x \in E$ si et seulement si $x_n \to x$ entraîne $\lim T'(\{x_n\}) = T'(\{x\})$ et $\lim T'(\{x, x_n\}) = T'(\{x\})$.

b/ - Un EFA est P-continu en $x \in E$ si et seulement si sa loi spatiale vérifie

$$x_n \to x \Rightarrow \lim T(\{x_n\}) = T(\{x\})$$

c/ - Si $A' = (\mathcal{P}(E), \mathcal{M}, P')$ est P-continu, on a $\overline{A' \cap D} = \overline{A' \cap D'}$ p.s. pour P' pour toutes parties dénombrables denses D et D'. De plus, l'EFA séparable A construit comme dans le théorème 2-4-1 admet toute partie dénombrable dense D comme partie séparante, et A est équivalent à $\overline{A' \cap D}$.

d/ - Si un EFA séparable est P-continu, il admet toute partie dénombrable dense comme partie séparante.

a/ résulte de $P(\{x \in A'\} \cap \{y \notin A'\}) = T'(\{x,y\}) - T'(\{y\})$. Si T est la loi spatiale d'un EFA, on a toujours $T(\{x, x_n\}) \to T(\{x\})$ pour $x_n \to x$, à cause de la semi-continuité supérieure de T, d'où l'énoncé b/.

Pour montrer c/, on note que la P-continuité entraîne $M_x^{G \cap D} = \emptyset$ p.s., puis $P(\{A \cap G \cap D = \emptyset\} \cap \{A \cap G \cap D' \neq \emptyset\}) = 0$ pour $x \in G \in \mathcal{G}$, D et D' dénombrables et denses dans E. On en déduit $M^{G \cap D} \subset M^{G \cap D'}$ p.s., et de même $M^{G \cap D'} \subset M^{G \cap D}$, d'où l'égalité $M^{G \cap D} = M^{G \cap D'}$ p.s. Cela entraîne $\overline{A' \cap D} = \overline{A' \cap D'}$ p.s. pour P'. L'EFA séparable A du Théorème 2-4-1 est équivalent à $\overline{A' \cap D}$ pour une partie dénombrable dense D donc aussi à $\overline{A' \cap D'}$ pour toute autre partie dénombrable dense D', et on vérifie immédiatement que D' est séparante. d/, enfin, est un simple corollaire de c/.

Dans le cas où $E = \mathbb{R}^d$ est l'espace euclidien de dimension d, on dit qu'un EFA A est <u>stationnaire d'ordre 2</u> si sa loi spatiale vérifie $P(\{x,y\} \subset A) = T(\{x\}) + T(\{y\}) - T(\{x,y\}) = C(x-y)$ pour une fonction C sur $\mathbb{R}^d$ appelée <u>covariance</u> de l'EFA A. A strictement parler, il s'agit de la covariance de la fonction aléatoire 1_A, indicatrice de l'EFA A. Si la FA 1_A est continue en moyenne quadratique, on dira également que A lui-même est continu en moyenne quadratique. On a alors le

<u>COROLLAIRE</u> - Tout EFA A stationnaire d'ordre 2 est continu en probabilité et en moyenne quadratique.

En effet, on a ici $T(\{x\}) = C(o) =$ Constante, d'où la P-continuité d'après la condition b/ de la proposition. D'autre part, l'indicatrice 1_A est continue en moyenne quadratique si et seulement si la covariance C est continue sur $\mathbb{R}^d$. Mais cela est toujours réalisé d'après la relation $C(h) = 2\,C(o) - T(\{o,h\})$ et la continuité de $h \rightarrow T(\{o,h\})$.

On a vu que l'application $A \rightarrow \partial A$ (∂A désignant la frontière de A) est s.c.i., donc mesurable pour σ_f. D'où la définition suivante :

<u>Définition 2-5-1</u>.- Un EFA A est continu p.s. en $x \in E$ si $P(\{x \in \partial A\}) = 0$. Il est continu p.s. s'il est continu p.s. en chaque $x \in E$.

La continuité p.s. est en fait une propriété de la loi spatiale. Cela résulte de la proposition suivante :

<u>Proposition 2-5-2</u>.- Un EFA A est continu p.s. si et seulement si il est P-continu et si $\overline{A \cap D}$ est continu p.s. pour une partie D dénombrable et dense. On a alors p.s. $\overset{\circ}{\overline{A}} = \overline{A \cap D'}$ pour toute partie dénombrable dense D', et $\overset{\circ}{\overline{A}}$ est équivalent à l'EFA séparable construit à partir de la loi spatiale de A comme dans le théorème 2-4-1.

La continuité p.s. entraîne la P-continuité. Supposons donc A continu en probabilité. Si D est une partie dense et dénombrable, on a $\overline{\overset{\circ}{A}} = \overline{\overset{\circ}{A} \cap D}$, et par suite :

$$\partial\,(\overline{A \cap D}) \subset \partial\,A \subset \partial\,(\overline{A \cap D}) \cup ((\overline{A \cap D})^c \cap A)$$

Comme A est continu en probabilité, la proposition 2-5-1 et le théorème 2-4-1 montrent que $\overline{A \cap D}$ et A ont la même loi spatiale. De l'inclusion $\overline{A \cap D} \subset A$ résulte alors $P(x \in A \cap (\overline{A \cap D})^c) = 0$ pour tout $x \in E$, et donc :

$$P(x \in \partial A) = P(x \in \partial(\overline{A \cap D}))$$

Par conséquent, A est continu p.s. en même temps que $\overline{A \cap D}$.

Si A est continu p.s., on a p.s. $A \cap D \subset \overset{\circ}{A}$ pour D dénombrable et dense, donc $A \cap D \subset \overline{\overset{\circ}{A}}$ p.s. Mais l'inclusion $\overline{\overset{\circ}{A}} \subset \overline{A \cap D}$ est toujours vérifiée, et par suite $\overline{\overset{\circ}{A}} = \overline{A \cap D}$ p.s.

Passons maintenant a la mesurabilité des EFA, dont nous déduirons un critère plus maniable de continuité p.s.

THEOREME 2-5-1 - Tout EFA est mesurable dans le sens suivant : l'application $k = E \times \mathcal{F} \to \{0,1\}$ définie par $k(x,A) = 1$ si $x \in A$ et $k(x,A) = 0$ si $x \notin A$ est mesurable pour la σ-algèbre produit $\sigma(\mathcal{G}) \otimes \sigma_f$.

En effet, si $\mathcal{B}$ est une base dénombrable de la topologie de E, on a $x \notin A$ si et seulement si il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B$ et $A \cap B = \emptyset$. Ainsi :

$$k^{-1}(o) = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \times \mathcal{F}^B \in \sigma(\mathcal{G}) \otimes \sigma_f$$

COROLLAIRE 1 - Si μ est une mesure positive sur $(E, \sigma(\mathcal{G}))$, l'application $A \to \mu(A) = \int k(x,A)\ \mu(dx)$ de $\mathcal{F}$ dans $\mathbb{R}$ est une variable aléatoire positive dont l'espérance est :

$$E(\mu(A)) = \int P(\{x \in A\})\ \mu(dx)$$

De même, si α est une application mesurable de $\mathcal{F}$ dans lui-même, $\mu(\alpha(A))$ est une variable aléatoire positive dont l'espérance est :

$$E[\mu(\alpha(A))] = \int P(\{x \in \alpha(A))\ \mu(dx)$$

Ce corollaire est valable en particulier pour toutes les applications s.c.s. ou s.c.i. (donc mesurables) que nous avons rencontrées dans le chapitre précédent. Considérons, en particulier, le cas de l'application frontière $A \to \partial A$, qui est s.c.i. (Proposition 1-2-4, Corollaire 3). On voit, d'après le corollaire 1, qu'un EFA A est p.s. continu si et seulement si on a $\mu(\partial A) = 0$ p.s. pour toute mesure μ. En particulier :

<u>COROLLAIRE 2</u> - Si E est un espace euclidien, et si la fonction $x \to P(x \in \partial A)$ est continue sur E, le fermé aléatoire A est p.s. continu si et seulement si sa frontière ∂A est p.s. négligeable pour la mesure de Lebesgue. En particulier, si A est stationnaire (c'est-à-dire si la probabilité P est invariante par translation), A est p.s. continu si et seulement si sa frontière ∂A est p.s. négligeable pour la mesure de Lebesgue.

En effet, si μ est la mesure de Lebesgue, $E(\mu(\partial A))$ est nulle si et seulement si $P(x \in \partial A)$ est nulle pour μ-presque tout $x \in E$, c'est-à-dire pour tout $x \in E$ si $x \to P(x \in \partial A)$ est continue. Dans le cas stationnaire, $P(x \in \partial A)$ est une constante, et cette condition de continuité est automatiquement vérifiée.

2-6 OUVERTS ALEATOIRES, ENSEMBLES ALEATOIRES SUR $\mathcal{H}$.

Il n'y a aucune difficulté à définir la notion d'ensemble ouvert aléatoire : on munit l'espace $\mathcal{G}$ de sa tribu borélienne σ_g (σ-algèbre engendrée, indifféremment, par la famille des $\mathcal{G}_K$, $K \in \mathcal{K}$ ou par celle des $\mathcal{G}^G$, $G \in \mathcal{G}$), et un ouvert aléatoire est défini par une application mesurable d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ dans $(\mathcal{G}, \sigma_g)$. Sous forme canonique, un ouvert aléatoire est défini par la donnée d'une probabilité P sur σ_g. Comme l'homéomorphisme $F \to F^c$ de $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{G}$ est évidemment aussi un isomorphisme pour les σ-algèbres σ_f et σ_g, les résultats obtenus dans les paragraphes précédents se transposent immédiatement par dualité sans qu'il soit nécessaire de formuler explicitement les énoncés relatifs aux ouverts aléatoires.

Examinons maintenant le cas de l'espace $\mathcal{H}$, identifié au sous-espace de $\mathcal{G} \times \mathcal{F}$ défini par la condition $G \subset F$. Un élément de $\mathcal{H}$ est le couple $(\mathring{A}, \overline{A})$ constitué de l'intérieur $\mathring{A}$ et de l'adhérence $\overline{A}$ d'un ensemble $A \in \mathcal{P}(E)$. Nous pouvons introduire dans $\mathcal{P}(E)$ la relation d'équivalence $A \mathcal{R} A'$ si $\mathring{A} = \mathring{A}'$ et $\overline{A} = \overline{A}'$, et identifier l'espace $\mathcal{H}$ à l'espace quotient $\mathcal{P}(E)/\mathcal{R}$. Ce point de vue revient à considérer que deux sous-ensembles A et A' de E ne peuvent pas être distingués l'un de l'autre dès qu'ils ont même intérieur et même adhérence, et paraît donc assez conforme aux conditions expérimentales qui président aux applications de la théorie.

On peut d'ailleurs munir $\mathcal{P}(E)$ lui-même de la σ-algèbre σ_p engendrée par les parties de $\mathcal{P}(E)$ de la forme :

$$M_G^{G'} = \{A,\ A \in \mathcal{P}(E),\ A \supset G,\ A \cap G' = \emptyset\} \qquad (G \in \mathcal{G})$$

Comme $A \supset G$ équivaut à $\mathring{A} \supset G$, et de même $A \cap G' = \emptyset$ à $\overline{A} \cap G' = \emptyset$, on peut aussi écrire :

$$M_G^{G'} = \{A : (\mathring{A}, \overline{A}) \in \mathcal{G}_G \times \mathcal{F}^{G'}\}$$

Ainsi, la σ-algèbre σ_p est compatible avec la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ introduite ci-dessus, et la σ-algèbre quotient est identique à la σ-algèbre σ_h induite dans $\mathcal{H} = \mathcal{G} \times \mathcal{F}$ par $\sigma_g \otimes \sigma_f$. Autrement dit, on peut écrire : $(\mathcal{P}, \sigma_p)/\mathcal{R} = (\mathcal{H}, \sigma_h)$.

Les résultats valables dans les espaces $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ se transposent facilement dans l'espace $\mathcal{H}$. Mentionnons simplement le résultat suivant :

Proposition 2-6-1.- Si un ensemble aléatoire $A = (\mathcal{H}, \sigma_h, P)$ est à la fois séparable et p.s. continu, on a p.s.

$$\overline{A} = \overline{\mathring{A}} \quad \text{et} \quad \mathring{A} = \mathring{\overline{A}}$$

Ces relations caractérisent des ensembles bien construits, sans points isolés ni lacunes ponctuelles. C'est un modèle de ce genre qu'il convient, le plus souvent, d'utiliser dans les applications pratiques. On peut penser qu'un milieu poreux, par exemple, se laissera décrire de manière satisfaisante comme une réalisation d'un ensemble aléatoire séparable et p.s. continu sur $(\mathcal{H}, \sigma_h)$.

2-7 EXEMPLES.

Soit A un fermé aléatoire. Dans les applications, on utilise souvent les notations suivantes :

$$P(B) = P(\{B \subset A\}) \quad ; \quad Q(B) = P(\{B \cap A = \emptyset\})$$

B désignant (par exemple) un ouvert ou un compact de E. Il n'est pas difficile de vérifier la mesurabilité de $\{B \subset A\}$, de sorte que la probabilité P(B) existe (En fait, $\{B \subset A\}$ est même un sous-ensemble fermé de $\mathcal{F}$ quel que soit $B \in \mathcal{P}(E)$). La fonction Q vérifie $Q(B) = P(\mathcal{F}^B)$, et se relie donc à la fonction T qui intervient dans l'énoncé du théorème de Choquet par la relation suivante :

$$Q = 1 - T$$

Il est en général assez difficile de désuire l'une de l'autre les fonctions P et Q. Toutefois, dans le cas particulier où $B \in \mathcal{F}$ est un ensemble fini, on peut écrire :

$$Q(\{x_1,\dots x_n\}) = E\left(\prod_{i=1}^{n} 1_{A^c}(x_i)\right)$$

$$P(\{x_1,\dots x_n\}) = E\left(\prod_{i=1}^{n} 1_{A}(x_i)\right)$$

En utilisant la relation $1_{A^c} = 1 - 1_A$ et en développant, on obtient donc :

$$Q(\{x_1,\dots x_n\}) = 1 - \sum_{i=1}^{n} P(x_i) + \sum_{i_1<i_2} P(x_{i_1}, x_{i_2}) - \dots + (-1)^n P(x_1,\dots x_n)$$

et une relation analogue exprimant P en fonction de Q.

Avec un seul point d'appui x, on obtient $Q(x) = 1 - P(x)$. Dans le cas d'un milieu poreux où la réunion des grains est considérée comme une réalisation d'un EFA, Q(x) est la porosité au point x. Avec deux points d'appui x_1 et x_2, on obtient la relation :

$$Q(x_1, x_2) = 1 - P(x_1) - P(x_2) + P(x_1, x_2)$$

On dit souvent que la fonction $P(x_1, x_2)$ est la covariance (non centrée) de l'EFA, ou plutôt de son indicatrice aléatoire. Lorsque E est un espace euclidien et que la probabilité P sur σ_f est invariante par translation, on dit que l'EFA est stationnaire. Il suffit évidemment pour cela, d'après le théorème de Choquet, que la fonction T soit invariante sur $\mathcal{K}$ pour les translations. Lorsque A est stationnaire, la covariance $P(x_1, x_2)$ ne dépend pas séparément des points x_1 et x_2, mais seulement de leur différence $x_1 - x_2$. On pose alors :

$$C(h) = P(x, x + h)$$

et on dit que la fonction $h \to C(h)$ est la covariance stationnaire.

Examinons quelques formules de transformation. Lorsque E est un espace euclidien, et K un compact dans E, on peut définir les EFA $A \oplus \check{K}$ (dilaté de A par K) et $A \ominus \check{K}$ (érodé de A par K). On a vu que $x \in A \oplus \check{K}$ équivaut à $K_x \cap A \neq \emptyset$, et de même $x \in A \ominus \check{K}$ à $K_x \subset A$. On a donc :

$$P(K_x) = P(K_x \subset A) = P(x \in A \ominus \check{K})$$

$$Q(K_x) = P(K_x \cap A = \emptyset) = P(x \notin A \oplus \check{K})$$

Dans le cas stationnaire, ces probabilités ne dépendent pas du point d'appui x. Il est malheureusement beaucoup plus difficile de former les expressions explicites de $P(x \in A^K)$ ou $P(x \in A_K)$.

Examinons maintenant la question de la surface spécifique. Lorsque K est un compact, désignons par $V(\rho) = V(K \oplus \rho B)$ levolume du dilaté de K par la boule de rayon ρ. Le procédé le plus simple pour définir la surface S(K) du compact K consiste à poser $S(K) = \lim_{\rho \downarrow 0} \frac{V(\rho)-V(0)}{\rho}$ (lorsque cette limite existe). On est tenté de transposer cette définition en termes probabilistes en posant

$$\sigma(x) = \lim_{\rho \downarrow 0} \frac{P(x \in A \oplus \rho B) - P(x \in A)}{\rho}$$

lorsque cette limite existe, et de dire que σ(x) est la valeur en $x \in E$ de la surface spécifique du fermé aléatoire. En particulier, σ(x) est une constante σ dans le cas stationnaire. Cette définition, toutefois, n'est pas très satisfaisante, car elle ne se rattache pas directement à des propriétés géométriques précises de la réalisation du fermé aléatoire. En fait, il n'est pas facile d'établir, dans le cas général, l'existence p.s. d'une variable aléatoire représentant, en un sens quelconque, la surface d'un fermé aléatoire, et nous n'insisterons pas davantage ici sur ce point que nous examinerons à nouveau, dans les chapitres 4 et 5, à propos de cas particuliers.

Examinons maintenant la granulométrie d'un EFA A ou de son complémentaire A^c selon un compact convexe non vide $B \in C(\mathcal{K}')$. D'après la Proposition 1-5-6, la fonction $x \to \Lambda_A(x) = \text{Sup}\ \{\lambda,\ \exists\ y \in E : x \in (\lambda B)_y \subset A\}$ est une fonction aléatoire à trajectoires s.c.s., et l'on a : $P(\Lambda_A(x) \geq \lambda) = P(x \in A_{\lambda B})$ pour $\lambda > 0$. De même, $x \to \Lambda_{A^c}(x) = \text{Sup}\ \{\lambda,\ \exists\ y \in E : x \in (\lambda B)_y \subset A^c\}$ est une fonction aléatoire à trajectoires s.c.i., et l'on a $P(\Lambda_{A^c}(x) > \lambda) = P(x \notin A^{\lambda B})$ pour $\lambda \geq 0$. Ainsi, les fonctions de répartition des variables aléatoires $\Lambda_A(x)$ et $\Lambda_{A^c}(x)$ représentent, en chaque $x \in E$, la granulométrie en ce point de l'EFA A et de son complémentaire A^c. Dans le cas stationnaire, ces distributions granulométriques ne dépendent plus du point d'appui $x \in E$, et représentent des caractéristiques intrinsèques du fermé aléatoire A.

Sauf cas très particulier, il est difficile d'expliciter ces distributions granulométriques au moyen des fonctionnelles P et Q de l'EFA A définies ci-dessus. Il y a pourtant un cas où cela est possible. C'est le cas où le compact convexe B est un segment de droite de longueur unité et de direction α donnée. La granulométrie correspondante est alors appelée granulométrie linéaire. Examinons le cas où A est un EFA stationnaire.

Pour cela, désignons par $P_\alpha(\ell)$ la probabilité (indépendante du point $x \in E$) pour que le segment de droite d'origine x, de longueur ℓ et de direction α soit contenu dans A, et de même désignons par $F_\alpha(\ell) = P(\{x \in A_\ell\})$ la probabilité pour qu'il existe un segment de longueur ℓ et de direction α contenant x et contenu dans A. Soit alors $P_\alpha(\ell, \ell')$ la probabilité pour que le segment d'origine x, de longueur ℓ et de direction α ainsi que le segment d'origine x, de longueur ℓ' et de direction opposée $-\alpha$ soient tous les deux contenus dans A. A cause de la stationnarité, nous avons la relation :

(a) $$P_\alpha(\ell, \ell') = P_\alpha(\ell + \ell')$$

Examinons la signification de la relation (a). Pour cela, soient L et L' les variables aléatoires représentant la distance du point O aux fermés $A \cap D_\alpha$ et $A \cap D_{-\alpha}$ respectivement, D_α et $D_{-\alpha}$ désignant les deux demi-droites d'origine O et de direction α et $-\alpha$ respectivement. On note L = L' = 0 si O $\in$ A, et :

$$P(L \geq \ell \text{ et } L' \geq \ell') = P_\alpha(\ell, \ell') \quad ; \quad P(L \geq \ell) = P(L' \geq \ell) = P_\alpha(\ell)$$

Désignons alors par $\phi(\lambda,\mu)$ et $\varphi(\lambda)$ les transformées de Laplace de ces lois de probabilité :

$$\begin{cases} \phi(\lambda,\mu) = \displaystyle\int_0^\infty \int_0^\infty P_\alpha(dx, dy)\ e^{-\lambda x-\mu y} \\ \varphi(\lambda) = -\displaystyle\int_0^\infty e^{-\lambda x}\ P_\alpha(dx) \end{cases}$$

Un calcul facile montre alors que la relation (a) entraîne :

(a) $$\phi(\lambda,\mu) = \frac{\mu\ \varphi(\mu) - \lambda\ \varphi(\lambda)}{\mu-\lambda}$$

En faisant tendre μ vers λ, il en résulte :

$$\phi(\lambda,\lambda) = \varphi(\lambda) + \lambda\ \varphi'(\lambda)$$

Or $\frac{1-\phi(\lambda,\lambda)}{\lambda}$ est la transformée de Laplace de la fonction $x \to F_\alpha(x) = P(L + L' \geq x)$. De la relation $\frac{1-\phi(\lambda,\lambda)}{\lambda} = \frac{1-\varphi(\lambda)}{\lambda} - \varphi'(\lambda)$ résulte que la fonction $P_\alpha(\ell)$ est dérivable en ℓ (pour $\ell > 0$) et que l'on a la relation :

(b) $$F_\alpha(\ell) = P_\alpha(\ell) - \ell\ P'_\alpha(\ell)$$

Ainsi, la granulométrie linéaire $F_\alpha(\ell)$ se déduit de la fonction $P_\alpha(\ell)$. Inversement, d'ailleurs, il est facile de vérifier que la relation (b) est équivalente à :

$$\text{(c)} \qquad P_\alpha(\ell) = \int_\ell^\infty \frac{y-\ell}{y} \; F_\alpha(dy)$$

de sorte que $P_\alpha(\ell)$ se déduit à son tour de la granulométrie linéaire F_α. Cette équation (c) peut être retrouvée par le raisonnement rapide suivant (qu'il est possible de justifier rigoureusement à partir de la relation (a)) : lorsque l'on sait que le point x appartient à une traversée de longueur y (ce qui a lieu avec la probabilité $F_\alpha(dy)$) l'une des extrémités de cette traversée peut tomber n'importe où avec une égale probabilité sur le segment $[x, x + y\alpha]$: la probabilité d'avoir $L \geq \ell$ est donc $\frac{y-\ell}{y}$ si $\ell \leq y$, et 0 si $\ell > y$. Le théorème des probabilités composées redonne alors immédiatement la relation (c).

On notera que la granulométrie $F_\alpha(\ell)$ est une <u>granulométrie exprimée en longueur</u>, et non en nombre. Autrement dit, si l'on veut estimer $F_\alpha(\ell)$ à partir d'un nombre fini de traversées linéaires mesurées expérimentalement, on doit attribuer à chacune de ces traversées un "poids" proportionnel à sa longueur ℓ . <u>La granulométrie "en nombre"</u> correspondant à un histogramme expérimental où chaque traversée observée serait comptée comme un individu doit donc être associée à une loi de probabilité

$$C \, \frac{F(d\ell)}{\ell} \quad , \text{ avec } \frac{1}{C} = \int_0^\infty \frac{F(d\ell)}{\ell}$$

Il peut d'ailleurs arriver que cette intégrale soit divergente, et dans ce cas il n'est pas possible de définir la notion de granulométrie en nombre (alors que la granulométrie F comptée en "longueur" existe pour tout EFA stationnaire). Notons toutefois que la probabilité $-P'(\ell)\, d\ell$ de l'événement $L' \in (\ell, \ell + d\ell)$ représente aussi la probabilité pour qu'un intervalle $(x, x + d\ell)$ contienne l'origine d'un segment contenu dans A et de longueur $\geq \ell$. Autrement dit, si l'on désigne par $N(\ell)$ le nombre des points servant ainsi d'origine à une traversée de longueur $\geq \ell$ que l'on rencontre sur un intervalle de longueur unité, on a $E(N(\ell)) = - P'(\ell)$.

- CHAPITRE III -

LES FERMES ALEATOIRES INDEFINIMENT DIVISIBLES

Ce chapitre est consacré à une classe particulière d'EFA, à savoir les fermés aléatoires indéfiniment divisibles pour la réunion, soit en abrégé EFAID. Le premier paragraphe donne la caractérisation des fonctionnelles T (ou Q) associées aux EFAID, et le second montre que tout EFAID est réunion des fermés d'un processus de Poisson ponctuel sur l'espace $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \setminus \{\emptyset\}$, et inversement. On examine ensuite à titre d'exemples le cas d'un processus de Poisson sur $\mathcal{K}'$ (schéma booléen à grains primaires compacts), le cas des EFA stables pour la réunion, et les variétés linéaires poissoniennes dans un espace euclidien.

L'espace E de départ est supposé LCD, mais non compact, de sorte que l'espace $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \setminus \{\emptyset\}$ est lui-même LCD mais non compact. Plutôt que la fonctionnelle T, nous utiliserons la fonctionnelle $Q = 1-T$ définie par :

$$Q(B) = 1-T(B) = P(\mathcal{F}^B) = P(\{A \cap B = \emptyset\})$$

En particulier, Q est décroissante, s.c.i. sur $\mathcal{K}$ et s.c.s. sur $\mathcal{G}$. On rappelle aussi que deux EFA A_1 et A_2 associée respectivement aux fonctionnelles Q_1 et Q_2 sont indépendants si et seulement si on a :

$$P(\{A_1 \in \mathcal{F}^{K_1}\} \cap \{A_2 \in \mathcal{F}^{K_2}\}) = Q_1(K_1)\, Q_2(K_2) \tag{3-1}$$

pour $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$.

3-1 CARACTERISATION DE LA FONCTIONNELLE Q ASSOCIEE A UN EFAID.

Soit A un EFA et Q la fonction sur $\mathcal{K}$ définie par $Q(K) = P(A \cap K) = \emptyset$. Nous dirons que A est indéfiniment divisible pour la réunion si, pour tout entier $n > 0$, A est équivalent à la réunion $\bigcup_{i=1}^{n} A_i'$ de n EFA A_i' indépendants et équivalents entre eux. C'est là une propriété de la seule fonctionnelle Q. En effet, si l'on pose $Q_n(K) = P(A_i' \cap K = \emptyset)$, on a, d'après (3-1) $Q = (Q_n)^n$. Ainsi, A est indéfiniment divisible si et seulement si la fonction T_n définie sur $\mathcal{K}$ par $T_n = 1 - Q^{1/n}$ vérifie les conditions du théorème de Choquet.

Nous allons expliciter la forme générale de ces fonctionnelles Q indéfiniment divisibles. Il nous faut, auparavant, examiner le cas ou A admet des points fixes (Déf. : x_0 est un point fixe pour le fermé aléatoire A si $P(x_0 \in A) = 1$, c'est-à-dire $Q(\{x_0\}) = 0$).

LEMME 3-1-1 - Si A est un fermé aléatoire indéfiniment divisible pour la réunion, l'ensemble des points fixes de A est un fermé F, éventuellement vide, et la fonctionnelle Q associée à A ($Q(K) = P(A \cap K = \emptyset)$) vérifie $Q(K) > 0$ strictement pour tout compact K disjoint de F.

Notons d'abord que, Q étant s.c.i. sur $\mathcal{K}' = \mathcal{K} \setminus \emptyset$, l'ensemble des compacts non vides $K \in \mathcal{K}'$ tels que $Q(K) = 0$ est inductif pour l'inclusion. D'après le théorème de Zorn, donc, si $Q(K) = 0$, il existe un compact minimal non vide $K_0 \subset K$ tel que $Q(K_0) = 0$. Si nous montrons que tout compact minimal K_0 est ponctuel, le lemme en découlera : en effet, la réunion de ces points fixes x_0 est un fermé F (puisque A est fermé) et si un compact K vérifie $Q(K) = 0$, il contiendra un compact minimal, c'est-à-dire un point fixe $x_0 \in F$, donc ne sera pas disjoint de F.

Soit donc K_0 un compact minimal tel que $Q(K_0) = 0$. Montrons que K_0 est ponctuel. En effet, supposons que K_0 contienne deux points distincts. On peut alors trouver deux compacts K_1 et K_2 non vides et distincts de K_0 tels que $K_0 = K_1 \cup K_2$. Comme K_0 est minimal,

$$Q(K_1) > 0 \quad , \quad Q(K_2) > 0$$

et, puisque $\mathcal{F}^{K_1 \cup K_2}$ est p.s. vide, on a aussi :

$$P(\mathcal{F}^{K_1} \cup \mathcal{F}^{K_2}) = Q(K_1) + Q(K_2)$$

Mais A est indéfiniment divisible, et $Q_n = Q^{1/n}$ est la fonctionnelle d'un fermé aléatoire A_n admettant évidemment les mêmes compacts minimaux que A lui-même. Si P_n est la probabilité de A_n, on a donc aussi :

$$P_n(\mathcal{F}^{K_1} \cup \mathcal{F}^{K_2}) = (Q(K_1))^{1/n} + (Q(K_2))^{1/n}$$

Or, $Q(K_1)$ et $Q(K_2)$ étant strictement positifs, le second membre de cette relation est > 1 pour n assez grand, ce qui est impossible. Par suite, K_0 est ponctuel, et le lemme est établi.

Quitte à remplacer l'espace E initial par $E \cap F^c$ (qui est encore LCD), et le fermé aléatoire A de $\mathcal{F}(E)$ par le fermé aléatoire $A \cap F^c$ de $\mathcal{F}(E \cap F^c)$, on peut toujours se ramener au cas où A est sans point fixe. D'après le lemme, la fonctionnelle Q d'un fermé aléatoire indéfiniment divisible et sans point fixe ne s'annule pas sur $\mathcal{K}$. Ce sont ces fonctionnelles que nous allons caractériser. Posons d'abord un lemme :

LEMME 3-1-2 - Soit T une capacité(alternée, d'ordre infini), vérifiant $T(\emptyset) = 0$ et $T \leq 1$ sur $\mathcal{K}$, et soit $G(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n$ la fonction génératrice d'une loi de probabilité discrète. Si l'on pose $Q = 1 - T$, $1 - G(Q)$ est encore une capacité alternée d'ordre infini, nulle en $\emptyset$ et majorée par 1.

En effet, d'après le théorème de Choquet, Q est la fonctionnelle d'un fermé aléatoire A, et Q^N celle de la réunion de N fermés aléatoires indépendants équivalents à A. Soient alors $A_1, A_2 \ldots$ une suite de fermés aléatoires indépendants admettant la même fonctionnelle Q, et N une variable aléatoire indépendante des A_i et vérifiant $P(N = n) = p_n$. On vérifie que l'application

$$(N, A_1, A_2, \ldots) \to A_1 \cup \ldots \cup A_N$$

de $\mathbb{N} \times \mathcal{F}^N$ dans $\mathcal{F}$ est mesurable pour la σ-algèbre produit, et que $A' = A_1 \cup \ldots \cup A_n$ est un fermé aléatoire dont la fonctionnelle est $Q' = G(Q)$: d'après le théorème de Choquet, le lemme en résulte.

COROLLAIRE - Dans les mêmes conditions, pour $\lambda > 0$, $1 - e^{-\lambda T}$ est une capacité alternée d'ordre infini, nulle en $\emptyset$ et majorée par 1.

Il suffit, en effet, de prendre pour G la fonction génératrice de la loi de Poisson, soit $G(s) = \exp\{-\lambda(1-s)\}$.

THEOREME 3-1-1 - Pour qu'une fonction Q sur $\mathcal{K}$ soit la fonctionnelle associée à un fermé aléatoire A indéfiniment divisible et sans point fixe, il faut et il suffit que Q soit de la forme :

$$Q(K) = \exp\{-\psi(K)\} \qquad (K \in \mathcal{K})$$

pour une capacité ψ alternée d'ordre infini vérifiant $\psi(\emptyset) = 0$ et $\varphi(K) < \infty$ pour tout $K \in \mathcal{K}$.

Ces conditions sont nécessaires. En effet, si A est indéfiniment divisible et sans point fixe, Q ne s'annule pas sur $\mathcal{K}$ (lemme 3-1-1), et $T_n = 1 - Q^{1/n}$ est une capacité. Pour $K \in \mathcal{K}$, $n\, T_n(K)$ converge vers la limite :

$$\psi(K) = -\log Q(K)$$

avec $\psi(\emptyset) = 0$ et $\psi(K) < \infty$. Il reste à montrer que ψ est une capacité. Or ψ est s.c.s. sur $\mathcal{K}$, car Q est s.c.i. et ne s'annule pas. D'autre part, les T_n sont des capacités alternées d'ordre infini. Les fonctions S_p construites à partir de ψ selon la relation (2-1-3) sont donc ≥ 0 comme limites simples des fonctions positives correspondantes construites à partir des n T_n. Donc ψ est bien une capacité de Choquet.

Montrons maintenant que les conditions de l'énoncé sont suffisantes. Soit donc ψ une capacité nulle en $\emptyset$ et $< \infty$ sur $\mathcal{K}$. Posons $Q = e^{-\psi}$. On a évidemment $Q(\emptyset) = 1$ et $Q(K) \geq 0$, de sorte que $1 - Q$ vérifie la première condition du théorème 2-2-1. Pour montrer que Q est bien la fonctionnelle d'un fermé aléatoire, nous allons utiliser la notion de limite inductive introduite au paragraphe 2-3. Soit donc B_n une suite d'ouverts relaticement compacts vérifiant $B_n \uparrow E$ et $\overline{B}_n \subset B_{n+1}$. Pour chaque n, définissons une fonctionnelle Q_n sur $\mathcal{K}(\overline{B}_n)$ en posant :

$$Q_n(K) = Q(K) = e^{-\psi(K)} \qquad (K \in \mathcal{K},\ K \subset \overline{B}_n)$$

Sur $\mathcal{K}(\overline{B}_n)$, $\psi(K)$ est majorée par $\psi(\overline{B}_n) < \infty$. Si les $\psi(\overline{B}_n)$ sont tous nuls, $Q = 1$ sur $\mathcal{K}$ est la fonctionnelle associée au fermé aléatoire p.s. vide, et le théorème est établi. Supposons donc $\psi(\overline{B}_n) > 0$ pour n assez grand. La capacité $\psi(K)/\psi(\overline{B}_n)$ vérifie alors, sur $\mathcal{K}(\overline{B}_n)$, les conditions du lemme 3-1-2, et, en appliquant le corollaire de ce lemme avec $\lambda = \psi(\overline{B}_n)$, on voit que $e^{-\psi}$ est une capacité de Choquet sur $\mathcal{K}(\overline{B}_n)$ nulle en $\emptyset$ et majorée par 1. Par suite, d'après le théorème 2-2-1, $Q_n = e^{-\psi}$ est la fonctionnelle d'un fermé aléatoire A_n de $\mathcal{F}(\overline{B}_n)$. Mais les Q_n vérifient la condition (2-3-6). Par suite, la fonctionnelle $Q = e^{-\psi}$ définie sur $\mathcal{K}(E)$ entier est associée à un fermé aléatoire A, limite inductive des A_n. Comme $\frac{1}{n}\psi$ vérifie, pour tout $n > 0$, les mêmes hypothèses que ψ elle-même, $Q^{1/n}$ est également la fonctionnelle d'un fermé aléatoire, et A est donc indéfiniment divisible. Enfin, Q ne s'annule pas sur $\mathcal{K}$, puisque ψ reste finie, et par suite d'après le lemme 3-1-1, A n'a pas de point fixe.

3-2 PROCESSUS DE POISSON ET MESURES σ-FINIES SUR $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \setminus \{\emptyset\}$.

Désignons par $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \setminus \{\emptyset\}$ l'espace des fermés non vides d'un espace LCD E, qui est lui-même LCD pour la topologie induite par celle de $\mathcal{F}$. Les voisinages de $\emptyset$ dans $\mathcal{F}$ étant les $\mathcal{F}^K$, $K \in \mathcal{K}$, tout compact de $\mathcal{F}'$ est contenu dans $\mathcal{F}_K$ pour un $K \in \mathcal{K}$. Désignons par B_n une suite de compacts de E vérifiant $B_n \subset \mathring{B}_{n+1}$ et $E = \bigcup B_n$. Une mesure θ σ-finie sur $\mathcal{F}'$ est alors définie par la donnée de sa restriction θ_n à chaque $\mathcal{F}_{B_n}$. Inversement, si l'on se donne sur chaque $\mathcal{F}_{B_n}$ une mesure θ_n vérifiant $\theta_{n+m}(\mathcal{O}) = \theta_n(\mathcal{O})$ dès que $\mathcal{O} \in \sigma_f$ est contenu dans $\mathcal{F}_{B_n}$, la formule :

$$\theta(\mathcal{O}) = \lim_n \uparrow \theta_n(\mathcal{O} \cap \mathcal{F}_{B_n}) \tag{3-2-1}$$

définit une mesure σ-finie sur $\mathcal{F}'$.

A toute mesure θ σ-finie sur $\mathcal{F}'$ est associé un processus de Poisson ponctuel dans $\mathcal{F}'$. La réunion dans E des fermés de ce processus de $\mathcal{F}'$ est p.s. un fermé de E (puisque $\theta(\mathcal{F}_{B_n}) < \infty$ implique que chaque B_n n'est p.s. rencontré que par un nombre fini de ces fermés). Désignons par A cette réunion. A est un fermé aléatoire, car $A \in \mathcal{F}^K$, $K \in \mathcal{K}$ équivaut à : "aucun fermé du processus de Poisson dans $\mathcal{F}'$ n'appartient à $\mathcal{F}_K$", évènement mesurable dont la probabilité est :

$$Q(K) = e^{-\theta(\mathcal{F}_K)} \tag{3-2-2}$$

A est évidemment indéfiniment divisible pour la réunion, et sans point fixe puisque Q(K) ne s'annule pas sur $\mathcal{K}$. Inversement, d'après le théorème 3-1-1, tout fermé indéfiniment divisible et sans point fixe est caractérisé par sa fonctionnelle $Q(K) = \exp\{-\psi(K)\}$ où ψ est une capacité alternée d'ordre infini vérifiant $\psi(\emptyset) = 0$ et $\psi < \infty$ sur $\mathcal{K}$. Mais on déduit sans peine du théorème de Choquet 2-2-1 qu'il existe alors une et une seule mesure σ-finie θ sur $\mathcal{F}'$ vérifiant $\theta(\mathcal{F}_K) = \psi(K)$. On peut donc <u>identifier l'ensemble des mesures σ-finies sur $\mathcal{F}'$ avec l'ensemble des EFAID</u>, et aussi avec l'ensemble des processus de Poisson ponctuels sur $\mathcal{F}'$ tels que chaque $\mathcal{F}_K$ ne contienne p.s. qu'un nombre fini de fermés du processus. Enonçons ces résultats :

<u>Proposition 3-2-1</u>.- Soit A un EFA, et Q la fonctionnelle définie par $Q(K) = P(A \cap K = \emptyset)$, $K \in \mathcal{K}$.
Les trois conditions suivantes sont équivalentes :

a/ - A est un EFAID.

b/ - Il existe une mesure $\theta \geq 0$ σ-finie sur $\mathcal{F}'$ nécessairement unique telle que $\theta(\mathcal{F}_K) = -\log Q(K)$ pour tout compact $K \in \mathcal{K}$.

c/ - A est équivalent à la réunion des fermés d'un processus de Poisson localement fini sur $\mathcal{F}'$ (c'est-à-dire tel que, pour tout $K \in \mathcal{K}$, $\mathcal{F}_K$ ne contienne p.s. qu'un nombre fini de fermés de ce processus).

<u>REMARQUE</u> - On pourrait généraliser le procédé de construction d'un EFA utilisé ci-dessus. En effet,

si $\mathcal{O}$ est une partie fermée de $\mathcal{F}'$, la réunion $V = \bigcup \{F \in \mathcal{O}\}$ est fermée dans E,et l'application de $\mathcal{F}(\mathcal{F}')$ dans $\mathcal{F}(E)$ ainsi définie est continue, comme on le vérifie sans difficulté (cela résulte de l'équivalence $V \in \mathcal{F}^B \Leftrightarrow \mathcal{O} \cap \mathcal{F}_B = \emptyset$) A tout fermé aléatoire $\mathcal{A} = (\mathcal{F}(\mathcal{F}'), \sigma_f(\mathcal{F}'),\tilde{P})$ est ainsi associé l'EFA $A = \bigcup \{F \in \mathcal{A}\}$ sur $(\mathcal{F}(E), \sigma_f(E))$, et la fonctionnelle Q relative à A est définie par :

$$Q(K) = \tilde{P}(\mathcal{A} \cap \mathcal{F}_K = \emptyset) = \tilde{Q}(\mathcal{F}_K)$$

En particulier, lorsque l'EFA $\mathcal{A}$ est le processus de Poisson sur $\mathcal{F}'$ associé à la mesure σ-finie θ, on a $Q(K) = \tilde{Q}(\mathcal{F}_K) = \exp\{-\theta(\mathcal{F}_K)\}$.

Pour étudier les EFAID de manière plus approfondie, nous aurons besoin de généraliser au cas des mesures σ-finies sur $\mathcal{F}'$ certains résultats du paragraphe 2-3.

Désignons, comme au paragraphe précédent, par $\{B_n\}$ une suite de compacts vérifiant $B_n \subset \mathring{B}_{n+1}$ et $B_n \uparrow E$, et soit θ une mesure ≥ 0 σ-finie non nulle sur $\mathcal{F}'$. Nous désignerons par ψ la capacité de Choquet définie par :

$$\psi(K) = \theta(\mathcal{F}_K) \qquad (K \in \mathcal{K})$$

Comme θ n'est pas nulle, on a $\psi(B_n) > 0$ pour n supérieur ou égal à un n_o que nous pouvons supposer égal à 1. Sur $\mathcal{F}_{B_n}$, la formule :

$$P_n(\mathcal{O}) = \theta(\mathcal{O} \cap \mathcal{F}_{B_n})/\psi(B_n) \qquad (\mathcal{O} \in \sigma_f)$$

définit une probabilité. Soit alors u une application mesurable de $(\mathcal{F},\sigma_f)$ dans un espace $(\Omega,\mathcal{H})$, et F la probabilité sur $\mathcal{H}$ définie par $F_n(H) = P_n(u^{-1}(H))$ pour $H \in \mathcal{H}$. D'après le paragraphe 2-3, il existe pour F_n-presque tout $\omega \in \Omega$ une probabilité $P_{u,n}(\cdot\ ;\ \omega)$ vérifiant la relation (2-3-1). Autrement dit, pour tout $H \in \mathcal{H}$ et tout $\mathcal{O} \in \sigma_f$, tel que $\mathcal{O} \subset \mathcal{F}_{B_n}$, on a :

$$\theta(\mathcal{O} \cap u^{-1}(H)) = \psi(B_n) \int_H P_{u,n}(\mathcal{O};\ \omega)\ F_n\ (d\omega) \tag{3-2-3}$$

Désignons par G la probabilité définie sur $(\Omega,\mathcal{H})$ par la relation :

$$G = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\ F_n$$

Chaque F_n est absolument continue relativement à G, de sorte qu'il existe une suite $\{\varphi_n\}$ de fonctions mesurables sur Ω telles que l'on ait $F_n = \varphi_n G$. Pour $\mathcal{O} \subset \mathcal{F}_{B_n}$ et $m > n$, la relation (3-2-3) donne alors $\psi(B_n)\, P_{u,n}(\mathcal{O}\, ;\, .)\, F_n = \psi(B_m)\, P_{u,m}(\mathcal{O}\, ;\, .)\, F_m$, de sorte que la relation suivante est vraie pour G-presque tout $\omega \in \Omega$ et pour tout $\mathcal{O} \in \sigma_f$ tel que $\mathcal{O} \subset \mathcal{F}_{B_n}$.

$$\varphi_n\, \psi(B_n)\, P_{u,n}(\mathcal{O}\, ;\, .) = \varphi_m\, \psi(B_m)\, P_{u,m}(\mathcal{O}\, ;\, .)$$

Par suite, en posant pour $\mathcal{O}$ quelconque dans σ_f :

$$\theta_u(\mathcal{O}\, ;\, \omega) = \lim_{n \uparrow \infty} \varphi_n(\omega)\, P_{u,n}(\mathcal{O}\, ;\, \omega)\, \psi(B_n)$$

on définit pour G-presque tout $\omega \in \Omega$ une mesure σ-finie $\theta_u(.\, ;\, \omega)$ sur $\mathcal{F}'$, et, d'après la relation (3-2-3), on a pour tout $\mathcal{O} \in \sigma_f$ et tout $H \in \mathcal{H}$:

$$(3\text{-}2\text{-}4) \qquad \theta(\mathcal{O} \cap u^{-1}(H)) = \int_H \theta_u(\mathcal{O}\, ;\, \omega)\, G(d\omega)$$

Cette relation montre que la notion de probabilité conditionnelle sur $\mathcal{F}$ se généralise aux mesures σ-finies sur $\mathcal{F}'$. On remarque, toutefois, que la probabilité G sur Ω <u>n'est pas définie d'une manière univoque</u>. Si φ est une fonction mesurable sur Ω, vérifiant $\varphi > 0$ p.s. pour G et $\int \varphi(\omega)\, G(d\omega) = 1$, on peut en effet remplacer G par φG et θ_u par θ_u/φ.

Résumons ces résultats :

<u>Proposition 3-2-2</u>.- Soit θ une mesure σ-finie sur $(\mathcal{F}', \sigma_f)$, et u une application mesurable de $\mathcal{F}'$ dans un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{H})$. Il existe une probabilité G sur $\mathcal{H}$ et, pour G-presque tout $\omega \in \Omega$, une mesure σ-finie $\theta_u(.,\omega)$ sur $(\mathcal{F}', \sigma_f)$ telle que l'on ait pour tout $H \in \mathcal{H}$ et tout $\mathcal{O} \in \sigma_f$:

$$(3\text{-}2\text{-}4) \qquad \theta(\mathcal{O} \cap u^{-1}(H)) = \int_H \theta_u(\mathcal{O}\, ;\, \omega)\, G(d\omega)$$

Si $\mathcal{O} \in \sigma_f$ vérifie $\theta(\mathcal{O}) = 0$, on a $\theta_u(\mathcal{O}\, ;\, \omega) = 0$ pour G-presque tout ω. Pour G-presque tout $\omega \in \Omega$, on a $u(F) = \omega$ pour $\theta_u(.\, ;\, \omega)$ presque tout $F \in \mathcal{F}'$.

<u>COROLLAIRE</u> - Soit φ une application mesurable de $\mathcal{F}'$ dans lui-même. Si la mesure θ est invariante pour φ (c'est-à-dire vérifie $\theta(\mathcal{O}) = \theta(\varphi^{-1}(\mathcal{O}))$ pour tout $\mathcal{O} \in \sigma_f$) et si u est θ-presque partout invariante par φ (c'est-à-dire si $\theta\{u \circ \varphi \neq u\} = 0$), alors pour G-presque tout $\omega \in \Omega$, la mesure $\theta_u(.\, ;\, \omega)$ est invariante par φ.

La démonstration du corollaire est immédiate. Sous les hypothèses énoncées, on a pour tout $H \in \mathcal{H}$ et pour tout $\mathcal{O} \in \sigma_f$: $\theta(\mathcal{O} \cap u^{-1}(H)) = \theta(\varphi^{-1}(\mathcal{O}) \cap \varphi^{-1}\, u^{-1}(H)) = \theta(\varphi^{-1}(\mathcal{O}) \cap u^{-1}(H))$, et la relation (3-2-4) donne $\theta_u(\mathcal{O}\,;\, \omega) = \theta_u(\varphi^{-1}(\mathcal{O})\,;\, \omega)$ pour G-presque tout $\omega \in \Omega$.

Dans la proposition précédente, on a décomposé la mesure θ au moyen d'une probabilité G sur $(\Omega, \mathcal{H})$ et d'une mesure σ-finie conditionnelle θ_u sur $\mathcal{F}'$. Il y aura parfois intérêt à faire l'inverse, c'est-à-dire à exprimer θ à l'aide d'une mesure σ-finie μ sur Ω et d'une probabilité conditionnelle P_u sur $\mathcal{F}'$. La proposition suivante donne des conditions suffisantes pour qu'une telle décomposition soit possible.

Proposition 3-2-3.- Avec les mêmes notations que dans la Proposition 3-2-2, supposons qu'il existe une suite $\{H_n\}$ dans $\mathcal{H}$ telle que $H_n \uparrow \Omega$ et $o < \theta(u^{-1}(H_n)) < \infty$ pour tout $n > 0$. Alors il existe une mesure μ σ-finie sur $\mathcal{H}$, et, pour μ-presque tout $\omega \in \Omega$, une probabilité $P_u(.\, ;\, \omega)$ sur σ_f telle que l'on ait pour tout $H \in \mathcal{H}$ et tout $\mathcal{O} \in \sigma_f$:

$$\theta(\mathcal{O} \cap u^{-1}(H)) = \int_H P_u(\mathcal{O};\, \omega)\ \mu(d\omega) \tag{3-2-5}$$

En effet, dans les conditions de l'énoncé, on définit pour chaque entier $n > 0$ une probabilité P_n sur σ_f en posant :

$$P_n(\mathcal{O}) = \frac{\theta(\mathcal{O} \cap u^{-1}(H_n))}{\theta(u^{-1}(H_n))} \qquad (\mathcal{O} \in \sigma_f)$$

D'après le paragraphe 2-3, il existe alors une probabilité F_n sur $\mathcal{H}$, et, pour F_n presque tout $\omega \in \Omega$, une probabilité $P_{u,n}$ sur σ_f vérifiant :

$$P_n(\mathcal{O} \cap u^{-1}(H)) = \int_H P_{u,n}(\mathcal{O};\, \omega)\ F_n(d\omega)$$

pour tout $\mathcal{O} \in \sigma_f$ et tout $H \in \mathcal{H}$. Posons alors $\mu_n = \theta(u^{-1}(H_n))\ F_n$. Il vient

$$\theta(\mathcal{O} \cap u^{-1}(H)) = \int_H P_{u,n}(\mathcal{O};\, \omega)\ \mu_n(d\omega)$$

Pour $H \in \mathcal{H}$ tel que $H \subset H_n$, on a $\mu_n(H) = \theta(u^{-1}(H))$, de sorte que μ_n est la restriction à H_n de μ_{n+m} pour tout $m > 0$. Si l'on pose pour tout $H \in \mathcal{H}$:

$$\mu(H) = \lim_{n\uparrow\infty}\ \mu_n(H \cap H_n)$$

on définit donc sur $\mathcal{H}$ une mesure σ-finie μ, dont la restriction à chaque H_n coïncide avec μ_n. On a alors : $\theta(\mathcal{O} \cap u^{-1}(H)) = \int_H P_{u,n}(\mathcal{O}; \omega)\, \mu(d\omega)$ pour $H \subset H_n$. Il suit de là que la probabilité $P_{u,n}$ ne dépend pas de n, soit $P_{u,n}(\cdot\ ; \omega) = P_u(\cdot\ ; \omega)$ pour μ-presque tout ω, et que P_u vérifie la relation (3-2-5).

COROLLAIRE 1 - Si $\mathcal{O} \in \sigma_f$ vérifie $\theta(\mathcal{O}) = 0$, on a $P_u(\mathcal{O}; \omega) = 0$ pour μ-presque tout ω.

COROLLAIRE 2 - Désignons par $A_u(\omega)$ l'EFA associé à la probabilité $P_u(\cdot\ ; \omega)$ sur σ_f. Pour μ-presque tout ω, on a $u(A_u(\omega)) = \omega$ p.s. pour $P_u(\cdot\ ; \omega)$.

COROLLAIRE 3 - Si θ est invariante pour une application mesurable φ de $\mathcal{F}'$ dans lui-même, et s'il existe une bijection f de Ω sur lui-même, mesurable ainsi que son inverse f^{-1} et telle que l'on ait $u \circ \varphi = f \circ u$ θ-presque partout, alors la mesure μ est invariante pour f, et, pour μ presque tout $\omega \in \Omega$, on a pour tout $\mathcal{O} \in \sigma_f$:

$$P_u(\mathcal{O}; \omega) = P_u(\varphi^{-1}(\mathcal{O})\ ;\ f^{-1}(\omega))$$

La démonstration de ces corollaires est analogue à celle des résultats obtenus au paragraphe 2-3. En particulier, le corollaire 2 étend aux mesures σ-finies le résultat énoncé dans la Proposition 2-3-2.

3-3 SCHEMAS BOOLEENS STATIONNAIRES DANS UN ESPACE EUCLIDIEN.

Dans ce paragraphe, nous supposons que E est un espace euclidien, et nous examinons le cas où la mesure σ-finie θ du paragraphe précédent est concentrée sur l'espace $\mathcal{K}'$ des compacts non vides, c'est-à-dire vérifie $\theta(\mathcal{F}' \setminus \mathcal{K}') = 0$. A cette mesure σ-finie θ est donc associé un processus de Poisson $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{K}'$, conformément à la Proposition 3-2-1, et l'EFAID $A = \bigcup \{K \in \mathcal{A}\}$ associé à ce processus de Poisson est alors appelé schéma booléen. Si de plus θ est invariante par translation, le schéma booléen correspondant est manifestement stationnaire.

Si $K \in \mathcal{K}'$ est un compact non vide, désignons par u(K) le centre de la boule circonscrite à à K. On vérifie sans peine que u est une application de $\mathcal{K}'$ dans E continue pour la topologie myope, donc, a fortiori, mesurable pour la restriction de σ_f à $\mathcal{K}'$. On peut prolonger u sur $\mathcal{F}'$ en posant, par exemple, $u(F) = 0$ si F est un fermé non compact, et u est alors une application mesurable de $\mathcal{F}'$ dans E.

Nous supposons que la mesure σ-finie θ est invariante par translation. Montrons que l'application u vérifie alors la condition énoncée dans la Proposition 3-2-3. En effet, soit B un cube semi-ouvert et borné dans l'espace euclidien E, et $\{y_k\}$ une suite dans E telle que les $B_k = B \oplus \{y_k\}$ réalisent une partition de E, aussi bien que les $B'_k = B \oplus \{-y_k\}$. D'après l'invariance de θ pour les translations, on peut écrire :

$$\infty > \theta(\mathcal{F}_B) = \sum_k \theta(u^{-1}(B_k) \cap \mathcal{F}_B) = \sum_k \theta(u^{-1}(B) \cap \mathcal{F}_{B'_k}) \geq \theta((u^{-1}(B)) \cap (\bigcup_k \mathcal{F}_{B'_k})) = \theta(u^{-1}(B))$$

Par suite $\theta(u^{-1}(K))$ est borné pour tout compact $K \subset E$.

D'après la Proposition 3-2-3, il existe donc une mesure μ, σ-finie sur E, et, pour μ-presque tout $x \in E$, une probabilité $P_u(. \,;\, x)$ sur σ_f vérifiant la relation (3-2-5). Cette probabilité conditionnelle P_u est d'ailleurs concentrée sur $\mathcal{K}'$ d'après le corollaire 1 de la Proposition 3-2-3. Pour $h \in E$, désignons par φ l'application $F \to F_h$ de $\mathcal{F}'$ dans lui-même, c'est-à-dire la translation par h. Par hypothèse, θ est invariante par φ. De plus, l'application u vérifie $u(K_h) = u(K) + h$ pour tout $K \in \mathcal{K}'$. On a donc θ-presque partout sur $\mathcal{F}'$ $u \circ \varphi = f \circ u$, f désignant la translation $x \to f(x) = x+h$ dans E. Le corollaire 3 de la Proposition 3-2-3 est donc applicable. La mesure μ, invariante par translation, est donc <u>proportionnelle à la mesure de Lebesgue</u>, soit $\mu(dx) = a\,dx$ pour une constante a positive, et la probabilité $P_u(. \,;\, x)$, définie presque partout pour la mesure de Lebesgue vérifie la relation :

$$P_u(\mathcal{O} \,;\, x) = P_u(\mathcal{O} - x \,;\, o)$$

où $\mathcal{O} - x$ désigne l'ensemble des $F \in \mathcal{F}'$ tels que $F_x \in \mathcal{O}$. Autrement dit, l'EFA $A(x)$ dont la loi est $P_u(. \,;\, x)$ est équivalent au translaté $A_o \oplus \{x\}$ de l'EFA p.s. compact A_o dont la loi est $P_u(. \,;\, o)$.

Comme la mesure μ est proportionnelle à la mesure de Lebesgue dx, les centres des boules circonscrites aux compacts du processus de Poisson sur $\mathcal{K}'$ associé à la mesure θ constituent un processus de Poisson ponctuel stationnaire sur l'espace euclidien E. Le schéma booléen A correspondant admet la fonctionnelle $Q(K) = P(A \cap K = \emptyset)$ définie pour $K \in \mathcal{K}$ par $Q(K) = \exp\{-\psi(K)\}$ avec :

$$\psi(K) = \theta(\mathcal{F}_K) = \int_E \mu(dx)\; P_u(\mathcal{F}_K \,;\, x) = \int_E \mu(dx)\; P_u(\mathcal{F}_{K_{-x}} \,;\, o)$$

D'après le corollaire 1 du Théorème 2-5-1, on a d'ailleurs

$$\int \mu(dx)\ P_u(\mathcal{F}_{K_{-x}}\ ;\ o) = \int \mu(dx)\ P(A_o \cap K_{-x} \neq \emptyset) = E[\mu(\check{A}_o \oplus K)]$$

Mais $\mu(dx) = a\,dx$ est proportionnel à la mesure de Lebesgue. En désignant par V le <u>volume</u>, on a donc :

$$Q(K) = e^{-a\ E[V(A_o \oplus \check{K})]} \tag{3-3-1}$$

Ainsi, tout schéma booléen stationnaire A est défini par une fonctionnelle Q de la forme (3-3-1), où A_o est un EFA p.s. compact dont le volume admet une espérance finie.

Autrement dit, on peut construire un schéma booléen A en implantant en chacun des points x_i d'un processus de Poisson ponctuel sur E le translaté $A_i \oplus x_i$ d'un EFA p.s. compact A_i, les A_i, $i = 1, 2 \ldots$ étant indépendants les uns des autres et équivalents entre eux, et en prenant la réunion $A = \bigcup_i A_i \oplus x_i$.

<u>3-4 EFA STABLES POUR LA REUNION</u>.

Dans ce paragraphe, l'espace E est un espace <u>euclidien</u>. Nous dirons qu'un EFA est <u>stable pour la réunion</u> si pour tout entier $n > 0$ on peut trouver une constante λ_n positive telle que la réunion $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ de n EFA indépendants équivalents à A soit équivalente à l'homothétique λ_n A de A. Si Q est la fonctionnelle associée à A défini par $P(\mathcal{F}^K) = Q(K)$, $K \in \mathcal{K}$, la fonctionnelle Q_λ associée à l'homothétique λA est évidemment définie par : $Q_\lambda(K) = Q(K/\lambda)$. Pour que A soit stable, donc, il faut et il suffit qu'il existe une suite $\{\lambda_n\}$ avec $\lambda_n > 0$ telle que l'on ait :

$$(Q(K))^n = Q(K/\lambda_n) \qquad (n > 0,\ \ K \in \mathcal{K})$$

Si A est stable, il est pour tout n équivalent a la réunion $\bigcup_{i=1}^{n} A_i/\lambda_n$, donc il est <u>indéfiniment divisible</u> pour la réunion. D'après le Théorème 3-1-1, la fonctionnelle Q est de la forme $Q = \exp(-\psi)$ pour une capacité ψ finie et nulle en $\emptyset$ (nous nous limiterons au cas où A n'a pas de point fixe). Autrement dit, A est stable et sans point fixe si et seulement si cette capacité ψ vérifie :

$$n\ \psi(K) = \psi(K/\lambda_n) \qquad (n > 0,\ \ K \in \mathcal{K}) \tag{3-4-1}$$

On a alors la caractérisation suivante :

THEOREME 3-4-1 - Un EFA A sans point fixe et non p.s. vide est stable pour la réunion si et seulement si la fonctionnelle Q sur $\mathcal{K}$ définie par $Q(K) = P(\mathcal{F}^K)$ est de la forme $Q = \exp(-\psi)$ pour une capacité ψ nulle en $\emptyset$ et homogène de degré $\alpha > 0$, c'est-à-dire vérifiant :

$$\psi(\lambda K) = \lambda^{\alpha}\, \psi(K) \qquad (\lambda \geq 0, \quad K \in \mathcal{K})$$

Ces conditions sont évidemment suffisantes d'après ce qui précède. Inversement, soit A un EFA stable, non p.s. vide et sans point fixe. On a $\psi(\{o\}) = 0$, c'est-à-dire $Q(\{o\}) = 1$. En effet, si $K = \{o\}$, on trouve $(Q(\{o\}))^n = Q(\{o\})$ pour tout entier $n > 0$, donc $Q(\{o\}) = 0$ ou 1. Mais la valeur 0 est exclue, puisque A est sans point fixe. Le lemme suivant va en résulter :

LEMME 3-4-1 - Si l'on a $\psi(aB) = \psi(B)$ pour un $a \geq 0$ et toute boule B de centre O, alors $a = 1$.

En effet, par itération on trouve $\psi(a^n B) = \psi(B) = \psi(a^{-n} B)$, n entier > 0. Supposons par exemple $a > 1$. De $a^n B \uparrow E$ et $a^{-n} B \downarrow \{o\}$ résulte alors $\psi(E) = \psi(\{o\}) = 0$, d'après la remarque initiale,et A est p.s. vide contrairement à l'hypothèse.

Passons alors à la démonstration du théorème 3-4-1. D'après la relation (3-4-1), on voit facilement que pour tout rationnel $r > 0$ il existe une constante λ_r telle que $r\,\psi(K) = \psi(K/\lambda_r)$ $(K \in \mathcal{K})$. On en déduit $\psi(K/\lambda_r\, \lambda_{r'}) = r\,\psi(K/\lambda_{r'}) = r\, r'\, \psi(K)$. D'après le lemme 3-4-1, il en résulte :

$$\lambda_{rr'} = \lambda_r\, \lambda_{r'} \qquad (r,\ r' \text{ rationnels} > 0) \tag{3-4-2}$$

Montrons alors que la fonction $r \to \lambda_r$ définie sur les rationnels > 0 est non croissante et continue à droite. En effet, si $K \in \mathcal{K}$ est convexe et contient l'origine O, on a $K/\lambda_r \subset K$ pour $\lambda_r \geq 1$ et $K/\lambda_r \supset K$ si $\lambda_r \leq 1$. Pour r rationnel > 1, la relation $\psi(K/\lambda_r) = r\ \ (K) > \psi(K)$ montre donc $K/\lambda_r \supset K$ et par suite $\lambda_r \leq 1$. La fonction $r \to \lambda_r$ est donc non croissante. La continuité à droite résulte du fait que ψ est s.c.s. sur $\mathcal{K}$.

D'après (3-4-2), on en déduit que λ_r est de la forme $\lambda_r = r^{-1/\alpha}$ pour un $\alpha > 0$. Montrons alors que la relation :

$$\psi(r^{1/\alpha} K) = r\, \psi(K) \tag{3-4-3}$$

établie pour r rationnel ≥ 0 reste valable pour r réel ≥ 0.

En effet, soit x un réel > 0, et $\{r_n\}$ une suite décroissante de rationnels > 0 telle que $r_n \downarrow x$. D'après la continuité de l'homothétie, on a $(r_n)^{1/\alpha} K \to x^{1/\alpha} K$ dans $\mathcal{K}$ pour tout compact K. Comme ψ est s.c.s., il en résulte :

$$x\,\psi(K) = \lim \psi(r_n^{1/\alpha} K) \leq \psi\,(x^{1/\alpha} K)$$

Il reste à établir l'inégalité inverse. Soit $\varepsilon > 0$. En utilisant la métrique de Hausdorff définie par la relation (1-4-1), et en désignant par B la boule unité, on trouve pour n assez grand :

$$x^{1/\alpha} K \subset (r_n^{1/\alpha} K) \oplus B_\varepsilon = (r_n)^{1/\alpha} (K \oplus \varepsilon\, r_n^{-1/\alpha} B)$$

Mais on a aussi $r_n^{-1/\alpha} \leq x^{-1/\alpha}$, puisque la suite r_n est décroissante, donc $x^{1/\alpha} K \subset r_n^{1/\alpha} (K \oplus \varepsilon\, x^{-1/\alpha} B)$. On en déduit :

$$\psi(x^{1/\alpha} K) \leq r_n\, \psi(K \oplus \varepsilon\, x^{-1/\alpha} B)$$

En effectuant les passages à la limite $n \uparrow \infty$, puis $\varepsilon \downarrow 0$ et en tenant compte de la semi-continuité supérieure de ψ, on trouve $\psi(x^{1/\alpha} K) \leq x\,\psi(K)$, ce qui achève la démonstration.

<u>EXEMPLE</u> - La capacité newtonienne dans l'espace à 3 dimensions vérifie les conditions du théorème 3-4-1. Si donc ψ désigne la capacité newtonienne, il existe dans $\mathbb{R}^3$ un EFA A, appelé le <u>fermé aléatoire harmonique</u>, dont la fonctionnelle Q est égale à exp $(-\psi)$. On sait que, pour la boule B_r et le disque C_r, on a $\psi(B_r) = r$ et $\psi(C_r) = 2\,r/\pi$. Par contre, les segments de droite sont de capacité nulle, et ne sont donc p.s. pas rencontrés par le fermé harmonique. La capacité newtonienne ψ est invariante pour les déplacements (translations et rotations) de sorte que le fermé harmonique A est <u>stationnaire</u> et <u>isotrope</u>. De plus, ψ est homogène et de degré $\alpha = 1$, soit $\psi(\lambda K) = \lambda\,\psi(K)$, $\lambda \geq 0$, $K \in \mathcal{K}$, de sorte que A est <u>stable pour la réunion</u> d'après le théorème 3-4-1.

En définissant A comme limite inductive, nous allons voir que l'on peut (au moins localement) construire des réalisations du fermé harmonique, et mettre en évidence les rapports qui existent entre cet EFA et le <u>mouvement brownien</u> dans $\mathbb{R}^3$. En effet, désignons par B une boule de rayon aussi grand que l'on veut. Comme $\psi(B)$ est fini et non nul, la fonctionnelle $K \to \psi(K)/\psi(B)$ $(K \in \mathcal{K})$ vérifie les conditions du théorème de Choquet, et il existe un EFA A' vérifiant $P(A' \cap K \neq \emptyset) = \psi(K)/\psi(B)$. Si l'on désigne par A'_i , i = 1, 2,... une suite d'EFA indépendants équivalents à A' et par N une variable poissonienne d'espérance $\psi(B)$ indépendante des A'_i , la restriction $A \cap B$ à B du fermé harmonique A est alors équivalente à la réunion $A'_1 \cup A'_2 \cup \ldots \cup A'_n$. En faisant tendre vers l'infini le rayon de B, on obtiendra ainsi A comme limite inductive.

Or il est possible de construire effectivement cet EFA A'. En effet, désignons par μ_B la mesure positive de somme unité à support dans B réalisant un potentiel constant quasi-partout sur B (on sait que μ_B est concentrée sur la frontière de B). Ce potentiel constant U_B est par définition l'inverse de la capacité newtonienne de B, soit $U_B = 1/\psi(B)$. Soit alors $K \subset B$ un compact contenu dans B. La balayée μ_K de μ_B sur K réalise quasi-partout sur K le même potentiel constant que μ_B. L'intégrale de μ_K est donc $\int \mu_K(dx) = U_B/U_K = \psi(K)/\psi(B)$. Autrement dit, cette intégrale est égale à la probabilité $P(A' \cap K \neq \emptyset)$.

Mais cette balayée μ_K représente aussi la loi du premier point d'entrée dans K du mouvement brownien dont la loi initiale est μ_B. En particulier, l'intégrale $\int \mu_K(dx)$ donne la probabilité pour que la trajectoire de ce processus rencontre le compact K, et l'EFA A' est donc équivalent à cette trajectoire. Le procédé de construction en résulte : au temps $t = 0$, on lâche un nombre aléatoire N (poissonien, d'espérance $E(N) = \psi(B)$) de particules browniennes indépendantes en N points choisis indépendamment selon la même loi μ_B, et on prend la réunion des trajectoires de ces particules. Sur B, cette réunion est équivalente à $A \cap B$. En effet, la probabilité pour que cette réunion rencontre un compact $K \subset B$ est alors $\exp(-\psi(B)\int \mu_K(dx)) = \exp(-\psi(K))$.

3-5 LES VARIETES LINEAIRES POISSONIENNES.

A titre d'exemple, nous allons maintenant examiner les variétés linéaires poissoniennes (Poisson flats). L'espace E est l'espace euclidien $E = \mathbb{R}^d$ à d dimensions (d entier > 0). Désignons par $\mathcal{S}_k$ la classe de sous-espaces de E de dimension k (k entier, $0 \leq k \leq d$). Pour $k = 0$, $\mathcal{S}_0$ se réduit à l'unique élément $\{o\}$. Pour $k = d$, $\mathcal{S}_d = \{E\}$. $\mathcal{S}_k$ est fermé dans $\mathcal{F}$, et même compact dans $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \setminus \{\emptyset\}$, à cause de l'inclusion $\mathcal{S}_k \subset \mathcal{F}_{\{o\}}$. De même, nous désignerons par $\mathcal{V}_k$ l'ensemble des variétés linéaires de dimension k dans E. Autrement dit, les éléments $V \in \mathcal{V}_k$ sont les translatés des $S \in \mathcal{S}_k$. Pour $k = 0$, $\mathcal{V}_0$ est constitué des ensembles ponctuels $\{x\}$, $x \in E$, et pour $k = d$ on a $\mathcal{V}_d = \{E\}$. On note que $\mathcal{V}_k$ est fermé dans $\mathcal{F}'$ (mais non dans $\mathcal{F}$, car une suite $\{V_n\}$ dans $\mathcal{V}_k$ peut vérifier $\lim V_n = \emptyset$).

Si S est un élément de $\mathcal{S}_k$, on désignera par $S^\perp \in \mathcal{S}_{d-k}$ le sous-espace orthogonal à S. Il est clair que l'application $S \to S^\perp$ est un homéomorphisme de $\mathcal{S}_k$ sur $\mathcal{S}_{d-k}$ (pour les topologies induites par celle de $\mathcal{F}$). Une variété $V \in \mathcal{V}_k$ est définie par sa direction, c'est-à-dire le sous-espace $S \in \mathcal{S}_k$ parallèle à V, et par le point $s \in S^{\perp}$ où V rencontre l'orthogonal $S^{\perp}$. En particulier, le sous-espace de $\mathcal{V}_k$ constitué des variétés parallèles à un sous-espace fixe $S \in \mathcal{S}_k$ est homéomorphe à l'espace euclidien $\mathbb{R}^{d-k}$ à d-k dimensions.

A toute mesure θ σ-finie sur $\mathcal{F}'$ concentrée sur $\mathcal{V}_k$, c'est-à-dire vérifiant $\theta(\mathcal{F}' \setminus \mathcal{V}_k) = 0$, est alors associé <u>un processus de Poisson dans $\mathcal{V}_k$</u>. L'EFAID obtenu en prenant la réunion des variétés linéaires de ce processus est appelé <u>réseau poissonien</u> (de variétés linéaires de dimension k). Si de plus la mesure θ est invariante pour les translations, le réseau poissonien est <u>stationnaire</u>. Nous désignerons par Q la fonctionnelle habituelle ($Q(K) = P(\mathcal{F}^K)$, $K \in \mathcal{K}$) et par ϕ la capacité de Choquet $\phi = -\log Q$ associées à ce réseau poissonien selon le théorème 3-1- 1. Nous nous proposons de trouver la forme générale des fonctionnelles ϕ associées à des réseaux poissonniens stationnaires.

Soit donc θ une mesure σ-finie, invariante par translation, et concentrée sur $\mathcal{V}_k$. Pour k = 0, $\mathcal{V}$ est homéomorphe à E lui-même, θ est l'image par cet homéomorphisme d'une mesure σ-finie sur E invariante par translation, donc proportionnelle à la mesure de Lebesgue. L'EFAID associé est un processus de Poisson stationnaire sur E. De même, pour k = d, l'EFAID associé est p.s. égal à E. Supposons donc $0 < k < d$.

On a vu que tout $V \in \mathcal{V}_k$ est déterminé par le couple (S, s) où $S \in \mathcal{S}_k$ est la direction de V et $s \in S^{\perp}$ le pied de V dans l'orthogonal $S^{\perp}$. Il est clair que l'application $V \to S$ est continue sur $\mathcal{V}_k$. En posant $u(V) = S$ sur $\mathcal{V}_k$ on définit donc θ-presque partout sur $\mathcal{F}'$ une application mesurable de $\mathcal{F}'$ sur $\mathcal{S}_k$. D'après la proposition 3-2-2, il existe donc une probabilité G sur $\mathcal{S}_k$ muni de la σ-algèbre induite par σ_f , et, pour G presque tout $S \in \mathcal{S}_k$, une mesure σ-finie $\theta_u(.\ ;\ S)$ sur σ_f vérifiant la relation (3-2-4). θ_u est d'ailleurs concentrée sur $\mathcal{V}'_k$, comme θ elle-même. De plus, on a $u(V) = S$, $\theta_u(.\ ;\ S)$- presque partout, autrement dit $\theta_u(.\ ;\ S)$ est concentrée sur le sous-espace de $\mathcal{V}_k$ constitué des variétés parallèles à S. Ce sous-espace est homéomorphe à $\mathbb{R}^{d-k}$ par l'application $V \to s(V)$, où s(V) est le point d'intersection de V et de $S^{\perp}$, de sorte que la mesure $\theta_u(.\ ;\ S)$ est identifiable à une mesure μ_S σ-finie sur $S^{\perp}$, selon la relation :

$$\theta_u(\mathcal{F}_B\ S) = \mu_S(\Pi_{S^{\perp}}\ B)$$

où B est un borélien de B et $\Pi_{S^{\perp}}$ B sa projection sur $S^{\perp}$.

Mais l'application u est manifestement θ-presque partout invariante pour les translations. D'après le corollaire de la Proposition 3-2-2, les mesures θ_u et μ_S sont donc elles-mêmes invariantes par translation. Par suite, la mesure μ_S sur $S^{\perp}$ est proportionnelle à la mesure de Lebesgue sur $S^{\perp}$. Si donc nous désignons par μ_{d-k} la mesure de Lebesgue sur un espace euclidien à d-k dimensions, nous trouvons pour G presque tout $S \in \mathcal{S}_k$:

$$\theta_u(\mathcal{F}_B \,;\, S) = \varphi(S)\ \mu_{d-k}\ (\Pi_{S^{\perp}} B)$$

et, d'après la relation (3-2-4) :

$$\theta(\mathcal{F}_B) = \int_{\mathcal{S}_k} \varphi(S)\ \mu_{d-k}\ (\Pi_{S^{\perp}} B)\ G(ds)$$

En particulier, la fonction $\varphi(S)$ est intégrable pour G (il suffit, pour le voir, de prendre comme borélien B la boule unité de E, de sorte que $\mu_{d-k}\ (\Pi_{S^{\perp}} B)$ est le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^{d-k}$ donc indépendant de S). On peut donc remplacer G par $\frac{1}{a}\ \varphi\ G$ avec une constante a de normalisation, $a = \int \varphi(S)\ G(dS)$. Finalement, la fonctionnelle ψ vérifie la relation

$$\psi(K) = \theta(\mathcal{F}_K) = a \int_{\mathcal{S}_k} \mu_{d-k}\ (\Pi_{S^{\perp}} K)\ G(dS) \qquad (K \in \mathcal{K}) \tag{3-5-1}$$

Inversement, donnons-nous une probabilité G sur $\mathcal{S}_k$, une constante $a > 0$, et montrons que la fonctionnelle ψ définie par la relation (3-5-1) est une capacité de Choquet. Tout d'abord, $K_n \downarrow K$ dans K entraîne $\Pi_{S^{\perp}} K_n \downarrow \Pi_{S^{\perp}} K$ pour chaque $S \in \mathcal{S}_k$, comme on le vérifie sans peine, donc

$$\mu_{d-k}\ (\Pi_{S^{\perp}}\ K_n) \downarrow \mu_{d-k}\ (\Pi_{S^{\perp}} K)$$

puisque μ_{d-k} est la mesure de Lebesgue, d'où enfin $\psi(K_n) \downarrow \psi(K)$, par continuité monotone séquentielle. ψ est donc s.c.s. sur $\mathcal{K}$. Il reste à vérifier les conditions de positivité. La formule évidente :

$$\Pi_{S^{\perp}} (B \cup B') = (\Pi_{S^{\perp}} B) \cup (\Pi_{S^{\perp}} B')$$

montre que $\mu_{d-k}\ (\Pi_{S^{\perp}}\ K)$ vérifie pour chaque S les conditions de positivité (puisque μ_{d-k} est une mesure positive); et il en est donc de même pour la fonction ψ sur $\mathcal{K}$. D'après le théorème 3-1-1, il existe donc un EFAID A vérifiant $P(A \cap K = \emptyset) = \exp\ \{-\ \psi(K)\}$.

Il reste à vérifier que A est un réseau poissonien pour $S \in \mathcal{S}_k$. Désignons par θ_S la mesure σ-finie définie par $\theta_S(\mathcal{F}_K) = a\,\mu_{d-k}(\Pi_{S^\perp} K)$. Cette mesure est manifestement concentrée sur la classe des variétés de $\mathcal{V}_k$ parallèles à S. Par suite $\theta = \int_{\mathcal{S}_k} \theta_S\, G(dS)$ est elle-même concentrée sur $\mathcal{V}_k$, et A est bien un réseau poissonien stationnaire. Comme a G est une mesure positive sur $\mathcal{S}_k$, nous pouvons énoncer, en modifiant les notations :

<u>Proposition 3-5-1</u>.- Un EFA A est un réseau poissonien stationnaire si et seulement si la fonction ϕ définie sur $\mathcal{K}$ en posant $\phi(K) = -\log P(A \cap K = \emptyset)$ est de la forme :

$$\phi(K) = \int_{\mathcal{S}_k} \mu_{d-k}(\Pi_{S^\perp} K)\, G(dS) \qquad (K \in \mathcal{K}) \tag{3-5-1}$$

pour une mesure positive G sur l'ensemble $\mathcal{S}_k$ des sous-espaces de E de dimension k. Dans cette relation, $\Pi_{S^\perp} K$ est la projection du compact K sur l'orthogonal $S^\perp$ de $S \in \mathcal{S}_k$, et μ_{d-k} est la mesure de Lebesgue de l'espace euclidien de dimension d-k.

Pour assurer la transition avec le chapitre suivant, qui sera consacré à la convexité, examinons les propriétés que possède la restriction de la fonctionnelle ϕ à l'espace $C(\mathcal{K}')$ des compacts convexes non vides. Posons d'abord une définition.

<u>Définition 3-5-1</u>.- On dit qu'une fonction ϕ définie sur $C(\mathcal{K}')$ est <u>C-additive</u> si elle possède la propriété suivante : si $K \in C(\mathcal{K}')$ et $K' \in C(\mathcal{K}')$ sont deux compacts convexes dont la réunion est elle-même convexe, soit $K \cup K' \in C(\mathcal{K}')$, on a :

$$\phi(K \cup K') + \phi(K \cap K') = \phi(K) + \phi(K') \tag{3-5-2}$$

<u>Proposition 3-5-2</u>.- La restriction à $C(\mathcal{K}')$ de la fonction ϕ définie par la relation (3-5-1) est continue et C-additive sur $C(\mathcal{K}')$.

Montrons d'abord la C-additivité. Pour K et $K' \in C(\mathcal{K}')$, on a pour chaque $S \in \mathcal{S}_k$:

$$\Pi_{S^\perp}(K \cup K') = (\Pi_{S^\perp} K) \cup (\Pi_{S^\perp} K').$$

Si de plus la réunion $K \cup K'$ est convexe, on vérifie sans peine que l'on a également $\Pi_{S^\perp}(K \cap K') = (\Pi_{S^\perp} K) \cap (\Pi_{S^\perp} K')$. La mesure de Lebesgue étant additive, on a alors :

$$\mu_{d-k}(\Pi_{S^\perp} K \cup K') + \mu_{d-k}(\Pi_{S^\perp} K \cap K') = \mu_{d-k}(\Pi_{S^\perp} K \cup \Pi_{S^\perp} K') + \mu_{d-k}(\Pi_{S^\perp} K \cap \Pi_{S^\perp} K') = \mu_{d-k}(\Pi_{S^\perp} K) + \mu_{d-k}(\Pi_{S^\perp} K')$$

et la relation (3-5-1) montre que ϕ est C-additive.

Pour établir la continuité de ϕ, nous utiliserons trois lemmes.

<u>LEMME 3-5-1</u> - L'application $F \to \mathring{F}$ de $C(\mathcal{F})$ dans $C(\mathcal{G})$ est continue.

On sait que l'application $F \to \complement \mathring{F}$ de $\mathcal{F}$ dans lui-même est s.c.i. (Proposition 1-2-4, corollaire 2). Il faut donc montrer que la restriction à $C(\mathcal{F})$ de cette application est s.c.s. Soit alors $\{F_n\}$ une suite dans $C(\mathcal{F})$ convergeant vers une limite F. On a $F \in C(\mathcal{F})$ d'après le corollaire de la Proposition 1-5-4. Soit alors $\{F_{n_k}\}$ une suite partielle et, pour chaque k, $x_{n_k} \notin \mathring{F}_{n_k}$ avec $\lim x_{n_k} = x$. Pour chaque k, il existe un demi-espace fermé H_{n_k} vérifiant $x_{n_k} \in H_{n_k}$ et $F_{n_k} \cap \mathring{H}_{n_k} = \emptyset$. Dans l'espace compact $\mathcal{H}$, la suite $\{\mathring{H}_{n_k}, H_{n_k}\}$ admet une valeur d'adhérence qui est de la forme $\{\mathring{H}, H\}$, où H est un demi-espace fermé. Les relations $x_{n_k} \in H_{n_k}$ et $F_{n_k} \subset \complement \mathring{H}_{n_k}$ passent à la limite, d'après la propriété de la convergence dans $\mathcal{F}$, et on a donc $x \in H$, $F \cap \mathring{H} = \emptyset$, c'est-à-dire $\mathring{F} \cap H = \emptyset$. Donc $x \notin \mathring{F}$. Par suite $\overline{\lim}\ \complement \mathring{F}_{n_k} \subset \complement \mathring{F}$, et l'application $F \to \complement \mathring{F}$ est s.c.s. (Proposition 1-2-4).

<u>LEMME 3-5-2</u> - La mesure de Lebesgue est continue sur $C(\mathcal{K}')$.

Désignons par μ la mesure de Lebesgue sur un espace euclidien E. Pour tout compact convexe $K \in C(\mathcal{K}')$, on a $\mu(K) = \mu(\mathring{K})$. En effet, si $\mathring{K} = \emptyset$, K est sous-dimensionnel, et on a $\mu(\mathring{K}) = \mu(K) = 0$. Si $\mathring{K}$ n'est pas vide, on peut supposer $0 \in \mathring{K}$. Si d est le nombre des dimensions de l'espace, on a $\mu(\lambda K) = \lambda^d\ \mu(K)$, et $\mathring{K} = \lim\limits_{\lambda \uparrow 1} \lambda K$ donne $\mu(\mathring{K}) = \lim\limits_{\lambda \uparrow 1} \mu(\lambda K) = \mu(K)$.

D'autre part, μ est s.c.s. sur $\mathcal{K}$ et s.c.i. sur $\mathcal{G}$. Si une suite $\{K_n\}$ dans $C(\mathcal{K})$ converge vers K, on a aussi $\lim \mathring{K}_n = \mathring{K}$ d'après le lemme précédent. Ainsi on trouve $\mu(K) = \mu(\mathring{K}) \leq \underline{\lim}\ \mu(\mathring{K}_n) \leq \overline{\lim}\ \mu(K_n) \leq \mu(K)$. Par suite $\mu(K_n)$ converge vers $\mu(K)$.

<u>LEMME 3-5-3</u> - L'application $(S,K) \to \Pi_{S^\perp} K$ de $\mathcal{S}_k \times \mathcal{K}'$ dans $\mathcal{K}'$ est continue.

En effet, soit $\{S_n\}$ et $\{K_n\}$ deux suites convergeant vers S et K dans $\mathcal{S}_k$ et $\mathcal{K}'$ respectivement. Soit $\{x_{n_k}\}$ une suite dans E vérifiant $\lim x_{n_k} = x$ et $x_{n_k} \in \Pi_{S^\perp_{n_k}} K_{n_k}$. Pour chaque k, on a $x_{n_k} \in S^\perp_{n_k}$ et on peut trouver $y_{n_k} \in S_{n_k}$ tel que $z_{n_k} = x_{n_k} + y_{n_k} \in K_{n_k}$. Comme les K_{n_k} sont contenus dans un compact fixe, les suites $\{z_{n_k}\}$, $\{x_{n_k}\}$ et $\{y_{n_k}\}$ admettent respectivement des valeurs d'adhérence z, x et y telles que $z = x + y$. On a alors $y \in S$, $x \in S^\perp$ et $z \in K$, donc $x \in \Pi_{S^\perp} K$ et l'application

$(S,K) \to \Pi_{S^\perp} K$ est s.c.s.

Si $x \in \Pi_{S^\perp} K$, on a $x \in S^\perp$ et $x + y \in K$ pour un $y \in S$. Il existe donc pour chaque n un $z_n \in K_n$ tel que $\lim z_n = x + y$, et z_n est de la forme $z_n = x_n + y_n$, $x_n \in S_n^\perp$, $y_n \in S_n$. Il est facile de voir que $\lim z_n = z$ entraîne $\lim x_n = x_o \in S^\perp$, $\lim y_n = y_o \in S$ et $z = x_o + y_o$. D'après l'unicité de la décomposition orthogonale, on a $x_o = x$ et $y_o = y$. Ainsi $x = \lim x_n$ avec $x_n \in \Pi_{S_n^\perp} K_n$, et l'application $(S,K) \to \Pi_{S^\perp} K$ est s.c.i.

Revenons maintenant à la démonstration de la Proposition 3-5-2, et établissons la continuité de ϕ sur $C(\mathcal{K}')$.

Désignons par ω_k le volume de la boule unité dans l'espace euclidien de dimension k. Pour tout compact $K \in \mathcal{K}'$ et tout $S \in \mathcal{S}_k$, on a :

$$\mu_{d-k} (\Pi_{S^\perp} K) = \frac{1}{\omega_k} \mu_d ((\Pi_{S^\perp} K) \oplus (B \cap S))$$

B désignant la boule unité dans E. Il est clair que l'application $S \to B \cap S$ est continue. D'après la continuité de l'addition de Minkowski (Proposition 1-5-1) et les lemmes 3-5-2 et 3-5-3, il en résulte que la fonction $(S,K) \to \mu_{d-k} (\Pi_{S^\perp} K)$ est continue sur $\mathcal{S}_k \times C(\mathcal{K}')$. Comme l'espace $\mathcal{S}_k$ est compact, la fonction $K \to \mu_{d-k} (\Pi_{S^\perp} K)$ est continue sur $C(\mathcal{K}')$ uniformément en $S \in \mathcal{S}_k$. Il résulte alors de la relation (3-5-1) que ϕ est continue sur $C(\mathcal{K}')$.

<u>REMARQUE</u> - La fonction ϕ de la relation (3-5-1) est homogène de degré d-k, comme la mesure de Lebesgue μ_{d-k}, et par suite le réseau poissonien est un EFA <u>stable</u> pour la réunion (Théorème 3-4-1). Nous verrons au chapitre V que la C-additivité de la fonction ϕ est équivalente à une propriété semi-markovienne de l'EFAID associé. Ainsi, les réseaux poissoniens sont des EFA <u>stables</u>, <u>stationnaires et semi-markoviens</u>, et nous verrons (Théorème 5-4-2) que réciproquement un EFA stable stationnaire et semi-markovien est équivalent à un réseau poissonien, de sorte qu'il s'agit d'une propriété caractéristique.

<u>Sécante aléatoire d'un compact B</u>.-

Soit $B \in \mathcal{K}$ un compact tel que $\theta(\mathcal{F}_B) = \phi(B) > 0$ (ce qui suppose déjà, d'après la relation (3-5-1), que B ne soit pas contenu dans une variété linéaire de dimension < d-k). La probabilité pour que B soit rencontré par une et une seule des variétés du réseau poissonien est évidemment $\phi(B) \exp \{- \phi(B)\}$. Plaçons-nous conditionnellement lorsque cet évènement est réalisé, et désignons par A' l'unique variété du réseau rencontrant B. $A' \cap B$ est alors un EFA sur $\mathcal{F}(B)$, appelé <u>sécante aléatoire</u> (du compact B pour le réseau poissonien considéré). En géométrie intégrale, on fait grand usage des sécantes aléatoires associées aux réseaux poissoniens isotropes. En fait, la loi de la sécante aléatoire $A' \cap B$ ne dépend que de la mesure ≥ 0 G de la relation (3-5-1), et le cas particulier considéré par la géométrie intégrale est celui où G est l'unique probabilité sur $\mathcal{S}_k$ qui soit invariante pour les rotations.

Comme la probabilité pour qu'il tombe une variété du réseau dans $\mathcal{F}_K$ et aucune dans $\mathcal{F}_B^K$ est $\phi(K) \exp\{-\phi(B)\}$ pour $K \subset B$, on voit que la loi T_B de la sécante aléatoire $A' \cap B$ (soit $T_B(K) = P(A' \in \mathcal{F}_K)$ pour K compact inclus dans B) est définie par :

$$T_B(K) = \phi(K)/\phi(B) \qquad (K \in \mathcal{K}(B))$$

La variété A' elle-même (et non plus son intersection avec B) admet une loi que nous noterons également T_B, définie cette fois sur $\mathcal{K}$ tout entier, qui coïncide évidemment avec la loi (3-5-2) pour $K \subset B$). Si K n'est pas contenu dans B, on note que l'évènement : "une variété et une seule tombe dans $\mathcal{F}_{B,K}$ et aucune dans $\mathcal{F}_B^K$ " admet la probabilité $\theta(\mathcal{F}_B \cap \mathcal{F}_K) \exp\{-\theta(\mathcal{F}_B \cap \mathcal{F}_K) - \theta(\mathcal{F}_B \cap \mathcal{F}^K)\} = \theta(\mathcal{F}_B \cap \mathcal{F}_K) \exp\{-\theta(\mathcal{F}_B)\}$. La relation $\theta(\mathcal{F}_B \cap \mathcal{F}_K) = \phi(B) + \phi(K) - \phi(B \cup K)$ montre donc que la loi T_B de la variété A' est définie par :

$$T_B(K) = \frac{\phi(B) + \phi(K) - \phi(B \cup K)}{\phi(B)} \qquad (K \in \mathcal{K}) \tag{3-5-3}$$

D'autre part, en temps qu'élément de l'espace $\mathcal{O}_k$ des variétés de dimension k, A' est assimilable à un couple (S,s), où $S \in \mathcal{S}_k$ est la direction de A' et $s \in S^\perp$ le pied de A' dans l'orthogonal $S^\perp$ du sous-espace S parallèle à A', avec d'ailleurs ici p.s. $s \in \Pi_{S^\perp} B$ (puisque A' rencontre B). D'après le paragraphe 2-3, il existe alors une probabilité unique F_B sur $\mathcal{S}_k$ et, pour F_B-presque tout $S \in \mathcal{S}_k$, un EFA conditionnel A'_S qui est une variété dont la direction est p.s. égale à S et dont la fonctionnelle T_S vérifie :

$$T_B(K) = \int_{\mathcal{S}_k} T_S(K) \quad F_B(dS) \qquad (K \in \mathcal{K})$$

Il suffit alors de comparer les relations (3-5-2) et (3-5-1), et d'utiliser l'unicité des lois F_B et (F_B-presque partout) T_S pour obtenir par identification les expressions explicites :

$$(3\text{-}5\text{-}3)\quad \begin{cases} F_B(dS) = \dfrac{\mu_{d-k}(\Pi_{S^\perp} B)\, G(dS)}{\int \mu_{d-k}(\Pi_{S^\perp} B)\, G(dS)} \\ T_S(K) = \dfrac{\mu_{d-k}[(\Pi_{S^\perp} B) \cap (\Pi_{S^\perp} K)]}{\mu_{d-k}(\Pi_{S^\perp} B)} \qquad (K \in \mathcal{K}) \end{cases}$$

Autrement dit : La direction S de la variété A' obéit à la loi F_B définie par la première relation (3-5-3), qui n'est autre que la loi "a priori" G pondérée par la mesure du contour apparent de B projeté sur l'orthogonal $S^\perp$, et, à S fixé, le pied s de A' dans cet orthogonal $S^\perp$ est uniformément distribué sur la projection $\Pi_{S^\perp} B$ de B sur S (c'est-à-dire obéit à la loi

$$[1_{\Pi_{S^\perp} B}(s)/\mu_{d-k}(\Pi_{S^\perp} B)]\ \mu_{d-k}(ds)$$

Dans le cas où B est une boule, la loi F_B est identique à la loi initiale G, à un facteur près de normalisation.

Réseaux poissoniens induits sur les variétés linéaires.-

Soit p un entier vérifiant $d - k \leq p < d$, et $V_p \in \mathcal{V}_p$ une variété linéaire de dimension p dans E et de direction $S_p \in \mathcal{S}_p$. On identifiera V_p à l'espace euclidien $\mathbb{R}^p$. Considérons alors l'application $\alpha : \mathcal{F}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}^p)$ définie par $\alpha(F) = F \cap V_p$, $F \in \mathcal{F}$. C'est une application s.c.s., donc mesurable. L'image par α de la restriction à $\mathcal{F}_{V_p}$ d'une mesure θ σ-finie sur $\mathcal{F}'(\mathbb{R}^d)$ est une mesure θ_p σ-finie sur $\mathcal{F}'(\mathbb{R}^p)$, et θ_p est invariante pour les translations de $\mathbb{R}^p$ si θ est déjà invariante pour les translations de $\mathbb{R}^d$. A l'EFAID A sur $\mathbb{R}^d$ associé à la mesure σ-finie θ est ainsi associé l'EFAID $A_p = A \cap V_p$ sur $\mathbb{R}^p$ associé à la mesure σ-finie θ_p. De plus, si A est stationnaire dans $\mathbb{R}^d$, A_p est stationnaire dans $\mathbb{R}^p$, et la loi de probabilité de A_p dépend uniquement de la direction S_p de la variété $V_p \in \mathcal{V}_p$, et non du pied $s = V_p \cap S_p^\perp$ de cette variété dans S_p. En particulier, si A est un réseau poissonien stationnaire dans $\mathbb{R}^d$, A_p sera un réseau poissonien stationnaire dans $\mathbb{R}^p$, que nous appellerons réseau poissonien induit sur la variété V_p. En effet, θ est invariante par translation et concentrée sur $\mathcal{V}_k(\mathbb{R}^d)$, et θ-presque tout $F \in \mathcal{V}_p(\mathbb{R}^d)$ a son image $\alpha(F)$ dans $\mathcal{V}_{k-d+p}(\mathbb{R}^p)$ $(0 \leq k-d+p < k)$, de sorte que θ_p est invariante par translation dans $\mathbb{R}^p$ et concentrée sur $\mathcal{V}_{k-d+p}(\mathbb{R}^p)$. De plus, le réseau poissonien induit sur V_p est constitué de variétés linéaires de dimension (k+p-d). En particulier, pour p = d-k, le réseau induit est simplement un processus de Poisson ponctuel stationnaire dans $\mathbb{R}^p$, caractérisé par une densité constante. C'est ce cas particulier que nous allons examiner en premier lieu. Pour cela, nous utiliserons les notations commodes suivantes : si S et S' sont deux sous-espaces de $E = \mathbb{R}^d$, de dimensions éventuellement différentes, on désignera par $|S, S'|$ la valeur absolue du déterminant de la restriction à S du projecteur $\Pi_{S'}$ du sous-espace S'. Autrement dit, si $S \in \mathcal{S}_p$ est de dimension p, $|S, S'|$ est la constante ≥ 0 telle que l'on ait :

$$(3\text{-}5\text{-}4) \qquad \mu_p\,(\Pi_{S'}\, K) = |S, S'|\ \mu_p(K)$$

pour tout compact $K \subset S$. On a $|S, S'| = 0$ si la dimension de S' est strictement inférieure à celle de S, et $|S, S'| = |S, \Pi_{S'}\, S|$ si la dimension de S' est supérieure ou egale à celle de S. En particulier $|S, S'| = 0$ équivaut à $\text{Dim}\,(\Pi_{S'}\, S) < \text{Dim}\, S$. Lorsque S et S' ont même dimension, on a manifestement $|S, S'| = |S', S|$.

<u>Processus ponctuels induits sur les variétés de dimension d-k</u>.

Si V est une variété de dimension d-k, et $\sigma \in \mathcal{S}_{d-k}$ sa direction, le processus de Poisson ponctuel induit sur V est stationnaire, et se trouve caractérisé par sa densité $\varphi(\sigma)$, c'est-à-dire le nombre $\varphi(\sigma) \geq 0$ tel que l'on ait $\psi(K) = \varphi(\sigma)\ \mu_{d-k}(K)$ pour tout compact K contenu dans V (ou, ce qui revient au même, dans σ). Il convient donc de trouver l'expression de cette fonction φ représentant la densité du processus ponctuel induit sur chaque $\sigma \in \mathcal{S}_{d-k}$.

Supposons d'abord que la mesure ≥ 0 G de la relation (3-5-1) soit la mesure de Dirac δ_S pour un $S \in \mathcal{S}_k$. Dans ce cas, le réseau poissonien inducteur est constitué de variétés linéaires parallèles et de direction S. La formule (3-5-1) se réduit alors à $\psi(K) = \mu_{d-k}\,(\Pi_{S^\perp} K)$. Pour $\sigma \in \mathcal{S}_{k-d}$ et $K \subset \sigma$, la relation (3-5-4) donne $\mu_{d-k}\,(\Pi_{S^\perp} K) = |\sigma, S^\perp|\mu_{d-k}(K)$. Par suite, le processus ponctuel induit dans σ admet la densité $|\sigma, S^\perp|$. Dans le cas général où G est une mesure ≥ 0 quelconque sur $\mathcal{S}_k$, on en déduit aussitôt que la densité $\varphi(\sigma)$ du processus induit dans σ est :

$$(3\text{-}5\text{-}5) \qquad \varphi(\sigma) = \int_{\mathcal{S}_k} |\sigma, S^\perp|\ G(dS) \qquad (\sigma \in \mathcal{S}_{d-k})$$

Inversement, si une fonction φ sur $\mathcal{S}_{d-k}$ admet une représentation intégrale de cette forme pour une mesure G positive sur $\mathcal{S}_k$, $\varphi(\sigma)$ représente la densité du processus ponctuel induit sur $\sigma \in \mathcal{S}_{d-k}$ par le réseau poissonien associé à la mesure G selon la formule (3-5-1). Nous désignerons par $\mathcal{R}_{d-k}$ la classe de ces fonctions. Il est facile de vérifier que $\mathcal{R}_{d-k}$ constitue un cone convexe à base compacte dans l'espace $\mathcal{C}\,(\mathcal{S}_{d-k})$ des fonctions continues sur $\mathcal{S}_{d-k}$ (muni de la convergence uniforme). On voit se poser deux sortes de problèmes :

1/ - Il s'agit en premier lieu de caractériser le cone $\mathcal{R}_{d-k}$, c'est-à-dire de trouver les conditions nécessaires et suffisantes que doit vérifier une fonction φ sur $\mathcal{S}_{d-k}$ pour représenter les densités des processus ponctuels induits sur les variétés de dimension d-k par un réseau poissonien de variétés de dimension k.

2/ - Le deuxième problème est celui de l'unicité de la représentation intégrale (3-5-5). Il s'agit de savoir si le processus inducteur est biunivoquement déterminé par la donnée de la fonction φ représentant les densités des processus ponctuels induits, ou, en d'autres termes, de savoir si le cone $\mathcal{R}_{d-k}$ est un simplexe dans $\mathcal{C}(\mathcal{S}_{d-k})$. Il est immédiat que $\mathcal{R}_{d-k}$ est un simplexe si et seulement si la famille des fonctions définies par $S \to |\sigma, S^{\perp}|$, $\sigma \in \mathcal{S}_{d-k}$ est totale dans $\mathcal{C}(\mathcal{S}_k)$.

Nous verrons dans le chapitre suivant que cette condition d'unicité est effectivement vérifiée pour $k = 1$ et $k = d-1$, c'est-à-dire dans le cas des réseaux poissoniens de droites ou d'hyperplans, et nous donnerons également une caractérisation complète des simplexes $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_{d-1}$. On peut conjecturer que ce théorème d'unicité reste vrai dans le cas $1 < k < d-1$ $(d \geq 4)$ et constitue ainsi un résultat général.

<u>Réseaux induits sur les variétés de dimension $p > d-k$.-</u>

Plaçons-nous maintenant dans le cas où la variété V a une dimension $>d-k$ de sorte que le réseau poissonien induit sur V est constitué de variétés de dimension $k + p - d > 0$. Soit $S_p \in \mathcal{S}_p$ la direction de la variété V. D'après la relation (3-5-1), le réseau induit est caractérisé par une mesure positive $G_p(.\ ; S_p)$ sur l'espace $\mathcal{S}_{k+p-d}(S_p)$ qu'il s'agit de déterminer. Si K est un compact contenu dans V, les évènements $\{A \cap K \neq \emptyset\}$ et $\{A_p \cap K \neq \emptyset\}$ sont identiques. Autrement dit, la mesure G_p est caractérisée par la relation :

$$(3\text{-}5\text{-}6) \qquad \psi(K) = \int_{\mathcal{S}_{k+p-d}(S_p)} \mu_{d-k}(\Pi'_{\sigma^{\perp}} K)\, G_p(d\sigma\ ; S_p) \qquad (K \in \mathcal{K},\ K \subset S_p)$$

valable pour tout compact K contenu dans S_p (la notation $\Pi'_{\sigma^{\perp}}$ représente le projecteur dans S_p de l'orthogonal $\sigma^{\perp}$ (dans S_p) de $\sigma \in \mathcal{S}_{k+p-d}(S_p)$. La dimension de σ étant $k + p - d$, celle de $\sigma^{\perp}$ est bien égale à d-k. En comparant les relations (3-5-1) et (3-5-6), nous allons obtenir une expression explicite de la mesure G_p.

Lorsque la mesure G de la relation (3-5-1) est la mesure de Dirac δ_{S_o} en $S_o \in \mathcal{S}_k$, on a affaire à un réseau de variétés parallèle à la direction fixe S_o, et dans ce cas $\psi(K) = \mu_{d-k}(\Pi_{S_o^{\perp}} K)$ pour tout $K \in \mathcal{K}$. Le réseau induit sur $S_p \in \mathcal{S}_p$ est évidemment constitué de variétés parallèles à

$\sigma_o = S_o \cap S_p$. Si la dimension de σ_o est strictement supérieure à $k + p - d$, on a $\mu_{d-k}(\Pi_{S_o^\perp} K) = 0$ pour tout compact K contenu dans S_p, et le réseau induit s'évanouit ($G_p = 0$). Désignons par $\sigma_o^\perp = \Pi_{S_p} S_o^\perp$ l'orthogonal de $\sigma_o = S_o \cap S_p$ dans S_p . Pour tout compact $K \subset S_p$, la relation (3-5-4) donne : $\mu_{d-k} (\Pi_{S_o^\perp} K) = \mu_{d-k} (\Pi_{S_o^\perp} \Pi'_{\sigma_o^\perp} K) = |S_o^\perp , \sigma_o^\perp| \, \mu_{d-k} (\Pi'_{\sigma_o^\perp} K)$. Mais $\sigma_o^\perp = \Pi_{S_p} S_o^\perp$ entraîne $|S_o^\perp , \sigma_o^\perp| = |S_o^\perp, S_p|$, avec en particulier $|S_o^\perp , S_p| = 0$ si Dim $\sigma_o > k + p - d$. Ainsi, dans tous les cas, on a $\mu_{d-k} (\Pi_{S_o^\perp} K) = |S_o^\perp , S_p| \, \mu_{d-k} (\Pi'_{\sigma_o^\perp} K)$, et la mesure associée au processus induit est donc $|S_o^\perp, S_p| \, \delta_{\sigma_o} = G_p$ (étant entendu que cette mesure est nulle si $|S_o^\perp , S_p| = 0$). Cette mesure G_p est caractérisée par la relation $\int f(\sigma) \, G_p(d\sigma) = |S_o^\perp , S_p| \, f (S_o \cap S_p)$ pour toute fonction continue f sur $\mathcal{S}_{k+p-d} (S_p)$. D'après la relation (3-5-1), on en déduit que, dans le cas général où le réseau inducteur est associé à une mesure $G \geq 0$ quelconque sur $\mathcal{S}_k$, le réseau induit sur $S_p \in \mathcal{S}_p$ est associé à la mesure $G_p(. \, ; S_p)$ sur $\mathcal{S}_{k+p-d} (S_p)$ définie par la relation :

$$\int_{\mathcal{S}_{k+p-d}(S_p)} f(\sigma) \, G_p(d\sigma \, ; S_p) = \int_{\mathcal{S}_k} |S^\perp , S_p| \, f(S \cap S_p) \, G(dS)$$

valable pour toute fonction f continue sur $\mathcal{S}_{k+p-d} (S_p)$, avec la convention $|S^\perp, S_p| \, f(S \cap S_p) = 0$ si $|S^\perp , S_p| = 0$. On note d'ailleurs que la fonction $S \to |S^\perp, S_p| \, f(S \cap S_p)$ ainsi définie sur $\mathcal{S}_k$ est continue.

Pour $d - k < p < d$, le réseau induit dans $S_p \in \mathcal{S}_p$ induit à son tour dans chaque $S_{d-k} \in \mathcal{S}_{d-k}(S_p)$ un réseau ponctuel dont la densité $\varphi(S_{d-k})$ vérifie la relation (3-5-5) et aussi la relation analogue écrite avec la mesure $G_p(. \, ; S_p)$ au lieu de G, soit :

(3-5-7) $$\varphi(S_{d-k}) = \int_{\mathcal{S}_{k+p-d}(S_p)} |\sigma^\perp, S_{d-k}| \, G_p(d\sigma \, ; S_p)$$

pour chaque $S_{d-k} \in \mathcal{S}_{d-k}$ et $S_p \in \mathcal{S}_p$ tel que $S_p \supset S_{d-k}$ ($\sigma^\perp$ désigne l'orthogonal de $\sigma \in \mathcal{S}_{k+d-p}(S_p)$ dans l'espace S_p). On déduit de là une condition nécessaire que doit vérifier une famille $G_p(. \, ;S_p)$ $S_p \in \mathcal{S}_p$ de mesures positives pour constituer la famille des mesures associées aux réseaux induits par un même réseau poissonien sur $E = \mathbb{R}^d$. Pour chaque $S_{d-k} \in \mathcal{S}_{d-k}$, l'intégrale qui figure au second membre de (3-5-7) ne doit pas dépendre du choix du sous-espace S_p contenant S_{d-k} .

- CHAPITRE IV -

LA CONVEXITE

Dans ce chapitre consacré à la convexité, l'espace E sera évidemment un espace euclidien $E = \mathbb{R}^d$ de dimension $d > 0$. Le premier paragraphe introduit les fonctionnelles de Minkowski, bien connues en géométrie intégrale, à partir des résultats du chapitre 3 relatifs aux variétés poissonniennes. On montre ensuite que les EFA p.s. convexes sont caractérisés par une propriété de leur fonctionnelle T, à savoir la C-additivité. Le troisième paragraphe est consacré aux grenulométries linéaires. On montre ensuite que l'espace $C_o(\mathcal{K})$ des compacts convexes contenant l'origine est homéomorphe à un cone convexe $\mathcal{R}$ à base compacte dans l'espace des fonctions continues sur la sphère unité. Ce cone $\mathcal{R}$ n'est pas un simplexe, mais on montre dans le dernier paragraphe que $\mathcal{R}$ contient un simplexe $\mathcal{R}_1$ associé à une classe de compacts convexes symétriques que nous appellerons classe de Steiner. Les compacts de cette classe vérifient, en effet, une version généralisée de la célèbre formule de Steiner. Les résultats relatifs au simplexe $\mathcal{R}_1$ permettront de montrer qu'un réseau poissonien de droites (ou d'hyperplans) est caractérisé par la donnée des densités des processus ponctuels induits sur les hyperplans (ou sur les droites) de l'espace. On termine par des applications à la géométrie intégrale.

4-1 LES FONCTIONNELLES DE MINKOWSKI.

En géométrie intégrale, on attache une grande importance aux fonctions définies sur l'espace $C(\mathcal{K}')$ des compacts convexes non vides et invariantes pour le groupe des déplacements de l'espace euclidien E, c'est-à-dire pour les translations et les rotations dans E. On sait, d'autre part, qu'un EFA est stationnaire si et seulement si la fonctionnelle T sur $\mathcal{K}$ qui lui est associée selon le théorème de Choquet est invariante par translation. De même, nous dirons qu'un EFA est isotrope si sa probabilité est invariante par le groupe orthogonal $\Omega = \Omega(E)$, c'est-à-dire par le groupe des rotations de centre O dans E, et il en est manifestement ainsi si et seulement si la fonctionnelle T associée à cet EFA est elle-même invariante pour le groupe orthogonal. Il y aura donc un rapport étroit entre les EFA stationnaires et isotropes d'une part et les fonctionnelles invariantes de la géométrie intégrale de l'autre.

Examinons d'abord un procédé simple permettant de construire des fonctionnelles isotropes sur $\mathcal{K}$. Le groupe orthogonal Ω étant compact, on sait qu'il existe sur Ω une mesure de Haar [ ] bornée, unique à un facteur près, c'est-à-dire une mesure bornée positive invariante par rotation. Autrement dit, il existe sur le groupe orthogonal Ω une et une seule probabilité invariante pour les rotations, que nous noterons ϖ. Si K est un compact (ou un fermé) donné l'application $\omega \to \omega K$ de Ω dans $\mathcal{K}$ (ou dans $\mathcal{F}$) est manifestement continue pour la topologie naturelle sur Ω. Si donc φ est une fonction mesurable quelconque sur $\mathcal{K}$, la fonction $\bar{\varphi}$ définie par :

$$\bar{\varphi}(K) = \int_{\Omega} \varphi(\omega K) \ \varpi\ (d\omega) \qquad (K \in \mathcal{K})$$

est une fonction isotrope sur $\mathcal{K}$, que nous appellerons moyenne de φ pour les rotations. Il est facile de voir que la continuité de φ entraîne celle de $\bar{\varphi}$ (à cause de l'invariance de la métrique de Hausdorff sur $\mathcal{K}'$ pour le groupe des rotations).

De même, si $S_o \in \mathcal{S}_k$ est un sous-espace de dimension k ($o < k < d$)de l'espace euclidien $E = \mathbb{R}^d$, l'application continue $\omega \to \omega\, S_o$ de Ω sur $\mathcal{S}_k$ permet de définir sur $\mathcal{S}_k$ une probabilité induite par ϖ, manifestement invariante pour les rotations et indépendante du choix du sous-espace particulier $S_o \in \mathcal{S}_k$. Nous désignerons cette probabilité par ϖ_k^d , ou simplement par ϖ_k lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguité sur le nombre des dimensions de l'espace. On démontre d'ailleurs, [40] que ϖ_k est la seule probabilité sur $\mathcal{S}_k$ invariante pour les rotations.

Si, maintenant, $\phi : \mathcal{K}(\mathbb{R}^k) \to \mathbb{R}$ est une fonctionnelle isotrope sur l'espace $\mathcal{K}(\mathbb{R}^k)$ où $\mathbb{R}^k$ est l'espace euclidien à $k < d$ dimensions, l'expression $\phi(\Pi_S K)$ est définie de manière univoque pour tout $S \in \mathcal{S}_k$. Π_S est le projecteur de S. En effet, on peut identifier à $\mathbb{R}^k$ un $S_o \in \mathcal{S}_k$ donné, et pour tout $S \in \mathcal{S}_k$ trouver un $\omega(S) \in \Omega$ tel que $\omega(S)\ S = S_o$. Si l'on pose $\phi(\Pi_S K) = \phi(\omega(S)\ \Pi_S K)$, l'expression obtenue ne dépend pas du choix de $\omega(S)$, à cause de l'invariance de ϕ pour les rotations de $\mathbb{R}^k$. ϕ étant supposée mesurable, le lemme 3-5-3 nous garantit la mesurabilité sur $\mathcal{S}_k \times \mathcal{K}(E)$ de l'application $(S, K) \to \phi(\Pi_S K)$, et de même la continuité de ϕ entraîne celle de cette application . En particulier, on peut définir la moyenne ϕ^d de ϕ pour les rotations de $\mathbb{R}^d$, en posant pour tout $K \in \mathcal{K}$:

$$(4\text{-}1\text{-}1) \qquad \phi^d(K) = \int_{\mathcal{S}_k} \phi(\Pi_S\ K)\ \varpi_k(dS) = \int_{\Omega} \phi(\Pi_{\omega S_o}\ K)\ \varpi(d\omega)$$

ϕ^d est une fonction isotrope mesurable sur $\mathcal{K}(E)$, et même continue si ϕ est continue.

Soit alors k' un entier avec $k < k' < d$. On peut, de la même manière, définir la moyenne $\phi^{k'}$ de ϕ pour les rotations de $\mathbb{R}^{k'}$. C'est une fonctionnelle isotrope et mesurable sur $\mathcal{K}(\mathbb{R}^{k'})$. A $\phi^{k'}$ nous pouvons donc à son tour associer sa moyenne $\overline{\phi^{k'}}$ pour les rotations de $\mathbb{R}^d$, qui est une fonctionnelle isotrope sur $\mathcal{K}(E)$. En fait, cette nouvelle fonctionnelle est identique à ϕ^d. Autrement dit, pour $0 < k < k' < d$, on a pour tout $k \in \mathcal{K}(E)$:

$$(4\text{-}1\text{-}2) \qquad \phi^d(K) = \int_{\mathcal{S}_{k'}} \phi^{k'}(\Pi_{S'}\ K)\ \varpi_{k'}(dS') = \int_{\Omega} \phi^{k'}(\omega\ S'_o)\ \varpi(d\omega)$$

(S'_o désignant un élément d'ailleurs arbitraire de $\mathcal{S}_{k'}$).

Pour démontrer la relation (4-1-2), faisons choix d'un $S_o \in \mathcal{S}_k$ et d'un $S'_o \in \mathcal{S}_{k'}$ tel que $S_o \subset S'_o$, et identifions ces deux sous-espaces de E à $\mathbb{R}^k$ et à $\mathbb{R}^{k'}$ respectivement. L'application continue de Ω dans $\mathcal{S}_k \times \mathcal{S}_{k'}$ définie par $\omega \to (\omega\ S_o,\ \omega\ S'_o)$ induit sur $\mathcal{S}_k \times \mathcal{S}_{k'}$ une probabilité $G(dS, dS')$ invariante pour les rotations. On a $G(\mathcal{S}_k\ ;\ dS') = \varpi_{k'}(dS')$, et la probabilité conditionnelle $G_{S'}(dS)$ de S en S' (définie pour $\varpi_{k'}$-presque tout S') est concentrée sur S' (i.e. $S \subset S'$ p.s. pour $G_{S'}$), et invariante pour le sous-groupe $\Omega(S')$ des rotations de S'. Autrement dit, si $\omega' \in \Omega$ applique S' sur S'_o, la probabilité $G_{S'}$ est l'image par ω' de la probabilité $\varpi_k^{k'}$ sur $\mathcal{S}_k(\mathbb{R}^{k'})$ invariante pour les rotations de $\mathbb{R}^{k'}$. Mais on peut alors écrire d'après la définition de $\phi^{k'}$:

$$\int \phi(\Pi_S\ K)\ G_{S'}(dS) = \int \phi(\Pi_S\ \Pi_{S'}\ K)\ G_{S'}(dS) = \int \phi(\Pi_S\ \Pi_{S'}\ K)\ \varpi_k^{k'}(dS) = \phi^{k'}(\Pi_{S'}\ K)$$

Il en résulte :

$$\int_{\mathcal{S}_{k'}} \phi^{k'}(\Pi_{S'}\ K)\ \varpi_{k'}(dS') = \int_{\mathcal{S}_k \times \mathcal{S}_{k'}} \phi(\Pi_S\ K)\ G(dS,\ dS') = \phi^d(K)$$

c'est-à-dire la relation (4-1-2). Cette relation est d'un emploi constant en géométrie intégrale.

Nous pouvons maintenant passer à la définition des <u>fonctionnelles de Minkowski</u>. Il est clair qu'un réseau poissonien stationnaire est isotrope si et seulement si la mesure G sur $\mathcal{S}_k$ qui figure dans la relation (3-5-1) est l'unique mesure ϖ_k invariante par rotation sur $\mathcal{S}_k$. Nous définirons donc une fonctionnelle isotrope ϕ_k^d (ou ϕ_k s'il n'y a pas d'ambiguité) sur l'espace $\mathcal{K}(E)$ des compacts de l'espace euclidien $E = \mathbb{R}^d$ en posant :

$$(4\text{-}1\text{-}3) \qquad \phi_k(K) = \int_{\mathcal{S}_k} \mu_{d-k}\ (\Pi_{S^\perp}\ K)\ \varpi_k(dS)$$

pour $0 < k < d$, et $\psi_o(K) = \mu_d(K)$ (volume du compact K).

Les fonctionnelles de Minkowski, définies sur $C(\mathcal{K})$, coïncident à un facteur près avec les restrictions à $C(\mathcal{K})$ de ces fonctionnelles ψ_k . Plus précisément, si l'on désigne par

(4-1-4) $$b_k = \frac{\pi^{k/2}}{\Gamma\left(1 + \frac{k}{2}\right)}$$

le volume de la boule unité de l'espace euclidien $\mathbb{R}^k$, la fonctionnelle de Minkowski d'indice k ($0 \leq k \leq d$), soit W_k^d (ou W_k s'il n'y a pas d'ambiguité sur le nombre des dimensions de l'espace E) est par définition

(4-1-5) $$\begin{cases} W_k = \dfrac{b_d}{b_{d-k}} \psi_k & (0 \leq k < d) \\ W_d = b_d \end{cases}$$

Le choix des facteurs de normalisation est tel que l'on a $W_k(B) = b_d$ ($k = 0, 1, \ldots d$) pour la boule unité B de $E = \mathbb{R}^d$.

D'après les résultats du chapitre précédent, et, notamment, la Proposition 3-5-2, nous pouvons énoncer la :

Proposition 4-1-1.- La fonctionnelle W_k de Minkowski ($0 \leq k \leq d$) est croissante, continue et C-additive sur $C(\mathcal{K})$, homogène de degré d-k et invariante pour le groupe des déplacements.

Si nous appliquons la relation (4-1-2) aux fonctionnelles ψ_k^d , nous obtenons la relation suivante :

$$\psi_k^d(K) = \int_{\mathcal{S}_{d'}} \psi_{k'}^{d'} (\Pi_S K) \, \varpi_{d'}^d(dS)$$

($d > d' > d-k$, $k' = d' - d + k$). Par suite :

Proposition 4-1-2.- Pour $d > d' > d-k$, et en posant $k' = d' - d + k$, la fonctionnelle W_k^d d'indice k sur $\mathbb{R}^d$ est proportionnelle à la "moyenne de rotation" de la fonctionnelle $W_{k'}^{d'}$ d'indice k' sur $\mathbb{R}^{d'}$, conformément à la formule :

(4-1-6) $$W_k^d(K) = \frac{b_d}{b_{d'}} \int_{\mathcal{S}_{d'}} W_{k'}^{d'} (\Pi_S K) \, \varpi_{d'}(dS)$$

Les fonctionnelles les plus couramment utilisées sont W_o, W_1, W_2 et W_{d-1} (W_d est constante). On a déjà vu que $\underline{W_o}$ <u>est le volume</u>, soit $W_o(K) = \mu_d(K)$, μ_d désignant la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^d$. W_1 est proportionnelle à <u>la surface</u>. Si l'on désigne par F(K) la surface d'un compact convexe K, on trouve exactement :

$$W_1^d(K) = \frac{1}{d} F(K)$$

La relation de définition (4-1-3) donne, en effet :

$$\phi_1(K) = \int_{\mathcal{S}_1} \mu_{d-1} (\Pi_{S^\perp} K) \, \varpi_S(dS)$$

$\phi_1(K)$ est la moyenne des (d-1)-volumes des projections de K sur les différentes directions d'hyperplans. Dans le cas où K est un polyèdre convexe, dont la surface F(K) est définie de manière élémentaire, on trouve sans difficulté :

$$\phi_1(K) = \frac{b_{d-1}}{d\, b_d} F(A)$$

Si l'on définit ensuite la surface de $K \in C(\mathcal{K})$ comme la limite supérieure de la surface des polyèdres convexes contenus dans K, la formule ci-dessus (due à Cauchy) subsiste du fait que ϕ_1 est croissante et continue sur $C(\mathcal{K})$. On en déduit l'expression de $W_1^d(K)$.

Lorsque la frontière de $K \in C(\mathcal{K})$ est suffisamment régulière pour que l'on puisse définir en chaque point de ∂K les (d-1) courbures principales, les fonctionnelles de Minkowski se représentent à l'aide d'intégrales de surface faisant intervenir des fonctions symétriques simples de ces (d-1) courbures. En particulier, W_2 est liée à l'intégrale M de la <u>courbure moyenne</u> par la relation $W_2 = M/d$.

Enfin, on appelle <u>norme</u> de $K \in C(\mathcal{K})$ la quantité $N(K) = d\, W_{d-1}(K)$. Dans la formule de définition (4-1-3), $\mu_1(\Pi_{S^\perp} K)$ est la <u>largeur</u> du compact K dans la direction $S^\perp \in \mathcal{S}_1$, c'est-à-dire la distance entre les deux hyperplans d'appui parallèle à S. Ainsi, la norme N(K) est <u>proportionnelle à la largeur moyenne</u> $\bar{\ell}(K)$. On trouve, en effet $N(K) = \frac{d\, b_d}{2} \bar{\ell}(K)$.

En plus des propriétés générales énoncées dans la Proposition 4-1-1, la <u>norme</u> N et la fonctionnelle de Minkowski W_{d-1} présentent la particularité d'être <u>linéaires au sens de Minkowski</u>, c'est-à-dire de vérifier :

(4-1-7) $$N(\alpha K \oplus \beta K') = \alpha N(K) + \beta N(K') \qquad (\alpha, \beta \geq 0)$$

On démontre sans difficulté cette relation en remarquant que la largeur $\mu_1(\Pi_{S^\perp} K)$ dans la direction $S \in \mathcal{S}_1$ est déjà elle-même une fonctionnelle linéaire. Cette propriété est d'ailleurs caractéristique. On démontre, en effet, qu'une fonctionnelle φ invariante pour les déplacements, continue sur $C(\mathcal{K})$ et linéaire au sens de Minskowski est obligatoirement de la forme $\varphi = a N + b$ pour deux constantes a et b.

Si le nombre d des dimensions de E est ≤ 3, on retrouve des notions usuelles :
Pour $d = 1$, $W_0 = N$ coïncide avec la longueur, $W_1 = F = G_1 = 2$ est constante. Pour $d = 2$, W_0 est le volume à deux dimensions (ou surface), $N = 2 W_1$ est le périmètre, enfin $M = 2 W_2 = 2\pi$.

Pour $d = 3$, enfin, W_0 est le volume, $3 W_1 = F$ est la surface, et la norme : $3 W_2 = M = N$ est l'intégrale de la courbure moyenne.

On trouvera dans [20] la démonstration du théorème suivant qui montre que les fonctionnelles de Minkowski sont caractérisées par les propriétés énoncées dans la Proposition 4-1-1 :

THEOREME 4-1-1 - a/ - Toute fonction φ sur $C(\mathcal{K})$ continue, C-additive et invariante pour les déplacements est de la forme $\varphi = \sum_{k=0}^{d} a_k W_k$ pour des constantes a_k convenables $(-\infty < a_k < \infty)$.

b/ - Toute fonction φ sur $C(\mathcal{K})$ croissante, C-additive et invariante pour les déplacements est de la forme $\ell = \sum_{k=0}^{d} a_k W_k$ pour des constantes positives convenables $(0 \leq a_k < \infty)$.

REMARQUE - Par analogie avec ce théorème 4-1-1, on peut se demander si toute fonction φ sur $C(\mathcal{K})$, C-additive, continue (ou croissante) et invariante pour les translations seulement est nécessairement de la forme $\Sigma_0^d a_k \psi_k$, où chaque ψ_k est elle-même de la forme (3-5-1) pour une mesure $G_k \geq 0$ sur $\mathcal{S}_k$. En fait, il n'en est rien (voir paragraphe 5). De même, la formule de Steiner que nous allons maintenant établir (formule (4-1-8) ci-dessous) peut être généralisée au cas où l'on remplace la boule unité B par un compact convexe quelconque A. On obtient alors une formule du type $V(K \oplus \rho A) = \Sigma_0^d \binom{d}{k} W_k(A,K) \rho^k$, avec des fonctionnelles W_k continues sur l'espace produit $C(\mathcal{K}) \times C(\mathcal{K})$ invariantes par translation et C-additives relativement à chacun des deux arguments A et K. Mais $K \to W_k(A,K)$ n'est de la forme (3-5-1) que si A appartient à une classe particulière de compacts convexes que nous appellerons la classe de Steiner.

A titre d'application du théorème 4-1-1, nous allons établir rapidement quelques formules classiques en géométrie intégrale.

<u>Formule de Steiner</u>.- Le volume $V(K \oplus \rho B)$ du dilaté de $K \in C(\mathcal{K})$ par la boule ρB de rayon ρ est donné par :

$$(4\text{-}1\text{-}8) \qquad V(K \oplus \rho B) = \sum_{k=o}^{d} \binom{d}{k} W_k(K)\, \rho^k$$

et plus généralement, la fonctionnelle W_i vérifie :

$$(4\text{-}1\text{-}9) \qquad W_i(K \oplus \rho B) = \sum_{k=o}^{d-i} \binom{d-i}{k} W_{k+i}(K)\, \rho^k$$

En effet, la fonctionnelle $K \to W_i(K \oplus \rho B)$ vérifie les conditions du théorème 4-1-1. Cela est immédiat pour la continuité et l'invariance par déplacement. On établit la C-additivité à partir de la formule $(K \cup K') \oplus A = (K \oplus A) \cup (K' \oplus A)$ valable pour des ensembles K, K' et A quelconques, et de la relation :

$$(4\text{-}1\text{-}10) \qquad (K \cap K') \oplus A = (K \oplus A) \cap (K' \oplus A) \qquad (K,\ K',\ A \text{ et } K \cup K' \text{ convexes})$$

valable seulement si A, K, K' et la réunion $K \cup K'$ sont dans $C(\mathcal{K})$.

D'après le théorème 4-1-1, on a donc $W_i(K \oplus \rho B) = \Sigma\, a_k(\rho)\, W_k(K)$, et il suffit de prendre $K = \lambda B$ pour obtenir la relation $(\rho+\lambda)^{d-i} = \Sigma\, a_k(\rho)\, \lambda^{d-k}$ et de procéder par identification pour calculer les coefficients $a_k(\rho)$.

La formule de Steiner admet la généralisation suivante : si on remplace la boule ρB par un compact convexe K' quelconque, et si on prend la moyenne de $V(K \oplus \omega(K'))$ sur le groupe Ω des rotations, on obtient une fonctionnelle sur $C(\mathcal{K}) \times C(\mathcal{K})$ qui vérifie les conditions du théorème 4-1-1 à la fois en K et en K'. En procédant par identification des coefficients, on obtient :

$$(4\text{-}1\text{-}11) \qquad \int_\Omega W_i(K \oplus \omega(K'))\, \varpi(d\omega) = \frac{1}{b_d} \sum_{k=o}^{d-i} \binom{d-i}{k} W_{k+i}(K)\, W_{d-k}(K')$$

Mentionnons encore la <u>formule de Crofton</u>. Si K est compact et convexe dans $E = \mathbb{R}^d$, et si $S \in \mathcal{S}_k$ $(k < d)$ est un sous-espace à k dimensions, on peut considérer les intersections $K \cap (S \oplus s)$ de K par les variétés linéaires $S \oplus s$, $s \in S^\perp$ parallèles à S, et calculer l'intégrale de translation

$$\int_{S^\perp} W^k_{k'}\,(K \cap (S \oplus s))\, ds,$$

où ds désigne la mesure de Lebesgue sur l'espace euclidien $S^{\perp}$ à d-k dimensions. On obtient ainsi une fonctionnelle invariante par translation. Si l'on prend ensuite la moyenne de rotation, on obtient une fonctionnelle invariante pour le groupe des déplacements. Il est facile de vérifier la monotonie et la C-additivité, de sorte que le théorème 4-1-1 (énoncé b/) est applicable. En identifiant les coefficients dans le cas où K est une boule, on obtient alors la formule suivante, valable pour $0 \leq k' \leq k < d$:

$$(4\text{-}1\text{-}12) \qquad \int_{\mathcal{S}_k} \varpi_k(dS) \int_{S^{\perp}} W^k_{k'} \, (K \cap (S \oplus s)) \, ds = \frac{b_k \, b_{d-k'}}{b_d \, b_{k-k'}} \, W^d_{k'} \, (K)$$

4-2 LES EFA P.S. CONVEXES.

Un ensemble F est convexe dans l'espace euclidien E si $x \in F$ et $y \in F$ entraîne $\lambda x + (1-\lambda)\, y \in F$ pour $0 \leq \lambda \leq 1$. Plus généralement, posons la définition suivante :

Définition 4-2-1.- Soient K, K' et C trois compacts. On dit que C sépare K et K' si pour tout $x \in K$ et tout $x' \in K'$ il existe un nombre réel λ tel que $0 \leq \lambda \leq 1$ et $\lambda x + (1-\lambda)\, x' \in C$.

Notons tout de suite la propriété suivante :

Proposition 4-2-1.- Si K et K' sont deux compacts dont la réunion $K \cup K'$ est convexe, alors $K \cap K'$ sépare K et K'.

En effet, soient $x \in K$, $x' \in K'$ et $x(\alpha) = \alpha x' + (1-\alpha)x$, $0 \leq \alpha \leq 1$. On a $x(\alpha) \in K \cup K'$, puisque $K \cup K'$ est convexe. Posons $\alpha_0 = \operatorname{Sup} \{\alpha, \, x(\alpha) \in K\}$. On a $x(\alpha_0) \in K$, puisque K est compact. Si $\alpha_0 = 1$, $x(\alpha_0) \in K'$ et on a bien $x(\alpha_0) \in K \cap K'$. Si $\alpha_0 < 1$, on a $x(\alpha_0 + \varepsilon) \in K'$ pour $\varepsilon > 0$, donc, K' étant compact, $x(\alpha_0) \in K'$ et $x(\alpha_0) \in K \cap K'$.

Il résulte de cette définition qu'un fermé convexe ne peut pas rencontrer K et K' sans rencontrer C si C sépare K et K'. Autrement dit, $\mathcal{F}^{C}_{K,K'}$ est disjoint de $C(\mathcal{F})$. En particulier, si A est un EFA p.s. convexe, il vérifiera $P(\mathcal{F}^{C}_{K,K'}) = 0$, c'est-à-dire

$$T(K \cup K' \cup C) + T(C) = T(K \cup C) + T(K' \cup C)$$

En particulier, sa fonctionnelle T sera C-additive sur $C(\mathcal{K})$.

En fait, ces propriétés sont caractéristiques :

<u>THEOREME 4-2-1</u> - Soit A un EFA sur un espace euclidien, et T la fonctionnelle sur $\mathcal{K}$ définie par $T(K) = P(A \cap K) \neq \emptyset)$. Alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

a/ - A est p.s. convexe.

b/ - Si K, K' et C sont trois compacts tels que C sépare K et K', on a :

$$T(K \cup K' \cup C) + T(C) = T(K \cup C) + T(K' \cup C) \tag{4-2-1}$$

c/ - T est C-additive sur $C(\mathcal{K})$, c'est-à-dire vérifie $T(K \cup K') + T(K \cap K') = T(K) + T(K')$ si K, K' et $K \cup K'$ sont dans $C(\mathcal{K})$.

En effet, a/ entraîne b/ d'après la définition 4-2-1, et b/ entraîne c/ d'après la proposition 4-2-1. Montrons que c/ entraîne a/.

Si un fermé F n'est pas convexe, on peut trouver $x \in F$, $x' \in F$ et λ compris entre 0 et 1 tel que $y = \lambda x + (1-\lambda)\, x' \notin F$. Comme F est fermé, il existe une boule $B_\varepsilon(y_0)$ de centre y_0 et de rayon ε <u>rationnels</u> contenant y et disjointe de F. On peut ensuite trouver deux points x_0 et x'_0 de coordonnées rationnelles tels que x_0, x'_0 et y_0 soient alignés et que l'on ait $x \in B_\varepsilon(x_0)$ et $x' \in B_\varepsilon(x'_0)$.

Désignons par C l'enveloppe convexe de $B_\varepsilon(x_0) \cup B_\varepsilon(y_0)$ et par C' celle de $B_\varepsilon(x'_0) \cup B_\varepsilon(y_0)$. Il est clair que $C \cup C'$ est alors l'enveloppe convexe de $B_\varepsilon(x_0) \cup B_\varepsilon(x'_0)$. On a donc C, C', $C \cup C' \in C(\mathcal{K})$, et $F \in \mathcal{F}^{C \cap C'}_{C,C'}$. Or, l'ensemble des couples (C, C') que nous venons de construire constitue une classe $\mathcal{B}$ <u>dénombrable</u>. Un EFA sera donc p.s. convexe si et seulement si $P(\mathcal{F}^{C \cap C'}_{C,C'}) = 0$ pour tout $(C,C') \in \mathcal{C}$. Mais $P(\mathcal{F}^{C \cap C'}_{C,C'}) = T(C) + T(C') - T(C \cup C') - T(C \cap C')$ est nul si T est C-additive. QED.

Si A est un EFA p.s. convexe et compact, les fonctionnelles de Minkowski $W_k(A)$ sont des variables aléatoires (puisque W_k est continue sur $C(\mathcal{K})$). La condition de compacité presque sûre que nous imposons ici à A est due au fait qu'il y a plusieurs manières de prolonger W_k sur $C(\mathcal{F})$. Toutefois, le volume $V = W_0$ est défini sans ambiguité sur $\mathcal{F}$ par la relation $V(F) = \mu_d(F)$. Il est facile de voir qu'un fermé F est compact si et seulement si le dilaté $F \oplus \varepsilon B$ de F par la boule εB de rayon $\varepsilon > 0$ a un volume fini. Ainsi, un EFA A est p.s. compact si et seulement si la variable aléatoire $V(A \oplus \varepsilon B)$ est p.s. finie. D'après la formule de Steiner, on a alors :

$$V(A \oplus \varepsilon B) = \sum_{k=0}^{d} \binom{d}{k} W_k(A)\, \varepsilon^k$$

En particulier, si $V(A \oplus \varepsilon B)$ a une espérance finie pour un $\varepsilon > 0$, A est p.s. compact, les $W_k(A)$ ont des espérances finies pour $k = 0, 1, \ldots d$, et $V(A \oplus \rho B)$ a une espérance finie quel que soit $\rho > 0$. La réciproque est immédiate. D'après le corollaire 1 du Théorème 2-5-1, on a :

$$E[V(A \oplus B)] = \int P(x \in A \oplus B)dx = \int T(B_x)dx$$

Nous pouvons donc énoncer :

Proposition 4-2-2.- Soit A un EFA p.s. convexe, et T la fonctionnelle définie sur $\mathcal{K}$ par $T(K) = P(A \cap K \neq \emptyset)$. Alors A est p.s. compact, et les variables aléatoires $W_k : A \to W_k(A)$ associées aux fonctionnelles de Minkowski vérifient $E(W_k) < \infty$ si et seulement si on a $\int T((\varepsilon B)_x)dx < \infty$ pour une boule εB de rayon $\varepsilon > 0$. On a alors pour tout $\rho \geq 0$:

$$E[V(A \oplus \rho B)] = \int T((\rho B)_x)dx = \sum_{k=0}^{d} \binom{d}{k} E(W_k)\, \rho^k$$

Si A est un EFA non isotrope, on peut en déduire un EFA A' isotrope par un procédé analogue à celui qui nous a permis de construire des fonctionnelles invariantes par rotation. En effet, si Ω désigne le groupe orthogonal, l'application $(\omega, F) \to \omega(F)$ est continue, donc mesurable, sur $\Omega \times \mathcal{F}$. Soient alors ϖ l'unique probabilité sur Ω invariante par rotation et P la probabilité sur $\mathcal{F}$ associée à A. Nous pouvons munir $\Omega \times \mathcal{F}$ de la probabilité produit $\varpi \otimes P$.

La probabilité P' associée à l'EFA $A' : (\omega, F) \to \omega(F)$ est alors invariante pour les rotations et A' est isotrope. En particulier, la fonctionnelle T' associée à A' se déduit de la fonctionnelle T associée à A par la relation :

$$T'(K) = \int_{\Omega} T(\omega^{-1} K)\, \varpi(d\omega) = \int_{\Omega} T(\omega K)\, \varpi(d\omega)$$

Autrement dit, T' est égale à la moyenne de T pour les rotations. Nous dirons que A' se déduit de A par isotropisation.

Proposition 4-2-3.- Il n'existe pas d'autre EFA stationnaire p.s. convexe que les EFA p.s. égaux à $\emptyset$ ou à E (c'est-à-dire vérifiant $P(\{A = \emptyset\} \cup \{A = E\}) = 1$).

En effet, si A est un EFA stationnaire p.s. convexe, l'EFA A' déduit de A par isotropisation est stationnaire, isotrope et p.s. convexe. Par suite, la fonctionnelle T' associée à A' vérifie les conditions du Théorème 4-1-1 (énoncé b/). Comme W_d est la seule fonctionnelle de Minkowski bornée sur $C(\mathcal{K})$, on a nécessairement $T' = C^{ste}$ sur $C(\mathcal{K})$, donc aussi $T(\rho B) = C^{ste}$ quel que soit $\rho > 0$ (B est la boule unité de E). On en déduit immédiatement que A est vide ou égal à E p.s.

Enfin, de la formule (4-1-11), on déduit sans difficulté l'énoncé suivant :

Proposition 4-2-4.- Si A est un EFA isotrope et p.s. convexe, on a pour tout compact $K \in C(\mathcal{K})$:

$$E[V(A \oplus K)] = \frac{1}{b_d} \sum_{k=0}^{d} \binom{d}{k} \; E[W_k(A)] \; W_{d-k}(K)$$

En particulier, dans l'espace à deux dimensions, la norme N est identique au périmètre, et on trouve :

$$E[V(A \oplus K)] = E[V(A)] + \frac{1}{2\pi} \; N(K) \; E[N(A)] + V(K)$$

De même, dans l'espace à trois dimensions, en désignant par F la surface et par N la norme, on trouve :

$$E[V(A \oplus K)] = E[V(A)] + \frac{1}{4\pi} \; E[F(A)] \; N(K) + \frac{1}{4\pi} E[N(A)] \; F(K) + V(K)$$

4-3 LES GRANULOMETRIES LINEAIRES.

Soit K un compact convexe dans $E = \mathbb{R}^d$. Pour tout $h \in E$, nous désignerons par $g_K(h)$ le volume de l'intersection $K \cap K_h$ de K et de son translaté par h. Si 1_K désigne l'indicatrice de K, on a donc :

$$g_K(h) = \mu_d(K \cap K_h) = \int_E 1_K(x) \; 1_K(x-h)dx \tag{4-3-1}$$

Les relations suivantes se démontrent immédiatement :

$$\begin{cases} g_K(o) = V(K) = \mu_d(K) \\ 0 \leq g_K(h) \leq g_K(o) \qquad (h \in E) \\ \int_E g_K(h)dh = (V(K))^2 \end{cases} \tag{4-3-2}$$

L'application $(K,h) \to g_K(h)$ est <u>continue</u> sur $C(\mathcal{K}') \times E$. En effet, cette application est s.c.s. (car la translation $h \to K_h$ est continue, l'intersection $(K,h) \to K \cap K_h$ s.c.s. et la mesure de Lebesgue s.c.s. sur $\mathcal{K}$). Pour montrer qu'elle est s.c.i., on remarque que l'on a $g_K(h) = \mu_d(\mathring{K} \cap \mathring{K}_h)$, puisque $K \cap K_h$ est convexe et admet $\mathring{K} \cap \mathring{K}_h$ comme intérieur. Or l'application $K \to \mathring{K}$ est continue sur $C(\mathcal{K})$ (lemme 3-5-1), l'intersection est continue sur $\mathcal{G}$ et la mesure de Lebesgue est s.c.i. sur $\mathcal{G}$. Il en résulte bien que $(K,h) \to g_K(h)$ est s.c.i.

Le compact K étant maintenant supposé fixe, nous écrirons g au lieu de g_K . Il sera commode de travailler en coordonnées polaires : Si S_0 désigne la sphère unité de E, tout $h \in E$ différent de 0 est caractérisé par un couple (r,u) où $r = |h|$ est un réel positif et $u \in S_0$ est la direction du vecteur h. Nous écrirons $g(r;u)$ au lieu de $g(ru)$. D'après ce qui précède, pour $u \in S_0$ fixé, $g(\cdot\ ;\ u)$ est une fonction continue sur R_+. En fait, cette fonction possède des propriétés de dérivabilité, que nous allons examiner. Pour cela, nous désignerons par :

$$\gamma(r;u) = \mu_{d-1}(\Pi_{u^\perp}(K \cap K_{ru}))$$

le (d-1)-volume du contour apparent de l'intersection $K \cap K_{ru}$ en projection sur l'hyperplan perpendiculaire à la direction u du vecteur de translation ru.

A $u \in S_0$ fixé, $\gamma(r;u)$ est continue à gauche en tout $r > 0$. En effet, $r_n \uparrow r$ entraîne $K \cap K_{r_n u} \downarrow K \cap K_{ru}$ (puisque l'intersection est s.c.s. et $\Pi_{u^\perp}(K \cap K_{r_n u}) \downarrow \Pi_{u^\perp}(K \cap K_{ru})$ d'après le lemme 3-5-2. On a donc $\gamma(r_n;u) \downarrow \gamma(r;u)$ d'après la continuité monotone séquentielle.

Mais, de même, $\gamma(r;u)$ est continue à droite en tout $r \geq 0$ tel que $g(r;u)$ ne soit pas nul. En effet, $\mathring{K} \cap \mathring{K}_{ru}$ n'étant pas vide admet une projection dans $u^\perp$ égale à l'intérieur de $\Pi_{u^\perp}(K \cap K_{ru})$'(considéré comme sous-ensemble de l'espace euclidien $u^\perp$ à d-1 dimensions). On en déduit que $\gamma(r;u)$ est s.c.i. en r, et la continuité à droite.

Pour $r > 0$, et ε tel que $r > \varepsilon > 0$, les inégalités évidentes :

$$\varepsilon\ \gamma(r-\varepsilon;u) \geq g(r-\varepsilon;u) - g(r;u) \geq \varepsilon\ \gamma(r;u)$$

entraînent alors (puisque γ est continu à gauche) que la fonction g admet elle-même une dérivée à gauche égale à $\gamma(r;u)$. De même, les inégalités :

$$\varepsilon\, \gamma(r;u) \geq g(r;u) - g(r+\varepsilon)u) \geq \varepsilon\, \gamma(r+\varepsilon;u)$$

montrent que $g(r;u)$ admet une dérivée à droite égale à $\gamma(r;u)$ en tout r tel que $g(r;u)$ soit strictement positif. En résumé :

<u>Proposition 4-3-1</u>.- Soit $K \in C(\mathcal{K}')$, et $u \in S_0$ un vecteur unitaire de E. Pour tout réel positif $r \geq 0$, on désigne par $g(r,u) = \mu_d(K \cap K_{ru})$ le volume de l'intersection $K \cap K_{ru}$ de K et de son translaté par le vecteur $ru \in E$, et par $\gamma(r;u) = \mu_{d-1}(\Pi_{u^\perp}(K \cap K_{ru}))$ le $(d-1)$-volume de la projection de $K \cap K_{ru}$ sur l'hyperplan $u^\perp$ orthogonal à u. Alors :

a/ - la fonction $r \to g(r;u)$ est non croissante et continue en tout $r \geq 0$, et admet sur l'intervalle ouvert défini par $r > 0$ et $g(r;u) > 0$ une dérivée continue égale à $-\gamma(r;u)$.

b/ - $\gamma(r;u)$ est continue à gauche en tout $r > 0$, et à droite en tout $r \geq 0$ tel que $g(r;u)$ ne soit pas nul. Si K n'est pas d'intérieur vide, $g(r;u)$ admet en $r = 0$ une dérivée à droite égale à $-\gamma(6;u)$ et en tout $r > 0$ une dérivée à gauche égale à $\gamma(r;u)$.

<u>Granulométrie des traversées</u>.- Lorsque le convexe compact K a un intérieur $\mathring{K}$ non vide, la fonction $\gamma(r;u)$ admet une interprétation probabiliste simple. En effet, si nous définissons sur l'hyperplan $u^\perp$ orthogonal à u une probabilité admettant une densité constante $1/\gamma(o,u)$ sur $\Pi_{u^\perp} K$ (et 0 à l'extérieur) la longueur $L(x)$ de l'intersection $K \cap D_x$ de K et de la droite D_x menée par $x \in u^\perp$ parallèlement à u est une variable aléatoire dont la loi est définie par $P(L \geq \ell) = \gamma(\ell;u)/\gamma(o,u) = g_r'(\ell;u)/g_r'(o,u)$. Cette loi est celle d'une <u>"traversée aléatoire" de direction donnée u</u>.

On peut aussi définir la loi d'une traversée aléatoire de direction u aléatoire. Le plus simple, pour cela, est de considérer un réseau poissonien isotrope de droites dans l'espace euclidien E, de se placer conditionnellement dans l'hypothèse où une seule droite D du réseau isotrope rencontre K, et de définir la traversée aléatoire L comme la longueur de l'intersection $K \cap D$. Autrement dit, pour reprendre la terminologie du paragraphe 3-5, L est maintenant la longueur de la sécante aléatoire induite sur le compact K par un réseau poissonien stationnaire et isotrope de droites dans $\mathbb{R}^d$.

D'après les relations (3-5-3), la direction $S \in \mathcal{S}_1$ de cette sécante aléatoire admet la loi :

$$\frac{\gamma(o,u)\ \varpi_1}{\int_{\mathcal{S}_1} \varpi(o,u)\ \varpi_1(du)} = \frac{d\ b_d}{b_{d-1}}\ \frac{\gamma(o,u)\ \varpi_1}{F(K)}$$

(dans cette écriture, on a identifié u, vecteur unité de $\mathbb{R}^d$, à l' élément de $\mathcal{S}_1$ parallèle à u : cela est tout-à-fait loisible du fait que la fonction $u \to \gamma(o,u)$ est symétrique, i.e. $\gamma(o,u) = \gamma(o, -u)$). De même, conditionnellement lorsque la direction u de la sécante aléatoire D est fixée, le pied de D dans l'orthogonal $u^{\perp} \in \mathcal{S}_{d-1}$ est uniformément distribué dans $\Pi_{u^\perp} K$, c'est-à-dire admet la loi $1_{\Pi_{u^\perp} K}\ \mu_{d-1}(dx)/\mu_{d-1}(\Pi_{u^\perp} K)$. A u fixé, on a donc $P_u(L \geq \ell) = \gamma(\ell, u)/\gamma(o,u)$, et la probabilité a priori correspondante est ainsi :

(4-3-3) $$P(L \geq \ell) = \frac{d\ b_d}{b_{d-1}}\ \frac{1}{F(K)} \int_{\mathcal{S}_1} \gamma(\ell, u)\ \varpi_1(du)$$

La relation (4-3-3) permet de calculer facilement l'espérance $E(L) = \int_0^\infty P(L \geq \ell) d\ell$ de la traversée aléatoire L. D'après la proposition 4-3-1, en effet, on a $\gamma(\ell\,; u) = -g'_\ell(\ell, u)$, donc aussi $\int_0^\infty \gamma(\ell, u) d\ell = g(o,u) = V(K)$, volume du compact K. Par suite on peut écrire :

(4-3-4) $$E(L) = \frac{d\ b_d}{b_{d-1}}\ \frac{V(K)}{F(K)}$$

Considérons, d'autre part, la troisième relation (4-3-2), que l'on peut écrire

$$(V(K))^2 = d\ b_d \int_{\mathcal{S}_1} \varpi_1(du) \int_0^\infty r^{d-1}\ g(r; u) dr$$

En effectuant une intégration par partie, compte tenu de la proposition 4-3-1, on trouve

$$\int_0^\infty r^{d-1}\ g(r; u) dr = (1/d) \int_0^\infty r^d\ \gamma(r,u) dr$$

En substituant ce résultat dans l'expression de l'intégrale $\int_0^\infty \ell^d\ P(L \geq \ell) d\ell = (1/(d+1))\ E(L^{d+1})$ obtenue à partir de (4-3-3), on trouve ainsi :

$$E(L^{d+1}) = \frac{d(d+1)}{b_{d-1}}\ \frac{(V(K))^2}{F(K)}$$

4-4 LE CONE CONVEXE $\mathcal{R} = C_0(\mathcal{K})$.

Désignons par $C_0(\mathcal{K})$ le sous-espace fermé de $C(\mathcal{K})$ constitué des compacts convexes contenant l'origine 0, et par S_0 la sphère unité dans l'espace euclidien $E = \mathbb{R}^d$. Pour $K \in C_0(\mathcal{K})$ fixé, on peut associer à chaque $u \in S_0$ la distance à l'origine $r_K(u)$ de l'hyperplan d'appui de K admettant u comme normale positive. Inversement, le convexe K lui-même peut être défini comme l'intersection $\bigcap_{u \in S_0} \{x : \langle x,u\rangle \leq r_K(u)\}$ des demi-espaces fermés associés à ces hyperplans d'appui. Nous dirons que la fonction $r_K(.)$ sur S_0 est la podaire de $K \in C_0(\mathcal{K})$ et que l'application $K \to r_K$ définie sur $C_0(\mathcal{K})$ est l'application podaire. Pour chaque $K \in C_0(\mathcal{K})$, la podaire r_K est une fonction continue sur S_0. Nous désignerons par $\mathcal{R}$ l'image de $C_0(\mathcal{K})$ dans l'espace $\mathcal{C}(S_0)$ des fonctions continues sur S_0 par cette application podaire. En fait, l'application podaire est un homéomorphisme de $C_0(\mathcal{K})$ sur $\mathcal{R}$ muni de la topologie de la convergence uniforme. En effet, si εB est la boule de centre 0 et de rayon $\varepsilon > 0$, $\sup_{u \in S_0} |r_K(u) - r_{K'}(u)| \leq \varepsilon$ équivaut à $K \subset K' \oplus \varepsilon B$ et $K' \subset K \oplus \varepsilon B$, donc à $\rho(K, K') \leq \varepsilon$, en désignant par ρ la distance de Hausdorff sur $C_0(\mathcal{K})$.

D'autre part, les relations immédiates :

$$r_{K \oplus K'} = r_K + r_{K'} \quad ; \quad r_{\alpha K} = \alpha\, r_K \ (\alpha \geq 0) \quad ; \quad K \subset K' \Leftrightarrow r_K \leq r_{K'}$$

montrent que l'application podaire est aussi un isomorphisme de $C_0(\mathcal{K})$ muni de l'addition de Minkowski (pour laquelle il est un demi-groupe), des homothéties positives et de la relation d'ordre $\subset$ sur l'espace $\mathcal{R}$ muni de l'addition usuelle, de la multiplication par les constantes positives et de la relation d'ordre habituelle $\leq$. Ainsi, $C_0(\mathcal{K})$ est identifiable à un cone convexe $\mathcal{R}$ fermé dans $\mathcal{C}(S_0)$ et admettant une base compacte.

Indiquons quelques propriétés du cone convexe $\mathcal{R}$.

Proposition 4-4-1.- Le cone $\mathcal{R}$ est stable pour l'opération Sup. Si K_i, $i \in I$ est une famille de compacts de $C_0(\mathcal{K})$ contenus dans un compact fixe, les podaires r_{K_i} sont uniformément bornées et $\sup \{r_{K_i}, i \in I\}$ est la podaire de l'enveloppe convexe fermée $C(\overline{\bigcup_{i \in I} K_i})$ de la famille K_i, $i \in I$.

Si K et $K' \in C_0(\mathcal{K})$ admettent les podaires r_K, $r_{K'} \in \mathcal{R}$, il est immédiat que l'on a $r_{K \cup K'} = \sup (r_K, r_{K'})$. Si une famille K_i, $i \in I$ est bornée dans $C_0(\mathcal{K})$, la famille $K_J = C(\bigcup_{i \in J} K_i)$ où J parcourt l'ensemble des parties finies de I converge dans $C_0(\mathcal{K})$ vers $K_0 = C(\overline{\bigcup_{i \in I} K_i})$, d'après le corollaire 3 du Théorème 1-2-2, et la continuité dans $\mathcal{K}$ de l'enveloppe convexe (Proposition 1-5-4). La famille r_J des podaires des K_J converge donc uniformément vers la podaire r_K de K_o, d'après l'homéomorphisme $K \to r_K$, et comme r_J est la famille croissante $r_J = \text{Sup}\ \{r_{K_i},\ i \in J\}$, on a bien $r_K = \text{Sup}\ \{r_{K_i},\ i \in I\}$.

On peut préciser la proposition 4-4-1. Si u_1 et u_2 sont deux vecteurs unitaires, on désignera par $< u_1, u_2 >$ leur produit scalaire et par $< u_1, u_2 >_+$ l'expression égale a $< u_1, u_2 >$ pour $< u_1, u_2 > \geq 0$ et à 0 sinon. Pour $u_o \in S_o$, la fonction $u \to < u, u_o >_+$ sur S_o est manifestement la podaire du segment $\{\lambda\ u_o,\ o \leq \lambda \leq 1\} \in C_o(\mathcal{K})$. Si λ_i, $i \in I$ est une famille bornée de réels ≥ 0, la fonction r sur S_o définie par $r(u) = \text{Sup}\ \{\lambda_i < u, u_i >_+\ ,\ i \in I\}$ est donc dans $\mathcal{R}$. Inversement, tout compact convexe K étant égal à l'enveloppe convexe fermée de ses points extrémaux, toute podaire admet une représentation de cette forme. On peut même supposer la famille I dénombrable, en choisissant la famille (λ_i, u_i) de telle manière que l'ensemble $\{\lambda_i\ u_i,\ i \in I\}$ constitue une partie dénombrable dense dans la frontière de K. D'où le :

<u>COROLLAIRE 1</u> - Une fonction r sur S_o est dans $\mathcal{R}$ si et seulement si elle admet une représentation de la forme $r(u) = \text{Sup}\ \{\lambda_i < u, u_i >_+,\ i \in I\}$ pour une famille (λ_i, u_i), $i \in I$ que l'on peut toujours supposer dénombrable dans $\mathbb{R}_+ \times S_o$.

<u>COROLLAIRE 2</u> - Une fonction r sur S_o est dans $\mathcal{R}$ si et seulement si l'ensemble $F = \{x : |x|r(x/|x|) \leq 1\}$ est un voisinage convexe et fermé de 0 dans $E = \mathbb{R}^d$.

En effet, d'après le corollaire 1, $r \in \mathcal{R}$ équivaut à $r(u) = \text{Sup}\ \{\lambda_i < u, u_i >_+\ ,\ i \in I\}$ pour une famille (λ_i, u_i) dans $R_+ \times S_o$ vérifiant $\text{Sup}\ \lambda_i < \infty$. Mais cette condition équivaut à $F = \bigcap_{i \in I} \{x : < x, u_i >_+ \leq 1/\lambda_i\}$ avec $\text{Inf}\ (1/\lambda_i) > 0$, et elle est donc réalisée si et seulement si F est un voisinage convexe et fermé de l'origine.

On notera que le fermé F est compact si et seulement si r est strictement positive sur S_o , c'est-à-dire si et seulement si 0 est un point intérieur pour le compact $K \in C_o(\mathcal{K})$ dont r est la podaire.

<u>On vient de voir que le cone $\mathcal{R}$ est stable pour l'opération Sup. Par contre, il n'est pas stable pour l'opération Inf.</u> Pour caractériser l'opération Inf dans $\mathcal{R}$, posons d'abord un lemme.

<u>LEMME 4-4-1</u>.- Soient K et K' deux compacts convexes. On a $K \cup K' \in C(\mathcal{K})$ si et seulement si $K \oplus K' = (K \cup K') \oplus (K \cap K')$.

L'inclusion $(K \cup K') \oplus (K \cap K') \subset K \oplus K'$ étant vraie pour des ensembles quelconques, montrons que $K \cup K' \in C(\mathcal{K})$ entraîne $K \oplus K' \subset (K \cup K') \oplus (K \cap K')$. En effet, soient $x \in K$ et $x' \in K'$. D'après la proposition 4-2-1, il existe $\lambda \in [0,1]$ tel que $\lambda x + (1-\lambda)x' \in K \cap K'$. On a donc $x + x' = y + z$ avec $y = \lambda x + (1-\lambda)x' \in K \cap K'$ et $z = (1-\lambda)x + \lambda x' \in K \cup K'$, puisque cette réunion est convexe. L'inclusion annoncée en résulte.

Inversement, supposons $(K \cup K') \oplus (K \cap K') = K \oplus K'$, et soient $x \in K$ et $x' \in K'$. On a $x + x' = y + z$ pour un $y \in K \cup K'$ et un $z \in K \cap K'$, donc $(x+x')/2 = (y+z)/2 \in K \cup K'$. On en déduit aussitôt la convexité de $K \cup K'$.

Proposition 4-4-2.- Soient K et $K' \in C_0(\mathcal{K})$, r_K et $r_{K'}$ leurs podaires. La podaire de $K \cap K'$ est $r_{K\cap K'} = \mathrm{Sup}\ \{ r : r \in \mathcal{R},\ r \leq \mathrm{Inf}\ (r_K, r_{K'})\}$. On a $\mathrm{Inf}\ (r_K, r_{K'}) \in \mathcal{R}$ si et seulement si $K \cup K'$ est convexe, et dans ce cas $r_{K\cap K'} = \mathrm{Inf}\ (r_K, r_{K'})$.

La première partie de l'énoncé résulte de la proposition 4-4-1, puisque $K \cap K'$ est le plus grand compact convexe contenu dans K et dans K'. L'égalité $r_K + r_{K'} = \mathrm{Sup}\ (r_K, r_{K'}) + \mathrm{Inf}\ (r_K, r_{K'})$ montre ensuite que l'on a $K \oplus K' = (K \cup K') \oplus (K \cap K')$ si et seulement si $r_{K\cap K'} = \mathrm{Inf}\ (r_K, r_{K'})$, et il suffit pour cela, d'après la première partie de l'énoncé, que l'on ait $\mathrm{Inf}\ (r_K, r_{K'}) \in \mathcal{R}$. Compte tenu du lemme 4-4-1, le second énoncé en résulte.

COROLLAIRE - Toute fonctionnelle L sur $C_0(\mathcal{K})$ vérifiant $L(K \oplus K') = L(K) + L(K')$ est C-additive sur $C_0(\mathcal{K})$.

Cela résulte de la définition 3-5-1 et du lemme 4-4-1.

Au cone convexe $\mathcal{R} \subset \mathcal{C}(S_0)$ est associée la relation d'ordre $\succcurlyeq$ dans $\mathcal{C}(S_0)$ définie par $f \succcurlyeq f'$ si $f - f' \in \mathcal{R}$. En identifiant $\mathcal{R}$ à $C_0(\mathcal{K})$, nous pouvons munir $C_0(\mathcal{K})$ de la relation d'ordre induite par $\succcurlyeq$. On voit que $A \succcurlyeq B$ dans $C_0(\mathcal{K})$ équivaut à $r_A - r_B \in \mathcal{R}$, donc, à l'existence d'un compact $C \in C_0(\mathcal{K})$ tel que $A = B \oplus C$. Autrement dit, dans la terminologie du paragraphe 1-5, on a $A \succcurlyeq B$ si et seulement si A est ouvert selon B.

On peut alors se demander si le cone $C_0(\mathcal{K})$ est réticulé pour son ordre propre. D'après un théorème dû à Choquet [10], le cone convexe $\mathcal{R}$ à base compacte dans $\mathcal{C}(S_0)$ sera réticulé si et seulement si il constitue un simplexe. On peut voir qu'il n'en est rien en remarquant qu'un hexagone régulier dans $\mathbb{R}^2$ est somme de Minkowski de deux triangles équilatéraux ou, aussi bien, de trois segments de droite. Or les triangles et les segments de droites sont des éléments extrémaux dans $\mathcal{R}$.

On voit donc que la représentation de l'hexagone comme barycentre d'une mesure portée par des éléments extrémaux n'est pas unique, et $\mathcal{R}$ n'est pas un simplexe. En résumé :

Proposition 4-4-3.- L'ordre propre du cone $C_0(\mathcal{K})$ est défini par $A \succcurlyeq B$ si A est ouvert selon B ($A, B \in C_0(\mathcal{K})$). Mais $C_0(\mathcal{K})$ n'est pas réticulé pour son ordre propre.

Dans le prochain paragraphe, nous définirons un cone $\mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}$, associé à une classe de compacts convexes appelée classe de Steiner, et qui lui sera un simplexe, donc réticulé pour son ordre propre. En particulier, pour $d = 2$, la classe de Steiner coïncidera avec celle des compacts convexes symétriques par rapport à l'origine.

L'espace vectoriel de Minkowski.- Nous désignerons par $\mathcal{M}(S_0)$, ou espace vectoriel de Minkowski, le sous-vectoriel de $\mathcal{C}(S_0)$ engendré par le cone $\mathcal{R}$, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions φ de la forme $\varphi = f_1 - f_2$ avec $f_1, f_2 \in \mathcal{R}$. Cet espace est dense dans $\mathcal{C}(S_0)$, mais ne coïncide pas avec lui. Cela résulte du lemme suivant, où $\mathcal{C}_2(S_0)$ désigne l'ensemble des fonctions deux fois continument différentiables sur la sphère unité S_0.

LEMME 4-4-2 - Pour tout $f \in \mathcal{C}_2(S_0)$, on peut trouver une constante $C < \infty$ telle que $f + C \in \mathcal{R}$, et, en particulier $\mathcal{C}_2(S_0)$ est contenu dans $\mathcal{M}(S_0)$.

Les constantes $C \geq 0$ sont dans $\mathcal{R}$, comme podaires des boules de centre O, de sorte qu'il suffit d'établir le premier énoncé. Soit $f \in \mathcal{C}_2(S_0)$, ∇f sa différentielle seconde continue sur S_0, et γ le tenseur métrique sur la sphère unité. Le tenseur $\gamma f + \nabla f$ étant continu sur l'espace compact S_0, on peut trouver une constante $C \geq 0$ telle que le tenseur $\gamma(f+C) + \nabla f$ soit de type positif sur S_0. Or on sait qu'une fonction $\varphi \in \mathcal{C}_2(S_0)$ est la podaire d'un convexe si et seulement si $\gamma\varphi + \nabla\varphi$ est de type positif. On a donc bien $f + C \in \mathcal{R}$.

Prolongement d'une fonctionnelle positivement linéaire sur $\mathcal{R}$.- Soit L une fonctionnelle définie sur $C_0(\mathcal{K})$ ou sur $\mathcal{R}$. On dira que L est croissante si $r \leq r'$ dans $\mathcal{R}$ entraîne $L(r) \leq L(r')$, et qu'elle est positivement linéaire si $L(\alpha r + \beta r') = \alpha L(r) + \beta L(r')$, α, β réels ≥ 0, $r, r' \in \mathcal{R}$. Si L est croissante et positivement linéaire sur $\mathcal{R}$, on a donc $L(o) = 0$ et $L(r) \geq 0$ sur $\mathcal{R}$. La proposition suivante montre qu'une telle fonctionnelle peut être identifiée à une mesure de Radon ≥ 0 sur S_0 .

Proposition 4-4-4.- Toute fonctionnelle L croissante et positivement linéaire sur le cone $\mathcal{R}$ admet un et un seul prolongement linéaire et continu sur $\mathcal{C}(S_0)$. Autrement dit, il existe une mesure unique $\lambda \geq 0$ sur S_o telle que l'on ait :

$$L(r) = \int_{S_o} r(u)\ \lambda(du) \qquad (r \in \mathcal{R})$$

En effet, soit $f \in \mathcal{C}_2(S_o)$ et $C \geq 0$ telle que $f + C \in \mathcal{R}$ (lemme 4-4-2). Comme L est linéaire, $L(f+C) - L(C)$ ne dépend pas du choix de cette constante C. On peut donc définir sur $\mathcal{C}_2(S_o)$ une fonctionnelle L_2 en posant $L_2(f) = L(f+C) - L(C)$, et L_2 coïncide avec L sur $\mathcal{R} \cap \mathcal{C}_2(S_o)$. L_2 est additive, vérifie $L_2(\alpha f) = \alpha\ L_2(f)$ pour $\alpha \geq 0$, $L_2(-f) = -L_2(f)$, donc est linéaire sur $\mathcal{C}_2(S_o)$. De plus, L_2 est croissante : si $f \leq f'$ dans $\mathcal{C}_2(S_o)$, soit $C < \infty$ telle que $C + f$ et $C + f'$ soient dans $\mathcal{R}$. On a alors $L_2(f+C) \leq L_2(f'+C)$, d'où $L_2(f) \leq L_2(f')$ et L est croissante. D'après une proposition de N. Bourbaki ([7], Ch. III, § 1, Prop. 9), L_2 se prolonge par une mesure $\lambda \geq 0$ sur $\mathcal{C}(S_o)$, d'ailleurs unique puisque $\mathcal{C}_2(S_o)$ est dense dans $\mathcal{C}(S_o)$, et la restriction à $\mathcal{R}$ de ce prolongement coïncide manifestement avec L.

4-5 LE CONE RETICULE $\mathcal{R}_1$ ET LES COMPACTS DE STEINER.

Dans ce paragraphe, nous considérerons uniquement la classe $\mathcal{R}_s$ des compacts convexes non vides symétriques par rapport à l'origine. On a évidemment $\mathcal{R}_s \subset \mathcal{R}$, et $\mathcal{R}_s$ est encore un cone convexe à base compacte. Les podaires $r \in \mathcal{R}_s$ sont les fonctions paires de $\mathcal{R}$, c'est-à-dire vérifiant $r(-u) = r(u)$, $u \in S_o$. L'espace quotient de S_o par la relation d'équivalence $u \equiv u'$ si $u = u'$ ou $u = -u'$ est identifiable à l'espace $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{F}$ constitué des sous-espaces de dimension 1 dans $E = \mathbb{R}^d$, et les fonctions ou les mesures paires sur S_o s'identifient de même aux fonctions et aux mesures sur $\mathcal{S}_1$. Nous considérerons donc dans ce qui suit $\mathcal{R}_s$ comme un cone convexe à base compacte dans l'espace $\mathcal{C}(\mathcal{S}_1)$ des fonctions continues sur $\mathcal{S}_1$ (muni de la convergence uniforme).

Pour $u_o \in S_o$, le segment $\{x = \lambda u_o,\ |\lambda| \leq 1\}$ est compact, convexe et symétrique, de sorte que sa podaire $u \to |\langle u, u_o \rangle|$ est un élément pair de $\mathcal{R}$. Si $L_o \in \mathcal{S}_1$ est le sous-espace $\{\lambda u_o,\ \lambda \in \mathbb{R}\} \in \mathcal{S}_1$, l'élément de $\mathcal{R}_s$ associé à ce segment est la fonction $L \to |L, L_o|$ sur $\mathcal{S}_1$, avec la notation $|L, L_o|$ définie par la relation (3-5-4). Nous désignerons par $\mathcal{R}_1$ la classe des fonctions φ sur $\mathcal{S}_1$ admettant une représentation de la forme :

$$\varphi(L) = \int_{\mathcal{S}_1} |L, L'|\ G(dL') \tag{4-5-1}$$

pour une mesure $G \geq 0$ sur $\mathcal{S}_1$. Si G est une mesure à support fini dans $\mathcal{S}_1$, la fonction φ est la podaire de la somme de Minkowski d'un nombre fini de segments de droite. On vérifie immédiatement que la convergence vague $G_n \to G$ d'une suite de mesures positives sur $\mathcal{S}_1$ entraîne la convergence uniforme des fonctions φ_n associées aux G_n vers la fonction φ associée à G. Comme toute mesure sur $\mathcal{S}_1$ est limite vague de mesures à supports finis, on en déduit $\mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}_s$. Nous dirons que les compacts convexes symétriques dont la podaire est dans $\mathcal{R}_1$ constituent la classe de Steiner. D'après la définition (4-5-1), $\mathcal{R}_1$ est un cone convexe dans $\mathcal{R}_s \subset \mathcal{C}(\mathcal{S}_1)$. Ce cone est fermé dans $\mathcal{C}(\mathcal{S}_1)$, et y admet une base compacte. En effet, si une suite $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{R}_s$ converge uniformément vers une limite $\varphi \in \mathcal{C}(\mathcal{S}_1)$, la suite des mesures $G_n \geq 0$ est bornée, d'après la relation $\int \varphi_n(L)\,\varpi(L)\,dL = C\int G_n(dL')$ (ϖ est la mesure sur $\mathcal{S}_1$ invariante par rotation, et C est la constante $\int |L,L'|\,\varpi(dL)$ indépendante de L'). Il existe donc une suite partielle $\{G_{n_k}\}$ admettant une limite vague G, et la suite $\{\varphi_{n_k}\}$ converge uniformément vers la limite φ' définie par $\varphi'(L) = \int |L,L'|\;G(dL')$. Par suite $\varphi = \varphi' \in \mathcal{R}_s$. Dans ce qui suit nous nous proposons de montrer que ce cone $\mathcal{R}_s$ est un simplexe, ou, ce qui revient au même d'après un théorème de Choquet [10] qu'il est réticulé pour son ordre propre, ou encore que la représentation intégrale (4-5-1) est unique, ou enfin que l'application $G \to \varphi$ de l'espace des mesures positives sur $\mathcal{S}_1$ sur le cone $\mathcal{R}_s$ est un homéomorphisme.

Notons auparavant que pour $d = 2$, la classe de Steiner est identique à la classe des compacts convexes symétriques, comme on le voit en remarquant que tout polygone symétrique est somme de Minkowski d'un nombre fini de segments de droites, et que la classe des polygones symétriques est dense dans $\mathcal{R}_s$. Par contre, l'inclusion $\mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}_s$ est stricte pour $d \geq 3$. En effet, si T est un triangle équilatéral contenu dans une variété de dimension 2 ne passant pas par l'origine O et si T' est le symétrique de T par rapport à O l'enveloppe convexe $C(T \cup T')$ est dans $\mathcal{R}_s$ mais non dans $\mathcal{R}_1$, car toute face de dimension 2 d'un polyèdre de $\mathcal{R}_s$ est un parallèlogramme.

Le Théorème d'Unicité.- Pour établir le théorème d'unicité, il nous faudra utiliser des résultats classiques d'analyse harmonique. On rappelle qu'une fonction K réelle et symétrique sur $\mathbb{R}^d$ est dite de type positif conditionnel d'ordre 0 si l'on a $\int \lambda(dx)\; K(x-y)\; \lambda(dy)$ pour toute mesure réelle λ à support fini dans $\mathbb{R}^d$ vérifiant $\int \lambda(dx) = 0$. Nous utiliserons les deux résultats classiques suivants :

Proposition 4-5-1.- a/ - Une fonction K réelle et symétrique sur $\mathbb{R}^d$ est de type positif conditionnel d'ordre 0 si et seulement si la fonction $C = \exp(tK)$ est de type positif pour tout $t > 0$.

b/ - Une fonction K réelle, symétrique et continue sur $\mathbb{R}^d$ est de type positif conditionnel si et seulement si elle admet une représentation de la forme :

$$K(h) = \int \frac{\cos (2\pi < u,h >) - 1}{4\pi^2 u^2} \chi(du) + a + Q(h)$$

où a est une constante arbitraire, Q une forme quadratique positive et χ une mesure positive symétrique sur $\mathbb{R}^d$, nécessairement unique, sans atome à l'origine et vérifiant $\int [1/(1+4\pi^2|u|^2)] \chi(du) < \infty$.

En effet, si exp (tK) est de type positif pour tout $t > 0$, la fonction $K_t = (\exp (tK) -1)/t$ est de type positif conditionnel d'ordre 0, et par suite aussi $K = \lim K_t$ pour $t \downarrow 0$. Inversement, supposons K de type positif conditionnel d'ordre 0. Alors, la fonction σ sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ définie par $\sigma(x,y) = K(x-y) - K(x) - K(y) + K(o)$ vérifie $\int \mu(dx)\ \sigma(x,y)\ \mu(dy) \geq 0$ pour toute mesure μ à support fini. Il existe donc une fonction aléatoire d'ordre 2 $Y : \mathbb{R}^d \to L^2(\Omega,\mathcal{A},P)$ admettant la covariance σ, soit $\sigma(x,y) = < Y(x), Y(y) >$. Donnons-nous une suite $\{Y_n\}$ de FA d'ordre 2 indépendantes admettant la même covariance σ, et désignons par N une variable aléatoire poissonienne d'espérance égale à t et indépendante des Y_n.

Alors l'application $Z : R^d \to L^2(\Omega, \mathcal{A},P)$ définie par $Z(x) = 1$ si $N = 0$ et $Z(x) = \Sigma_1^n Y_i(x)$ si $N = n$ est une FA d'ordre 2 et admet la covariance $< Z(x), Z(y) > = \exp \{ t(\sigma(x,y) -1)\}$. On en déduit que la FA $Y(x)/\| Z(x)\|$ admet elle-même la covariance $\exp \{ t(K(x-y) - K(o)\}$. Par suite la fonction $h \to \exp (t K(h)$ est de type positif, ce qui achève de démontrer a/.

L'énoncé b/ est une conséquence immédiate de a/, compte tenu des théorèmes classiques sur les lois indéfiniment divisibles.

Nous pouvons utiliser ces résultats pour étudier le comportement au voisinage de l'origine d'une covariance réelle C continue sur $\mathbb{R}^d$ (i.e. une fonction réelle de type positif). Plus précisément, supposons qu'il existe un nombre α (avec nécessairement $0 \leq \alpha \leq 2$ comme on sait) tel que la limite $C_o(h) = \lim [(C(uh) - C(o))/a^\alpha]$ existe en tout $h \in \mathbb{R}^d$ pour $a \downarrow 0$. Pour $\lambda > 0$, on a alors évidemment $C_o(\lambda h) = \lambda^\alpha C_o(h)$, de sorte qu'il existe une fonction paire $\varphi \geq 0$ sur la sphère unité S_o telle que l'on ait $C_o(h) = - |h|^\alpha \varphi(h/|h|)$. Nous nous limiterons au cas où la fonction φ est continue sur S_o .Si $\alpha = 2$, on sait que $C_o(h)$ est une forme quadratique ≥ 0, et de même si $\alpha = 0$ on a $C_o(h) = 0$, de sorte que le cas intéressant est celui où l'on a $0 < \alpha < 1$. Le théorème suivant caractérise la classe des fonctions φ admissibles et donne un théorème d'unicité plus général même que celui dont nous avons besoin.

<u>THEOREME 4-5-1</u> - Soit α un nombre réel avec $0 < \alpha < 2$ et φ une fonction continue sur la sphère unité S_o de $\mathbb{R}^d$. Alors les trois conditions suivantes sont équivalentes, et entraînent que

φ est symétrique sur S_o :

a/-Il existe une covariance réelle sur $\mathbb{R}^d$ telle que l'on ait en tout $h \in \mathbb{R}^d$

$$\lim [(C(o) - C(ah))/a^\alpha] = |h|^\alpha \varphi(h/|h|) \text{ pour } a \downarrow 0 .$$

b/-La fonction $h \to -|h|^\alpha \varphi(h/|h|)$ est de type positif conditionnel d'ordre 0 sur $\mathbb{R}^d$.

c/-Il existe sur S_o une mesure symétrique et positive μ nécessairement unique telle que φ admette la représentation :

$$\varphi(s) = \int_{S_o} |< s, s' >|^\alpha \mu(ds')$$

Montrons a/ $\Rightarrow$ b/. Pour a réel > 0, la fonction $K_a(h) = [C(ah) - C(o)]/a^\alpha$ est de type positif conditionnel d'ordre 0. Il en est donc de même de $K(h) = - |h|^\alpha \varphi(h/|h|)$, limite simple de $K_a(h)$ pour $a \downarrow 0$.

L'implication b/ $\Rightarrow$ c/ constitue la partie délicate de la démonstration. Si la fonction $K(h) = - |h|^\alpha \varphi(h/|h|)$ est de type positif conditionnel d'ordre 0, elle admet la représentation

$$K(h) = \int \frac{\cos (2\pi < uh >) - 1}{4 \pi^2 |u|^2} \chi(du) \tag{4-5-2}$$

pour une mesure symétrique $\chi \geq 0$ sans atome à l'origine, <u>nécessairement unique</u> et vérifiant $\int [1/(1+ 4 \pi^2 u^2)] \chi(du) < \infty$. Cela résulte, en effet, de la proposition 4-5-1 et des relations $K(o) = 0$, $\lim K(h)/|h|^2 = 0$ pour $|h| \to \infty$. La relation $K(ah) = a^\alpha K(h)$ $(a \geq 0)$ montre que la mesure χ de la relation (4-5-2) vérifie $\chi(a\, du) = a^{-\alpha} \chi(du)$, à cause de l'unicité de la mesure spectrale de la proposition 4-5-1. Pour tout borélien B de S_o, posons $\tilde{B} = \bigcup \{a B, 0 \leq a \leq 1\}$, et posons $\nu(B) = \chi(\tilde{B})/ \chi(\tilde{S}_o)$. Il est facile de voir que ν se prolonge par une probabilité symétrique ν sur S_o, que nous noterons encore ν. De $\chi(a \tilde{B})/\chi(\tilde{S}_o) = a^{-\alpha} \nu(B)$, on déduit ensuite que ν vérifie la relation :

$$\int f(u) \chi(du) = A \int_{S_o} \nu(d\sigma) \int_0^\infty f(\rho\sigma) \rho^{1-\alpha} d\rho$$

pour toute fonction continue f à support compact dans $\mathbb{R}^d$, et avec $A = (2-\alpha) \chi(\tilde{S}_o)$. Cette relation entraîne aussi <u>l'unicité de la probabilité symétrique ν</u>. On en déduit également la relation :

$$r^\alpha \varphi(s) = A \int_{S_o} \nu(d\sigma) \int_0^\infty \frac{1- \cos (2\pi\rho r < \sigma, s>)}{4\pi^2 \rho^2} \rho^{1-\alpha} d\rho \tag{4-5-3}$$

Mais d'autre part on sait que la fonction $h \to -|h|^\alpha$ sur $\mathbb{R}^1$ est de type positif conditionnel et admet la représentation :

$$|h|^\alpha = B \int_0^\infty \frac{1-\cos 2\pi\rho h}{4\pi^2\rho^2} \rho^{1-\alpha} d\rho$$

avec une constante B convenable, qu'il est inutile d'expliciter. En remplaçant h par $r < \sigma,s >$ et en substituant dans (4-5-3) on obtient la relation suivante, qui est <u>équivalente</u> à (4-5-3) :

$$r^\alpha \varphi(s) = A' r^\alpha \int_0^\infty |< \sigma,s >|^\alpha \nu(d\sigma) \tag{4-5-4}$$

avec une constante A' qu'il est inutile d'expliciter.

Ainsi, la fonction φ admet bien une représentation de la forme annoncée dans l'énoncé c/, avec $\mu = A'\nu$. L'unicité de μ résulte de l'unicité de la probabilité ν (c'est-à-dire, en définitive, de l'unicité de la mesure spectrale χ) de sorte que l'implication b/ $\Rightarrow$ c/ est démontrée.

Inversement, l'implication c/ $\Rightarrow$ b/ résulte de l'équivalence des relations (4-5-3) et (4-5-4). Enfin b/ entraîne c/, comme on le voit en prenant $C(h) = \exp\{-|h|^\alpha \varphi(h/|h|)\}$ et en utilisant l'énoncé a de la proposition 4-5-1.

Compte tenu de l'homéomorphisme entre fonctions continues (resp. mesures) sur $\mathcal{S}_1$ et fonctions continues (resp. mesures) symétriques sur S_0, nous pouvons énoncer :

<u>COROLLAIRE 1</u> - Le cone $\mathcal{R}_\alpha \subset \mathcal{R}_s$, constitué des fonctions φ admettant une représentation de la forme $\varphi(L) = \int_{\mathcal{S}_1} |L, L'|^\alpha G(dL')$, $L \in \mathcal{S}_1$ (avec un α réel tel que $0 < \alpha < 1$) pour une mesure positive G sur $\mathcal{S}_1$ est un <u>simplexe</u> et l'application $G \to \varphi$ est un <u>homéomorphisme</u> de l'espace des mesures positives sur $\mathcal{S}_1$ sur le cone $\mathcal{R}_\alpha$. En particulier, l'espace vectoriel engendré par les fonctions $L \to |L, L'|^\alpha$, $L' \in \mathcal{S}_1$ est dense dans $\mathcal{C}(\mathcal{S}_1)$.

La première partie de l'énoncé découle immédiatement de l'unicité de la mesure μ du théorème 4-5-1. Pour montrer la seconde partie, supposons qu'il existe une mesure μ orthogonale aux fonctions $L \to |L, L'|^\alpha$, et soit $\mu = \mu_+ - \mu_-$ la décomposition de Jordan en deux mesures ≥ 0 μ_+ et μ_-. On a alors $\int \mu_+(dL')|L,L'|^\alpha = \int \mu_-(dL')|L,L'|^\alpha$, donc $\mu = \mu_+ - \mu_- = 0$ d'après l'unicité de la représentation intégrale, ce qui achève la démonstration.

Interprétation géométrique.- Dans le cas $\alpha = 1$, le graphe dans $\mathbb{R}^{d+1}$ d'une fonction de covariance $h \to C(h)$ vérifiant la condition a/ du théorème 4-5-1 admet un cone des tangentes en $h = 0$ dont la base dans l'espace $\mathbb{R}^d$ initial est la frontière de l'ensemble $F = \{x : |x| \varphi(x/|x|) \leq C(o)\}$. D'après le corollaire 2 de la proposition 4-4-1, F est un voisinage convexe fermé et symétrique de 0 dans $\mathbb{R}^d$. Dans le cas $d = 2$, la réciproque est vraie, puisque la classe de Steiner est alors identique à la classe des compacts convexes symétriques. Ainsi :

COROLLAIRE 2 - Soit F un ensemble dans le plan $\mathbb{R}^2$. Il existe une fonction de covariance continue admettant la frontière de F comme base de son cône des tangentes en 0 si et seulement si F est un voisinage fermé convexe et symétrique de 0 dans $\mathbb{R}^2$. Dans $\mathbb{R}^2$, $d > 2$, cette condition doit être remplacée par : il existe un compact de la classe de Steiner dont la podaire φ vérifie : $F = \{x : |x| \varphi(x/|x|) \leq 1\}$. Ou encore : une fonction φ sur la sphère unité est la podaire d'un compact de Steiner si et seulement si la fonction $h \to \exp(-|h|\varphi(h/|h|)$ est une covariance continue dans $\mathbb{R}^d$.

Caractérisation des réseaux de droites ou d'hyperplans poissoniens.- Soit A le réseau poissonnien stationnaire d'hyperplans (resp. de droites) associé selon la formule (3-5-1) à une mesure G positive sur $\mathcal{S}_{d-1}$ (resp. sur $\mathcal{S}_1$). On a vu que A induisait sur toute droite de direction $S \in \mathcal{S}_1$ (resp. sur tout hyperplan de direction $S \in \mathcal{S}_{d-1}$) un processus de Poisson ponctuel de densité

$$\varphi(S) = \int_{\mathcal{S}_{d-1}} |S, \sigma^{\perp}| \, G(d\sigma)$$

(resp. $\int_{\mathcal{S}_1} |S, \sigma^{\perp}| \, G(d\sigma)$). Compte tenu de l'homéomorphisme $S \to S^{\perp}$ de $\mathcal{S}_1$ sur $\mathcal{S}_{d-1}$ et de la relation $|S_1, S_2| = |S_1^{\perp} \; S_2^{\perp}|$, il résulte du corollaire 1 du théorème (4-5-1) que les fonctions de cette forme sont exactement les fonctions $\varphi \in \mathcal{R}_1$, et que le réseau poissonien est univoquement déterminé par la donnée de la fonction $\varphi \in \mathcal{R}_1$ telle que $\varphi(S)$, $S \in \mathcal{S}_1$ (resp. $\varphi(S^{\perp})$, $S \in \mathcal{S}_{d-1}$) soit la densité induite sur les droites de direction S (resp. les hyperplans de direction S). Donnons l'énoncé précis dans le cas des hyperplans poissoniens :

COROLLAIRE 3 - Soit φ une fonction sur $\mathcal{S}_1$, identifiée à la fonction symétrique $u \to \varphi(S)$ sur la sphère unité S_o, S représentant la direction du vecteur unitaire $u \in S_o$. Les quatre conditions suivantes sont équivalentes :

a/ - Il existe un réseau poissonien stationnaire A nécessairement unique d'hyperplans dans $\mathbb{R}^d$ tel que, pour tout $S \in \mathcal{S}_1$, $\varphi(S)$ soit la densité du processus ponctuel induit par A sur les droites de direction S.

b/ - Il existe une mesure $G \geq 0$ sur $\mathcal{S}_1$ nécessairement unique telle que l'on ait

$$\varphi(S) = \int |S,\ S'|\ G(dS') \quad , \quad S \in \mathcal{S}_1$$

c/ - La fonction $K = h \to -|h|\ \varphi(h/|h|)$ est continue et de type positif conditionnel sur $\mathbb{R}^d$.

d/ - La fonction $C = \exp\ (K)$ est une covariance continue dans $\mathbb{R}^d$.

De plus, lorsque l'une de ces conditions est remplie, G est la mesure associée selon la formule (3-5-1) au réseau poissonien A induisant les densités $\varphi(S)$, $S \in \mathcal{S}_1$, et, pour tout $x, y \in \mathbb{R}^d$, $C(x-y)$ est égale a la probabilité pour que les points x et y ne soient séparés par aucun hyperplan du réseau A.

<u>La mesure superficielle</u> G_{d-1}^K .- Avant de poursuivre l'étude de la classe de Steiner, montrons que l'on peut associer à tout $K \in C_o(\mathcal{K})$ une mesure positive G_{d-1}^K nécessairement unique sur $\mathcal{S}_{d-1}$ vérifiant la propriété suivante :

$$\text{(4-5-5)} \qquad \mu_{d-1}\ (\Pi_S\ K) = \int_{\mathcal{S}_{d-1}} |S,\ S'|\ G_{d-1}^K\ (dS') \qquad (S \in \mathcal{S}_{d-1})$$

Nous dirons que G_{d-1}^K est la <u>mesure superficielle associée à K</u>.

L'unicité de G^K résulte du théorème 4-5-1. Pour établir son existence, considérons d'abord le cas où K est un polyèdre. Soient alors $\vec{u}_i \in S_o$ $(i = 1, 2...p)$ les normales positives associées aux (d-1) faces de K, et F_i les (d-1) volumes de ces faces. Posons $F = \frac{1}{2} \sum F_i\ \delta_{u_i}$. F est une mesure positive sur la sphère unité S_o, et son intégrale $\int F(du)$ est égale à d $W_1(K)$, W_1 désignant la fonctionnelle de Minkowski d'indice 1. Cette mesure F vérifie manifestement la relation $\mu_{d-1}(\Pi_{u^\perp} K) = \int |u,\ u'|\ F(du')$. Si $K \in C_o(\mathcal{K})$ n'est pas un polyèdre, on peut trouver une suite de polyèdres $\{K_n\}$ convergeant vers K dans $C_o(\mathcal{K})$ et associer à chaque K_n la mesure F_n possédant la propriété ci-dessus. Comme la fonctionnelle W_1 est continue sur $C(\mathcal{K})$, la suite $\{F_n\}$ est bornée et on peut en extraire une suite partielle $\{F_{n_k}\}$ convergeant vers une mesure positive F sur $\mathcal{S}_1$. Compte tenu des lemmes 3-5-2 et 3-5-3, la fonction $K \to \mu_{d-1}\ (\Pi_{u^\perp} K)$ est continue, de sorte que la mesure F vérifie encore la relation $\mu_{d-1}\ (\Pi_{u^\perp} K) = \int |u,\ u'|\ F(du')$.

Désignons alors par $G = G_{d-1}^K$ la mesure définie sur $\mathcal{S}_{d-1}$ par la relation $\int \varphi(S)\ G(dS) = \int f(u)\ F(du)$, $\varphi \in \mathcal{C}(\mathcal{S}_{d-1})$ et f désignant la fonction symétrique définie sur $\mathcal{S}_1$ par $f(u) = \varphi(\sigma^\perp)$, σ désignant la direction du vecteur unitaire u. Cette mesure G vérifie bien la relation (4-5-5).

En géométrie intégrale, [20], on démontre l'existence de fonctions continues W_k, $k = 1,2..d-1$, sur l'espace produit $C(\mathcal{K}) \times C(\mathcal{K})$ vérifiant la relation suivante pour $K, K' \in C(\mathcal{K})$ et $\rho \geq 0$

(4-5-6) $$\mu_d(K \oplus \rho K') = \mu_d(K) + \Sigma_1^{d-1} \rho^k W_k(K, K') + \rho^d \mu_d(K')$$

Ces fonctions sont C-additives et invariantes par translation relativement à chacun des deux arguments K et K'. Nous reviendrons ultérieurement sur leurs propriétés, et pour l'instant nous nous intéresserons uniquement à la fonctionnelle W_1 définie par

$$W_1(K, K') = \lim_{\rho \downarrow 0} \frac{\mu_d (K \oplus \rho K') - \mu_d(K)}{\rho}$$

Pour $K \in C_0(\mathcal{K})$ fixé, l'application $K' \to W_1(K, K')$ est continue sur $C_0(\mathcal{K})$, croissante, C-additive et additive pour l'addition de Minkowski. Elle est manifestement aussi homogène de degré 1 et par suite positivement linéaire. Il existe donc, d'après la proposition 4-4-4, une mesure de Radon λ_K sur la sphère unité telle que $W_1(K, K') = \int_{S_0} \lambda_K(du)\, r_{K'}(u)$. Cette mesure λ est d'ailleurs manifestement symétrique sur S_0, de sorte qu'il existe une mesure ≥ 0 H_K sur $\mathcal{S}_{d-1}$ vérifiant $W_1(K, K') = \int_{\mathcal{S}_{d-1}} \mu_1 (\Pi_{S^\perp} K')\, H_K(dS)$. En prenant pour K' un segment de longueur unité et de direction $S_0^\perp$, $S_0 \in \mathcal{S}_{d-1}$, on trouve $W_1(K, K') = \mu_{d-1} (\Pi_{S_0} K) = \int_{\mathcal{S}_{d-1}} |S, S_0|\, H_K(dS)$.

Par suite, d'après le théorème d'unicité, on a $H_K = G_{d-1}^K$, et nous pouvons énoncer :

<u>Proposition 4-5-2</u>.- La mesure superficielle G_{d-1}^K associée à $K \in C(\mathcal{K}_0)$ selon la relation (4-5-5) vérifie pour tout $K' \in C_0(\mathcal{K})$:

$$W_1(K, K') = \lim_{\rho \downarrow 0} \frac{\mu_d (K \oplus \rho K') - \mu_d(K)}{\rho} = \int_{\mathcal{S}_{d-1}} \mu_1 (\Pi_{S^\perp} K')\ G_{d-1}^K (dS)$$

<u>La formule de Steiner généralisée</u>.- On peut se demander dans quelle mesure les fonctionnelles $W_k(K, K')$ de la relation (4-5-6) admettent pour $k > 1$ des représentations analogues à celle que donne la proposition 4-5-2, pour des mesures G_{d-k}^K convenables sur $\mathcal{S}_{d-k}$. En fait, il n'en est rien, du moins pour $d > 2$, même si on se limite au cas où K est un convexe compact symétrique.

<u>Proposition 4-5-3</u>.- Soit K un compact convexe symétrique. Il existe pour chaque k $(0 < k \leq d-1)$ une mesure positive G_{d-k}^K sur $\mathcal{S}_{d-k}$ telle que l'on ait pour tout $K' \in C_0(\mathcal{K})$ et $\rho > 0$:

(4-5-7) $$\mu_d (K \oplus \rho K') = \mu_d(K) + \Sigma_1^{d-1} \rho^k \int_{\mathcal{S}_{d-k}} \mu_k (\Pi_{S^\perp} K')\ G_{d-k}^K (dS) + \rho^d \mu_d(K')$$

si et seulement si K appartient à la classe $\mathcal{R}_1$ de Steiner.

Montrons d'abord que cette condition est nécessaire. Il est clair, d'après la relation (4-5-6), que les fonctionnelles W_k sur $C_o(\mathcal{K}) \times C_o(\mathcal{K})$ vérifient la relation $W_k(K,K') = W_{d-k}(K',K)$. D'après la proposition 4-5-2, on a donc :

$$W_{d-1}(K, K') = W_1(K',K) = \int_{\mathcal{S}_{d-1}} \mu_1(\Pi_{S^\perp} K)\, G_{d-1}^{K'}(dS) = \int_{\mathcal{S}_1} \mu_{d-1}(\Pi_{S^\perp} K')\, G_1^K (dS)$$

Prenons pour K' un convexe contenu dans $S_o \in \mathcal{S}_{d-1}$ et de (d-1) volume unité. On a alors $G_{d-1}^{K'} = \delta_{S_o}$ et $\mu_{d-1}(\Pi_{S^\perp} K') = |S_o\ S^\perp|$. Par suite, la podaire $r_K(u) = \frac{1}{2}\mu_1(\Pi_{u^\perp} K)$ du compact convexe symétrique vérifie $r_K(\underset{o}{u}) = \frac{1}{2}\int |S_o,\ S^\perp|\ G_1^K(dS)$ pour un vecteur unitaire u_o de direction S_o. Autrement dit, on a $r_K \in \mathcal{R}_1$, et K est un compact de Steiner.

Inversement, considérons un compact $A = \bigoplus_{i=1}^{n} \ell_i\, L_i$ ($\ell_i \geq 0$; $L_i = \{\lambda\, u_i\ ,\ |\lambda| \leq \frac{1}{2}\}$ pour des vecteurs unitaires $u_1, \dots u_n$, et montrons que A vérifie la relation (4-5-7). Nous noterons $(u_1, u_2 \dots u_n)$ le n volume du parallèlépipède $u_1 \oplus u_2 \oplus \dots \oplus u_n$. Partons de la relation :

$$\mu_k(\Pi_\sigma(K \oplus \ell L)) = \mu_k(\Pi_\sigma K) + \ell|u,\sigma|\ \mu_{k-1}(\Pi_{u^\perp \cap \sigma} K) \tag{4-5-8}$$

valable pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_k$ et tout vecteur unitaire u (identifié à sa direction dans $\mathcal{S}_1$ avec $L = \{\lambda u,\ |\lambda| \leq 1/2\}$. Pour $\sigma = E$, cette relation se réduit à

$$\mu_d(K \oplus \ell\, u) = \mu_d(K) + \ell\ \mu_{d-1}(\Pi_{u^\perp} K)$$

On en déduit que le compact ℓL vérifie la relation (4-5-7) avec $G_1^{\ell L} = \ell\, \delta_{S(u)}$ (S(u) direction de u dans $\mathcal{S}_1$) et $G_2 = G_3 = \dots = 0$. Supposons par récurrence que la relation (4-5-7) soit vraie pour tout $A = \bigoplus_{i=1}^{n} \ell_i\, L_i$ somme de Minkowski d'au plus n segments de droite avec les mesures définies comme suit

a/ - $G_1 = \Sigma\ \ell_i\, \delta_{S_i}$ $\qquad$ ($S_i \in \mathcal{S}_1$, direction de u_i)

b/ - pour $k > 1$, G_k est l'image de la mesure

$$\frac{1}{k!}(u_1, \dots u_k)\ G_1(d\, S_1)\ G_1(d\, S_2) \dots G_1(d\, S_k)$$

sur l'espace produit $(\mathcal{S}_1)^k$ par l'application $(S_1, S_2, \dots S_k) \rightarrow S_1 \oplus S_2 \oplus \dots \oplus S_k$ de $(\mathcal{S}_1)^k$ dans

$\mathcal{S}_k$ (cette application est définie presque partout sur $(\mathcal{S}_1)^k$, puisque $S_1 \oplus \ldots \oplus S_k$ est de dimension inférieure à k si et seulement si le volume $(u_1,\ldots u_k)$ est nul).

Montrons alors que $A \oplus L$ ($L = \{\lambda u,\ |\lambda| \leq \frac{1}{2}\}$ pour un $u \in S_0$ et $\ell > 0$) vérifie encore la relation (4-5-7) avec des mesures construites selon les deux règles a/ et b/ – ce qui achèvera la démonstration en ce qui concerne les sommes de Minkowski finies de segments de droite. Pour cela, partons de l'hypothèse de récurrence, soit :

$$(4\text{-}5\text{-}9)\quad \left\{\begin{aligned} \mu_d(A \oplus K) &= V(K) + \sum_i \ell_i\, \mu_{d-1}(\Pi_{u_i^\perp} K) + \ldots \\ &+ \sum_{i_1<\ldots<i_k} \ell_{i_1} \ell_{i_2} \ldots \ell_{i_k} (u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots u_{i_k})\, \mu_{d-k}(\Pi_{u_{i_1}^\perp \cap \cdots \cap u_{i_k}^\perp} K) + \ldots \\ &+ \sum_{i_1<\ldots<i_d} \ell_{i_1} \ldots \ell_{i_d} (u_{i_1}, \ldots u_{i_d}) \end{aligned}\right.$$

et remplaçons K par $K \oplus \ell L$. D'après la relation (4-5-8), on trouve

$$\mu_{d-k}(\Pi_{\sigma_{i_1,\ldots i_k}}(K \oplus \ell L)) = \mu_{d-k}(\Pi_{\sigma_{i_1,\ldots i_k}} K) + \ell\, |u,\ \sigma_{i_1,\ldots i_k}|\ \mu_{d-k-1}(\Pi_{u^\perp \cap \sigma_{i_1,\ldots i_k}} K)$$

avec $\sigma_{i_1,\ldots i_k} = u_{i_1}^\perp \cap \ldots \cap u_{i_k}^\perp$. Or $|u,\ \sigma_{i_1,\ldots i_k}| = (u_{i_1},\ldots u_{i_k}, u)$ et $u^\perp \cap \sigma_{i_1,\ldots i_k} = u_{i_1}^\perp \cap \ldots \cap u_{i_k}^\perp \cap u^\perp$. Par conséquent, en substituant ces expressions dans (4-5-9), on retrouve la formule (4-5-9) écrite dans le cas n+1 avec $u_{n+1} = u$ et $\ell_{n+1} = \ell$.

La proposition est ainsi démontrée dans le cas où $A \in \mathcal{R}_1$ est une somme finie de segments de droites. Si maintenant A est quelconque dans $\mathcal{R}_1$, on choisira une suite $\{A_n\}$ convergeant vers A dans $\mathcal{R}_1$ et telle que chaque A_n soit somme finie de segments de droites. De cette suite, on extrait une suite partielle $\{A_{n_p}\}$ telle que chacune des suites $\{G_k^{A_{n_p}}\}$ $(o < k < d)$ admette une limite G_k^A (cela est possible, car ces suites sont bornées en vertu de la relation $\int G_{d-k}^{A_n}(dS) = C_k\, W_k(A_n)$, pour une constante C_k convenable et la fonctionnelle W_k de Minkowski). La relation (4-5-7) passe donc à la limite, et cela achève la démonstration.

De cette proposition découlent les corollaires suivants utiles pour les applications :

COROLLAIRE 1 - Pour $A \in \mathcal{R}_1$, p entier $(0 < p < d)$, $S \in \mathcal{S}_p$ et $K \in C_o(\mathcal{K})$, on a :

$$\mu_{d-p}(\Pi_{S^\perp}(A \oplus K)) = \mu_{d-p}(\Pi_{S^\perp} K) + \sum_{k=1}^{d-p} \int_{\mathcal{S}_1} |\sigma, S^\perp| \mu_{d-k-p}(\Pi_{S^\perp \cap \sigma^\perp} K)\, G_k^A(d\sigma)$$

et, en particulier :

$$\mu_{d-p}(\Pi_{S^\perp} A) = \int_{\mathcal{S}_{d-p}} |\sigma, S^\perp|\, G_{d-p}^A(d\sigma) \qquad (4\text{-}5\text{-}10)$$

Ces relations se démontrent de la même manière que la proposition elle-même. En utilisant la symétrie $W_k(K, K') = W_{d-k}(K, K')$ de la fonctionnelle mixte de la relation (4-5-6), on obtient le :

COROLLAIRE 2 - Pour K et K' dans $\mathcal{R}_1$ et $0 < k < d$, on a :

$$W_k(K, K') = \int_{\mathcal{S}_{d-k}} \mu_k(\Pi_{S^\perp} K')\, G_{d-k}^K(dS) = \int_{\mathcal{S}_k} \mu_{d-k}(\Pi_{\sigma^\perp} K)\, G_k^{K'}(d\sigma)$$

Pour la boule unité $B \in \mathcal{R}_1$, les G_k^B sont proportionnelles aux mesures invariantes ϖ_k, avec un coefficient que l'on détermine en identifiant les relations (4-5-9) et (4-1-8). D'où :

COROLLAIRE 3 - La boule unité B est dans $\mathcal{R}_1$, et $G_k^B = \binom{d}{k}(b_d/b_{d-k})\, \varpi_k$, ϖ_k désignant la probabilité invariante sur $\mathcal{S}_k$.

Pour $A \in \mathcal{R}_1$, la relation du corollaire 2 écrite avec K = A et K' = B donne $b_k \int G_{d-k}^A(dS) = \binom{d}{k} W_k(A)$, d'après l'expression de G_{d-k}^B. D'où :

COROLLAIRE 4 - Pour $A \in \mathcal{R}_1$, la fonctionnelle de Minkowski d'indice k vérifie :

$$W_k(A) = [b_k / \tbinom{d}{k}] \int_{\mathcal{S}_{d-k}} G_{d-k}^A(dS)$$

Enfin, en écrivant les relations du corollaire 1 avec A = B et K = ρB, et en procédant par identification avec la formule se Steiner, on obtient le :

COROLLAIRE 5 - Pour $S \in \mathcal{S}_p$ et $0 < k \leq p$, la moyenne de rotation de la fonction $\sigma \to |\sigma, S|$ sur $\mathcal{S}_k$ est constante sur $\mathcal{S}_p$ et vaut :

$$\int_{\mathcal{S}_k} |\sigma,\ S|\ \varpi_k(d\sigma) = \frac{\binom{p}{k}\ b_p\ b_{d-k}}{\binom{d}{k}\ b_d\ b_{p-k}}$$

Pour $k = p$, cette constante se réduit à $(1/\binom{d}{p})\ b_p\ b_{d-p}/b_d$.

REMARQUE - D'après la relation (4-5-10) et le théorème d'unicité, la mesure $\overset{A}{G}_{d-1}$ est identique à la mesure de surface définie par la relation (4-5-5). Elle existe non seulement pour $A \in \mathcal{R}_1$, mais même pour tout compact $K \in C_o(\mathcal{K})$. La mesure linéaire G_1^A, au contraire, n'existe que si et seulement si le compact symétrique A est dans $\mathcal{R}_1$, puisque $1/2\ \mu_1(\Pi_S\ A)$, $S \in \mathcal{S}_1$ est la podaire de A. D'après le théorème d'unicité, cette mesure G_1^A est unique. On peut conjecturer que le théorème d'unicité s'applique encore si $1 < k < d-1$, autrement dit que les fonctions de la forme $S \to \int_{\mathcal{S}_k} |S,\ \sigma|\ G(d\sigma)$ où G est une mesure positive sur $\mathcal{S}_k$ constituent un simplexe dans $\mathcal{C}(\mathcal{S}_k)$, ou encore que les fonctions $S \to |S,\ S_o|$, $S_o \in \mathcal{S}_k$ forment une partie totale dans $\mathcal{C}(\mathcal{S}_k)$. Nous n'aborderons pas ce point.

D'autre part, la mesure $\overset{A}{G}_{d-1}$ existe pour tout $A \in C_o(\mathcal{K})$, tandis que G_1^A n'est définie que sur la classe de Steiner. Il serait intéressant de préciser si, pour chaque k compris entre 0 et d, il existe une classe de compacts strictement comprise entre $\mathcal{R}_1$ et $C_o(\mathcal{K})$ sur laquelle la mesure G_k^A soit définissable.

Enfin, au cours même de la démonstration, on a vu que $\overset{A}{G}_k$ est la mesure sur $\mathcal{S}_k$ dé uite de: la mesure

$$\frac{1}{k!}\ (u_1,\ u_2,\dots,u_k)\ \overset{A}{G}_1\ (d\ S_1)\ \overset{A}{G}_1\ (d\ S_2)\dots\ \overset{A}{G}_1\ (d\ S_k)$$

sur l'espace produit $(\mathcal{S}_1)^k$ par l'application $(S_1,\ S_2,\dots S_k) \to S_1 \oplus S_2 \oplus \dots \oplus S_k$ de presque tout $(\mathcal{S}_1)^k$ dans $\mathcal{S}_k$ (on désigne par $(u_1,\ u_2,\dots u_k)$ le k volume du parallèlépipède construit sur des vecteurs unitaires $u_i \in S_i$, $i = 1,\ 2,\dots k$). L'application $G_1 \to G_k$ de l'espace des mesures ≥ 0 sur $\mathcal{S}_1$ dans l'espace des mesures $\geq$ sur $\mathcal{S}_k$ n'est ni injective ni surjective. En effet, pour $S \in \mathcal{S}_k$, δ_S est l'image de $G_1 = 1/(u_1,\dots u_k)\ \Sigma\ \delta_{L_i}$ si les u_i sont des vecteurs unitaires orthogonaux dans S et L_i leurs directions. De même si S et $S' \in \mathcal{S}_k$, la mesure $\delta_S + \delta_{S'}$ n'est l'image d'aucune mesure G_1. On peut donc se demander quelle condition doit vérifier une mesure G_k sur $\mathcal{S}_k$ pour être la mesure d'ordre k associée à un compact de Steiner A. Nous n'aborderons pas ces problèmes.

Loi des Variables Aléatoires $|S, S_p|$.-

On rappelle que pour $S \in \mathcal{S}_k$ et $S_p \in \mathcal{S}_p$ $(0 < k \leq p < d)$, la notation $|S, S_p|$ désigne la valeur absolue du déterminant de la restriction à S du projecteur Π_{S_p} du sous-espace S_p, de sorte que l'on a $0 \leq |S, S_p| \leq 1$. Nous nous proposons de trouver la loi de la variable aléatoire $S \to |S, S_o|$ sur $(\mathcal{S}_k, \varpi_k)$, ϖ_k désignant la probabilité sur $\mathcal{S}_k$ invariante par rotation. Pour abréger les notations, nous écrirons $X \overset{\mathcal{L}}{\equiv} Y$ si les deux VA X et Y sont équivalentes en loi, i.e., admettent la même loi de probabilité, et nous désignerons par $Z_{\alpha,\beta}$ une VA admettant la loi beta de paramètres (α,β) positifs définie par la densité :

$$f_{\alpha\beta}(z) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\ \Gamma(\beta)} \ z^{\alpha-1}\ (1-z)^{\beta-1} \qquad (0 \leq z \leq 1)$$

ou, aussi bien, par ses moments :

$$\text{(4-5-11)} \qquad E(Z_{\alpha,\beta}^{\lambda}) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)} \ \frac{\Gamma(\alpha+\lambda)}{\Gamma(\alpha+\beta+\lambda)}$$

Examinons d'abord le cas $k = 1$. Nous désignerons par Y_p la variable aléatoire $|S, S_p|$ à une équivalence près. En raison de l'invariance de la loi ϖ_1 pour les rotations, la loi de Y_p ne dépend pas du choix de $S_p \in \mathcal{S}_p$. Ou encore, si S et S_p sont deux variables indépendantes sur $\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_p$, avec la loi $\varpi_1 \oplus P_p$ où P_p est une probabilité quelconque sur $\mathcal{S}_p$, la V.A. $|S, S_p|$ est indépendante de S_p.

Cherchons la loi de Y_p. Pour cela désignons par $X = (X_1, \ldots X_d)$ un vecteur aléatoire sur $\mathbb{R}^d$ admettant la loi de Gauss de densité

$$g_d(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2}\right)$$

et par $X' = (X_1, \ldots X_p)$ et $X'' = (X_{p+1}, \ldots X_d)$ ses projections sur les sous-espaces définis par les p premiers et les d-p derniers axes de coordonnées. X' et X" sont indépendantes, et admettent les lois g_p et g_{d-p} respectivement. D'autre part, la variable $|X'|/|X|$ est équivalente à Y_p et indépendante de $|X|$. De même, on a $|X|^2 = |X'|^2 + |X''|^2$, les deux variables $|X'|^2$ et $|X''|^2$ sont indépendantes, et admettent les lois gamma de densité $(2^{-p/2}/\Gamma(p/2))\ r^{p/2-1} \exp(-r/2)$ et $[2^{-(d-p)/2}\ \Gamma(d-p)/2]\ r^{(d-p)/2\ -1} \exp(-r/2)$ respectivement. On en déduit sans peine que $|X'|^2/|X|^2$ obéit à la loi beta de paramètres $(\frac{p}{2}, \frac{d-p}{2})$, soit :

$$Y_p \overset{\mathcal{L}}{=} \left(Z_{\frac{p}{2}}, \frac{d-p}{2}\right)^{1/2}$$

ou encore :

$$(4\text{-}5\text{-}12) \qquad E(Y_p^{\lambda}) = \frac{\Gamma(d/2)}{\Gamma(p/2)} \frac{\Gamma((\lambda+p)/2)}{\Gamma((\lambda+d)/2)}$$

Examinons maintenant la variable $S \to |S, S_p|$ sur $(\mathcal{S}_k, \varpi_k)$ où S_p est un élément de $\mathcal{S}_p$, $p \geq k > 0$. Ici encore, la loi de $|S, S_o|$ est indépendante du choix de S_o. Il est clair que la loi ϖ_k sur $\mathcal{S}_k$ est l'image de la loi $\varpi_1(d L_1)\, \varpi_1(d L_2) \ldots \varpi_1(d L_k)$ sur $(\mathcal{S}_1)^k$ par l'application $(L_1, L_2, \ldots L_k) \to L_1 \oplus L_2 \oplus \ldots \oplus L_k$. Si donc nous désignons par $u_1, u_2, \ldots u_k$ k vecteurs unitaires indépendants obéissant à la même loi ϖ invariante sur la sphère unité, la VA $|S, S_p|$ est équivalente au rapport $(\Pi_{S_p} u_1, \ldots \Pi_{S_p} u_k)/(u_1, \ldots u_k)$ des k-volumes des parallèlépipèdes construits sur les vecteurs $\Pi_{S_p} u_i$ et u_i respectivement. Or, on peut écrire :

$$(u_1, \ldots u_k) = (u_1)\ |\Pi_{u_1^{\perp}} u_2| \ldots |\Pi_{u_1^{\perp} \cap \ldots \cap u_{k-1}^{\perp}} u_k|$$

$$(\Pi_{S_p} u_1, \ldots \Pi_{S_p} u_k) = |\Pi_{S_p} u_1|\ |\Pi_{S_p \cap u_1^{\perp}} u_2| \ldots |\Pi_{S_p \cap u_1^{\perp} \cap \ldots u_{k-1}^{\perp}} u_k|$$

D'après la remarque faite plus haut, l'indépendance et l'isotropie des vecteurs unitaires u_i entraîne l'indépendance des différents facteurs qui figurent dans ces produits. On en déduit donc les équivalences :

$$\begin{cases} (u_1, \ldots u_k) \overset{\mathcal{L}}{=} \prod_{j=d-k+1}^{d} Y_j \\ \\ (\Pi_{S_p} u_1, \ldots \Pi_{S_p} u_k) \overset{\mathcal{L}}{=} \prod_{p-k+1}^{p} Y_j \end{cases}$$

où les Y_j désignent des VA indépendantes obéissant aux lois définies en (4-5-11) (conventionnellement Y_d est la VA p.s. égale à 1).

D'un autre côté, la VA $(u_1, \ldots u_k)$ est invariante par rotation, donc indépendante de $S = L_1 \oplus \ldots \oplus L_k$, et, au contraire, le rapport $(\Pi_{S_p} u_1, \ldots \Pi_{S_p} u_k)/(u_1, \ldots u_k)$ ne dépend que de S. Ces deux VA sont donc indépendantes. On a ainsi l'équivalence en loi suivante, où les différents facteurs désignent des VA indépendantes :

$$|S, S_p| \prod_{d-k+1}^{d} Y_j \overset{\mathcal{L}}{=} \prod_{p-k+1}^{p} Y'_j$$

Autrement dit, pour tout $\lambda \geq 0$, on a :

(4-5-13) $$E(|S,\ S_p|^\lambda) = \prod_{p-k+1}^{p} \frac{E(Y_j^{\lambda})}{E(Y_{j+d-p}^{\lambda})}$$

Mais, d'après (4-5-11) et (4-5-12), on a également

$$\frac{E(Y_j^{\lambda})}{E(Y_{j+d-p}^{\lambda})} = \frac{\Gamma(\frac{j+d-p}{2})}{\Gamma(j/2)} \quad \frac{\Gamma(\frac{j+\lambda}{2})}{\Gamma(\frac{j+d-p+\lambda}{2})} = E(Z_{\frac{j}{2},\ \frac{d-p}{2}}^{\lambda/2})$$

Nous pouvons donc interpréter la relation (4-5-13) par l'équivalence en loi :

$$|S,\ S_p| \overset{\mathcal{L}}{=} \prod_{p-k+1}^{p} \sqrt{Z_{\frac{j}{2},\ \frac{d-p}{2}}}$$

Ainsi $|S,\ S_p|^2$ est <u>équivalente au produit de k variables aléatoires indépendantes</u> $Z_{\frac{j}{2},\ \frac{d-p}{2}}$ <u>dont les lois respectives sont les lois beta de paramètres</u> $(j/2,\ (d-p)/2)$. En termes de moments, on trouve explicitement :

(4-5-14) $$E(|S,\ S_p|^\lambda) = \prod_{j=p-k+1}^{p} \frac{\Gamma(\frac{j+d-p}{2})}{\Gamma(j/2)} \quad \frac{\Gamma(\frac{j+\lambda}{2})}{\Gamma(\frac{j+d-p+\lambda}{2})} \qquad (\lambda \geq 0)$$

4-6 CAS DU PLAN EUCLIDIEN.

A titre d'exemple, nous allons étudier le cas particulier du plan $\mathbb{R}^2$, dans lequel les propriétés des cones convexes $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_s$ sont particulièrement faciles à mettre en évidence. Nous identifierons le cercle unité S_o à l'intervalle $[o, 2\pi]$ et désignerons par α l'angle polaire d'un point de S_o. Les fonctions continues sur S_o sont, aussi bien, les fonctions continues périodiques et de période 2π sur $\mathbb{R}^1$.

Montrons d'abord qu'à tout $K \in C_o(\mathcal{K})$ est associée une mesure positive unique s_K sur le cercle unité, que nous appellerons <u>mesure périmétrique de K</u>. Soit $r_K \in \mathcal{R}$ la podaire de K. Si $r_K \in \mathcal{C}_2(S_o)$, c'ést-à-dire admet une dérivée seconde continue, on sait que la frontière de K est l'enveloppe des droites d'équation $x \cos \alpha + y \sin \alpha = r_K(\alpha)$, $\alpha \in S_o$, et que le rayon de courbure au point de contact de chacune de ces droites est $ds/d\alpha = r_K(\alpha) + r_K''(\alpha)$. En particulier, une fonction $r \in \mathcal{C}_2(S_o)$ est dans $\mathcal{R}$ si et seulement si on a $r \geq 0$ et $r + r'' \geq 0$. La mesure périmétrique est alors, par définition, la mesure s_K de densité $r_K + r_K''$.

Toute fonction $f \in \mathcal{C}(S_o)$ est limite uniforme pour $t \downarrow 0$ de ses régularisées $f_t = f * g_t$, où $*$ désigne le produit de convolution sur S_o et g_t la fonction

$$\alpha \to g_t(\alpha) = (1/\sqrt{2\pi t}) \sum_{-\infty}^{+\infty} \exp \{-(\alpha-2k\pi)^2/2ct\}$$

qui est la densité du mouvement brownien et vérifie la relation des demi-groupes $g_t * g_{t'} = g_{t+t'}$. Si $r \in \mathcal{R}$, ses régularisées r_t, $t > 0$ sont dans $\mathcal{C}_2(S_o) \cap \mathcal{R}$, et vérifient $r_t + r_t'' \geq 0$. Pour tout $f \in \mathcal{C}_2(S_o)$, $f \geq 0$ on a donc $< r_t, f+f'' > \geq 0$ (la notation $< f,g >$ représente le produit scalaire $\int f(\alpha)\, g(\alpha)\, d\alpha$). Si $t \downarrow 0$, la convergence uniforme $r_t \to r$ donne $< r, f+f'' > \geq 0$. Inversement, si une fonction positive $r \in \mathcal{C}(S_o)$ vérifie $< r, f+f'' > \geq 0$ pour $f \geq 0$ dans $\mathcal{C}_2(S_o)$, ses régularisées sont positives et vérifient $< r_t, f+f'' > = < r_t + r_t'', f > \geq 0$, d'où $r_t + r_t'' \geq 0$, et $r_t \in \mathcal{R} \cap \mathcal{C}_2(S_o)$. On en déduit $r \in \mathcal{R}$, à cause de la convergence uniforme $r_t \to r$. D'autre part, les mesures périmétriques s_t associées aux podaires r_t vérifient $\int s_t(d\alpha) = 2\mathcal{L}(K_t)$, où $2\mathcal{L}$ est la fonctionnelle continue associée au <u>périmètre</u> et K_t le compact de podaire r_t. Pour $t \downarrow 0$, on a donc

$2\mathcal{L}(K_t) \to 2\mathcal{L}(K)$, périmètre du compact K de podaire r, et par suite $\operatorname{Sup}_t \int s_t(d\alpha) < \infty$. Il existe donc une suite $t_n \downarrow 0$ telle que la suite s_{t_n} converge vaguement vers une mesure positive s. La relation $< r_t, f + f'' > = \int s_t(d\alpha)\, f(\alpha)$ valable pour tout $f \in \mathcal{C}_2(S_o)$ montre que l'on a encore $\int s(d\alpha)\, f(\alpha)$ $= < r, f+f'' >$, d'où l'unicité de cette limite s, et la convergence vague $\lim_{t\to 0} s_t = s$. C'est cette limite s que nous appellerons mesure périmétrique du compact K associé à la podaire r. Le même argument que ci-dessus montre que l'application $r \to s$ de $\mathcal{R}$ dans l'espace des mesures positives sur S_o est continu. Ainsi :

<u>Proposition 4-6-1</u>.- Une fonction r continue et positive sur le cercle unité est dans $\mathcal{R}$ si et seulement si on a $< r, f+f'' > \geq 0$ pour toute fonction $f \geq 0$ dans $\mathcal{C}_2(S_o)$. A tout $K \in C_o(\mathcal{K})$ de podaire $r_K \in \mathcal{R}$ est alors associée la mesure positive unique s_K définie par $\int f(d)\, s(d\alpha) =$ $< r, f+f'' >$, $f \in \mathcal{C}_2(S_o)$, appelée mesure périmétrique de K. L'intégrale $\int s_K(d\alpha)$ est égale au périmètre $2\mathcal{L}(K)$ de K, et l'application $K \to s_K$ de $C_o(\mathcal{K})$ dans l'espace $\mathcal{M}^+$ des mesures positives dans S_o est continu (pour la topologie vague).

La relation $\int f(\alpha)\, s(d\alpha) = < r, f+f'' >$ entraîne, en particulier

$$\int \cos\alpha\; s(d\alpha) = \int \sin\alpha\; s(d\alpha) = 0 \tag{4-6-1}$$

Inversement, donnons-nous une mesure $s \geq 0$ sur S_o vérifiant les conditions (4-6-1), et montrons qu'elle est la mesure périmétrique d'un $K \in C_o(\mathcal{K})$. Examinons d'abord le cas où s est à support fini, soit $s = \Sigma_1^k\, \ell_j\, \delta_{\alpha_j}$, $\ell_j > 0$, $0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_k \leq 0$. Posons $x_p = \Sigma_1^p\, \ell_j\, u_j$, où u_j est le vecteur unitaire de direction $\alpha_j + \pi/2$. La suite x_p est périodique, d'après (4-6-1), et en particulier $x_k = 0$, et l'enveloppe convexe de $\{x_1, \ldots x_k\}$ est un compact convexe K contenant 0, soit $K \in C_o(\mathcal{K})$. On vérifie ensuite de manière élémentaire que s est bien la mesure périmétrique associée à K. Les points x_j étant extrémaux pour K, K est contenu dans la boule de rayon $\Sigma_1^k\, \ell_j =$ $\int s(d\alpha) = 2\mathcal{L}(K)$.

Si s est maintenant une mesure ≥ 0 quelconque vérifiant (4-6-1), elle est limite vague d'une suite $\{s_n\}$ de mesures à supports finies vérifiant (4-6-1). Il existe donc une suite $\{K_n\}$ dans $C_o(\mathcal{K})$ dont les s_n sont les mesures périmétriques, et cette suite est contenue dans la boule de rayon $\operatorname{Sup}_n \int s_n(d\alpha) < \infty$, d'après la remarque précédente. Par suite, il existe une suite partielle $\{K_{n_k}\}$ admettant une limite $K_o \in C_o(\mathcal{K})$. D'après la continuité de l'application $K \to s_K$ (Proposition 4-6-1, s est la mesure périmétrique de $K \in C_o(\mathcal{K})$.

Désignons par $\mathcal{M}_\tau^+$ l'ensemble (fermé dans $\mathcal{M}^+$) des mesures positives vérifiant (4-6-1), c'est-à-dire comme on vient de le voir, l'ensemble des mesures périmétriques. L'application $K \to s_K$ de $C_o(\mathcal{K})$ sur $\mathcal{M}_\tau^+$ n'est pas injective. En effet, d'après la relation $\int s(d\alpha)\ f(\alpha) = < r, f+f" >$ les coefficients de Fourier $s_p = \int s(d\alpha)\ \exp(-i\alpha)$ et $a_p = \int r(\alpha)\ \exp(-i\alpha)d\alpha$ de la mesure périmétrique et de la podaire d'un compact sont liés par $s_p = a_p(1-p^2)$. D'où $a_p = s_p/(1-p^2)$ pour $p \neq \pm 1$. Pour $p = \pm 1$, on a $s_p = 0$ d'après (4-6-1) et a_1 et a_{-1} sont indéterminés. Or, deux compacts K et K' dans $C_o(\mathcal{K})$ se déduisent l'un de l'autre par translation si et seulement si leurs podaires r et r' ont mêmes coefficients de Fourier pour $p \neq \pm 1$, soit $r - r' = a \cos \alpha + b \sin \alpha$ pour des constantes a et b convenables. Désignons par τ la relation d'équivalence dans $C(\mathcal{K})$ définie par $K\ \tau\ K'$ si $K = K'$ à une translation près. L'image inverse de s dans $C_o(\mathcal{K})$ est donc la restriction à $C_o(\mathcal{K})$ d'une classe d'équivalence de translation. Autrement dit, les mesures périmétriques sont invariantes par translation. On peut prolonger à $C(\mathcal{K}')$ entier l'application $K \to s_K$ en désignant par s_K la mesure périmétrique de l'un quelconque des translatés de K contenus dans $C_o(\mathcal{K})$.

On désignera par $C_\tau(\mathcal{K}')$ l'espace quotient $C(\mathcal{K}')/\tau$. L'application $\tilde{K} \to s_K$ (où K est l'un quelconque des éléments de $C_o(\mathcal{K}) \cap \tilde{K}$) est ainsi une bijection de C_τ sur $\mathcal{M}_\tau^+$. Montrons que c'est en fait un homéomorphisme pour la topologie quotient de C_τ. On a déjà vu la continuité de $K \to s_K$. Inversement, soit $\{s_n\}$ une suite convergeant vaguement vers $\{s\}$ dans $\mathcal{M}_\tau^+$, et $K_n \in C_o(\mathcal{K})$ un compact dont la mesure périmétrique est s_n. La suite $\{K_n\}$ étant contenue dans la boule de rayon $\operatorname{Sup}_n \int s_n(d\alpha) < \infty$, il existe une suite partielle $\{K_{n_k}\}$ convergeant dans $C_o(\mathcal{K})$ vers une limite K. Mais s est alors la mesure périmétrique de K d'après la continuité de $K \to s_K$. Par conséquent, K est unique à une équivalence près, et la suite $\{\tilde{K}_n\}$ des classes des K_n converge vers la classe $\tilde{K}$ de K dans C_τ pour la topologie quotient. Ainsi :

<u>Proposition 4-6-2</u>.- Soit $\mathcal{M}_\tau^+$ l'espace des mesures ≥ 0 sur S_o vérifiant $\int \exp(i\alpha)\ s(d\alpha) = 0$, et $C_\tau(\mathcal{K}')$ l'espace quotient $C(\mathcal{K}')/\tau$, où τ est l'équivalence de translation. Alors, les compacts K d'une classe $\tilde{K} \in C_\tau(\mathcal{K})$ ont la même mesure périmétrique $s_{K'}$, et l'application $\tilde{K} \to s_K$ est un homéomorphisme de $C_\tau(K')$ muni de la topologie quotient sur $\mathcal{M}_\tau$ muni de la topologie vague.

Il est clair que <u>l'espace de Hilbert $L^2(S_o)$</u> (où le produit scalaire est $< f,g >$) induit sur $\mathcal{R}$ une topologie plus faible que celle de $\mathcal{R}$, qui est définie par la convergence uniforme. En fait, ces deux topologies coïncident sur le cone $\mathcal{R}$. En effet, si $r \in \mathcal{R}$ est la podaire de $K \in C_o(\mathcal{K})$, posons $\gamma = \operatorname{Sup}\{r(\alpha),\ \alpha \in [0,2\pi]\}$. Alors K contient au moins un segment de longueur γ dont la podaire est $\gamma \cos(\alpha-\alpha_o)_+$ pour un certain α_o. On a donc $\int r^2(\alpha)d\alpha \geq \pi\ \gamma^2/2$. D'où l'équivalence des deux topologies sur $\mathcal{R}$. En particulier, le cone $\mathcal{R}$ est fortement fermé dans $L^2(S_o)$.

Si $r \in \mathcal{R} \cap \mathcal{C}_2(S_o)$, le <u>volume</u> $V(r)$ du compact dont la podaire est r et la mesure périmétrique $s(d\alpha) = (r + r'')d\alpha$ est donnée par :

$$V(r) = \frac{1}{2} \int_o^{2\pi} (r^2 - r'^2)d\alpha = \frac{1}{2} \int_o^{2\pi} r(\alpha)\ s(d\alpha)$$

Soit alors r quelconque dans $\mathcal{R}$, et $\{r_n\}$ une suite dans $\mathcal{R} \cap \mathcal{C}_2(S_o)$ convergeant uniformément vers r. Comme les mesures périmétriques s_n associées aux compacts de podaires r_n convergent vaguement vers s, et que le volume est continu sur $\mathcal{R}$, on en déduit encore :

$$V(r) = \frac{1}{2} \int_o^{2\pi} r(\alpha)\ s(d\alpha)$$

Désignons par a_p et $a_p(n)$ les coefficients de Fourier de r et r_n. La relation

$$V(r_n) = \frac{1}{2} \int_o^{2\pi} (r_n^2 - r'^2_n)d\alpha \geq 0$$

montre que r'_n est dans $L^2(S_o)$ et la convergence $V(r_n) \to V(r)$ donne $\sup\limits_n \|r'_n\| < \infty$. Comme les coefficients de Fourier de r_n vérifient $\lim\limits_n i\ p\ a_p(n) = i\ p\ a_p$, la suite $\{r'_n\}$ converge faiblement dans $L^2(S_o)$ vers la limite $r' = \sum i\ p\ a_p \exp\ (ip\alpha)$. En fait, cette convergence a lieu également au sens fort. En effet, pour $f \in \mathcal{C}_2(S_o)$, on a $< r', f > = \lim < r'_n, f > = - \lim < r_n, f'> = - < r, f'>$.
Par suite, on trouve $\|r'\|^2 = \lim < r'_n, r' > = - \lim < r''_n, r > = - \lim \int s_n(d\alpha)\ r(\alpha) + \lim < r_n, r >$ $= \|r\|^2 - \int r(\alpha)\ s(d\alpha)$, c'est-à-dire $2\ V(r) = \|r\|^2 - \|r'\|^2$. Mais on a aussi $2\ V(r_n) = \|r_n\|^2 - \|r'_n\|^2$ donc $\|r'\|^2 = \lim \|r'_n\|^2$, et la convergence a lieu au sens fort.

Autrement dit, tout $r \in \mathcal{R}$ admet une dérivée généralisée $r' \in L^2(S_o)$ définie par $< r', f > = - < r, f'>$ $(f \in \mathcal{C}_1(S_o))$, et on a :

$$V(r) = \frac{1}{2} \int_o^{2\pi} r(\alpha)\ s(d\alpha) = \frac{1}{2} (\|r\|^2 - \|r'\|^2) \tag{4-6-2}$$

Nous désignerons par W le sous-espace de $L^2(S)$ constitué des fonctions f admettant une dérivée généralisée f' (i.e. : un élément $f' \in L^2(S_o)$ tel que $< f', g > = - < f, g' >$ pour toute fonction g admettant une dérivée continue). Cet espace W (ou espace de Sobolev) est un espace de Hilbert pour la norme $\|f\|^2 + \|f'\|^2$. D'après ce qui précède, il est facile de voir que la topologie de Sobolev et celle de la convergence uniforme coïncident sur $\mathcal{R}$.

Pour f et g dans W, nous appellerons <u>covolume</u> de f et de g, et nous noterons V(f,g) l'expression :

$$V(f,g) = \frac{1}{2} < f,g > - \frac{1}{2} < f', g' >$$

En particulier, pour A, B $\in C_0(\mathcal{K})$ admettant les podaires r_A, r_B et les mesures périmétriques s_A, s_B, on écrira V(A,B) au lieu de $V(r_A, r_B)$. D'après (4-6-2), pour λ réel, il vient :

(4-6-3) $$V(A \oplus \lambda B) = V(A) + 2\lambda V(A,B) + V(B)$$

Avec les mesures périmétriques, on trouve aussi :

(4-6-4) $$V(A,B) = \int r_A(\alpha)\, s_B(d\alpha) = \int r_B(\alpha)\, s_A(d\alpha)$$

En particulier, le covolume est <u>invariant par translation</u>, et peut être défini sur l'espace produit $C_\tau(\mathcal{K}) \times C_\tau(K)$. On vérifie sans peine la continuité de V sur cet espace produit.

Pour A, B dans $C_0(\mathcal{K})$, le covolume vérifie les célèbres <u>inégalités de Brünn-Minkowski</u> :

(4-6-5) $$\begin{cases} \sqrt{V(A)\ V(B)} \leq V(A,B) \\ \sqrt{V(A)} + \sqrt{V(B)} \leq \sqrt{V(A \oplus B)} \end{cases}$$

Si V(A) et V(B) sont tous deux différents de 0, ces inégalités sont strictes, sauf si A et B sont positivement homothétiques (à une translation près).

En effet, soit $r_A(\alpha) = \Sigma\, a_p \exp(ip\alpha)$ et $r_B(\alpha) = \Sigma\, b_p \exp(ip\alpha)$ les podaires de A et B (ou de l'un de leurs translatés contenant O). Les coefficients a_o et b_o sont strictement positifs si V(A) > 0 et V(B) > 0, car ils sont proportionnels aux périmètres de A et B. Considérons la fonction $r_A + \lambda\, r_B \in W$ (λ réel). D'après (4-6-4), on a :

$$V(r_A + \lambda\, r_B) = \pi(a_o + \lambda\, b_o)^2 + 2\pi \sum_{p=2}^{\infty} |a_p + \lambda\, b_p|^2 (1-p^2)$$

donc, en particulier :

$$V(r_A + \lambda\, r_B) \leq (a_o + \lambda\, b_o)^2$$

avec égalité si et seulement si $a_p + \lambda\, b_p = 0$ pour $p \geq 2$. Prenons $\lambda_o = -a_o/b_o = -\mathcal{L}(A)/\mathcal{L}(B) < 0$. Pour cette valeur, on trouve $V(r_A + \lambda_o\, r_B) \leq 0$ avec égalité si et seulement si $A = -\lambda_o\, B$ à une translation près. Le trinome $V(r_A + \lambda\, r_B) = V(A) + 2\,\lambda\, V(A,B) + \lambda^2\, V(B)$ admet donc des racines réelles, d'où la première relation (4-6-5). Si ces deux racines sont égales, $V(r_A + \lambda_o\, r_B)$ est nul, $A = -\lambda\, B_o$ et on a l'égalité. Si A et B ne sont pas homothétiques, les deux racines sont distinctes et l'inégalité est stricte. La seconde relation (4-6-5) résulte ensuite de $V(A \oplus B) = V(A) + V(B) + 2\, V(A,B)$.

Les compacts de Steiner.- On sait que le cone $\mathcal{R}$ n'est pas réticulé pour son ordre propre $\succcurlyeq$ défini par $f \succcurlyeq g$ si $f - g \in \mathcal{R}$. Dans $C_o(\mathcal{K})$, la relation $A \succcurlyeq B$ signifie : A est ouvert selon B, ou $A_B = A$. Dans $C(\mathcal{K})$ entier, la relation $A_B = A$ définit un préordre $\succcurlyeq$, et l'équivalence associée à ce préordre est l'équivalence de translation τ, de sorte que $\succcurlyeq$ est un ordre sur l'espace quotient $C_\tau(\mathcal{K}')$, homéomorphe à $\mathcal{M}_\tau^+$. Il est facile de voir que $A \succcurlyeq B$ dans C_τ équivaut à $s_A \geq s_B$, puisque si r_A et r_B sont dans $\mathcal{R} \cap \mathcal{C}_2(S_o)$, $r_A - r_B \in \mathcal{R}$ équivaut à $r_A + r_A'' \geq r_B + r_B''$, donc à $s_A \geq s_B$ (Proposition 1). Ainsi, l'application $A \to s_A$ est un isomorphisme de C_τ muni de la relation $\succcurlyeq$ sur $\mathcal{M}_\tau^+$ muni de la relation d'ordre habituel $\geq$.

Comme la relation (4-6-1) n'est pas conservée en général par les opérations Sup et Inf, on comprend pourquoi les cones $\mathcal{M}_\tau^+$ et $\mathcal{R}$ ne sont pas réticulés. Par contre, la relation (4-6-1) est automatiquement vérifiée par les mesures symétriques sur S_o, et d'autre part les opérations Sup et Inf conservent la symétrie des mesures sur S_o. Ainsi, le cone convexe $\mathcal{R}_s = \mathcal{R}_1$, homéomorphe à l'espace $\mathcal{M}_s^+$ des mesures symétriques est réticulé. Il en est de même du sous-espace C_s de C_τ constitué des classes de compacts symétriques à une translation près. Autrement dit :

Si A et B dans $C(\mathcal{K})$ sont symétriques (à une translation près) il existe $A \vee B$ et $A \wedge B$ caractérisés (à une translation près) par les propriétés suivantes :

$A \vee B$ est ouvert selon A et selon B, et tout $K \in C(\mathcal{K})$ ouvert selon A et selon B est ouvert selon $A \vee B$. De même, A et B sont ouverts selon $A \wedge B$ et pour tout $K \in C(\mathcal{K})$ tel que $A_K = A$ et $B_K = B$, $A \wedge B$ est ouvert selon K.

De même, on dira que deux éléments A et B de $C(\mathcal{K})$ sont <u>étrangers</u> si leurs mesures périmétriques s_A et s_B sont étrangères (i.e., $\mathrm{Inf}(s_A, s_B) = 0$, ou $\mathrm{Sup}(s_A, s_B) = s_A + s_B$. Ainsi, lorsque A et B sont symétriques à une translation près, ils sont étrangers si et seulement si $A \wedge B = \{0\}$, ou encore si et seulement si $A \vee B = A \oplus B$ à une translation près.

Dans le cone convexe $\mathcal{M}_s^+$ des mesures positives symétriques sur S_o, les éléments extrémaux sont de la forme $1/2\, (\delta_\alpha + \delta_{\alpha+\pi})$, et sont d'ailleurs étrangers l'un à l'autre. On retrouve facilement ainsi, par application du théorème de Choquet sur les simplexes, l'unicité de la représentation intégrale des compacts de Steiner.

4-7 LES MESURES DE MINKOWSKI.

Nous allons maintenant présenter les fonctionnelles de Minkowski W_k sous forme locale dans $\mathbb{R}^d$, en associant à chacune d'elles une application $K \to W_k^K$ de $C(\mathcal{K})$ dans l'espace $\mathcal{M}_c^+$ des mesures positives à supports compacts dans $\mathbb{R}^d$. On sait que l'espace $\mathcal{M}_c$ des mesures à supports compacts est le dual exact de l'espace $\mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$ des fonctions continues sur $\mathbb{R}^d$. Nous le munirons de sa topologie faible définie par la convergence : $\mu_n \to \mu$ dans $\mathcal{M}_c$ si $\int \mu_n\, \varphi \to \int \mu\varphi$ pour toute fonction φ continue sur $\mathbb{R}^d$. On sait que l'on a $\mu_n \to \mu$ dans $\mathcal{M}_c$ si et seulement si $\mu_n \to \mu$ vaguement et Supp $\mu_n \subset K_o$ pour un compact K_o fixe. Nous étendrons ensuite la définition de ces mesures (et donc des fonctionnelles de Minkowski) à l'espace $C(\mathcal{F}')$ des fermés convexes. Cette fois, les mesures W_k seront des mesures de Radon sur $\mathbb{R}^d$, c'est-à-dire des fonctionnelles linéaires et continues sur l'espace $\mathcal{C}_{\mathcal{K}}(\mathbb{R}^d)$ des fonctions continues à support compact muni de sa topologie limite inductive habituelle. (Pour cette topologie, on a $\varphi_n \to \varphi$ dans $\mathcal{C}_{\mathcal{K}}$ si et seulement si les fonctions φ_n convergent uniformément vers φ en conservant leurs supports contenus dans un compact K_o fixe).

Nous aurons besoin des lemmes suivants :

LEMME 4-7-1 - L'application support : $\mu \to$ Supp μ est une application s.c.i. de $\mathcal{M}_c$ dans $\mathcal{K}$.

En effet, soit G un ouvert. Si μ est dans $\mathcal{M}_c$, son support rencontre G si et seulement si il existe une fonction φ continue à support dans G telle que $|\int \mu(dx)\ \varphi(x)| > 0$. Par suite, l'image inverse de $\mathcal{K}_G$ par l'application support est ouverte dans $\mathcal{M}_c$, et l'application support est s.c.i.

LEMME 4-7-2 - L'application frontière $K \to \partial K$ est continue sur $C(\mathcal{K})$.

En effet, compte tenu de $\partial K \subset K$ et du corollaire 3 de la proposition 1-2-4, ∂ est s.c.i. Soit $\{K_n\}$ une suite convergeant vers K dans $C(\mathcal{K})$, $\{K_{n_k}\}$ une suite partielle, et, pour chaque n_k, un point $x_{n_k} \in \partial K_{n_k}$ avec $\lim x_{n_k} = x$ dans $\mathbb{R}^d$. On a évidemment $x \in K$. D'autre part, pour chaque n_k, il existe un demi-espace fermé H_{n_k} contenant K_{n_k} et dont la frontière ∂H_{n_k} contient le point x_{n_k} . La suite $\{H_{n_k}, \partial H_{n_k}\}$ admet dans l'espace compact $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ une valeur d'adhérence $(H, \partial H)$, et on vérifie que H est un demi-espace et ∂H la frontière de H. On a donc $K \subset H$ et $x \in \partial H$. Par suite, ∂H est un hyperplan limite pour le convexe K, et $x \in \partial K$. D'après la proposition 1-2-4, il en résulte que ∂

est s.c.s. sur $C(\mathcal{K})$, donc continue.

LEMME 4-7-3 - L'application $(\varphi, K) \to \int_K \varphi(x)dx$ est continue sur $\mathcal{C}(\mathbb{R}^d) \times C(\mathcal{K})$.

En effet, pour $\alpha > 0$, les relations $\varphi - \alpha \le \varphi' \le \varphi + \alpha$ ($\varphi, \varphi' \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$) et $K \subset K' \oplus \alpha B$, $K' \subset K \oplus \alpha B$ ($K, K' \in C(\mathcal{K})$, B boule unité) entraînent :

$$\int_K \varphi(x)dx \le \int_{K'\oplus\alpha B} \varphi'(x)dx + \alpha \|\varphi'\| V(K' \oplus \alpha B)$$

$$\int_{K'} \varphi'(x)dx \le \int_{K\oplus\alpha B} \varphi(x)dx + \alpha \|\varphi\| V(K \oplus \alpha B)$$

V désignant le volume, et $\|\varphi\|$ et $\|\varphi'\|$ les sup de $|\varphi|$ et $|\varphi'|$ sur $K \oplus aB$ pour un $a > \alpha$. On en déduit :

$$\|\varphi\| [V(K \oplus \alpha B) - V(K) + \alpha V(K \oplus \alpha B)] \le \left| \int_K \varphi(x)dx - \int_{K'} \varphi'(x)dx \right| \le$$

$$(\alpha + \|\varphi\|) [V(K' \oplus \alpha B) - V(K') + \alpha V(K' \oplus \alpha B)]$$

Compte tenu de la formule de Steiner (4-1-8) et de lacontinuité des fonctionnelles de Minkowski, le lemme en résulte.

Nous sommes maintenant à même de définir les mesures associées aux fonctionnelles de Minkowski en généralisant la formule de Steiner.

Soit $K \in C(\mathcal{K})$. On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ il existe un point x' unique réalisant le minimum de $|x-y|$ pour $y \in K$, appelé projection de x sur le convexe K. On posera $x' = \Pi_K x$ et $|x - x'| = \rho_K(x)$. Les points x de K sont caractérisés par $\rho_K(x) = 0$ ou, aussi bien, par $x' = \Pi_K x$. L'application $x \to (\Pi_K x, \rho_K(x))$ de $\mathbb{R}^d$ dans $K \times \mathbb{R}^+$ est continue. Désignons par W l'image par cette application de la mesure de Lebesgue dx. Les images de K et de son complémentaire K^c étant, respectivement $K \times \{o\}$ et $\partial K \times (\mathbb{R}^+ \setminus \{o\})$, on a $W = 1_K(x)dx\, \delta_o + W'$, W' désignant une mesure positive sur $\partial K \times \{\mathbb{R}^+ \setminus \{o\}\}$. Dans le cas où la frontière ∂K est une variété deux fois continument différentiable, on sait que W' est de la forme $W'(dx,d\rho) = \Sigma_1^d \binom{d}{k} W_k^K(dx) \times d(\rho^k)$, avec une mesure W_1^K égale (à un facteur près) à la mesure associée à la surface ((k-1) volume) de ∂K, et des mesures W_k^K absolument continues par rapport à W_1^K et dont les densités s'expriment à l'aide des invariants du tenseur de courbure. En particulier, si $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$, on a pour tout $r \ge 0$:

$$\int_{K\oplus rB} \varphi(\Pi_K x)dx = \int_K \varphi(x)dx + \sum_{k=1}^d \binom{d}{k} r^k \int \varphi(x)\, W_k^K(dx)$$

Cette relation subsiste dans le cas général.

THEOREME 4-7-1 - Soit $K \in C(\mathcal{K})$, et Π_K le projecteur de $\mathbb{R}^d$ sur K. Il existe d+1 mesures positives W_k^K $(0 \le k \le d)$ dont la première est $W_o^K(dx) = 1_K(x)\,dx$, et dont les autres, W_k^K, $k > 0$, sont concentrées sur la frontière ∂K de K, et vérifiant pour tout $r \ge 0$ et tout $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$ la relation :

$$\int_{K \oplus rB} \varphi(\Pi_K x)dx = \sum_{k=o}^{d} \binom{d}{k} r^k \int \varphi(x)\, W_k^K(dx) \tag{4-7-1}$$

où B désigne la boule unité.

Les fonctionnelles W_k de Minkowski vérifient alors :

$$\int W_k^K(dx) = W_k(K) \qquad (0 \le k \le d) \tag{4-7-2}$$

Enfin, les applications $(\varphi, K) \to \int \varphi(x)\, W_k^K(dx)$ sont continues sur l'èspace produit $\mathcal{C}(\mathbb{R}^d) \times C(\mathcal{K})$.

En effet, on a déjà vu que les mesures W_k^K existent et vérifient la relation de définition (4-7-1) lorsque la frontière ∂K est une variété deux fois continument différentiable et de dimension n-1. L'ensemble des $K \in C(\mathcal{K})$ dont la frontière vérifie cette propriété est dense dans $C(\mathcal{K})$. Soit alors $\{K_n\}$ une suite dans $C(\mathcal{K})$ convergeant vers une limite K et telle que pour chaque n il existe des mesures $W_k^{K_n} = W_k^n$ vérifiant la relation (4-7-1). Il est facile de vérifier que l'application $\varphi \to \varphi \circ \Pi_K$ est continue sur $\mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$, et que l'application $K \to K \oplus rB$ est continue sur $C(\mathcal{K})$. D'après le lemme 4-7-3, on a donc pour tout $r \ge 0$

$$\lim \int_{K_n \oplus rB} \varphi(\Pi_{K_n} x)dx = \int_{K \oplus rB} \varphi(\Pi_K x)dx$$

En utilisant la relation (4-7-1) vérifiée par les K_n et en effectuant des différences finies en r, on en déduit l'existence des mesures positives W_k^K vérifiant (4-7-1). Pour r = 0, on trouve $W_o^K = 1_K(x)\,dx$. Pour $k \ge 1$, on a Supp $W_k^n \subset \partial K_n$, d'où Supp $W_k^K \subset \partial K$ d'après les lemmes 4-7-1 et 4-7-2. Il suffit de comparer la relation (4-7-1) avec la formule de Steiner (4-1-8) pour en déduire la relation (4-7-2).

Enfin, il est facile de vérifier que l'application $(\varphi, K) \to \varphi \circ \Pi_K$ de $\mathcal{C}(\mathbb{R}^d) \times C(\mathcal{K})$ dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$ est continue. Compte tenu de la continuité de l'addition de Minkowski et des homothéties positives, il résulte alors du lemme 4-7-3 que l'application $(\varphi, K, r) \to \int_{K\oplus rB} \varphi(x)dx$ est continue sur l'espace produit $\mathcal{C}(\mathbb{R}^d) \times C(\mathcal{K}) \times \mathbb{R}^+$. En procédant par différences finies en r, on en déduit la continuité de chacune des applications $(\varphi, K) \to \int \varphi(x) \overset{K}{W_k}(dx)$.

Nous allons maintenant prolonger sur $C(\mathcal{F})$ l'application $K \to \overset{K}{W_k}$ définie sur $C(\mathcal{K})$. Pour cela, nous utiliserons deux lemmes, dont le premier souligne la signification locale des mesures W_k.

<u>LEMME 4-7-4</u> - Soient K, K' $\in C(\mathcal{K})$ et $G \in \mathcal{G}$. Si $K \cap G = K' \cap G$, on a $1_G \overset{K}{W_k} = 1_G \overset{K'}{W_k}$ $(0 \leq k \leq d)$.

En effet, on peut trouver $\alpha > 0$ tel que $G \ominus \rho B \neq \emptyset$, et $G \ominus \rho B \uparrow G$ pour $\rho \downarrow 0$. Pour $0 < \rho < \alpha$, on a évidemment $K \cap (G \ominus \rho B) = K' \cap (G \ominus \rho B)$. Il en résulte : $(K \oplus \rho B) \oplus (G \ominus \rho B) = (K' \oplus \rho B) \cap (G \ominus \rho B)$. En effet, soit x un point appartenant au premier membre, c'est-à-dire vérifiant $(\rho B)_x \subset G$ et $x = y + \rho b$ pour un $y \in K$ et un $b \in B$. On a $y = x - \rho b \in (\rho B)_x$ et aussi $y \in K \cap G = K' \cap G$, puisque $y \cap (\rho B)_x \subset G$. Donc $x = y + \rho b \in K' \oplus \rho B$. Comme on a déjà $x \in G \ominus \rho B$, il en résulte bien $x \in K' \oplus \rho B \cap G \ominus \rho B$, et $(K \oplus \rho B) \cap (G \ominus \rho B) \subset (K' \oplus \rho B) \cap (G \ominus \rho B)$. L'inclusion inverse se démontre de la même manière.

Il est clair que si un point x vérifie $\Pi_K x \in G \ominus \rho B$, on a $\Pi_{K'} x = \Pi_K x$. Soit alors $\{\varphi_n\}$ une suite dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\varphi_n \uparrow 1_{G\ominus\rho B}$. On a, d'après ce qui précède,

$$\int_{K\oplus\rho B} \varphi_n(\Pi_K x)\, \psi(\Pi_K x)\, dx = \int_{K'\oplus\rho B} \varphi_n(\Pi_{K'} x)\, \psi(\Pi'_{K'} x)\, dx$$

pour toute $\psi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$. Compte tenu de (4-7-1) et de la continuité monotone, il en résulte $1_{G\ominus\rho B} \overset{K}{W_k} = 1_{G\ominus\rho B} \overset{K'}{W_k}$, puis $1_G \overset{K}{W_k} = 1_G \overset{K'}{W_k}$ pour $\rho \downarrow 0$.

<u>LEMME 4-7-5</u> - Soient $G \in \mathcal{G}$ et $K_o \in \mathcal{K}$ avec $G \subset K_o$. Si une suite $\{F_n\}$ converge vers F dans $\mathcal{F}$, on a $(\underline{\lim}\,(F_n \cap K_o)) \cap G = F \cap G$.

En effet, l'intersection étant s.c.s. dans $\mathcal{F}$, on a déjà $\underline{\lim}\,(F_n \cap K_o) \subset \overline{\lim}\,(F_n \cap K_o) \subset F \cap K_o$. Inversement, si $x \in F \cap G$, il existe une suite $\{x_n\}$ avec $x_n \in F_n$ et $x = \lim x_n$. Pour n assez grand, x_n appartient au voisinage G de x, soit $x_n \in G \cap F_n \subset K_o \cap F_n$. Donc $x \in \underline{\lim}\,(F_n \cap K_o)$ et $F \cap G \subset (\underline{\lim}\,(F_n \cap K_o)) \cap G$.

Le lemme 4-7-4 permet de prolonger sur $C(\mathcal{F})$ l'application $K \to \overset{K}{W_k}$ par une application $F \to \overset{F}{W_k}$ où F est une mesure de Radon positive (non bornée en général) vérifiant encore Supp $\overset{F}{W_k} \subset \partial F$

si $k \geq 1$, et $W_0^F = 1_F\,dx$.

En effet, soit $\{B_n\}$ une suite dans $C(\mathcal{K})$ telle que $B_n \subset \overset{\circ}{B}_{n+1}$ et $B_n \uparrow \mathbb{R}^d$. A chaque $F \in C(\mathcal{F})$, associons la suite $n \to K_n = F \cap B_n$ dans $C(\mathcal{K})$, et la suite $n \to W_k^n = 1_{\overset{\circ}{B}_n} W_k^{K_n}$. D'après le lemme 4-7-4, on a $W_k^n = 1_{\overset{\circ}{B}_n} W_k^m$ pour $m \geq n$. Il existe donc une mesure positive W_k^F σ-finie sur $\mathbb{R}^d$, définie par $W_k^F = \lim_n \uparrow W_k^n$, et il est facile de vérifier que cette limite ne dépend pas du choix de la suite $\{B_n\}$. En particulier, pour tout $K \in C(\mathcal{K})$ et tout $G \in \mathcal{G}$ tel que $K \cap G = F \cap G$, on a $1_G W_k^F = 1_G W_k^K$, et cette propriété peut servir de définition à W_k^F. On en déduit $W_0^F = 1_F\,dx$, et Supp $W_k^F \subset \partial F$ pour $k \geq 1$.

<u>Proposition 4-7-1</u>.- Pour chaque $F \in C(\mathcal{F})$ et chaque entier k $(0 \leq k \leq d)$, il existe une mesure de Radon unique W_k^F sur $\mathbb{R}^d$ telle que l'on ait $1_G W_k^F = 1_G W_k^{K \cap F}$ pour tout $K \in C(\mathcal{K})$ et tout $G \in \mathcal{G}$ tel que $K \cap G = F \cap G$. Pour $k = 0$, on a $W_0^F(dx) = 1_F(x)\,dx$, et Supp $W_k^F \subset \partial F$ pour $k \geq 1$. Enfin, les applications $(\varphi, F) \to \int \varphi(x)\, W_k^F(dx)$ sont continues sur l'espace produit $\mathcal{C}_{\mathcal{K}}(\mathbb{R}^d) \times C(\mathcal{F}')$

On a déjà établi la première partie de l'énoncé, et il reste à montrer la continuité sur l'espace produit. Soit $\{\varphi_n\}$ une suite de fonctions à supports contenus dans un $K_0 \in C(\mathcal{K})$ fixe, et convergeant uniformément vers $\varphi \in \mathcal{C}_{\mathcal{K}}$, et soit $\{F_n\}$ une suite convergeant vers F dans $C(\mathcal{F})$. Il faut montrer $\int \varphi_n(x)\, W_k^{F_n}(dx) \to \int \varphi(x)\, W_k^F(dx)$. Pour cela, soit G un ouvert convexe tel que $K_0 \subset G \subset \overline{G} \in C(\mathcal{K})$. Posons $K_n = F_n \cap \overline{G}$, $K = F \cap \overline{G}$, d'où $1_G W_k^{F_n} = 1_G W_k^{K_n}$, $1_G W_k^F = 1_G W_k^K$, d'après la définition de W_k^F, et donc aussi $\int \varphi_n W_k^{F_n} = \int \varphi_n W_k^{K_n}$ et $\int \varphi\, W_k^F = \int \varphi\, W_k^K$. De $K_n \subset \overline{G} \in C(\mathcal{K})$ et des propriétés des fonctionnelles de Minkowski résulte $\int W_k^{K_n} \leq \int W_k^{\overline{G}}$, de sorte que la suite $\{W_k^{K_n}\}$ est dominée dans $\mathcal{M}_c^+$, donc aussi la suite numérique $n \to \int \varphi_n W_k^{K_n}$.

Soit donc u une valeur d'adhérence de cette suite numérique. D'après ce qui précède, on peut trouver une suite partielle $\{n_p\}$ telle que $\lim K_{n_p} = K'$ dans $C(\mathcal{K})$, et $\lim W_k^{K_{n_p}} = W_k^{K'}$ dans $\mathcal{M}_c$. D'après le lemme 4-7-5, on a alors $K' \cap G = K \cap G$, puis d'après le théorème 4-7-1 et le lemme 4-7-4 : $u = \lim \int \varphi_{n_p} W_k^{K_{n_p}} = \int \varphi\, W_k^{K'} = \int \varphi\, 1_G W_k^{K'} = \int \varphi\, 1_G W_k^K = \int \varphi\, W_k^K$. Par suite, la valeur d'adhérence u est unique, et on a donc $\lim \int \varphi_n W_k^{F_n} = \lim \int \varphi_n W_k^{K_n} = \int \varphi\, W_k^K = \int \varphi\, W_k^F$, d'où la proposition.

<u>COROLLAIRE</u> - Pour toute fonction φ s.c.i. positive sur $\mathbb{R}^d$ (à valeurs finies ou non), l'application $F \to \int W_k^F(dx)\, \varphi(x)$ est s.c.i. sur $C(\mathcal{F})$. En particulier, on peut définir le prolongement des

fonctionnelles de Minkowski sur $C(\mathcal{F})$ en posant $W_k(F) = \int W_k^F(dx) \leq \infty$. Alors les fonctionnelles de Minkowski W_k $(0 \leq k \leq d)$ sont s.c.i. sur $C(\mathcal{F})$.

En effet, soit $\{\varphi_n\}$ une suite dans $\mathcal{C}_{\mathcal{K}}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\varphi_n \uparrow \varphi$, d'où $\int \varphi(x)\, W_k^F(dx) = \lim \uparrow \int \varphi_n(x)\, W_k^F(dx)$. On aura $\int \varphi(x)\, W_k^F(dx) > a$ pour a réel si et seulement si F appartient à l'ensemble $\bigcup_n \{F' : F' \in C(\mathcal{F}), \int \varphi_n\, W_k^{F'} > a\}$, et cet ensemble est ouvert dans $C(\mathcal{F})$ d'après la proposition. Par suite $F \to \int \varphi\, W_k^F$ est s.c.i.

Soit maintenant $A = (\mathcal{F}, \sigma_f, P)$ un EFA p.s. convexe. Pour chaque k $(0 \leq k \leq d)$, la mesure W_k^F est définie pour P-presque tout $F \in \mathcal{F}$, et d'après la proposition 4-7-1 pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_{\mathcal{K}}(\mathbb{R}^d)$ il existe donc une variable aléatoire $\int W_k^A(dx)\, \varphi(x)$ définie P-presque partout comme l'application $F \to \int W_k^F\, \varphi$. Si $\{\varphi_n\}$ converge vers φ dans $\mathcal{C}_{\mathcal{K}}(\mathbb{R}^d)$, il résulte de la même proposition que la suite $\{\int \varphi_n\, W_k^A\}$ converge p.s. vers $\int \varphi\, W_k^A$. Autrement dit, W_k^A est une mesure aléatoire positive.

Pour chaque $\varphi \in \mathcal{C}_{\mathcal{K}}(\mathbb{R}^d)$, on a $E(|\int \varphi\, W_k^A|) < \infty$. En effet, il suffit de raisonner dans le cas $\varphi \geq 0$. Soit K_o le support de φ, $G \in \mathcal{G}$ et $K'_o \in C(\mathcal{K})$ avec $K_o \subset G \subset K'_o$. D'après la proposition 4-7-1, on a p.s. $\int \varphi\, W_k^A = \int W_k^{K'_o \cap A}\, \varphi \leq (\sup \varphi)\, (W_k(K'_o \cap A)) \leq (\text{Sup } \varphi)\, W_k(K'_o)$ compte tenu de la croissance de la fonctionnelle W_k sur $C(\mathcal{K})$. Donc l'espérance $E(\int \varphi\, W_k^A)$ est bornée.

Ainsi, l'application $\varphi \to E(\int \varphi\, W_k^A)$ est une fonctionnelle linéaire positive sur $\mathcal{C}_{\mathcal{K}}(\mathbb{R}^d)$, donc une mesure de Radon que l'on notera $E(W_k^A)$ ou simplement $W_k(dx)$ s'il n'y a pas ambiguité. Si ϕ est une fonction positive s.c.i. sur $\mathbb{R}^d$ (à valeurs finies ou non) on peut trouver une suite $\{\varphi_n\}$ dans $\mathcal{C}_{\mathcal{K}}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\varphi_n \uparrow \phi$, donc $\int \varphi_n\, W_k^A \uparrow \int \phi\, W_k^A$ p.s., et $E(\int \varphi_n\, W_k^A) \uparrow E(\int \phi\, W_k^A)$, soit $E\,(\int \phi\, W_k^A) = \int \phi\, W_k$. De même, si f est une fonction mesurable quelconque, la relation $\int f\, W_k^A = \text{Inf}\ \{\int \phi\, W_k^A,\ \phi \text{ s.c.i.}, \phi \geq f\}$ p.s. passe à la limite, comme on le vérifie facilement, et donne $E\,(\int f\, W_k^A) = \int f\, W_k$. Ainsi :

<u>Proposition 4-7-2</u>.- Si $A = (\mathcal{F}, \sigma_f, P)$ est un EFA p.s. convexe, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_{\mathcal{K}}(\mathbb{R}^d)$, l'intégrale $\int \varphi\, W_k^A$ $(0 \leq k \leq d)$ est définie P-presque partout sur $\mathcal{F}$ et constitue une variable aléatoire. L'application $\varphi \to \int \varphi\, W_k^A$ est alors une mesure aléatoire positive sur $\mathcal{C}_{\mathcal{K}}(\mathbb{R}^d)$, et l'application $\varphi \to E(\int \varphi\, W_k^A)$ est une mesure de Radon positive sur $\mathcal{C}_{\mathcal{K}}(\mathbb{R}^d)$, notée $E(W_k^A)$ ou simplement W_k et appelée mesure-espérance de la mesure aléatoire W_k^A. On a alors $\int f\, W_k = E(\int f\, W_k^A)$ pour toute fonction ≥ 0 mesurable f.

Lorsque la mesure-espérance W_k est absolument continue pour la mesure de Lebesgue, on dira parfois que sa densité est <u>la densité de la fonctionnelle de Minkowski d'indice k pour le fermé</u>

aléatoire A.

L'Anneau Convexe $\mathcal{G}$.

Désignons par $\mathcal{G}$ la classe stable pour la réunion finie engendrée par $C(\mathcal{K})$. On notera que $\mathcal{G}$ est dense dans $C(\mathcal{K})$. En géométrie intégrale, on utilise une fonction χ sur $\mathcal{G}$ appelée caractéristique d'Euler-Poincaré et définie comme suit : si $K \in \mathcal{G}$ admet une représentation de la forme $K = \bigcup_{i=1}^{p} K_i$, pour des $K_1, \ldots K_p \in C(\mathcal{K})$, on pose

(4-7-3) $$\chi(K) = \sum_i \chi(K_i) - \sum_{i_1<i_2} \chi(K_{i_1} \cap K_{i_2}) + \ldots + (-1)^{k-1} \chi(K_1 \cap \ldots \cap K_p)$$

(et $\chi(\emptyset) = 0$). On démontre ([ ]) (ce qui n'est pas évident) que la valeur $\chi(K)$ ainsi définie ne dépend pas du choix de la représentation $K = \bigcup K_i$ utilisée, et on dit par définition que χ est la caractéristique d'Euler-Poincaré de $K \in \mathcal{G}$. En particulier, $\chi(K) = 1$ si $K \in C(\mathcal{K})$ et χ est additive sur $C(\mathcal{K})$ d'après la formule de définition (4-7-3).

Soit alors B la boule unité, et $r \geq 0$. Pour $K = \bigcup_{i=1}^{p} K_i$, $K_i \in C(\mathcal{K})$, on a donc par définition pour chaque $x \in \mathbb{R}^d$:

$$\chi(K \cap (B)_x) = \sum_i \chi(K_i \cap (rB)_x) - \sum_{i_1 < i_2} \chi(K_{i_1} \cap K_{i_2} \cap (rB)_x) + \ldots + (-1)^{p-1} \chi(K_1 \cap \ldots \cap K_p \cap (rB)_x)$$

Autrement dit, la fonction $x \to \chi(K \cap (rB)_x)$ est égale à $\sum_i 1_{K_i \oplus rB} - \sum_{i_1<i_2} 1_{(K_{i_1} \cap K_{i_2}) \oplus rB} + \ldots + (-1)^p \, 1_{(K_1 \cap \ldots \cap K_p) \oplus rB}$. En particulier, cette fonction est intégrable pour la mesure de Lebesgue dx, et on trouve :

$$\int \chi(K \cap (rB)_x)dx = \sum_i V(K_i \oplus rB) - \sum_{i_1<i_2} V(K_{i_1} \cap K_{i_2}) \oplus rB) + \ldots + (-1)^p V[(K_1 \cap K_2 \ldots \cap K_p) \oplus rB]$$

V désignant le volume. Dans cette relation, le premier membre est indépendant de la représentation $K = \bigcup K_i$ utilisée. D'après la formule de Steiner, le second membre est un polynome en r. Sous forme explicite, on trouve :

(4-7-4) $$\begin{cases} \int \chi(K \cap (rB)_x)dx = \sum_{k=0}^{d} \binom{d}{k} r^k \overline{W}_k(K) \\ \overline{W}_k(K) = \sum_i W_k(K_i) - \sum_{i_1<i_2} W_k(K_{i_1} \cap K_{i_2}) + \ldots \\ \qquad + (-1)^{p-1} W_k(K_1 \cap K_2 \cap \ldots \cap K_p) \end{cases}$$

et les valeurs de $\overline{W}_k(K)$ $(0 \le k \le d)$ ne dépendent pas de la représentation utilisée. Les applications $K \to \overline{W}_k(K)$ constituent donc des prolongements sur $\mathcal{G}$ des fonctionnelles de Minkowski W_k définies sur $C(\mathcal{K})$. En particulier, $\overline{W}_0$ est le volume, d $\overline{W}_1$ la surface et $(1/b_d)\ \overline{W}_d = \chi$ la caractéristique d'Euler-Poincaré. On note que ces fonctionnelles $\overline{W}_k$ sont <u>additives</u> sur l'anneau convexe $\mathcal{G}$, c'est-à-dire vérifient $\overline{W}_k\ (K \cup K') + \overline{W}_k(K \cap K') = \overline{W}_k(K) + \overline{W}_k(K')$ pour $K, K' \in$. Cela résulte de la formule (4-7-4) elle-même. On remarque aussi que la <u>formule de Crofton</u> (4-1-12) reste valable sur , puisqu'elle est valable pour chacune des intersections $K_{i_1} \cap \dots \cap K_{i_n} \in C(\ )$ qui figurent dans l'expression explicite de la formule (4-7-4). En particulier, pour $k' = k$, on a dans (4-1-12) $\overline{W}_k^{\,k}\ (K \cap (S \oplus s)) = b_k\ \chi(K \cap (S \oplus s))$, et la formule de Crofton se réduit à la relation suivante, qui peut également servir de définition :

$$W_k^{\,d}(K) = \frac{b_d}{b_{d-k}} \int_{\mathcal{S}_k} \varpi_k(dS) \int_{S^\perp} \chi(K \cap (S \oplus s))\, ds$$

<u>Le Nombre de Convexité.</u>

Ce procédé permet de prolonger sur $\mathcal{G}$ les fonctionnelles de Minkowski, mais non les mesures $W_k^{\,K}$ qui leur sont associées et qui représentent, sous forme locale, les propriétés de courbure de la frontière ∂K d'un compact K. Nous allons maintenant prolonger sur $\mathcal{G}$ les applications $K \to W_k^{\,K}$ elles-mêmes, c'est-à-dire définir pour chaque $K \in \mathcal{G}$ des mesures $W_k^{\,K}$ dont la première sera $W_0^{\,K} = 1_K(x)dx$, et dont les autres représenteront les propriétés de courbure de la frontière de $K \in \mathcal{G}$.

Le but de ce prolongement est de rattacher à des propriétés locales le <u>nombre de convexité</u> $\nu(K)$ d'un compact $K \in \mathcal{G}$, dont la définition est la suivante : soit $s \in S_0$ un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^d$, et $H(s,r)$ l'hyperplan orthogonal à s et passant par le point $x = rs$ (r réel). Considérons sur la droite réelle la fonction f définie comme suit : soient C_i, $i = 1, 2, \dots p$ les composantes connexes non vides de l'intersection $K \cap H(s,r)$ (p est fini puisque $K \in \mathcal{G}$). Nous dirons q'une composante connexe C_{i_0} est un <u>ensemble d'impact</u> pour $H(s,r)$ s'il existe un ouvert connexe G contenant C_{i_0}, disjoints de C_i pour $i \neq i_0$, et tel que l'intersection $G \cap K \cap H(s,r-\varepsilon)$ soit vide pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit. Par définition, $f(r)$ est le nombre des ensembles d'impacts distincts de $H(s,r)$. Du fait que K est dans $\mathcal{G}$, $f(r)$ n'est différent de 0 que pour un nombre fini de valeurs $r_1, r_2, \dots$ distinctes. Nous pouvons donc poser $\nu(K,s) = \sum_r f(r)$ et dire que $\nu(r,s)$ est le <u>nombre de convexité</u> de K dans la direction $s \in S_0$. Par définition, on posera $\nu(K) = \int_{S_0} \nu(K,s)\ \varpi(ds)$, ϖ désignant la probabilité invariante pour les rotations sur la sphère unité, et on dira que $\nu(K)$ est <u>le nombre de convexité moyen</u> de $K \in \mathcal{G}$.

En vue de rattacher $\nu(K)$ à des propriétés locales de $K \in \mathfrak{S}$, introduisons quelques définitions. Si x est un point de $\mathbb{R}^d$, on dira qu'un point x' (nécessairement dans K) est une projection de x sur K s'il existe un voisinage ouvert G de x' avec $|x-y| > |x-x'|$ pour tout $y \in K \cap G$ distinct de x', et on désignera par $\Pi_K(x)$ l'ensemble des projections de x sur K.

Pour $K \in \mathfrak{S}$, cet ensemble $\Pi_K(x)$ est fini, et, si $K = \bigcup_{i=1}^{r} K_i$ est une représentation de K avec $K_1,\dots K_n \in C(\mathcal{K})$, chaque $x' \in \Pi_K(x)$ est la projection $\Pi_{K_i} x$ de x sur K_i pour un indice i au moins. En effet, on a $x' \in K_{i_o}$ pour un indice i_o au moins, puisque $x' \in K$. Supposons $x' \neq x_{i_o} = \Pi_{K_{i_o}} x$. Le segment $[x_{i_o}, x']$ est contenu dans K_{i_o}, et pour tout ouvert $G \supset x'$ ce segment contient un point $y \in G$ distinct de x' vérifiant $|x-y| \leq |x-x'|$. Mais cela contredit $x' \in \Pi_K(x)$. Donc $x' = x_{i_o}$.

En sens inverse, le point $x_i = \Pi_{K_i} x$ est dans $\Pi_K(x)$ si $x = x_i$, c'est-à-dire $x \in K_i$, ou bien si l'hyperplan H passant par x_i et orthogonal au segment $[x,x_i]$ est un hyperplan limite pour K au sens local (i.e., il existe un voisinage ouvert G de x_i avec $|x-y| > |x-x_i|$ pour tout $y \in K \cap G$ distinct de x_i).

Désignons par $x'_1, x'_2, \dots x'_p$ $(0 < p \leq n)$ les points distincts constituant $\Pi_K(x)$, et posons $x_i = \Pi_{K_i} x$, $x_{i_1,\dots i_k} = \Pi_{K_{i_1} \cap \dots \cap K_{i_k}} x$. On désignera par $F_i(x)$ la fonction égale à 1 si $x_i \notin \bigcup_{j \neq i} K_j$ et à 0 sinon. De même, pour $i_1, \dots i_k$ entiers distincts compris entre 1 et n, on posera $F_{i_1,\dots i_k}(x) = 1$ si $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots x_{i_k}$ sont dans $K_{i_1} \cap \dots \cap K_{i_k} \cap G_{i_1,\dots i_k}$, où $G_{i_1,\dots i_k}$ est le complémentaire de la réunion des K_j, $j \neq i_1, \dots i_k$, et $F_{i_1,\dots i_k}(x) = 0$ dans tous les autres cas. Il est clair que $F_{i_1,\dots i_k}(x) = 1$ entraîne $x_{i_1} = \dots = x_{i_k} = x_{i_1,\dots i_k}$.

Alors $x_i = \Pi_{K_i} x$ appartient à l'ensemble $\Pi_K(x)$ des projections de x sur K si et seulement si on a $F_i(x) = 1$ ou $F_{i,i_1,\dots i_k}(x) = 1$ pour une suite d'indices distincts $i, i_1, \dots i_k$. Si $x \in K$ cela est évident. Pour $x \notin K$, si $F_i(x) = 1$, le plan limite H_i orthogonal en x_i au segment $[x, x_i]$ est localement limite pour K (puisque $x_i \notin K_j$ pour $j \neq i$); d'où $x_i \in \Pi_K(x)$. Si $F_{i,i_1,\dots i_k}(x) = 1$, de même, on a $x_{i_o} = x_{i_1} = x_{i_k} = x_{i,i_1,\dots i_k}$ et le plan H_i limite en x_i pour $K_{i_1} \cap \dots \cap K_{i_k} \cap K_i$ est aussi limite pour $K_i, K_{i_1}, \dots K_{i_k}$. Comme x_i est disjoint des K_j pour $j \neq i, i_1, \dots i_k$, cet hyperplan est localement limite pour K, et $x_i \in \Pi_K(x)$.

En sens inverse, soit $x_i \in \Pi_K(x)$, $x_i \in K_i \cap K_{i_1} \cap \dots \cap K_{i_k}$ et $x_i \notin K_j$ pour $j \neq i, i_1, \dots i_k$. Il existe un hyperplan limite $H_i \ni x_i$ pour K, qui est donc aussi limite pour $K_i, K_{i_1}, \dots K_{i_k}$. Par suite, on a $x_i = x_{i_1} = \dots = x_{i_k} = x_{i,i_1,\dots i_k}$ et $F_{i,i_1,\dots i_k}(x) = 1$.

Il en résulte que l'indicatrice de l'ensemble $\Pi_K(x)$ est la fonction

$$1_{\Pi_K(x)} = \sum_i F_i(x)\ 1_{\{x_i\}} + \sum_{i_1<i_2} F_{i_1,i_2}(x)\ 1_{\{x_{i_1,i_2}\}} + \dots$$

En particulier, le nombre $n(K;x)$ des points distincts contenus dans $\Pi_K(x)$ est :

$$n(K,x) = \sum_i F_i(x) + \sum_{i_1<i_2} F_{i_1,i_2}(x) + \dots$$

Parmi les points $x' \in \Pi_K(x)$, intéressons-nous à ceux qui vérifient $|x-x'| \leq r$ (r réel ≥ 0), et désignons par $\Pi_K(x;r)$ l'ensemble de ces points, dont l'indicatrice est $1_{(rB)_x}\ 1_{\Pi_K(x)}$. En particulier, le nombre $n(K;r;x)$ des points de cet ensemble est :

(4-7-5) $$n(K;r;x) = \sum_i F_i(x)\ 1_{(rB)_x}(x_i) + \sum_{i_1<i_2} F_{i_1,i_2}(x)\ 1_{(rB)_x}(x_{i_1,i_2}) + \dots$$

On déduit de ce qui précède que pour tout $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$ la fonction $x \to \sum_{x'\in\Pi_K(x;r)} \varphi(x')$ est mesurable, comme il résulte de la formule explicite suivante

(4-7-6) $$\sum_{x'\in\Pi_K(x,r)} \varphi(x') =$$

$$= \sum_i F_i(x)\ 1_{(rB)_x}(x_i)\ \varphi(x_i) + \sum_{i_1<i_2} F_{i_1,i_2}(x)\ 1_{(rB)_x}(x_{i_1,i_2})\ \varphi(x_{i_1,i_2}) + \dots$$

En particluier, pour $\varphi = 1$, on obtient le nombre $n(K,r,x)$ et la relation (4-7-5). En intégrant cette fonction dans l'espace $\mathbb{R}^d$, on trouve alors :

$$\int \Big(\sum_{x'\in\Pi_K(x;r)} \varphi(x') \Big)\, dx = \sum_i \int_{K_i \oplus rB} F_i(x)\ \varphi(\Pi_{K_i} x)\, dx +$$

$$+ \sum_{i_1<i_2} \int_{(K_{i_1}\cap K_{i_2})\oplus rB} F_{i_1,i_2}(x)\ \varphi(\Pi_{K_{i_1}\cap K_{i_2}} x)\, dx + \dots$$

Le premier membre de cette relation ne dépend que de φ, r et $K \in \mathcal{G}$, et non de la représentation particulière $K = \bigcup K_i$ utilisée. D'après la formule (4-7-1), le second membre est un polynome en r, et on trouve explicitement :

$$(4\text{-}7\text{-}7)\quad \begin{cases} \displaystyle\int \Big(\sum_{x' \in \Pi_K(x,r)} \varphi(x') \Big) dx = \sum_{k=0}^{d} \binom{d}{k} r^k \int W_k^K(dx)\, \varphi(x) \\ \displaystyle W_k^K = \sum_i F_i\, W_k^{K_i} + \sum_{i_1 < i_2} F_{i_1 i_2}\, W_k^{K_{i_1} \cap K_{i_2}} + \dots \end{cases}$$

Les mesures W_k^K ainsi définies ne dépendent pas du choix de la représentation utilisée $K = \cup K_i$, puisque le premier membre de la première relation n'en dépend pas. En particulier, pour $\varphi = 1$, la fonction à intégrer est le nombre $n(K;r;x)$ des éléments distincts dans $\Pi_K(x)$. En posant $W_k(K) = \int W_k^K(dx)$, la formule générale se réduit dans ce cas à :

$$(4\text{-}7\text{-}8)\qquad \int n(K;r;x)dx = \sum_{k=0}^{d} \binom{d}{k} r^k\, W_k(K) \qquad (K \in \mathcal{S})$$

Il s'agit donc du prolongement sur $\mathcal{S}$ de la formule de Steiner. Si $K \in C(\mathcal{K})$, le premier membre de (4-7-7) se réduit à $\int_{K \oplus rB} \varphi(\Pi_K x)\, dx$, et les mesures de W_k^K s'identifient donc aux mesures de Minkowski telles que nous les avons définies antérieurement (Théorème 4-7-1). Autrement dit, l'application $K \to W_k^K$ définies par (4-7-7) prolonge sur $\mathcal{S}$ l'application déjà définie sur $C(\mathcal{K})$. En particulier, l'application $K \to W_k(K) = \int W_k^K(dx)$ prolonge sur $\mathcal{S}$ la fonctionnelle de Minkowski d'indice k définie sur $C(\mathcal{K})$. On prendra garde, toutefois, que pour $k \geq 2$, ce prolongement n'est pas identique à celui que nous avons construit à partir de la caractéristique d'Euler-Poincaré (relation (4-7-4)), et que l'on a en général $\overline{W}_k(K) \neq W_k(K)$ pour $K \in \mathcal{S}$ non convexe.

Pour $k = 0$, on a encore $W_0^K(dx) = 1_K(x)\, dx$, et cette mesure est associée au volume. De même, pour $k = 1$, la mesure W_1^K est (à un facteur près) la mesure associée à la surface de K. Pour $k = d$, nous allons voir maintenant que la mesure W_d^K généralise la notion de courbure totale, et se trouve en relation avec le nombre de convexité $\nu(K)$ défini plus haut, soit explicitement :

$$(4\text{-}7\text{-}9)\qquad \nu(K) = (1/b_d)\; W_d(K)$$

Pour établir cette relation, considérons d'abord le cas où $K \in C(\mathcal{K})$ a une frontière suffisamment régulière. Dans ce cas, W_d^K est absolument continu vis-à-vis de la mesure superficielle, et , à un facteur près, la densité correspondante est égale à la courbure totale sur ∂K. Ainsi, pour tout borélien $B \subset \partial K$, l'expression $(1/b_d)\, W_d^K(B)$ est la mesure (pour la probabilité ϖ invariante sur la sphère unité S_0) de l'ensemble des normales extérieures menées par les points de $B \subset \partial K$ - ou encore est égale à la probabilité pour que la famille $H(r,-s)$ $(-\infty < r < \infty)$ des hyperplans dont la direction $-s$ est aléatoire et admet la loi ϖ ait son point d'impact sur K dans l'ensemble B. Cette interprétation subsiste tant que la normale en chaque point de ∂K est univoquement définie, donc en particulier tant que K est de la forme $K = K_o \oplus \varepsilon B$, $K_o \in C(\mathcal{K})$, $\varepsilon > 0$.

Supposons maintenant que $K \in \mathcal{S}$ admette une représentation $K = \bigcup_{i=1}^{n} (K_i \oplus \varepsilon B) = (\bigcup K_i) \oplus \varepsilon B$ pour des $K_i \in C(\mathcal{K})$. Le point d'impact x sur $(K_{i_1} \oplus \varepsilon B) \cap \ldots \cap (K_{i_k} \oplus \varepsilon B)$ d'une famille d'hyperplans de direction donnée est également point d'impact sur K si et seulement si $F_{i_1,\ldots i_k}(x) = 1$. Autrement dit, la mesure sur S_o des directions des familles d'hyperplans dont l'impact sur $(K_{i_1} \oplus \varepsilon B) \cap \ldots \cap (K_{i_k} \oplus \varepsilon B)$ est également un impact sur K et est égale à

$$(1/b_d) \int F_{i_1,\ldots i_k}(x)\, W_d^{(K_{i_1} \oplus \varepsilon B) \cap \ldots \cap K_{i_k} \oplus \varepsilon B)}(dx)$$

Compte tenu de (4-7-6), on a donc $b_d\, \nu(K) = \int W_d^K(x) = W_d(K)$.

Il reste à montrer aur ce résultat subsiste pour $K \in \mathcal{S}$ quelconque. Soit $K = \bigcup_{i=1}^{n} K_i$, $K_i \in C(\mathcal{K})$ une représentation de K. Pour $\varepsilon > 0$, posons $K_\varepsilon = K \oplus \varepsilon B$, $K_i(\varepsilon) = K_i \oplus \varepsilon B$. D'après ce qui précède, on a

$$b_d\, \nu(K_\varepsilon) = W_d(K_\varepsilon) \qquad (\varepsilon > 0) \tag{4-7-10}$$

Pour $\varepsilon \downarrow 0$, on a $\nu(K_\varepsilon) \uparrow \nu(K)$. En effet, pour une direction $s \in S_o$ donnée, on vérifie que $K \to \nu(K,s)$ est une application s.c.i. sur $\mathcal{S}$. D'autre part, il est facile de voir que $\varepsilon \to \nu(K_\varepsilon,s)$ est une fonction décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Par suite, $\nu(K_\varepsilon,s) \uparrow \nu(K,s)$ pour $\varepsilon \downarrow 0$, et par continuité monotone on a bien $\nu(K_\varepsilon) = \int \nu(K_\varepsilon,s)\, \varpi(ds) \uparrow \int \nu(K,s)\, \varpi(ds) = \nu(K)$.

Il reste à montrer que l'on a également $W_d(K_\varepsilon) \uparrow W_d(K)$. D'après la relation (4-7-10), cela achèvera en effet la démonstration de la formule (4-7-9). Or, si $x' \in \partial K$ est une projection sur K, $x \neq x'$, il est facile de voir que $x' + \varepsilon(x-x')/|x-x'|$ est une projection de x sur $K \oplus \varepsilon B$, et inversement, et d'en déduire $n(K_\varepsilon, r-\varepsilon; x) \uparrow n(K,r;x)$ pour $\varepsilon \downarrow 0$. Compte tenu de la formule (4-7-8), on en déduit la convergence $W_k(K_\varepsilon) \to W_k(K)$ de chacune des fonctionnelles de Minkowski, et en particulier $W_d(K_\varepsilon) \to W_d(K)$, ce qui achève la démonstration.

<u>Les mesures aléatoires généralisées de Minkowski.</u>

Nous allons maintenant passer à la version aléatoire de la théorie, et pour cela établir les résultats préliminaires suivants dans lesquels l'anneau convexe $\mathcal{S}$ est muni de la topologie induite par la topologie myope. Pour $x \in \mathbb{R}^d$ et $K \in \mathcal{S}$, l'ensemble $\Pi_K(x)$ des projections (au sens local défini plus haut) de x dans K est <u>fini</u>, donc compact dans $\mathbb{R}^d$. Plus précisément :

<u>LEMME 4-7-6</u> - L'application $(x,K) \to \Pi_K(x)$ de $\mathbb{R}^d \times \mathcal{G}$ dans $\mathcal{K}$ est s.c.i. De même, l'application $(x,K,r) \to \Pi_K(x) \cap \mathring{B}_r(x)$ de $\mathbb{R}^d \times \mathcal{G} \times (\overline{\mathbb{R}}_+ \setminus \{o\})$ dans $\mathcal{K}$ est s.c.i. ($\mathring{B}_r(x)$ est la boule ouverte de centre x et de rayon $r > 0$, $\overline{\mathbb{R}}_+$ est la demi-droite achevée $[0,\infty]$).

Montrons d'abord le premier énoncé. Soient $\{x_n\} \subset \mathbb{R}^d$ et $\{K_n\} \subset \mathcal{G}$ deux suites telles que $\lim x_n = x$ et $\lim K_n = K \in \mathcal{G}$ dans $\mathcal{K}$. D'après l'inclusion $\Pi_{K_n}(x_n) \subset K_n$ et la proposition 1-2-4, nous devons montrer $\Pi_K(x) \subset \underline{\lim}\ \Pi_{K_n}(x_n)$. Soit donc $x' \in \Pi_K(x)$, et vérifions qu'il existe une suite $\{x'_n\} \subset \mathbb{R}^d$ avec $x' = \lim x'_n$ et $x'_n \in \Pi_{K^n}(x_n)$ pour n assez grand.

a/ - Si $x' = x$, on a $x \in K$. Pour chaque $n > 0$, désignons par x'_n l'un des points minimisant $|x_n - y|$, $y \in K_n$. On vérifie sans peine $\lim x'_n = x = x'$. Comme $x'_n \in \Pi_{K_n}(x_n)$, le résultat souhaité est prouvé.

b/ - Supposons maintenant $x' \neq x$. Il existe donc un voisinage ouvert G de x' tel que :

(b) $\quad |x-y| > |x-x'|$ pour tout $y \in G \cap K$ distinct de x'.

Si $x' \notin \underline{\lim}\ \Pi_{K_n}(x)$, il existe une suite partielle $n_k \to \Pi_{K_{n_k}}(x_{n_k})$ et une boule fermée $B_\varepsilon(x')$ que l'on peut supposer contenue dans G telle que : $B_\varepsilon(x') \cap \Pi_{K_{n_k}}(x_{n_k}) = \emptyset$ pour tout $k > 0$. Pour k assez grand, on a $x_{n_k} \in B_\varepsilon(x')$, de sorte que $K_{n_k} \cap B_\varepsilon(x') \in \mathcal{G}$ n'est pas vide. Soit y'_{n_k} l'un des points réalisant le minimum de $|x_{n_k} - y|$, $y \in K_{n_k} \cap B_\varepsilon(x')$. Ce point y_{n_k} est une projection de x_{n_k} sur $K_{n_k} \cap B_\varepsilon(x') \in \mathcal{G}$. On ne peut pas avoir $y_{n_k} \in \mathring{B}_\varepsilon(x')$, car alors y_{n_k} serait aussi une projection de x_{n_k} dans K_{n_k}, ce qui contredirait $B_\varepsilon(x') \cap \Pi_{K_{n_k}}(x_{n_k}) = \emptyset$. On a donc $y_{n_k} \in \partial B_\varepsilon(x')$ et $|x_{n_k} - y_{n_k}| < |x_{n_k} - x'|$. Si y_o est une valeur d'adhérence de la suite $\{y_{n_k}\}$, on trouve alors : $y_o \in \partial \overline{B}_\varepsilon(x') \cap K$ c'est-à-dire $y_o \neq x'$, et $|x-y_o| \leq |x-x'|$. Mais cela contredit (b), car $B_\varepsilon(x') \subset G$. Donc $x' \in \underline{\lim}\ \Pi_{K_n}(x_n)$.

c/ - Prouvons maintenant le second énoncé. Soit $\{x_n, K_n, r_n\}$ une suite convergeant vers $\{x,K,r\}$ dans $\mathbb{R}^d \times \mathcal{G} \times (\overline{\mathbb{R}}_+ \setminus \{o\})$, et $x' \in \Pi_K(x) \cap \mathring{B}_r(x)$. D'après le premier énoncé, il existe une suite $\{x'_n\}$ avec $x' = \lim x'_n$ et $x'_n \in \Pi_{K_n}(x_n)$ pour n assez grand. Comme la suite $\{r_n\}$ converge vers r dans $\overline{\mathbb{R}}_+ \setminus \{o\}$, la relation $|x-x'| < r$ entraîne $|x_n - x'_n| < r_n$ pour n assez grand, et par suite $x'_n \in \Pi_{K_n}(x_n) \cap \mathring{B}_{r_n}(x)$, d'où la proposition.

Pour tout $K \in \mathcal{G}$, toute fonction φ positive sur $\mathbb{R}^d$ et tout $r \in \overline{\mathbb{R}}_+ \setminus \{o\}$, nous poserons pour tout $x \in \mathbb{R}^d$

$$S(K,\ \varphi,\ r;\ x) = \sum_{x' \in \Pi_K(x) \cap \overline{B}_r(x)} \varphi(x')$$

$$\mathring{S}(K,\ \varphi,\ r;\ x) = \sum_{x' \in \Pi_K(x) \cap \mathring{B}_r(x)} \varphi(x')$$

Proposition 4-7-3.- Pour toute fonction φ s.c.i. et positive sur $\mathbb{R}^d$, l'application $(K,r) \to \int S(K,\ \varphi,\ r;\ x)dx$ est s.c.i. sur $\mathcal{S} \times (\overline{\mathbb{R}}_+ \setminus \{o\})$.

Pour tout $K \in \mathcal{S}$ et tout $r > 0$, l'ensemble des points x tels que $\Pi_K(x) \cap \partial\overline{B}_r(x) \neq \emptyset$ est négligeable pour la mesure de Lebesgue, de sorte que l'on a :

$$\int S(K,\ \varphi,\ r;\ x)\ dx = \int \mathring{S}(K,\ \varphi,\ r;\ x)\ dx$$

Mais le lemme 4-7-6 entraîne que l'application $(K,r) \to \mathring{S}(K,\ \varphi,\ r;\ x)$ est s.c.i. sur $\mathcal{S} \times (\overline{\mathbb{R}}_+ \setminus \{o\})$ pour x fixé. Si $\{K_n,\ r_n\}$ est une suite convergeant vers $\{K,\ r\}$ dans $\mathcal{S} \times (\overline{\mathbb{R}}_+ \setminus \{o\})$, il en résulte :

$$\mathring{S}(K,\ \varphi,\ r;\ x) \leq \underline{\lim}\ \mathring{S}(K_n,\ \varphi,\ r_n\ ;x)$$

et, d'après le lemme de Fatou-Lebesgue :

$$\int \mathring{S}(K,\ \varphi,\ r;\ x)\ dx \leq \underline{\lim} \int \mathring{S}(K_n,\ \varphi,\ r_n;\ x)\ dx$$

D'où la proposition.

COROLLAIRE - Pour toute fonction φ continue sur $\mathbb{R}^d$, et tout $k = 0,\ 1, \ldots d$, l'application $K \to \int \varphi(x)\ W_k^K(dx)$ est mesurable sur $\mathcal{S}$ pour la σ-algèbre induite par σ_f.

En effet, d'après la proposition et la formule (4-7-7), l'application $(K,r) \to \sum \binom{d}{k} r^k \int \varphi\ W_k^K$ est mesurable sur $\mathcal{S} \times (\mathbb{R}_+ \setminus \{o\})$. Il suffit de prendre des différences finies en r pour en déduire le corollaire.

Nous pouvons maintenant définir les mesures de Minkowski associées à un fermé F.

Définition 4-7-1.- On désigne par $\mathcal{S}_f$ la classe des fermés $F \in \mathcal{F}$ qui sont réunion localement finie d'une famille $\{F_i,\ i \in I\} \subset C(\mathcal{F})$ de fermés convexes (c'est-à-dire telle que tout compact K est disjoint de tous les F_i, $i \in I$, sauf au plus un nombre fini).

Il n'y a aucune difficulté à définir l'ensemble $\Pi_F(x)$ des projections d'un point x sur un fermé $F \in \mathfrak{S}_f$. En particulier, $\Pi_F(x)$ est localement fini, donc fermé dans $\mathbb{R}^d$, et $\Pi_F(x) \cap \mathring{B}_r(x)$ $(0 < r < \infty)$ est même fini. Pour toute fonction φ continue à support compact, l'intégrale $\int S(F, \varphi, r; x)dx$ est donc finie, et la formule (4-7-9) reste valable, à ceci près que maintenant les $W_k^F(dx)$ sont des mesures de Radon ≥ 0 non nécessairement bornées. Le lemme 4-7-6 et la proposition 4-7-3 restent également valables, ce qui nous garantit la mesurabilité sur $\mathfrak{S}_f$ de l'application $F \to \int \varphi\, W_k^F$. Par ailleurs :

<u>LEMME 4-7-7</u> - $\mathfrak{S}_f$ est un sous-ensemble mesurable de $\mathcal{F}$.

En effet, désignons par B_n la boule fermée de rayon n, et par $\mathfrak{S}_{m,n}$ la classe des fermés F tels que $F \cap B_n$ soit réunion d'au plus m compacts convexes. $\mathfrak{S}_{m,n}$ est mesurable comme image inverse d'un sous-espace fermé de $\mathcal{K}(B_n)$ par l'application s.c.s. $F \to F \cap B_n$. Par suite $\mathfrak{S}_f = \bigcap_n \bigcup_m \mathfrak{S}_{m,n} \in \sigma_f$.

De ce qui précède résulte alors le théorème suivant :

<u>THEOREME 4-7-2</u> - Pour tout $F \in \mathfrak{S}_f$ et k = 0, 1,...d, il existe une mesure de Radon $W_k^F \geq 0$ telle que l'on ait pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_{\mathcal{K}}(\mathbb{R}^d)$ et tout $r > 0$

$$\int S(F, \varphi, r; x)dx = \sum_{k=0}^{d} \binom{d}{k} r^k \int W_k^F(dx)\ \varphi(x)$$

On a $W_0^F = 1_F\, dx$, et Supp $W_k^F \subset \partial F$ pour k = 1,...d. Pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_{\mathcal{K}}(\mathbb{R}^d)$, chacune des applications $F \to \int \varphi\, W_k^F$ (k = 0, 1,...d) est mesurable sur $\mathfrak{S}_f$.

<u>COROLLAIRE</u> - Si A est un EFA p.s. dans $\mathfrak{S}_f$, il existe pour chaque k = 0, 1,...d une mesure aléatoire $W_k^A \geq 0$ définie pour presque tout $F \in \mathcal{F}$ et tout $\varphi \in \mathcal{C}_{\mathcal{K}}(\mathbb{R}^d)$ par l'application $F \to \int \varphi\, W_k^F$.

<u>REMARQUE</u> - Si pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_{\mathcal{K}}(\mathbb{R}^d)$ on a $E(\int \varphi\, W_k^A) < \infty$, l'application $\varphi \to E(\int \varphi\, W_k^A)$ définit une fonctionnelle linéaire positive sur $\mathcal{C}_{\mathcal{K}}(\mathbb{R}^d)$, et il existe donc une mesure de Radon positive $E(W_k)$, appelée mesure-espérance, telle que $E(\int \varphi\, W_k^A) = \int \varphi\, E(W_k)$. Mais il peut arriver que la condition $E(\int \varphi\, W_k^A) < \infty$ ne soit pas remplie.

Si l'EFA A est <u>stationnaire</u>, et si la condition précédente est remplie, la mesure-espérance

$E(W_k)$ est elle-même invariante par translation, donc proportionnelle à la mesure de Lebesgue. Il existe alors pour $k = 0, 1, \ldots k$ un nombre $w_k \geq 0$ appelé densité de la fonctionnelle de Minkowski W_k telle que l'on ait $E(W_k(dx)) = w_k\, dx$. Si cette condition n'est pas remplie, il est facile de voir que l'on a $E(\int W_k^A \varphi) = \infty$ pour toute fonction $\varphi \geq 0$ non identiquement nulle dans $\mathcal{C}_{\mathcal{K}}$, et on peut donc poser conventionnellement $w_k = \infty$.

Complements.

Si F est un fermé quelconque, non nécessairement dans $\mathcal{G}_f$, il est encore possible de lui associer des applications linéaires et positives $\varphi \to W_k^F(\varphi)$ $(k = 0, 1, \ldots d)$ de $\mathcal{C}_{\mathcal{K}}^+$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ qui prolongent les mesures de Minkowski. Toutefois, $W_k^F(\varphi)$ peut être infini, et il ne s'agit donc plus de mesures de Radon. Posons d'abord un lemme.

LEMME 4-7-8 - Soient Ω un espace LCD, et f une application de Ω dans $\overline{\mathbb{R}}$. On pose $\gamma = \{(\omega,x) : \omega \in \Omega,\ x \in \overline{\mathbb{R}},\ x < f(\omega)\}$ et $\Gamma = \{(\omega,x) : \omega \in \Omega,\ x \in \overline{\mathbb{R}},\ x \leq f(\omega)\}$. Alors :

a/ - f est s.c.i. (resp. s.c.s.) si et seulement si γ (resp. Γ) est ouvert (resp. fermé) dans $\Omega \times \overline{\mathbb{R}}$.

b/ - f admet une plus petite majorante s.c.s. et une plus grande minorante s.c.i.

c/ - Soit f' une fonction s.c.i. (resp. s.c.s.) définie sur un sous-espace Ω' dense dans Ω. Alors f' admet un plus grand prolongement s.c.i. (resp. un plus petit prolongement s.c.s.) sur Ω, et, pour tout $\omega \in \Omega$, $\omega \notin \Omega$, il existe une suite $\{\omega_n\} \subset \Omega$ telle que $\omega = \lim \omega_n$ et $f(\omega) = \lim f'(\omega_n)$.

Il suffit d'établir les énoncés relatifs aux fonctions s.c.s., puisqu'en changeant f en $-f$ on en déduit les énoncés correspondant au cas s.c.i.

a/ - Supposons f s.c.s. Pour toute suite $\{\omega_n, x_n\}$ convergeant vers $\{\omega,x\}$ dans $\Omega \times \overline{\mathbb{R}}$, en vérifiant $(\omega_n, x_n) \in \Gamma$, c'est-à-dire $x_n \leq f(\omega_n)$ pour tout $n > 0$, on a $x = \lim x_n \leq \underline{\lim}\, f(\omega_n) \leq \overline{\lim}\, f(\omega_n) \leq f(\omega)$, donc $(\omega,x) \in \Gamma$ et Γ est fermé.

Inversement, supposons Γ fermé dans $\Omega \times \overline{\mathbb{R}}$, et soit ω_n une suite convergeant vers ω dans Ω. On a $(\omega_n, f(\omega_n)) \in \Gamma$, donc $(\omega, \overline{\lim}\, f(\omega_n)) \in \Gamma$, puisque Γ est fermé. Par suite $f(\omega) \geq \overline{\lim}\, f(\omega_n)$, et f est s.c.s.

b/ - Une fonction f est biunivoquement déterminée par l'ensemble Γ_f qui lui est associé dans $\Omega \times \overline{\mathbb{R}}$, et $f \leq g$ équivaut à $\Gamma_f \subset \Gamma_g$. Par suite, la plus petite majorante s.c.s. de f est la fonction associée à l'adhérence $\overline{\Gamma}_f$ de f.

c/ - Soit $\Gamma' = \{(\omega',x),\ \omega' \in \Omega',\ x \in \overline{\mathbb{R}},\ x \leq f(\omega')\}$ le sous-graphe d'une fonction f' s.c.s. sur Ω'. Γ' est fermé dans $\Omega' \times \overline{\mathbb{R}}$, de sorte qu'il existe un plus petit fermé Γ dans $\Omega \times \overline{\mathbb{R}}$ tel que $\Gamma \cap (\Omega' \times \overline{\mathbb{R}}) = \Gamma'$, c'est-à-dire la fermeture $\Gamma = \overline{\Gamma}'$ de $\overline{\Gamma}'$ dans $\Omega \times \overline{\mathbb{R}}$. Pour $\omega \in \Omega$, l'ensemble $\{x : (\omega,x) \in \overline{\Gamma}'\}$ n'est pas vide, car Ω' est dense dans Ω. Posons alors $f(\omega) = \text{Sup}\ \{x : (\omega,x) \in \overline{\Gamma}'\}$. Il est clair que f est le plus petit prolongement s.c.s. de f'. Si $\omega \in \Omega$ n'est pas dans Ω', il existe une suite $\{\omega_n,x_n\} \subset \Gamma'$ telle que $(\omega,\ f(\omega)) = \lim\ (\omega_n,\ x_n)$, puisque $\overline{\Gamma}'$ est la fermeture de Γ', et a fortiori on a $f(\omega) = \lim f(\omega_n)$.

La classe $\mathcal{G}_f$ contient la classe $\mathcal{J}$ des parties finies, et elle est dense dans $\mathcal{F}$ d'après le Théorème 1-2-2, corollaire 2. Pour f s.c.i. ≥ 0, l'application :

$$(F,r) \to \int S(F,\ f,\ r;\ x)dx = \sum_{k=0}^{d} \binom{d}{k} r^k\ W_k^F(f)$$

de $\mathcal{G}_f \times (R_+ \setminus \{o\})$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ est s.c.i. et admet donc d'après le lemme un plus grand prolongement s.c.i. sur $\mathcal{F} \times (R_+ \setminus \{o\})$. Par suite :

<u>Proposition 4-7-4</u>.- Pour tout k = 0, 1,...d, il existe une application $(F,\ \varphi) \to W_k^F(\varphi)$ de $\mathcal{C}_{\mathcal{K}}^+(\mathbb{R}^d)$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ vérifiant les propriétés suivantes :

a/ - Pour tout $F \in \mathcal{F}$, $\varphi \to W_k^F(\varphi)$ est positivement linéaire. On a $W_o^F(\varphi) = \int_F \varphi(x)dx$, et $W_k^F(\varphi) = 0$ pour k = 1, 2,...d si $\text{Supp}\ \varphi \cap \partial F = 0$.

b/ - $(F,\ \varphi) \to W_k^F(\varphi)$ prolonge l'application $(F,\ \varphi) \to \int W_k^F(dx)\ \varphi(x)$ définie sur $\mathcal{G}_f \times \mathcal{C}_{\mathcal{K}}$ et pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_{\mathcal{K}}$, l'application :

$$(F,\ r) \to \sum \binom{d}{k} r^k\ W_k^F(\varphi)$$

est l'unique prolongement s.c.i. sur $\mathcal{F} \times (\mathbb{R}_+ \setminus \{o\})$ de l'application $(F,\ r) \to \sum \binom{d}{k} r^k \int \varphi\ W_k^F$. De plus, pour $F \in \mathcal{F}$ et $\varphi \in \mathcal{C}_{\mathcal{K}}^+$, il existe une suite $\{F_n\} \subset \mathcal{F}$ telle que $F = \lim F_n$ et $W_k^F(\varphi) = \lim W_k^{F_n}(\varphi)$ (k = 0, 1,...d).

Ce résultat permet en particulier de définir la surface d'un fermé F quelconque. Mais ce n'est pas, et de loin, la seule définition possible (voir, par exemple, le traité de Federer, [17]).