Les Cahiers du Centre de Morphologie Mathématique

DE FONTAINEBLEAU

Fascicule 6

TOME II

ENSEMBLES ALÉATOIRES ET GÉOMÉTRIE INTÉGRALE

par

G. MATHERON

1972

Ecole des Mines de Paris

ENSEMBLES ALEATOIRES ET GEOMETRIE INTEGRALE

- TOME II -

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE V - LES EFA SEMI-MARKOVIENS DANS $\mathbb{R}^d$ (EFASM). 136

5-1 La propriété semi-markovienne. 136

5-2 EFASM stationnaires sur la droite réelle. 139

5-3 Les schémas booléens à grains compacts et convexes. 143

Schémas induits sur les droites. 146

Le nombre de convexité spécifique. 149

Les densités des fonctionnelles de Minkowski. 150

Schémas induits sur les variétés linéaires. 150

5-4 Caractérisation des EFASMID stationnaires. 153

Caractérisation des réseaux poissoniens de variétés linéaires. 155

Schémas induits sur les droites. 157

Les densités des fonctionnelles de Minkowski. 159

EFASMID induits sur les variétés linéaires. 159

Cas isotrope. 160

CHAPITRE VI - HYPERPLANS ET POLYEDRES POISSONIENS. 163

6-1 Les réseaux stationnaires d'hyperplans poissoniens. 164

Le compact de Steiner A. 164

Les densités de (d-k)-volume. 166

Les mesures-covariances. 170

6-2 Les polyèdres poissoniens et l'invariance conditionnelle. 174

L'invariance conditionnelle. 175

Point de vue de la loi en nombre. 177

6-3 Applications. 179

Espérance des fonctionnelles de Minkowski $W_k(\Pi)$. 179

Granulométrie selon les boules. 181

Relation entre les lois du volume V et de la surface S. 182

Relation entre la loi de $\phi(\Pi_0)$ et celle du nombre des faces. 183

Les premiers moments du volume V, de la surface S et du contour apparent V'. 184

Cas des polygones poissoniens isotropes. 188

Loi du diamètre apparent. 188

Lois du périmètre et du nombre des côtés. 190

CHAPITRE VII - LES GRANULOMETRIES. 192

7-1 Ouvertures et fermetures algébriques. 193

Prolongements d'une application. 193

Ouvertures et fermetures compatibles avec les translations dans $\mathbb{R}^d$. 196

7-2 Les granulométries. 199

Les axiomes des granulométries. 199

Régularisées d'une granulométrie. 201

Eléments critiques d'une granulométrie. 202

Granulométries euclidiennes. 203

Générateur d'une granulométrie euclidienne. 205

Granulométries euclidiennes s.c.s. et compactes. 207

Filtres morphologiques. 209

Autres exemples. 212

7-3 Granulométrie d'un EFA et de son complémentaire. 212

Granulométrie des pores. 213

7-4 Ouvertures et granulométries s.c.s. et compactes. 215

Ouvertures et fermetures s.c.s. sur $\mathcal{F}$ ou $\mathcal{K}$. 216

Plus petite majorante s.c.s. d'une ouverture sur $\mathcal{K}$. 218

Les ouvertures compactes. 221

Les granulométries s.c.s. et compactes. 223

7-5 Ouvertures et fermetures s.c.i. 225

CHAPITRE VIII - APPLICATIONS CROISSANTES. 231

8-1 Propriétés algébriques des τ-applications croissantes. 231

8-2 Propriétés topologiques des τ-applications croissantes. 238

Prolongement d'une application s.c.s. sur $\mathcal{K}$. 240

τ-applications compatibles avec la réunion ou l'intersection. 245

8-3 Compléments topologiques 248

Caractérisation des espaces $\mathcal{F}_u$. 251

8-4 Point de vue des applications inverses. 255

CHAPITRE IV - INTEGRALES ET MESURES A VALEURS DANS $\mathcal{K}_0$. 259

9-1 L'intégrale de Riemann-Minkowski 259

Construction du compact $I = \int_0^1 A(\lambda)d\lambda$. 260

Convexité de l'intégrale R.M. 262

Mesure sur $\mathbb{R}$ à valeur dans $C(\mathcal{K}')$. 266

L'intégrale de Stieltjes-Minkowski. 270

9-2 Le point de vue fonctionnel. 272

Les espace Φ_g^+ , Φ_k^+ et $\mathcal{C}_{\mathcal{K}}^+$. 272

Prolongement d'une pseudo-intégrale;à valeurs dans $\mathcal{K}_0$. 274

L'espace Φ_0^+ des fonctions pseudo-intégrables. 277

Pseudo-intégrales semi-additives, ou $\mathcal{K}_0$-intégrales. 282

9-3 Mesures sur E à valeurs dans $\overline{\mathcal{K}}_0$. 283

Construction de l'intégrale associée à une mesure à valeurs dans $\mathcal{K}_0$. 285

BIBLIOGRAPHIE

- CHAPITRE 5 -

LES EFA SEMI-MARKOVIENS DANS $\mathbb{R}^d$

Ce chapitre est consacré à la propriété semi-markovienne, dont on verra le lien étroit avec les propriétés liées à la convexité. Bien qu'il existe des EFA semi-markoviens (EFASM) qui ne soient pas indéfiniment divisibles pour la réunion, nous étudierons surtout les EFASM indéfiniment divisibles (EFASMID). Le premier paragraphe donne les définitions et propriétés générales, et caractérise les EFASMID en termes de processus de Poisson sur $C(\mathcal{F}')$, ou de C-additivité de la fonctionnelle ϕ. On traite ensuite en détail le cas des EFASM stationnaires sur la droite $\mathbb{R}^1$, qui s'identifient à une classe simple de processus de renouvellement à deux états. Le troisième paragraphe est consacré à un exemple un peu plus général, celui des schémas booléens à grains primaires convexes, c'est-à-dire aux processus de Poisson concentrés sur $C(\mathcal{K}')$. On s'attache, en particulier, à l'interprétation des paramètres dans le cas stationnaire. Le paragraphe suivant donne la caractérisation générale des EFASMID stationnaires. Il apparaît que tout EFASMID stationnaire est réunion de cylindres dont les bases sont des schémas booléens à grains convexes dans des sous-espaces convenables, de sorte que les schémas booléens et les variétés linéaires poissoniennes constituent les deux prototypes à partir desquels est construit l'EFASMID le plus général. On montre, en particulier, qu'un EFA est un réseau poissonien si et seulement si il est stable, stationnaire et semi-markovien. On étudie également certains paramètres de ces EFASMID, et notamment les granulométries linéaires et les covariances. Il apparaît, en particulier, que le moment Q(h) est toujours de type positif dans $\mathbb{R}^d$.

5-1 LA PROPRIETE SEMI-MARKOVIENNE.

Lorsque C, K et K' sont trois compacts de $\mathbb{R}^d$, on dit que C <u>sépare K et K'</u> si pour tout $x \in K$ et tout $x' \in K'$ le segment $[x, x'] = \{(1-\lambda)x + \lambda x', 0 \leq \lambda \leq 1\}$ rencontre le compact C (définition 4-2-1). En particulier, si K ou K' est vide, tout compact C sépare K et K'. Si au contraire $C = \emptyset$, C ne sépare K et K' que si l'un de ces deux compacts est vide. Dans ces conditions, posons la définition suivante :

Définition 5-1-1.- Soit A un EFA et Q la fonctionnelle sur $\mathcal{K}$ définie par $Q(K) = P(\mathcal{F}_K)$. On dit que A est semi-markovien si l'on a :

$$(5\text{-}1\text{-}1) \qquad Q(K \cup K' \cup C)\, Q(C) = Q(K \cup C)\, Q(K' \cup C)$$

pour K, K', $C \in \mathcal{K}$ tels que C sépare K et K'.

Examinons la signification de la relation (5-1-1). Si $Q(C) = 0$, elle est automatiquement vérifiée. Si $Q(C) \neq 0$, elle signifie que les fermés aléatoires $A \cap K$ et $A \cap K'$ sont conditionnellement indépendants lorsque $\mathcal{F}^C$ est réalisée (c'est-à-dire lorsque A est disjoint de C) d'où la terminologie.

En effet, désignons par A' l'EFA A pris conditionnellement en $\mathcal{F}^C$, et par P' la probabilité qui lui est associée sur σ_f, soit $P'(\mathcal{O}) = P'(\mathcal{O} \cap \mathcal{F}^C)/Q(C)$, $\mathcal{O} \in \sigma_f$. En particulier, la fonctionnelle Q' associée à A' est définie par $Q'(K_1) = P'(\mathcal{F}^{K_1}) = Q(K_1 \cup C)/Q(C)$. La relation (5-1-1) s'écrit donc $Q'(K \cup K') = Q'(K)\, Q'(K')$. Soient K_1 et K_1' deux autres compacts tels que $K_1 \subset K$ et $K_1' \subset K'$. A fortiori, C sépare K_1 et K_1', et la relation (5-1-1) donne $Q'(K_1 \cup K_1') = Q'(K_1)\, Q'(K_1')$, ce qui s'écrit aussi

$$P'(\{A' \cap K \in \mathcal{F}^{K_1}\} \cap \{A' \cap K' \in \mathcal{F}^{K_1'}\}) = P'(\{A' \cap K \in \mathcal{F}^{K_1}\})\, P'(\{A' \cap K' \in \mathcal{F}^{K_1'}\})$$

D'après la relation (2-3-5), il en résulte bien que les EFA $A' \cap K$ et $A' \cap K'$ sont indépendants.

Dans ce qui suit, nous écrirons EFASM au lieu d'ensemble fermé aléatoire semi-markovien. Notons une propriété simple, qui sera utile ultérieurement :

Proposition 5-1-1.- Si A est un EFASM et K_0 un compact convexe, le dilaté $A \oplus \check{K}_0$ est encore un EFASM.

En effet, si C sépare K et K' et si K_0 est convexe, on vérifie sans peine que $C \oplus K_0$ sépare $K \oplus K_0$ et $K' \oplus K_0$. La fonctionnelle Q_{K_0} associée à $A \oplus \check{K}_0$ est définie par $Q_{K_0}(K) = Q(K \oplus K_0)$. D'après la relation (5-1-1), on a donc $Q_{K_0}(K \cup K' \cup C)\, Q_{K_0}(C) = Q((K \cup K' \cup C) \oplus K_0)\, Q(C \oplus K_0) = Q((K \oplus K_0) \cup (K' \oplus K_0) \cup (C \oplus K_0))\, Q(C \oplus K_0) = Q_{K_0}(K \cup C)\, Q_{K_0}(K' \cup C)$, et $A \oplus \check{K}_0$ est semi-markovien.

Dans toute la suite, ilssera commode de poser $\phi = -\log Q$. La propriété semi-markovienne est donc, d'après (5-1-1) caractérisée par la relation :

$$\phi(K \cup K' \cup C) + \phi(C) = \phi(K \cup C) + \phi(K' \cup C) \tag{5-1-2}$$

D'après la Proposition 4-5-1, $K \cap K'$ sépare K et K' si K, K' et $K \cup K'$ sont dans $C(\mathcal{K})$, et la relation (5-1-2) donne alors $\phi(K \cup K') + \phi(K \cap K') = \phi(K) + \phi(K')$. Autrement dit, <u>la fonctionnelle $\phi = -\log Q$ associée à un EFASM est C-additive sur $C(\mathcal{K})$</u>.

En particulier, si un EFASM est <u>stationnaire</u> et <u>isotrope</u>, sa fonctionnelle ϕ est invariante pour les déplacements de l'espace euclidien $\mathbb{R}^d$. D'après le Théorème 4-1-1, il existe donc des constantes $\beta_i \geq 0$, $i = 1,2,..d$ telles que l'on ait :

$$\phi(K) = -\log Q(K) = \sum_{i=1}^{d} \beta_i W_i(K) \qquad (K \in C(\mathcal{K})) \tag{5-1-3}$$

les W_i désignant les fonctionnelles de Minkowski.

Un EFASM n'est pas nécessairement indéfiniment divisible pour la réunion. On verra un contre-exemple simple dans le paragraphe 5-2. Mais dans ce qui suit nous allons surtout nous attacher à l'étude des <u>EFASM indéfiniment divisibles</u>, soit en abrégé EFASMID. Dans ce cas, la C-additivité de la fonctionnelle ϕ est caractéristique de la propriété semi-markovienne. Plus précisément :

<u>THEOREME 5-1-1</u> - Soit A un EFA indéfiniment divisible et sans points fixes, et $\phi = -\log Q$ la fonctionnelle définie sur $\mathcal{K}$ par $\phi(K) = -\log P(\mathcal{F}^K)$. Alors, les trois conditions suivantes sont équivalentes :

a/- A est semi-markovien.

b/- La fonctionnelle ϕ est C-additive sur $C(\mathcal{K})$.

c/- A est la réunion d'un processus de Poisson sur $C(\mathcal{F}')$.

On a déjà vu que a/ entraîne b/. Supposons b/ vérifiée. D'après la Proposition 3-2-1, l'EFAID A est réunion des fermés d'un processus de Poisson sur $\mathcal{F}'$ associée à la mesure σ-finie θ vérifiant $\theta(\mathcal{F}_K) = \phi(K)$. Soit $\{B_n\}$ une suite de compacts tels que $B_n \subset \mathring{B}_{n+1}$, $B_n \uparrow E = \mathbb{R}^d$. Pour n assez grand, on a $\phi(B_n) > 0$ (sinon $A = \emptyset$ p.s., et c/ est vrai), et $K \to \phi(K \cap B_n)/\phi(B_n)$ est une capacité de Choquet associée à une probabilité P_n sur σ_f. Comme ϕ est C-additive, il en est de même de

$K \to \phi(K \cap B_n)/\phi(B_n)$, et par suite, d'après le théorème 4-2-1, la probabilité P_n est concentrée sur $C(\mathcal{K}')$. Il en est donc de même de la mesure θ, limite inductive des mesures $\phi(B_n)\, P_n$. Par suite, c/ est vrai.

Enfin, si c/ est vrai, avec les mêmes notations que ci-dessus, le théorème 4-2-1 donne $\phi((K \cup K' \cup C) \cap B_n) + \phi(C \cap B_n) = \phi((K \cup C)\, B_n) + \phi((K' \cup C) \cap B_n)$ dès que C sépare K et K'. Par suite, en faisant $n \uparrow \infty$, la relation (5-1-2) est vérifiée et A est un EFASMID.

D'après ce théorème, les réseaux poissoniens étudiés au paragraphe 3-5 sont des EFASMID. Nous allons donner d'autres exemples plus généraux, et pour cela commencer par étudier complètement le cas de l'espace à une seule dimension. On notera que si A est un EFASM (resp. un EFASMID) et V une variété linéaire de dimension $k < d$, identifiée à l'espace euclidien $\mathbb{R}^k$, alors $A \cap V$ est un EFASM (resp. un EFASMID) dans $\mathbb{R}^k$, appelé EFASM (EFASMID) induit par A sur la variété V. Il est clair, en effet, que $A \cap V$ vérifie encore la relation (5-1-1) pour K, K' et C contenus dans V. En particulier, l'étude du cas unidimensionnel à laquelle nous allons maintenant procéder est applicable aux EFASM induits sur les droites de $\mathbb{R}^d$ par un EFASM stationnaire quelconque dans $\mathbb{R}^d$.

5-2 EFASM STATIONNAIRES SUR LA DROITE REELLE.

Soit A un EFASM stationnaire sur $\mathbb{R}^1$. La probabilité $Q([x,x+h])$ pour que le segment $[x,x+h]$ soit disjoint de A ne dépend donc pas du point d'appui x, et sera noté simplement $Q(h)$. Il est clair que la propriété semi-markovienne entraîne l'équation fonctionnelle $Q(h_1+h_2) = Q(h_1)Q(h_2)$ $(h_1, h_2 \geq 0)$. En effet, le point h_1 sépare les compacts $[o,h_1]$ et $[h_1,h_1+h_2]$, et il suffit d'appliquer (5-1-1). Comme $h \to Q(h)$ est non croissante sur $\mathbb{R}_+$, il en résulte, comme on sait, que $Q(h)$ est de la forme :

$$Q(h) = q\, e^{-\theta h} \tag{5-2-2}$$

pour deux constantes q et $\theta \geq 0$. D'ailleurs, $q = Q(o) = P(x \notin A)$ $(x \in \mathbb{R}_1)$ vérifie même $0 \leq q \leq 1$. Si $q = 0$, A est p.s. égal à $\mathbb{R}^1$, et nous supposerons donc $q > 0$. Si $\theta = 0$, on a $Q(h) = a = C^{ste}$, et on a $P(A = \emptyset) = q$, $P(A = \mathbb{R}^1) = p = 1-q$. Nous supposerons donc $\theta > 0$. Si $q = 1$, soit $p = 0$, il est facile de voir, d'après la propriété semi-markovienne, que A est alors <u>un processus de Poisson ponctuel</u> de densité θ sur $\mathbb{R}^1$. Supposons donc $0 < q < 1$ strictement.

Conformément aux notations du paragraphe 2-7, nous désignerons par $P(h)$ la probabilité pour qu'un segment $[x,x+h]$ soit contenu dans A, par $C(h)$ la covariance, c'est-à-dire $C(h) = P(x \in A$ et $x+h \in A)$, et par $p - F(h)$ la probabilité pour qu'il existe un segment de longueur $\geq h$ contenu dans A et contenant un point x donné, soit $p - F(h) = P(x \in A_{[o,h]})$, $A_{[o,h]}$ désignant l'ouverture de A selon le segment $[o,h]$. On a vu au paragraphe 2-7 que $P(h)$ admet une dérivée $P'(h)$ en tout $h > 0$ et que l'on a :

$$p - F(h) = P(h) - h\,P'(h) \qquad (h > 0) \tag{5-2-3}$$

Par contre, l'existence de la dérivée à droite $P'(o)$ en $h = 0$ n'est pas évidente. Mais $(1/p)\,P(h)$ est la probabilité pour que 0 soit l'origine d'un segment de longueur aléatoire $L \geq h$ contenu dans A (conditionnellement pour $0 \in A$). La loi de L est donc la mesure $-(1/p)\,d\,P(h)$. Cette loi ne peut pas admettre d'atome en 0. En effet, si la loi de L admet un atome $\alpha > 0$ en 0, $p\alpha$ est la probabilité pour que le point 0 appartienne à la frontière ∂A de A, et l'espérance du nombre N de points frontières tombant dans le segment $[o,1]$ est alors $E(N) = \infty$. Mais, d'après (5-2-2) et la propriété semi- markovienne, $E(N)$ est inférieur à l'espérance du nombre de points d'un processus de Poisson ponctuel de densité θ tombant dans le même segment, soit $E(N) \leq \theta$. Or $\theta = \infty$ entraîne $Q(h) = 0$ pour $h > 0$, et aussi pour $h = 0$, puisque $h \downarrow 0 \Rightarrow Q(h) \uparrow Q(o) = q$, et nous avons supposé $q > 0$. Autrement dit, il existe une fonction mesurable $\varpi \geq 0$ telle que l'on ait :

$$(1/p)\;P(h) = \int_h^{\infty} \varpi(x)\,dx \tag{5-2-4}$$

Conditionnellement lorsque $0 \notin A$, nous pouvons considérer les deux variables aléatoires L_o et L_1 telles que L_o soit l'abscisse du premier point de A situé à droite de 0 et $L_o + L_1$ l'abscisse du point le plus à droite de la composante connexe de A commençant en L_o (donc $L_1 = 0$ si cette composante est réduite à un point). Ces deux variables sont d'ailleurs indépendantes, d'après la propriété semi-markovienne. La première, L_o, admet, d'après (5-2-2), la loi exponentielle de densité $\theta\, e^{-\theta h}$, $h \geq 0$. Posons $F_1(x) = P(L_1 < x)$. Pour déterminer cette loi F_1, considérons l'évènement suivant : $\{x \notin A,\ x+h \in A$ et il y a un seul point frontière sur le segment ouvert $]x,x+h[\}$. La probabilité de cet évènement est $q\,P(L_o + L_1 \geq h)$. En renversant le sens de parcours de l'axe des x, on voit que cet évènement a aussi la probabilité $p\,P(L_o + L_1' \geq h)$, L_1' désignant cette fois la VA de densité $\varpi(x)$. On en déduit la relation :

$$q\,\theta \int_0^h [1 - F_1(x)]\, e^{-\theta(h-x)} dx = p \int_0^h \varpi(x)\, e^{-\theta(h-x)} dx$$

et par suite :

(5-2-5) $$1 - F_1(x) = (p/q\theta)\ \varpi(x)$$

En particulier, la VA L_1 admet <u>une espérance finie</u>, que nous désignerons par m_1 :

$$m_1 = \int_0^\infty [1 - F_1(x)]\ dx = p/(q\theta)$$

En posant $m_o = 1/\theta = E(L_o)$, on voit que cette relation entraîne $p = m_1/(m_o+m_1)$ et $q = m_o/(m_o+m_1)$, et aussi $\theta q = 1/(m_o+m_1)$. Autrement dit, l'espérance θq du nombre d'entrées dans A par unité de longueur est égal à l'inverse de l'espérance d'une séquence complète $L_o + L_1$.

Si nous faisons $x \downarrow 0$ dans (5-2-5), nous obtenons à gauche la probabilité $1-\beta = P(L_1 > 0)$, $\beta = P(L_1 = 0)$ désignant l'atome éventuel en 0 de la loi F_1. D'après (5-2-4), on a aussi :

$$\frac{p-P(h)}{h} = \frac{\theta q}{h} \int_0^h [1 - F_1(x)]\ dx$$

Comme $(1 - F_1(x) \uparrow (1-\beta)$ pour $x \downarrow 0$, on en déduit que $P(h)$ admet une dérivée à droite en $h = 0$, soit :

$$P'_+(o) = -\ \theta\ q(1-\beta) = -\ \theta q\ P(L_1 > 0)$$

On note, en particulier, que les dérivées à droite en 0 de $P(h)$ et $Q(h)$ ne sont égales que si la loi F_1 ne comporte pas d'atome $\beta > 0$ à l'origine.

L'EFASM stationnaire A est entièrement défini par le paramètre θ et la loi F_1. En effet, d'après la propriété semi-markovienne, ce processus repart à 0 chaque fois que le point courant x sort de A. Il s'agit d'<u>un processus de renouvellement</u> où l'on voit se succéder sur la droite réelle des segments de longueurs L_o, L_1, L'_o, L'_1... indépendantes obéissant les unes à la loi exponentielle $e^{-\theta h}$, les autres à la loi F_1.

Inversement, d'ailleurs, on sait ([ ]) qu'un processus de renouvellement ainsi construit est ergodique et peut être rendu stationnaire par un choix convenable de la loi initiale (et donc définir un EFASM) si et seulement si la loi F_1 admet une espérance finie $m_1 = \int_0^\infty [1 - F_1(x)]dx < \infty$. On a alors $m_o = 1/\theta$, $p = m_1/(m_o+m_1)$, $q = m_1/(m_o+m_1)$, $Q(h) = q\ \exp(-\theta h)$ et $P(h) = q\theta \int_h^\infty [1 - F_1(x)]dx$.

La loi F_1 représente <u>la granulométrie en nombre</u> des traversées de l'EFASM A. La probabilité $p - F(h)$ pour qu'un point x donné appartienne à un segment de A de longueur supérieure à h (c'est-à-dire à l'ouverture de A selon le segment [o,h]) est donnée par la relation (5-2-3). Compte tenu de (5-2-5), on trouve $F(dh) = h\,\theta q\, F_1(dh) = p(h/m_1)\, F_1(dh)$, et cette relation montre bien que la loi F/p représente <u>la granulométrie "en longueur"</u>, c'est-à-dire une granulométrie dans laquelle "chacune" des traversées linéaires est comptée pour un poids proportionnel à sa longueur.

Examinons maintenant la <u>covariance</u> $C(h) = P(x \in A \text{ et } x+h \in A)$. Elle est reliée à la fonction $P(h)$ par une équation de convolution. En effet, on a $P(0 \in A \text{ et } h \notin A) = p - C(h)$. Mais cet évènement s'exprime aussi en disant que 0 est l'origine d'un segment de longueur $L_1' < h$ et que $h \notin A$. D'après la propriété semi-markovienne, on en déduit :

$$(5\text{-}2\text{-}6) \qquad p - C(h) = -\frac{1}{q}\int_0^h P'(x)\,[1 - 2p + C(h-x)]\,dx$$

ou, sous forme équivalente :

$$p - C(h) = \theta\int_0^h [1 - F_1(x)]\,[1 - 2p + C(h-x)]\,dx$$

Montrons que la covariance admet en $h = 0$ une <u>dérivée à droite</u> $C_+'(o) = P_+'(o) = -\theta q(1-\beta)$. En effet, les inégalités évidentes $p \geq C(h) \geq P(h)$ donnent $0 \leq p - C(h) \leq p - P(h)$, puis, en portant dans (5-2-6) :

$$\frac{p - P(h)}{h} \geq \frac{p - C(h)}{h} \geq \frac{\theta}{h}\int_0^h [1 - F_1(x)]\,[1 - 2p + P(h-x)]$$

Il est facile de vérifier que les deux termes extrêmes de ces inégalités ont la même limite $q\,\theta(1-\beta) = -P_+'(o)$, d'où le résultat.

Il reste enfin a examiner le cas où A est un EFASMID. Remarquons d'ailleurs que A n'est pas nécessairement indéfiniment divisible. Par exemple, si la loi F_1 des traversées de A est la loi de la variable L_1 p.s. égale à une constante ℓ donnée, il est facile de voir que l' EFASM correspondant <u>n'est pas indéfiniment divisible</u>. Nous verrons dans les paragraphes qui suivent (mais cela est à peu près évident dans le cas de l'espace a une seule dimension) que tout EFASMID sur $\mathbb{R}$ est réunion de segments fermés dont les longueurs aléatoires sont indépendantes et obéissent à une même loi G, et dont les extrémités gauches (par exemple) constituent un processus de Poisson ponctuel de densité θ. On vérifie sans difficulté la relation :

$$q = \exp(-\theta\,\mu)$$

où $\mu = \int_0^\infty [1 - G(x)]dx$ est l'espérance de la loi G des segments "primaires". En particulier, $A = \mathbb{R}$

p.s. si $\mu = \infty$. Nous supposerons donc $\mu < \infty$. Il est également facile de vérifier la relation :

$$Q(h) = q\, e^{-\theta h}$$

En comparant avec (5-2-2), on voit que le paramètre θ de cette relation est bien identique à la densité des germes primaires, que nous avons également désignée par θ. En ce qui concerne la covariance, on trouve de même sans difficulté :

$$(5\text{-}2\text{-}7) \qquad 1 - 2p + C(h) = q \exp\{-\theta \int_0^h [1 - G(x)]\, dx\}$$

La comparaison des relations (5-2-7) et (5-2-6) montre que la granulométrie en nombre F_1 de l'EFASMID A se déduit de la granulométrie G des grains primaires par une équation intégrale que l'on peut, en principe, toujours résoudre au moyen d'une transformation de Laplace. En particulier, on peut par ce procédé calculer la probabilité $P(\ell)$ pour qu'un segment de longueur ℓ donné soit entièrement recouvert par la réunion A des segments primaires aléatoires (problème dit du recouvrement). En sens inverse, on peut, en résolvant (5-2-6) trouver la covariance C(h) associée à une granulométrie F_1 donnée. Mais en général, pour une loi F_1 quelconque, $-C'(h)/C(h)$ ne sera pas une fonction décroissante, et on ne pourra pas trouver de loi primaire G telle que la granulométrie de A soit F_1. C'est ce qui se produit, en particulier, comme on l'a vu, si F_1 est la loi de la V.A. p.s. égale à une constante donnée. Il serait intéressant de trouver une condition nécessaire et suffisante que F_1 doive vérifier pour que ce problème soit soluble, mais nous n'aborderons pas cette question.

5-3 LES SCHEMAS BOOLEENS.

Lorsque l'EFASMID A du théorème 5-1-1 est réunion du processus de Poisson associé à une mesure σ-finie θ concentrée sur $C(\mathcal{K}') \subset C(\mathcal{F}')$, nous dirons, suivant une terminologie qui se comprend d'elle-même, que A est un schéma booléen à grains primaires convexes et compacts. En effet, la mesure θ étant σ-finie, A est p.s. réunion localement finie de convexes compacts ("les grains primaires") i.e. avec une probabilité unité un compact K donné ne rencontre qu'un nombre fini de ces grains primaires. C'est à cette classe d'EFASMID que nous allons consacrer ce paragraphe, en attachant une attention particulière au cas stationnaire (déjà envisagé au paragraphe 3-2).

Plus généralement d'ailleurs, nous appellerons <u>schéma booléen à grains primaires compacts</u> (non nécessairement convexes) un EFAID A équivalent à la réunion des compacts d'un processus de

Poisson sur $\mathcal{K}'$. (Proposition 3-2-1). Désignons par θ la mesure σ-finie concentrée sur $\mathcal{K}'$ associée à ce processus de Poisson, et posons $\phi(K) = \theta(\mathcal{F}_K)$, $K \in \mathcal{K}$. Nous allons utiliser les résultats de la Proposition 3-2-3 pour caractériser cette classe d'EFAID comme la réunion d'une famille de fermés aléatoires p.s. compacts indépendants A_{x_i} où les $x_i \in A_{x_i}$ que l'on peut appeler les germes des grains primaires A_{x_i} constituent un processus de Poisson ponctuel sur l'espace $E = \mathbb{R}^d$. Pour appliquer la Proposition 3-2-1 nous avons besoin de définir sur $\mathcal{K}$ une application mesurable $K \to x(K)$ permettant d'identifier un point particulier de chaque $K \in \mathcal{K}$. Pour cela, nous utiliserons <u>la relation d'ordre lexicographique</u> entre points $x = (x_1,\ldots,x_d)$ de $\mathbb{R}^d$, les x_i, $i = 1,2,..d$ désignant les coordonnées de x, relation définie par $x \leq y$ si $x_d < y_d$, ou $x_d = y_d$ et $x_{d-1} < y_{d-1}$, ou ..., ou $x_d = y_d$, $x_{d-1} = y_{d-1}$,... $x_2 = y_2$ et $x_1 \leq y_1$. Il est facile de voir que pour tout $K \in \mathcal{K}$ il existe un point unique $x(K) \in K$ vérifiant $x(K) = \text{Inf}\ \{x,\ x \in K\}$ pour cette relation d'ordre, et que l'application $K \to x(K)$ ainsi définie est <u>continue</u> sur $\mathcal{K}$.

En effet, notons d'abord que si deux suites $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$ convergeant dans $\mathbb{R}^d$ en vérifiant $x_n \leq y_n$, il en résulte $\lim x_n \leq \lim y_n$ (autrement dit la relation d'ordre lexicographique est fermée dans $\mathbb{R}^d$). Soient alors $\{K_n\}$ une suite convergeant vers K dans $\mathcal{K}$, et montrons $\lim x(K_n) = x(K)$. Les K_n sont contenus dans un compact fixe K_o (Théorème 1-4-1), et il existe donc une suite partielle $\{K_{n_k}\}$ telle que $\{x(K_{n_k})\}$ admette une limite y dans $\mathbb{R}^d$. Soit x un point de K, et $\{x_n\}$ une suite convergeant vers x dans $\mathbb{R}^d$ en vérifiant $x_n \in K_n$. Par définition, on a $x(K_n) \leq x_n$, donc, la relation $\leq$ étant fermée, $y \leq x$ pour tout $x \in K$, et $y = x(K)$. Par suite, la suite $\{x(K_n)\}$ elle-même converge vers $x(K)$.

Nous pouvons prolonger sur $\mathcal{F}'$ cette application $K \to x(K)$, en posant par exemple $x(F) = 0$ pour $F \in \mathcal{F}' \setminus \mathcal{K}'$. Comme la mesure σ-finie θ est concentrée sur $\mathcal{K}'$, l'application $F \to x(F)$ est continue θ presque partout sur $\mathcal{F}'$, donc mesurable. D'autre part, si B est unncompact quelconque, on a $\theta(x^{-1}(B)) \leq \theta(\mathcal{F}_B) < \infty$, puisque θ est σ-finie et $x(F) \in F$ θ-presque partout. La condition de la Proposition 3-2-3 est donc remplie. Par suite, il existe une mesure μ σ-finie sur $\mathbb{R}^d$ et, pour μ-presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, un EFA $A(x)$ dont la probabilité P_x sur σ_f est mesurable en x et vérifie pour tout $\mathcal{O} \in \sigma_f$ et tout borélien B dans $\mathbb{R}^d$:

$$(5\text{-}3\text{-}1) \qquad \theta(\mathcal{O} \cap x^{-1}(B)) = \int_B P_x(\mathcal{O})\ \mu(dx)$$

D'après le corollaire 1 de la Proposition 3-2-3, on a d'ailleurs pour μ-presque tout x : $A(x) \in \mathcal{K}'$ et $x(A_x) \in A(x)$ presque surement pour P_x.

Considérons l'image dans $\mathbb{R}^d$ des processus de Poisson sur $\mathcal{K}'$ par l'application $F \to x(F)$. Cette image est <u>un processus de Poisson ponctuel sur $\mathbb{R}^d$</u> associé à la mesure σ-finie μ de la relation (5-3-1). En effet, le nombre $N(B)$ des points de ce processus image contenu dans un borélien donné $B \subset \mathbb{R}^d$ est égal au nombre des fermés du processus de Poisson sur $\mathcal{F}'$ contenu dans $x^{-1}(B)$. C'est donc une variable poissonienne d'espérance finie $E(N(B)) = \theta(x^{-1}(B)) = \mu(B)$, d'après (5-3-1). Si B_1 et B_2 sont deux boréliens disjoints, on a $x^{-1}(B_1) \cap x^{-1}(B_2) = \emptyset$ et $N(B_1)$ et $N(B_2)$ sont indépendants, ce qui justifie notre affirmation.

Inversement, donnons-nous une mesure μ σ-finie sur $\mathbb{R}^d$, et, pour μ presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, une probabilité P_x sur σ_f concentré sur $\mathcal{K}'$ telle que pour tout $\mathcal{O} \in \sigma_f$ l'application $x \to P_x(\mathcal{O})$ soit mesurable pour μ. La formule $\theta(\mathcal{O}) = \int P_x(\mathcal{O})\ \mu(dx)$ définit sur $\mathcal{F}'$ une mesure θ σ-finie concentrée sur $\mathcal{K}'$ si et seulement si on a $\int P_x(\mathcal{F}_K)\ \mu(dx) < \infty$ pour tout $K \in \mathcal{K}$. Il n'est pas nécessaire de supposer $x(A(x)) \in A(x)$ p.s. pour P_x (l'application particulière $K \to x(K)$ utilisée plus haut n'avait d'autre raison d'être que d'associer un point déterminé de $\mathbb{R}^d$ à chaque compact $K \in \mathcal{K}'$ et peut être remplacée par n'importe quelle autre application mesurable de $\mathcal{K}$ dans $\mathbb{R}^d$). La réunion des fermés du processus de Poisson sur $\mathcal{F}'$ associé à cette mesure θ concentrée sur $\mathcal{K}'$ est alors par définition un schéma boolean à grains primaires convexes. Nous pouvons donc énoncer :

<u>Proposition 4-3-1</u>.- Soit A un EFA, et ψ la fonctionnelle sur $\mathcal{K}$ définie par $\psi(K) = -\log Q(K) = -\log P(A \cap K = \emptyset)$. Alors, les trois conditions suivantes sont équivalentes :

a/ A est un schéma booléen à grains primaires compacts.

b/ Il existe une famille $x \to A(x)$ d'EFA p.s. compacts mesurables en x (c'est-à-dire telle que l'application $x \to T_x(K)$ où on pose $T_x(K) = P(A(x) \in \mathcal{F}_K)$, soit mesurable pour chaque $K \in \mathcal{K}$) et un processus de Poisson ponctuel sur $\mathbb{R}^d$ associé à une mesure μ σ-finie possédant les propriétés suivantes : $\int T_x(K)\ \mu(dx) < \infty$ pour tout $K \in \mathcal{K}$, et A est équivalent à la réunion $\cup \{A(x_i)\}$, les x_i désignant les points du processus de Poisson sur $\mathbb{R}^d$.

c/ La fonctionnelle ψ est $< \infty$ sur $\mathcal{K}$ et admet une représentation de la forme :

$$\psi(K) = \int T_x(K)\ \mu(dx) \qquad (K \in \mathcal{K}) \tag{5-3-2}$$

μ désignant une mesure σ-finie sur $\mathbb{R}^d$, et $K \to T_x(K)$, $x \in \mathbb{R}^d$ une famille de capacités vérifiant les conditions du théorème de Choquet, telle que $x \to T_x(K)$ soit μ-mesurable pour tout $K \in \mathcal{K}$, et que l'on ait $\lim \downarrow T_x(r\ B^c) = 0$ pour $r \uparrow \infty$ (B, boule unité de $\mathbb{R}^d$).

Compte tenu des théorèmes 4-2-1 et 5-1-1, le corollaire suivant est évident :

COROLLAIRE - Lorsque l'une des conditions de l'énoncé est vérifiée, A est un schéma booléen à grains primaires convexes si et seulement si, pour μ-presque tout x, A(x) est p.s. convexe, ou encore si et seulement si, pour μ-presque tout x, la fonctionnelle T_x est C-additive.

Examinons maintenant le cas où A est stationnaire, c'est-à-dire le cas où la fonctionnelle ϕ est invariante par translation. Dans ce cas, comme on l'a d'ailleurs déjà vu au paragraphe 3-3, il résulte du corollaire 3 de la Proposition 3-2-3 que la mesure μ est invariante par translation, donc est proportionnelle à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$, de sorte que le processus de Poisson ponctuel associé à μ est stationnaire. De plus, pour μ-presque tout x et x', les EFA A(x') et $A(x) \oplus \{x'-x\}$ sont équivalents. Autrement dit, chaque A(x) peut être remplacé par le translaté A'_x d'un EFA équivalent au translaté par x d'un même EFA $A' = A_0$. En particulier (formule (3-3-1)), la fonctionnelle ϕ est de la forme :

$$\phi(K) = a\, E(V(\check{A}_0 \oplus K)) = a\, E(V(A_0 \oplus \check{K})) \tag{5-3-3}$$

où V est le volume et α une constante ≥ 0.

En particulier, A est un schéma booléen stationnaire à grains convexes et compacts si et seulement si la fonctionnelle ϕ qui lui est associée est de la forme (5-3-3) pour un EFA p.s. convexe A_0 vérifiant $E(V(A_0 \oplus K)) < \infty$, $K \in \mathcal{K}$. Jusqu'à la fin de ce paragraphe, nous allons supposer que ϕ vérifie cette condition, et examiner les particularités qui en résultent.

Schémas induits sur les droites.

Il est clair que A induit sur une droite de $\mathbb{R}^d$ identifiée à $\mathbb{R}^1$ un schéma booléen stationnaire A(s) à grains primaires convexes et compacts dont la probabilité ne dépend que de la direction s de cette droite. Pour plus de commodité, nous considérerons s comme un point de la sphère unité S_0 aussi bien que comme un vecteur unité de $\mathbb{R}^d$. Il est clair que A(s) et A(-s) sont équivalents. D'après le paragraphe 5-2, la loi de A(s) est entièrement déterminée par la donnée de la densité $\theta(s)$ des germes ponctuels sur la droite et de la granulométrie G_s des grains convexes primaires (qui sont des segments de droite).

Déterminons d'abord $\theta(s)$. Si h est un vecteur de $\mathbb{R}^d$, la probabilité Q(h) pour qu'un segment $\{x+\lambda h,\ 0 \leq \lambda \leq 1\}$ (x quelconque dans $\mathbb{R}^d$) soit disjoint de A est égale, d'après (5-3-3) à

$$Q(h) = \exp \{- a\, V(A_o \oplus \bar{h})\} \qquad (\bar{h} = \{\lambda h,\ 0 \le \lambda \le 1\})$$

Si s est la direction de h ($s = h/|h|$, $h \neq 0$), on a pour tout $K \in C(\mathcal{K})$: $V(K \oplus \bar{h}) = |h|\ \mu_{d-1}(\Pi_{s^\perp} K)$, μ_{d-1} désignant la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^{d-1}$, et aussi, d'après la proposition 4-5-2, $V(K \oplus \bar{h}) = |h| \int_{\mathcal{S}_{d-1}} |s^\perp, S^\perp|\ G^K_{d-1}\ (dS)$, $G^K_{d-1}\ (dS)$ désignant la mesure superficielle de $K \in C(\mathcal{K})$. Lorsque K est remplacée par l'EFA A_o p.s. compact et convexe, $\mu_{d-1}\ (\Pi_{s^\perp} A_o)$ et $G^{A_o}_{d-1}$ deviennent une variable et une mesure aléatoire. Autrement dit, on a $Q(h) = q\ \exp\{-\theta(s)\ |h|\}$, avec :

$$(5\text{-}3\text{-}4) \qquad \theta(s) = a\ E[\mu_{d-1}\ \Pi_{s^\perp} A_o) = a \int_{\mathcal{S}_{d-1}} |s^\perp, S|\ G_{d-1}\ (dS)$$

G_{d-1} désignant la mesure positive égale à <u>l'espérance de la mesure superficielle aléatoire</u> $G^{A_o}_{d-1}$ (formule (4-5-5)). D'après le théorème 4-5-1, il en résulte notamment que la fonction $h \to Q(h) = q\ \exp\{-|h|\ \theta(h/|h|)\}$ est <u>de type positif dans $\mathbb{R}^d$</u>.

Examinons maintenant la <u>covariance</u> $h \to C(h)$ de A dans $\mathbb{R}^d$. On a $P(x \notin A,\ x+h \notin A) = \exp\{-\phi(\{x, x+h\}) = 1 - 2p + C(h)$. D'après (5-3-3), $\phi(\{x,x+h\}) = a\ [2\ E(V(A_o)) - E(V(A_o \cap A_o \oplus \{h\}))]$. On a vu au paragraphe 4-3 qu'à tout compact $K \in C(\mathcal{K})$ est associée la fonction $h \to g_K(h) = \int 1_K(x)\ 1_K(x+h)\ dx$. Lorsque K est remplacée par A_o, on obtient une fonction aléatoire $h \to g_{A_o}(h)$. Nous désignerons par g l'espérance de cette fonction aléatoire g_{A_o}, soit, d'après (4-3-1) :

$$g(h) = E(g_{A_o}(h)) = E[V(A_o \cap A_o \oplus \{h\})]$$

En posant $q = \exp\{-a\ E(V(A_o))\} = P(x \notin A)$, on voit donc que la covariance $C(h)$ est donnée par la formule

$$(5\text{-}3\text{-}5) \qquad C(h) = p - q + q\ \exp\{-a\ [g(o) - g(h)]\}$$

Si nous identifions avec la relation (5-2-7), nous voyons que la granulométrie G_s des grains primaires induits sur les droites de direction s est définie par :

$$(5\text{-}3\text{-}6) \qquad \theta(s) \int_0^r [1 - G_s(\xi)]\ d\xi = a\ [g(o) - g(rs)] \qquad (r \ge 0)$$

Reportons-nous à la Proposition 4-3-1 pour interpréter ce résultat. Si le convexe aléatoire A_o est p.s. d'intérieur non vide, la fonction $[g_{A_o}(o) - g_{A_o}(rs)]/r$ admet p.s. la limite $\gamma_{A_o}(o;s) = \mu_{d-1}\ (\Pi_{s^\perp} A_o)$ pour $r \downarrow 0$. D'après (5-3-4) et (5-3-6) on a alors $\lim(1 - G_s(\xi)) = 1$ pour $\xi \downarrow 0$, autrement dit, la loi G_o est sans atome à l'origine, et, en particulier, la covariance C et la fonction Q(h) admettent, pour chaque s, la même dérivée à droite dans la direction s, soit :

$$\lim_{r\downarrow 0} \frac{C(o) - C(rs)}{r} = \lim_{r\downarrow 0} \frac{Q(o) - Q(rs)}{r} = q\ \theta(s)$$

Au contraire, supposons qu'il y ait une probabilité $\alpha > 0$ pour que A_o ait son intérieur $\mathring{A}_o$ vide. Désignons alors par A_o' et A_1' l'EFA A_o pris conditionnellement pour $\mathring{A}_o = \emptyset$ et $\mathring{A}_o \neq \emptyset$ respectivement. Pour $r \geq 0$, on a $g(rs) = (1-\alpha)\ E(g_{A_1'}(rs))$ et, pour $r \downarrow 0$, on trouve $[g(o) - g(rs)]/r \to (1-\alpha)\ E[\mu_{d-1}\ \Pi_{s^\perp} A_1']$. De la même manière, $\theta(s) = \alpha\ \theta_o(s) + (1-\alpha)\ \theta_1(s)$, avec $\theta_o(s) = aE[\mu_{d-1}\Pi_{s^\perp}A_o']$ et $\theta_1(s) = aE[\mu_{d-1}\ \Pi_{s^\perp}A_1']$. En passant à la limite pour $r \downarrow 0$ dans (5-3-6), on voit que la loi G_s admet un atome $\beta(s) > 0$ à l'origine défini par :

$$(5\text{-}3\text{-}7) \qquad 1 - \beta(s) = (1-\alpha)\ \theta_1(s)/\theta(s) = (1-\alpha)\ \theta_1(s)/[\alpha\ \theta_o(s) + (1-\alpha)\ \theta_1(s)]$$

Dans ce cas, les dérivées à droite dans la direction s de la covariance C(h) et de la fonction Q(h) sont respectivement $(1-\beta(s))\ q\ \theta(s)$ et $q\ \theta(s)$.

En résumé :

<u>Proposition 4-3-2</u>.- Si A est un schéma booléen stationnaire à grains primaires convexes et compacts, les schémas induits par A sur les droites de direction s sont caractérisés par les relations (5-3-4) et (5-3-6). En particulier, la fonction $h \to Q(h)$ est de type positif dans $\mathbb{R}^d$. Pour que Q(h) et C(h) admettent le même cône des tangentes à l'origine, il faut et il suffit que le compact aléatoire convexe A_o soit p.s. d'intérieur non vide, et il en est ainsi si et seulement si les granulométries primaires G_s induites sur les directions $s \in S_o$ sont sans atomes à l'origine. Dans le cas général, si $\alpha = P(\mathring{A}_o \neq \emptyset)$ et si $\theta_o(s)$ et $\theta_1(s)$ désignent les densités induites par les schémas booléens associés à l'EFA A_o pris conditionnellement pour $\mathring{A}_o = \emptyset$ et $\mathring{A}_o \neq \emptyset$ respectivement, la granulométrie primaire G_s possède à l'origine un atome $\beta(s)$ donné par (5-3-7).

Notons que la connaissance des schémas induits sur les droites (c'est-à-dire la connaissance de la densité $\theta(s)$ et de la granulométrie primaire G_s pour toute direction $s \in S_o$) ne suffit pas pour déterminer la loi de probabilité d'un schéma booléen stationnaire à grains primaires p.s. convexes et compacts dans $\mathbb{R}^d$, $d > 1$.

Le nombre de convexité spécifique.

Lorsque le compact K est un homothétique de la boule unit B, la formule de Steiner et la relation (5-3-3) donnent :

$$\phi(rB) = a \sum_{k=0}^{d} \binom{d}{k} r^k E(W_k(A_o)) \tag{5-3-8}$$

Ainsi, les espérances des valeurs des fonctionnelles de Minkowski pour le convexe primaire A_o constituent d'importants paramètres du schéma booléen A lui-même. Dans le cas particulier où A est isotrope, on peut supposer que A_o lui-même est isotrope,(quitte à le remplacer par son isotropisé, voir paragraphe 5-3) et la formule (5-3-8) se généralise à tout $K \in C(\mathcal{K})$. D'après la proposition 4-2-4, on trouve, en effet :

$$\phi(K) = (a/b_d) \sum_{k=0}^{d} \binom{d}{k} E[W_k(A_o)]\, W_{d-k}(K) \qquad (K \in C(\mathcal{K}))$$

de sorte que les $E[W_k(A_o)]$ déterminent entièrement la restriction de ϕ à $C(\mathcal{K})$ (mais non ϕ sur $\mathcal{K}$ tout entier).

Montrons que les mesures-espérances $E(W_k^{A_o}(dx)) = W_k(dx)$ sont en relation avec les nombres de convexité spécifiques de A lui-même et des schémas induits sur les sous-espaces de $\mathbb{R}^d$. A dire vrai, A lui-même n'a pas de nombre de convexité, au sens du paragraphe 4-7, ou, si l'on veut, on a $\nu(A) = \infty$ p.s. si A n'est pas vide. D'ailleurs, A n'appartient pas à l'anneau convexe $\mathcal{G}$. Toutefois, toute intersection de A par un compact convexe est p.s. dans $\mathcal{G}$, ou, ce qui revient au même, A est p.s. réunion localement finie de compacts $A'(x_i) \in C(\mathcal{K})$, de sorte que la formule (4-7-7) est p.s. applicable à $A \cap rB$). On en déduit l'existence des mesures aléatoires σ-finies $W_k^A(dx)$ vérifiant p.s. (4-7-7) pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_{\mathcal{K}}(\mathbb{R}^d)$. Comme l'application $\phi \to E[\int \varphi(x)\, W_k^A(dx)]$ définit une fonctionnelle linéaire, positive sur $\mathcal{C}_{\mathcal{K}}(\mathbb{R}^d)$, donc une mesure positive, nous sommes assurés de l'existence des mesures-espérances $E[W_k^A(dx)]$ vérifiant :

$$E\left[\int \Big(\sum_{x' \in \Pi_A(x,r)} \varphi(x')\Big)dx'\right] = \sum_{k=0}^{d} \binom{d}{k} r^k \int E[W_k^A(dx)]\, \varphi(x) \tag{5-3-9}$$

pour toute fonction continue φ à support compact. Mais A est stationnaire. Les mesures-espérances $E[W_k^A(dx)]$ sont donc invariantes par translation, c'est-à-dire proportionnelles à la mesure de Lebesgue dx sur $\mathbb{R}^d$. Autrement dit, il existe (d+1) constantes $w_o, w_1, \ldots w_d$ telles que $E[W_k^A(dx)] = w_k\, dx$. Nous dirons que les nombres w_k sont les densités des fonctionnelles de Minkowski pour le schéma booléen A. Du point de vue dimensionnel, w_k est homogène, à l'inverse d'un k-volume. Il est clair que $\omega_0 = E(1_A(x) = P(x \in A)$. De même, $d\ \omega_1 = E(W_1^{\ A}(rB))/(b_d\ r^d)$ pour $r > 0$ montre que $d\ \omega_1$ est l'espérance de la <u>surface spécifique</u> de A. Nous allons voir que ω_d/b_d a la signification d'un <u>nombre de convexité spécifique</u>, et vérifie la relation

(5-3-10) $$\omega_d/b_d = a\ q$$

En effet, soit $s \in S_0$ un vecteur unitaire et $S = s^{\perp} \in \mathcal{S}_{d-1}$. Moyennant un choix convenable des axes de coordonnées, l'application $K \to x(K)$ que nous avons construite au début de ce paragraphe à l'aide de la relation d'ordre lexicographique est telle que l'hyperplan $S_{x(K)}$ parallèle à S et passant par $x(K)$ soit un hyperplan limite pour K, et que K soit contenu dans le demi-espace contenant le vecteur $s_{x(K)}$. Pour ϖ presque tout $s \in S_0$, l'ensemble d'impact des hyperplans de direction S sur le convexe aléatoire A_0 est p.s. ponctuel, et les points d'impact de ces hyperplans sur les convexes primaires $A'(x_i)$ sont alors identiques aux germes poissoniens x_i. Si donc B est un borélien, l'espérance du nombre des points d'impact de S sur les $A'(x_i)$ contenus dans B est égale à a V(B). D'autre part, conditionnellement lorsque x_i est un germe poissonien, la probabilité pour que x_i ne soit contenu dans aucun autre convexe primaire (et donc pour que x_i soit un point d'impact de S sur A lui-même) est égale à q. Ainsi, l'espérance du nombre des points d'impact de S sur A contenus dans B est (pour ϖ presque tout s) a q V(B). La moyenne en s (pour ϖ) de ce nombre étant égale à $(1/b_d)\ E(W_d^{\ A}(B)) = (\omega_d/b_d)\ V(B)$, la relation (5-2-10) en résulte, et montre que ω_d/b_d est l'espérance du nombre des points d'impact par unité de volume des hyperplans de direction aléatoire s. Ainsi, ω_d/b_d a bien la signification d'un nombre spécifique de convexité. Plus généralement, pour $k = 1,2,\dots d$, on pourrait montrer que la densité ω_k pour A de la fonctionnelle de Minkowski d'indice k se déduit de l'espérance $E(W_k(A_0))$ de la même fonctionnelle pour le convexe primaire A_0 par la relation simple :

$$\omega_k = a\ q\ E(W_k(A_0))$$

<u>Schémas induits sur les variétés linéaires.</u>

Considérons maintenant le cas où le compact K de la formule (5-3-3) est un compact de Steiner (d'où, en particulier, $K = \check{K}$). D'après la Proposition 4-5-3, il existe d-1 mesures $G_k^{\ K}$ (k = 1,2... k-1) vérifiant la formule (4-5-7) pour tout compact $K' \in C(\mathcal{K}')$. Par conséquent, d'après (5-3-3), nous trouvons pour tout $r \geq 0$:

(5-3-11) $$\psi(rK) = a[r^d\ \mu_d(K) + \sum_{k=1}^{d-1} r^{d-k} \int_{\mathcal{S}_{d-k}} E[\mu_k(\Pi_{S^{\perp}} A_0)]\ G_{d-k}^{\ K}(dS) + E(\mu_d(A_0))]$$

Cette relation va nous permettre de déterminer les espérances des fonctionnelles de Minkowski pour les schémas induits sur les variétés linéaires de $\mathbb{R}^d$. En effet, soit $S_p \in \mathcal{S}_p$ la direction d'une variété de dimension p. Prenons $K = B \cap S_p$, c'est-à-dire la boule unité de S_p. La mesure $G_k^{B\cap S_p}$ est concentrée sur l'espace $\mathcal{S}_k(S_p)$ des sous-espaces de dimension k de S_p ($k \leq p$), et elle est invariante pour les rotations de S_p. Elle est donc proportionnelle à la probabilité $\varpi_k^{S_n}$ invariante sur $\mathcal{S}_k(S_p)$. En utilisant les corollaires de la Proposition 4-5-3, on trouve explicitement :

$$G_k^{B\cap S_p} = (\binom{p}{k}\, b_p/b_{p-k})\, \varpi_k^{S_p}$$

(et 0 pour $k > p$). En portant dans (5-3-11), il vient ainsi :

$$\psi(r(B \cap S_p)) = a[E(\mu_d\, A_o) + \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k}\, (b_p/b_{p-k})\, r^k \int_{\mathcal{S}_k(S_p)} E[\mu_{d-k}(\Pi_{S^\perp}\, A_o)]\, \varpi_k^{S_p}\, (dS)]$$

Mais d'autre part, dans S_p identifié à l'espace euclidien, le schéma $A_p = A \cap S_p$ induit par A est encore un schéma booléen stationnaire à grains primaires convexes. Par conséquent, il existe un compact $A_o(S_p)$ p.s. convexe dans $\mathbb{R}^p$ et tel que l'on ait :

$$\psi(K) = E[a(S_p)\, V(A_o(S_p) \oplus K)]$$

pour tout compact $K \subset S_p$. En prenant $K = r(B \cap S_p)$ et en procédant par identification avec l'expression ci-dessus de $\psi(r(B \cap S_p))$, on obtient donc :

$$a(S_p)\, E[W_k^{\,p}(A_o(S_p))] = a\, (b_p/b_{p-k}) \int_{\mathcal{S}_k(S_p)} E[\mu_{d-k}(\Pi_{S^\perp}\, A_o)]\, \varpi_k^{S_p}\, (dS)$$

($p \leq k$). L'indice p dans $W_k^{\,p}$ rappelle qu'il s'agit de la fonctionnelle de Minkowski d'indice k dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^p$. En particulier, pour $k = p$, cette formule se réduit à $a(S_p) =$ $= a\, E[\mu_{d-p}(\Pi_{S_p^\perp}\, A_o)]$. Pour $k = 0$, on trouve $a(S_p)\, E[\mu_p(A_o(S_p))] = a\, E(\mu_d(A_o))$. En résumé, la densité $a(S_p)$ du processus de Poisson constitué par les germes primaires et les espérances des fonctionnelles $W_k^{\,p}(A_o(S_p))$ du schéma induit sur les variétés parallèles à $S_p \in \mathcal{S}_p$ sont donnés par les formules suivantes :

(5-3-12)
$$\left\{\begin{aligned} a(S_p) &= a\, E[\mu_{d-p}(\Pi_{S_p^\perp}\, A_o)] \\ E[W_k^{\,p}(A_o(S_p))] &= \frac{b_p}{b_{p-k}\, E[\mu_{d-p}(\Pi_{S_p^\perp}\, A_o)]} \int_{\mathcal{S}_k(S_p)} E[\mu_{d-k}(\Pi_{S^\perp}\, A_o)]\, \varpi_k^{S_p}\, (dS) \end{aligned}\right.$$

avec, en particulier, pour $k = 0$:

$$E[\mu_p(A_o(S_p))] = E[\mu_d(A_o)]/E[\mu_{d-p}(\Pi_{S_p^\perp} A_o)]$$

D'autre part, le schéma booléen A et le schéma induit $A_p = A \cap S_p$ induisent évidemment le même schéma unidimensionnel sur une droite contenue dans S_p. Pour tout $s \in S_o \cap S_p$, d'après (5-3-6), on a donc $a\, g(rs) = a(S_p)\, g(S_p;rs)$, en désignant par $g(S_p;rs)$ l'espérance de l'intégrale $\int_{S_p} 1_{A_o(S_p)}(x)\, 1_{A_o(S_p)}(x+rs)\, \mu_p(dx)$. Compte tenu de la relation $\int_{S_p} g(S_p;h)\, \mu_p(dx) = E[(\mu_p(A_o(S_p)))^2]$ on voit que le <u>moment d'ordre deux</u> du p-volume du grain primaire $A_o(S_p)$ du schéma induit est donné par :

$$E[(\mu_p(A_o(S_p)))^2] = \frac{b_p}{E[\mu_{d-p}(\Pi_{S_p^\perp} A_o)]} \int_0^\infty r^{p-1}\, dr \int_{\mathcal{S}_1(S_p)} g(r,s)\, \varpi_1^{S_p}(dS)$$

Dans le cas d'un schéma booléen <u>isotrope</u>, ces diverses formules se simplifient beaucoup. En effet, comme on l'a déjà remarqué, on peut alors supposer que les grains primaires A_o et $A_o(S_p)$ sont eux-mêmes isotropes dans $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{R}^p$ respectivement, et, de plus, les paramètres de $A_o(S_p)$ sont alors des constantes indépendantes de $S_p \in \mathcal{S}_p$. En posant $a_p = a(S_p)$, $W_k = E[W_k(A_o)]$, $W_k^p = E[W_k^p(A_o(S_p)]$ et en tenant compte de $E[\mu_{d-k}(\Pi_{S^\perp} A_o)] = (b_{d-k}/b_d)\, E(W_k(A_o))$, les formules (5-3-12) deviennent donc dans le cas isotrope :

$$\left\{\begin{aligned} & a_p = a\,(b_{d-p}/b_d)\, W_p \\ & W_k^p = \frac{b_p\, b_{d-k}}{b_{p-k}\, b_{d-p}}\, (W_k/W_p) \end{aligned}\right.$$

En ce qui concerne les deux premiers moments du grain primaire $A_o(S_p)$ du schéma induit, il vient de même :

$$\left\{\begin{aligned} & E[\mu_p(A_o(S_p))] = \frac{b_d\, W_o}{b_{d-p}\, W_p} \\ & E[(\mu_p(A_o(S_p)))^2] = \frac{b_p\, b_d}{b_{d-p}\, W_p} \int_0^\infty r^{p-1}\, g(r)\, dr \end{aligned}\right.$$

5-4 CARACTERISATION DES EFASMID STATIONNAIRES.

Si un EFASMID stationnaire admet des points fixes, il est p.s. égal à $\mathbb{R}^d$. C'est donc aux EFASMID stationnaires et sans points fixes que nous allons nous intéresser. Soit donc A un tel EFASMID. D'après le Théorème 5-1-1, A est la réunion du processus de Poisson sur $\mathcal{F}'$ associé à une mesure θ σ-finie, concentrée sur $C(\mathcal{F}')$ et invariante par translation. En particulier, on a $\phi(K) = \theta(\mathcal{F}_K)$ pour $K \in \mathcal{K}$. Etudions donc la structure d'une telle mesure θ.

a/ - La restriction de θ à $C(\mathcal{K}')$ vérifie $\theta(\mathcal{F}_K \cap C(\mathcal{K}')) = a\, E[V(A_0 \oplus K)]$ pour un EFA A_0 p.s. compact et convexe, et on peut lui associer un schéma booléen stationnaire à grains primairesconvexe, qui constitue une première composante de A. Il reste à étudier la restriction de θ à $C(\mathcal{F}')\setminus C(\mathcal{K}')$.

b/ - Supposons donc la mesure θ concentrée sur l'espace des fermés convexes non compacts. Désignons par <u>$\mathcal{T}$ l'ensemble des cones convexes fermés de sommet 0</u>. $\mathcal{T}$ est un sous-espace <u>compact</u> de $C(\mathcal{F}')$. Munissons k de sa tribu borélienne σ_t, induite par σ_f. Convenons de dire qu'un fermé $F \in C(\mathcal{F}')$ <u>domine</u> un cone $T \in \mathcal{T}$ s'il existe un translaté de T contenu dans F. Si F domine T, on a $T_x = T \oplus \{x\} \subset F$ pour tout $x \in F$, comme on le vérifie sans peine, d'où $T \oplus F \subset F$ et par suite l'égalité $F = T \oplus F$. Inversement, cette égalité caractérise les cones $T \in \mathcal{T}$ dominés par F.

Pour qu'il existe un $T \in \mathcal{T}$ tel que $F = T \oplus F$, il faut et il suffit que le fermé convexe F ne soit pas compact, soit $F \in C(\mathcal{F}')\setminus C(\mathcal{K}')$. La réunion $T(F) = \bigcup \{T : T \in \mathcal{T},\ T \oplus F = F\}$ des cones de $\mathcal{T}$ vérifiant cette propriété est elle-même un cone convexe fermé de sommet 0, comme on le voit facilement, et on a encore $T(F) \oplus F = F$. Autrement dit, $T(F)$ est le plus grand cone convexe dominé par F. Complétons la définition de l'application $F \to T(F)$ en posant $T(F) = \emptyset$ si $F \in C(\mathcal{K}')$. L'application $T : C(\mathcal{F}') \to \mathcal{T} \cup \{\emptyset\}$ est s.c.s., donc mesurable, et, de plus, manifestement invariante par translation. Comme la mesure θ est concentrée sur $C(\mathcal{F}')\setminus C(\mathcal{K}')$, et invariante par translation, nous pouvons appliquer la Proposition 3-2-2 : il existe une probabilité τ sur $\mathcal{T}$ et, pour τ-presque tout $T_0 \in \mathcal{T}$, une mesure θ_{T_0} σ-finie, invariante par translation et concentrée sur $C(\mathcal{F}')$, vérifiant $\theta_{T_0}(\{T(F) \neq T_0\}) = 0$ et telle que l'on ait :

$$\theta(\mathcal{V}) = \int_{\mathcal{T}} \theta_T(\mathcal{V})\ \tau(dT) \qquad (\mathcal{V} \in \sigma_f) \tag{5-4-1}$$

- c/ - Montrons maintenant que cette probabilité τ sur $\mathcal{T}$ est en fait <u>concentrée sur l'ensemble</u> $\mathcal{S} = \bigcup_{k=1}^{d} \mathcal{S}_k$ <u>des sous-espaces de $\mathbb{R}^d$</u>. Pour cela, considérons un ouvert $G \in \mathcal{G}$, un cone convexe $H \in \mathcal{T}$ et un point $h \in H$. Comme $F \oplus H \in \mathcal{F}_G$ équivaut à $F \in \mathcal{F}_{G \oplus \check{H}}$, la relation $\theta_H(\{F \neq F \oplus H\}) = 0$ entraîne $\mathcal{F}_G = \mathcal{F}_{G\oplus \check{H}}$ θ_H presque partout. Pour $h \in H$, on a donc, toujours à des ensembles θ_H

négligeables près :

$$\mathcal{F}_{G\oplus\{h\}} = \mathcal{F}_{G\oplus\check{H}\oplus\{h\}} \supset \mathcal{F}_{G\oplus\check{H}} = \mathcal{F}_G$$

(car il est clair que $h \in H$ entraîne $G \oplus \check{H} \subset G \oplus \check{H} \oplus \{h\}$). Mais on a aussi $\theta(\mathcal{F}_{G\oplus\{h\}}) = \theta(\mathcal{F}_G)$, puisque θ est invariante par translation. On en déduit $\mathcal{F}_{G\oplus\{h\}} = \mathcal{F}_G$, θ_H-presque partout, puis $\mathcal{F}_G = \lim \uparrow \mathcal{F}_{G\oplus\check{H}\oplus\{nh\}}$ pour $n \uparrow \infty$. Ceci ayant lieu pour tous les ouverts G d'une base dénombrable de la topologie de $\mathbb{R}^d$, on en déduit que $h \in H$ $(h \neq 0)$ entraîne que le sous-espace D_h à une dimension contenant h est contenu dans H, soit $D_h \subset H$. Il en résulte aussitôt que le cône convexe H est en fait un sous-espace de $\mathbb{R}^d$, soit $H \in \mathcal{S}$. Autrement dit, la probabilité τ est bien concentrée sur $\mathcal{S} = \bigcup \mathcal{S}_k$, comme nous l'avions annoncé.

d/ - Désignons par τ_k la restriction de τ à $\mathcal{S}_k$ $(k = 1,2,\dots d)$. Pour τ_k-presque tout $S \in \mathcal{S}_k$, il existe donc une mesure θ_S σ-finie, concentrée sur $C(\mathcal{F}')$, invariante par translation et vérifiant $\theta_S(\{T(F) \neq S\}) = 0$. Autrement dit, θ_S est concentrée sur l'ensemble des cylindres à base compacte et convexe et à génératrices parallèles à S, c'est-à-dire sur l'ensemble des fermés de la forme $K \oplus S$, où K est un compact convexe contenu dans l'orthogonal $S^\perp$ de S. Les résultats du paragraphe 5-3 s'appliquent donc à θ_S : il existe une constante $a_k(S)$ et un compact aléatoire A_S p.s. convexe dans $S^\perp$ identifié à $\mathbb{R}^{d-k}$ tel que l'on ait pour tout $K \in \mathcal{K}$:

$$\theta_S(\mathcal{F}_K) = a_k(S)\; E[\mu_{d-k}(A_S \oplus \Pi_{S^\perp} \check{K})] \tag{5-4-2}$$

D'après (5-4-1), d'autre part, la mesure σ-finie θ concentrée sur $C(\mathcal{F}')\setminus C(\mathcal{K}')$ vérifie la relation $\phi(K) = \Sigma_1^d \int_{\mathcal{S}_k} \theta_S(\mathcal{F}_K)\; \tau_k(dS)$. En prenant $K = B$, boule unité, et en utilisant la formule de Steiner $\mu_{d-k}(A_S \oplus r\,\Pi_{S^\perp} B) = \Sigma_0^{d-k-1} \binom{d-k}{p} r^p\, W_p^{d-k}(A_S) + b_{d-k}\, r^k$, on voit que la mesurabilité de $S \to \theta_S(\mathcal{F}_K) = a_k(S)\; E[\mu_{d-k}(A_S \oplus r\,\Pi_{S^\perp} B)]$ pour tout $r \geq 0$ entraîne celle de $S \to a_k(S)$. Il existe donc une mesure positive $G_k = a_k\, \tau_k$ sur $\mathcal{S}_k$, et la fonctionnelle ϕ de A est de la forme :

$$\phi(k) = \sum_{k=1}^{d} \int_{\mathcal{S}_k} E[\mu_{d-k}(A_S \oplus \Pi_{S^\perp} K)]\; G_k(dS)$$

Pour $k = d$, $\mathcal{S}_d = \{\mathbb{R}^d\}$ est ponctuel, et l'orthogonal de $\mathbb{R}^d$ est $\{o\}$, de sorte que

$$\int_{\mathcal{S}_k} E[\mu_{d-k}(A_S \oplus \Pi_{S^\perp} K)]\; G_k(dS)$$

se réduit à une constante $a_d = \theta(\{\mathbb{R}^d\})$, et on a $P(A \neq \mathbb{R}^d) = \exp(-\,a_d)$.

Résumons ces résultats, en tenant compte d'une composante éventuelle de θ sur $C(\mathcal{K}')$.

<u>THEOREME 5-4-1</u> - Un EFA A est un EFASMID stationnaire si et seulement si la fonctionnelle ψ = - log Q qui lui est associée admet une représentation de la forme :

$$\psi(K) = a_o\ \psi_o(K) + \sum_{k=1}^{d-1} \int_{\mathcal{S}_k} \psi_S^k\ (K)\ G_k(dS) + a_d \tag{5-4-3}$$

pour des constantes a_o, $a_d \geq 0$, des mesures positives G_k sur $\mathcal{S}_k$ ($k = 1,2,d-1$) des fonctions $(S,K) \rightarrow \psi_S^k\ (K)$ telles que :

a/ - Pour tout $K \in \mathcal{K}$, $S \rightarrow \psi_S^k\ (K)$ est mesurable pour G_k.

b/ - Pour G_k presque tout S, on a $\psi_S^k\ (K) < \infty$ pour tout $K \in \mathcal{K}$.

c/ - Pour G_k presque tout S, il existe un EFA A_S p.s. convexe dans $S^\perp$ tel que :

$$\psi_S^k\ (K) = E[\mu_{d-k}(A_S \oplus \Pi_{S^\perp} \check{K})] \tag{5-4-4}$$

et, enfin, une fonction ψ_o de la forme

$$\psi_o(K) = E[\mu_d(A_o \oplus \check{K})] \tag{5-4-4'}$$

pour un EFA A_o p.s. compact et convexe.

On peut encore interpréter ces résultats en disant que A est équivalent à la réunion $\bigcup\limits_{k=o}^{d} A_k$ de d+1 EFASMID stationnaires possédant les caractères suivants : A_o est un schéma booléen stationnaire à grains primaires p.s. compacts et convexes, A_d est égal à $\emptyset$ ou à $\mathbb{R}^d$ avec une probabilité unité, enfin, pour chaque $k = 1,2,\ldots d-1$, l'EFASMID A_k est p.s. réunion de cylindres à bases compactes convexes dont les génératrices sont des variétés linéaires de dimension k. La formule (5-4-3) exprime que A_k est limite d'EFA de la forme $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i' \oplus S_i$, ou les A_i' sont des schémas booléens à grains primaires p.s. compacts et convexes et les S_i des VA sur $\mathcal{S}_k$. Si les A_S de la formule (5-4-3) sont p.s. ponctuels, A_k est un réseau poissonien de variétés linéaires de dimension k. En ce sens, on peut dire que les schémas booléens stationnaires et les réseaux poissoniens constituent les deux prototypes à partir desquels sont construits tous les EFASMID stationnaires.

<u>THEOREME 5-4-2</u> - Un EFA A est équivalent à un réseau poissonien de variétés linéaires si et seulement si A est stable, stationnaire et semi-markovien.

On a déjà vu (paragraphe 3-5) que cette condition est nécessaire. Inversement, soit A un EFA stable (donc indéfiniment divisible) stationnaire et semi-markovien, c'est-à-dire un EFASMID stable et stationnaire. La fonctionnelle ϕ de A est de la forme (5-4-3). Prenons $K = rB$. D'après (5-4-4') et la formule de Steiner, on va trouver :

$$\phi_o(rB) = \sum_{p=o}^{d} \binom{d}{p} r^p \, E[W_p^d(A_o)]$$

De même, pour $S \in \mathcal{S}_{d-k}$, on a $A_S \oplus rB = A_S \oplus r(B \cap S)$, et d'après (5-4-4) et la formule de Steiner appliquée dans l'espace $S^\perp$ identifié à $\mathbb{R}^k$:

$$\phi_S^k (rB) = \sum_{p=o}^{d-k} \binom{d-k}{p} r^p \, E[W_p^{d-k} (A_S)]$$

Autrement dit, $\phi(rB)$ est un polynome en r, soit

$$\phi(rB) = \sum_{p=o}^{d} B_p \, r^p$$

avec des coefficients B_p donnés par :

$$(5\text{-}4\text{-}5) \quad \left\{ \begin{array}{l} B_o = a_o \, E[\mu_d(A_o)] + \sum\limits_{k=1}^{d-1} \int_{\mathcal{S}_k} E[W_p^{d-k}(A_S)] \; G_k(dS) + a_d \\ \\ B_p = a_o \binom{d}{p} E(W_p^d(A_o)) + \sum\limits_{k=1}^{d-p} \binom{d-k}{p} \int_{\mathcal{S}_k} E[W_p^{d-k}(A_S)] \, G_k(dS) \end{array} \right.$$

D'autre part, A étant stable, on a $\phi(rB) = r^\alpha \phi(B)$ (Théorème 3-4-1) si $\alpha = 0$, on a $\phi(rB) = C^{ste}$ et A est p.s. égal à $\emptyset$ ou à $\mathbb{R}^d$, et il s'agit d'un réseau poissonien de variétés de dimension d. Si $\alpha > 0$, les relations (5-4-5) montrent que α est un entier p compris entre 0 et d $(0 < p \leq d)$. On doit alors avoir $B_{p'} = 0$ pour $p' \neq p$; donc $E(W_{p'}(A_o)) = 0$ et $\int_{\mathcal{S}_{d-p'}} E(W_{p'}^{p'}(A_S)) \, G_{d-p'}(dS) = b_{p'} \int G_{d-p'}(dS) = 0$. Donc, si $p = d$, toutes les mesures G_k et a_d sont nulles, et $E(W_k(A_o)) = 0$ pour $k < d$ montre que A est un processus de Poisson ponctuel sur $\mathbb{R}^d$. Si $p < d$, $a_o = a_d = 0$, et toutes les mesures G_{d-k}, $k \neq p$ sont égales à 0. D'après la Proposition 3-5-1, A est alors un réseau poissonien de variétés de dimension d-p.

COROLLAIRE - Un EFASMID A est un réseau poissonien de variétés linéaires si et seulement si on a $\phi(rB) = r^{\alpha}\,\phi(B)$ pour un $\alpha \geq 0$ nécessairement entier $\leq d$, et $d-\alpha$ est alors la dimension des variétés du réseau.

Il nous reste maintenant a étudier dans le cas général des EFASMID stationnaires les paramètres remarquables que nous avons déjà rencontrés à propos des schémas booléens.

Schémas induits sur les droites.

D'après le paragraphe 5-2, les schémas induits sur les droites sont entièrement déterminés par la donnée des fonctions $Q(h)$ et $C(h)$. Avec les notations du théorème 5-4-1, on trouve d'abord pour $q = Q(o)$:

$$q = \exp\left[-a_o - \sum_{k=1}^{d-1} \int_{\mathcal{S}_k} E[\mu_{d-k}(A_S)]\, G_k(dS) - a_d\right]$$

Pour $h \in \mathbb{R}^d$, $h \neq 0$, nous désignerons par $u = h/|h| \in S_o$ le vecteur unité associé à h, par $r = |h|$ son module et par $s = \{\lambda u,\ \lambda \in \mathbb{R}\} \in \mathcal{S}_1$ le sous-espace de dimension 1 engendré par h ou u. On sait que $Q(h)$ est alors de la forme $Q(h) = a \exp\{-\,|h|\ \theta(h/|h|)\}$, pour une fonction symétrique θ sur la sphère unité que nous identifierons à une fonction $s \to \theta(s)$ sur $\mathcal{S}_1$. Désignons par $\bar{u}$ le segment $\{\lambda u,\ a \leq \lambda \leq 1\}$. D'après le Théorème 5-4-1, on a :

$$\phi(r\bar{u}) = a_o\ E[\mu_d(A_o \oplus r\bar{u})] + \sum_{k=1}^{d-1} \int_{\mathcal{S}_k} E[\mu_{d-k}(A_S \oplus r\ \Pi_{S^\perp}\bar{u})\ G_k(dS) + a_d]$$

Evaluons le terme $\mu_{d-k}(A_S \oplus r\ \Pi_{S^\perp}\bar{u})$ pour un $S \in \mathcal{S}_k$. Si v est le vecteur unitaire du segment $\Pi_S\ u$, on a $r\ \Pi_{S^\perp}\bar{u} = r|s,S^\perp|\bar{v}$. Si $G^{A_S}_{d-k-1}$ désigne la mesure superficielle (aléatoire) sur $\mathcal{S}_{d-k-1}(S^\perp)$ associée à $A_S \subset S^\perp$, on peut donc écrire :

$$\mu_{d-k}(A_S \oplus r\ \Pi_{S^\perp}\bar{u}) = \mu_{d-k}(A_S) + r|s,S^\perp| \int_{\mathcal{S}_{d-k-1}(S^\perp)} |\sigma,v^\perp|\ G^{A_S}_{d-k-1}\ (d\sigma)$$

On note ensuite $|\sigma,v^\perp| = |\sigma^\perp \cap S^\perp,\ v|$, d'où $|s,S^\perp|\ |\sigma,v^\perp| = |s,\sigma^\perp \cap S^\perp| = |s^\perp,\sigma \oplus S|$. Soit alors $G^{A_S}_{d-1}$ l'image de la mesure $G^{A_S}_{d-k-1}$ par l'application $\sigma \to \sigma \oplus S$ de $\mathcal{S}_{d-k-1}(S^\perp)$ dans $\mathcal{S}_{d-1}$. On trouve ainsi :

$$\mu_{d-k}(A_S \oplus r\ \Pi_{S^\perp}\bar{u}) = \mu_{d-k}(A_S) + r\int_{\mathcal{S}_{d-1}} |s^\perp,\sigma|\ G^{A_S}_{d-1}\ (d\sigma)$$

Désignons par $F_{d-1}^{k}(S;d\sigma) = E[G_{d-1}^{A_S}(d\sigma)]$ la mesure-espérance associée à la mesure aléatoire $G_{d-1}^{A_S}$ sur $\mathcal{S}_{d-1}$, et de même par F_{d-1}^{o} l'espérance de la mesure superficielle $G_{d-1}^{A_o}$. En explicitant $\psi(r\vec{u})$, on trouve donc :

$$\psi(r\vec{u}) = -\log q + a_o\, r \int_{\mathcal{S}_{d-1}} |s^{\perp},\sigma|\ F_{d-1}^{o}(d\sigma) + r \sum_{k=1}^{d-1} \int_{\mathcal{S}_k} G_k(dS) \int_{\mathcal{S}_{d-1}} |s^{\perp},\sigma|\ F_{d-1}^{k}(S;d\sigma)$$

d'où l'expression cherchée de la fonction $\theta(s)$:

(5-4-6)
$$\theta(s) = \int_{\mathcal{S}_{d-1}} |s^{\perp},\sigma|\ F_{d-1}(d\sigma)$$

avec une mesure $F_{d-1} \geq 0$ sur $_{d-1}$ définie par :

$$F_{d-1}(.) = a_o\, F_{d-1}^{o}(.) + \sum_{k=1}^{d-1} \int_{\mathcal{S}_k} F_{d-1}^{k}(S;.)\ G_k(dS)$$

Comme dans le cas des schémas booléens, on déduit de cette représentation que $h \to Q(h)$ est une <u>fonction de type positif</u> sur $\mathbb{R}^d$. On notera que l'on peut avoir $\theta(s_o) = 0$ si la mesure F_{d-1} est concentrée sur $s_o^{\perp}$, c'est-à-dire : $a_o = 0$, et G_k concentrée sur l'ensemble des k-sous espaces parallèles à s_o.

Examinons maintenant la <u>covariance</u> $C(h)$, ou plutôt la fonction $h \to 1 - 2p + C(h) = P(x \notin A,\ x+h \notin A) = \exp\left\{-\ \psi(\{o,h\})\right\}$. Le calcul est analogue à celui que nous avons déjà fait dans le cas des schémas booléens. On trouve :

$$\psi_S^{k}(\{o,h\}) = E[\mu_{d-k}(A_S \cup A_S \oplus \{\Pi_{S^{\perp}} h\})] = 2\ E[\mu_{d-k}(A_S)] - g_S(h)$$

avec :

$$g_S(h) = E[\int_{S^{\perp}} 1_{A_S}(x)\ 1_{A_S}(x + \Pi_{S^{\perp}} h)\ dx]$$

et

$$\psi^{o}(\{o,h\}) = a_o\ [2\ E[\mu_d(A_S)] - g_o(h)]$$

$$g_o(h) = E[\int 1_{A_o}(x)\ 1_{A_o}(x+h)\ dx]$$

D'où :

$$1 - 2p + C(h) = q\ \exp\left\{-\ (g(o) - g(h))\right\}$$

$$g(h) = a_o\, g_o(h) + \sum_{k=1}^{d-1} \int_{\mathcal{S}_k} g_S(h)\; G_k(dS)$$

En particulier, on vérifie, comme dans le cas des schémas booléens, que les fonctions C et Q ont le même cône des tangentes à l'origine si et seulement si : A_o est p.s. d'intérieur non vide, et, pour chaque $k = 1,2,\ldots d-1$, A_S est p.s. d'intérieur non vide dans S pour G_k presque tout $S \in \mathcal{S}_k$.

Les densités des fonctionnelles de Minkowski.

Prenons K = rB dans la formule (5-4-3), B désignant la boule unité, et utilisons la formule de Steiner, soit pour $S \in \mathcal{S}_k$

$$E[\mu_{d-k}(A_S \oplus r\, \Pi_{S^\perp} B) = \sum_{p=o}^{d-k} \binom{d-k}{p} r^p\, E(W_p^{d-k}(A_S))$$

Il vient ainsi :

$$\phi(rB) = \sum_{p=o}^{d} B_p\, r^p$$

avec les coefficients B_p déjà écrits en (5-4-5). On peut alors montrer que ces coefficients B_p sont liés aux densités w_p des fonctionnelles de Minkowski pour l'EFASMID A, exactement comme dans le cas du schéma booléen, par les relations :

$$w_k = q\; B_k/\binom{d}{k} \qquad (k = 1,2,\ldots d)$$

En particulier, pour k = d, on a $B_d = a_o\, b_d$. Ainsi, seule la composante booléenne de l'EFASMID contribue au nombre spécifique de convexité, qui est égal à $a_o\, q$.

Les EFASMID induits sur les variétés linéaires.

Supposons maintenant que le compact K qui figure dans la formule (5-4-3) soit un compact de Steiner (donc en particulier $K = \check{K}$), et soient G_k^K ($k = 1,2,\ldots d-1$) les mesures qui lui sont associées selon la Proposition 4-5-3. Calculons $\phi(rK)$. Compte tenu du Corollaire 1 de la Proposition 4-5-3, nous trouvons d'abord pour $S \in \mathcal{S}_k$:

$$\mu_{d-k}(A_S \oplus r\, \Pi_{S^\perp} K) = \mu_{d-k}(A_S) + \sum_{p=1}^{d-k} r^p \int_{\mathcal{S}_p} |\sigma, S^\perp|\, \mu_{d-k-p}(\Pi_{\sigma^\perp \cap S^\perp} A_S)\, G_p^K(d\sigma)$$

$$\mu_d(A_o \oplus rK) = \mu_d(A_o) + \sum_{p=1}^{d-1} r^p \int_{\mathcal{S}_p} \mu_{d-p}(\Pi_{\sigma^\perp} A_o)\, G_p^K(d\sigma) + r^d\, \mu_d(K)$$

En substituant ces expressions dans (5-4-3), on peut obtenir l'expression de $\phi(K)$, mais il ne sera pas utile de l'expliciter ici. Supposons que le compact de Steiner soit contenu dans un sous-espace $S_j \in \mathcal{S}_j$ à j dimensions, et prenons $K = B \cap S_j$, boule unité de S_j. On a vu que l'on a, dans ce cas $G_p^{B\cap S_j} = \binom{j}{p} (b_j/b_{j-p})\, \varpi_p^{S_j}$, où $\varpi_p^{S_j}$ est la probabilité sur $\mathcal{S}_p(S_j)$ invariante pour les rotations ($p \leq j$). Par identification avec le développement $\phi(r(B \cap S_j)) = \sum_{p=o}^{j} B_p(S_j)\, r^p$, on en déduit les densités des fonctionnelles de Minkowski du schéma induit $A \cap S_j$. Donnons seulement la formule relative au nombre spécifique de convexité $(1/b_j) w_j(S_j)$ du schéma induit :

$$(1/b_j) w_j(S_j) = q\ a_o(S_j) = q[a_o\ E[\mu_{d-j}(\Pi_{S_j^\perp} A_o)] + \sum_{k=1}^{d-j} \int_{\mathcal{S}_k} |S_j, S^\perp|\ E[\mu_{d-k-j}(\Pi_{S_j^\perp \cap S^\perp} A_S)] G_k(dS)$$

Cas Isotrope.

Dans le cas où l'EFASMID A est stationnaire et isotrope, les résultats précédents se simplifient grandement. En effet, les mesures G_k du Théorème 5-4-3 sont alors invariantes pour les rotations, et on peut supposer A_S isotrope dans $S^\perp$ pour chaque $S \in \mathcal{S}_k$. Pour $K \in C(\mathcal{K})$, la proposition 4-2-4 donne alors :

$$\psi_o(K) = (1/b_d) \sum_{p=o}^{d} \binom{d}{p} E(W_p^d\, A_o)\, W_{d-p}^d\, (K)$$

$$\psi_S(K) = (1/b_{d-k}) \sum_{p=o}^{d-k} \binom{d-k}{p} E(W_p^{d-k}\, A_k)\, W_{d-k-p}^{d-k}\, (\Pi_{S^\perp} K)$$

(A_k désigne le compact convexe aléatoire de $\mathbb{R}^{d-k}$ équivalent à A_S pour tout $S \in \mathcal{S}_k$). Mais la mesure G_k est de la forme $G_k = a_k\, \varpi_k$, où ϖ_k est la probabilité invariante sur $\mathcal{S}_k$ et a_k une constante ≥ 0 et d'après la formule (4-1-6), on a :

$$\int_{\mathcal{S}_k} W_{d-k-p}^{d-k}\, (\Pi_{S^\perp} K)\, \varpi_k(dS) = (b_{d-k}/b_d)\, W_{d-p}^{d}(K)$$

Par conséquent, dans le cas isotrope, on a pour tout $K \in C(\mathcal{K})$:

$$(5\text{-}4\text{-}7)\qquad \begin{cases} \phi(K) = (1/b_d) \displaystyle\sum_{p=o}^{d} \beta_p \, W_{d-p}^{d}(K) \\ \\ \beta_p = \displaystyle\sum_{k=o}^{d-p} a_k \binom{d-k}{p} E(W_p^{d-k}(A_k)) \end{cases}$$

En particulier, $\beta_d = a_o \, b_d$, de sorte que $q(\beta_d/b_d)$ est le nombre spécifique de convexité, avec $q = \exp\{-\phi(\{o\})\} = \exp(-\beta_o)$

Pour calculer commodément les paramètres du schéma induit, on peut utiliser le lemme suivant de géométrie intégrale :

LEMME 5-4-1 - Soient d, d', k des entiers avec $0 < k \leq d' < d$, et $K \in C(\mathcal{K})$ un compact convexe de R^d contenu dans un sous-espace $S_{d'} \in \mathcal{S}_{d'}$ de dimension d'. Alors, on a :

$$W_{d-k}^{d}(K) = \frac{b_d \, b_{d-d'} \, b_k}{\binom{d+k-d'}{k} \, b_{d+k-d} \, b_d} \; W_{d'-k}^{d}(K)$$

En effet, on a d'abord $W_{d-k}^{d}(K) = (b_d/b_k) \displaystyle\int_{\mathcal{S}_k} \mu_k(\Pi_S K) \, \varpi_k(dS)$. Posons $\sigma = \Pi_{S_{d'}} S$, d'où $\mu_k(\Pi_\sigma K)$. Si S admet la probabilité ϖ_k sur $\mathcal{S}_k$, la loi de (σ, S) est $\varpi_k^{d'}(d\sigma) \, \varpi_k^{\sigma \oplus S_{d'}}(dS)$ sur $\mathcal{S}_k(S_{d'}) \times \mathcal{S}_k$, $\varpi_k^{d'}$ désignent la probabilité invariante sur $\mathcal{S}_k(S_{d'})$, et $\varpi_k^{\sigma \oplus S_{d'}}$ la probabilité invariante sur $\mathcal{S}_k(\sigma \oplus S_{d'})$. La dimension de $\sigma \oplus S_{d'}$ est k+d-d', et d'après le corollaire 5 de la Proposition 4-5-3, on a donc :

$$\int |\sigma, S| \, \varpi_k^{\sigma \oplus S_{d'}^{\perp}}(dS) = \frac{b_k \, b_{d-d'}}{\binom{d+k-d'}{k} \, b_{d+k-d'}}$$

Par suite, il vient :

$$W_{d-k}^{d}(K) = \frac{b_d \, b_{d-d'}}{\binom{d+k-d'}{k} \, b_{d+k-d'}} \int \mu_k(\Pi_\sigma K) \, \varpi_k^{d'}(d\sigma) = \frac{b_d \, b_{d-d'} \, b_k}{\binom{d+k-d'}{k} \, b_{d+k-d'} \, b_{d'}} \; W_{d'-k}^{d'}(K)$$

Compte tenu de ce lemme et des relations (5-4-7), on determine facilement les paramètres des schémas induits. En effet, si $K \in C(\mathcal{K})$ est de dimension $d' < d$, on trouvera :

$$\phi(K) = (1/b_d) \sum_{p=o}^{d'} \beta_p \, W_{d-p}^{d}(K) = (1/b_d) \sum_{p=o}^{d'} \beta_p \, \frac{b_d \, d_{d-d'} \, b_k}{\binom{d+k-d'}{k} \, b_{d+k-d'} \, b_{d'}} \; W_{d'-k}^{d'}(K)$$

En désignant par β_p' les paramètres du schéma induit sur S_d', on a aussi

$$\phi(K) = (1/b_{d'}) \sum_{p=o}^{d'} \beta'_p \, W_{d'-p}^{d'} (K)$$

et par identification :

$$\beta'_p = \frac{b_d \; b_{d-d'}}{\binom{d+p-d'}{p} \; b_{d+p-d'}} \quad \beta_p$$

Pour $p = d'$, en particulier, on trouve $\beta'_{d'} = b_{d-d'} \; \beta_{d'}/\binom{d}{p}$. Ainsi, le nombre spécifique de convexité du schéma induit dans $S_{d'}$ est $q \; (\beta'_{d'}/b_{d'}) = q \; [b_{d-d'}/b_{d'}\binom{d}{p}] \; \beta_{d'}$.

- CHAPITRE 6 -

HYPERPLANS ET POLYEDRES POISSONIENS

Dans ce chapitre, nous utiliserons les résultats précédents pour étudier de manière assez détaillée les réseaux d'hyperplans poissoniens et les polyèdres convexes qu'ils définissent dans $\mathbb{R}^d$. Nous montrons, tout d'abord, qu'un réseau d'hyperplans poissoniens est caractérisé par la donnée d'un compact de Steiner A. Le réseau induit sur une variété S_p de dimension $p < d$ est alors associée au compact $\Pi_{S_p} A$, projection de A sur la variété S_p. Les mesures positives G_k^A associées à A permettent de présenter sous forme simple les réseaux (non poissoniens) constitués des intersections d'ordre 2,3...d des hyperplans du réseau initial. Au réseau d'ordre k, on associe la mesure aléatoire $N_k(dx)$ telle que $N_k(K)$ soit le d-k volume de l'intersection de ce réseau avec un compact K donné. On calcule l'espérance de la mesure aléatoire N_k, et aussi (mais seulement dans le cas isotrope) sa mesure-covariance. Le second paragraphe introduit les polyèdres poissoniens et les caractérise par une propriété d'invariance conditionnelle qui généralise exactement la propriété caractéristique bien connue des lois exponentielles. On introduit ensuite la distinction capitale entre les lois en nombre et les lois en mesure. A titre d'application, on calcule ensuite certaines caractéristiques (en nombre ou en mesure) des polyèdres poissoniens : espérance des fonctionnelles de Minkowski, grenulométries selon les boules, premiers moments du volume, de la surface et du contour apparent, etc... On ne sait pas calculer exactement les lois du volume, de la surface et du nombre des faces. Néanmoins, il existe une relation simple entre la loi du volume V et l'espérance conditionnelle en V de la surface et, dans le cas isotrope, entre la loi du nombre des faces et celle de la norme du polyèdre. On examine en dernier lieu quelques propriétés particulières des polygones poissoniens isotropes.

6-1 LES RESEAUX STATIONNAIRES D'HYPERPLANS POISSONIENS.

Dans ce paragraphe, on désignera par A un réseau stationnaire d'hyperplans poissoniens, c'est-à-dire, d'après le paragraphe 3-5, un EFASMID dont la fonctionnelle ϕ est de la forme :

$$\phi(K) = \int_{\mathcal{S}_{d-1}} \mu_1(\Pi_{S^\perp} K)\ \lambda(dS) \qquad (K \in \mathcal{K}) \tag{6-1-1}$$

pour une mesure $\lambda \geq 0$ sur $\mathcal{S}_{d-1}$ (μ_1 est la mesure de Lebesgue sur R, et $\Pi_{S^\perp} K$ la projection de K sur $S^\perp \in \mathcal{S}_1$).

Désignons par G_1 la mesure positive sur $\mathcal{S}_1$ déduite de λ par l'application $S \to S^\perp$ de $\mathcal{S}_{d-1}$ sur $\mathcal{S}_1$, de sorte que la relation (6-1-1) s'écrit aussi bien $\phi(K) = \int \mu_1(\Pi_S\ K)\ G_1(dS)$. A cette mesure G_1 est associé <u>le compact de Steiner A</u> dont la podaire r_A est définie (pour $u \in S_0$ sphère unité) par la relation :

$$r_A(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{S}_{d-1}} |u^\perp, S|\ \lambda(dS) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{S}_1} |u,\ S'|\ G_1(dS')$$

Inversement, la donnée de A ou de sa podaire r_A suffit pour déterminer la mesure λ (Théorème 4-5-1). Autrement dit, il y a correspondance bijective entre les compacts de Steiner et les réseaux d'hyperplans poissoniens.

L'intérêt de ce compact de Steiner A associé au réseau est qu'il permet une caractérisation facile des réseaux induits sur les variétés linéaires. En effet, si $S_p \in \mathcal{S}_p$ est un sous-espace de dimension $p < d$, on a vu au paragraphe 3-5 que le réseau d'hyperplans induit sur une variété parallèle à S_p est caractérisé par une mesure $\lambda_{S_p} \geq 0$ sur $\mathcal{S}_{p-1}(S_p)$ définie par la relation :

$$\int_{\mathcal{S}_{p-1}(S_p)} f(\sigma)\ \lambda_{S_p}(d\sigma) = \int_{\mathcal{S}_{d-1}} |S^\perp,\ S_p|\ f(S \cap S_p)\ \lambda(dS) \tag{6-1-2}$$

pour toute fonction f continue sur $\mathcal{S}_{p-1}(S_p)$. D'après le théorème 4-5-1, on sait d'ailleurs qu'il suffit de se limiter aux fonctions de la forme $\sigma \to |\sigma,\ \sigma_0|$, $\sigma_0 \in \mathcal{S}_{p-1}(S_p)$. Ainsi, la podaire r_{S_p} du compact de Steiner $A(S_p)$ associée au réseau induit est définie pour un vecteur unitaire dans S_p par :

$$r_{S_p}(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{S}_{p-1}(S_p)} |u^\perp, \sigma| \, \lambda_{S_p}(d\sigma)$$

Appliquons la formule (6-1-2) à la fonction $f : \sigma \to |u^\perp, \sigma|$, en remarquant $|u^\perp, S \cap S_p| = |U, \Pi_{S_p} S|$, d'où : $|S^\perp, S_p||u, \Pi_{S_p} S^\perp| = S^\perp, u|$. Il vient donc, pour u vecteur unitaire de S_p :

$$r_{S_p}(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{S}_{d-1}} |S^\perp, u| \, \lambda(dS) = r_A(u)$$

Autrement dit, <u>le compact de Steiner associé au réseau induit dans S_p est la projection de A sur S_p</u>, soit $A(S_p) = \Pi_{S_p} A$. Par suite, chaque fois que l'on aura exprimé une caractéristique du réseau au moyen d'une formule où intervient A, on obtiendra du même coup l'expression de la caractéristique correspondante du réseau induit dans S_p en remplaçant d par p et A par $\Pi_{S_p} A$.

Considérons, en particulier, le cas d'un réseau isotrope. La mesure λ est alors proportionnelle à la mesure ϖ invariante sur $\mathcal{S}_{d-1}$, soit $\lambda = \lambda_d \varpi$, avec une constante $\lambda_d = \int \lambda(dS)$. Le compact de Steiner A est alors <u>la boule de rayon a</u> $= (1/2)\int \lambda(dS)|S_\sigma \, S|$, soit, d'après le corollaire 5 de la Proposition 4-5-3 :

(6-1-3) $$a = (b_{d-1}/d \, b_d)\int \lambda(dS)$$

Le schéma induit sur $S_p \in \mathcal{S}_p$ est alors caractérisé par $A(S_p) = \Pi_{S_p} A$, qui est la boule de même rayon a dans S_p. Ainsi, a apparaît comme un paramètre indépendant de la dimension de l'espace euclidien, qui suffit d'ailleurs à caractériser le réseau isotrope.

Dans ce qui suit, nous exprimerons donc toujours les caractéristiques du réseau isotrope en fonction de ce paramètre unique a : les formules que nous obtiendrons s'appliqueront indifféremment au réseau initial ou au réseau induit sur $\mathcal{S}_p$ (sous réserve de remplacer partout d par p). En particulier, dans le cas isotrope, la formule (6-1-1) se met sous la forme :

(6-1-4) $$\psi(K) = a(2d/b_{d-1}) \, W_{d-1}(K) = (2a/b_{d-1}) \, N(K)$$

($N = d \, W_{d-1}$ est la norme dans $\mathbb{R}^d$). Le schéma induit sur S_p est donc associé à la fonctionnelle $\psi_p : K \to (ra/b_{p-1}) \, N'(K)$ où N' est la norme calculée dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^p$. Lorsque K est la boule unité B, on déduit de (6-1-4) la formule utile suivante :

(6-1-5) $$\psi(B) = (2d \, b_d/b_{d-1})a$$

Les densités de (d-k)-volume.

Toute variété linéaire V_p de dimension p étant identifiable à $\mathbb{R}^p$, on peut lui associer la mesure $\mu_p^{V_p}$ sur $\mathbb{R}^d$ définie par :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mu_p^{V_p}(dx)\ f(x) = \int_{V_p} \mu_p(dx')\ f(x')$$

(μ_p, mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^p$), et il est clair que la mesure $\mu_p^{V_p}$ suffit pour caractériser V_p. Comme le réseau d'hyperplans poissoniens est localement fini, on peut de même lui associer la mesure aléatoire ν_1 définie par :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \nu_1(dx)\ f(x) = \sum_i \int_{H_i} \mu_{d-1}(dx')\ f(x')$$

($f \in \mathcal{C}_{\mathcal{K}}(\mathbb{R}^d)$), les H_i désignant les hyperplans du réseau. En particulier, pour $K \in \mathcal{K}$, la variable aléatoire $\nu_1(K)$ représente le (d-1)-volume de l'intersection $A \cap K$.

Plus généralement, pour $1 < k \leq d$, on peut associer au réseau A (ou réseau d'ordre 1) le réseau d'ordre k constitué des intersections $H_{i_1} \cap \dots \cap H_{i_k}$, les H_{i_j} désignant les hyperplans du réseau. Du fait que le réseau d'ordre k est localement fini, la formule :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \nu_k(dx)\ f(x) = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \int_{H_{i_1} \cap \dots \cap H_{i_k}} f(x')\ \mu_{d-k}(x')$$

($f \in \mathcal{C}_{\mathcal{K}}(\mathbb{R}^d)$) définit alors une mesure aléatoire sur $\mathbb{R}^d$, dont la connaissance équivaut évidemment à celle du réseau d'ordre k. En particulier, pour $K \in \mathcal{K}$, $\nu_k(K)$ est le (d-k)-volume de l'intersection de K et du réseau d'ordre k.

Le réseau d'ordre $k > 1$ n'est pas un réseau poissonien. C'est un EFA stationnaire (mais non un EFASMID). Pour le caractériser en partie, nous allons donner l'expression explicite de la mesure espérance $E(\nu_k(dx))$, qui est (à cause de la stationnarité) de la forme $\nu_k\, dx$ pour une constante $\nu_k \geq 0$ appelée densité de (d-k)-volume du réseau, et caractérisée par la relation $E[\nu_k(K)] = \nu_k\, \mu_d(K)$, $K \in \mathcal{K}$. A la mesure aléatoire stationnaire $\nu_k(dx)$ est également associée une mesure-covariance $C_k \geq 0$ sur $\mathbb{R}^d$, telle que l'on ait pour tout $K \in \mathcal{K}$:

$$\int C_k(dh)\ g_K(h) = E[(\nu_k(K))^2]$$

$(K \in \mathcal{K}, \quad g_k(h) = \int 1_K(x)\ 1_K(x+h)dx)$

Dans le cas isotrope, la mesure-covariance C_k est elle-même invariante par rotation, et nous en donnerons l'expression explicite.

Calcul des v_k.

Pour calculer v_k, nous allons nous placer conditionnellement dans l'hypothèse où k hyperplans du réseau rencontrent la boule RB de rayon $R \geq 0$, calculer sous cette hypothèse la probabilité pour que l'intersection $H_1 \cap .. \cap H_k$ de ces k hyperplans rencontre RB, et évaluer l'espérance mathématique de $\mu_{d-k}(H_1 \cap .. \cap H_k \cap RB)$. Il sera alors facile d'en déduire v_k.

a/ Soient $H_1, .. H_k$ les k hyperplans rencontrant RB. Pour $1 \leq i \leq k$, on désignera par $S_i \in \mathcal{S}_{d-1}$ la direction de H_i, et par R_i le rayon de la (d-i)-boule $RB \cap S_1 \cap .. \cap S_i$.

La loi de la direction S_1 de H_1 est la probabilité $\lambda(dS_1)/\lambda_d$ $(\lambda_d = \int \lambda(dS))$ sur $\mathcal{S}_{d-1}$. A S_1 fixé, le point $H_1 \cap S_1$ est uniformément distribué sur $RB \cap S_1^{\perp}$. On a donc $R_1 = \rho_1 R$, où ρ_1 est une V.A. indépendante de S_1, de la forme $\rho_1 = \sqrt{1-X^2}$, X désignant une V.A. uniformément répartie sur (0,1).

La direction S_2 de H_2 est indépendante de S_1 et ρ_1, et admet la loi $\lambda(dS_2)/\lambda_d$. A S_2, S_1 et ρ_1 fixés, H_2 rencontre $H_1 \cap RB$ avec la probabilité $\rho_1\ |S_2^{\perp}, S_1|$, et le rayon de $RB \cap H_1 \cap H_2$ est alors $\rho_2\ R_1 = \rho_1\ \rho_2\ R$, ρ_2 désignant une V.A. équivalente à ρ_1.

Par itération, on voit qu'à S_1, $S_2, .. S_{k-1}$, $R_1 = \rho_1\ R$, $R_2 = \rho_2\ R_1, ..\ R_{k-1} = \rho_{k-1}\ R_{k-2} = \rho_1\rho_2 \cdots \rho_{k-1}\ R$ fixés, la direction S_k admet la même loi $G(dS_k)/\lambda_d$, et H_k rencontre $rB \cap H_1 \cap .. H_k$ avec la probabilité $\rho_1\rho_2\ \rho_{k-1}\ |S_k^{\perp}, S_1 \cap .. \cap S_{k-1}|$. Le rayon R_k de la boule $RB \cap H_1 \cap .. \cap H_k$ est alors $R_k = \rho_1\rho_2 \cdots \rho_k\ R$, ρ_k désignant toujours une V.A. equivalente à $\rho = \sqrt{1-X^2}$ pour X uniformément réparti sur (0,1).

La probabilité p_k pour que les k hyperplans se rencontrent dans rB est donc donnée par :

$$p_k = E[\rho_1^{k-1}\ \rho_2^{k-2} \ldots \rho_{k-1}]\ E[(S_1^{\perp}, S_2^{\perp}, .. S_k^{\perp})]$$

où $(S_1^{\perp}, S_2^{\perp}, .. S_k^{\perp}) = |S_2^{\perp}, S_1|\ |S_3^{\perp}, S_1 \cap S_2| \ldots |S_k^{\perp}, S_1 \cap .. \cap S_k|$ est le volume du parallèlépipède construit sur k vecteurs unitaires de direction $S_1^{\perp}, .. S_k^{\perp}$ respectivement dans $\mathbb{R}^d$, et les ρ_i, $i = 1, ..$

sont des V.A. indépendantes équivalentes à $\rho = \sqrt{1-X^2}$, X uniforme sur (0,1). Bien que l'expression exacte de p_k ne soit pas utile pour la suite du calcul, elle est facile à former. On trouve en effet d'abord :

$$E(\rho_1^{k-1}\,\rho_2^{k-2}\ldots\rho_{k-1}) = 2^{-k}\,b_k$$

Pour calculer l'espérance de $(S_1^{\perp}, S_2^{\perp},\ldots,S_k^{\perp})$, nous allons utiliser la mesure $G_k = G_k^A$ sur $\mathcal{S}_k$ associée au compact de Steiner A (Proposition 4-5-3). On a vu, en effet, que G_k est l'image de la mesure $(1/k!)(S_1^{\perp}, S_2^{\perp},\ldots S_k^{\perp})\ G_1(dS_1^{\perp})\ G_1(dS_2^{\perp})\ldots G_1(dS_k^{\perp})$ sur $(\mathcal{S}_1)^k$ par l'application $(L_1, L_2,\ldots L_k) \to L_1 \oplus L_2 \oplus\ldots\oplus L_k$ de $(\mathcal{S}_1)^k$ dans $\mathcal{S}_k$ (application définie presque partout pour la mesure considérée). Autrement dit, on a :

$$E[(S_1^{\perp}, S_2^{\perp},\ldots S_k^{\perp})] = (k!/(\lambda_d)^k) \int_{\mathcal{S}_k} G_k(dS)$$

En utilisant le corollaire 4 de la Proposition 4-5-3, on note que l'intégrale de la mesure G_k se relie de manière simple à la fonctionnelle de Minkowski $W_{d-k}(A)$. On trouve ainsi :

$$E[(S_1^{\perp}, S_2^{\perp},\ldots S_k^{\perp})] = \frac{k!\binom{d}{k}}{b_{d-k}\,(\lambda_d)^k}\ W_{d-k}(A) \tag{6-1-6}$$

On en déduit les valeurs de p_k, soit :

$$p_k = \frac{2^{-k}\,d!}{(d-k)!}\ \frac{b_k}{b_{d-k}}\ \frac{W_{d-k}(A)}{(\lambda_d)^k}$$

Dans le cas <u>isotrope</u>, ces formules se réduisent respectivement à :

$$E(S_1^{\perp}, S_2^{\perp},\ldots S_k^{\perp}) = \frac{d!}{(d-k)!}\ \frac{b_d}{b_{d-k}}\left(\frac{b_{d-1}}{d\ b_d}\right)^k \tag{6-1-6'}$$

et à :

$$p_k = \frac{2^{-k}\,d!}{(d-k)!}\ \frac{b_d\ b_k}{b_{d-k}}\left(\frac{b_{d-1}}{d\ b_d}\right)^k$$

Calculons maintenant l'espérance de $\mu_{d-k}\,(H_1 \cap\ldots\cap H_k \cap RB)$. Conditionnellement lorsque cette intersection est non vide, ce (d-k) volume est $b_{d-k}\,R^{d-k}\,(\rho_1, \rho_2\ldots\rho_k)^{d-k}$. On trouve donc :

$$E[\mu_{d-k}(H_1 \cap\ldots\cap H_k \cap RB)] = b_{d-k}\,R^{d-k}\,E[\rho_1^{d-1}\,\rho_2^{d-2}\ldots\rho_k^{d-k}] \times E[(S_1, S_2,\ldots S_k)]$$

On trouve sans peine $E(\rho_1^{d-1}\ \rho_2^{d-2}\dots\rho_k^{d-k}) = 2^{-k}\ b_d/b_{d-k}$, d'où, compte tenu de (6-1-6) :

$$E[\mu_{d-k}\ (H_1 \cap\dots\cap H_k \cap RB)] = \frac{2^{-k}\ d!}{(d-k)!}\ \frac{b_d}{b_{d-k}}\ \frac{W_{d-k}(A)}{(\lambda_d)^k}\ R^{d-k} \tag{6-1-7}$$

et, dans le cas du réseau isotrope :

$$E[\mu_{d-k}\ (H_1 \cap\dots\cap RB)] = \frac{2^{-k}\ d!}{(d-k)!}\ \frac{(b_d)^2}{b_{d-k}}\ \left(\frac{b_{d-1}}{d\ b_d}\right)^k\ R^{d-k} \tag{6-1-7'}$$

Telle est l'espérance du (d-k) volume conditionnellement lorsque k hyperplans frappent la boule RB. Si $n \geq k$ hyperplans rencontrent RB - ce qui a lieu avec la probabilité $[(R\phi(B))^n/n!] \times \exp\{-R\ \phi(B)\}$, on obtient une espérance $\binom{n}{k}$ fois plus élevée. Compte tenu de la relation $\sum_{n=k}^{\infty} (x^n/(n-k)!)\exp(-x) = x^k$, on en déduit l'espérance de $\nu_k(RB)$, soit :

$$E(\nu_k(RB)) = 2^{-k}\binom{d}{k}\ \frac{b_d}{b_{d-k}}\ \frac{W_{d-k}(A)}{(\lambda_d)^k}\ (\phi(B))^k\ R^d$$

Mais d'après (6-1-1), on a $\phi(B) = 2\int\lambda(ds) = 2\ \lambda_d$. Par suite :

$$E(\nu_k(RB)) = \binom{d}{k}\ \frac{b_d}{b_{d-k}}\ W_{d-k}(A)\ R^d$$

Il reste à diviser par $b_d\ R^d = \mu_d(RB)$ pour en déduire l'expression de <u>la densité</u> ν_k <u>du</u> <u>(d-k)-vol</u>
soit :

$$\nu_k = \binom{d}{k}\ (1/b_{d-k})\ W_{d-k}\ (A) \tag{6-1-8}$$

Dans le cas isotrope, cette formule devient :

$$\nu_k = \binom{d}{k}\ (b_d/b_{d-k})\ a^k \tag{6-1-8'}$$

Pour k = d, le réseau d'ordre d est constitué des points d'intersections des hyperplans du seau pris d à d, que nous appellerons les <u>sommets</u> du réseau A. Ainsi, <u>l'espérance</u> ν_d <u>du nombre</u> <u>sommets par unité de volume</u> est :

$$\nu_d = W_o\ (A) \tag{6-1-9}$$

et, dans le cas isotrope

$$v_d = b_d\ a^d \tag{6-1-9'}$$

Pour $k < d$, on peut aussi s'intéresser aux <u>directions</u> des variétés du réseau d'ordre k, et définir la mesure aléatoire $v_k(dx;dS)$ sur $\mathbb{R}^d \times \mathcal{S}_k$ telle que $v(K \times \mathcal{S})$ soit le (d-k) volume de l'intersection avec $K \in \mathcal{K}$ des variétés du réseau d'ordre k dont la direction appartient à $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}_k$. Il est facile de voir, d'après ce qui précède, que la mesure espérance correspondante est $E(v_k(dx;dS)) = v_k\ dx \times G_k(dS)/\int G_k(dS)$. Autrement dit, la mesure d'ordre k associée au compact de Steiner A détermine la répartition des directions des variétés du réseau d'ordre k.

<u>Les mesures-covariances</u> (cas isotrope)

Il nous reste maintenant à trouver l'expression de la mesure covariance $C_k(dh)$ de la mesure aléatoire stationnaire $v_k(dx)$. Nous ne ferons le calcul que dans le cas ou le réseau A est <u>isotrope</u>. La mesure C_k est alors elle-même invariante par rotation. Si l'on désigne par g_R la fonction sur $\mathbb{R}^d$ définie par :

$$g_R(h) = \int 1_{RB}(x)\ 1_{RB}(x+h)dx = R^d\ g_1\ (\tfrac{h}{R})$$

il est facile de voir qu'une mesure isotrope C_k est entièrement déterminée par la donnée de la fonction $R \to \int C_k(dh)\ g_R(h)$. Or cette expression n'est autre que le moment d'ordre 2 $E[v_k(RB))^2]$. D'où la marche du calcul : en premier lieu, nous calculerons $E[(v_k(RB))^2]$, et nous en déduirons ensuite par identification l'expression de la covariance isotrope $C_k(dh)$.

a/ Pour calculer $E[(v_k(RB))^2]$, plaçons-nous d'abord conditionnellement dans l'hypothèse où un nombre n d'hyperplans $H_1, H_2,..H_n$ du réseau rencontrent la boule rB ($n \geq k$). Posons :

$$X_{i_1,i_2,..i_k} = \mu_{d-k}\ (H_{i_1} \cap ... \cap H_{i_k} \cap RB)$$

On a déjà calculé l'espérance de cette variable aléatoire. A n fixé toujours, on a :

$$(v_k(RB))^2 = \sum_{i_1<...< i_k}\ \sum_{j_1<...< j_k}\ X_{i_1,..i_k}\ X_{j_1,..j_k}$$

Il s'agit donc de calculer l'espérance $E(X_{i_1,..i_k}\ X_{j_1,..j_k})$ pour tous les choix possibles des suites d'indices $\{i_1,..i_k\}$ et $\{j_1,..j_k\}$ dans $\{1,2,..n\}$. Soit p le nombre des indices communs à ces deux suites. Il existe donc 2k-p hyperplans $H_1,..H_p$, $H_{p+1},..H_k$, H'_{p+1}, H'_k tels que l'on ait :

$$\begin{cases} X_{i_1,..i_k} = \mu_{d-k}\,(H_1 \cap..\cap H_p \cap H_{p+1} \cap..\cap H_k \cap RB) \\ X_{j_1,..j_k} = \mu_{d-k}\,(H_1 \cap..\cap H_p \cap H'_{p+1} \cap..\cap H'_k \cap RB) \end{cases}$$

On va, comme précédemment, introduire les directions $S_1,..S_k$, $S'_{p+1},..S'_k$ de ces hyperplans, et les variables aléatoires indépendantes $\rho_1,..\rho_k$, $\rho'_{p+1},..\rho'_k$ équivalentes à $\rho = \sqrt{1-X^2}$, pour X uniformément réparti sur (0,1). On posera $\sigma = S_1 \cap..\cap S_p \in \mathcal{S}_{d-p}$. Le calcul est très analogue à celui que l'on a déjà fait pour trouver l'expression de v_k. On trouve d'abord que les deux intersections $H_1 \cap..\cap H_k \cap RB$ et $H_1 \cap..\cap H'_k \cap RB$ sont toutes deux non vides avec la probabilité conditionnelle :

$$(\rho_1\,\rho_2..\rho_p)^{2(k-p)}\;\rho'^{\,k-p-1}_{p+1}\cdots\rho'_{k-1}\;\rho^{\,k-p-1}_{p+1}\cdots\rho_{k-1} \times |\Pi_\sigma\, S^{\perp}_{p+1}| \times |\Pi_\sigma\, S^{\perp}_{p+2},\ \sigma \cap S_{p+1}| \times \dots$$

$$\dots \times |\Pi_\sigma\, S^{\perp}_k,\ \sigma \cap S_{p+1} \cap..\cap S_{k-1}| \times |\Pi_\sigma\, S'^{\perp}_{p+1}| \times |\Pi_\sigma\, S'^{\perp}_{p+2},\ \sigma \cap S'_{p+1}| \times \dots$$

$$\dots \times |\Pi_\sigma\, S'^{\perp}_k,\ \sigma \cap S'_{p+1} \cap..\cap S'_{k-1}|$$

lorsque $H_1 \cap..\cap H_p$ n'est pas vide et que les ρ_i, les ρ'_j et les S_i, S'_j sont fixés sauf ρ_k, ρ'_k. La probabilité pour que $H_1 \cap..\cap H_p$ ne soit pas vide est elle-même :

$$\rho_1^{\,p-1}\;\rho_2^{\,p-2}\cdots\rho_{p-1}\;|S_2^{\perp},\ S_1| \dots |S_p^{\perp},\ S_1 \cap..\cap S_{p-1}|$$

Conditionnellement pour $H_1 \cap..\cap H_k \cap RB$ et $H_1 \cap \dots \cap H'_k\ RB \neq \emptyset$, on a ensuite :

$$X_{i_1,..i_k}\,X_{j_1,..j_k} = (b_{d-k}\,R^{d-k})^2\,(\rho_1\,\rho_2\dots\rho_p)^{2(d-k)}\,(\rho'_{p+1}\dots\rho'_k)^{d-k}\,(\rho_{p+1}\dots\rho_k)^{d-k}$$

Au total, donc, nous devons prendre l'espérance mathématique de l'expression

$$(b_{d-k}\,R^{d-k})^2\;\rho_1^{\,2d-p-1}\;\rho_2^{\,2d-p-2}\cdots\rho_p^{\,2d-2p}\;(\rho_{p+1}\,\rho'_{p+1})^{d-p-1}\cdots(\rho_k\,\rho'_k)^{d-k}\ \times$$

$$|S_2,\ S_1| \times \dots \times |S_p^{\perp},\ S_1 \cap..\cap S_{p-1}| \times |\Pi_\sigma\, S^{\perp}_{p+1}| \times |\Pi_\sigma\, S'_{p+1}| \times \dots$$

$$\dots \times |\Pi_\sigma\, S^{\perp}_k,\ \sigma \cap S_{p+1} \cap..\cap S_k| \times |\Pi_\sigma\, S'^{\perp}_k,\ \sigma \cap S'_{p+1} \cap..\cap S'_k|$$

En se reportant à la fin du paragraphe 4-5, on a constaté que ces différentes variables sont indépendantes. Avec les notations de ce paragraphe (formule (4-5-12) notamment, l'expression précédente est équivalente à :

$$(b_{d-k}\, R^{d-k})^2\, \rho_1^{2d-p-1} \cdots \rho_p^{2d-2p}\, (\rho_{p+1}\, \rho'_{p+1})^{d-p-1} \cdots (\rho_k\, \rho'_k)^{d-k} \times \prod_{d-p+1}^{d} Y_j \times \prod_{d-k+1}^{d-p} Y'_j\, Y''_j$$

En utilisant les relations :

$$E(\rho^j) = \frac{b_{1+j}}{2b_j}\ , \quad E(Y_j) = \frac{j}{d}\, \frac{b_{d-1}}{b_d}\, \frac{b_j}{b_{j-1}}$$

on obtient finalement :

$$E(X_{i_1,\ldots i_p,\ i_{p+1},\ldots i_k}\, X_{i_1,\ldots i_p,\ j_{p+1},\ldots j_k}) = B(p,k)\, R^{2(d-k)}$$

$$B(p,k) = 2^{-2k+p}\, \frac{d!(d-p)!}{((d-k)!)^2}\, \frac{b_{2d-p}\, b_d (b_{d-p})^3}{b_{2d-2p}\, (b_{d-k})^2} \left(\frac{b_{d-1}}{d\ b_d}\right)^{2k-p}$$

b/ Lorsque n hyperplans rencontrent RB, on peut trouver parmi les $\binom{n}{k}$ variétés du réseau d'ordre k associées à ces n hyperplans exactement $\binom{n}{p}\binom{n-p}{k-p}\binom{n-k}{k-p} = n!/[((k-p)!)^2\, p!(n-2k+p)!]$ couples de variétés du type $H_1 \cap \ldots \cap H_p \cap H_{p+1} \cap \ldots \cap H_k$, $H_1 \cap \ldots \cap H_p \cap H'_{p+1} \cap \ldots \cap H'_k$ considérés ci-dessus, c'est-à-dire associés à p hyperplans communs exactement. On en déduit

$$E[(\nu_k(RB))^2] = \sum_{p=o}^{k} \sum_{n=2k-p}^{\infty} \frac{N!\ B(p,k)\ R^{2d-2k}}{p!\ [(k-p)!\ (n-2k+p)!]}\ \frac{(R\phi(B))^n}{n!}\ e^{-R\phi(B)}$$

$$= \sum_{p=o}^{k} \frac{B(p,k)}{p!\ [(k-p)!]^2}\ (\phi(B))^{2k-p}\ R^{2d-p}$$

Soit, compte tenu de $\phi(B) = (2\ d\ b_d/b_{d-1})d$:

$$\text{(6-1-10)}\quad E[(\nu_k(RB))^2] = \sum_{p=o}^{k} \frac{d!\ (d-p)!}{p!\ [(d-k)!\ (k-p)!]^2}\ \frac{b_{2d-p}\ b_d (b_{d-p})^3}{b_{2d-2p}\ (b_{d-k})^2}\ a^{2k-p}\ R^{2d-p}$$

c/ Il reste à identifier la mesure isotrope C_k vérifiant

$$E[(\nu_k(RB))^2] = \int C_k(dh)\ g_R(h)$$

$$\left(g_R(h) = \int 1_{RB}(x)\ 1_{RB}(x+h)dx\right)$$

Pour cela, notons d'abord que la mesure de Dirac δ vérifie :

$$\int g_R(h)\ \delta(dh) = g_R(o) = b_d\ R^d$$

Calculons de même l'intégrale $\int g_R(h)dh/|h|^p$. $(0 \leq p \leq d)$. En posant $|h| = r$, et en écrivant $g_R(r)$ au lieu de $g_R(|h|)$, on trouve :

$$\int_{\mathbb{R}^d} g_R(h)\ \frac{dh}{r^p} = d b_d \int_o^{2R} g_R(r)\ r^{d-p-1}\ dr = -\ \frac{d\ b_d}{d-p} \int_o^{2R} g_R'(r)\ r^{d-p}\ dr$$

Compte tenu de $g_R'(r) = -\ b_{d-1}(R^2 - \frac{r^2}{4})^{\frac{d-1}{2}}$, on trouve :

$$\int_{\mathbb{R}_d} g_R(h)\ \frac{dh}{r^p} = 2^{1+d-p}\ \frac{d}{(d-p)(1+d-p)}\ \frac{b_d\ b_{2d-p}}{b_{1+d-p}}\ R^{2d-p}$$

En procédant par identification dans (6-1-10), on en déduit l'expression explicite de la mesure-covariance C_k, soit pour $k < d$:

(6-1-11) $$C_k(dh) = \sum_{p=o}^{k} \frac{(d-p)(d-1)!\ (d-p)!}{p!\ [(d-k)!\ (k-p)!]^2} \left(\frac{b_{d-p}}{b_{d-k}}\right)^2\ a^{2k-p}\ \frac{dh}{r^p}$$

et pour $k = d$

(6-1-12) $$C_d(dh) = \sum_{p=o}^{d-1} \binom{d-1}{p}\ (b_{d-p})^2\ a^{2d-p}\ \frac{dh}{r^p} + b_d\ a^d\ \delta$$

Il résulte, en particulier, de ces expressions que les réseaux d'ordre $k > 1$ ne sont pas poissoniens. Par exemple, si le réseau d'ordre d était un processus de Poisson ponctuel dans $\mathbb{R}^d$, sa covariance se réduirait aux seuls termes $b_d\ a^d\ \delta + (b_d\ a^d)^2\ dh$.

A titre de comparaison, indiquons l'espérance et la covariance de la mesure aléatoire $\nu_k' = \sum \mu_{d-k}^{A_i}$ associée à un réseau poissonien de variétés linéaires A_i de dimension d-k. Si la fonctionnelle ϕ est de la forme $\phi(K) = \gamma \int_{\mathcal{S}_{d-k}} \mu_k(\Pi_{S^\perp} K)\ \varpi_{d-k}(dS) = \gamma(b_k/b_d)\ W_{d-k}(K)$, on trouve par un calcul analogue à celui que nous avons effectué (mais plus simple) :

$$\nu_k' = \gamma\, dx \quad ; \quad C_k' = \gamma^2\, dh + \gamma\, \frac{d-k}{d}\, \frac{b_{d-k}}{b_d}\, \frac{dh}{R^k} \qquad (k < d)$$

et $C_d' = \gamma^2\, dh + \gamma\delta$ si $k = d$.

6-2 LES POLYEDRES POISSONIENS ET L'INVARIANCE CONDITIONNELLE.

Pour obtenir la classe la plus générale de polyèdres poissoniens, nous allons changer légèrement la définition des réseaux poissoniens d'hyperplans, en partant d'un processus de Poisson ponctuel sur l'espace produit $S_0 \times \mathbb{R}_+$, où S_0 est la sphère unité, plutôt que sur l'espace $\mathcal{S}_1 \times \mathbb{R}$ comme nous l'avons fait ci-dessus. A tout point $(u,r) \in S_0 \times \mathbb{R}_+$, associons l'hyperplan $H(u,r) = \{x : \langle u,x \rangle = r\}$ dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^d$. L'application $H : (u,r) \to H(u,r)$ de $S_0 \times \mathbb{R}_+$ dans $\mathcal{F}$ est manifestement continue. Donnons-nous alors sur $S_0 \times \mathbb{R}_+$ le processus de Poisson ponctuel associé à une mesure $\lambda(dx) \otimes dr$, où λ est une mesure positive sur S_0 et dr la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$. L'image par H de ce processus ponctuel constitue un réseau d'hyperplans aléatoires dans $\mathbb{R}^d$, que nous appellerons <u>réseau poissonien</u>. Désignons par A la réunion des hyperplans de ce réseau. A est un E.F.A. En effet, le nombre $n(K)$ des hyperplans du réseau rencontrant un compact $K \in \mathcal{K}$, égal au nombre des points du processus sur $S_0 \times \mathbb{R}_+$ qui tombent dans $H^{-1}(\mathcal{F}_K)$, est une variable de Poisson d'espérance :

$$\phi(K) = \int_{H^{-1}(\mathcal{F}_K)} \lambda(du)\, dr \tag{6-2-1}$$

Or $H^{-1}(\mathcal{F}_K)$ est compact dans $S_0 \times \mathbb{R}_+$, d'où $\phi(K) < \infty$. Le réseau A est donc localement fini, et A est p.s. fermé. l'EFA A est manifestement indéfiniment divisible et semi-markovien, en tant que réunion d'un processus de Poisson sur $C(\mathcal{F}')$. Mais il n'est stationnaire que si la mesure λ est <u>symétrique</u> sur la sphère unité S_0.

Le complémentaire A^c de A est p.s. constitué de polyèdres ouverts convexes et disjoints dans $\mathbb{R}^d$, et on a aussi $P(0 \in A^c) = 1$. Parmi ces polyèdres, nous allons nous intéresser à celui qui contient le point O, dont l'existence presque sûre est ainsi établie. Nous le désignerons par Π_0, et nous dirons que Π_0 est un <u>polyèdre poissonien</u>. Π_0 est donc un ouvert aléatoire et contenant p.s. l'origine O. Son adhérence $\overline{\Pi}_0$ est un EFA p.s. convexe dont l'intérieur coïncide p.s. avec Π_0 lui-même. Si K est un compact, on a $K \subset \Pi_0$ (soit $\Pi_0 \in \mathcal{G}_K$ avec les notations du premier chapitre) si et seulement si l'enveloppe convexe $C(\{o\} \cup K)$ est disjointe du réseau poissonien A, i.e. $A \in \mathcal{F}^{C(\{o\} \cup K)}$, et ceci a lieu avec la probabilité $Q(C(\{o\} \cup K))$.

Ainsi la probabilité P sur $(\mathcal{G}, \sigma_f)$ définie par le polyèdre poissonien Π_o est parfaitement déterminée par la donnée de la fonctionnelle $K \to P(\mathcal{G}_K) = P(K \subset \Pi_o)$ sur l'espace $C_o(\mathcal{K})$ des compacts convexes contenant 0, fonctionnelle identique sur $C_o(\mathcal{K})$ à la fonctionnelle Q du réseau poissonien A lui-même. Explicitons cette fonctionnelle. Si r_K est la __podaire__ de $K \in C_o(\mathcal{K})$, l'ensemble $H^{-1}(\mathcal{F}_K)$ dans $S_o \times \mathbb{R}_+$ est $\{(u,r) : r \leq r_K(u)\}$, et la formule (6-2-1) donne :

$$(6\text{-}2\text{-}2) \qquad \begin{cases} Q(K) = \exp\{-\phi(K)\} \\ \phi(K) = \int_{S_o} r_K(u)\ \lambda(du) \end{cases} \qquad (K \in C_o(\mathcal{K}))$$

D'après ce qui précède, cette relation (6-2-2), prolongée sur entier en posant :

$$(6\text{-}2\text{-}3) \qquad Q(K) = Q(C(\{o\} \cup K)) \qquad (K \in \mathcal{K})$$

pour servir __à définir__ la notion de polyèdre poissonien Π_o . En particulier, il y a correspondance bijective entre les polyèdres poissoniens et les mesures de Radon positives sur la sphère unité. Lorsque la mesure λ sur S_o est __symétrique__ par rapport à 0, le polyèdre Π_o correspondant peut être associé à un réseau __stationnaire__ A d'hyperplans poissoniens dans $\mathbb{R}^d$. Lorsque λ est proportionnelle à l'unique probabilité ϖ invariante par rotations sur S_o, le polyèdre poissonien Π_o est dit __isotrope__ (A est alors obligatoirement isotrope et stationnaire).

__L'Invariance Conditionnelle.__

On a vu au paragraphe 4-4 que l'application podaire est un homéomorphisme de $C_o(\mathcal{K})$ sur le cône $\mathcal{R} \subset \mathcal{C}(S_o)$. Comme λ est une mesure de Radon, il en résulte ue ϕ et Q sont __continues__ sur $C_o(\mathcal{K})$ d'après (6-2-2), et aussi sur $\mathcal{K}$ tout entier, d'après (6-2-3). La relation $r_{K \oplus K'} = r_K + r_{K'}$, dans $C_o(\mathcal{K})$ donne ensuite $\phi(K \oplus K') = \phi(K) + \phi(K')$ et, compte tenu de la continuité, $\phi(\alpha K) = \alpha\ \phi(K)$, $\alpha \geq 0$, pour K et $K' \in C_o(\mathcal{K})$. Ces résultats subsistent lorsque K et K' sont des compacts quelconques contenant l'origine. Ainsi, en désignant par $\mathcal{K}_o$ l'ensemble des compacts __contenant l'origine 0__ la fonctionnelle $Q_o(K) = P(K \subset \Pi_o)$ vérifie :

$$\begin{cases} Q_o(\alpha K) = [Q_o(K)]^\alpha \\ Q_o(K \oplus K') = Q_o(K)\ Q_o(K') \end{cases} \qquad (\alpha \geq 0,\ K,\ K' \in \mathcal{K}_o).$$

La seconde de ces relations est la relation des <u>demi-groupes</u>. Elle exprime une propriété de type markovien que nous allons expliciter, et nous verrons ensuite qu'elle suffit pour caractériser les polyèdres poissoniens. Pour dégager cette interprétation, notons d'abord que $K \subset \Pi_0$ équivaut à $0 \in \Pi_0 \ominus \check{K}$. De même, $K \oplus K' \subset \Pi_0$ équivaut à $K' \subset \Pi_0 \ominus \check{K}$. Ainsi, la relation des demi-groupes $Q(K \oplus K') = Q(K)\, Q(K')$ s'écrit :

$$P(K' \subset \Pi_0 \ominus \check{K}') = P(K' \subset \Pi_0)\; P(K \subset \Pi_0)$$

Or, K et K' contenant l'origine, $K' \subset \Pi_0 \ominus \check{K}$ implique $K \subset \Pi_0$, et $P(K \subset \Pi_0)$ n'est jamais nul. On peut donc ecrire la relation des demi-groupes en termes de probabilités conditionnelles :

$$P(K' \subset \Pi_0 \ominus \check{K} \mid 0 \in \Pi_0 \ominus \check{K}) = P(K' \subset \Pi_0)$$

Ainsi, <u>conditionnellement dans l'hypothèse où 0 appartient à l'érodé</u> $\Pi_0 \ominus \check{K}$, <u>cet érodé</u> $\Pi_0 \ominus \check{K}$ <u>est un polyèdre poissonien admettant la même loi de probabilité que le polyèdre</u> Π_0 <u>initial</u>. Nous exprimerons cette propriété en disant que <u>les polyèdres poissoniens sont conditionnellement invariants pour les érosions</u> par des compacts contenant l'origine. On trouvera ci-dessous une interprétation légèrement différente de cette invariance conditionnelle envisagée du point de vue de la loi en nombre.

Montrons maintenant que cette invariance conditionnelle est une propriété <u>caractéristique</u> des polyèdres poissoniens. Plus précisément, démontrons l'énoncé suivant, où l'on pose $Q(K) = P(K \subset \Pi_0)$:

<u>THEOREME 6-2-1</u> - <u>Pour qu'un ouvert aléatoire</u> Π_0 <u>contenant p.s. le point 0 vérifie la relation</u> $Q(K \oplus K') = Q(K)\, Q(K')$ <u>pour K, K' compacts contenant 0, il faut et il suffit que</u> Π_0 <u>soit un polyèdre poissonien.</u>

On vient de voir que cette condition est suffisante. Inversement, soit Π_0 un ouvert aléatoire vérifiant $P(0 \in \Pi_0) = 1$ et :

(6-2-4) $$Q(K \oplus K') = Q(K)\, Q(K') \qquad (K, K' \in \mathcal{K}_0)$$

avec $Q(K) = P(K \subset \Pi_0)$. Dans tout ce qui suit, B_r désigne la boule de centre 0 et de rayon r. Procédons par étapes.

a/ On a $Q(B_\varepsilon) \uparrow 1$ pour $\varepsilon \downarrow 0$. En effet, la fonctionnelle Q est toujours s.c.i. sur $\mathcal{K}$, et $B_\varepsilon \to \{0\}$ dans $\mathcal{K}$ si $\varepsilon \to 0$.

b/ Q est continue sur $\mathcal{K}$. Comme $Q(K) = Q(K \cup \{0\})$, et que la réunion est continue, il suffit de vérifier que Q est continue sur $\mathcal{K}_0$. Soit donc K_n une suite convergeant vers K dans $\mathcal{K}_0$. Pour $\varepsilon > 0$ donné, on a $K \subset K_n \oplus B_\varepsilon$ et $K_n \subset K \oplus B_\varepsilon$ dès que n est assez grand. La relation (6-2-4) donne alors :

$$Q(K) \geq Q(B_\varepsilon)\ \overline{\lim}\ Q(K_n)\ ,\ \underline{\lim}\ Q(K_n) \geq Q(K)\ Q(B_\varepsilon)$$

Compte tenu de a/, on en déduit $\lim Q(K_n) = Q(K)$, et Q est continue.

c/ Si $K \in \mathcal{K}$, et si C_0 est l'enveloppe convexe de $\{0\} \cup K$, on a $Q(K) = Q(C_0)$.

Comme $0 \in \Pi_0$ p.s., il suffit de montrer $Q(K) = Q(C)$, C désignant l'enveloppe convexe de K. Soit $\varepsilon > 0$. D'après la Proposition 1-5-7, on peut trouver $r > 0$ tel que $C \oplus B_r \oplus B_\varepsilon$, d'où $Q(K)Q(B_\varepsilon) \leq Q(C)$ d'après la relation (6-2-4), puis $Q(K) \leq Q(C)$ d'après a/. L'inégalité inverse étant évidente, on a bien $Q(K) = Q(C)$.

d/ De la relation (6-2-4) et de la continuité de Q résulte aussitôt :

$$Q(\alpha K) = [Q(K)]^\alpha \quad , \quad \alpha \geq 0 \quad , \quad K \in \mathcal{K}$$

Notons d'ailleurs que Q ne peut pas s'annuler sur $\mathcal{K}$. En effet, si $Q(K_0) = 0$ pour un compact K_0, prenons une boule $B_{\rho_0} \supset K_0$. On a $Q(B_{\rho_0}) = [Q(B_1)]^{\rho_0} = 0$. Par suite, $Q(B_\rho) = 0$ pour tout $\rho > 0$, mais cela contredit a/. Donc Q ne s'annule pas, et par suite $\phi = -\log Q$ est continue sur $\mathcal{K}$.

e/ La fonctionnelle ϕ est donc continue, croissante et positivement linéaire sur $\mathcal{K}_0$, et a fortiori sur $C_0(\mathcal{K})$. D'après la Proposition 4-4-4, il existe donc une mesure de Radon λ positive sur la sphère unité telle que l'on ait :

$$\phi(K) = \int_{S_0} r_K(u)\ \lambda(du) \qquad K \in C_0(\mathcal{K})$$

Compte tenu de c/, et de la définition (6-2-2)-(6-2-3) des polyèdres poissoniens, Π_0 est donc le polyèdre poissonien associé à la mesure λ.

Point de vue de la loi en nombre.

Soit maintenant λ une mesure positive symétrique sur S_0, et A le réseau stationnaire d'hyperplans poissoniens de $\mathbb{R}^n$ associé au processus de Poisson de densité $\lambda(du)dx$ dans $S_0 \times \mathbb{R}_+$. Le complémentaire A^c de A est réunion de polyèdres ouverts convexes disjoints Π_i dont l'un, soit Π_0, contient l'origine O. Dans un langage intuitif, on peut envisager la "population" constituée par les polyèdres Π_i considérés comme des individus, en attribuant à chacun d'eux le même poids, et définir ainsi la loi en nombre du polyèdre poissonien Π(on trouvera dans les travaux de MILES [10], [12], [13] une justification rigoureuse de ce point de vue). On peut, au contraire, attribuer à chacun des Π_i un poids proportionnel à son volume $V(\Pi_i)$ dans $\mathbb{R}^n$ et considérer la loi en volume de ce même polyèdre poissonien. Le polyèdre poissonien Π_0 tel que nous l'avons défini ci-dessus doit correspondre au point de vue de la loi en volume, car (dans un langage intuitif), l'origine O a plus de chances de tomber dans un grand polyèdre que dans un petit. De fait, Miles, s'appuyant sur un théorème ergodique, a établi le résultat suivant : soient X une caractéristique d'un polyèdre Π, V son volume, $F_0(dX,dV)$ la loi de (X,V) pour le polyèdre poissonien Π_0 tel que nous l'avons défini, $F(dX,dV)$ la loi de (X,V) pour le polyèdre poissonien considéré du point de vue de la loi en nombre, E_0 et E enfin, les espérances attachées à ces lois. On a alors :

$$F_0(dX,dV) = \frac{V}{E(V)} F(dX,dV)$$

Examinons ce que devient l'invariance conditionnelle lorsque l'on passe du point de vue des lois en mesure à celui des lois en nombre. Soit K un compact convexe contenant l'origine. La probabilité du polyèdre érodé $\Pi_0 \ominus \check{K}$ pris conditionnellement pour $0 \in \Pi_0 \ominus \check{K}$ est la loi en mesure associée selon le théorème ergodique à la loi en nombre qui est celle de l'érodé $\Pi \ominus \check{K}$ pris conditionnellement pour $\Pi \ominus \check{K} \neq \emptyset$. On en déduit l'énoncé suivant, où la restriction $0 \in K$ est inutile (car éroder un translaté de Π équivaut à translater l'érodé de Π) .

Si Π est un polyèdre poissonien (envisagé du point de vue de la loi en nombre) et K un compact non vide quelconque, conditionnellement dans l'hypothèse où l'érodé $\Pi \ominus \check{K}$ n'est pas vide, cet érodé est équivalent en probabilité au polyèdre initial Π.

Si donc $\Pi \to X(\Pi)$ est une caractéristique du polyèdre Π (i.e. une fonction mesurable sur l'espace des ouverts convexes) vérifiant $X(\emptyset) = 0$, on peut écrire :

$$E[X(\Pi \ominus \check{K})] = E(X(\Pi))\ P(\Pi \ominus \check{K} \neq \emptyset)$$

Montrons que l'on a en fait :

$$P(\Pi \ominus \check{K} \neq \emptyset) = Q(K) \tag{6-2-5}$$

d'où résultera la relation suivante, particulièrement utile pour les applications :

(6-2-6) $$E[X(\Pi \ominus \check{K})] = Q(K)\ E(X(\Pi))$$

En effet, d'après l'énoncé de l'invariance conditionnelle, on a déjà $P(\Pi \ominus \check{K} \neq \emptyset) = E[V(\Pi \ominus \check{K})]/E(V(\Pi))$, où V désigne le volume. D'autre part, désignons par A le réseau poissonien, et par f_K l'indicatrice de l'ensemble aléatoire $A^c \ominus \check{K}$, qui est la réunion des érodés par K des polyèdres du réseau. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a $Q(K) = E(f_K(x))$. Si B_r est la boule de rayon $r > 0$, on en déduit aussi :

$$Q(K) = E\left(\frac{V}{V(B_r)} \int_{B_r} f_K(x)dx\right)$$

Lorsque r tend vers l'infini, le théorème ergodique montre que la VA $(1/V(B_r)) \int_{B_r} f_K(x)dx$ converge vers $E(V(\Pi \ominus \check{K}))/E(V(\Pi))$, c'est-à-dire vers $P(\Pi \ominus \check{K} \neq \emptyset)$. La relation (6-2-5) en résulte bien.

Nous allons consacrer le reste de ce chapitre à quelques applications, en essayant d'utiliser les résultats précédents pour calculer certaines caractéristiques des polyèdres poissoniens en mesure ou en nombre.

6-3 APPLICATIONS.

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons aux polyèdres poissoniens (en nombre ou en mesure) associés à un réseau <u>stationnaire</u> A d'hyperplans poissoniens. Autrement dit, la mesure λ qui figure dans la relation (6-2-2) est symétrique sur la sphère unité S_0. Nous supposerons que les polyèdres poissoniens sont p.s. bornés, autrement dit que le support de la mesure λ sur S_0 n'est pas contenu dans un sous-vectoriel strict de $\mathbb{R}^d$, ou encore que le compact de Steiner A associé au réseau A a un volume $W_0(A) > 0$ strictement. D'après la relation (6-1-9), ceci équivaut à $v_d > 0$.

Espérance des fonctionnelles de Minkowski $W_k(\Pi)$.

Désignons par K_i les adhérences des polyèdres associés au réseau A et par H_j les hyperplans de A (le réseau étant localement fini, cette indexation a un sens). Si x est un point de $\mathbb{R}^d$ et $\Pi_{K_i} x = x_i$ sa projection sur K_i, x_i est également la projection de x sur une et p.s. une seulement des variétés des réseaux d'ordre 1, 2,...ou d. Inversement, si $V = H_{j_1} \cap \ldots \cap H_{j_2}$ est une variété du réseau d'ordre K, $\Pi_V x$ est la projection de x sur un et p.s. un seulement polyèdre poissonien. Compte tenu de la stationnarité de A, on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, sauf peut-être sur un ensemble négligeable pour la mesure de Lebesgue, les ensembles $\{\Pi_{K_i} x\}$ et $\{\Pi_{H_j} x\} \cup \{\Pi_{H_{j_1} \cap H_{j_2}}\} \cup \ldots$ sont bijectivement identifiables. Par suite, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_{\mathcal{K}}(\mathbb{R}^d)$ on a p.s. :

$$\sum_i \int_{K_i \ominus rB} \varphi(\Pi_{K_i} x)dx = \sum_j \int_{H_j \ominus rB} \varphi(\Pi_{H_j} x)dx +$$

$$+ \sum_{j_1 < j_2} \int_{(H_{j_1} \cap H_{j_2}) \ominus rB} \varphi(\Pi_{H_{j_1} \cap H_{j_2}} x)dx + \ldots$$

Autrement dit, pour $0 \leq k \leq d$, les mesures aléatoires associées aux fonctionnelles de Minkowski des polyèdres et des variétés vérifient p.s. :

$$\sum_i W_k^{K_i} = \sum_j W_k^{H_j} + \sum_{j_1 < j_2} W_k^{H_{j_1} \cap H_{j_2}} + \ldots \qquad (6\text{-}3\text{-}1)$$

Or il est facile de voir que si V est une variété linéaire de dimension d-k, on a $W_k^V = (b_k/\binom{d}{k})\, \mu_{d-k}^V$ et $W_{k'}^V = 0$ pour $k' \neq k$. Par conséquent, en prenant l'espérance mathématique des mesures aléatoires qui figurent dans la relation (6-3-1), on trouve :

$$E(\sum_i W_k^{K_i}(dx)) = (b_k/\binom{d}{k})\, \nu_k\, dx$$

et, compte tenu de (6-1-8) :

$$E(\sum_i W_k^{K_i}(dx)) = (b_k/b_{d-k})\, W_{d-k}(A)\, dx$$

En particulier, pour la boule rB de rayon r > 0, on trouve :

$$E\left(\frac{\sum_i W_k^{K_i}(rB)}{b_d\, r^d}\right) = \frac{b_k}{b_{d-k}}\, W_{d-k}(A)$$

Soient, d'autre part, n(r) et n'(r) respectivement les nombres de polyèdres poissoniens contenus dans rB et rencontrant rB, donc vérifiant

$$n(r) \leq (1/b_d) \sum_i W_d^{K_i}(rB) = \nu_d(rB) \leq n'(r)$$

En utilisant le théorème ergodique [ ], on peut montrer que les variables $n(r)/(b_d\, r^d)$, $v_d(rB)/b_d\, r^d)$ et $n'(r)/(b_d\, r^d)$ admettent la même limite p.s., qui est nécessairement $v_d = W_o(A)$, et de même que $(\sum_{1}^{K_1} W_k^1(rB))/(b_d\, r^d)$ converge p.s. vers $v_d\, E(W_k(\Pi))$, Π désignant le polyèdre poissonien pris en nombre. On en déduit :

(6-3-2) $$E(W_k(\Pi)) = \frac{b_k}{b_{d-k}}\,\frac{W_{d-k}(A)}{v_d} = \frac{b_k}{b_{d-k}}\,\frac{W_{d-k}(A)}{W_o(A)}$$

En particulier, dans le cas <u>isotrope</u>, le compact de Steiner A est une boule de rayon a, et on trouve

(6-3-2') $$E(W_k(\Pi)) = (b_k/b_{d-k})\; a^{k-d}$$

<u>Granulométrie selon les boules</u>.

La granulométrie de l'ouvert aléatoire A^c selon les boules est par définition (cf paragraphes 1-5 et 2-7) la fonction $r \to G_B(r)$, avec :

$$1 - G_B(r) = P(x \in A^c_{rB}) \qquad (x \in \mathbb{R}^d)$$

A^c_{rB} désignant l'ouverture de A^c selon la boule de rayon r. Cette probabilité ne dépend pas du point x, à cause de la stationnarité. D'autre part, en utilisant le théorème ergodique, on voit que la fonction G_B se déduit de la loi en nombre du polyèdre poissonien Π selon la relation

$$1 - G_B(r) = \frac{E[W_o(\Pi_{rB})]}{E[W_o(\Pi)]}$$

D'après (6-3-2), on a déjà $E[W_o(\Pi)] = 1/v_d$. Il reste à calculer $E[W_o(\Pi_{rB})]$, avec $\Pi_{rB} = (\Pi \ominus rB) \oplus rB$ Mais, d'après l'invariance conditionnelle, l'érodé $\Pi \ominus rB$ a même loi que Π lui-même s'il n'est pas vide, ce qui a lieu avec la probabilité $Q(rB) = \exp(-r\phi(B))$. On en déduit aussitôt :

$$1 - G_B(r) = \frac{E[W_o(\Pi \ominus rB)]}{E[W_o(\Pi)]}\; e^{-r\phi(B)}$$

Il reste à appliquer la formule de Steiner pour obtenir, compte tenu de (6-3-2) et de $\phi(B) =$ $= (2d/b_{d-1})\, W_{d-1}(A)$:

(6-3-3) $$1-G_B(r) = \left(\sum_{k=0}^{d} \binom{d}{k} (b_k/b_{d-k})\, W_{d-k}(A)\, r^k\right) \exp\{-\,2(d/b_{d-1})\, W_{d-1}(A)\, r\}$$

En particulier, dans le cas isotrope, on trouve :

$$(6\text{-}3\text{-}3') \qquad 1 - G_B(r) = b_d \left(\sum_{k=0}^{d} \binom{d}{k} (b_k/b_{d-k}) \, a^k r^k \right) \exp\{-2(d\, b_d/b_{d-1})\, a\, r\}$$

Ces lois sont donc des exponentielles polynomes dont le dggré est égal à la dimension d de l'espace euclidien. Pour d = 1, on trouve pour la granulométrie une loi gamma de densité $\theta^r \, r \, e^{-\theta r}$ avec $\theta = 2\, W_o(\lambda)$ ($\theta = 4a$ dans le cas isotrope). La boule de rayon r dans $\mathbb{R}^1$ étant un segment de longueur 2^r, les traversées linéaires ont donc une loi gamma de densité $\theta'^2 \, r \, e^{-\theta' r}$, $\theta' = W_o(\lambda)$ (= 2a dans le cas isotrope). Il s'agit évidemment de la loi "en mesure". La loi en nombre des traversées linéaires admet la densité exponentielle $\theta' \, e^{-\theta' r}$.

<u>Relation entre les lois du volume V et de la surface S.</u>

Désignons par $V = V(\Pi)$ le volume du polyèdre Π (en nombre) et par $V(r) = V(\Pi \ominus rB)$ le volume de l'érodé $\Pi \ominus rB$. Les évènements $\{V(r) = 0\}$ et $\{\Pi \ominus rB \neq \emptyset\}$ sont p.s. égaux et ont la probabilité $Q(rB) = \exp(-d\, r)$, avec $\alpha = \phi(B)$.

Si φ est une fonction ≤ 0 mesurable sur $\mathbb{R}_+$ et telle que $\varphi(o) = 0$, il résulte de l'expression (6-2-6) de l'invariance conditionnelle que l'on a :

$$E[\varphi(V(r))] = e^{-\alpha r} E[\varphi(V)]$$

Aved $\varphi(x) = e^{-\mu x} - 1 (\mu \geq 0)$, on voit que les transformées de Laplace $\Phi(\mu)$ et $\Phi_r(\mu)$ de V et V(r) vérifient la relation :

$$\Phi_r(\mu) = 1 - e^{-\alpha r} + e^{-\alpha r} \Phi(\mu)$$

Or V(r) est p.s. dérivable à droite, et cette dérivée V'(r) vérifie p.s. V'(o) = - S puisque Π est p.s. convexe ($S = d\, W_1(\Pi)$ désigne la surface de Π). La relation précédente entraîne donc :

$$(6\text{-}3\text{-}4) \qquad E(S\, e^{-\mu V}) = \alpha \, \frac{1 - \Phi(\mu)}{\mu}$$

Désignons alors par $h(V) = E(S|V)$ <u>l'espérance conditionnelle</u> de S relativement à V, et par F(dV) la loi du volume. Dans la relation (6-3-4), figure à gauche la transformée de la mesure h(V) F(dV), à droite celle de la fonction $\alpha[1 - F(V)]$. Par suite, la loi du volume admet une <u>densité</u> f(V) qui vérifie la relation :

$$f(V)\, h(V) = \alpha[1 - F(V)]$$

On en tire aussitôt l'expression de la loi du volume V en fonction de l'espérance conditionnelle h(V) de la surface.

(6-3-5)
$$1 - F(V) = \exp\left\{- \alpha \int_0^V \frac{dv}{h(v)}\right\}$$

$$(h(V) = E(S|V) \quad , \alpha = \phi(B))$$

Ainsi, $\alpha/h(V) = \alpha/E(SBV)$ est la "densité de mort" associée à la loi du volume, autrement dit $\alpha\, dx/h(x)$ est la probabilité conditionnelle d'avoir $V \in (x, x+dx)$ lorsque $V \geq x$.

Relation entre $\phi(\Pi_o)$ et la loi du nombre des faces.

On ne sait pas former l'expression explicite de la loi du nombre des (d-1)-faces du polyèdre Π_o (en mesure), mais nous allons voir que cette loi est liée étroitement à celle de la VA $\phi(\Pi_o)$, égale à la valeur de la fonctionnelle ϕ pour le polyèdre poissonien $\overline{\Pi}_o$ lui-même. En particulier, dans le cas isotrope, $\phi(\Pi_o)$ est égale à un facteur près à la norme de $\overline{\Pi}_o$, et, si de plus d = 2, on a $\phi(\Pi_o) = a\, 2\, \mathcal{L}(\Pi_o)$, $2\,\mathcal{L}(\Pi_o)$ désignant le périmètre de Π_o.

Soit N le nombre des d-1 faces de $\overline{\Pi}_o$, et $P_n = P(N = n)$ (pour la loi en mesure). P_n, nombre sans dimension, n'est pas modifié si l'on remplace ϕ par $(1+\lambda)\phi$ $(\lambda > 0)$. Or, le réseau d'hyperplans poissoniens associé à la fonctionnelle $(1+\lambda)\phi$ est équivalent à la réunion de deux réseaux indépendants de fonctionnelles ϕ et $\lambda\phi$ respectivement. La probabilité pour que le polyèdre du résea $(1+\lambda)\phi$ contenant l'origine O ait n faces appartenant toutes au réseau dont la fonctionnelle est ϕ est alors $P_n\; 1/(1+\lambda)^n$. On peut aussi évaluer différemment cette probabilité, en écrivant d'abord que le polyèdre du réseau ϕ contenant O admet n faces (probabilité P_n) puis que ce polyèdre est disjoint du second réseau (probabilité $E(e^{-\lambda\phi(\Pi_o)} |n)$. On en déduit :

(6-3-6)
$$E_o(e^{-\lambda\phi(\Pi_o)} |N) = \frac{1}{(1+\lambda)^N}$$

(L'indice o dans E_o rappelle qu'il s'agit de l'espérance selon la loi en mesure). La loi conditionnelle en N de la fonctionnelle ϕ est donc la loi gamma de densité $(x^{n-1}/(n-1)!)\exp(-x)$. La relation

(6-3-6')
$$E_o(e^{-\lambda\phi(\Pi_o)}) = \sum_{n=d}^{\infty} \frac{P_n}{(1+\lambda)^n}$$

montre alors que la loi du nombre des faces et celle de la VA $\phi(\Pi_0)$ se déduisent l'une de l'autre.

Si X est une caractéristique sans dimension (i.e. $X(\lambda\,\Pi_0) = X(\Pi_0)$, $\lambda \geq 0$), le même raisonnement que ci-dessus donne $E_0(\exp\{-\lambda\phi(\Pi_0)\}|N,X) = 1/(1+\lambda)^N$. Par conséquent, <u>à N fixé</u>, <u>la variable $\phi(\Pi_0)$ est conditionnellement indépendante de toutes les caractéristiques sans dimension</u> du polyèdre Π_0.

<u>Les premiers moments du volume V</u>, <u>de la surface S et du contour apparent V'</u>.

Nous supposons maintenant que le réseau A d'hyperplans poissoniens est isotrope, et nous désignons par a le rayon de la boule qui constitue le compact de Steiner associé à A. La probabilité d'avoir x et x+h dans Π_0 (point de vue de la loi en <u>volume</u>) est alors $e^{-2a\mathscr{B}}$ où $2\mathscr{B} = |x| + |x+h| + |h|$ est le <u>périmètre</u> du triangle défini par les trois points 0, x et x+h, soit

$$Q(x,\ x+h) = e^{-a|x|-a|x+h|-a|h|} \tag{6-3-7}$$

Mais, si l'on désigne par k(x) l'indicatrice (aléatoire) de Π_0, on a aussi :

$$Q(x,x+h) = E[k(x)\ k(x+h)]$$

Désignons par g(h) l'intégrale dans $\mathbb{R}^d$ de cette expression :

$$g(h) = \int_{\mathbb{R}^d} Q(x,x+h)dx$$

g(h) est l'espérance (pour la loi en volume) du volume de l'intersection de Π_0 et de son translaté par h. Or cette intégrale représente, au facteur $e^{-a|h|}$ près, le produit de convolution de la fonction $e^{-a|x|}$ par elle-même. Cette fonction exponentielle admet dans $\mathbb{R}^d$ la transformée de Fourier

$$\mathscr{F}_d\ e^{-ar} = \frac{1}{a^d}\ 2^d\ \pi^{\frac{d-1}{2}}\ \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)\ \frac{1}{\left(1+\frac{4\pi^2\rho^2}{a^2}\right)^{\frac{d+1}{2}}}$$

($\rho = \sqrt{u_1^2 + \ldots + u_d^2}$ désigne le rayon vecteur de l'espace $\mathbb{R}^d$ conjugué). Le produit de convolution $e^{-ar} * e^{-ar}$ admet donc la transformée :

$$(\mathscr{F}_d\ e^{-ar})^2 = \frac{1}{a^{2d}}\ 2^{2d}\ \pi^{d-1}\ \left(\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)\right)^2\ \frac{1}{\left(1+\frac{4\pi^2\rho^2}{a^2}\right)^{d+1}}$$

Il suffit d'effectuer la transformation inverse pour obtenir :

$$e^{-ar} * e^{-ar} = \frac{1}{a^d} 2^{\frac{d}{2}} \pi^{\frac{d}{2}-1} \frac{\left(\Gamma(\frac{d+1}{2})\right)^2}{\Gamma(1+d)} (ar)^{1+\frac{d}{2}} K_{1+\frac{d}{2}} (ar)$$

Dans cette expression, $K_{1+\frac{d}{2}}$ représente la fonction de Bessel modifiée de seconde espèce d'indice $1+\frac{d}{2}$, et $r = |h|$ représente le rayon vecteur de $\mathbb{R}^d$. On en déduit :

(6-3-8)
$$g(r) = \frac{1}{a^d} \frac{2^{\frac{d}{2}} \pi^{\frac{d}{2}-1}}{d!} \left(\Gamma(\frac{d+1}{2})\right)^2 e^{-ar} (ar)^{1+\frac{d}{2}} K_{1+\frac{d}{2}} (ar)$$

Pour $r = 0$, on obtient l'espérance (en volume) de $V(\Pi_o)$. En intégrant en h (dans $\mathbb{R}^n$), on obtient de même l'espérance du carré de ce volume. L'intégrale de $g(h)$ dans $\mathbb{R}^d$ est d'ailleurs égale à la valeur en 0 du produit de convolution $e^{-a|x|} * e^{-a|x|} * e^{-a|x|}$, et se calcule de manière analogue à l'aide d'une transformation de Fourier. On trouve ainsi :

(6-3-9)
$$\begin{cases} E_o(V) = 2^{-d}\, b_d\, d!\, a^{-d} \\ E_o(V^2) = 2^{2d}\, \pi^{d-\frac{3}{2}} \dfrac{\Gamma(d+\frac{3}{2}) \left(\Gamma(\frac{d+1}{2})\right)^3}{\Gamma\left(\frac{3}{2}(d+1)\right)} a^{-2d} \end{cases}$$

L'indice o dans E_o rappelle qu'il s'agit d'espérances relatives à la loi <u>en volume</u>. D'après le théorème ergodique, ces espérances E_o se déduisent des espérances E relatives à la loi <u>en nombre</u> selon la règle

$$E_o(V^k) = E(V^{k+1})/E(V)$$

On a déjà calculé $E(V) = E(V_o) = 1/(b_d\, a^d)$. Les formules (6-3-9) donnent donc les <u>trois premiers</u> moments de la loi (en nombre) du volume V. On trouve ainsi dans $\mathbb{R}^d$

$$\begin{cases} E(V) = 1/(b_d\, a^d) \\ E(V^2) = d!/(2a^2)^d \\ E(V^3) = 2^{2d}\, \pi^{\frac{d-3}{2}} \dfrac{\Gamma(1+\frac{d}{2})\, \Gamma(d+\frac{3}{2})\, [(\frac{d+1}{2})]^3}{\Gamma[\frac{3}{2}(d+1)]}\, a^{\frac{1}{3d}} \end{cases}$$

Les expressions des moments d'ordre 1 et 2 étaient déjà connues (R.E. MILES, [10], [12], mais non, semble-t-il, celle du moment d'ordre 3 pour $n \geq 4$. Dans l'espace à deux dimensions, ces formules donnent :

$$E(V) = \frac{1}{\pi a^2} \ , \quad E(V^2) = \frac{1}{2 a^4} \ , \quad E(V^3) = \frac{4}{7} \frac{\pi}{a^6}$$

et dans $\mathbb{R}^3$

$$E(V) = \frac{3}{4\pi} \frac{1}{a^3} \ , \quad E(V^2) = \frac{3}{4} \frac{1}{a^6} \ , \quad E(V^3) = \frac{21}{8} \frac{\pi}{a^9}$$

Désignons maintenant par $V'(\Pi) = V'$ le volume (à n-1 dimensions) du <u>contour apparent</u> du polyèdre Π, c'ést-à-dire de la projection de Π sur un hyperplan de $\mathbb{R}^d$. Le point de vue est ici, obligatoirement, celui de la <u>loi en nombre</u>. Nous allons calculer les <u>deux premiers moments</u> de la loi (en nombre) de V', en nous appuyant sur l'invariance conditionnelle de Π .

Du point de vue de la loi en nombre, le $g(r)$ calculé en (6-3-8) représente la quantité :

$$g(r) = E(V\ V(r))/E(V)$$

où $V(r) = V(\Pi \cap \Pi_r)$ désigne le volume de l'intersection du polyèdre Π par son translaté Π_r dans une translation de module r et de direction u_o. Comme Π est convexe, $\Pi \cap \Pi_r$ est aussi l'érodé de Π par le vecteur $r\ u_o$. Soit ρ un réel ≥ 0, et $\Pi_{r+\rho}$ le translaté de Π dans la translation de module $r + \rho$ et de <u>même direction</u> u_o. L'expression (6-2-6) de l'invariance conditionnelle de Π pour les érosions montre que l'on a ici, avec $Q(K) = \exp(-2\ ar)$

$$E[V(r)\ V(r+\rho)] = e^{-2ar}\ E[V\ V(\rho)] = e^{-2ar}\ E(V)\ g(\rho) \qquad (6\text{-}3\text{-}10)$$

Comme Π est p.s. ouvert et convexe, $V(r)$ est dérivable à droite, et la valeur en $r = 0$ de cette dérivée $V'(r)$ est $V'(o) = -V'$, V' désignant le d-1;volume du contour apparent dans la direction u_o. Dérivons (6-3-10) une fois en r et une fois en ρ avant de faire $\rho = 0$. Il vient :

$$E(V'^2) + E[V\ V''(o)] = -\ 2a\ E[V\ V'(o)] \qquad (6\text{-}3\text{-}11)$$

Or, de l'expression (6-3-8) de $g(r)$, on déduit(pour $d > 1$) :

$$E[V\ V(r)] = E(V^2)\ [1 - a\ r + \frac{d-1}{2d}\ a^2\ r^2 - \dots]$$

On a déjà calculé $E(V^2) = d!/(2^d\ a^{2d})$. On déduit ainsi de cette relation :

$$E[V\,V'(o) = -\,a\,E(V^2) = -\,d!/(2^d\,a^{2d-1})$$

$$E[V\,V''(o)] = \frac{d-1}{d}\,a^2\,E(V^2) = \frac{(d-1)(d-1)!}{2^d}\,\frac{1}{a^{2d-2}}$$

puis, en portant ces résultats dans (6-3-11) :

(6-3-12) $$E(V'^2) = \frac{d+1}{d}\,a^2\,E(V^2) = \frac{(d+1)(d-1)!}{2^d}\,\frac{1}{a^{2d-2}}$$

Le calcul de $E(V')$ s'effectue de même à partir de $E[V(r)] = e^{-2ar}\,E(V)$, relation qui découle encore de l'expression (6-2-6) de l'invariance conditionnelle, et donne :

$$E(V') = 2a\,E(V) = \frac{2}{b_d}\,\frac{1}{a^{d-1}}$$

Tels sont les <u>deux premiers moments</u> (<u>en nombre</u>) <u>de la loi du contour apparent</u>. Dans le plan $\mathbb{R}^2$, on trouve explicitement :

$$E(V') = \frac{2}{a\pi}\quad,\quad E(V'^2) = \frac{3}{4}\,\frac{1}{a^2}\quad,\quad E(V\,V') = \frac{1}{2\,a^3}$$

et dans $\mathbb{R}^3$

$$E(V') = \frac{3}{2\pi}\,\frac{1}{a^2}\quad,\quad E(V'^2) = \frac{1}{a^4}\quad,\quad E(V\,V') = \frac{3}{4}\,\frac{1}{a^5}$$

Désignons maintenant par S_d <u>la surface du polyèdre poissonien</u> de $\mathbb{R}^d$, c'est-à-dire le (d-1) volume de sa frontière. D'après la géométrie intégrale, S_d se relie à l'intégrale du contour apparent $V'(u)$ dans la direction u selon la formule suivante, où l'intégration est étendue à la sphère unité :

(6-3-13) $$S_d = \frac{d\,b_d}{b_{d-1}}\int V'(u)\,\varpi(du)$$

On en déduit aussitôt l'espérance de S_d pour la loi en nombre :

$$E(S_d) = \frac{d\,b_d}{b_{d-1}}\quad,\quad E(V') = \frac{2d}{b_{d-1}}\,\frac{1}{a^{d-1}}$$

et pour la loi en mesure :

$$E_o(S_d) = \frac{d\,b_d}{b_{d-1}}\,E_o(V') = \frac{d\,b_d}{b_{d-1}}\,\frac{E(VV')}{E(V)} = \frac{d\,d!}{2^d}\,\frac{(b_d)^2}{b_{d-1}}\,\frac{1}{a^{d-1}}$$

Mais il existe une relation entre $E_o(S_d)$ et $E(S_d^2)$, que nous nous contenterons d'établir d'une manière heuristique. Plaçons-nous conditionnellement dans l'hypothèse où un hyperplan du réseau poissonien passe par l'origine O. Les deux polyèdres Π_1 et Π_2 dont la frontière contient le point O sont soumis à une loi de probabilité qui se déduit de la loi en nombre en pondérant les fréquences par la variable S_d. Si S_1 et S_2 désignent les surfaces de Π_1 et Π_2 respectivement, on a donc $E(S_1) = E(S_2) = E(S_d^2)/E(S_d)$. Mais si l'on supprime l'hyperplan passant par le point O, on obtient le polyèdre $\Pi_o = \Pi_1 \cup \Pi_2$ dont la loi est cette fois la loi en mesure. Or, la surface S_o de Π_o est $S_o = S_1 + S_2 - 2F$, F désignant la mesure de la face commune à Π_1 et Π_2. Mais F est un polyèdre quelconque du schéma induit dans $\mathbb{R}^{d-1}$ (envisagé du point de vue de la loi en mesure), d'où $E(F) = E_o(V_{d-1})$. Ainsi, il vient :

$$E_o(S_d) = E(S_o) = E(S_1) + E(S_2) - 2\,E(F) = 2\,\frac{E(S_d^2)}{E(S_d)} - 2\,E_o(V_{d-1})$$

Compte tenu des résultats précédents, on obtient finalement :

$$(6\text{-}3\text{-}14)\qquad \begin{cases} E(S_d) = \dfrac{2d}{b_{d-1}}\,\dfrac{1}{a^{d-1}} \\[2ex] E(S_d^2) = \dfrac{d\,!}{2^{d-2}}\left(1 + \dfrac{d^2}{4}\left(\dfrac{b_d}{b_{d-1}}\right)^2\right)\dfrac{1}{a^{2d-2}} \end{cases}$$

En particulier, pour $d = 3$, la surface S du polyèdre admet les deux moments en nombre :

$$E(S) = \frac{6}{\pi\, a^2}\ ,\quad E(S^2) = \frac{15}{a^4}$$

et pour $d = 2$, le périmètre S du polygone poissonien vérifie :

$$E(S) = \frac{2}{a}\ ,\quad E(S^2) = \left(\frac{\pi^2}{2} + 2\right)\frac{1}{a^2}$$

Cas des Polygones Poissoniens Isotropes.

Pour terminer ce chapitre, nous allons considérer le cas $d = 2$, c'est-à-dire le cas des polygones poissoniens isotropes de $\mathbb{R}^2$, et tout d'abord calculer explicitement la loi de probabilité du contour apparent du polygone poissonien (en nombre) c'est-à-dire, puisque nous sommes dans $\mathbb{R}^2$, la loi du diamètre apparent de ce polygone. Cette loi admet la densité :

$$(6\text{-}3\text{-}15) \qquad f(x) = \frac{4\,a}{\pi}\,(2\,a\,x)\;K_{-1}\,(2\,a\,x)$$

où K_{-1} désigne la fonction de Bessel modifiée de seconde espèce d'indice -1, et les moments d'ordre $n \geq 0$ (entier ou non) :

$$m_n = \frac{\Gamma(n+2)}{\pi}\;\frac{\Gamma(\frac{1+n}{2})}{\Gamma(1+\frac{n}{2})}\;\frac{1}{(2a)^n}$$

Pour établir (6-3-15), donnons-nous un mode de construction explicite du polygone poissonien Π (en nombre). Pour cela, considérons la partition du plan en polygones poissoniens réalisée par un réseau de droites poissoniennes, et plaçons-nous conditionnellement dans l'hypothèse où l'origine O est un sommet du réseau (ce qui nécessiterait, pour être rigoureux, un passage à la limite à partir de disques de rayon tendant vers 0 et centrés au point O, mais nous nous contenterons ici d'une démarche heuristique). Le plan étant rapporté à deux axes de coordonnées ox et oy, un (et p.s. un seulement) des 4 polygones admettant le point O comme sommet est contenu dans le demi-plan $x \geq 0$. On peut alors déduire du théorème ergodique que ce polygone Π est équivalent au polygone poissonien pris en nombre. Sans insister sur ce point, indiquons seulement d'une manière heuristique que cela résulte du fait que le réseau poissonien contient "en moyenne", autant de sommets que de polygones. Désignons par β_0 et β_1 $(-\frac{\pi}{2} \leq \beta_0 \leq \beta_1 \leq \frac{\pi}{2})$ les angles polaires des deux arêtes du polygone Π issues du point O. Il est facile de voir que la loi de ces deux variables admet la densité :

$$g(\beta_0,\beta_1) = \frac{1}{\pi}\sin\,(\beta_1-\beta_0) \qquad\qquad (-\tfrac{\pi}{2} \leq \beta_0 \leq \beta_1 \leq \tfrac{\pi}{2})$$

Désignons maintenant par M le sommet (p.s. unique) de Π de coordonnées (x_0,y_0) telles que soit contenu dans le demi-plan $x \leq x_0$. Il est clair que x_0 est le diamètre apparent de Π (dans la direction de l'axe des y). Nous allons former la loi de x_0. Pour cela, considérons l'évènement $\{x_0 \geq r\}$, équivalent à : {la droite $x = r$ rencontre Π}. Plaçons-nous d'abord à β_0 et β_1 fixés. Notre évènement se réalise de l'une ou l'autre des deux manières incompatibles suivantes :

~ ou bien le point $M_1 = (r,\ r\ \mathrm{tg}\ \beta_1)$ appartient à Π, et cela a lieu avec la probabilité $\exp\left\{-\ 2a\,\frac{r}{\cos\,\beta_1}\right\}$

~ ou bien il existe sur la droite $x = r$ un point M d'ordonnée $y(r\ \mathrm{tg}\ \beta_0 \leq y < r\ \mathrm{tg}\ \beta_1)$ appartenant à Π tel que le point $(r,\ y+dy)$ n'appartienne pas à Π, et cela a lieu avec la probabilité :

$$a\,r\int_{\beta_0}^{\beta_1} e^{-\frac{2\,ar}{\cos\,\alpha}}\,(1+\sin\,\alpha)\,\frac{d\alpha}{\cos^2\,\alpha}$$

Par conséquent, nous trouvons :

$$P(x_o \geq r) = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2\,ar}{\cos\beta_1}} \, d\beta_1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\beta_1} \sin(\beta_1-\beta_o)\, d\beta_o \, +$$

$$+ \frac{\pi}{1} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\,\beta_1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\beta_1} \sin(\beta_1-\beta_o)\, d\beta_o \int_{\beta_o}^{\beta_1} e^{-\frac{2\,ar}{\cos\alpha}} (1+\sin\alpha) \frac{d\alpha}{\cos^2\alpha}$$

Après quelques calculs élémentaires, on obtient :

$$P(x_o \geq r) = \frac{4\,ar}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2\,ar}{\cos\alpha}} \frac{d\alpha}{\cos\alpha} + \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2\,ar}{\cos\alpha}}\, d\,\alpha$$

Il suffit de dériver en r pour en déduire la densité de probabilité $f(x)$ du diamètre apparent x_o, soit :

$$f(x) = \frac{8\,a^2\,x}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2\,ax}{\cos\alpha}} \frac{d\alpha}{\cos^2\alpha}$$

Cette intégrale s'exprime à l'aide de la fonction de Bessel $K_{-1}(2\,ax)$, et l'on obtient la relation (6-3-15) écrite ci-dessus ainsi que l'expression des moments m_n.

Intéressons-nous maintenant à <u>la loi du nombre N des côtés</u> du polygone poissonien Π_o en mesure. Désignons par S <u>le périmètre</u> du polygone Π_o. De (6-3-6') écrit avec $\phi(\Pi_o) = aS$ résulte : $a\,E_o(S) = \sum n\, P_n$. Mais on a déja calculé $E_o(S) = \pi^2/(2a)$. Il vient donc :

$$E_o(N) = \pi^2/2$$

Considérons maintenant le point de vue de la loi en nombre, et posons $p_n = P(N(\Pi)) = n$. Introduisons la variable sans dimension $V/S^2 = Z$. Conditionnellement, à N fixé, $Z(\Pi_o)$ et $S(\Pi_o)$ sont indépendants pour la loi en mesure, comme on l'a vu lors de l'étude de la variable $\phi(\Pi_o) = a\,S(\Pi_o)$. Si l'on désigne par $f_n(z)$ la densité de la VA $Z(\Pi_o)$ conditionnelle en $N = n$, et par $g_n(z,S)$ celle de la VA vectorielle $(Z(\Pi), S(\Pi))$ toujours conditionnelle en $N = n$, on peut donc écrire d'après le théorème ergodique :

$$a \sum P_n\, f_n(z) \frac{(as)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-aS} = \frac{1}{E(ZS^2)} \sum p_n\, z\, S^2\, g_n(z,S)$$

La relation $a \sum P_n\, f_n(z)\, (as)^{n-1}/(n-1)! = (1/E(V)) \sum p_n\, z\, S^2\, g_n(z,S)\, e^{as}$ entraine alors pour chaque $n = 3,4\ldots$: $a\, P_n\, f_n(z)\, (as)^{n-1}/(n-1)! = p_n\, z\, S^2\, g_n(z,S)\, e^{as}/E(V)$, donc :

$$g_n(z,S) = \frac{(1/z)\ f_n(z)}{\int (1/z)\ f_n(z)dz} \quad \frac{a(aS)^{n-3}}{(n-3)!} \ e^{-aS}$$

$$p_n = \frac{a^2}{(n-1)(n-2)} \ P_n \ E(V) \int_0^\infty (1/z)\ f_n(z)dz$$

En particulier, à n fixé, $S(\Pi)$ admet la loi gamma de densité $[a(aS)^{n-3}/(n-3)!] \exp(-aS)$, d'où les relations

$$E(S(\Pi)) = \frac{1}{a} \ \Sigma\ (n-2)\ p_n$$

$$E(S^2(\Pi)) = \frac{1}{a^2} \ \Sigma\ (n-1)(n-2)\ p_n$$

Compte tenu de $E(S) = 2/a$ et $E(S^2) = (\pi^2/2 + 2)/a^2$, on en déduit les deux premiers moments en nombre de la loi du nombre N des côtés du polygone Π, soit :

$$E(N) = 4 \quad , \quad E(N^2) = \frac{\pi^2}{2} + 12$$

- CHAPITRE 7 -

LES GRANULOMETRIES

Dans ce chapitre, nous donnons un concept de granulométrie qui généralise les propriétés des granulométries usuelles telles qu'on peut les définir à partir de tamisages et autres opérations analogues. De plus, ce concept général contient comme cas particulier la granulométrie $A \to A_{\lambda K}$ de A selon les homothétiques d'un compact convexe K, telle qu'elle a été définie dans les chapitres 1 et 2. La définition et les propriétés algébriques des granulométries ne soulèvent pas de difficultés particulières. Mais l'application de cette notion à un EFA et à son complémentaire suppose que l'on ait établi la mesurabilité de l'application granulométrique utilisée. La manière la plus simple de garantir cette mesurabilité est de n'utiliser que des applications s.c.s. sur $\mathcal{K}$ et s.c.i. sur $\mathcal{G}$. D'autre part, dans les applications expérimentales, on ne peut aborder l'étude d'un ensemble fermé que par l'intermédiaire de ses propriétés locales, ce qui justifie la définition des ouvertures compactes (Définition 7-1-1) et des granulométries s.c.s. et compactes (Définition 7-2-3). La caractérisation de ces ouvertures et de ces granulométries étant assez délicate dans le cas général, et la plupart des applications pratiques ne mettant en jeu que des ouvertures compatibles avec les translations et des granulométries euclidiennes, il nous a paru préférable de traiter d'abord ces deux cas particuliers simples qui suffisent dans la plupart des cas. Tel est l'objet des deux premiers paragraphes. Le paragraphe 3 transpose ses résultats en termes d'ensembles fermés aléatoires. Les deux paragraphes suivants (indépendants du reste de l'ouvrage) sont consacrés à l'étude des propriétés topologiques des ouvertures et des granulométries sur un espace LCD quelconque.

7-1 OUVERTURES ET FERMETURES ALGEBRIQUES.

Dans tout ce chapitre, E désignera un espace LCD, et $\mathcal{P} = \mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}$ une famille de parties de E et ϕ une application de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{P}$. On dira que ϕ est <u>croissante</u> si A, B $\in \mathcal{A}$ et $A \subset B$ entrainent $\phi(A) \subset \phi(B)$. Sauf mention explicite du contraire, dans ce chapitre, le mot application signifiera toujours application croissante. De même, on dira aue ϕ est <u>extensive</u> (respectivement <u>anti-extensive</u>) si l'on a $A \subset \phi(A)$ (respestivement $\phi(A) \subset A$) pour tout $A \in \mathcal{A}$. On dira que ϕ est <u>idempotente</u> si l'ensemble image $\phi(\mathcal{A})$ est contenu dans $\mathcal{A}$ et si l'on a $\phi = \phi \circ \phi$. Dans ces conditions, on appelle <u>fermeture</u> (respectivement <u>ouverture</u>) au sens algébrique une application ϕ croissante, extensive (resp. anti-extensive) et idempotente. La notion de granulométrie sera rattachée à celle d'ouverture algébrique.

Désignons par $\mathcal{A}^* = \{A : A^c \in \mathcal{A}\}$ la famille des complémentaires des ensembles de $\mathcal{A}$. L'application $\phi^* : \mathcal{A}^* \to \mathcal{P}$ définie en posant $\phi^*(A) = \complement\phi(A^c)$ pour $A \in \mathcal{A}^*$, soit en abrégé $\phi^* = \complement \circ \phi \circ \complement$ est appelée <u>duale</u> de l'application ϕ. Elle est croissante si et seulement si ϕ est croissante. On a évidemment $\phi^{**} = \phi$, et ϕ^* est une ouverture (resp. une fermeture) si et seulement si ϕ est une fermeture (resp. une ouverture).

Prolongements d'une application.

Pour $\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{P}$, une application ϕ' de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{P}$ prolonge une application ϕ de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{P}$ si l'on a $\phi'(A$à $= \phi(A)$ pour $A \in \mathcal{A}$. Etant entendu qu'il s'agit toujours d'applications <u>croissantes</u>, toute application $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{P}$ admet <u>un plus petit prolongement</u> $\underset{\sim}{\phi}$ et <u>un plus grand prolongement</u> $\tilde{\phi}$ définis sur $\mathcal{P}$ tout entier par les relations :

$$(7\text{-}1\text{-}1) \qquad \begin{cases} \underset{\sim}{\phi}(B) = \bigcup \{\phi(A) \; ; \; A \in \mathcal{A}, \; A \subset B\} \\ \\ \tilde{\phi}(B) = \bigcap \{\phi(A) \; ; \; A \in \mathcal{A}, \; A \supset B\} \end{cases} \qquad (B \in \mathcal{P})$$

On note $\underset{\sim}{\phi}(B) = \emptyset$ s'il n'existe aucun $A \in \mathcal{A}$ tel que $A \subset B$; de même $\phi(A) = E$ s'il n'existe aucun $A \in \mathcal{A}$ tel que $A \supset B$. Il est clair que $\underset{\sim}{\phi}$ et $\tilde{\phi}$ prolongent ϕ, et que tout autre prolongement de ϕ par une application croissante ϕ' vérifie $\underset{\sim}{\phi} \subset \phi' \subset \tilde{\phi}$. Les formules de définition entrainent les relations de dualité :

$$(\underset{\sim}{\phi})^* = \widetilde{(\phi^*)} \quad , \quad (\tilde{\phi})^* = \underset{\sim}{(\phi^*)}$$

Soit ϕ une <u>ouverture</u> définie sur une partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}$. Alors <u>le plus petit prolongement</u> $\underset{\sim}{\phi}$ de ϕ <u>est une ouverture sur</u> $\mathcal{P}$. En effet, on vérifie immédiatement que $\underset{\sim}{\phi}$ est croissante et anti-extensive. Il reste à montrer que $\underset{\sim}{\phi}$ est idempotente. Si $B \in \mathcal{P}$, on a $\underset{\sim}{\phi}\,\underset{\sim}{\phi}(B) = \underset{\sim}{\phi}(\cup \{\phi(A)\ ;\ A \in \mathcal{A},\ A \subset B\})$ Comme $\underset{\sim}{\phi}$ est croissante, on en déduit $\underset{\sim}{\phi}\,\underset{\sim}{\phi}(B) \supset \bigcup \{\underset{\sim}{\phi}\,\phi(A)\ ;\ A \in \mathcal{A},\ A \subset B\} = \bigcup \{\phi(A)\ ;\ A \in \mathcal{A},\ A \subset B\}$ $= \underset{\sim}{\phi}(B)$, puisque $\underset{\sim}{\phi}$ prolonge l'application idempotente ϕ. Mais $\underset{\sim}{\phi}$ est anti-extensive, et par suite $\underset{\sim}{\phi}\,\underset{\sim}{\phi}(B) = \underset{\sim}{\phi}(B)$, et $\underset{\sim}{\phi}$ est idempotente.

Désignons par $\mathcal{B}$ la famille des ensembles de $\mathcal{A}$ <u>invariants</u> par l'ouverture ϕ (i.e. $\phi(B) = B \Leftrightarrow B \in \mathcal{B}$). La restriction de ϕ à $\mathcal{B}$ est donc l'application identique sur $\mathcal{B}$. Inversement, ϕ <u>est le plus petit prolongement sur $\mathcal{A}$ de l'identité sur $\mathcal{B}$</u>. En effet, si $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{B}$, $B \subset A$ entraine $B = \phi(B) \subset \phi(A)$, donc $\phi(A) \supset \bigcup \{B\ ;\ B \in \mathcal{B},\ B \subset A\}$. Mais $\phi(A) \in \mathcal{B}$, puisque ϕ est idempotente, et $\phi(A) \subset A$, puisque ϕ est anti-extensive, d'où l'inclusion inverse et l'égalité.

Il en résulte que $\underset{\sim}{\phi}$ est le plus petit prolongement sur $\mathcal{P}$ de l'identité sur $\mathcal{B}$, soit pour tout $D \in \mathcal{P}$:

$$\underset{\sim}{\phi}(D) = \bigcup \{\phi(A)\ ;\ A \in \mathcal{A},\ A \subset D\} = \bigcup \{B\ ;\ B \in \mathcal{B},\ B \subset D\}$$

Il est clair alors que la famille $\underset{\sim}{\mathcal{B}}$ des invariants de $\underset{\sim}{\phi}$ est la famille stable pour la réunion infinie engendrée par $\mathcal{B}$ (avec adjonction de l'ensemble vide $\emptyset$ si celui-ci ne faisait pas déjà partie de $\mathcal{A}$).

Inversement, si $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{P}$ est une famille quelconque d'ensembles de E, et $\mathcal{B}$ la réunion de $\{\emptyset\}$ et de la famille stable pour $\cup$ engendrée par $\mathcal{B}_0$, le plus petit prolongement de l'identité sur $\mathcal{B}_0$ est une ouverture ϕ sur $\mathcal{P}$, et la famille des invariants de ϕ est identique à $\mathcal{B}$.

Par dualité, on a des résultats analogues si ϕ est une fermeture (il suffit de remplacer $\cup$ par $\cap$ et le plus petit prolongement par le plus grand prolongement). Toute ouverture ou fermeture pouvant être prolongée sur $\mathcal{P}$, nous ne considérerons donc dans ce qui suit que des ouvertures et des fermetures définies sur $\mathcal{P}$ tout entier. En résumé :

<u>Proposition 7-1-1</u>.- Si ϕ est une ouverture (resp. une fermeture) sur $\mathcal{P}$ et $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}$ la famille de ses invariants, $\mathcal{B}$ est stable pour la réunion (l'intersection) infinie et contient $\emptyset$ (resp. E). ϕ est alors le plus petit (le plus grand) prolongement de l'identité sur $\mathcal{B}$. Inversement, si $\mathcal{B}_0$ est une famille quelconque de parties de E, le plus petit (le plus grand) prolongement de l'identité sur $\mathcal{B}_0$ est une ouverture (une fermeture) ϕ, et la famille $\mathcal{B}$ des invariants de ϕ est alors la classe stable pour $\cup$ (pour $\cap$) engendrée par $\mathcal{B}_0$, avec adjonction éventuelle de $\emptyset$ (de E).

Si ϕ est une ouverture ou une fermeture (sur $\mathcal{P}$) sa restriction à une partie $\mathcal{A}$ quelconque de $\mathcal{P}$ n'est une ouverture ou une fermeture sur $\mathcal{A}$ que si $A \in \mathcal{A}$ entraine $\phi(A) \in \mathcal{A}$, autrement dit si $\mathcal{A}$ est <u>stable</u> pour ϕ. Il y a donc bien lieu de chercher à quelle condition les espaces $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{K}$ sont stables pour ϕ.

<u>Proposition 7-1-2.</u>- Soit ϕ une ouverture sur $\mathcal{P}$, et $\mathcal{B}$ la famille de ses invariants. Alors :

a/ - $\mathcal{F}$ est stable pour ϕ si et seulement $\mathcal{B}$ est stable pour la fermeture topologique, i.e. $B \in \mathcal{B}$ entraine $\overline{B} \in \mathcal{B}$.

b/ - $\mathcal{K}$ est stable pour ϕ si et seulement si on a $\overline{B} \in \mathcal{B}$ pour tout invariant $B \in \mathcal{B}$ relativement compact dans E.

c/ - $\mathcal{G}$ est stable pour ϕ si et seulement si $\mathcal{B}$ contient un système fondamental de voisinages ouverts de chaque $B \in \mathcal{B}$.

En effet, si $\mathcal{F}$ est stable pour ϕ] $B \in \mathcal{B}$ entraine $B = \phi(B) \subset \overline{B}$, d'où $B \subset \phi(\overline{B})$ et par suite $\overline{B} \subset \phi(\overline{B})$, c'est-à-dire $\overline{B} = \phi(\overline{B}) \in \mathcal{B}$. Inversement, si $\mathcal{B}$ est stable pour la fermeture topologique, on a $\phi(F) \subset \overline{\phi(F)} \subset F$ pour tout $F \in \mathcal{F}$, donc $\overline{\phi(F)} = \phi(F)$, puisque $\overline{\phi(F)} \in \mathcal{B}$, et $\mathcal{F}$ est stable pour ϕ. L'énoncé a/ en résulte. On démontre b/ de la même manière.

Si $\mathcal{G}$ est stable pour ϕ, soit $G \in \mathcal{G}$. Comme $\phi(G)$ est ouvert, tout $x \in \phi(G)$ admet un voisinage ouvert $G_x \subset \phi(G)$, et pour tout $y \in G_x$, il existe $B_y \in \mathcal{B}$ tel que $y \in B_y \subset G$. Posons $B_x' = \cup \{B_y \; ; \; y \in G_x\}$. On a $B_x' \in \mathcal{B}$, puisque $\mathcal{B}$ est stable pour $\cup$ et $G_x \subset B_x' \subset G$. Soit alors $B \in \mathcal{B}$ et $B \subset G$. Il suffit de poser $G_o = \cup \{G_x \; ; \; x \in B\}$, $B_o = \cup \{B_x' \; ; \; x \in B\}$ pour avoir $G_o \in \mathcal{G}$, $B_o \in \mathcal{B}$ et $B \subset G_o \subset B_o \subset G$. Donc $\mathcal{B}$ contient un système fondamental de voisinages ouverts de B. La réciproque est immédiate.

<u>COROLLAIRE</u> - Soit ϕ' une fermeture sur $\mathcal{P}$ et $\mathcal{B}'$ la famille de ses invariants. Alors :

a'/- $\mathcal{G}$ est stable pour ϕ' si et seulement si $\mathcal{B}'$ est stable pour l'ouverture topologique.

b'/- $\mathcal{K}$ est stable pour ϕ' si et seulement si pour tout $B \in \mathcal{B}'$ et tout $K \in \mathcal{K}$ tel que $K \subset B$ on peut trouver $B' \in \mathcal{K} \cap \mathcal{B}'$ avec $K \subset B' \subset B$.

c'/- $\mathcal{F}$ est stable pour ϕ' si et seulement si pour tout $B \in \mathcal{B}'$ et tout $F \in \mathcal{F}$ tel que $B \subset F$ on peut trouver $B' \in \mathcal{F} \cap \mathcal{B}'$ tel que $F \subset B' \subset B$.

<u>Définition 7-1-1</u>.- Nous dirons qu'une ouverture ϕ sur $\mathcal{P}$ est une <u>ouverture compacte</u> si elle vérifie les conditions suivantes :

a/ - ϕ laisse stables les espaces $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, et $\mathcal{K}$.

b/ - ϕ est s.c.s. sur $\mathcal{F}$, s.c.s. sur $\mathcal{K}$ et s.c.i. sur $\mathcal{G}$.

c/ - ϕ est le plus petit prolongement de sa restriction à K.

D'après cette définition, on aura donc $\phi(A) = \cup \{\phi(K),\ K \subset A,\ K \in \mathcal{K}\}$ pour tout $A \in \mathcal{P}$. Nous remettons à un paragraphe ultérieur la caractérisation des ouvertures compactes, et nous allons nous contenter pour l'instant d'étudier le cas particulier des ouvertures sur l'espace euclidien $\mathbb{R}^d$ compatibles avec les translations.

<u>Ouvertures et fermetures compatibles avec les translations dans $\mathbb{R}^d$</u>.

D'une manière générale, si $\mathcal{A}$ est une partie de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ stable pour les translations, on dit qu'une application ϕ de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{P}$ est <u>compatible avec les translations</u>, ou est une <u>τ-application</u>, si l'on a $\phi(A \oplus \{h\}) = \phi(A) \oplus \{h\}$ pour tout $A \in \mathcal{A}$ et tout $h \in \mathbb{R}^d$. De même, nous dirons qu'une ouverture (une fermeture) compatible avec les translations est une <u>τ-ouverture</u> (une <u>τ-fermeture</u>).

Il est clair qu'une ouverture (resp. une fermeture) sur $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ est une τ-ouverture (resp. une τ-fermeture) si et seulement si la famille $\mathcal{B}$ de ses invariants est stable pour les translations.

Examinons par exemple le cas d'une τ-ouverture ϕ, et soit $\mathcal{B}$ la famille des invariants de ϕ, stable pour les translations. Désignons par $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$ un sous-ensemble de $\mathcal{B}$ tel que la classe stable pour les translations et les réunions infinies engendrée par $\mathcal{B}_0$ soit identique à $\mathcal{B}$. Nous dirons que $\mathcal{B}_0$ est <u>une base de $\mathcal{B}$</u>. Pour tout $A \in \mathcal{P}$, on peut alors écrire

$$\phi(A) = \cup \left\{B \oplus \{x\}\ ;\ x \in \mathbb{R}^d\ ,\ B \in \mathcal{B}_0,\ B \oplus \{x\} \subset A\right\}$$

Or, l'ouverture A_B de A selon B est, par définition, $(A \ominus \check{B}) \oplus B$, c'est-à-dire $A_B = \cup \left\{B \oplus \{x\}\ ;\ x \in \mathbb{R}^d,\ B \oplus \{x\} \subset A\right\}$. On en conclut $\phi(A) = \cup \{A_B\ ;\ B \in \mathcal{B}_0\}$. La fermeture ϕ^* associée à ϕ par dualité selon la formule $\phi^*(A) = \complement \phi(A^c)$ est par suite elle-même de la forme $\phi(A) = \cap \{A^B\ ;\ B \in \mathcal{B}_0\}$, $A^B = (A \oplus \check{B}) \ominus B$ désignant la fermeture de l'ensemble A selon l'ensemble B. Par suite :

<u>Proposition 7-1-3</u>.- Toute τ-ouverture ϕ sur $\mathbb{R}^d$ est de la forme $\phi(A) = \bigcup \{A_B \; ; \; B \in \mathcal{B}_o\}$ pour une famille $\mathcal{B}_o \subset \mathcal{P}$ qui constitue une base de la famille $\mathcal{B}$ des invarinats de ϕ. La fermeture ϕ^* associée à ϕ par dualité admet alors la représentation $\phi^*(A) = \bigcap \{A^B, \; B \in \mathcal{B}_o\}$.

Ainsi, l'ouverture et la fermeture selon un ensemble B, telles que nous les avons définies dans le premier chapitre, constituent les prototypes de toutes les τ-ouvertures et τ-fermetures. Examinons maintenant quelles conditions doit vérifier la famille $\mathcal{B}_o$ pour que ϕ soit une ouverture compacte, au sens de la définition 7-1-1. Nous savons d'ailleurs déjà que si $\mathcal{B}_o = \{K\}$ pour un compact unique, la τ-ouverture $\phi(A) = A_K$ vérifie les conditions voulues.

<u>Proposition 7-1-4</u>.- Soit ϕ une τ-ouverture sur $\mathbb{R}^d$. Alors $\mathcal{F}$ est stable pour ϕ et ϕ est s.c.s. sur $\mathcal{F}$ si et seulement si il existe une famille $\mathcal{B}_o$ fermée dans $\mathcal{F}$, contenue dans $\mathcal{F}_{\{o\}}$ (i.e. $B \in \mathcal{B}_o \Rightarrow 0 \in B$) et vérifiant les deux conditions suivantes :

a/ - $B \in \mathcal{B}_o$ et $x \in B$ entraine $B \oplus \{-x\} \in \mathcal{B}_o$.

b/ - $\phi(F) = \bigcup \{F_B, \; B \in \mathcal{B}_o\}$ pour tout $F \in \mathcal{F}$.

En effet, si $\mathcal{F}$ est stable pour ϕ, la famille $\mathcal{B}$ de ses invariants est stable pour la fermeture topologique (Proposition 7-1-2). Posons $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cap \mathcal{F}$, d'où $\phi(F) = \bigcup \{B' \; : \; B' \in \mathcal{B}', \; B' \subset F\}$ pour $F \in \mathcal{F}$. Si ϕ est s.c.s., $\mathcal{B}'$ est fermée dans $\mathcal{F}$. En effet, si une suite $\{B_n'\} \subset \mathcal{B}'$ converge vers B dans $\mathcal{F}$, on a $B = \lim B_n' = \lim \phi(B_n') \subset \phi(B)$, d'où $B = \phi(B) \in \mathcal{B}'$. La famille $\mathcal{B}_o = \mathcal{B}' \cap \mathcal{F}_{\{o\}}$ vérifie alors les conditions de l'énoncé.

Inversement, supposons qu'une famille $\mathcal{B}_o$ vérifie ces conditions. Montrons $\phi(F) \in \mathcal{F}$ pour $F \in \mathcal{F}$ Soit $\{x_n\} \subset \phi(F)$ une suite convergeant vers x dans $\mathbb{R}^d$. Pour chaque n, il existe un $B_n \in \mathcal{B}_o$ et un $y_n \in \mathbb{R}^d$ avec $x_n \in B_n \oplus \{y_n\} \subset F$. Mais $B_n' = B_n \oplus \{y_n - x_n\} \in \mathcal{B}_o$, d'après a/, d'où $0 \in B_n' \subset F \oplus \{-x_n\}$. Soit $B \in \mathcal{B}_o$ une valeur d'adhérence de $\{B_n'\}$. Il vient $0 \in B \subset F \oplus \{-x\}$, c'est-à-dire $x \in F_B \subset \phi(F)$, et $\phi(F)$ est fermé. Montrons maintenant que ϕ est s.c.s. Soit $\{F_n\}$ une suite convergeant vers F dans $\mathcal{F}$, et $\{F_{n_k}\}$ une suite partielle. Si une suite $n_k \to x_{n_k} \in F_{n_k}$ converge vers x dans $\mathbb{R}^d$, on a pour chaque n_k un $B_{n_k} \in \mathcal{B}_o$ avec comme ci-dessus $0 \in B_{n_k} \subset F_{n_k} \oplus \{-x_{n_k}\}$. Si donc $B \in \mathcal{B}_o'$ est une valeur d'adhérence de $\{B_{n_k}\}$, il vient $0 \in B \subset F \oplus \{-x\}$, d'où $x \in F_B \subset \phi(F)$, et ϕ est s.c.s.

Si ϕ est une τ-ouverture s.c.s. sur $\mathcal{F}$, sa restriction à $\mathcal{K}$ est s.c.s. sur $\mathcal{K}$. En effet, pour $K \in \mathcal{K}$, on a alors $\phi(K) \subset K$, donc $\phi(K) \in \mathcal{K}$, de sorte que ϕ applique $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{K}$. De plus, ϕ est s.c.s. sur $\mathcal{K}$ pour la topologie myope, car $K_n \downarrow K$ dans $\mathcal{K}$ entraine que les K_n, donc aussi les $\phi(K_n)$, sont contenus dans un compact fixe. La convergence dans $\mathcal{F}$ $\phi(K_n) \downarrow \phi(K)$ a donc lieu aussi pour la topologie de $\mathcal{K}$. Nous allons maintenant chercher à quelle condition une τ-ouverture ϕ s.c.s. sur $\mathcal{F}$ est le plus petit prolongement de sa restriction à $\mathcal{K}$.

Pour cela, remarquons que la famille $\mathcal{B}_0$, fermée dans $\mathcal{F}$ de la Proposition 7-1-4 admet des <u>éléments minimaux</u>. Plus précisément, pour tout $B \in \mathcal{B}_0$ il existe $M \in \mathcal{B}_0$ tel que $0 \in M \subset B$ et $F \notin \mathcal{B}_0$ pour tout fermé F contenant 0 et strictement contenu dans B. Cela résulte, en effet, d'une application immédiate du théorème de Zorn. La famille $\mathcal{M}_0$ des éléments minimaux constitue évidemment une base de $\mathcal{B}$, de sorte que l'on a $\phi(F) = \cup \{F_M ; M \in \mathcal{M}_0\}$, ou encore, en désignant par $\mathcal{M}$ la classe stable pour les translations engendrée par $\mathcal{M}$: $\phi(F) = \cup \{M,\ M \in \mathcal{M},\ M \subset F\}$. On en déduit aussitôt que l'on aura $\phi(F) = \cup \{\phi(K),\ K \in \mathcal{K},\ K \subset F\}$ si et seulement si les éléments minimaux $M \in \mathcal{M}$ sont <u>compacts</u>, soit $\mathcal{M} \subset \mathcal{K}$, ou $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{K}$.

Désignons par ϕ' le plus petit prolongement de la restriction de ϕ à $\mathcal{K}$. Si $\mathcal{M} \subset \mathcal{K}$, on a $\phi' = \phi$ sur $\mathcal{F}$, et ϕ' est s.c.s. sur $\mathcal{F}$. Montrons que ϕ' est également s.c.i. sur $\mathcal{G}$. En effet, pour tout compact M et tout ouvert G, G_M est ouvert, donc aussi $\phi'(G) = \cup \{G_M,\ M \in \mathcal{M}\}$. Ensuite, si $G_n \uparrow G$ dans $\mathcal{G}$, on trouve $\bigcup_n \phi(G_n) = \bigcup_n \bigcup_{M \in \mathcal{M}} (G_n \ominus \check{M}) \oplus M = \bigcup_{M \in \mathcal{M}} G_M = \phi(G)$, puisque $G \to G_M$ est s.c.i. sur $\mathcal{G}$ pour M compact. Donc ϕ est s.c.i. sur $\mathcal{G}$. En résumé :

<u>Proposition 7-1-5</u>.- Une τ-ouverture ϕ sur $\mathbb{R}^d$ est une ouverture compacte au sens de la définition 7-1-1 si et seulement si il existe une famille $\mathcal{B}_0$ fermée dans $\mathcal{F}$ contenue dans $\mathcal{F}_{\{0\}}$ et vérifiant les conditions suivantes :

a/ - $B \in \mathcal{B}_0$ et $x \in B$ entraine $B \oplus \{-x\} \in \mathcal{B}_0$

b/ - La famille $\mathcal{M}_0$ des éléments minimaux de $\mathcal{B}_0$ est contenue dans $\mathcal{K}$.

c/ - On a $\phi(A) = \cup \{A_M,\ M \in \mathcal{M}_0\}$ pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$.

<u>EXEMPLE</u> - Soit K un compact, et $\mathcal{B}_0$ l'ensemble des translatés de K contenant 0. La famille $\mathcal{B}_0$ vérifie les conditions de la Proposition avec $\mathcal{M}_0 = \mathcal{B}_0$. On retrouve ainsi les propriétés de l'ouverture $A \to A_K$ selon un compact K.

Plus généralement, soit $\mathcal{C}$ <u>une famille compacte dans $\mathcal{K}$</u>, et $\mathcal{B}_0$ l'ensemble des translatés des éléments de : contenant 0. Il est clair que $\mathcal{B}_0$ est compacte dans $\mathcal{K}$, donc en particulier fermée dans $\mathcal{F}$, contenue dans $\mathcal{F}_{\{0\}}$ et que ses éléments minimaux sont compacts. De plus, $\mathcal{B}_0$ vérifie évidemment a/ et b/. Par suite, en posant :

$$\phi(A) = \cup \{A_K,\ K \in \mathcal{C}\} \qquad (A \in \mathcal{P})$$

on définit une ouverture compacte sur $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$.

7-2 LES GRANULOMETRIES.

Les Axiomes des Granulométries.

Analysons d'abord la notion usuelle de granulométrie. On se donne des tamis dont les mailles sont définies par leurs dimensions, caractérisées par un nombre $\lambda > 0$. Lorsqu'on applique le tamis de dimension λ à un ensemble A, son refus est un sous-ensemble de A, aue l'on peut désigner par $\phi_\lambda(A)$. Ainsi $\phi_\lambda(A) \subset A$. Si $\lambda \geq \mu$, le refus de la plus grande maille λ est plus petit que celui de la maille plus petite μ, soit $\phi_\lambda(A) \subset \phi_\mu(A)$. Si un ensemble B contient un ensemble A, son refus pour une maille λ donnée est plus grand que celui de A, soit $B \supset A \Rightarrow \phi_\lambda(A)$. Si l'on applique au refus $\phi(A)$ de A pour une maille donnée λ un tamis de maille μ plus petite, le refus est $\phi_\lambda(A)$ lui-même, soit $\phi_\mu \circ \phi_\lambda = \phi_\lambda$ si $\lambda \geq \mu$. Au contraire, si $\mu \geq \lambda$, le refus de $\phi_\lambda(A)$ pour le tamis μ est identique au refus de A lui-même pour ce même tamis, soit $\phi_\mu \circ \phi_\lambda = \phi_\mu$ si $\mu \geq \lambda$. Erigeons donc en axiomes constitutifs ces propriétés des granulométries usuelles, et posons la définition suivante, où E est en principe un ensemble quelconque.

Définition 7-2-1.- Soit E un ensemble, et $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$ une famille de parties de E. On appelle granulométrie sur $\mathcal{A}$ une famille ϕ_λ, $\lambda > 0$ à un paramètre λ positif d'applications de $\mathcal{A}$ dans lui-même vérifiant les 4 axiomes suivants :

1. $\phi_\lambda(A) \subset A \quad , \lambda > 0, \ A \in \mathcal{A}$.
2. $A, B \in \mathcal{A}, \ A \subset B \Rightarrow \phi_\lambda(A) \subset \phi_\lambda(B) \qquad \forall \lambda > 0$
3. $\lambda \geq \mu > 0 \Rightarrow \phi_\lambda(A) \subset \lambda_\mu(A) \qquad (A \in \mathcal{A})$
4. $\phi_\lambda \circ \phi_\mu = \phi_\mu \circ \phi_\lambda = \phi_{\sup(\lambda,\mu)}$

On peut, conventionnellement, compléter la famille ϕ_λ, $\lambda > 0$ pour $\lambda = 0$ en posant $\phi_0(A) = A$ pour $A \in \mathcal{A}$.

Proposition 7-2-1.- Soit E un ensemble et $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$ une famille de parties de E. Une famille ϕ_λ, $\lambda > 0$ à un paramètre positif d'applications de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{P}(E)$ est une granulométrie sur $\mathcal{A}$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1. Pour tout $\lambda > 0$, ϕ_λ est une ouverture sur $\mathcal{A}$.
2. Si $\mathcal{B}_\lambda$ est la famille des éléments de $\mathcal{A}$ invariants par ϕ_λ, $\lambda > 0$, on a : $\mu \geq \lambda > 0 \Rightarrow \mathcal{B}_\mu \subset \mathcal{B}_\lambda$.

Auttement dit, une famille ϕ_λ, $\lambda > 0$ est une granulométrie sur $\mathcal{A}$ si et seulement si c'est une famille d'ouvertures sur $\mathcal{A}$ dont les familles $\mathcal{B}_\lambda$ d'éléments invariants sont décroissants en λ.

Les conditions de la proposition sont suffisantes : les axiomes 1 et 2 sont vérifiés par toute ouverture ϕ_λ sur $\mathcal{A}$ si $\mathcal{B}_\mu \subset \mathcal{B}_\lambda$, le plus petit prolongement de l'identité sur $\mathcal{B}_\mu$ est $\subset$ dans le plus petit prolongement de l'identité sur $\mathcal{B}_\lambda$, et l'axiome 3 est vérifié. Enfin, si $\mathcal{B}_\mu \subset \mathcal{B}_\lambda$, on en déduit : tout $B \in \mathcal{B}_\mu$ inclus dans A est inclus dans $\phi_\lambda(A)$ et réciproquement, d'où $\phi_\mu(A) = \phi_\mu\, \phi_\lambda(A)$. D'autre part, pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\phi_\mu(A)$ est invariant par ϕ_μ, donc appartient à $\mathcal{B}_\lambda$ pour $\lambda \leq \mu$, soit $\phi_\lambda\, \phi_\mu(A) = \phi_\mu(A)$, et l'axiome 4 est vérifié.

Montrons maintenant que les conditions de la proposition sont nécessaires. Soit ϕ_λ, $\lambda > 0$ une granulométrie sur $\mathcal{A}$. D'après les axiomes 1 et 2, ϕ_λ est croissante et anti-extensive pour chaque $\lambda > 0$, et l'axiome 4 montre pour $\mu = \lambda$ que ϕ_λ est idempotente. Il s'agit donc bien d'une famille d'ouvertures sur $\mathcal{A}$. Désignons par $\mathcal{B}_\lambda$ la famille des invariants de l'ouverture ϕ_λ. L'inclusion $\mathcal{B}_\lambda \supset \mathcal{B}_\mu$ pour $\mu \geq \lambda$, qui achève la démonstration, résulte alors du lemme ci-dessous et de l'axiome 4.

<u>LEMME 7-2-1</u> – Soit E un ensemble, $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{P}(E)$, ϕ et ϕ' deux ouvertures sur $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ les familles d'ensembles de $\mathcal{A}$ invariants respectivement par ϕ et ϕ'. On a les équivalences :

$$\phi \circ \phi' = \phi \Leftrightarrow \phi' \circ \phi = \phi \Leftrightarrow \mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$$

Montrons $\phi' \circ \phi = \phi \Leftrightarrow \mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$: en effet, pour $A \in \mathcal{A}$, $\phi'\, \phi(A) = \phi(A)$ équivaut à $\phi(A) \in \mathcal{B}'$. Montrons $\phi \circ \phi' = \phi \Leftrightarrow \mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$. En effet, si $A = \phi(A) \in \mathcal{B}$, la relation $\phi \circ \phi' = \phi$ entraine $\phi\, \phi'(A) = A$, et les inclusions $\phi\, \phi'(A) \subset \phi'(A) \subset A$ montrent que l'on a $A = \phi'(A)$, soit $A \in \mathcal{B}'$. Donc $\phi \circ \phi' = \phi$ entraine $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$. Inversement, supposons $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$. Tout $B \in \mathcal{B}$ est invariant pour ϕ', et la réunion des $B \subset A$, soit $\phi \subset \phi'$ et, ϕ et ϕ' étant idempotentes $\phi \subset \phi \circ \phi'$, et $\phi \circ \phi' \subset \phi$, d'où l'égalité.

COROLLAIRE - Toute granulométrie ϕ_λ, $\lambda > 0$ sur une famille $\mathcal{A}$ de parties d'un ensemble E se prolonge sur $\mathcal{P}(E)$.

Il suffit, en effet, de considérer la famille ϕ'_λ des plus petits prolongements sur $\mathcal{P}(E)$ des ϕ_λ, $\lambda > 0$. Ce sont des ouvertures (Proposition 7-1-1). La famille $\mathcal{B}'_\lambda$ des invariants de ϕ_λ est engendrée par réunion infinie des éléments de $\mathcal{B}_\lambda$, et les conditions de la proposition sont vérifiées.

Régularisées d'une granulométrie.

Soit alors ϕ_λ, $\lambda > 0$ une granulométrie sur $\mathcal{P}(E)$ (ou le prolongement sur $\mathcal{P}(E)$ d'une granulométrie primitivement donnée sur $\mathcal{A}$), et $\mathcal{B}$ la famille des invariants de ϕ_λ. On a $\mathcal{B}_\lambda \subset \mathcal{B}_\mu$ pour $\lambda \geq \mu$. Posons pour tout $\lambda > 0$:

(7-2-1) $$\hat{\mathcal{B}}_\lambda = \bigcup_{\mu>\lambda} \mathcal{B}_\mu \ , \ \check{\mathcal{B}}_\lambda = \bigcap_{\mu<\lambda} \mathcal{B}_\mu$$

On a donc $\hat{\mathcal{B}}_\lambda \subset \mathcal{B}_\lambda \subset \check{\mathcal{B}}_\lambda$ pour tout $\lambda > 0$, et aussi pour tout $\varepsilon > 0$: $\check{\mathcal{B}}_\lambda \subset \mathcal{B}_{\lambda+\varepsilon}$ et $\mathcal{B}_\lambda \subset \hat{\mathcal{B}}_{\lambda+\varepsilon}$. Les $\check{\mathcal{B}}_\lambda$ ($\hat{\mathcal{B}}_\lambda$) sont, en particulier, décroissantes en λ. Si l'on désigne donc par $\check{\phi}_\lambda$ et $\hat{\phi}_\lambda$ les plus petits prolongements sur $\mathcal{P}(E)$ de l'identité sur $\check{\mathcal{B}}_\lambda$ et $\hat{\mathcal{B}}_\lambda$ respectivement, $\check{\phi}_\lambda$ et $\hat{\phi}_\lambda$ sont encore des granulométries sur $\mathcal{P}(E)$ que nous appellerons, respectivement, <u>régularisées supérieure et inférieure de la granulométrie</u> ϕ_λ. D'après ce qui précède, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $\lambda > 0$ tel que $\lambda-\varepsilon > 0$, on a :

(7-2-2) $$\phi_{\lambda-\varepsilon} \subset \hat{\phi}_\lambda \subset \phi_\lambda \subset \check{\phi}_\lambda \subset \phi_{\lambda+\varepsilon}$$

Nous dirons qu'une granulométrie ϕ_λ est <u>régulière supérieurement</u> (<u>inférieurement</u>) si $\phi_\lambda = \check{\phi}_\lambda$ ($\phi_\lambda = \hat{\phi}_\lambda$). Il n'est pas difficile de vérifier que la régularisée supérieure (inférieure) d'une granulométrie donnée est effectivement régulière supérieurement (inférieurement).

Si ϕ_λ est une granulométrie sur $\mathcal{P}(E)$, on a pour tout $A \subset E$:

$$\hat{\phi}_\lambda(A) = \bigcup \{B \ ; \ B \in \hat{\mathcal{B}}_\lambda, \ B \subset A\} = \bigcup_{\mu>\lambda} \bigcup \{B \ ; \ B \in \mathcal{B}_\mu, \ B \subset A\}$$

c'est-à-dire :

(7-2-3) $$\hat{\phi}_\lambda(A) = \bigcup_{\mu>\lambda} \phi_\mu(A)$$

Par contre, l'égalité $\check{\psi}_\lambda(A) = \bigcap_{\mu<\lambda} \psi_\mu(A)$ n'est pas vraie en général.

Eléments critiques d'une granulométrie.

Soit E un ensemble et ψ_λ, $\lambda > 0$ une granulométrie sur $\mathcal{P}(E)$ (ou le plus petit prolongement sur $\mathcal{P}(E)$ d'une granulométrie primitivement sonnée sur une partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(E)$, ce prolongement étant lui-même une granulométrie conformément au corollaire de la Proposition 7-2-1. Nous dirons qu'un ensemble $M \in \mathcal{P}(E)$ est critique pour la granulométrie ψ_λ en $\lambda = \lambda_0$ si l'on a :

(7-2-4) $$M \in \check{\mathcal{B}}_{\lambda_0} \quad , \quad \hat{\psi}_{\lambda_0}(M) = \emptyset \quad , \quad M \neq \emptyset$$

ou, ce qui revient au même d'après les définitions précédentes :

(7-2-4') $$\psi_\lambda(M) = \emptyset \text{ si } \lambda > \lambda_0 \text{ et } \psi_\lambda(M) = M \text{ si } \lambda < \lambda_0 \quad , \quad M \neq \emptyset$$

Nous dirons qu'il est critique au sens strict si $M \in \mathcal{B}_{\lambda_0}$, $\hat{\psi}_{\lambda_0}(M) = \emptyset$, et $M \neq \emptyset$. Il est clair que tout ensemble strictement critique en λ_0 est critique en λ_0, la réciproque n'étant évidemment pas vraie (une géométrie régulière inférieurement ne peut pas avoir d'éléments strictement critiques, mais peut très bien admettre des éléments critiques). Cependant, si ψ_λ est une granulométrie régulière supérieurement, tout élément critique est strictement critique (puisqu'alors on a $\psi_\lambda = \check{\psi}_\lambda$).

Il n'est sans doute pas vrai que toute granulométrie (même régulière supérieurement) admette des éléments critiques, mais les "bonnes" granulométries devront en admettre, et, plus précisément, les familles $\mathcal{B}_\lambda$ devront être engendrées par ces éléments critiques.

Pour analyser le problème de l'existence des éléments critiques, partons d'un ensemble non vide $A \in \mathcal{P}(E)$, et posons :

$$\lambda_A = \operatorname{Inf} \{\lambda : \psi_\lambda(A) = \emptyset\}$$

(avec $\lambda_A = +\infty$ si $\psi_\lambda(A) \neq \emptyset$ pour tout $\lambda > 0$). Autrement dit, λ_A est caractérisé par la propriété :

$$\lambda > \lambda_A \Rightarrow \psi_\lambda(A) = \emptyset$$

$$\lambda < \lambda_A \Rightarrow \psi_\lambda(A) = \emptyset$$

ou encore :

$$\begin{cases} \hat{\phi}_{\lambda_A}(A) = \emptyset \\ \lambda < \lambda_A \Rightarrow \phi_\lambda(A) \neq \emptyset \end{cases}$$

S'il existe un élément strictement critique dans la famille $\phi_\lambda(A)$, $\lambda > 0$, ce ne peut être que $\phi_{\lambda_A}(A)$, et cet élément sera effectivement strictement critique pour $\lambda = \lambda_A$ si et seulement si il n'est pas vide. En effet, pour $\lambda > \lambda_A$, $\phi_\lambda(A)$ est vide, donc n'est pas critique. Pour $\lambda < \lambda_A$, on peut trouver μ avec $\lambda < \mu < \lambda_A$, et $\phi_\mu(A)$ n'est pas vide, donc $\phi_\lambda(A)$ n'est pas critique. Mais, si $\phi_{\lambda_A}(A)$ n'est pas vide, il vérifie bien les conditions de la définition, et c'est un élément strictement critique.

De la même manière, on vérifie que le seul élément (simplement) critique de la famille $\check{\phi}_\lambda(A)$, $\lambda > 0$ est l'élément $\check{\phi}_{\lambda_A}(A)$, et il est effectivement critique en $\lambda = \lambda_A$ si et seulement si il n'est pas vide. Autrement dit, <u>les éléments critiques d'une granulométrie sont les</u> $\check{\phi}_{\lambda_A}(A)$ non vides, A parcourant $\mathcal{P}(E)$.

<u>EXEMPLE</u> - Soit $E = \mathbb{R}^d$, et la granulométrie définie par les familles

$$\mathcal{B}_\lambda = \bigcup_{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)} \{A \oplus B_\lambda\}$$

où B_λ est la boule fermée de rayon λ et de centre O. On a $\mathcal{B}_\lambda = \check{\mathcal{B}}_\lambda$, autrement dit, cette granulométrie est régulière supérieurement, et $\phi_\lambda(A) = A \ominus \lambda B) \oplus \lambda B$. Si A est la boule ouverte de rayon λ_o, on a $\lambda_A = \lambda_o$, mais $\check{\phi}_{\lambda_o}(A) = \emptyset$, et A n'est pas critique. Par contre, si A est la boule fermée de rayon λ_o , $\check{\phi}_{\lambda_o}(A) = A$ et A est critique en $\lambda = \lambda_o$.

<u>Granulométries euclidiennes.</u>

Plaçons-nous maintenant dans le cas où l'espace E de départ est l'espace euclidien $\mathbb{R}^d$. Les granulométries usuelles sur $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ sont compatibles avec les translations, en ce sens que le refus du translaté A_x d'un ensemble $A \subset \mathbb{R}^d$ pour le tamis de maille λ est le translaté par x du refus de A, soit $\phi_\lambda(A_x) = \phi_\lambda(A) \oplus \{x\}$. De plus, les tamis que l'on utilise sont en général homothétiques, le module λ d'homothétie entre chaque tamis et un tamis de référence pouvant servir à indexer les tamis eux-mêmes. Avec cette définition du paramètre λ, on a alors $\phi_\lambda(\lambda A) = \lambda\phi_1(A)$. Ces deux propriétés, érigées en axiomes, conduisent à poser la définition suivante :

<u>Définition 7-2-2</u>.- Onndit qu'une granulométrie ϕ_λ, $\lambda > 0$ sur une partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ stable pour les translations et les homothéties positives est une <u>granulométrie euclidienne</u> si elle vérifie les deux axiomes suivants :

5 - Pour tout $\lambda > 0$, ϕ_λ est compatible avec les translations.

6 - Pour tout $\lambda > 0$, et tout $A \in \mathcal{A}$, on a : $\phi_\lambda(A) = \lambda\, \phi_1(\frac{A}{\lambda})$.

L'axiome 5 est équivalent à la condition : $\mathcal{B}_\lambda$ invariant par translation pour tout $\lambda > 0$. L'axiome 6 exprime que ϕ_λ est connue pour tout λ dès que l'on connait ϕ_1 (ou, plus généralement, ϕ_{λ_0} pour un $\lambda_0 > 0$). En fait, l'axiome 6 équivaut à $\mathcal{B}_\lambda = \lambda\, \mathcal{B}_1$ pour tout $\lambda > 0$. En effet, si 6 est vérifiée, $A \in \mathcal{B}_\lambda$, soit $\phi_\lambda(A) = A$ entraine $\frac{A}{\lambda} = \phi_1(\frac{A}{\lambda})$, soit $\frac{A}{\lambda} \in \mathcal{B}_1$, ou $A \in \lambda\, \mathcal{B}_1$, d'où $\mathcal{B}_\lambda \subset \lambda \mathcal{B}_1$.

Inversement, si $A \in \lambda\, \mathcal{B}_1$, soit $A = \lambda\, A_1$ pour un $A_1 \in \mathcal{B}_1$, on a $\phi_\lambda(A) = \lambda\, \phi_1(\frac{A}{\lambda}) = \lambda\, \phi_1(A_1) = \lambda\, A_1 = A$, donc $A \in \mathcal{B}_\lambda$, et $\lambda\, \mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_\lambda$. Ainsi l'axiome 6 entraine $\mathcal{B}_\lambda = \lambda\, \mathcal{B}_1$. Réciproquement, si $\mathcal{B}_\lambda = \lambda\, \mathcal{B}_1$, pour tout $A \in \mathcal{A}$ on peut trouver $B_1 \in \mathcal{B}_1$ tel que $\phi_\lambda(A) = \lambda\, B_1$. On a donc $B_1 = \frac{1}{\lambda}\, \phi_\lambda(A) \subset \frac{A}{\lambda}$ et $B_1 \in \mathcal{B}_1$, d'où $B_1 = \phi_1(\frac{1}{\lambda}\, \phi_\lambda(A)) \subset \phi_1(\frac{A}{\lambda})$, et $\phi_\lambda(A) = \lambda\, B_1 \subset \lambda\, \phi_1(\frac{A}{\lambda})$. Mais inversement, on peut trouver $B_\lambda \in \mathcal{B}_\lambda$ tel que $\lambda\, \phi_1(\frac{A}{\lambda}) = B_\lambda$. L'inclusion $\lambda\, \phi_1(\frac{A}{\lambda}) \subset A$ donne alors $B_\lambda = \phi_\lambda(\lambda\, \phi_1(\frac{A}{\lambda})) \subset \phi_\lambda(A)$, donc $\lambda\, \phi_1(\frac{A}{\lambda}) \subset \phi_\lambda(A)$. L'égalité $\phi_\lambda(A) = \lambda\, \phi_1(\frac{A}{\lambda})$ en résulte.

Cette famille $\mathcal{B}_1$ ne peut pas être tout-à-fait quelconque. En effet, ϕ_λ doit être une granulométrie, donc $\lambda \geq \mu$ doit entrainer $\mathcal{B}_\lambda \subset \mathcal{B}_\mu$. Comme $\mathcal{B}_\lambda = \lambda\, \mathcal{B}_1$, ceci équivaut à la condition suivante : $\lambda \geq 1$ et $B \in \mathcal{B}_1 \Rightarrow \lambda\, B \in \mathcal{B}_1$, autrement dit $\mathcal{B}_1$ doit être <u>stable pour les homothéties</u> de module ≥ 1. Inversement, il est clair que si $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1$ possède cette propriété, les $\mathcal{B}_\lambda = \lambda \mathcal{B}$ constituent les familles d'invariants d'une granulométrie euclidienne sur $\mathcal{A}$. Enonçons :

<u>Proposition 7-2-2</u>.- Pour qu'une famille ϕ_λ, $\lambda > 0$ d'ouvertures sur une partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ stable pour les translations et les homothéties positives constitue une granulométrie euclidienne sur $\mathcal{A}$, il faut et il suffit qu'il existe une famille $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ stable pour les transactions et invariante pour les homothéties du module ≥ 1 telle que, pour tout $\lambda > 0$, $\mathcal{B}_\lambda = \lambda \mathcal{B}$ soit la famille des invariants de ϕ_λ. On a alors pour tout $A \in \mathcal{A}$ et tout $\lambda > 0$:

$$\phi_\lambda(A) = \cup \{A_{\lambda B} ;\ B \in \mathcal{B}\}$$

Nous avons déjà établi la première partie de l'énoncé. Pour $A \in \mathcal{A}$ et $\lambda > 0$, on a alors, d'après la Proposition 7-1-3 :

$$\phi_\lambda(A) = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_\lambda} A_B = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} A_{\lambda B}$$

Générateur d'une granulométrie euclidienne.

Soit ϕ_λ une granulométrie euclidienne et $\mathcal{B}$ la famille des invariants de ϕ_1. On dit que $\mathcal{B}_o \subset \mathcal{B}$ engendre $\mathcal{B}$ si $\mathcal{B}$ est la famille stable pour les translations, les homothéties de module ≥ 1 et les réunions infinies engendrée par $\mathcal{B}_o$. La famille $\mathcal{B}_o' = \bigcup_{\lambda \geq 1} \lambda \mathcal{B}_o$ engendre $\mathcal{B}$ lorsqu'on la stabilise pour les translations et les réunions. D'après la Proposition 7-1-3, on a alors :

$$\phi_\lambda(A) = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_o'} A_{\lambda B} = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_o} \bigcup_{\lambda \geq 1} A_{\lambda B}$$

Par suite :

COROLLAIRE - Si $\mathcal{B}_o$ est un générateur de $\mathcal{B}$, on a :

$$\phi_\lambda(A) = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_o} \bigcup_{\lambda \geq 1} A_{\lambda B}$$

EXEMPLE - Soit $\mathcal{B}$ la famille engendrée par un ensemble B unique ($\mathcal{B}_o = \{B\}$). La formule :

$$\phi_\lambda(A) = \bigcup_{\lambda \geq 1} A_{\lambda B}$$

définit une granulométrie euclidienne que l'on appelle granulométrie selon B. Il n'est pas nécessaire que l'ensemble B soit convexe.

Si B est un compact convexe, $\lambda \geq \mu$ entraine $(\lambda B)_{\mu B} = \lambda B$, et par suite $A_{\lambda B} \subset A_{\mu B}$. La granulométrie selon B se réduit alors à $A_{\lambda B}$. Inversement, si B est compact, et si la granulométrie selon B se réduit à $\phi_\lambda(A) = A_{\lambda B}$, on a $\phi_1(\lambda B) = (\lambda B)_B = \lambda B$ dès que $\lambda \geq 1$, et la proposition suivante montre que ceci entraine la convexité de B.

Proposition 7-2-3.- Soit B un ensemble compact dans $\mathbb{R}^d$. Pour que l'homothétique λB soit ouvert selon B pour tout $\lambda \geq 1$, il faut et il suffit que B soit convexe.

Si B est convexe, la propriété est vérifiée. Inversement, supposons que pour tout $\alpha > 0$ il existe un ensemble D_α tel que :

$$(1+\alpha)B = B \oplus \alpha\, D_\alpha \tag{a}$$

Quitte à remplacer $\alpha\, D_\alpha$ par $(1+\alpha)\, B \ominus \check{B}$, on peut toujours supposer D_α compact. Prenons l'enveloppe convexe des deux membres de (a). Il vient :

$$(1+\alpha)\; C(B) = C(B) \oplus \alpha\; C(D_\alpha) \tag{a'}$$

Mais $(1+\alpha)\; C(B) = C(B) \oplus \alpha\; C(B)$, puisqu'il s'agit de convexes, et la règle de simplification s'applique dans $C(\mathcal{K})$. Par conséquent, (a') entraine :

$$C'D_\alpha) = C(B) \tag{b}$$

et par suite aussi :

$$D_\alpha \subset C(B) \tag{b'}$$

Les D_α , $\alpha > 0$, sont contenus dans le compact fixe $C(B)$. Ce point établi, revenons à la relation (a). Par réitération, elle donne, pour n entier > 0 :

$$(1+\alpha)^n\; B = B \oplus \alpha\; D_\alpha \oplus \alpha(1+\alpha)\; D_\alpha \oplus \ldots \oplus \alpha(1+\alpha)^{n-1}\; D_\alpha$$

c'est-à-dire :

$$B = \frac{1}{(1+\alpha)^n}\; B \oplus \left(\bigoplus_{k=1}^{n} \frac{\alpha}{(1+\alpha)^k}\; D_\alpha \right) \tag{c}$$

D'après (b'), on a la majoration

$$\bigoplus_{k=1}^{n} \frac{\alpha}{(1+\alpha)^k}\; D_\alpha \subset \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha}{(1+\alpha)^k} \right)\; C(D_\alpha) \subset C(D_\alpha) = C(B)$$

d'où l'on déduit facilement la convergence de $\bigoplus_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha}{(1+\alpha)^k}\; D_\alpha$. La relation (c), compte tenu de la continuité de $\oplus$, donne alors :

(d $$B = \bigoplus_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha}{(1+\alpha)^k}\; D_\alpha = \frac{\alpha}{1+\alpha}\; \bigoplus_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1+\alpha)^k}\; D_\alpha \tag{d}$$

Montrons alors que B est indéfiniment divisible, ce qui entrainera qu'il est convexe, d'après le

Théorème 1-5-1, et achèvera la démonstration. Soit N un entier > 0. Pour $0 \leq i < N$, posons :

$$B_i(\alpha) = \frac{\alpha}{1+\alpha} \bigoplus_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1+\alpha)^{i+kN}} D_\alpha$$

On a évidemment :

$$(e) \qquad \begin{cases} B = B_0(\alpha) \oplus B_1(\alpha) \oplus .. \oplus B_{N-1}(\alpha) \\ \\ B_i(\alpha) = \dfrac{1}{(1+\alpha)^i} B_0(\alpha) \end{cases}$$

D'après (b'), D_α admet une valeur d'adhérence D_0 pour $\alpha \downarrow 0$. Soit $\alpha_n \downarrow 0$ une suite telle que D_{α_n} converge vers D_0 dans $\mathcal{K}$. La relation (b') montre que les $B_0(\alpha_n)$ sont eux aussi contenus dans un compact fixe, et admettent une valeur d'adhérence B_0. Soit donc α_{n_k} une suite partielle telle que $B_0(\alpha_{n_k})$ converge vers B_0. La seconde relation (e) montre que les $B_i(\alpha_n)$ admettent dans $\mathcal{K}$ cette même limite B_0. En vertu de la continuité de $\oplus$, la première relation (e) passe à la limite, et donne $B = B_0$ (somme de Minkowski de N termes égaux à B_0). Donc B est infiniment divisible, et par suite B est convexe.

<u>COROLLAIRE</u> - Soit B un compact de $\mathbb{R}^d$. Pour que la granulométrie selon l'ensemble B se réduise à $\phi_\lambda(A) = A_{\lambda B}$, $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, il faut et il suffit que le compact B soit convexe.

<u>Granulométries euclidiennes s.c.s. et compactes.</u>

<u>Définition 7-2-3</u>.- Nous dirons qu'une granulométrie ϕ_λ (euclidienne ou non) est s.c.s. sur $\mathcal{K}$ (resp. sur $\mathcal{F}$) si l'application $(\lambda, A) \to \psi_\lambda(A)$ est s.c.s. de $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{K}$ (resp. $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{F}$) dans $\mathcal{K}$ (resp. dans $\mathcal{F}$). Nous dirons qu'elle est compacte si pour chaque $\lambda > 0$ l'ouverture ϕ_λ est <u>compacte</u> au sens de la définition 7-1-1.

Nous allons caractériser les granulométries euclidiennes compactes et s.c.s. En ce qui concerne les granulométries euclidiennes compactes, la Proposition 7-1-5 fournit un critère immédiat, puisqu'il suffit que ψ_λ soit compact pour une valeur particulière de λ, par exemple pour $\lambda = 1$.

<u>Proposition 7-2-3</u>.- Soit ϕ_λ une granulométrie euclidienne sur $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ et, pour chaque $\lambda > 0$, λ la famille des invariants de ϕ_λ. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :

a/ - ϕ_λ est s.c.s. sur $\mathcal{F}$ au sens de la définition 2-7-3.

b/ - Pour chaque $\lambda > 0$, l'ouverture ϕ_λ est s.c.s. sur .

c/ - La famille $\mathcal{B}$ est stable pour la fermeture topologique et $\mathcal{B} \cap \mathcal{F}$ est fermée dans $\mathcal{K}$.

Il est immédiat que a/ entraine b/. L'équivalence b/ $\Leftrightarrow$ c/ résulte des propositions 7-1-2 et 7-1-4. Si b/ est vrai, soit $(\lambda n, An)$ une suite convergeant vers (λ, A) dans $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{F}$. On a $\overline{\lim}\ \phi_{\lambda n}(An)$ $= \overline{\lim}\ \lambda_n\ \phi(An/\lambda n) \subset \lambda\ \phi(A/\lambda) = \phi_\lambda(A)$, et a/ est vraie.

<u>COROLLAIRE</u> - Si ϕ_λ est une granulomérrie euclidienne s.c.s. sur $\mathcal{F}$ distincte de l'identité, aucun invariant fermé de $\phi = \phi_1$ n'admet de point isolé.

En effet, soit $B' \in \mathcal{B}$ un invariant fermé de ϕ et $x \in B'$. Compte tenu de l'invariance de pour les translations, on peut supposer $x = 0$. Si 0 est un point isolé de B', il existe une boule ouverte B_ε de rayon $\varepsilon > 0$ et de centre 0 disjointe de B'. Pour $\lambda \to \infty$, $\lambda\ B_\varepsilon$ tend vers $\mathbb{R}^d$ dans $\mathcal{G}$, $\{o\}$ reste invariant, $\lambda(B\setminus\{o\})$ converge vers $\emptyset$ dans $\mathcal{F}$, donc λB converge vers $\{o\}$ dans $\mathcal{F}$. Ainsi $\{o\} \in \mathcal{B}$, puisque $\mathcal{B}$ est fermé, et on a donc $\phi_\lambda(A) = A$ pour tout $A \in \mathcal{P}$.

<u>EXEMPLE 1</u> - La granulométrie selon l'ensemble à deux éléments $\{x_o, y_o\}$ est bien une granulométrie sur $\mathcal{F}$ (elle applique $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{F}$). Mais elle n'est pas s.c.s. d'après le corollaire.

<u>EXEMPLE 2 -</u> Prenons dans $\mathbb{R}^2$ la granulométrie selon le cercle C (circonférence) unité. $\mathcal{B}$ est constitué des λC, $\lambda \geq 1$, de leurs translatés et des réunions infinies de ces éléments. Mais les droites du plan appartiennent à l'adhérence de $\mathcal{B}$ et ne sont pas réunion de cercles de rayons finis. Il ne s'agit donc pas d'une granulométrie compacte.

<u>EXEMPLE 3</u> - Soit $\mathcal{U}$ <u>une famille de compacts convexes compacte</u> dans $C(\mathcal{K})$, i.e. $\mathcal{U}$ est fermée dans $\mathcal{K}$ et les $B \in \mathcal{U}$ sont contenus dans un compact fixe. Prenons comme famille $\mathcal{B}$ la famille stable pour les réunions, les translations et les homothéties de module ≥ 1 engendrée par $\mathcal{U}$. La granulométrie euclidienne associée à $\mathcal{B}$, ou <u>granulométrie selon la famille $\mathcal{U}$</u> , <u>est s.c.s.</u> et <u>compacte</u>. Elle est définie par la formule :

$$\phi_\lambda(A) = \cup\ \{A_{\lambda B}\ ,\ B \in \mathcal{U}\ \} \qquad (A \in \mathcal{P})$$

En particulier, toute granulométrie selon une <u>famille finie</u> de compacts convexes est s.c.s. et compacte.

Cela se déduit sans trop de difficulté des Propositions 7-1-5 et 7-2-3.

Proposition 7-2-4.- Soit ϕ_λ une granulométrie s.c.s. sur un espace $\mathcal{K}$ ou $\mathcal{F}$. Pour chaque $K \in \mathcal{K}$, posons $\lambda_K = \mathrm{Inf}\ \{\lambda : \phi_\lambda(K) = \emptyset\}$. La famille des éléments compacts critiques pour ϕ_λ est constituée des $\phi_{\lambda_K}(K)$, K parcourant l'ensemble des compacts tels que $\lambda_K \neq 0$ et $\lambda_K \neq \infty$.

En effet, pour $\lambda > 0$ on a $\phi_\lambda(K) = \bigcap\limits_{\mu<\lambda} \phi_\mu(K)$ pour tout $K \in \mathcal{K}$, car $\mu \uparrow \lambda$ entraine $\phi_\mu(K) \downarrow \phi_\lambda(K)$ à cause de la semi-continuité supérieure. En particulier, si $\lambda_K > 0$, on en déduit $\phi_{\lambda_K}(K) = \bigcap \{\phi_\lambda(K) ; \lambda < \lambda_K\}$. Comme $\phi_{\lambda_K}(K)$ est compact, $\phi_{\lambda_K}(K) = \emptyset$ entrainerait $\phi_\lambda(K) = \emptyset$ pour un $\lambda < \lambda_K$, contrairement à la définition de λ_K. Donc $\phi_{\lambda_K}(K) \neq \emptyset$. Il résulte bien que $\phi_{\lambda_K}(K)$ est un élément critique. Inversement, l'idempotence des ϕ_λ, $\lambda > 0$ montre que tout compact critique est de cette forme.

Filtres morphologiques.

Considérons à nouveau l'exemple 3 ci-dessus, où $\mathcal{V}$ est une famille de convexes compacts compacte dans $\mathcal{K}$ et où on pose

$$\phi_\lambda(A) = \bigcup \{A_{\lambda B} \ , \ B \in \mathcal{V}\} \qquad (A \in \mathcal{P} \ , \ \lambda > 0)$$

Comme cette granulométrie est s.c.s., il résulte immédiatement de la Proposition 7-2-4 que tous les compacts convexes $B \in \mathcal{V}$ sont critiques pour une valeur de $\lambda \leq 1$, pourvu seulement que $\phi_\lambda(B) \downarrow \emptyset$ pour $\lambda \uparrow \infty$. On note qu'ici la valeur critique $\lambda_B = \mathrm{Inf}\ \{\lambda : \phi_\lambda(B) = \emptyset\}$ du paramètre λ est l'Inf des λ tels que $\frac{1}{\lambda}$ B ne contienne aucun translaté d'aucun ensemble de $\mathcal{V}$ (d'où $\lambda_B \leq 1$).

Supposons que $\mathcal{V}$ possède la propriété supplémentaire suivante :

$$B \in \mathcal{V} \ , \ \lambda > 1, \ B' \subset \frac{1}{\lambda} B \Rightarrow B' \notin \mathcal{V} \tag{7-2-5}$$

Les éléments de $\mathcal{V}$ sont alors tous critiques pour $\lambda = 1$, et on a pour tout μ B, $B \in \mathcal{V}$, $\mu > 0$:

$$\phi_\lambda(\mu B) = \begin{cases} B \text{ si } \lambda \leq \mu \\ \emptyset \text{ si } \lambda > \mu \end{cases}$$

D'autre part, les éléments de $\mathcal{V}$ sont convexes dans $\mathbb{R}^d$, donc connexes. La proposition suivante montre que si les A_i, $i \in I$ sont les composantes connexes d'un ensemble A, on a pour tout $\lambda > 0$:

$$\phi_\lambda(A) = \bigcup_{i\in I} \phi_\lambda(A_i)$$

Proposition 7-2-5.- Soit ϕ une ouverture sur une partie $\mathcal{C}$ de $\mathcal{P}(E)$, E désignant un espace topologique. Si la famille $\mathcal{B}$ des invariants de ϕ admet une base $\mathcal{B}_o$ (i.e. : $\mathcal{B}_o \subset \mathcal{B}$, et la restriction à $\mathcal{C}$ de la famille stable pour $\cup$ engendrée par $\mathcal{B}_o$ est $\mathcal{B}$ ou $\mathcal{B}\setminus\{\emptyset\}$) composée de parties connexes dans E, l'ouverture de tout $A \in \mathcal{C}$ est réunion des ouvertures des composantes connexes de A.

En effet, l'inclusion $\phi(A) \supset \bigcup_{i\in I} \phi(A_i)$ est vraie dès que $A = \cup A_i$. Si les A_i sont les composantes connexes de A, l'inclusion inverse est également vérifiée. En effet, soit $x \in \phi(A)$, et $B \in \mathcal{B}_o$ avec $x \in B \subset A$. Comme B est connexe par hypothèse, il existe $i \in I$ avec $x \in B \subset A_i$, d'où $x \in \phi(A_i)$, et $\phi(A) \subset \bigcup_{i\in I} \phi(A_i)$.

Revenons à la granulométrie selon la famille $\mathcal{V}$ compacte dans $C(\mathcal{K})$. Si A est un fermé dont les composantes connexes A_i, $i \in I$ sont des homothétiques d'ensembles de $\mathcal{V}$, soit :

$$A_i = \lambda_i B_i \quad , \quad B_i \in \mathcal{B}_o$$

la granulométrie ϕ_λ éteindra les composantes telles que $\lambda_i < \lambda$, et laissera les autres invariantes :

$$\phi_\lambda(A) = \cup \{A_i : i \in I , \lambda_i \geq \lambda\} \tag{7-2-6}$$

Supposons alors qu'un ensemble $B_o \in \mathcal{V}$ possède la propriété suivante (plus forte que celle qui découle de (7-2-5)), qui exprime que B_o est "<u>bien séparé</u>" des autres $B \in \mathcal{V}$:

Il existe deux réels positifs α et β avec $\alpha < 1 < \beta$ tels que :

1/ - $\lambda > \alpha$, $B \neq B_o$ et $B \in \mathcal{V} \Rightarrow \lambda B_o \not\subset B$

2/ - $\mu < \beta$, $B' \neq B_o$ et $B' \in \mathcal{V} \Rightarrow B' \not\supset \mu B_o$

Alors les deux familles :

$$\mathcal{V}_\alpha = (\mathcal{V}\setminus B_o) \cup \{\alpha B_o\}$$

$$\mathcal{V}_\beta = (\mathcal{V}\setminus B_o) \cup \{\beta B_o\}$$

obtenues en remplaçant B_o par α B_o ou β B_o vérifient encore la relation (7-2-5). Soit ϕ_λ^α et ϕ_λ^β les granulométries euclidiennes associée à $\mathcal{U}_\alpha$ et $\mathcal{U}_\beta$, et A un fermé dont les composantes connexes sont des λ B_i, $B_i \in \mathcal{U}$ comme ci-dessus. Soit I_o l'ensemble des indices i_o tel que $B_{i_o} = B_o$. On a, pour $i_o \in I_o$:

$$A_{i_o} = \lambda_{i_o} B_o = \frac{\lambda_{i_o}}{\alpha} \alpha B_o = \frac{\lambda_{i_o}}{\beta} \beta B_o$$

Désignons par A_o et A_1 les ensembles :

$$A_o = \bigcup_{i \in I_o} A_i \qquad A_1 = \bigcup_{i \in I \setminus I_o} A_i$$

Le premier contient les composantes de A qui sont homothétiques de B_o (du type B_o), le second contient les autres composantes. On a :

$$\begin{cases} \phi_\lambda(A) = \phi_\lambda(A_o) \cup \phi_\lambda(A_1) \\ \phi_\lambda^\alpha(A) = \phi_\lambda^\alpha(A_o) \cup \phi_\lambda(A_1) \\ \phi_\lambda^\beta(A) = \phi_\lambda^\beta(A_o) \cup \phi_\lambda(A_1) \end{cases}$$

D'après (7-2-6), de plus :

$$\begin{cases} \phi_\lambda(A_o) = \cup \{A_i \ , \ i \in I_o \ , \ \lambda_i \geq \lambda\} \\ \phi_\lambda^\alpha(A_o) = \cup \{A_i \ , \ i \in I_o \ , \ \lambda_i \geq \lambda\alpha\} \\ \phi_\lambda^\beta(A_o) = \cup \{A_i \ , \ i \in I_o \ , \ \lambda_i \geq \lambda\beta\} \end{cases}$$

Par suite :

$$\phi_\lambda^\alpha(A) \setminus \phi_\lambda(A) = \cup \{A_i \ , \ i \in I_o \ , \ \alpha\lambda \leq \lambda_i < \lambda\}$$

$$\phi_\lambda(A) \setminus \phi_\lambda^\beta(A) = \cup \{A_i \ , \ i \in I_o \ , \ \lambda \leq \lambda_i < \beta\lambda\}$$

Le premier ensemble est constitué des homothétiques λ_i B_o contenus dans A et vérifiant $\alpha\lambda \leq \lambda_i < \lambda$, le second des λ_i B_o tels que $\lambda \leq \lambda_i < \beta\lambda$. Autrement dit, on a bien réalisé un <u>filtre morphologique</u> permettant d'obtenir la granulométrie des seules composantes du type B_o .

Autres exemples de granulométries euclidiennes.

1 - La granulométrie universelle : $\mathcal{B}_\lambda$ est la famille des ensembles mesurables dont la mesure de Lebesgue est $\geq \lambda$. Tous les ensembles de mesure λ_0 sont critiques pour $\lambda = \lambda_0$ (mais il n'y a pas de filtre morphologique possible). On a $\phi_\lambda(A) = \emptyset$ ou A selon que Mes $A < \lambda$ ou Mes $A \geq \lambda$.

2 - La granulométrie connexe universelle : $\mathcal{B}_\lambda$ est la famille des ensembles connexes mesurables et de mesure $\geq \lambda$. $\phi_\lambda(A)$ est la réunion des composantes connexes de A de mesure $\geq \lambda$. Tout ensemble connexe est critique pour λ = Mes A, mais il n'y a pas de filtre.

3 - Tamisage selon un convexe B (par exemple, B sera un cylindre convexe, ce qui correspond à peu près aux tamisages usuels). $\mathcal{B}_\lambda$ est la famille des ensembles connexes non contenus dans un translaté de λ B. Plus généralement, on peut prendre B dans un sous-espace à $k < n$ dimension, et pour $\mathcal{B}_\lambda$ la famille des ensembles dont la projection sur ce sous-espace n'est pas contenus dans un translaté de λ B.

7-3 GRANULOMETRIE D'UN EFA ET DE SON COMPLEMENTAIRE.

Soit E un espace LCD quelconque, et A un EFA défini par une probabilité P sur $(\mathcal{F}, \sigma_f)$. Si ϕ_λ est une granulométrie s.c.s. sur $\mathcal{F}$, au sens de la définition 7-2-3, l'application $A \to \phi_\lambda(A)$ de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$ est mesurable pour chaque $\lambda > 0$, et $\phi_\lambda(A)$ est donc un EFA. Plus précisément, l'application $(\lambda, A) \to \phi_\lambda(A)$ est s.c.s. sur $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{F}$, donc mesurable. On en déduit que l'application k de $E \times \mathbb{R}_+ \times \mathcal{F}$ sur $\{0,1\}$ définie en posant $k(x,\lambda,A) = 1$ si $x \in \phi_\lambda(A)$ et 0 si $x \notin \phi_\lambda(A)$ est mesurable. En effet, l'ensemble $k^{-1}(1) = \{(x,\lambda,A) : x \in \phi_\lambda(A)\}$ est fermé, comme on le vérifie à partir de la semi-continuité supérieure.

Si donc nous posons pour tout $x \in E$:

$$A(x) = \text{Sup}\ \{\lambda : k(x,\lambda,A) = 1\} = \text{Sup}\ \{\lambda : x \in \phi_\lambda(A)\}$$

la famille $A(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$ est une fonction aléatoire mesurable. Désignons par $F_x(\lambda)$ la fonction de répartition de la VA $A(x)$ pour un $x \in \mathbb{R}^d$. On a alors :

$$F_x(\lambda) = P(A(x) < \lambda) = P(x \notin \phi_\lambda(A)) \tag{7-3-1}$$

En effet, $A(x) < \lambda$ implique $x \notin \phi_\lambda(A)$, et, plus précisément $\{A(x) < \lambda\} = \bigcup_{\varepsilon>0} \{x \notin \phi_{\lambda-\varepsilon}(A)\}$, ou encore $\{A(x) \geq \lambda\} = \{x \in \bigcap_{\varepsilon>0} \phi_{\lambda-\varepsilon}(A)\}$. Mais ce dernier ensemble est p.s. égal à $\{x \in \phi_\lambda(A)\}$ à cause de la semi-continuité supérieure de la franulométrie ϕ_λ. D'où la relation (7-3-1).

On appelle alors <u>mesure granulométrique</u> du point x (associée à la granulométrie ϕ_λ) de l'EFA A, ou, plus brièvement, <u>granulométrie de A</u>, la fonction $\lambda \to 1 - F_x(\lambda)$, c'est-à-dire :

$$1 - F_x(\lambda) = P(A(x) \geq \lambda) = P(x \in \phi_\lambda(A))$$

Enonçons :

<u>Proposition 7-3-1</u>.- Soit E un espace LCD et ϕ_λ une granulométrie s.c.s. sur $\mathcal{F}(E)$ (ou sur $\mathcal{K}(E)$ et A le fermé (le compact) aléatoire canonique. Alors $\phi_\lambda(A)$ est un fermé (un compact) aléatoire mesurable sur $\mathbb{R}^+ \times \mathcal{F}$, $(\mathbb{R}^+ \times \mathcal{K})$. Si l'on pose $A(x) = \text{Sup}\ \{\lambda : x \in E$ est une fonction aléatoire mesurable sur $\mathcal{F}$ (ou $\mathcal{K}$) muni de ses boréliens et vérifie la relation $\{A(x) \geq \lambda\} = \{x \in \phi_\lambda(A)\}$.

<u>Définition</u>.- Dans les mêmes conditions, si P est une probabilité sur $\mathcal{F}$ (sur $\mathcal{K}$), on appelle mesure granulométrique associée à ϕ_λ, la fonction :

$$1 - F_x(\lambda) = P(A(x) \geq \lambda) = P(x \in \phi_\lambda(A))$$

<u>REMARQUE</u> - <u>Les réalisations de $A(x)$ sont s.c.s. sur E</u>. En effet, soit x_n une suite convergeant vers x dans E, et λ_0 une valeur d'adhérence (dans le compactifié de $\mathbb{R}_+$) de $A(x_n)$. Soit $A(x_{n_k})$ une suite partielle convergeant vers λ_0, et $\lambda_{n_k} < A(x_{n_k})$ avec $\lambda_{n_k} \to \lambda_0$. On a $x_{n_k} \in \phi_{\lambda_{n_k}}(A)$ d'après la définition de $A(x)$. Comme ϕ_λ est s.c.s. en λ, on en déduit $x \in \overline{\lim}\ \phi_{\lambda_{n_k}}(A) \subset \phi_{\lambda_0}(A)$, c'est-à-dire $A(x) \geq \lambda_0$. Donc A est p.s. s.c.s. sur E.

<u>Granulométrie des pores</u>.

Soit ϕ_λ une granulométrie euclidienne s.c.s. sur $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{B} \subset \mathcal{K}$ la famille des invariants de ϕ_1. Posons pour tout $G \in \mathcal{G}$

$$\phi'_\lambda(G) = \bigcup \{\phi_\lambda(K)\ ,\ K \subset G,\ K \in \mathcal{K}\}$$

On vérifie sans peine que ϕ'_λ est une ouverture s.c.i. sur $\mathcal{G}$ pour chaque $\lambda \geq 0$, et que les ϕ'_λ, $\lambda > 0$ constituent une granulométrie euclidienne sur $\mathcal{G}$. Montrons que cette granulométrie est s.c.i., c'est-à-dire que l'application $(\lambda,G) \to \phi'_\lambda(G)$ est s.c.i. de $\mathbb{R}^+ \times \mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}$. Pour cela, il faut établir l'énoncé suivant : pour $\lambda > 0$, $K \in \mathcal{K}$ et $G \in \mathcal{G}$, si $K \subset \phi'_\lambda(G)$, on peut trouver $\lambda_o > \lambda$ et $K_o \subset G$, $K_o \in \mathcal{K}$ tel que $\mu < \lambda_o$ et $G' \supset K_o$ entraine $K \subset \phi'_\mu(G')$. Or, si le compact K est contenu dans l'ouvert $\phi_\lambda(G)$, on peut trouver un $B \in \lambda\mathcal{B}$ invariant pour ϕ_λ et un $\varepsilon > 0$ tel que la boule fermée $\overline{B}_\varepsilon$ vérifie :

$$K \subset K \oplus \overline{B}_\varepsilon \subset B \subset B \oplus \overline{B}_\varepsilon \subset G$$

Mais l'homothétie est continue sur $\mathcal{K}$. On peut donc trouver $\alpha > 1$ avec : $\frac{1}{\alpha} K \subset K \oplus \overline{B}_\varepsilon$ et $\alpha B \subset B \oplus \overline{B}_\varepsilon$, d'où :

$$K \subset \alpha B \subset B \oplus \overline{B}_\varepsilon \subset G$$

Mais $B \in \lambda\mathcal{B}$ donne $\alpha B \in \alpha\lambda\mathcal{B}$, et αB est invariant pour $\phi_{\alpha\lambda}$. On a donc $K \subset \alpha B \subset \phi'_{\alpha\lambda}(G')$ pour tout ouvert G' vérifiant $G' \supset B \oplus \overline{B}_\varepsilon$. Ainsi, $G' \supset B \oplus \overline{B}_\varepsilon$ et $\mu \leq \alpha\lambda$ entraine $K \subset \phi'_\mu(G')$, et $(\lambda,G) \to \phi'_\lambda(G)$ est s.c.i.

<u>Proposition 7-3-2</u>.- Si ϕ_λ, $\lambda > 0$ est une granulométrie s.c.s. euclidienne sur $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$, la formule :

$$\phi'_\lambda(G) = \bigcup \{\phi_\lambda(K)\ ,\ K \subset G\ ,\ K \in \mathcal{K}\} \qquad (G \in \mathcal{G})$$

définit une granulométrie euclidienne s.c.i. sur $\mathcal{G}$ (c'est-à-dire : l'application $(\lambda,G) \to \phi'_\lambda(G)$ de $\mathbb{R}^+ \times \mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}$ est s.c.i.).

Si la granulométrie ϕ_λ sur $\mathcal{F}(\mathbb{R}^d)$ est <u>compacte</u> (pour tout $\lambda > 0$, ϕ_λ est le plus petit prolongement s.c.s. sur $\mathcal{F}$ de sa restriction à $\mathcal{K}$), on a même :

$$\phi'_\lambda(G) = \bigcup_{\substack{K\subset G\\ K\in\mathcal{K}}} \phi_\lambda(K) = \bigcup_{\substack{F\subset G\\ F\in\mathcal{F}}} \phi_\lambda(F) \qquad (G \in \mathcal{G})$$

de sorte que le plus petit prolongement sur $\mathcal{G}$ de ϕ_λ constitue encore une granulométrie s.c.i. C'est évidemment ϕ'_λ qui va servir à définir la granulométrie des pores, c'est-à-dire la granulométrie du complémentaire d'un ensemble fermé aléatoire.

Soit donc A le fermé aléatoire canonique. Comme l'application ϕ'_λ est s.c.i. sur $\mathcal{G}$, $\phi'_\lambda(A^c)$ est un ouvert aléatoire mesurable. Pour $x \in \mathbb{R}^d$, posons :

$$A(x) = \operatorname{Sup}\ \{\lambda\ :\ x \in \phi'_\lambda(A^c)\}$$

Comme ϕ'_λ est s.c.i., pour tout $G \in \mathcal{G}$ fixé, et tout $\lambda > 0$, on a :

$$\phi'_\lambda(G) = \bigcup_{\mu > \lambda} \phi'_\mu(G)$$

la convergence de la famille filtrante $\phi'_\lambda(G)$, $\mu > \lambda$ ayant lieu aussi vers $\phi'_\lambda(G)$ dans $\mathcal{G}$. Par suite, $x \notin \phi'_{\lambda(x)}(A^c)$, et $A(x) \leq \lambda$ équivaut à $x \notin \phi_\lambda(A^c)$. Ainsi $A(x)$ est une fonction aléatoire sur $\mathcal{F}$, et on peut même vérifier sa mesurabilité. Par suite :

<u>Proposition 7-3-3</u>.- Soit ϕ_λ, $\lambda > 0$ une granulométrie euclidienne s.c.s. et compacte sur $\mathcal{F}(\mathbb{R}^d)$, A le fermé aléatoire canonique, et P une probabilité sur $\mathcal{F}$. Alors $\phi_\lambda(A^c)$ est un ouvert aléatoire mesurable. Pour toute mesure positive μ sur $\mathbb{R}^n$, l'intégrale $\int_{\phi_\lambda(A^c)} \mu(dx)$ existe et vérifie :

$$E \int_{\phi_\lambda(A^c)} \mu(dx) = \mu(dx)\ P(x \in \phi_\lambda(A^c))$$

La fonction $A'(x,A) = \text{Sup}\ \{\lambda : x \in \phi_\lambda(A^c)'\}$, $x \in \mathbb{R}^d$ est une fonction aléatoire mesurable, et vérifie l'égalité :

$$\{A'(x) \leq \lambda\} = \{x \notin \phi'_\lambda(A^c)\}$$

<u>Définition</u>.- Dans les mêmes conditions, on appelle mesure granulométrique des pores associée à ϕ_λ la fonction définie par :

$$1 - F'_x(\lambda) = P(A'(x) > \lambda) = P(x \in \phi'_\lambda(A^c))$$

<u>REMARQUE</u> - On notera qu'ici les réalisations de $A'(x)$ sont s.c.i. sur $\mathbb{R}^d$: si $x_n \to x$, soit λ_o une valeur d'adhérence de $\lambda_n = A'(x_n)$, x_{n_k} une suite partielle avec $x_{n_k} \to \lambda_o$. On a $x_{n_k} \notin \phi'_{\lambda_{n_k}}(A^c)$, donc ϕ'_λ étant s.c.i., $x \notin \phi_{\lambda_o}(A^c)$, c'est-à-dire $A'(x) \leq \lambda_o$, et A' est s.c.i.

<u>7-4 OUVERTURES ET GRANULOMETRIES S.C.S. ET COMPACTES</u>.

Dans le paragraphe précédent, nous avons traité en détail les τ-ouvertures et les granulométries euclidiennes sur un espace euclidien $\mathbb{R}^d$, qui sont pratiquement les seules utilisées dans les applications. Pour être complet, nous allons maintenant donner la caractérisation des ouvertures compactes et des granulométries s.c.s. et compactes sur un espace E localement compact à base dénombrable. Les résultats que nous obtiendrons ne seront pas utilisés dans la suite, de sorte que ce paragraphe et le suivant peuvent être omis sans inconvénient.

Nous allons commencer par traiter le cas des ouvertures et des fermetures ϕ sur E. Nous avons déjà donné dans la Proposition 7-1-2 les conditions nécessaires et suffisantes que doit vérifier la famille $\mathcal{B}$ des invariants de ϕ pour que ϕ laisse stables les espaces $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ ou $\mathcal{K}$. D'une manière générale, si une partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}$ est stable pour ϕ, nous dirons pour abréger que ϕ est une ouverture ou une fermeture sur $\mathcal{A}$, même si en fait ϕ est défini sur $\mathcal{P}$ entier. D'ailleurs, si ϕ n'est défini que sur $\mathcal{A}$, on peut toujours la prolonger sur $\mathcal{P}$ entier, comme on l'a vu au paragraphe 7-1. Dans les énoncés qui suivent, une phrase telle que : ϕ est une ouverture s.c.s. sur impliquera donc que $\mathcal{F}$ est stable pour ϕ.

<u>Ouvertures et fermetures s.c.s. sur $\mathcal{F}$ ou $\mathcal{K}$</u>.

Commençons par caractériser les ouvertures s.c.s.

<u>Proposition 7-4-1</u>.- Soit ϕ une ouverture sur $\mathcal{P}$ et $\mathcal{B}$ la famille de ses invariants dans $\mathcal{P}$. Alors ϕ est une ouverture s.c.s. sur $\mathcal{K}$ (resp. sur $\mathcal{F}$) si et seulement si $\mathcal{B}$ vérifie les deux conditions suivantes :

a/ - Pour tout $B \in \mathcal{B}$ relativement compact (resp. tout $B \in \mathcal{B}$) on a $\overline{B} \in \mathcal{B}$.

b/ - $\mathcal{B} \cap \mathcal{K}$ est fermée dans $\mathcal{K}$ (resp. $\mathcal{B} \cap \mathcal{F}$ est fermée dans $\mathcal{F}$).

Il suffit de donner la démonstration dans le cas de l'espace $\mathcal{K}$. D'après la Proposition 7-1-2, ϕ est une ouverture sur $\mathcal{K}$ si et seulement si la condition a/ est vérifiée. Il reste donc à montrer qu'une ouverture ϕ sur $\mathcal{K}$ est s.c.s. si et seulement si $\mathcal{B} \cap \mathcal{K}$ est fermée dans $\mathcal{K}$.

Soit $\{A_n\} \subset \mathcal{K} \cap \mathcal{B}$ une suite convergeant vers A dans $\mathcal{K}$. Si ϕ est s.c.s., on a $A = \lim A_n = \lim \phi(A_n) \subset \phi(A)$, donc A ù $\phi(A)$, puisque ϕ est anti-extensive, donc $A \in \mathcal{B} \cap \mathcal{K}$, et $\mathcal{B} \cap \mathcal{K}$ est fermée dans $\mathcal{K}$.

Inversement, soit $\{K_n\}$ une suite convergeant vers K dans $\mathcal{K}$, $\{K_{n_k}\}$ une suite partielle, et, pour chaque n_k, un point $x_{n_k} \in \phi(K_{n_k})$ telle que la suite $\{x_{n_k}\}$ converge vers x dans E. Pour chaque k, on peut trouver un invariant $B_{n_k} \in \mathcal{B} \cap \mathcal{K}$ tel que $x_{n_k} \in B_{n_k} \subset K_{n_k}$. Comme les K_n, dont aussi les B_{n_k}, sont contenus dans un compact fixe, la suite $\{B_{n_k}\}$ admet une valeur d'adhérence $B \in \mathcal{K}$.

Si $\mathcal{B} \cap \mathcal{K}$ est fermée dans $\mathcal{K}$, il en résulte $B \in \mathcal{B} \cap \mathcal{K}$ et $x \in B \subset K$, donc $x \in \phi(K)$. Par suite, on a $\overline{\lim}\ \phi(K_n) \subset \phi(K)$, et ϕ est s.c.s. sur $\mathcal{K}$.

<u>COROLLAIRE 1</u> - Si $\mathcal{B}_0$ est une partie fermée de $\mathcal{K}$ (resp. de $\mathcal{F}$) stable pour la réunion finie, le plus petit prolongement ϕ de l'identité sur $\mathcal{B}_0$ est une ouverture s.c.s. sur $\mathcal{K}$ (resp. sur $\mathcal{F}$).

En effet, si $\mathcal{B}_0$ est fermée dans $\mathcal{K}$ et stable pour la réunion finie, toute famille B_i, $i \in I$ dans $\mathcal{B}_0$ dont la réunion est relativement compacte vérifie $\overline{\cup \{B_i,\ i \in I\}} \in \mathcal{K}$. Ainsi, la famille $\mathcal{B}$ stable pour la réunion engendrée par $\mathcal{B}_0$ vérifie la condition b/ de la Proposition 7-1-2, et ϕ est une ouverture sur $\mathcal{K}$. Mais $\mathcal{B} \cap \mathcal{K} = \mathcal{B}_0$ est fermée dans $\mathcal{K}$ par hypothèse, donc ϕ est s.c.s. sur $\mathcal{K}$ d'après la proposition.

<u>COROLLAIRE 2</u> - Une fermeture ϕ' sur $\mathcal{G}$ est s.c.i. si et seulement si la famille $\mathcal{B} \cap \mathcal{G}$ de ses invariants ouverts est fermée dans $\mathcal{G}$.

<u>Proposition 7-4-2</u>.- Une fermeture ϕ sur $\mathcal{K}$ est s.c.s. si et seulement si la famille $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B} \cap \mathcal{K}$ de ses invariants compacts contient un système fondamental de voisinages de chaque invariant $B \in \mathcal{B}_0$.

En effet, supposons que $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B} \cap \mathcal{K}$ possède cette propriété, et soit $K \in \mathcal{K}$, $G \in \mathcal{G}$ avec $\phi(K) \subset G$. On peut donc trouver $G_0 \in \mathcal{G}$ et $B_0 \in \mathcal{B}_0$ avec $\phi(K) \subset G_0 \subset B_0 \subset G$. On a aussi $K \subset G_0$, puisque ϕ est extensive, et pour tout compact $K' \subset G_0$, $K' \subset B_0$ entraine $\phi(K') \subset B_0 \subset G$. Donc ϕ est s.c.s.

Inversement, supposons ϕ s.c.s. sur $\mathcal{K}$, et soient $G \in \mathcal{G}$, $B \in \mathcal{B}_0$ avec $B \subset G$. On a $B = \phi(B) \subset G$, et, ϕ étant s.c.s., il existe $G' \in \mathcal{G}$, $G' \supset B$ tel que $\phi(K') \subset G$ pour tout compact $K' \subset G'$. Le compact B étant contenu dans l'ouverture G', on peut trouver $G_0 \in \mathcal{G}$, $K_0 \in \mathcal{K}$ avec $B \subset G_0 \subset K_0 \subset G'$. Mais $K_0 \subset G'$ entraine $\phi(K_0) \subset G$, donc $B \subset G_0 \subset \phi(K_0) \subset G$. Comme $\phi(K_0)$ est un invariant compact, $\mathcal{B}_0$ contient bien un système fondamental de voisinages de B.

La caractérisation des fermetures s.c.s. sur $\mathcal{F}$ est plus facile à énoncer sous la forme duale suivante :

<u>Proposition 7-4-3</u>.- Soit ϕ une ouverture sur $\mathcal{G}$, $\mathcal{B}$ la famille de ses invariants, et $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B} \cap \mathcal{G}$. Alors ϕ est s.c.i. sur $\mathcal{G}$ si et seulement si pour tout $B \in \mathcal{B}_0$ et tout compact $K \subset B$ on peut trouver B_0 relativement compact dans $\mathcal{B}_0$ tel que $K \subset B_0 \subset \overline{B}_0 \subset B$.

En effet, supposons ϕ s.c.i., et soit K un compact avec $K \subset B \in \mathcal{B}_o$. On a donc $K \subset \phi(B)$ et, ϕ étant s.c.i., il existe un compact $K_o \subset B = \phi(B)$ tel que $\phi(G) \supset K$ pour tout ouvert $G \supset K_o$. Comme B est ouvert, on peut trouver un ouvert G_o relativement compact avec $K_o \subset G_o \subset \overline{G}_o \subset B$. On en déduit $K \subset U(G_o) \subset \overline{G}_o \subset B$, et $\phi(G_o) \in \mathcal{B}_o$ vérifie la condition de l'énoncé.

Inversement, supposons cette condition remplie, et soient G un ouvert, K un compact avec $K \subset \phi(G)$. Il existe donc un $B_o \in \mathcal{B}_o$ relativement compact avec $K \subset B_o \subset \overline{B}_o \subset \phi(G) \subset G$. Par suite, pour tout $G' \in \mathcal{G}$, $G' \supset \overline{B}_o$ entraine $\phi(G') \supset \phi(B_o) = B_o \supset K$, et ϕ est s.c.i.

Plus petite majorante s.c.s. d'une ouverture ou d'une fermeture sur $\mathcal{K}$.

D'après la Proposition 7-4-1, si ϕ est une ouverture sur $\mathcal{K}$, il existe une plus petite ouverture s.c.s. et majorant ϕ sur $\mathcal{K}$, à savoir le plus petit prolongement de l'identité sur l'adhérence $\overline{\mathcal{B} \cap \mathcal{K}}$ de $\mathcal{B} \cap \mathcal{K}$ dans $\mathcal{K}$. La recherche des ouvertures possédant de bonnes propriétés conduit au critère suivant :

Proposition 7-4-4.- Soit ϕ une ouverture sur $\mathcal{K}$ et $\mathcal{B}_o$ la famille de ses invariants compacts. On pose $\phi_g(G) = \bigcup \{\phi(K),\ K \in \mathcal{K},\ K \subset G\}$ pour $G \in \mathcal{G}$, et $\phi_k(K) = \bigcap \{\phi_g(G),\ G \in \mathcal{G},\ G \supset K\}$ pour $K \in \mathcal{K}$. Alors ϕ_g est une ouverture sur $\mathcal{G}$ si et seulement si $\mathcal{B}_o$ contient un système fondamental de voisinages de chaque $B \in \mathcal{B}_o$. Lorsqu'il en est ainsi, ϕ_g est une ouverture s.c.i. sur $\mathcal{G}$ et ϕ_k une ouverture s.c.s. sur $\mathcal{K}$. Plus précisément, ϕ_k est la plus petite majorante s.c.s. de ϕ sur $\mathcal{K}$. En particulier, on a $\phi_k = \phi$ si et seulement si ϕ est s.c.s. sur $\mathcal{K}$. Enfin, on a $\phi_g(G) = \bigcup \{\phi_k(K),\ K \in \mathcal{K},\ K \subset G\}$ pour tout $G \in \mathcal{G}$.

En effet, ϕ_g est la restriction à $\mathcal{G}$ du plus petit prolongement $\underline{\phi}$ de la restriction de ϕ à $\mathcal{K}$ qui est une ouverture sur $\mathcal{P}$. On déduit facilement de la condition c/ de la Proposition 7-1-2 que ϕ_g est une ouverture sur $\mathcal{G}$ si et seulement si $\mathcal{B}_o$ possède la propriété indiquée. Cette propriété étant supposée vérifiée, ϕ_g est s.c.i. sur $\mathcal{G}$. En effet, appliquons le critère de la Proposition 7-4-3. Soit B un invariant ouvert de ϕ_g, i.e. $B \in \mathcal{G}$ et $B = \bigcup_{i \in I} B_i$ pour une famille $\{B_i,\ i \in I\} \subset \mathcal{B}_o$. Pour chaque $i \in I$, il existe $G_i \in \mathcal{G}$ et $B_i' \in \mathcal{B}_o$ avec $B_i \subset G_i \subset B_i' \subset B$, d'après la propriété de $\mathcal{B}_o$. Si $K \in \mathcal{K}$ vérifie $K \subset B$, on a donc $K \subset \bigcup B_i \subset \bigcup G_i \subset \bigcup B_i' \subset B$. Pour chaque $i \in I$, on a $\phi_g(G_i) \supset B_i$, donc aussi $K \subset \bigcup \phi_g(G_i)$. Par suite, il existe un nombre fini d'indices $i_1, \dots i_n$ tels que $K \subset \bigcup_{k=1}^{n} \phi_g(G_i) \subset \bigcup_{k=1}^{n} \phi_g(G_i) \subset \bigcup_{k=1}^{n} \overline{\phi_g(G_i)} \subset \bigcup_{i \in I} B_i' \subset B$. L'invariant ouvert $B_o = \bigcup_{k=1}^{n} \phi_g(G_i)$ vérifie donc le critère de la Proposition 7-4-3, et ϕ_g est s.c.i.

Montrons maintenant $\phi_k(K) \in \mathcal{K}$ pour $K \in \mathcal{K}$. En effet, pour tout ouvert $G \supset K$, on peut trouver un ouvert G' relativement compact avec $G \supset \overline{G'} \supset K$. On en déduit $\phi_g(G) \supset \phi(\overline{G'}) \supset \phi_k(K)$, et par suite $\phi_k(K) = \cap \{\phi(\overline{G'}),\ G' \in \mathcal{G},\ G' \supset K\}$ est compact comme intersection de compact.

ϕ_k est alors s.c.s. sur $\mathcal{K}$. En effet, d'après la propriété de l'intersection finie, si $\phi_k = \cap \{\phi(\overline{G}'),\ G' \supset K,\ G'$ relativement compact dans $\mathcal{G}\}$ est disjoint de $F \in \mathcal{F}$, il existe $G' \supset K$ tel que $\phi(\overline{G}')$ et a fortiori $\phi_g(G')$ soit disjoint de F. On a alors $\phi_k(K') \cap F = \emptyset$ pour tout compact $K' \subset G'$, et ϕ est s.c.s.

ϕ_k est manifestement croissante, anti-extensive et majore ϕ sur $\mathcal{K}$. Montrons que ϕ_k est idempotente sur $\mathcal{K}$, d'où résultera que ϕ_k est une ouverture s.c.s. sur $\mathcal{K}$. Soit $K \in \mathcal{K}$. On a $\phi_k\ \phi_k(K) = \cap \{\phi_g(G),\ G \supset \phi_k(K),\ G \in \mathcal{G}\}$. Mais $G \supset \phi_k(K)$ entraine $\phi_g(G) \supset \phi_k(K)$. Car, ϕ_k étant s.c.s., on peut trouver $G' \in \mathcal{G}'$, $G' \supset K$ avec $\phi_k(K') \subset G$ pour tout compact $K' \subset G'$, donc aussi $\phi_g(G') \subset G$ puisque ϕ_k majore ϕ sur $\mathcal{K}$. Par suite, on a $\phi_g(G') \subset \phi_g(G)$, puisque ϕ_g est une ouverture. Mais $G' \supset K$ entraine par définition $\phi_k(K) \subset \phi_g(G')$, donc on a bien $\phi_k(K) \subset \phi_g(G)$. On peut alors écrire :

$$\phi_k\ \phi_k(K) = \cap \{\phi_g(G),\ G \in \mathcal{G},\ \phi_g(G) \supset \phi_k(K)\} \supset \phi_k(K)$$

D'où $\phi_k\ \phi_k(K) = \phi_k(K)$, puisque ϕ_k est anti-extensive, et par suite ϕ_k est idempotente, donc est une ouverture s.c.s. sur $\mathcal{K}$.

On a $\phi_k \supset \phi$ sur $\mathcal{K}$. Si ϕ est s.c.s., cette inclusion devient une égalité. En effet, soient $K \in \mathcal{K}$ et $G \in \mathcal{G}$ avec $\phi(K) \subset G$. Si ϕ est s.c.s., il existe un ouvert $G' \supset K$ avec $\phi(K') \subset G$ pour tout compact $K' \subset G'$, d'où $\phi_g(G') \subset G$ et $\phi_k(K) \subset G$. Ainsi $\phi_k(K) = \cap \{G : G \in \mathcal{G},\ G \supset \phi(K)\}$ est contenue dans $\phi(K)$, d'où l'égalité. Si ϕ n'est pas s.c.s. sur $\mathcal{K}$, toute majorante ϕ' de ϕ s.c.s. sur $\mathcal{K}$ vérifie $\phi_k \subset \phi'_k = \phi'$, et ϕ_k est la plus petite majorante s.c.s. de ϕ sur $\mathcal{K}$. Enfin, $\phi(K) \subset \phi_k(K) \subset \phi_g(G)$ pour tout ouvert $G \supset K$ entraine la dernière affirmation de l'énoncé.

Proposition 7-4-5.- Soit ϕ une ouverture sur $\mathcal{G}$, et $\mathcal{B}_0$ la famille de ses invariants ouverts. On pose $\phi_k(K) = \cap \{\phi(G),\ G \in \mathcal{G},\ G \supset K\}$ pour $K \in \mathcal{K}$, et $\phi_g(G) = \cup \{\phi_k(K),\ K \in \mathcal{K},\ K \subset G\}$ pour $G \in \mathcal{G}$. Alors ϕ_k applique $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{K}$ si et seulement si $\mathcal{B}_0$ contient un système fondamental de voisinages de $\overline{B}$ pour tout B relativement compact dans $\mathcal{B}_0$. Lorsqu'il en est ainsi, ϕ_k est une ouverture s.c.s. sur $\mathcal{K}$ et ϕ_g une ouverture s.c.i. sur $\mathcal{G}$. ϕ_g est même la plus grande minorante s.c.i. de ϕ sur $\mathcal{G}$, et, en particulier, on a $\phi = \phi_g$ si et seulement si ϕ est s.c.i. sur $\mathcal{G}$.

En effet, supposons que ϕ_k applique $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{K}$, soit $B \in \mathcal{B}_0$ relativement compact, et G un ouvert tel que $\overline{B} \subset G$. De $B \subset \overline{B}$ résulte $B \in \phi_k(\overline{B}) \subset \overline{B}$, donc $\phi_k(\overline{B}) = \overline{B}$, puisque $\phi_k(\overline{B})$ est compact. $\overline{B} \subset G$ donne ensuite $\overline{B} = \phi_k(\overline{B}) \subset \phi(G) \subset G$. Comme $\phi(G) \in \mathcal{B}_0$, on voit que $\mathcal{B}_0$ contient un système fondamental de voisinages ouverts de $\overline{B}$. Inversement, supposons que $\mathcal{B}_0$ possède cette propriété. Soit $K \in \mathcal{K}$, et $x \notin \phi_k(K)$, donc $x \notin \phi(G)$ pour un ouvert $G \supset K$. Alors, pour tout ouvert relativement compact G' tel que $K \subset G' \subset \overline{G}' \subset G$, on a $x \notin \overline{\phi(G')}$. En effet, si $x \in \overline{\phi(G')}$, on peut trouver $B \in \mathcal{B}_0$ avec $x \in \overline{\phi(G')} \subset B \subset G$, d'après la propriété de $\mathcal{B}_0$, d'où $x \in \phi(B) \subset \phi(G)$ contrairement à l'hypothèse. On en conclut $x \notin \cap \{\overline{\phi(G')}\ ,\ G' \supset K,\ G' \in \mathcal{G}\}$, donc $x \notin \overline{\phi_k(K)}$. Par suite $\phi_k(K)$ est fermé, donc compact puisque $\phi_k(K) \subset K$.

On vérifie sans difficulté que ϕ_k est croissante et anti-extensive sur $\mathcal{K}$. On a $\phi_k\ \phi_k(K) = \cap \{\phi(G),\ G \in \mathcal{G},\ G \supset \phi_k(K)\}$ pour tout $K \in \mathcal{K}$. Mais $G \supset \phi_k(K)$ entraine $\phi(G) \supset \phi_k(K)$. En effet, d'après ce qui précède, on a $\phi_k(K) = \cap \{\overline{\phi(G')}\ ,\ G' \in \mathcal{G},\ G' \supset K\}$ et il existe donc un ouvert relativement compact $G' \supset K$ tel que $\overline{\phi(G')} \subset G$. Ceci entraine bien $\phi(G') \subset \phi(G)$ et $\phi_k(K) \subset \phi(G)$. On en déduit $\phi_k\ \phi_k(K) \supset \phi_k(K)$; d'où l'égalité. Ainsi ϕ_k est une ouverture s.c.s. sur $\mathcal{K}$. Le reste de la démonstration se conduit comme dans le cas de la Proposition 7-1-6.

En ce qui concerne les <u>fermetures</u>, on a des résultats analogues que nous nous contenterons de citer sans reproduire la démonstration.

<u>Proposition 7-4-6</u>.- Soit ϕ une fermeture sur $\mathcal{K}$, et $\mathcal{B}_0$ la famille de ses invariants compacts. Alors ϕ_g applique $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}$ si et seulement si pour tout $K \in \mathcal{K}$, tout $G \in \mathcal{G}$ et tout $B \in \mathcal{B}_0$ tels que $K \subset G \subset B$ on peut trouver $B' \in \mathcal{B}_0$ et $G' \in \mathcal{G}$ avec $K \subset B' \subset G' \subset B$. Lorsqu'il en est ainsi, ϕ_g est une fermeture s.c.i. sur $\mathcal{G}$, et ϕ_k une fermeture s.c.s. sur $\mathcal{K}$. De plus, ϕ_k est la plus petite majorante s.c.s. de ϕ sur $\mathcal{K}$, et on a $\phi = \phi_k$ si et seulement si ϕ est s.c.s. sur $\mathcal{K}$.

<u>Proposition 7-4-7</u>.- Soit ϕ une fermeture sur $\mathcal{G}$, et $\mathcal{B}_0$ la famille de ses invariants ouverts. Alors ϕ_k applique $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{K}$ si et seulement si pour tout $G \in \mathcal{G}$, tout $K \in \mathcal{K}$ et tout $B \in \mathcal{B}$ tels que $G \subset K \subset B$ il existe $B' \in \mathcal{B}_0$ te $K' \in \mathcal{K}$ avec $G \subset B' \subset K' \subset B$. S'il en est ainsin ϕ_k est une fermeture s.c.s. sur $\mathcal{K}$ et ϕ_g une fermeture s.c.i. sur $\mathcal{G}$. De plus, ϕ_g est la plus grande minorante s.c.i. de ϕ sur $\mathcal{G}$, et on a $\phi = \phi_g$ si et seulement si ϕ est s.c.i. sur $\mathcal{G}$.

Dans ces énonsés, ϕ_k et ϕ_g sont définis exactement comme dans les Propositions 7-1-6 et 7-1-7.

Les ouvertures compactes.

Nous dirons qu'une ouverture ϕ sur $\mathcal{P}$ est une <u>ouverture compacte</u> si elle vérifie les conditions suivantes :

a/ - ϕ est le plus petit prolongement de sa restriction à $\mathcal{K}$.

b/ - ϕ est une ouverture s.c.s. sur $\mathcal{K}$, s.c.s. sur $\mathfrak{F}$ et s.c.i. sur $\mathcal{G}$.

Cherchons les conditions que doit vérifier ϕ pour être une bonne ouverture. Pour cela, notons quelques remarques préliminaires :

Tout d'abord, si ϕ est une ouverture sur $\mathcal{K}$, désignons par $\mathcal{B}$ la famille de ses invariants et posons $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B} \cap \mathcal{K}$. D'après la Proposition 7-1-2, on a $\bar{B} \in \mathcal{B}_0$ pour tout $B \in \mathcal{B}$ relativement compact. S'il existe une ouverture ϕ' sur $\mathfrak{F}$ prolongeant la restriction de ϕ à $\mathcal{K}$, la famille de ses invariants $\mathcal{B}'$ contient la famille $\mathcal{B}'_0$ stable pour la réunion fermée engendrée par $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B} \cap \mathcal{K}$. Désignons alors par ϕ'_0 le plus petit prolongement de l'identité sur $\mathcal{B}'_0$. D'après la Proposition 7-1-2, ϕ'_0 est une ouverture sur $\mathfrak{F}$, et majore manifestement ϕ sur $\mathcal{K}$. En fait, on a $\phi'_0 = \phi$ sur $\mathcal{K}$. En effet, pour $K \in \mathcal{K}$, $\phi'_0(K)$ est la réunion fermée $\bar{B}'$ des $B \in \mathcal{B}_0$ contenus dans K. Mais $\bar{B} \in \mathcal{B}'_0$ entraine $\bar{B}' = \overline{\bigcup_{i \in I} B_i}$ pour une famille $\{B_i, i \in I\} \subset \mathcal{B}_0$. $\bar{B}' \subset K$ entraine ensuite $\bar{B} \in \mathcal{B}_0$, d'après la propriété de $\mathcal{B}_0$, et par suite $\phi'_0(K) = \phi(K)$. Mais on remarquera que ce prolongement ϕ'_0 sur $\mathfrak{F}$ n'est pas nécessairement s.c.s. sur $\mathfrak{F}$, même si ϕ est s.c.s. sur $\mathcal{K}$. Enonçons :

<u>Proposition 7-4-8</u>.- Soit ϕ une ouverture sur $\mathcal{K}$ et $\mathcal{B}_0$ la famille de ses invariants compacts. Il existe une plus petite ouverture ϕ' sur $\mathfrak{F}$ prolongeant la restriction de ϕ à $\mathcal{K}$, et la famille $\mathcal{B}'_0$ des invariants fermés de ϕ' est la famille stable pour la réunion fermée engendrée par $\mathcal{B}_0$.

Cherchons maintenant à quelle condition une ouverture ϕ sur $\mathcal{K}$ admet un prolongement par une ouverture ϕ' s.c.s. sur $\mathfrak{F}$. Si $\mathcal{B}_0$ est la famille des invariants compacts de ϕ et $\mathcal{B}'_0$ celle des invariants fermés de ϕ', $\mathcal{B}'_0$ est fermée dans $\mathfrak{F}$ d'après la Proposition 7-4-2, et on a $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}'_0 \cap \mathcal{K}$ puisque ϕ' prolonge ϕ. Par suite $\mathcal{B}_0$ est fermé dans $\mathcal{K}$ pour la topologie induite sur $\mathcal{K}$ par celle de $\mathfrak{F}$. Cela implique d'ailleurs que $\mathcal{B}_0$ est fermé dans $\mathcal{K}$ pour la topologie myope, donc que ϕ est une ouverture s.c.s. sur $\mathcal{K}$. Inversement, supposons $\mathcal{B}_0$ fermée dans $\mathcal{K}$ pour la topologie induite par $\mathfrak{F}$, et posons $\mathcal{B}'_0 = \bar{\mathcal{B}}_0$ (adhérence de $\mathcal{B}_0$ dans $\mathfrak{F}$). On a alors $\mathcal{B}'_0 \cap \mathcal{K} = \mathcal{B}_0$, et le plus petit prolongement ϕ' de l'identité sur $\mathcal{B}'_0$ est donc une ouverture s.c.s. sur $\mathfrak{F}$ prolongeant ϕ. On note d'ailleurs que ϕ' est la plus petite ouverture s.c.s. sur $\mathfrak{F}$ prolongeant ϕ. Par suite :

<u>Proposition 7-4-9</u>.- Soit ϕ une ouverture sur $\mathcal{K}$ et $\mathcal{B}_0$ la famille de ses invariants compacts. ϕ admet un prolongement par une ouverture s.c.s. sur $\mathcal{F}$ si et seulement si $\mathcal{B}_0$ est fermée dans $\mathcal{K}$ pour la topologie induite par celle de $\mathcal{F}$, et ϕ est alors s.c.s. sur $\mathcal{K}$. La plus petite ouverture ϕ' s.c.s. sur $\mathcal{F}$ prolongeant ϕ admet la famille d'invariants fermés $\mathcal{B}'_0 = \overline{\mathcal{B}}_0$, adhérence de $\mathcal{B}_0$ dans $\mathcal{F}$.

<u>COROLLAIRE</u> - Soit ϕ une ouverture s.c.s. sur $\mathcal{F}$, et $\mathcal{B}'_0$ la famille de ses invariants fermés. ϕ coïncide avec le plus petit prolongement s.c.s. sur $\mathcal{F}$ de sa restriction à $\mathcal{K}$ si et seulement si on a $\mathcal{B}'_0 = \overline{\mathcal{B}'_0 \cap \mathcal{K}}$, autrement dit si tout invariant fermé est limite dans $\mathcal{F}$ d'invariants compacts.

Passons maintenant à la caractérisation des ouvertures compactes. Soit $\mathcal{B}_0$ la famille des invariants compacts d'une ouverture ϕ s.c.s. sur $\mathcal{K}$ coïncidant sur $\mathcal{P}$ avec le plus petit prolongement de sa restriction à $\mathcal{K}$. Comme ϕ est s.c.s., $\mathcal{B}_0$ est nécessairement fermée dans $\mathcal{K}$ (Proposition 7-4-1). D'après la Proposition 7-1-10, ϕ est s.c.s. sur $\mathcal{F}$ seulement si $\mathcal{B}_0$ est fermée dans $\mathcal{K} \cap \mathcal{F}$ pour la topologie induite par $\mathcal{F}$, mais cette condition n'est pas suffisante (car le plus petit prolongement de ϕ sur $\mathcal{F}$ n'est pas en général identique à son plus petit prolongement s.c.s.). Désignons par $\mathcal{B}'_0 = \overline{\mathcal{B}}_0$ l'adhérence de $\mathcal{B}_0$ dans $\mathcal{F}$, et par ϕ' l'ouverture s.c.s. sur $\mathcal{F}$ associée à la famille $\mathcal{B}'_0$. Comme $\mathcal{B}'_0$ est fermée dans $\mathcal{F}$, on déduit du théorème de Zorn qu'il existe des éléments minimaux dans $\mathcal{B}'_0$. Plus précisément, pour tout $B \in \mathcal{B}'_0$ et tout $x \in B$, il existe $M \in \mathcal{B}'_0$ avec $x \in M \subset B$ tel qu'aucun fermé contenant x et strictement inclus dans B ne soit dans $\mathcal{B}'_0$. Désignons par $\mathcal{M}$ la famille des éléments minimaux de $\mathcal{B}'_0$. Si l'on a $\phi'(F) = \cup \{\phi(K),\ K \subset F,\ K \in \mathcal{K}\}$ pour tout $F \in \mathcal{F}$, les éléments minimaux sont compacts, soit $\mathcal{M} \subset \mathcal{K}$. En effet, pour $x \in \phi'(F)$, il existe $K \in \mathcal{K}$ et $M \in \mathcal{M}$ avec $x \in M \subset \phi(K)$, donc $M \in \mathcal{K}$. Inversement, on a toujours $\phi'(F) = \cup \{\phi(M),\ M \subset F,\ M \in \mathcal{M}\}$, et par suite $\mathcal{M} \subset \mathcal{K}$ entraine $\phi' = \phi$ sur $\mathcal{F}$.

Supposons ces conditions vérifiées, et cherchons maintenant moyennant quelles conditions supplémentaires ϕ est de plus s.c.i. sur $\mathcal{G}$. D'après la Proposition 7-4-4, il en sera ainsi si et seulement si $\mathcal{B}_0$ contient un système fondamental de voisinages de chaque $B \in \mathcal{B}_0$. En résumé :

<u>Proposition 7-4-10</u>.- Une ouverture ϕ est compacte si et seulement si elle est de la forme $A \to \phi(A) = \cup \{B\ ;\ B \subset A,\ B \in \mathcal{B}_0\}$ pour une famille $\mathcal{B}_0$ de compacts possédant les propriétés suivantes :

a/ - $\mathcal{B}_0$ est fermée dans $\mathcal{K} \cap \mathcal{F}$ pour la topologie induite par $\mathcal{F}$.

b/ - $\mathcal{B}_0$ contient un système fondamental de voisinages de chaque $B \in \mathcal{B}_0$.

c/ - Les éléments minimaux de l'adhérence $\mathcal{B}'_0$ de $\mathcal{B}_0$ dans $\mathcal{F}$ sont compacts.

<u>Les Granulométries s.c.s. et compactes.</u>

On rappelle qu'une granulométrie ϕ_λ est s.c.s. sur $\mathcal{F}$ si l'application $(\lambda, F) \to \phi_\lambda(F)$ est une application s.c.s. de $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$, et qu'elle est compacte si l'ouverture $A \to \phi_\lambda(A)$ est compacte pour tout $\lambda > 0$. Lorsqu'une granulométrie ϕ_λ possède ces deux propriétés, on peut définir les granulométries $\phi_\lambda(A)$ et $\phi_\lambda(A^c)$ d'un EFA A et de son complémentaire A^c dans les mêmes termes et avec les mêmes propriétés que dans le cas des granulométries euclidiennes (Paragraphe 3). La proposition 7-4-10 suffit pour caractériser les granulométries compactes. Il reste à donner le critère que doit vérifier une granulométrie ϕ_λ pour être s.c.s. Notons d'abors que cette propriété implique que $F \to \phi_\lambda(F)$ soit une ouverture s.c.s. sur $\mathcal{F}$ pour chaq e $\lambda > 0$, donc, d'après la Proposition 7-4-1, que la famille $\mathcal{B}_\lambda$ des invariants de ϕ_λ soit <u>stable pour la fermeture topologique</u> et que $\mathcal{B}_\lambda \cap \mathcal{F}$ <u>soit fermée dans $\mathcal{F}$</u>. Dans ce qui suit, nous supposerons cette condition vérifiée et nous écrirons $\mathcal{B}_\lambda$ au lieu de $\mathcal{B}_\lambda \cap \mathcal{F}$. Notons un premier résultat :

<u>Proposition 7-4-11</u>.- Soit ϕ_λ une granulométrie sur $\mathcal{K}$ (resp. sur $\mathcal{F}$) telle que pour tout $\lambda > 0$ l'ouverture ϕ_λ soit s.c.s. sur $\mathcal{K}$ (resp. sur $\mathcal{F}$). Alors la restriction à $\mathcal{K}$ (resp. à $\mathcal{F}$) de la régularisée supérieure $\check{\phi}_\lambda$ est encore s.c.s. sur $\mathcal{K}$ (resp. sur $\mathcal{F}$) et on a pour tout $A \in \mathcal{K}$ (resp. $\in \mathcal{F}$) et tout $\lambda_o > 0$ la relation :

$$\check{\phi}_{\lambda_o}(A) = \bigcap_{\mu < \lambda_o} \check{\phi}_\mu(A) = \bigcap_{\mu < \lambda_o} \phi_\mu(A)$$

En effet, désignons par $\mathcal{B}_\lambda$ la famille des invariants compacts (resp. fermés) de l'ouverture ϕ_λ. D'après ce qui précède, $\mathcal{B}_\lambda$ est fermée dans $\mathcal{K}$ (resp. dans $\mathcal{F}$).

Pour $\lambda_o > 0$ et $A \in \mathcal{K}$ (resp. $\in \mathcal{F}$), posons

$$A_{\lambda_o} = \bigcap_{\lambda < \lambda_o} \phi_\lambda(A)$$

On a déjà noté l'inclusion $A_{\lambda_o} \supset \check{\phi}_{\lambda_o}(A)$. Montrons l'inclusion inverse, et pour cela montrons d'abord $A_{\lambda_o} \in \check{\mathcal{B}}_{\lambda_o}$, c'est-à-dire, puisque A_{λ_o} est compact (resp. fermé) $A_{\lambda_o} \in \mathcal{B}_\mu$ pour tout $\mu < \lambda_o$. Pour $\lambda \uparrow \lambda_o$, on a $\phi_\lambda(A) \to A_{\lambda_o}$ dans $\mathcal{K}$ (resp. dans $\mathcal{F}$). Comme ϕ_μ est s.c.s., on en déduit $\overline{\lim}\, \phi_\mu\, \phi_\lambda(A) \subset \phi_\mu(A_{\lambda_o})$ pour $\lambda \uparrow \lambda_o$ et $\mu < \lambda_o$. Mais $\mu < \lambda < \lambda_o$ entraine $\phi_\mu\, \phi_\lambda(A) = \phi_\lambda(A)$, d'après l'axiome 4 des granulométries, donc $A_{\lambda_o} = \lim \phi_\lambda(A) \subset \phi_\mu(A_{\lambda_o})$. Comme ϕ_μ est une ouverture, il en résulte $A_{\lambda_o} = \phi_\mu(A_{\lambda_o})$, soit $A_{\lambda_o} \in \mathcal{B}_\mu$ pour tout $\mu < \lambda_o$, donc $A_{\lambda_o} \in \check{\mathcal{B}}_{\lambda_o}$ et $\check{\phi}_{\lambda_o}(A_{\lambda_o}) = A_{\lambda_o}$. Ce point établi, il en résulte $\check{\phi}_{\lambda_o}(A) = A_{\lambda_o}$. En effet, $A_{\lambda_o} \subset A$ donne $A_{\lambda_o} = \check{\phi}_{\lambda_o}(A_{\lambda_o}) \subset \check{\phi}_{\lambda_o}(A) \subset A_{\lambda_o}$, d'où l'égalité. En particulier, $\check{\phi}_{\lambda_o}$ est une ouverture sur $\mathcal{K}$ (resp. sur $\mathcal{F}$). Les invariants compacts (fermés) de cette ouverture sont alors les $A_{\lambda_o} = \check{\phi}_{\lambda_o}(A)$, $A \in \mathcal{K}(\in \mathcal{F})$ c'est-à-dire les éléments de $\bigcap_{\lambda>\lambda_o} \mathcal{B}_\lambda$. Mais cette famille est fermée dans $\mathcal{K}$ (dans $\mathcal{F}$) comme intersection de fermés. Donc $\check{\phi}_{\lambda_o}$ est s.c.s. d'après la Proposition 4-7-1.

<u>Proposition 7-4-12</u>.- Pour une granulométeie ϕ_λ, $\lambda > 0$ sur $\mathcal{K}$ ou $\mathcal{F}$ telle que ϕ_{λ_o} soit une ouverture s.c;s. pour chaque $\lambda_o > 0$, les quatre propriétés suivantes sont équivalentes :

1/ - La granulométrie ϕ_λ est s.c.s. sur $\mathcal{K}$ (ou $\mathcal{F}$).

2/ - Pour tout $A \in \mathcal{K}$ (ou $\mathcal{F}$), l'application $\lambda \to \phi_\lambda(A)$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathcal{K}$ (ou $\mathcal{F}$) est s.c.s.

3/ - On a $\phi_\lambda(A) = \bigcap_{\mu<\lambda} \phi_\lambda(A)$ pour tout $\lambda > 0$ et tout $A \in \mathcal{K}$ (ou $\mathcal{F}$).

4/ - La granulométrie ϕ_λ est régulière supérieurement.

Il est clair que 1/ entraine 2/. L'implication 2 $\Rightarrow$ 3 est évidente : si $\lambda \uparrow \lambda_o$, $\phi_\lambda(A)$ converge vers $\bigcap_{\lambda<\lambda} \phi_\lambda(A) = A_{\lambda_o}$, d'où $A_{\lambda_o} \subset \phi_{\lambda_o}(A)$ puisque ϕ_λ est s.c.s. en λ, et $A_{\lambda_o} = \phi_{\lambda_o}(A)$ puisque l'inclusion inverse est toujours vraie. De même 3 $\Rightarrow$ 4, puisque $A_\lambda \supset \phi_\lambda(A) \supset \phi_\lambda(A)$, d'où $A_\lambda = \phi_\lambda(A) = \phi_\lambda(A)$ dès que 3 est vraie.

En sens inverse, 4 entraine 3, d'après la Proposition 7-4-11. Montrons que 3 entraine 2. Si $\lambda_n \to \lambda_o > 0$, soit $\mu < \lambda_o$. Pour n assez grand, on a $\mu < \lambda_n$ et, pour tout A dans $\mathcal{K}$ (ou $\mathcal{F}$), $\phi_\mu(A) \supset \phi_{\lambda_n}(A)$, donc $\overline{\lim}\, \phi_{\lambda_n}(A) \subset \phi_\mu(A)$, et par suite :

$$\overline{\lim}\, \phi_{\lambda_n}(A) \subset \bigcap_{\mu<\lambda_o} \phi_\mu(A)$$

d'où la semi-continuité en λ dès que 3 est vérifiée.

Montrons enfin 2 $\Rightarrow$ 1. Supposons 2 vérifiée. Soit $\lambda_n \to \lambda_o$ et $\lambda_n \to A$ dans $\mathcal{K}$ (ou $\mathcal{F}$). Prenons $\mu < \lambda_o$, donc $\lambda_n > \mu$ pour n assez grand. On a $\phi_\mu(\phi_{\lambda_n}(A_n)) = \phi_{\lambda_n}(A_n)$ d'après l'axiome 4. Mais ϕ_μ est s.c.s. par hypothèse. Si A_o est une valeur d'adhérence de la suite $\phi_{\lambda_n}(A_n)$, et si $\phi_{\lambda_{n_k}}(A_{n_k})$ converge vers A_o, on a donc

$$A_o = \lim \phi_{\lambda_{n_k}}(A_{n_k}) \subset \phi_\mu(A_o) \subset A_o$$

d'où l'égalité $A_o = \phi_\mu(A_o)$ pour tout $\mu < \lambda_o$. Comme ϕ_λ est régulière supérieurement (puisque 2 $\Rightarrow$ 3), on a aussi $A_o = \phi_{\lambda_o}(A_o) \in \mathcal{B}_{\lambda_o}$. Mais $\phi_{\lambda_n}(A_n) \subset A_n$ entraine $A_o \subset A$, d'où $A_o = \phi_{\lambda_o}(A_o) \subset \phi_{\lambda_o}(A)$. Comme ceci est vrai pour toute valeur d'adhérence A_o de la suite $\phi_{\lambda_n}(A_n)$, il en résulte $\overline{\lim}\, \phi_{\lambda_n}(A_n) \subset \phi_{\lambda_o}(A)$ et 1 est vérifié.

<u>REMARQUE</u> - Si ϕ_λ est une granulométrie quelconque sur $\mathcal{K}$ ou $\mathcal{F}$, on peut en déduire une granulométrie s.c.s. : $\mathcal{B}_\lambda$ désignant la famille des invariants de ϕ_λ, on forme d'abord la fermeture $\overline{\mathcal{B}}_\lambda$ de $\mathcal{B}_\lambda$ dans $\mathcal{K}$ ou $\mathcal{F}$. On vérifie sans peine que $\overline{\mathcal{B}}_\lambda$ est stable pour $\cup$ et vérifie la condition $\lambda \leq \mu \Rightarrow \overline{\mathcal{B}}_\mu \subset \overline{\mathcal{B}}_\lambda$. La famille $\overline{\phi}_\lambda$ des ouvertures associées aux $\overline{\mathcal{B}}_\lambda$ est donc une granulométrie, et $\overline{\phi}_\lambda$ est s.c.s. à λ fixé. Il suffit ensuite de prendre la régularisée supérieure $\check{\overline{\phi}}_\lambda$ pour obtenir une granulométrie s.c.s. Plus précisément, $\check{\overline{\phi}}_\lambda$ est la plus petite granulométrie s.c.s. majorant ϕ_λ sur $\mathcal{K}$ (ou sur $\mathcal{F}$).

7-5 OUVERTURES ET FERMETURES S.C.I.

Les applications s.c.i. de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$ ou de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{K}$ sont moins intéressantes que les applications s.c.s. Il convient pourtant d'en dire un mot, ne serait-ce que pour aborder le cas des applications continues.

<u>Proposition 7-5-1</u>.- Une fermeture ϕ sur $\mathcal{F}$ (resp. sur $\mathcal{K}$) est s.c.i. si et seulement si la famille $\mathcal{B}$ des invariants fermés (resp. compacts) de ϕ est fermée dans $\mathcal{F}$ (dans $\mathcal{K}$).

Supposons ϕ s.c.i. de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$. Si $F_n \in \mathcal{B}$ et $F_n \to F$ dans $\mathcal{F}$, on a $\phi(F) \subset \underline{\lim}\, \phi(F_n) = \lim F_n = F$, et l'égalité puisque ϕ est isotone, donc $\mathcal{B}$ est fermé. Même démonstration pour ϕ s.c.i. de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{K}$.

Inversement, supposons $\mathcal{B}$ fermée dans $\mathcal{F}$. Soit $F_n \in \mathcal{F}$, $F_n \to F$ dans $\mathcal{F}$ avec une suite partielle $\{\phi(F_{n_k})\}$ convergeant vers F_o. De $F_{n_k} \subset \phi(F_{n_k})$ résulte $F \subset F_o$. Mais $F_o \in \mathcal{B}$ puisque $\mathcal{B}$ est fermée, donc on a aussi $\phi(F) \subset F_o$ et $\phi(F) \subset \underline{\lim}\, \phi(F_n)$: ϕ est bien s.c.i. Démonstration analogue pour $\mathcal{B}$ fermée dans $\mathcal{K}$.

<u>REMARQUE</u> - D'après les propositions 7-4-2 et 7-5-1, une fermeture ϕ sur $\mathcal{K}$ est continue si et seulement si $\mathcal{B}$ est fermée dans $\mathcal{K}$ et contient un système fondamental de voisinages de chaque $B \in \mathcal{B}$.

<u>EXEMPLE</u> - Dans $\mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$, la fermeture convexe est continue. Ou encore, dans $\mathcal{K}(\mathbb{R}^2)$, l'application associant à chaque $K \in \mathcal{K}$ le plus petit triangle équilatéral, ou le plus petit rectangle etc... qui le contient (vérification immédiate à partir de la famille $\mathcal{B}$ des invariants).

Passons maintenant aux ouvertures s.c.i., et pour celà posons d'abord un lemme.

<u>LEMME 7-5-1</u> - Soit $\mathcal{J}$ la famille des parties finies d'un espace LCD E. Toute application ϕ croissante s.c.i. de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{F}$ admet un prolongement unique s.c.i. ϕ' de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$ défini par :

$$\phi'(F) = \overline{\bigcup \{\phi(B) \; ; \; B \in \mathcal{J} \; , \; B \subset F\}} \qquad (F \in \mathcal{F})$$

Si le prolongement s.c.i. existe, il est obligatoirement de cette forme, car la famille filtrante croissante des $B \subset F$, $B \in \mathcal{J}$ converge vers F dans $\mathcal{F}$, d'où $\phi'(F) \subset \underline{\lim}\ \phi(B)$. Mais la famille filtrante des $\phi(B)$ converge vers $\overline{\bigcup \phi(B)}$, et cette limite est $\subset \phi'(F)$, puisque $B \subset F$ donne $\phi(B) \subset \phi'(F)$. D'où l'égalité.

Inversement, supposons ϕ s.c.i. de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{F}$. L'application ϕ' définie par la formule du lemme prolonge ϕ de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$. On le voit en reprenant le raisonnement précédent dans le cas d'un compact. Soit alors F_n une suite convergeant vers F dans $\mathcal{F}$, et x un point de $\bigcup \{\phi(B) \; ; \; B \in \mathcal{J} \; , \; B \subset F\}$. On a donc une partie finie $B \in \mathcal{J}$ avec $B \subset F$ et $x \in \phi(B)$, soit $B = \{x_1, ..x_k\}$. Pour chaque $i \in [1,k]$, on peut trouver une suite $y_n^i \in F_n$ avec $y_n^i \to x_i$, puisque $F_n \to F$. Posons $\{x_n^i, \; i = 1,...K\} = B_n \in \mathcal{J}$. On a $B_n \subset F_n$, et B_n converge vers B dans $\mathcal{K}$. Comme ϕ est s.c.i. sur $\mathcal{K}$ il en résulte $\phi(B) \subset \underline{\lim}\ \phi(B_n) \subset \underline{\lim}\ \phi'(F_n)$ et par suite $x \in \underline{\lim}\ \phi'(F_n)$. Ainsi, on a :

$$\bigcup \{\phi(B) \; ; \; B \in \mathcal{J} \; , \; B \subset F\} \subset \underline{\lim}\ \phi'(F_n)$$

Comme $\underline{\lim}\ \phi'(F_n)$ est un ensemble fermé, il en résulte $\phi'(F) \subset \underline{\lim}\ \phi'(F_n)$, et ϕ' est bien s.c.i. de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$.

<u>Proposition 7-5-2</u>.- Une ouverture ϕ de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{K}$ (ou de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$) est s.c.i. si et seulement si la famille $\mathcal{B}$ des invariants compacts (ou fermés) est engendrée (par réunion infinie fermée) par une famille $\mathcal{B}_o$ d'ensembles finis possédant la propriété suivante : pour tout $B_o = \{x_1, ..x_k\} \in \mathcal{B}_o$, on peut trouver des voisinages $G_1, ..G_k$ des points $x_1, ..x_k$ avec $\{y_1, ..y_k\} \in \mathcal{B}_o$ dès que $y_i \in G_i$, $i = 1,2,..k$.

En effet, toute partie finie $B \in \mathcal{J}$ a son image $\phi(B) \subset B$ dans $\mathcal{J}$ et le lemme 3-5-1 montre que $\mathcal{B}$ admet bien un système de générateurs finis $\mathcal{B}_o$ si ϕ est s.c.i. Soit $B_o = \{x_1, ..x_k\} \in \mathcal{B}_o$, et $G_1', ..G_k'$ des voisinages disjoints des x_i. Comme $\phi(B_o) = B_o$ rencontre les G_i', on peut trouver des ouverts G_i en nombre fini n rencontrant B_o tels que $A \cap G_j \neq \emptyset \Rightarrow \phi(A) \cap G_i' \neq \emptyset$. Comme $\phi(A)$ comporte au moins k points, il en est de même de A, et $n \geq k$. Comme B_o comporte k points et rencontre les G_j (que l'on peut toujours supposer disjoints)on a $n \leq k$, d'où $n = k$. Les G_j, $j = 1,..k$ peuvent être ordonnées de manière à ce que $x_i \in G_i$. pour tout $A = \{y_1, ..y_k\}$ avec $y_i \in G_i$, on a $\phi(A) \cap G_i' \neq \emptyset$

pour chaque i, donc $\phi(A)$ comporte au moins k points distincts. Mais $\phi(A) \subset A$ entraîne alors $A = \phi(A) \in \mathcal{B}$, et la condition de l'énoncé est vérifiée.

Inversement, supposons cette condition vérifiée, et montrons que ϕ est s.c.i. Pour tout $F \in$ on a par hypothèse

$$\phi(F) = \bigcup \{B \; ; \; B \subset F \, , \, B \in \mathcal{B}_o\} \qquad (\mathcal{B}_o \subset \mathcal{J})$$

Soit F_n une suite convergeant vers F dans $\mathcal{F}$, et $x \in \phi(F)$ tel que l'on ait $x \in B_o$ pour un $B_o = \{x_1, ..x_k\} \in \mathcal{B}_o$. On peut trouver des suites $\{y_{in}\} \subset F_n$, $y_{in} \to x_i$ $(i = 1,2,..k)$. D'après la condition de l'énoncé, on a $B_n = \{y_{1,n} \, ..y_{k,n}\} \in \mathcal{B}_o$ pour n assez grand, $B_n \subset F_n$, et, comme x est l'un des points de B_o, il existe $x_n \in B_n \subset F_n$ avec $x_n \to x$. On a donc $x_n \in \phi(F_n)$, puisque $B_n \in \mathcal{B}_o$, et $x_n \to x$, c'est-à-dire $x \in \underline{\lim}\, \phi(F_n)$.

Ainsi l'union non fermée des $B \subset F$, $B \in \mathcal{B}_o$ est contenue dans le fermé $\underline{\lim}\, \phi(F_n)$. Il en résulte bien $\phi(F) \subset \underline{\lim}\, \phi(F_n)$, et ϕ est s.c.i.

<u>COROLLAIRE</u> - Si E est connexe, les seules ouvertures continues de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{K}$ (ou de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$) sont l'identité ou l'application triviale $A \to \phi(A) = \emptyset$.

Soit ϕ une ouverture non triviale de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$. Sa restriction à $\mathcal{K}$ est une ouverture de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{K}$, puisque $\phi(K) \subset K$, et elle est continue sur $\mathcal{K}$ pour la topologie de $\mathcal{K}$ dès que ϕ est continue sur $\mathcal{F}$. On peut donc se limiter à une ouverture ϕ continue de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{K}$. La famille $\mathcal{B}$ des invariants compacts est fermée dans $\mathcal{K}$, d'après la proposition 7-4-1, et engendrée par un système $\mathcal{B}_o$ de parties finies possédant la propriété de la proposition 7-5-2.

Soit $\{x_1, x_2, ..x_k\} \in \mathcal{B}_o$. D'après la proposition 7-5-2, il existe un ouvert $G \ni x_k$ tel que $\{x_1, ..x_{k-1} \; y\} \in \mathcal{B}_o$ pour tout $y \in G$. Soit G_k l'ouvert maximal tel que cette propriété soit vraie, c'est-à-dire l'union de tous les $G \in \mathcal{G}$ qui conviennent, et soit z un point de la frontière de G_k. Comme $\mathcal{B}$ est fermé et que $\{x_1, ..x_{k+1} \; z\}$ est limite d'une suite $\{x_1, ..x_{k-1}, z_n\}$, $z_n \in G_k$, on a encore $\{x_1, ..x_{k-1}, z\} \in \mathcal{B} \cap \mathcal{J} = \mathcal{B}_o$.

On peut donc trouver un voisinage ouvert G' de z avec $\{x_1 \, .. \, x_{k-1}, y\} \in \mathcal{B}_o$ pour $y \in G'$. Mais on a alors $G' \subset G_k$, d'après la maximalité de G_k, et ceci contredit $z \in \partial G$. Donc G_k n'a pas de point frontière, et, si E est connexe, $G_k = E$. Par conséquent, on peut prendre $y = x_{k-1}$, et l'ensemble à k-1 éléments distincts $\{x_1, ..x_{k-1}\}$ est dans $\mathcal{B}_o$. De proche en proche, on montre de même $\{x_1\} \in \mathcal{B}_o$, et le voisinage maximal G_1 de x_1 tel que $\{y\} \in \mathcal{B}_0$ pour $y \in G_1$ n'a pas de point frontière et coïncide avec E. Comme $\{x\}$ est invariant pour tout $x \in E$, on a $\mathcal{B} = \mathcal{K}(E)$, et ϕ est l'identité sur $\mathcal{K}$. Le seul prolongement continu possible de ϕ sur $\mathcal{F}$ est alors l'identité sur $\mathcal{F}$, ce qui achève la démonstration.

Indiquons quelques résultats complémentaires relatifs à $\mathbb{R}^d$.

<u>Proposition 7-5-3</u>.- Si $\mathcal{A}$ est une partie de $\mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$ stable pour l'addition de Minkowski, les seules ouvertures sur $\mathcal{A}$ compatibles avec l'addition de Minkowski $\oplus$ sont l'identité et l'application triviale $\phi(K) = \emptyset$ sur $\mathcal{A}$.

Soit, en effet, ϕ une ouverture sur $\mathcal{K}$ vérifiant $\phi(K \oplus K') = \phi(K) \oplus \phi(K')$. En particulier, $\phi(\{0\}) = \phi(\{0\}) \oplus \phi(\{0\})$, d'où $\phi(\{0\}) = \{0\}$ ou $\emptyset$ puisque $\phi(\{0\})$ est compact. Si $\phi(\{0\}) = \emptyset$, on a $\phi(K \oplus \{0\}) = \phi(K) \oplus \emptyset = \emptyset$ pour tout compact K, et ϕ est l'application triviale. Supposons donc $\phi\{0\} = \{0\}$. Il en résulte, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ $\phi(\{x\}) \oplus \phi(\{-x\}) = \phi(\{x+(-x)\}) = \{0\}$. Donc $\phi(\{x\})$ n'est pas vide et est réduit à un seul élément. Comme $\phi\{x\} \subset \{x\}$, puisque ϕ est une ouverture, $\phi(\{x\}) = \{x\}$ et ϕ est l'identité.

<u>Proposition 7-5-4</u>.- Sur $\mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$, toute fermeture ϕ compatible avec l'addition de Minkowski est continue, compatible avec les translations, compatible sur $C(\mathcal{K})$ avec les homothéties de module positif, laisse invariants les ensembles réduits à un point, et applique l'espace $C(\mathcal{K})$ des convexes compacts dans lui-même. Une fermeture ϕ sur $\mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$ est compatible avec $\oplus$ si et seulement si la famille $\mathcal{B}$ des invariants est stable pour les translations, l'addition de Minkowski et l'intersection infinie, et contient une suite croissante B_k dont la réunion est $\mathbb{R}^d$.

Soit ϕ une fermeture sur $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ vérifiant $\phi(K \oplus K') = \phi(K) \oplus \phi(K')$.

a/ - On a $\phi(\{x\}) = \{x\}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, et ϕ est compatible avec les translations. En effet, $\{0\} = \{0\} \oplus \{0\}$ donne tout d'abord $\phi(\{0\}) = \phi(\{0\}) \oplus \phi(\{0\})$. Comme $\phi(\{0\})$ est compact et contient $\{0\}$, il en résulte $\phi(\{0\}) = \{0\}$. On en déduit $\{0\} = \phi(\{x\} \oplus \{-x\}) = \phi(\{x\}) \oplus \phi(\{-x\})$ pour $x \in \mathbb{R}^d$. Donc $\phi(\{x\})$ est réduit à un point, et $\{x\} \subset \phi(\{x\})$ donne $\phi(\{x\}) = \{x\}$. Pour tout compact K, on a alors $\phi(K \oplus \{x\}) = \{x\} \oplus \phi(K)$, et ϕ est compatible avec les translations.

b/ - Pour $A \in C(\mathcal{K})$, $\phi(A)$ est convexe, et $\phi(rA) = r\phi(A)$ pour r rationnel ≥ 0. En effet, si $A \in C(\mathcal{K})$, on a $A = \frac{1}{n} A^{\oplus n}$, d'où $\phi(A) = \phi(\frac{A}{n})^{\oplus n}$. Par suite $\phi(A)$ est indéfiniment divisible. $\phi(A)$ est donc convexe (Théorème 1-5-1). On a alors $\phi(A) = \phi(\frac{A}{n})^{\oplus n} = n\ \phi(\frac{A}{n})$, puis, en changeant A en nA :

$\phi(nA) = n\,\phi(A)$. Enfin, en changeant A en A/k, k entier positif :

$$\phi(\tfrac{n}{k}\,A) = n\,\phi(\tfrac{A}{k}) = \tfrac{n}{k}\,\phi(A)$$

c/ - ϕ est continu sur $\mathcal{K}$.

Désignons par $B_{1/n}$ la boule de centre O et de rayon 1/n. D'après b/, on a $\phi(B_{1/n}) = (1/n)\phi(B_1)$. Comme $\phi(B_1)$ est compact, pour tout η donné > 0, on peut trouver N_o avec $\phi(B_{1/n}) = (1/n)\phi(B_1) \subset B_\eta$. pour $n \geq N_o$.

Soit alors A_n une suite convergeant vers A dans $\mathcal{K}$. Pour n assez grand, on a $A_n \subset A \oplus B_{1/N_o}$ et $A \subset A_n \oplus B_{1/N_o}$, d'où aussi :

$$\phi(A_n) \subset \phi(A) \oplus \phi(B_{1/N_o}) \subset \phi(A) \oplus B_\eta \text{ , et } \phi(A) \subset \phi(A_n) \oplus \phi(B_{1/N_o}) \subset \phi(A_n) \oplus B_\eta$$

Donc $\phi(A_n)$ converge dans $\mathcal{K}$ vers $\phi(A)$ et ϕ est continue.

d/ - Pour $\lambda \geq 0$ et $A \in C(\mathcal{K})$, on a $\phi(\lambda A) = \lambda\phi(A)$.

Si A est convex et compact, d'après n/, la relation est vérifiée pour λ rationnel ≥ 0. Mais, d'après c/, ϕ est continue et la relation est donc vérifiée pour tout $\lambda \geq 0$.

e/ - Passons alors à la deuxième partie de l'énoncé. D'après ce qui précède, si ϕ est compatible avec $\oplus$, $\mathcal{B}$ est stable pour les translations, l'addition $\oplus$ et l'intersection. Inversement, soit $\mathcal{B} \subset \mathcal{K}$ une famille stable pour $\cap$, $\oplus$ et les translations. Le plus grand prolongement sur $\mathcal{K}$ de l'identité sur $\mathcal{B}$ est une fermeture sur $\mathcal{K}$ définie par :

(e) $$\phi(K) = \cap\,\{B,\ B \in \mathcal{B}\ ,\ B \supset K\}$$

Il faut montrer que ϕ est compatible avec l'addition de Minkowski. La relation (e) entraine que ϕ est compatible avec les translations (puisque $\mathcal{B}$ est invariant pour les translations). Pour K et K' dans $\mathcal{K}$, il en résulte :

$$\phi(K \oplus K') = \phi(\bigcup_{x \in K'} K \oplus \{x\}) \supset \bigcup_{x \in K'} \phi(K \oplus \{x\}) = \bigcup_{x \in K'} \{x\} \oplus \phi(K) = K' \oplus \phi(K)$$

soit :

$$\phi(K \oplus K') \supset K' \oplus \phi(K)$$

Comme ϕ est idempotente et croissante, on en déduit :

$$\phi\ \phi\ (K \oplus K') = \phi(K \oplus K') \supset \phi(K' \oplus \phi(K)) \supset \phi(K') \oplus \phi(K)$$

Finalement donc on a :

$$\phi(K \oplus K') \supset \phi(K) \oplus \phi(K') \tag{f}$$

et il reste à démontrer l'inclusion inverse. Or $\phi(K) \supset K$ et $\phi(K') \supset K'$ entraine $\phi(K) \oplus \phi(K') \supset K \oplus K'$. Mais $\phi(K) \oplus \phi(K') \in \mathcal{B}$ par hypothèse, donc $\phi(K) \oplus \phi(K') \supset \phi(K \oplus K')$. D'où l'égalité, ce qui achève la démonstration.

- CHAPITRE 8 -

APPLICATIONS CROISSANTES

Ce chapitre est un peu à part du reste de l'ouvrage, et peut être omis sans inconvénient. Il est consacré aux applications croissantes, c'est-à-dire aux applications $\phi : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E')$ telles que $A \subset B$ dans E entraine $\phi(A) \subset \phi(B)$ dans E'. Son but est de généraliser certaines propriétés rencontrées lors de l'étude des ouvertures et des fermetures. L'étude algébrique de ces applications relève d'un formalisme facile, mais il n'en est pas de même de leur étude topologique. C'est pourquoi, ici encore, et contrairement à l'ordre logique, nous exposons en premier lieu le cas particulier plus simple des applications croissantes et compatibles avec les translations de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même, avant d'aborder le cas général dans les deux derniers paragraphes. Dans ce chapitre, le mot application signifie toujours (sauf mention explicite du contraire), application croissante, et, de même, τ-application signifie application croissante compatible avec les translations.

8-1 PROPRIETES ALGEBRIQUES DES τ-APPLICATIONS CROISSANTES.

Dans ce paragraphe, nous nous plaçons dans l'espace $\mathbb{R}^d$ et nous ne considérons dans ce paragraphe et le suivant (sauf mention explicite du contraire) que des τ-applications, c'est-à-dire des applications ϕ de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, (où $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ est stable pour les translations) compatibles avec les translations. En écrivant A_x au lieu de $A \oplus \{x\}$, on a donc toujours ici :

$$\phi(A_x) = \phi(A)_x \qquad (A \in \mathcal{A})$$

De même, nous désignerons par $\mathcal{B}_x$ la famille $\{B_x\ ,\ B \in \mathcal{B}\}$ des translatés B_x par un $x \in \mathbb{R}^d$ donné des ensembles B d'une famille $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$.

Désignons par $\mathcal{V}$ le noyau d'une application $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ défini par :

$$\mathcal{V} = \{A : A \in \mathcal{A}\ ,\ 0 \in \phi(A)\}$$

Si ϕ est compatible avec les translations, on a $x \in \phi(A)$ si et seulement si $A \in \mathcal{V}_x$. Inversement, si $\mathcal{V}$ est une famille quelconque contenue dans $\mathcal{A}$, l'application ϕ définie sur $\mathcal{A}$ par :

$$\phi(A) = \{x,\ x \in \mathbb{R}^d,\ A \in \mathcal{V}_x\}$$

est compatible avec les translations, car :

$$y \in \phi(A_h) \Leftrightarrow A_h \in \mathcal{V}_y \Leftrightarrow A \in \mathcal{V}_{y-h} \Leftrightarrow y-h \in \phi(A) \Leftrightarrow y \in \phi(A)_h$$

et son noyau est manifestement $\mathcal{V}$. Il y a donc correspondance bijective entre les familles $\mathcal{V} \subset \mathcal{A}$ et les applications ϕ compatibles sur $\mathcal{A}$ avec les translations.

<u>EXEMPLES</u> - La <u>dilatation</u> $A \to A \oplus \check{B}$ (B quelconque dans $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$), admet le noyau

(8-1-1) $$= V_B \cap \mathcal{A} \qquad (V_B = \{B',\ B' \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d),\ B' \cap B \neq \emptyset\})$$

L'<u>érosion</u> $A \to A \ominus \check{B}$ admet le noyau :

(8-2-2) $$\mathcal{V} = W_B \cap \mathcal{A} \qquad (W_B = \{B',\ B' \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d),\ B' \supset B\})$$

L'<u>ouverture</u> de A selon B, soit;$A \to A_B = (A \ominus \check{B}) \oplus B$ a pour noyau :

(8-2-3) $$\mathcal{V} = \bigcup_{y \in \check{B}} (W_{B_y} \cap \mathcal{A})$$

La <u>fermeture</u> $A \to A^B = (A \oplus \check{B}) \ominus B$ de A selon B a pour noyau :

(8-2-4) $$\mathcal{V} = \bigcap_{y \in \check{B}} (V_{B_y} \cap \mathcal{A})$$

L'<u>identité</u> sur $\mathcal{A}$ a le noyau $\mathcal{V} = \mathcal{P}_0 \cap \mathcal{A}$, où $\mathcal{P}_0$ désigne l'ensemble des parties de $\mathbb{R}^d$ contenant l'origine ($\mathcal{P}_0$ est un ultrafiltre).

La <u>translation</u> par $x \in \mathbb{R}^d$, soit $A \to A_x$ a pour noyau $\mathcal{P}_x \cap \mathcal{A}$, où $\mathcal{P}_x$ désigne la famille des parties de $\mathbb{R}^d$ contenant le point x.

On note que $\emptyset$ et $\mathbb{R}^d$ sont les seuls éléments de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ stables pour les translations. Si donc $\emptyset$ et $\mathbb{R}^d$ sont dans $\mathcal{A}$, leurs images seront soit $\emptyset$, soit $\mathbb{R}^d$. Il est clair que l'on a :

$$\psi(\emptyset) = \emptyset \Leftrightarrow \emptyset \notin \mathcal{V} \qquad\qquad \psi(\emptyset) = \mathbb{R}^d \Leftrightarrow \emptyset \in \mathcal{V}$$
$$\psi(\mathbb{R}^d) = \emptyset \Leftrightarrow \mathbb{R}^d \notin \mathcal{V} \qquad\qquad \psi(\mathbb{R}^d) = \mathbb{R}^d \Leftrightarrow \mathbb{R}^d \in \mathcal{V}$$

Pour les applications ψ <u>croissantes</u> non triviales, les seules que nous considèrerons dans ce qui suit, on a nécessairement $\psi(\emptyset) = \emptyset$ et $\psi(\mathbb{R}^d) = \mathbb{R}^d$, c'est-à-dire :

$$\emptyset \notin \mathcal{V} \text{ et } \mathbb{R}^d \in \mathcal{V}$$

Notons encore quelques propriétés élémentaires pour A, B $\in \mathcal{A}$

(8-1-5)
$$\begin{cases} A \subset \psi(A) \Leftrightarrow \mathcal{P}_0 \subset \mathcal{V} \\ \\ \psi(A) \subset A \Leftrightarrow \mathcal{V} \subset \mathcal{P}_0 \end{cases}$$

Plus généralement, si deux applications vérifient $\psi \subset \psi'$, leurs noyaux $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}'$ vérifient $\mathcal{V} \subset \mathcal{V}'$

(8-1-6)
$$\mathcal{V} \subset \mathcal{V}' \Leftrightarrow \psi \subset \psi'$$

De même, si ψ_i, $i \in I$ est une famille d'applications sur $\mathcal{A}$, et si $\mathcal{V}_i$ est le noyau de ψ_i, le noyau de $\bigcap \psi_i$ est $\bigcap \mathcal{V}_i$, celui de $\bigcup \psi_i$ est $\bigcup \mathcal{V}_i$.

Une application ψ est <u>croissante</u> si et seulement si $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{V}$ et $A \supset B$ entraîne $A \in \mathcal{V}$. Nous énoncerons cette propriété en disant que $\mathcal{V}$ <u>est permis</u> dans $\mathcal{A}$ pour la réunion $\bigcup$. Analytiquement, cela donne :

(8-1-7)
$$\psi \text{ croissante} \Leftrightarrow \mathcal{V} = \bigcup_{B \in \mathcal{V}} (W_B \cap \mathcal{A})$$

Compte tenu de (8-1-2), on voit que toute application croissante est de la forme :

(8-1-7')
$$\psi(A) = \bigcup_{B \in \mathcal{V}} (A \ominus \check{B})$$

c'est-à-dire est la réunion des érodés de A selon les $B \in \mathcal{V}$

Lorsque $\mathcal{A}$ est stable pour la réunion finie, on a :

(8-1-8)
$$\mathcal{V} \text{ stable pour la réunion finie} \Leftrightarrow \psi(A) \cap \psi(B) \subset \psi(A \cup B)$$

Si $\mathcal{A}$ est stable pour l'intersection finie, de même :

(8-1-8') $\mathcal{V}$ stable pour l'intersection finie $\Leftrightarrow \phi(A \cap B) \supset \phi(A) \cap \phi(B)$

Démontrons, par exemple, (8-1-8'). $x \in \phi(A) \cap \phi(B)$, équivaut à $A \in \mathcal{V}_x$ et $B \in \mathcal{V}_x$, et $x \in \phi(A \cap B)$ à $A \cap B \in \mathcal{V}_x$. L'inclusion de (8-1-8') est donc vérifiée si et seulement si $A \in \mathcal{V}$ et $B \in \mathcal{V}$ entraîne $A \cap B \in \mathcal{V}$.

Il est clair que, si $\mathcal{A}$ est stable pour $\cap$, ϕ est croissante si et seulement si $\phi(A \cap B) \subset \phi(A) \cap \phi(B)$. De (8-1-7) et (8-1-8') on déduit donc :

(8-1-9) $\mathcal{V}$ permis dans $\mathcal{A}$ pour $\cup$ et stable pour $\cap \Leftrightarrow \phi(A \cap B) = \phi(A) \cap \phi(B)$

Nous énoncerons cette propriété de $\mathcal{V}$ en disant que $\mathcal{V}$ est un filtre dans $\mathcal{A}$. Ainsi, une application ϕ est compatible avec l'intersection finie si et seulement si son noyau $\mathcal{V}$ est un filtre dans $\mathcal{A}$. On en déduit simplement une propriété intéressante :

Proposition 8-1-1.- L'identité est la seule application de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même qui soit extensive et compatible avec l'intersection et les translations.

En effet, si ϕ est une telle application, son noyau est un filtre, d'après (8-1-9), et vérifie $\mathcal{P}_o \subset \mathcal{V}$, d'après (8-1-5). Or $\mathcal{P}_o$ est un ultra-filtre sur $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$. On a donc nécessairement $\mathcal{P}_o = \mathcal{V}$, et ϕ est l'application identique.

Examinons aussi la dualité. Soit ϕ définie sur $\mathcal{A}$ et $\mathcal{V}$ son noyau. ϕ^* est définie sur $\mathcal{A}^*$, et son noyau $\mathcal{V}^*$ est :

(8-1-10) $$\mathcal{V}^* = \{A : A^c \in \mathcal{A},\ A^c \notin \mathcal{V}\}$$

ϕ^* est croissante si et seulement si ϕ est croissante. Donc $\mathcal{V}^*$ est permis pour $\cup$ dans $\mathcal{A}$ si et seulement si $\mathcal{V}$ est permis pour $\cup$ dans $\mathcal{A}$. De même, $\mathcal{V}^*$ est stable pour $\cap$ si et seulement si $\complement\mathcal{V}$ est stable pour $\cup$. Il en résulte, d'après (8-1-8') :

(8-1-11) $\complement\mathcal{V}$ stable pour $\cup \Leftrightarrow \phi(A \cup B) \supset \phi(A) \cup \phi(B)$

et, d'après (8-1-9) :

(8-1-12) $\mathcal{V}$ permis dans $\mathcal{A}$ pour $\cup$ et $\complement\mathcal{V}$ stable pour $\cup \Leftrightarrow \phi(A \cup B) = \phi(A) \cup \phi(B)$

Nous énoncerons cette propriété de $\mathcal{V}$ en disant que $\mathcal{V}$ est un antifiltre dans $\mathcal{A}$. Ainsi, ϕ est compatible avec la réunion finie si et seulement si son noyau $\mathcal{V}$ est un antifiltre.

Dans $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{U}$ est un **ultrafiltre** si et seulement si $\mathcal{U}$ **est à la fois un filtre et un anti-filtre**. En effet, on sait qu'un filtre $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre si et seulement si pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ on a soit $A \in \mathcal{U}$ soit $A^c \in \mathcal{U}$ (on rappelle que $\emptyset \notin \mathcal{U}$). Si $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre, $A \notin \mathcal{U}$ et $B \notin \mathcal{U}$ entraine $A^c \in \mathcal{U}$ et $B^c \in \mathcal{U}$, donc $A^c \cap B^c \in \mathcal{U}$ et par suite $\complement(A^c \cap B^c) = A \cup B \notin \mathcal{U}$: $\complement\mathcal{U}$ est stable pour $\cup$. Inversement, si $\mathcal{U}$ n'est pas un ultrafiltre, on a un $A \notin \mathcal{U}$ avec $A^c \notin \mathcal{U}$. Mais $\mathbb{R}^d = A \cup A^c \in \mathcal{U}$, donc $\complement\mathcal{U}$ n'est pas stable pour $\cup$.

On déduit alors de (8-1-12) et de (8-1-9) qu'une application de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même compatible avec les translations est **compatible à la fois avec la réunion et l'intersection** si et seulement si son noyau **$\mathcal{U}$ est un ultrafiltre**. On sait que les seuls ultrafiltres que l'on sache construire effectivement (bien que l'axiome de Zorn permette d'établir qu'il en existe beaucoup d'autres) sont les ultrafiltres triviaux $\mathcal{P}_x = \{A : A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d),\ x \in A\}$ pour $x \in \mathbb{R}^d$. On a vu que ces ultrafiltres sont les noyaux des translations de $\mathbb{R}^d$. On peut donc conclure que **les translations sont les seules applications de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même compatibles avec la réunion, l'intersection et les translations que l'on sera capable de construire effectivement** (bien qu'il en existe théoriquement beaucoup d'autres, infiniment plus compliquées).

Par dualité, la Proposition 8-1-1 donne :

Proposition 8-1-2.- L'identité est la seule application de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même qui soit anti-extensive et compatible avec les translations et les réunions.

COROLLAIRE - Sur $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, il n'y a pas d'ouverture compatible avec les translations et les réunions, ni de fermeture compatible avec les translations et les intersections, qui soit distincte de l'identité.

Si ψ est une application croissante de $\mathcal{O}$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, son noyau et le noyau $\mathcal{U}^*$ de l'application duale sont liés par (8-1-10), qui, compte tenu de (8-1-7), s'écrit aussi :

(8-1-13)
$$\begin{cases} \mathcal{U}^* = \bigcap\limits_{B \in \mathcal{U}} (V_B \in \mathcal{O}^*) \\ \\ \mathcal{U} = \bigcap\limits_{B \in \mathcal{U}^*} (V_B \cap \mathcal{O}) \end{cases}$$

(la deuxième formule s'obtient en échangeant lez rôles de ψ et ψ^*). On en déduit :

<u>Proposition 8-1-3</u>.- Toute τ-application ϕ croissante de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ admet deux représentations, l'une sous forme de réunion d'érosions, l'autre sous forme d'intersection de dilatations. Explicitement, en désignant par $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}^*$ les noyaux de ϕ et de ϕ^*, on a pour $A \in \mathcal{A}$:

$$\phi(A) = \bigcup_{B \in \mathcal{V}} A \ominus \check{B} = \bigcap_{B \in \mathcal{V}^*} A \oplus \check{B}$$

La première relation a déjà été établie en (8-1-7'). La seconde résulte de (8-1-13) et de (8-1-1).

En ce qui concerne le plus petit prolongement $\underset{\sim}{\phi}$ et le plus grand $\tilde{\phi}$ de l'application ϕ de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R}^d$, leurs noyaux $\underset{\sim}{\mathcal{V}}$ et $\tilde{\mathcal{V}}$ se déduisent du noyau $\mathcal{V}$ de ϕ par les formules :

$$\underset{\sim}{\mathcal{V}} = \bigcup_{A \in \mathcal{V}} W_A \quad , \quad \tilde{\mathcal{V}} = \bigcap_{A \in \mathcal{V}^*} V_A \tag{8-1-14}$$

et vérifient les relations de dualité :

$$(\underset{\sim}{\mathcal{V}})^* = \widetilde{(\mathcal{V}^*)} \quad , \quad (\tilde{\mathcal{V}})^* = \underset{\sim}{(\mathcal{V}^*)} \tag{8-1-14'}$$

Voici maintenant un résultat qui nous sera utile par la suite. Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux parties de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ stables pour les translations, ϕ une τ-application croissante sur $\mathcal{A}$, $\mathcal{V}$ son noyau, ϕ_b la restriction à $\mathcal{B}$ du plus petit prolongement $\underset{\sim}{\phi}$ de ϕ, $\mathcal{V}_b$ le noyau de ϕ_b, ϕ_a la restriction à $\mathcal{A}$ du plus grand prolongement $\tilde{\phi}_b$ de ϕ_b et $\mathcal{V}_a$ le noyau de ϕ_a. On a donc :

$$\mathcal{V}_b = \underset{\sim}{\mathcal{V}} \cap \mathcal{B}, \quad \mathcal{V}_a = \tilde{\mathcal{V}}_b \cap \mathcal{A}$$

avec $\mathcal{V}_a \supset \mathcal{V}$, c'est-à-dire $\phi_a \supset \phi$ sur $\mathcal{A}$.

Cherchons à quelle condition on a $\phi \supset \phi_a$, c'ést-à-dire $\phi = \phi_a$ sur $\mathcal{A}$. D'après les définitions, on a ;pour $A \in \mathcal{A}$:

$$\phi_a(A) = \cap \{\phi_b(B),\ B \supset A,\ B \in \mathcal{B}\} = \bigcap_{\substack{B \supset A \\ B \in \mathcal{B}}} \bigcup_{\substack{A' \subset B \\ A' \in \mathcal{A}}} \phi(A')$$

On aura donc $\phi_a(A) \subset \phi(A)$ si et seuleme,t si l'implication $x \in \phi_b(B)$ pour tout $B \in \mathcal{B}$ tel que $B \supset A$ entraine $x \in \phi(A)$ est vérifiée. Or cette implication équivaut à : $x \notin \phi(A)$ entraine qu'il existe $B \in \mathcal{B}$ ~~avec~~ $B \in \mathcal{B}$, $B \supset A$ et $x \notin \phi_b(B)$, ou encore sous forme explicite à : $x \notin \phi(A)$ entraine qu'il existe $B \in \mathcal{B}$ avec $B \supset A$ tel que l'on ait $x \notin \phi(A')$ pour tout $A' \subset B$ dans $\mathcal{A}$.

Autrement dit, en désignant par S^B la famille des ensembles contenus dans B, soit $S^B = \{H : H \in \mathcal{P}, H \subset B\}$, on a $\phi_a = \phi$ sur $\mathcal{A}$ si et seulement si pour tout $x \notin \phi(A)$, on peut trouver $B \in \mathcal{B}$ tel que $A \subset B$ et $x \notin \phi(A')$ pour tout $A' \in S^B \cap \mathcal{A}$.

En termes de noyau, ceci équivaut à : pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et tout $A \in \mathcal{V}_x$, on peut trouver $B \in \mathcal{B}$ tel que $A \subset B$ et $A' \notin \mathcal{V}_x$ pour tout $A' \in \mathcal{A} \cap S^B$. Comme $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont stables pour les translations, on a un énoncé équivalent en se limitant au seul point $x = 0$.

<u>Proposition 8-1-4</u>.- Soit ϕ une τ-application croissante sur $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux parties de $\mathbb{R}^d$ compatibles avec les translations, ϕ_b la restriction à $\mathcal{B}$ du plus petit prolongement de ϕ et ϕ_a la restriction à $\mathcal{A}$ du plus grand prolongement de ϕ_b. Alors les trois conditions suivantes sont équivalentes :

1/ - On a $\phi = \phi_a$ sur $\mathcal{A}$.

2/ - Pour tout $A \in \mathcal{A}$ et tout $x \notin \phi(A)$, on peut trouver $B \in \mathcal{B}$ avec $B \supset A$ et $x \notin \phi(A')$ pour tout $A' \in \mathcal{A}$ contenu dans B.

3/ - Si $\mathcal{V}$ est le noyau de ϕ, pour tout $A \in \mathcal{A} \cap \complement \mathcal{V}$, on peut trouver $B \in \mathcal{B}$ avec $B \supset A$ et $A' \in \mathcal{V}$ pour tout $A' \in \mathcal{A}$ contenu dans B.

On remarque que l'équivalence des conditions 1/ et 2/ ne fait pas intervenir la structure euclidienne de l'espace $\mathbb{R}^d$, ni le fait que ϕ est une τ-application, et reste donc valable pour toute application ϕ croissante définie sur les familles de parties d'un ensemble E quelconque.

L'application la plus intéressante de cette proposition correspond au cas où E est un espace LCD, et $\mathcal{A} = \mathcal{K}(E)$, $\mathcal{B} = \mathcal{G}(E)$. Si ϕ est une application croissante définie sur $\mathcal{K}$, on pose $\phi_g(G) = \cup \{\phi(K),\ K \subset G,\ K \in \mathcal{K}\}$, $G \in \mathcal{G}$ et $\phi_k(K) = \cap \{\phi_g(G),\ G \supset K,\ G \in \mathcal{G}\}$ pour $K \in \mathcal{K}$. On aura alors $\phi = \phi_k$ sur $\mathcal{K}$ si et seulement si pour tout $K \in \mathcal{K}$ et tout $x \notin \phi(K)$ on peut trouver un ouvert $G \supset K$ avec $x \notin \phi(K')$ pour tout compact $K' \subset G$. En particulier, <u>cette condition est remplie dès que ϕ est une application s.c.s. de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{K}$ ou dans $\mathcal{F}$</u>.

Par dualité, on en déduit un résultat analogue : si ϕ' est une application de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{P}$, on pose $\phi'_k(K) = \cap \{\phi'(G),\ G \in \mathcal{G},\ G \supset K\}$ pour $K \in \mathcal{K}$ et $\phi'_g(G) = \cup \{\phi'_k(K),\ K \in \mathcal{K},\ K \subset G\}$ pour $K \in \mathcal{K}$. Alors, on a $\phi' = \phi'_g$ sur $\mathcal{G}$ si et seulement si pour tout $G \in \mathcal{G}$ et tout $x \in \phi'(G)$ on peut trouver un compact $K \subset G$ tel que $x \in \phi'(G')$ pour tout ouvert $G' \supset K$. En particulier, <u>cette condition est remplie dès que ϕ est une application s.c.i. de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}$</u>.

8-2 PROPRIETES TOPOLOGIQUES DES τ-APPLICATIONS CROISSANTES

Examinons d'abord les τ-applications s.c.s. sur $\mathcal{K}$ ou $\mathcal{F}$.

Proposition 8-2-1.- Une τ-application ϕ de $\mathcal{K}$ (ou $\mathcal{F}$) dans $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ est une application s.c.s. de $\mathcal{K}$ (ou $\mathcal{F}$) dans $\mathcal{F}$ si et seulement si son noyau est fermé dans $\mathcal{F}$ (dans $\mathcal{K}$). De même, une τ-application ϕ' de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ est une application s.c.i. de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}$ si et seulement si son noyau $\mathcal{V}'$ est ouvert dans $\mathcal{G}$.

Notons d'abord que si $\mathcal{V}$ est fermé, ϕ applique $\mathcal{K}$ (ou $\mathcal{F}$) dans $\mathcal{F}$. En effet, $x_n \in \phi(A)$ équivaut à $A_{-x_n} \in \mathcal{V}$ et, si $x_n \to x$, $A_{-x_n} \to A_{-x}$ dans $\mathcal{K}$ (ou $\mathcal{F}$), donc $A_{-x} \in \mathcal{V}$, soit $x \in \phi(A)$: $\phi(A)$ est fermé.

Ensuite, on note pour K compact :

$$\text{(a)} \qquad \phi^{-1}(\mathcal{F}_K) = \{A : \phi(A) \cap K \neq \emptyset\} = \bigcup_{x \in K} \mathcal{V}_x$$

Cet ensemble est fermé dans $\mathcal{K}$ (ou $\mathcal{F}$), et par suite ϕ est s.c.s., si $\mathcal{V}$ est fermé dans $\mathcal{K}$ (ou $\mathcal{F}$). En effet, si une suite $A_n = B_n \oplus \{x_n\}$, avec $B_n \in \mathcal{V}$ et $x_n \in K$ converge vers A dans $\mathcal{K}$ (ou $\mathcal{F}$), on peut trouver une suite partielle x_{n_k} convergeant vers $x \in K$ telle que B_{n_k} converge vers $B \in \mathcal{V}$ (si l'espace de définition est $\mathcal{K}$, cette possibilité résulte du fait que $B_n = A_n \oplus \{-x_n\}$ est contenu dans un compact fixe, puisque $A_n \to A$ dans $\mathcal{K}$). Mais alors $B_{n_k} \oplus \{x_{n_k}\} = A_{n_k}$ converge vers $B \oplus \{x\} = A$, et on a bien $A \in \mathcal{V}_x$, et $A \in \bigcup_{x \in K} \mathcal{V}_x$. Donc $\phi^{-1}(\mathcal{F}_K)$ est fermé dans $\mathcal{K}$ (dans $\mathcal{F}$), et cela signifie justement que ϕ est s.c.s.

Inversement, si ϕ est s.c.s., $\phi^{-1}(\mathcal{F}_K)$ est fermé pour tout compact K. En particulier, pour $K = \{0\}$, $\phi^{-1}(V_{\{0\}}) = \mathcal{V}$ d'après (a), et $\mathcal{V}$ est fermé dans $\mathcal{K}$ (dans $\mathcal{F}$).

L'énoncé relatif à l'application s.c.i. de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}$ s'obtient enfin par dualité.

Soit alors ϕ une application de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{F}$, et $\mathcal{V}$ son noyau, $\mathcal{V}_g$ et $\mathcal{V}_k$ les noyaux des applications ϕ_g de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ et ϕ_k de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, construites comme indiqué à la fin du paragraphe 8-1. Alors, ϕ_g applique $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}$ et ϕ_k applique $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{F}$. On a, en effet :

$$\mathcal{V} = \bigcup_{K \in \mathcal{V}} W_K \cap \mathcal{K} \ , \quad \mathcal{V}_g = \bigcup_{K \in \mathcal{V}} W_K \cap \mathcal{G} = \bigcup_{K \in \mathcal{V}} \mathcal{G}_K$$

Par suite, $\mathcal{V}_g$ est réunion de $\mathcal{G}_K$ ouverts dans $\mathcal{G}$, et la proposition 8-2-1 montre que ϕ_g est une application s.c.i. de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}$. Quant à $\mathcal{V}_k$, d'après (8-1-14), il est donné par :

$$\mathcal{V}_k = \bar{\mathcal{V}}_g \cap \mathcal{K} = \bigcap_{A \in \mathcal{V}_g^*} V_A \cap \mathcal{K} = \bigcap_{A \in \mathcal{V}_g^*} \mathcal{K}_A$$

Mais $\mathcal{V}_g^*$, dual de $\mathcal{V}_g$ est contenu dans $\mathcal{F}$, car ϕ_g^* est s.c.s. de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$ et de plus $\mathcal{V}_g^*$ est fermé dans $\mathcal{K}$. Pour $A \in \mathcal{F}$, $\mathcal{K}_A = V_A \cap \mathcal{K}$ est fermé dans $\mathcal{K}$, donc $\mathcal{V}_k$ est fermé dans $\mathcal{K}$, et, d'après la proposition 8-2-1, ϕ_k est une application s.c.s. de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{F}$.

On vérifie de la même manière que ϕ_k est une application s.c.s. de $\mathcal{K}$ dans lui-même si ϕ est une application de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{K}$.

ϕ_k majore ϕ sur $\mathcal{K}$. D'après la Proposition 8-1-4, on a $\phi_k = \phi$ si et seulement si pour tout $K \notin \mathcal{V}$ on peut trouver $G \in \mathcal{G}$ avec $K \subset G$ et $K' \notin \mathcal{V}$ pour tout compact $K' \subset G$. Mais cette condition exprime exactement que $\mathcal{V}$ est fermé dans $\mathcal{K}$. Ainsi, compte tenu de la proposition 8-1-5, on a $\phi_k = \phi$ si et seulement si ϕ est elle-même une application s.c.s. de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{F}$. Par suite, si ϕ_1 est une majorante s.c.s. de ϕ, les opérations ci-dessus appliquées à ϕ et à ϕ_1 conduisent à la relation $\phi_k \subset \phi_1$, de sorte que ϕ_k est la plus petite majorante s.c.s. de ϕ (ou, ce qui revient au même, $\mathcal{V}_k$ est la fermeture de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{K}$).

On aura des résultats analogues en partant d'une application ϕ' de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}$ et en formant ϕ'_k et ϕ'_g.

Au lieu de ϕ_g ou ϕ'_g, on peut considérer leurs duales ϕ_g^* et $\phi_g'^*$ que nous désignerons par ϕ_f et ϕ'_f : ce sont des applications de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$ si et seulement si leurs duales sont s.c.i. de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}$. Nous désignerons par $\mathcal{V}_f$ et $\mathcal{V}'_f$ leurs noyaux :

$$\mathcal{V}_f = \mathcal{V}_g^* \quad , \quad \mathcal{V}'_f = \mathcal{V}_g'^*$$

Résumons :

<u>Proposition 8-2-2</u>.- Soit ϕ une application de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{F}$ (dans $\mathcal{K}$), $\mathcal{V}$ son noyau, $\phi_f = \phi_g^*$ et $\mathcal{V}_f$ son noyau, ϕ_k et $\mathcal{V}_k$ son noyau construits comme ci-dessus. ϕ_f est une application s.c.s. de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$, et $\mathcal{V}_f$ est fermé dans $\mathcal{F}$. ϕ_k est une application s.c.s. de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{F}$ (resp. dans $\mathcal{K}$) et $\mathcal{V}_k$ est fermé dans $\mathcal{K}$. Plus précisément, $\mathcal{V}_k$ est la fermeture de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{K}$, et ϕ_k la plus petite majorante s.c.s. de ϕ. On a $\phi = \phi_k$ si et seulement si ϕ est elle-même s.c.s.

Le noyau de ϕ_f est :

$$\mathcal{O}_f = \bigcap_{K\in\mathcal{O}} \mathcal{F}_K$$

et les noyaux de $\mathcal{O}_k$ et $\mathcal{O}_f$ sont liés par les formules réciproques :

(8-2-1) $$\mathcal{O}_k = \bigcap_{F\in\mathcal{O}_f} \mathcal{K}_F \quad , \quad \mathcal{O}_f = \bigcap_{K\in\mathcal{O}_k} \mathcal{F}_K$$

De même, si ϕ' est une application de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$ et $\mathcal{O}'$ son noyau, on forme successivement ϕ'_k, de noyau $\mathcal{O}'_k = \bigcap_{F\in\mathcal{O}'} \mathcal{K}_F$ et ϕ'_f dont le noyau est $\mathcal{O}'_f = \bigcap_{K\in\mathcal{O}'_k} \mathcal{F}_K$. ϕ'_k est une application s.c.s. de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{F}$, ϕ'_f est la plus petite application s.c.s. de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$ majorant ϕ'. En particulier, $\phi'_f = \phi'$ si et seulement si ϕ' est s.c.s. Enfin les relations de dualité (8-2-1) sont valables pour $\mathcal{O}'_k$ et $\mathcal{O}'_f$.

<u>COROLLAIRE</u>.- Toute application ϕ_k s.c.s. de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{F}$ est de la forme :

$$\phi_k(K) = \bigcap_{F\in\mathcal{B}} K \oplus \check{F} \qquad (K \in \mathcal{K})$$

où $\mathcal{B}$ est une partie fermée de $\mathcal{F}$, et toute application ϕ_f s.c.s. de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$ est de la forme

$$\phi_f(F) = \bigcap_{K\in\mathcal{B}'} F \oplus \check{K} \qquad (F \in \mathcal{F})$$

où $\mathcal{B}'$ est une partie fermée de $\mathcal{K}$. Inversement, toute application de ce type est s.c.s.

<u>Prolongement d'une application s.c.s. sur $\mathcal{K}$</u> .

On voit ici se poser deux questions - d'ailleurs liées. A quelle condition une application ϕ_k s.c.s. de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{F}$ applique-t-elle en fait $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{K}$, et est-elle s.c.s. pour la topologie de $\mathcal{K}$; à quelle condition cette application admet-elle un prolongement s.c.s. de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$?

Supposons que ϕ_k admette un prolongement s.c.s. de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$, soit ϕ'_f. D'après (8-2-1), ou le corollaire de la proposition, cela implique que ϕ_k soit <u>bornée</u>, en ce sens qu'il existe un compact K_0 tel que :

$$\phi_k(K) \subset K \oplus K_0 \qquad (K \in \mathcal{K})$$

En particulier, ϕ_k applique en fait $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{K}$ et (comme on le vérifie sans peine) est s.c.s.

de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{K}$. Ce prolongement, s'il existe, n'est pas nécessairement unique, mais il existe toujours une plus petite application ϕ'_f s.c.s. de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$ dont la restriction à $\mathcal{K}$ majore ϕ_k. Elle est définie comme l'application dont le noyau $\mathcal{V}'_f$ est la fermeture dans $\mathcal{F}$ de $\underset{\sim}{\mathcal{V}_k} \cap \mathcal{F}$, soit :

$$(8\text{-}2\text{-}2) \qquad \mathcal{V}'_f = \overline{\underset{\sim}{\mathcal{V}_k} \cap \mathcal{F}}$$

L'application ϕ'_f ainsi définie est effectivement un prolongement de $\mathcal{K}$ si et seulement si on a :

$$\mathcal{V}_k = \mathcal{V}'_f \cap \mathcal{K}$$

Par suite ϕ_k admet des prolongements s.c.s. de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$ si et seulement si on a :

$$(8\text{-}2\text{-}2') \qquad \mathcal{V}_k = \overline{(\underset{\sim}{\mathcal{V}_k} \cap \mathcal{F})} \cap \mathcal{K} = \mathcal{V}'_f \cap \mathcal{K}$$

~~et~~ dans ce cas le plus petit prolongement ϕ'_f s.c.s. de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$ est défini par son noyau (8-2-2). La condition (8-2-2') exprime exactement ceci : si une suite de fermés F_n telle que chaque F_n contienne un $K_n \in \mathcal{V}_k$ converge (au sens de la topologie de $\mathcal{F}$) vers un compact K, on a $K \in \mathcal{V}_k$.

Pour caractériser de manière plus précise la structure de l'ensemble $\mathcal{V}'_f$, notons que l'on a :

$$\mathcal{V}_k = \bigcup_{K \in \mathcal{V}_k} W_K \cap \mathcal{K}$$

puis :

$$\underset{\sim}{\mathcal{V}_k} \cap \mathcal{F} = \bigcup_{K \in \mathcal{V}_k} W_K \cap \mathcal{F}$$

Mais pour tout $K \in \mathcal{K}$, le fermé $W_K \cap \mathcal{F}$ de $\mathcal{F}$ est manifestement la fermeture dans $\mathcal{F}$ de $W_K \cap \mathcal{K}$ (si une suite de compacts $K_n \supset K$ converge dans $\mathcal{F}$ vers $F \in \mathcal{F}$, on a encore $F \supset K$). Par conséquent :

$$\mathcal{V}'_f = \overline{\bigcup_{K \in \mathcal{V}_k} W_K \cap \mathcal{F}} = \overline{\bigcup_{K \in \mathcal{V}_k} \overline{W_K \cap \mathcal{K}}}$$

et, d'après la propriété bien connue des fermetures topologiques :

$$(8\text{-}2\text{-}3) \qquad \mathcal{V}'_f = \overline{\bigcup_{K \in \mathcal{V}_k} W_K \cap \mathcal{K}} = \overline{\mathcal{V}_k}$$

$\mathcal{O}'_f$ est simplement la <u>fermeture dans $\mathcal{F}$ de $\mathcal{O}_k$</u> considéré comme sous-ensemble de $\mathcal{F}$. En conséquence, la condition (8-2-3) équivaut à :

(8-2-3')
$$\mathcal{O}_k = \overline{\mathcal{O}}_k \cap \mathcal{K}$$

et signifie : si une suite $K_n \in \mathcal{O}_k$ converge <u>au sens de la topologie de $\mathcal{F}$</u> (et non de celle de $\mathcal{K}$, c'est-à-dire sans vérifier nécessairement la condition $K_n \subset K_o$ pour un compact K_o fixe) vers un compact K, on a $K \in \mathcal{O}_k$.

D'après sa définition (8-2-3), $\mathcal{O}'_f = \overline{\mathcal{O}}_k$ vérifie toujours la relation :

(8-2-4)
$$\mathcal{O}'_f = \overline{\mathcal{O}'_f \cap \mathcal{K}} = \overline{\overline{\mathcal{O}}_k \cap \mathcal{K}}$$

En effet, $\mathcal{O}'_f \supset \mathcal{O}_k$ donne $\mathcal{O}'_f \cap \mathcal{K} \supset \mathcal{O}_k$ et $\overline{\mathcal{O}'_f \cap \mathcal{K}} \supset \overline{\mathcal{O}}_k = \mathcal{O}'_f$. Mais, $\mathcal{O}'_f$ étant fermé, l'inclusion inverse est toujours vérifiée.

Dans le cas général, il peut arriver que l'on ait $\mathcal{O}'_f = \mathcal{F}$, et que par suite ϕ'_f soit l'application triviale $\phi'_f(F) = \mathbb{R}^d$. Il en est ainsi si et seulement s'il existe dans $\mathcal{O}_k$ une suite K_n de compacts convergeant vers $\emptyset$ dans $\mathcal{F}$ (cette suite K_n ne converge pas dans $\mathcal{K}$,car $\mathcal{K}\setminus\{\emptyset\}$ est fermé dans $\mathcal{K}$). Pour que l'on n'ait pas $\emptyset \in \mathcal{O}'_f = \overline{\mathcal{O}}_k$, il faut et il suffit qu'il existe un voisinage de $\emptyset$ dans $\mathcal{F}$, c'est-à-dire un $\mathcal{F}^{K_o}$, $K_o \in \mathcal{K}$ disjoint de $\mathcal{O}_k$, autrement dit :

(8-2-5)
$$\emptyset \notin \mathcal{O}'_f \Leftrightarrow \mathcal{O}_k \subset \mathcal{F}_{K_o} \cap \mathcal{K} \quad \text{pour un } K_o \in \mathcal{K}$$

A son tour, cette condition équivaut à dire que ϕ_k est <u>bornée</u> dans le sens déjà cité : il existe un compact K_o tel que :

(8-2-6)
$$\phi_k(K) \subset K \oplus \check{K}_o \qquad (K \in \mathcal{K})$$

Inversement, supposons que ϕ_k vérifie (8-2-6). On a alors $\mathcal{O}'_f \subset \overline{\mathcal{F}_{K_o} \cap \mathcal{K}} = \mathcal{F}_{K_o}$, et ϕ'_f vérifie la même relation (8-2-6). Désignons alors par ϕ''_f sa restriction à $\mathcal{K}$, dont le noyau est :

(8-2-7)
$$\mathcal{O}''_k = \mathcal{O}'_f \cap \mathcal{K} = \overline{\mathcal{O}}_k \cap \mathcal{K}$$

ϕ''_k majore ϕ_k, et l'on a $\phi_k = \phi''_k$ si et seulement si (8-2-3') est vérifiée (c'est-à-dire si et seulement si ϕ_k admet des prolongements s.c.s. sur $\mathcal{F}$). Cette majorante ϕ''_k admet toujours des prolongements s.c.s. sur $\mathcal{F}$, et, plus précisémznt; c'èst la plus petite majorante de ϕ_k qui possède cette propriété. En effet, d'après (8-2-4), on a toujours $\overline{\mathcal{O}}''_k = \mathcal{O}'_f$, et par suite $\overline{\mathcal{O}}''_k \cap \mathcal{K}$ $= \mathcal{O}'_f \cap \mathcal{K} = \mathcal{O}'_f$. Il est clair que ϕ''_k est la plus petite majorante de ϕ_k vérifiant cette propriété, puisque $\mathcal{O}'_f = \overline{\mathcal{O}}''_k$ et que ϕ'_f est la plus petite application s.c.s. sur $\mathcal{F}$ majorant ϕ_k sur $\mathcal{K}$.

Remarquons, pour terminer, que la condition (8-2-3') équivaut à dire que ϕ_k est une <u>application s.c.s. de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{K}$ pour la topologie induite par celle de $\mathcal{F}$</u> (aussi bien que pour la topologie myope). En effet, cette dernière condition exprime que $\mathcal{O}_k$ est la restriction à $\mathcal{K}$ d'un fermé de $\mathcal{F}$, soit $\mathcal{O}_k = \mathcal{O} \cap \mathcal{K}$ pour un $\mathcal{O}$ fermé dans $\mathcal{F}$, d'où $\mathcal{O}_k = \overline{\mathcal{O}}_k \cap \mathcal{K}$.

Enonçons ces résultats :

<u>Proposition 8-2-3</u>.- Pour qu'une τ-application s.c.s. de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{F}$ admette un prolongement sur s.c.s. de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$, il faut et il suffit que l'une des deux conditions équivalentes suivantes soit vérifiée :

1/ - ϕ_k est une application de $\mathcal{K}$ dans lui-même s.c.s. pour la topologie induite sur $\mathcal{K}$ par la topologie de $\mathcal{F}$.

2/ - Le noyau de $\mathcal{O}_k$ vérifie la relation $\mathcal{O}_k = \overline{\mathcal{O}}_k \cap \mathcal{K}$, $\overline{\mathcal{O}}_k$ désignant la fermeture de $\mathcal{O}_k$ dans $\mathcal{K}$.

Lorsqu'il en est ainsi, le plus petit prolongement s.c.s. de ϕ_k sur $\mathcal{F}$ est l'application ϕ'_f dont le noyau est $\mathcal{O}'_f = \overline{\mathcal{O}}_k$.

Pour qu'il existe une application non triviale s.c.s. de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$ majorant ϕ_k sur $\mathcal{K}$, il faut et il suffit que ϕ_k soit bornée, c'est-à-dire qu'il existe un compact K_0 tel que l'on ait :

$$\phi_k(K) \subset K \oplus K_0 \qquad (K \in \mathcal{K})$$

La plus petite application ϕ'_f s.c.s. de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$ majorant ϕ_k sur $\mathcal{K}$ est alors définie par son noyau

$$\mathcal{O}'_f = \overline{\mathcal{O}}_k$$

La restriction ϕ''_k de ϕ'_f à $\mathcal{K}$, définie par son noyau $\mathcal{O}''_k = \overline{\mathcal{O}}_k \cap \mathcal{K}$ est alors la plus petite majorante s.c.s. sur $\mathcal{K}$ de ϕ_k admettant un prolongement s.c.s. de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$, et le plus petit prolongement s.c.s. de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$ de cette application ϕ''_k coïncide avec ϕ'_f, autrement dit, on a :

$$\mathcal{O}''_k = \overline{\mathcal{O}}''_k \cap$$

Examinons ces résultats du point de vue de la dualité exprimée par les formules (8-2-1), et soit ϕ_f l'application s.c.s. de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$ associée à ϕ_k, dont le noyau $\mathcal{V}_f$ est défini en (8-2-1). Supposons que ϕ_k admette un plus petit prolongement ϕ_f' s.c.s. sur $\mathcal{F}$, et soit $\mathcal{V}_f' = \overline{\mathcal{V}_k}$ son noyau. A ϕ_f', les formules de dualité (8-2-1) permettent d'associer une application ϕ_k' de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{F}$, définie par son noyau :

$$\mathcal{V}_k' = \bigcap_{F \in \mathcal{V}_f'} \mathcal{K}_F$$

Autrement dit, on a $\mathcal{V}_f = \bigcap_{K \in \mathcal{V}_k} \mathcal{F}_K$ et $\mathcal{V}_k' = \bigcap_{F \in \overline{\mathcal{V}}_k} \mathcal{K}_F \subset \mathcal{V}_f \cap \mathcal{K}$. Montrons qu'on a en fait $\mathcal{V}_k' = \mathcal{V}_f \cap \mathcal{K}$. En effet, soit $K \in \mathcal{V}_f \cap \mathcal{K}$ et, pour chaque $F \in \overline{\mathcal{V}}_k$, soit $\{K_n\}$ une suite de compacts dans $\mathcal{V}_k$ convergeant vers F dans $\mathcal{F}$. On a $K_n \cap K \neq \emptyset$, d'où $F \cap K \neq \emptyset$, donc $K \in \mathcal{V}_k'$, et $\mathcal{V}_f \cap \mathcal{K} \subset \mathcal{V}_k'$. On en déduit :

$$\mathcal{V}_k' = \mathcal{V}_f \cap \mathcal{K}$$

et ϕ_k' est la restriction de ϕ_f à $\mathcal{K}$. De même, $\mathcal{V}_f \supset \mathcal{V}_k'$ entraîne $\mathcal{V}_f \supset \overline{\mathcal{V}}_k'$. Montrons qu'on a aussi $\mathcal{V}_f \subset \overline{\mathcal{V}}_k'$, d'où résultera $\mathcal{V}_f = \overline{\mathcal{V}}_k'$. Pour cela, soit un fermé $F \notin \overline{\mathcal{V}}_k'$. Il existe donc un voisinage $\mathcal{F}^{K_0}_{G_1,..G_n}$ de F disjoint de $\mathcal{V}_k'$ ($K_0 \in \mathcal{K}$, $G_1,..G_n \in \mathcal{G}$). Comme $\mathcal{V}_k'$ est permis pour la réunion, $\mathcal{F}^{K_0}$ est également un voisinage de F disjoint de $\mathcal{V}_k'$. Ainsi, le compact K_0, disjoint de F, rencontre tous les compacts $K \in \mathcal{V}_k'$. On a donc $K_0 \in \cap \{\mathcal{F}_K \,;\, K \in \mathcal{V}_k'\} = \mathcal{V}_f'$, soit $K_0 \in \mathcal{V}_k' \cap \mathcal{K} = \mathcal{V}_k$. Autrement dit, $F \notin \overline{\mathcal{V}}_k'$ entraine $F \notin \cap \{\mathcal{F}_{K_0} , K_0 \in \mathcal{V}_k\} = \mathcal{V}_f$, soit $\mathcal{V}_f \subset \overline{\mathcal{V}}_k'$, et :

$$\mathcal{V}_f = \overline{\mathcal{V}}_k'$$

Résumons ces résultats.

<u>Proposition 8-2-4</u>.- Soit ϕ_k une application s.c.s. de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{K}$ vérifiant la condition $\mathcal{V}_k = \overline{\mathcal{V}}_k \cap \mathcal{K}$, et soit ϕ_f' son plus petit prolongement s.c.s. sur $\mathcal{F}$, avec le noyau $\mathcal{V}_f' = \overline{\mathcal{V}}_k$. Les applications ϕ_k' et ϕ_f associées aux noyaux :

$$\mathcal{V}_k' = \bigcap_{F \in \mathcal{V}_f'} \mathcal{K}_F \quad , \quad \mathcal{V}_f = \bigcap_{K \in \mathcal{V}_k} \mathcal{F}_K$$

vérifient les conditions $\mathcal{V}_f = \overline{\mathcal{V}}_k'$ et $\mathcal{V}_k' = \mathcal{V}_f \cap \mathcal{K}$, et ϕ_f est le plus petit prolongement de ϕ_k' s.c.s. sur $\mathcal{F}$. Par dualité, on a également :

$$\mathcal{O}_k = \bigcap_{F\in\mathcal{O}_f} \mathcal{K}_F \quad , \quad \mathcal{O}'_f = \bigcap_{K\in\mathcal{O}'_k} \mathcal{F}_K$$

Dans le même ordre d'idées, notons aussi le résultat suivant :

__Proposition 8-2-5__.- Soit ϕ une τ-application de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{F}$ et $\mathcal{O}$ son noyau. On désigne par ϕ_f l'application dont le noyau est $\mathcal{O}_f = \cap\ \{\mathcal{F}_K\ ,\ K \in \mathcal{O}\}$, par ϕ'_k la restriction de ϕ_f à $\mathcal{K}$, dont le noyau est $\mathcal{O}'_k = \mathcal{O}_f \cap \mathcal{K}$, et par ϕ'_f l'application duale de ϕ'_k dont le noyau est $\mathcal{O}'_f = \cap\ \{\mathcal{F}_K\ ,\ K \in \mathcal{O}'_k\}$. Alors $\mathcal{O}'_f$ est l'adhérence de $\mathcal{O}$ dans $\mathcal{F}$, soit $\mathcal{O}'_f = \overline{\mathcal{O}}$, et ϕ'_f est la plus petite τ-application s.c.s. sur $\mathcal{F}$ majorant ϕ sur $\mathcal{K}$.

En effet, si $K \in \mathcal{O}$, K rencontre tous les $F \in \mathcal{O}_f$ donc appartient à $\mathcal{O}'_f$, d'où $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}'_f$. D'ailleurs $\mathcal{O}'_f$ est fermé dans $\mathcal{F}$, comme intersection des fermés $\mathcal{F}_K$, $K \in \mathcal{O}'_k$. Donc $\overline{\mathcal{O}} \subset \mathcal{O}'_f$. Si maintenant F est un fermé avec $F \notin \overline{\mathcal{O}}$, il existe un compact K_o tel que $\mathcal{F}^{K_o}$ contienne F et soit disjoint de $\mathcal{O}$. On a donc $K_o \in \mathcal{K}^F$ et $\mathcal{F}^{K_o} \cap \mathcal{O} = \emptyset$, c'est-à-dire $\mathcal{O} \subset \mathcal{F}_{K_o}$. Mais $\mathcal{O} \subset \mathcal{F}_{K_o}$ équivaut à $K_o \in \mathcal{O}_f \cap \mathcal{K}$, et $F \cap K_o = \emptyset$ entraîne $F \notin \mathcal{O}'_f$. Par suite $\overline{\mathcal{O}} \supset \mathcal{O}'_f$, d'où l'égalité.

__τ-applications compatibles avec la réunion ou l'intersection.__

Examinons sous quelles conditions une τ-application ϕ est compatible avec la réunion (i.e. $\phi(A \cup A') = \phi(A) \cup \phi(A')$) ou avec l'intersection (i.e. $\phi(A \cap A') = \phi(A) \cap \phi(A')$).

__Proposition 8-2-6__.- Une τ-application ϕ s.c.s. de $\mathcal{K}$ (resp. de $\mathcal{F}$) dans $\mathcal{F}$ est compatible avec l'intersection si et seulement si elle est de la forme $A \to \phi(A) = A \circ F_o$ pour un fermé F_o fixe.

D'après la Proposition 8-2-1 et la relation (8-1-9), une τ-application ϕ sur $\mathcal{K}$ (sur $\mathcal{F}$) est s.c.s. et compatible avec $\cap$ si et seulement si son noyau $\mathcal{O}$ est un filtre fermé dans $\mathcal{K}$ (dans $\mathcal{F}$). Etant stable pour $\cap$ et fermé, $\mathcal{O}$ contient son intersection $F_o = \cap\ \{F,\ F \in \mathcal{O}\}$. On a donc $\mathcal{O} \subset W_{F_o}$. Mais comme $\mathcal{O}$ ezt permis pour $\cup$ tout compact (tout fermé) $A \supset F_o$ est dans $\mathcal{O}$, d'où $\mathcal{O} = W_{F_o} \cap \mathcal{K}$ (resp. $\mathcal{O} = W_{F_o} \cap \mathcal{F}$), et $\phi(A) = A \circ F_o$. Il est immédiat que cette condition est suffisante.

Pour caractériser les applications compatibles avec la réunion, nous aurons besoin des lemmes suivants (qui nous seront utiles ultérieurement).

<u>LEMME 8-2-1</u> - Soit E un espace LCD. Pour G_1, G_2 ouverts et K compact dans E, on a $K \subset G_1 \cup G_2$ si et seulement si il existe deux compacts K_1 et K_2 tels que $K_1 \subset G_1$, $K_2 \subset G_2$ et $K = K_1 \cup K_2$.

Cette condition est manifestement suffisante. Considérons deux suites croissantes $\{B_n\}$ et $\{B'_n\}$ d'ouverts relativement compacts vérifiant $B_n \subset \overline{B}_n \subset B_{n+1}$, $B'_n \subset \overline{B'_n} \subset B'_{n+1}$ pour tout n, et $G_1 = \bigcup B_n$, $G_2 = \bigcup B'_n$. Si $K \subset G_1 \cup G_2$, on a $K \subset \bigcup (B_n \cup B'_n)$. Comme K est compact, il existe un entier n_0 tel que $K \subset B_{n_0} \cup B'_{n_0}$. La condition de l'énoncé est alors vérifiée avec $K_1 = K \cap \overline{B}_{n_0}$ et $K_2 = K \cap \overline{B'}_{n_0}$.

<u>LEMME 8-2-2</u> - Soient G ouvert, K_1 et K_2 compacts dans un espace LCD.E. On a $G \supset K_1 \cap K_2$ si et seulement si il existe deux ouverts G_1 et G_2 avec $G_1 \supset K_1$, $G_2 \supset K_2$ et $G = G_1 \cap G_2$.

La condition est manifestement suffisante. Inversement, supposons $G \supset K_1 \cap K_2$. Considérons deux suites décroissantes d'ouverts relativement compacts $\{B_n\}$ et $\{B'_n\}$ avec $B_n \supset \overline{B}_{n+1}$, $B'_n \supset \overline{B'}_{n+1}$, $B_n \downarrow K_1$, $B'_n \downarrow K_2$. On a $G^c \cap (\bigcap_n (\overline{B}_n \cap \overline{B'_n})) = \emptyset$, donc il existe un entier n_0 tel que $G \supset \overline{B}_{n_0} \cap \overline{B'}_{n_0}$. Les ouverts $G_1 = G \cup B_{n_0}$ et $G_2 = G \cup B'_{n_0}$ vérifient la condition de l'énoncé.

<u>LEMME 8-2-3</u> - Soit E un espace LCD. Une partie $\mathcal{O}$ de $\mathcal{K}(E)$ ne contenant pas $\emptyset$ est un antifiltre fermé dans $\mathcal{K}$ si et seulement si on a $\mathcal{O} = \mathcal{K}_{F_0}$ pour un $F_0 \in \mathcal{F}$.

On rappelle qu'un antifiltre $\mathcal{O}$ dans $\mathcal{K}$ est une partie de $\mathcal{K}$ permise pour la réunion et dont le complémentaire $\complement\mathcal{O}$ est stable pour la réunion finie. Pour $F_0 \in \mathcal{F}$, il est clair que $\mathcal{K}_{F_0}$ est un antifiltre fermé. Inversement, soit $\mathcal{O}$ un antifiltre fermé dans $\mathcal{K}$. Si un compact K n'est pas dans $\mathcal{O}$, il admet un voisinage ouvert disjoint de $\mathcal{O}$, et, $\complement\mathcal{O}$ étant permis pour $\cap$ (puisque $\mathcal{O}$ est permis pour $\cup$), on peut supposer ce voisinage de la forme $\mathcal{K}^F$ pour un $F \in \mathcal{F}$. On a alors $K \in \mathcal{K}^F$ et $\mathcal{O} \subset \mathcal{K}_F$. Soit $\mathcal{O}_f \subset \mathcal{F}$ la famille des fermés F tels que $\mathcal{O} \subset \mathcal{K}_F$, c'est-à-dire $\mathcal{O}_f = \bigcap \{\mathcal{F}_K , K \in \mathcal{O}\}$. Il est clair que l'on a $\mathcal{O} = \bigcap \{\mathcal{K}_F , F \in \mathcal{O}_f\}$. La famille $\mathcal{O}_f$ est fermée dans $\mathcal{F}$, comme intersection de fermés $\mathcal{F}_K$. Montrons qu'elle est stable pour l'intersection. En effet, soient $F_1 = G_1^c$ et $F_2 = G_2^c$ deux fermés dans $\mathcal{O}_f$, G_1 et G_2 leurs complémentaires. Si $K \in \mathcal{O}$, K n'est contenu ni dans G_1 ni dans G_2. Supposons $K \subset G_1 \cup G_2$. D'après le lemme 8-1-1, il existe deux compacts K_1 et K_2 avec $K_1 \subset G_1$, $K_2 \subset G_2$ et $K = K_1 \cup K_2$. $\complement\mathcal{O}$ étant stable pour la réunion finie, l'un des compacts K_1 et K_2, par exemple K_1 est dans $\mathcal{O}$ (sinon $K = K_1 \cup K_2 \notin \mathcal{O}$). De $K_1 \cap G_c^1 = \emptyset$ résulte $G_1^c = F_1 \notin \mathcal{O}_f$, contrairement à l'hypothèse. Donc, K n'est pas contenu dans $G_1 \cup G_2$, et $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{O}_f$. Etant fermée et stable pour l'intersection finie, $\mathcal{O}_f$ contient son intersection $F_0 = \bigcap \{F, F \in \mathcal{O}_f\}$. Si $F_0 = \emptyset$, on a $\mathcal{O} = \emptyset = \mathcal{K}_\emptyset$. Si $F_0 \neq \emptyset$, $F \in \mathcal{O}_f$ équivaut à $F \supset F_0$, et par

— — — — —

suite $\mathcal{V} = \mathcal{K}_{F_0}$.

<u>LEMME 8-2-4</u> - Soit E un espace LCD. Une partie non vide $\mathcal{V}$ de $\mathcal{F}(E)$ ne contenant pas $\emptyset$ est un antifiltre fermé dans $\mathcal{F}$ si et seulement si $\mathcal{V} = \mathcal{F}_{K_0}$ pour un compact K_0 non vide. Une partie $\mathcal{W}$ de $\mathcal{G}$ ne contenant pas $\emptyset$ est un filtre ouvert dans $\mathcal{G}$ si et seulement si $\mathcal{W} = \mathcal{G}_{K_0}$ pour un compact K_0 non vide.

Les deux énoncés étant équivalents par dualité, il suffit de démontrer le premier. Si K_0 est un compact et non vide, il est clair que $\mathcal{F}_{K_0}$ est un antifiltre fermé dans $\mathcal{F}$. Inversement, soit $\mathcal{V}$ un antifiltre fermé dans $\mathcal{F}$ ne contenant pas $\emptyset$. Si $F \notin \mathcal{V}$, F admet un voisinage disjoint de $\mathcal{V}$ et, $\beta\mathcal{V}$ étant permis pour $\cap$, on peut supposer ce voisinage de la forme $\mathcal{F}^K$ pour un compact K disjoint de F. On a alors $\mathcal{V} \subset \mathcal{F}_K$. L'ensemble $\mathcal{V}_k$ des compacts non vides tels que $\mathcal{F}_K \supset \mathcal{V}$ est $\mathcal{V}_k = \cap \{\mathcal{K}_F\ ,\ F \in \mathcal{V}\}$, et on a $\mathcal{V} = \cap \{\mathcal{F}_K,\ K \in \mathcal{V}_k\}$. $\mathcal{V}_k$ est fermé dans $\mathcal{K}$. Montrons qu'il est stable pour l'intersection. Soient donc K_1 et $K_2 \in \mathcal{V}_k$ et $F \in \mathcal{V}$. Si l'on pose $G = F^c$, ni K_1 , ni K_2 ne sont contenus dans G. Si $K_1 \cap K_2 \subset G$, d'après le lemme 1, il existe deux ouverts G_1 et G_2 avec $K_1 \subset G_1$, $K_2 \subset G_2$ et $G = G_1 \cap G_2$. On a donc $G_1^c \supset G^c = F$, soit $G_1^c \in \mathcal{V}$, puisque $\mathcal{V}$ est permis pour $\cup$, et $K_1 \cap G_1^c = \emptyset$, ce qui contredit $K_1 \in \mathcal{V}_k$. Donc $K_1 \cap K_2$ rencontre F, et $\mathcal{V}_k$ est stable pour l'intersection. Etant fermée et stable pour $\cap$, $\mathcal{V}_k$ contient son intersection $K_0 = \{K,\ K \in \mathcal{V}_k\}$, et on a $\mathcal{V} = \mathcal{F}_{K_0}$.

Nous sommes maintenant à même de caractériser les τ-applications compatibles avec la réunion.

<u>Proposition 8-2-7</u>.- Une τ-application ψ s.c.s. de $\mathcal{K}$ (resp. de $\mathcal{F}$) dans $\mathcal{F}$ est compatible avec la réunion si et seulement si elle est de la forme $K \to \psi(K) = K \oplus \check{F}_0$ pour un fermé F_0 (respectivement $F \to \psi(F) = F \oplus \check{K}_0$ pour un compact K_0). ψ est alors continue.

En effet, d'après la Proposition 8-2-1 et la relation (8-1-12), ψ est s.c.s. si et seulement si son noyau $\mathcal{V}$ est un antifiltre fermé dans $\mathcal{K}$(resp. dans $\mathcal{F}$). D'après le Lemme 8-1-3 (resp. 8-1-4), on a donc $\mathcal{V} = \mathcal{K}_{F_0}$ pour un fermé F_0 (resp. $\mathcal{V} = \mathcal{F}_{K_0}$ pour un compact K_0), d'où la proposition.

8-3 COMPLEMENTS TOPOLOGIQUES.

On a vu qu'il y avait correspondance bijective entre les τ-applications croissantes s.c.s. sur $\mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$ ou $\mathcal{F}(\mathbb{R}^d)$ et les familles $\mathcal{V}$ permises pour la réunion et fermées dans $\mathcal{K}$ ou dans $\mathcal{F}$. Si l'on munit l'ensemble de ces familles $\mathcal{V}$ de la topologie induite par celle de $\mathcal{F}(\mathcal{K})$ ou de $\mathcal{F}(\mathcal{F})$, on obtient donc une topologie sur l'espace des τ-applications croissantes et s.c.s. Nous allons expliciter la convergence dans cette topologie. Pour cela, établissons quelques résultats préalables.

Proposition 8-3-1.- Soit E un espace LCD, et $\mathcal{V}_0$ une partie quelconque de $\mathcal{K}(E)$. Si l'on pose $\mathcal{V}' = \cap \{\mathcal{F}_K , K \in \mathcal{V}_0\}$ et $\mathcal{V} = \cap \{\mathcal{K}_F, F \in \mathcal{V}'\}$, $\mathcal{V}$ est l'adhérence dans $\mathcal{K}$ de la partie permise pour la réunion engendrée par $\mathcal{V}_0$ dans $\mathcal{K}$. De même, si $\mathcal{V}'_0$ est une partie quelconque de $\mathcal{F}$ et si l'on pose $\mathcal{V} = \cap \{\mathcal{K}_F , F \in \mathcal{V}'_0\}$ et $\mathcal{V}' = \cap \{\mathcal{F}_K , K \in \mathcal{V}\}$, $\mathcal{V}'$ est l'adhérence dans $\mathcal{F}$ de la partie stable pour $\cup$ engendrée par $\mathcal{V}'_0$ dans $\mathcal{F}$.

Démontrons par exemple le premier énoncé. Il est clair que $\mathcal{V}$ est fermée dans $\mathcal{K}$, comme intersection des fermés $\mathcal{K}_F$, $F \in \mathcal{V}'$, $\mathcal{V}$ contient la partie permise pour $\cup$, soit $\mathcal{V}_1$, engendrée par $\mathcal{V}_0$ dans $\mathcal{K}$. En effet, si $K \in \mathcal{V}_0$, K rencontre tous les fermés de $\mathcal{V}'$, donc $K \in \mathcal{V}$ et $\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}$. Comme $\mathcal{V}$ est permis pour $\cup$ et fermée dans $\mathcal{K}$, on en déduit $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}$, puis $\overline{\mathcal{V}}_1 \subset \mathcal{V}$. Montrons l'inclusion inverse. Pour cela, soit K un compact avec $K \notin \overline{\mathcal{V}}_1$. Il existe donc un voisinage ouvert de K disjoint de $\mathcal{V}_1$, et, $\mathcal{V}_1$ étant permis pour la réunion, on peut supposer ce voisinage de la forme $\mathcal{K}^F$ pour un $F \in \mathcal{F}$. On a donc $F \cap K = \emptyset$ et $\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}_1 \subset \mathcal{K}_F$. Comme F rencontre tous les compacts de $\mathcal{V}_0$, on a $F \in \mathcal{V}'$ et $K \notin \mathcal{K}_F$ entraîne alors $K \notin \mathcal{V}$. Donc $\overline{\mathcal{V}}_1 \supset \mathcal{V}$, et par suite $\overline{\mathcal{V}}_1 = \mathcal{V}$.

Désignons par $\mathcal{F}_u(\mathcal{K})$ le sous-espace de $\mathcal{F}(\mathcal{K})$ constitué des parties $\mathcal{V}$ permises pour $\cup$ fermées dans $\mathcal{K}$ et ne contenant pas l'ensemble vide $\emptyset$. De même, désignons par $\mathcal{F}_u(\mathcal{F})$ le sous-espace de $\mathcal{F}(\mathcal{F})$ constitué des parties $\mathcal{V}'$ permises pour $\cup$, fermées dans $\mathcal{F}$ et non vides. On note que la famille vide $\mathcal{V} = \emptyset$ est dans $\mathcal{F}_u(\mathcal{K})$ (mais non dans $\mathcal{F}_u(\mathcal{F})$). De même, $\mathcal{V}' = \mathcal{F}$ est le seul élément de $\mathcal{F}_u(\mathcal{F})$ qui contienne l'ensemble vide $\emptyset$ (mais $\mathcal{K}$ n'est pas dans $\mathcal{F}_u(\mathcal{K})$). De la proposition précédente découle le :

COROLLAIRE - Les formules réciproques :

$$\mathcal{V} = \bigcap_{F \in \mathcal{V}'} \mathcal{K}_F \quad , \quad \mathcal{V}' = \bigcap_{K \in \mathcal{V}} \mathcal{F}_K$$

définissent une bijection $\mathcal{V} \to \mathcal{V}'$ de $\mathcal{F}_u(\mathcal{K})$ sur $\mathcal{F}_u(\mathcal{F})$. En particulier, l'image de la famille vide $\emptyset \in \mathcal{F}_u(\mathcal{K})$ est $\mathcal{F} \in \mathcal{F}_u(\mathcal{F})$, c'est-à-dire le seul élément $\mathcal{O}'$ de $\mathcal{F}_u(\mathcal{F})$ tel que $\emptyset \in \mathcal{O}'$.

Nous allons montrer que les espaces $\mathcal{F}_u(\mathcal{K})$ et $\mathcal{F}_u(\mathcal{F})$ sont fermés (donc compacts) dans $\mathcal{F}(\mathcal{K})$ et $\mathcal{F}(\mathcal{F})$ respectivement, et que l'application $\mathcal{O} \to \mathcal{O}'$ définie dans le corollaire est en fait un homéomorphisme. Pour cela, nous allons d'abord établir quelques résultats préliminaires qui présentent d'ailleurs un certain intérêt par eux-mêmes.

<u>Proposition 8-3-2</u>.- L'application $K \to \mathcal{F}_K$ est un homéomorphisme de $\mathcal{K}' = \mathcal{K} \setminus \{\emptyset\}$ sur l'espace des antifiltres non vides fermés dans $\mathcal{F}$. De même, l'application $K \to \mathcal{G}_K$ est un homéomorphisme de $\mathcal{K}'$ sur l'espace des filtres ouverts dans $\mathcal{G}$ distincts de $\mathcal{G}$.

Les deux énoncés se déduisent l'un de l'autre par dualité, et il suffit de démontrer le premier. D'après le lemme 8-1-4, l'application $K \to \mathcal{G}_K$ est une bijection, et il faut montrer qu'elle est bicontinue.

a/ - Soit $\{K_n\} \subset \mathcal{K}'$ une suite convergeant vers K dans $\mathcal{K}'$, et montrons que $\{\mathcal{F}_{K_n}\}$ converge vers $\mathcal{F}_K$ dans $\mathcal{F}(\mathcal{F})$, ce qui établira la continuité de $K \to \mathcal{G}_K$ et de $K \to \mathcal{F}_K$. Soit $F \in \mathcal{F}_K$ et (puisque $K \neq \emptyset$) x un point de $F \cap K$. De $x \in K$ résulte qu'il existe une suite $\{x_n\}$ convergeant vers x dans E avec $x_n \in K_n$ pour chaque n. La suite $F_n = F \cup \{x_n\}$ converge alors vers F en vérifiant $F_n \in \mathcal{F}_{K_o}$. Donc $\underline{\lim}\ \mathcal{F}_{K_n} \supset \mathcal{F}_K$. Soit alors $n_k \to F_{n_k} \in \mathcal{F}_{K_{n_k}}$ avec $\lim F_{n_k} = F$ dans $\mathcal{F}$, et soit, pour chaque n_k, un point $x_{n_k} \in F_{n_k} \cap K_{n_k}$. Les K_n étant contenus dans un compact fixe, la suite $\{x_{n_k}\}$ admet une valeur d'adhérence $x_o \in F \cap K$. On a donc $F \in \mathcal{F}_K$ et $\overline{\lim}\ \mathcal{F}_{K_n} \subset \mathcal{F}_K$, d'où la convergence $\mathcal{F}_{K_n} \to \mathcal{F}_K$ et la continuité de $K \to \mathcal{F}_K$.

b/ - Inversement, soit $\mathcal{O}_n$ une suite d'antifiltres non vides fermés dans $\mathcal{F}$ convergeant vers une limite $\mathcal{O}$ dans $\mathcal{F}'(\mathcal{F})$, c'est-à-dire vérifiant $\mathcal{O} \neq \emptyset$. $\mathcal{O}$ est un antifiltre non vide. En effet, $\mathcal{O}$ est permise pour $\cup$, car si $F \supset F_o$, $F_o \in \mathcal{O}$, il existe une suite $F_n \in \mathcal{O}_n$, avec $F_n \to F_o$, et la suite $F_n \cup F_o \in \mathcal{O}$ converge vers $F \cup F_o = F$, d'où $F \in \mathcal{O}$. Si F_o et F' sont dans $\complement \mathcal{O}$, on ne peut pas avoir $F \cup F' \in \mathcal{O}$. En effet, si un compact K est disjoint de $F \cup F'$, on a $\mathcal{O}_n \subset \mathcal{F}_K$ pour n assez grand, donc $\mathcal{O} \subset \mathcal{F}_K$. Par suite, $\mathcal{O}$ est un antifiltre fermé non vide. D'après le lemme (8-1-4), on a $\mathcal{O}_n = \mathcal{F}_{K_n}$ et $\mathcal{O} = \mathcal{F}_{K_o}$ pour des compacts non vides K_n et K_o. Il reste à montrer que la suite $\{K_n\}$ converge vers K_o dans $\mathcal{K}'$. Tout d'abord, les K_n sont contenus dans un compact fixe. En effet, s'il n'en était pas ainsi, il existerait une suite $n_k \to x_{n_k}$ sans valeur d'adhérence dans E et telle que $x_{n_k} \in K_{n_k}$. La suite de fermés $\{\{x_{n_k}\}\}$ convergerait donc vers $\emptyset$ dans $\mathcal{F}$ en vérifiant $\{x_{n_k}\} \in \mathcal{O}_{n_k}$, d'où résulterait $\emptyset \in \mathcal{O} = \mathcal{F}_{K_o}$, ce qui est impossible.

Etant contenus dans un compact fixe, la suite $\{K_n\}$ admet dans $\mathcal{K}'$ une valeur d'adhérence K_o'. Mais, d'après la partie a/ de la démonstration, on a $K_o' = K_o$, de sorte que la suite $\{K_n\}$ converge vers K_o. Par suite, l'application $\mathcal{F}_K \to K$ est continue, ce qui achève la démonstration.

__Proposition 8-3-3__.- L'application $F \to \mathcal{F}_F$ est un homéomorphisme de $\mathcal{F}$ sur le sous-espace de $\mathcal{F}(\mathcal{K})$ constitué des familles $\mathcal{O}$ fermées dans $\mathcal{K}$ permises pour la réunion et dont les complémentaires sont stables pour la réunion (i.e. : $\mathcal{O}$ est vide ou est un antifiltre fermé dans $\mathcal{K}$).

La démonstration est analogue à celle de la proposition précédente. Comme corollaire de ces deux propositions, nous pouvons énoncer :

__COROLLAIRE__ - Soit $\{K_n\}$ une suite convergeant vers K dans $\mathcal{K}'$, et F un fermé rencontrant K. Il existe alors une suite $\{F_n\}$ convergeant vers F dans $\mathcal{F}$ avec $F_n \cap K_n \neq \emptyset$ pour tout n.

Soit $\{F_n\}$ une suite convergeant vers F dans $\mathcal{F}$, et K un compact rencontrant F. Il existe une suite $\{K_n\}$ convergeant vers K dans $\mathcal{K}'$ avec $K_n \cap F_n \neq \emptyset$ pour n assez grand.

En effet, $K_n \to K$ dans $\mathcal{K}'$ entraine $\mathcal{F}_{K_n} \to \mathcal{F}_K$ dans $\mathcal{F}(\mathcal{F})$, d'après la Proposition 8-3-2, et si $F \in \mathcal{F}_K$ il existe donc une suite $n \to F_n \in \mathcal{F}_{K_n}$ avec $F_n \to F$ dans $\mathcal{F}$.

__Proposition 8-3-4__.- L'application $F \to S^F = \{F', F' \in \mathcal{F}, F' \subset F\}$ estun homéomorphisme de $\mathcal{F}$ sur le sous-espace de $\mathcal{F}(\mathcal{F})$ constitué des familles $\mathcal{O}$ non vides, fermées dans $\mathcal{F}$, permises pour l'intersection et stables pour la réunion finie. De même, l'application $F \to W_F$ est un homéomorphisme de $\mathcal{F}$ sur le sous-espace de $\mathcal{F}(\mathcal{F})$ constitué des familles non vides, fermées dans $\mathcal{F}$, permises pour $\cup$ et stables pour $\cap$ (i.e., $\mathcal{O}$ est $\mathcal{F}$ ou un filtre fermé dans $\mathcal{F}$).

On vérifie sans peine que ces applications sont bijectives. Montrons que la première application est bicontinue.

a/ - Soit $\{A_n\} \subset \mathcal{F}$ une suite convergeant vers A dans $\mathcal{F}$, et montrons que $\{S^{A_n}\}$ converge vers $\{S^A\}$ dans $\mathcal{F}(\mathcal{F})$. Comme $F_{n_k} \subset A_{n_k}$ et $F_{n_k} \to F$ entraîne $F \subset A$, on a $\overline{\lim}\, S^{A_n} \subset S^A$. Il reste à montrer $S^A \subset \underline{\lim}\, S^{A_n}$, et pour cela que tout voisinage d'un fermé $F \subset A$ rencontre tous les S^{A_n} au delà d'un certain rang. Les S^{A_n} étant permis pour l'intersection, on peut se limiter aux voisinages de F de la forme $\mathcal{F}_{G_1,..G_k}$, $G_1,..G_k \in \mathcal{G}$. Comme $A \in \mathcal{F}_{G_1,..G_k}$, on a aussi $A_n \in \mathcal{F}_{G_1,..G_k}$ pour n assez grand, d'où le résultat. Par suite, $F \to S^F$ est continue.

b/ - Inversement, soit $\{F_n\}$ une suite dans $\mathcal{F}$ telle que $\{S^{F_n}\}$ converge vers $\mathcal{O}$ dans $\mathcal{F}(\mathcal{F})$. Soit $n_k \to \{F_{n_k}\}$ une suite partielle convergeant vers F_o dans $\mathcal{F}$. D'après a/, on a $S^{F_{n_k}} \to S^{F_o}$ dans

$\mathcal{F}(\mathcal{F})$, d'où $\mathcal{O} = S^{F_o}$. Par suite, F_o est l'unique valeur d'adhérence de la suite $\{F_n\}$, et $F_n \to F_o$ dans $\mathcal{F}$. D'où la continuité de l'application $S^F \to F$.

On démontre de manière analogue la bicontinuité de $F \to W_F$.

<u>COROLLAIRE</u> - Si une suite $\{F_n\}$ converge vers F dans $\mathcal{F}$, et si F' est un fermé tel que $F \supset F'$ (resp. $F \subset F'$), on peut trouver une suite $\{F_n'\}$ convergeant vers F' dans $\mathcal{F}$ en vérifiant $F_n' \subset F_n$ (resp. $F_n' \supset F_n$) pour tout n.

En effet, si $F' \subset F$, on a $F' \in S^F$. Mais $S^{F_n} \to S^F$ dans $\mathcal{F}(\mathcal{F})$, d'après la proposition. Il existe donc une suite $n \to F_n' \in S^{F_n}$ convergeant vers F' dans $\mathcal{F}$.

<u>Caractérisation des espaces $\mathcal{F}_u$.</u>

Nous sommes maintenant à même de caractériser les espaces $\mathcal{F}_u(\mathcal{K})$ et $\mathcal{F}_u(\mathcal{F})$ définis plus haut.

<u>Proposition 8-3-5.</u>- Les espaces $\mathcal{F}_u(\mathcal{K})$ et $\mathcal{F}_u(\mathcal{F})$ sont compacts, et l'application $\mathcal{O} \to \mathcal{O}'$ définie dans le corollaire de la Proposition 8-3-1 est un homéomorphisme de $\mathcal{F}_u(\mathcal{K})$ sur $\mathcal{F}_u(\mathcal{F})$.

Montrons que $\mathcal{F}_u(\mathcal{K})$ est fermé dans l'espace compact $\mathcal{F}(\mathcal{K})$. En effet, soit $\{\mathcal{O}_n\} \subset \mathcal{F}_u(\mathcal{K})$ une suite convergeant vers $\mathcal{O}$ dans $\mathcal{F}(\mathcal{K})$. $\emptyset$ n'appartient pas à $\mathcal{O}$, car sinon, il existe une suite $n \to K_n \in \mathcal{O}_n$ convergeant vers $\emptyset$ dans $\mathcal{K}$, ce qui implique $K_n = \emptyset$ pour n assez grand et contredit $\emptyset \in \mathcal{O}_n$. Montrons que $\mathcal{O}$ est permise pour $\bigcup$. Soit $K \in \mathcal{O}$ et K' un compact contenant K. Il existe une suite $n \to K_n \in \mathcal{O}_n$ convergeant vers K dans $\mathcal{K}$. D'après le corollaire de la proposition 8-3-4, il existe une suite $n \to F_n' \in W_{K_n}$ cobvergeant vers K' pour la topologie de $\mathcal{F}$. Soit B un ouvert relativement compact contenant K'. La suite $n \to K_n' = \overline{B} \cap F_n'$ converge alors vers K' dans $\mathcal{K}$, comme on le vérifie sans peine. Par suite, $\mathcal{O} \in \mathcal{F}_u(\mathcal{K})$, et cet espace est fermé, donc compact dans $\mathcal{F}(\mathcal{K})$. Même démonstration pour la compacité de $\mathcal{F}_u(\mathcal{F})$.

Montrons que l'application $\mathcal{O} \to \mathcal{O}'$ de $\mathcal{F}_u(\mathcal{K})$ sur $\mathcal{F}_u(\mathcal{F})$ est continue. Soit $\{\mathcal{O}_n\}$ une suite convergeant vers $\mathcal{O}$ dans $\mathcal{F}_u(\mathcal{K})$. On a $\mathcal{O} \in \mathcal{F}_u(\mathcal{K})$ d'après ce qui précède. Montrons que $\{\mathcal{O}_n'\}$ converge vers $\{\mathcal{O}'\}$, ce qui établira la continuité de l'application $\mathcal{O} \to \mathcal{O}'$. Si une suite $n_k \to F_{n_k} \in \mathcal{O}_{n_k}'$ converge vers F dans $\mathcal{F}$, on a $F \in \mathcal{O}'$, d'où $\overline{\lim}\ \mathcal{O}_n' \subset \mathcal{O}'$. En effet, $F_{n_k} \in \mathcal{O}_{n_k}'$ équivaut à $\mathcal{O}_{n_k} \subset \mathcal{K}_{F_{n_k}}$ et entraîne $\mathcal{O} \subset \mathcal{K}_F$, d'après la proposition 8-3-3, c'est-à-dire $F \in \mathcal{O}'$.

Il reste à montrer $\mathcal{O}' \subset \underline{\lim}\ \mathcal{O}'_n$, donc que tout voisinage d'un $F \in \mathcal{O}'$ rencontre tous les $\mathcal{O}'_n$ pour n assez grand. Les $\mathcal{O}'_n$ étant permis pour U , on peut se limiter aux voisinages de la forme $\mathfrak{F}^K$, $K \in \mathcal{K}$. Mais $F \in \mathfrak{F}^K$ équivaut à $K \in \mathcal{K}^F$, c'est-à-dire à $K \notin \mathcal{O}$. On a donc $K \in \mathcal{O}_n$ pour n assez grand. Par suite, il existe $F_n \in \mathcal{O}'_n$ avec $K \notin \mathcal{K}^{F_n}$, soit $F_n \notin \mathfrak{F}^K$ pour n assez grand. Donc $\mathfrak{F}^K$ rencontre $\mathcal{O}'_n$, et $\mathcal{O}' \subset \underline{\lim}\ \mathcal{O}'_n$. L'application $\mathcal{O} \to \mathcal{O}'$ est donc continue. On démontre de la même manière la continuité de $\mathcal{O}' \to \mathcal{O}$.

Lorsque E est l'espace euclidien $\mathbb{R}^d$, les $\mathcal{O} \in \mathfrak{F}_u(\mathcal{K})$ sont les noyaux des τ-applications s.c.s. sur $\mathcal{K}$ telles que l'on n'ait pas $\phi = \mathbb{R}^d$ identiquement sur $\mathcal{K}$, et les $\mathcal{O}' \in \mathfrak{F}_u(\mathfrak{F})$ sont les noyaux des τ-applications ϕ' s.c.s. sur $\mathfrak{F}$ telles que l'on n'ait pas identiquement $\phi' = \emptyset$ sur $\mathfrak{F}$. Nous pouvons identifier ces famille d'applications aux espaces $\mathfrak{F}_u(\mathcal{K})$ et $\mathfrak{F}_u(\mathfrak{F})$ respectivement, et définir ainsi des topologies sur les espaces d'applications s.c.s. sur $\mathcal{K}$ et $\mathfrak{F}$ respectivement. En particulier :

Une suite $\{\phi_n\}$ de τ-applications s.c.s. et non identiques à $\mathbb{R}^d$ sur $\mathcal{K}$ admet des valeurs d'adhérence. Elle converge vers une τ-application ϕ s.c.s. et non identique à $\mathbb{R}^d$ sur $\mathcal{K}$ si et seulement si :

a/ - Pour tout $K \in \mathcal{K}$ tel que $0 \in \phi(K)$, il existe une suite $\{K_n\}$ convergeant vers K dans $\mathcal{K}$ en vérifiant $0 \in \phi_n(K_n)$.

b/ - Si une suite partielle $n_k \to K_{n_k}$ converge vers K dans $\mathcal{K}$ en vérifiant $0 \in \phi_{n_k}(K_{n_k})$, on a $0 \in \phi(K)$.

On a un énoncé analogue pour les suites d'applications s.c.s. et non identiques à ϕ sur $\mathfrak{F}$.

Nous allons maintenant construire une base de la topologie de l'espace $\mathfrak{F}_u(\mathcal{K})$ ou $\mathfrak{F}_u(\mathfrak{F})$, en nous appuyant sur le lemme suivant :

<u>LEMME 8-3-1</u> - Soient E un espace LCD, $\mathcal{B}$ une base de la topologie de E, $\mathcal{C} \subset \mathcal{K}(E)$ une classe de compacts stable pour l'intersection finie telle que la classe stable pour la réunion finie et l'intersection infinie engendrée par $\mathcal{C}$ soit identique à $\mathcal{K}(E)$. Alors la topologie de $\mathfrak{F}(E)$ est engendrée par les $\mathfrak{F}_B$, $B \in \mathcal{B}$ et les $\mathfrak{F}^C$, $C \in \mathcal{C}$.

On sait que la topologie de $\mathfrak{F}$ est engendrée par deux sortes d'ouverts : <u>les ouverts du type s.c.i.</u> (qui engendrent la topologie de la semi-continuité inférieure) qui sont les $\mathfrak{F}_G$, $G \in \mathcal{G}$, et <u>les ouverts du type s.c.s.</u> (qui engendrent la topologie de la semi-continuité supérieure) qui sont les $\mathfrak{F}^K$, $K \in \mathcal{K}$.

Tout $G \in \mathcal{G}$ est de la forme $G = \bigcup B_i$ pour une famille B_i contenue dans $\mathcal{B}$, et on a $\mathcal{F}_G = \mathcal{F}_{\bigcup B_i} = \bigcup \mathcal{F}_{B_i}$. Par suite, les $\mathcal{F}_B$, $B \in \mathcal{B}$ constituent une base de la topologie s.c.i. sur $\mathcal{F}$.

Désignons par $\mathcal{C}'$ la classe stable pour la réunion et l'intersection finies engendrée par $\mathcal{C}$. Tout $K \in \mathcal{K}$ est de la forme $K = \bigcap C_i'$, pour une famille C_i' contenue dans $\mathcal{C}'$. Pour $F \in \mathcal{F}^K$, on a $\bigcap (C_i' \cap F) = \emptyset$ et, les C_i' étant compacts, on peut trouver un nombre fini d'indices $i_1, .. i_k$ avec $F \cap C'_{i_1} \cap .. \cap C'_{i_k} = \emptyset$. D'ailleurs, $C' = C'_{i_1} \cap .. \cap C'_{i_k}$ est dans $\mathcal{C}'$ et contient K, d'où $F \in \mathcal{F}^{C'} \subset \mathcal{F}^K$. Etant dans $\mathcal{C}'$, C' est de la forme $C' = C_1 \cup .. \cup C_n$, $C_i \in \mathcal{C}$, et $\mathcal{F}^{C'} = \mathcal{F}^{\bigcup C_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{F}^{C_i}$. Par suite, les ouverts $\mathcal{F}^C$, $C \in \mathcal{C}$ engendrent le topologie s.c.s., et le lemme en résulte.

Appliquons ce lemme à l'espace LCD $\mathcal{A}$ égal à $\mathcal{K}$ où à $\mathcal{F}$. Si $\mathcal{A} = \mathcal{F}$, $\mathcal{B}$ sera la classe des $\mathcal{F}^K_{G_1, .. G_k}$, $K \in \mathcal{K}$ et $G_i \in \mathcal{G}$, et $\mathcal{C}$ la classe des $\mathcal{F}^G_{K_1, .. K_k}$, $G \in \mathcal{G}$, $K_i \in \mathcal{K}$. Si $\mathcal{A} = \mathcal{K}$, on prendra pour $\mathcal{B}$ la classe des $\mathcal{K}^F_{G_1, .. G_k}$, $F \in \mathcal{F}$, $G_i \in \mathcal{G}$, et pour $\mathcal{C}$ la classe $\mathcal{K}^{K^c}_{F_1, .. F_k}$, $K \in \mathcal{K}$, $F_i \in \mathcal{F}$. Dans ce dernier cas, on voit apparaître le complémentaire d'un compact, au lieu d'un ouvert quelconque, parce que les ensembles d'une famille compacte dans sont toujours contenus dans un compact fixe.

Il est alors possible d'utiliser un système de notation unique permettant de traiter simultanément le cas des espaces $\mathcal{K}$ et $\mathcal{F}$. On désignera par $\mathcal{A}$ l'un de ces deux espaces et l'autre par $\mathcal{A}'$. Soit $\mathcal{A}' = \mathcal{F}$ si $\mathcal{A} = \mathcal{K}$ et inversement. On a alors dans tous les cas :

$$\mathcal{B} = \left\{ \mathcal{A}^{A'}_{G_1, .. G_k} \quad ; \quad A' \in \mathcal{A}' \; , \; G_1, .. G_k \in \mathcal{G} \right\}$$

$$\mathcal{C} = \left\{ \mathcal{A}^{A^c}_{A_1', .. A_k'} \quad ; \quad A \in \mathcal{A}, \quad A_1', .. A_k' \in \mathcal{A}' \right\}$$

La topologie s.c.i. sur $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ est alors engendrée par les $\mathcal{F}_\Gamma$, $\Gamma \in \mathcal{B}$, et la topologie s.c.s. par les $\mathcal{F}^\chi$, $\chi \in \mathcal{C}$. On prendra garde que Γ et χ sont des familles d'ensembles de E.

Examinons maintenant la topologie induite par $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ sur le sous-espace compact $\mathcal{F}_u(\mathcal{A})$. Pour $\mathcal{V} \in \mathcal{F}_u(\mathcal{A})$ et $\chi = \mathcal{A}^{A^c}_{A_1', .. A_k'} \in \mathcal{C}$, la relation $\mathcal{V} \in \mathcal{F}^\chi$, i.e. $\mathcal{V} \cap \chi = \emptyset$ signifie que tout $V \in \mathcal{V}$ rencontre A ou est disjoint de l'un des A_i'. Si $\mathcal{V} = \emptyset$, on a donc $\mathcal{V} \in \mathcal{F}^\chi$ pour tout $\chi \in \mathcal{C}$. Si $\mathcal{V} \neq \emptyset$, soit $V \in \mathcal{V}$. Si $V = \emptyset$, on a $\mathcal{V} = \mathcal{A} = \mathcal{F}$, et $\mathcal{V} \in \mathcal{F}^\chi$ entraîne $\chi = \emptyset$; si $V \neq \emptyset$ et si V est disjoint de A_1' (par exemple). Soit $x_1 \in A_1' \cap A$ (si $A_1' \subset A^c$, on a $\chi = \emptyset$ et $\mathcal{F}^\chi = \mathcal{F}$ lui-même). L'ensemble $V \cup \{x_1\}$ est encore dans $\mathcal{V}$, et rencontre A_1'. En procédant par itération, on obtient un ensemble $V \cup \{x_1,\dots x_k\} \in \mathcal{O}$ rencontrant tous les A'_i. Par suite, $\mathcal{O} \in \mathcal{F}^X$ entraine que V rencontre A, soit $\mathcal{O} \in \mathcal{F}^{\mathcal{A}^{A^c}} \subset \mathcal{F}^X$. On peut donc remplacer $\mathcal{F}^X$ par la famille des $\mathcal{O}$ disjoints de $\mathcal{A}^{A^c}$. Autrement dit, la topologie s.c.s. sur $\mathcal{F}_u(\mathcal{A})$ est engendrée par les $\{\mathcal{O} : \mathcal{O} \in \mathcal{F}_u(\mathcal{A}),\ \mathcal{O} \subset \mathcal{A}_{A^c}\}$, $A \in \mathcal{A}$.

Soit maintenant $\Gamma = \mathcal{A}^{A'}_{G_1,\dots G_k}$ un élément de $\mathcal{B}$. Ici, $\mathcal{O} \in \mathcal{F}_\Gamma$ signifie que $\mathcal{O}$ rencontre $\mathcal{A}^{A'}_{G_1,\dots G_k}$, donc en particulier $\mathcal{O} \neq \emptyset$. Les G_i ne sont pas contenus dans A' (sinon $\Gamma = \emptyset$ et $\mathcal{F}_\Gamma = \emptyset$). Soit alors pour chaque i un point $x_i \in G_i$, $x_i \notin A'$. Si $V \in \mathcal{A}^{A'} \cap \mathcal{O}$, $V \cup \{x_1,\dots x_k\} \in \mathcal{O} \cap \Gamma$, puisque $\mathcal{O}$ est permis pour $\cup$. Inversement, si $\mathcal{O}$ rencontre Γ, il rencontre $\mathcal{A}^{A'} \supset \Gamma$. Ainsi, $\mathcal{O} \in \mathcal{F}_\Gamma$ équivaut à $\mathcal{O} \cap \mathcal{A}^{A'} \neq \emptyset$. On peut donc remplacer les $\mathcal{F}_\Gamma$, $\Gamma \in \mathcal{B}$ par les $\{\mathcal{O} : \mathcal{O} \in \mathcal{F}_u(\mathcal{A})\ \mathcal{O} \cap \mathcal{A}^{A'} \neq \emptyset\}$, $A' \in \mathcal{A}'$.

Revenons maintenant à l'homéomorphisme $\mathcal{O} \to \mathcal{O}'$ de $\mathcal{F}_u(\mathcal{A})$ sur $\mathcal{F}_u(\mathcal{A}')$, défini par les formules de réciprocité :

$$\mathcal{O} = \cap \{\mathcal{A}_{A'},\ A' \in \mathcal{O}'\} \quad ; \quad \mathcal{O}' = \cap \{\mathcal{A}'_A,\ A \in \mathcal{O}\}$$

Cet homéomorphisme échange les ouverts s.c.s. et s.c.i. En effet, considérons par exemple l'ouvert s.c.s. $\{\mathcal{O} \subset \mathcal{A}_{A^c}\}$ de $\mathcal{F}_u(\mathcal{A})$. On a $\mathcal{O} \not\subset \mathcal{A}_{A^c}$ s'il existe $V \in \mathcal{O}$, $V \subset A$ et cela équivaut à $A \in \mathcal{O}$, puisque $\mathcal{O}$ est permis pour $\cup$. Mais A appartient à $\mathcal{O}$ si et seulement si il rencontre tous les $A' \in \mathcal{O}'$, ou, ce qui revient au même, si et seulement si $\mathcal{O}' \cap \mathcal{A}'^A = \emptyset$. On a donc :

$$(8\text{-}3\text{-}1) \qquad \begin{cases} \mathcal{O} \subset \mathcal{A}_{A^c} \Leftrightarrow \mathcal{O}' \cap \mathcal{A}'^A \neq \emptyset \\ \mathcal{O}' \subset \mathcal{A}'_{A'^c} \Leftrightarrow \mathcal{O} \cap \mathcal{A}^{A'} \neq \emptyset \end{cases}$$

Résumons ces résultats.

<u>Proposition 8-4-1</u>.- Sur $\mathcal{F}_u(\mathcal{A})$, la topologie s.c.s. est engendrée par les ensembles $\{\mathcal{O} ; \mathcal{O} \subset \mathcal{A}_{A^c}\}$, $A \in \mathcal{A}$, et la topologie s.c.i. par les ensembles $\{\mathcal{O},\ \mathcal{O} \cap \mathcal{A}^{A'} \neq \emptyset\}$, $A' \in \mathcal{A}'$. De plus, l'homéomorphisme $\mathcal{O} \to \mathcal{O}'$ de $\mathcal{F}_u(\mathcal{A})$ sur $\mathcal{F}_u(\mathcal{A}')$ échange les ouverts s.c.s. et s.c.i. de ces deux espaces conformément aux relations (8-3-1).

8-4 POINT DE VUE DES APPLICATIONS INVERSES.

Soient E et E' deux espaces LCD, $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{P}(E)$ et ϕ une application croissante de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(E')$, c'est-à-dire telle que $A \subset B$ dans E entraine $\phi(A) \subset \phi(B)$ dans E'. Pour chaque $x \in E'$, posons :

(8-4-1) $$\mathcal{U}(x) = \phi^{-1}(\mathcal{P}_x(E')) = \{A : A \in \mathcal{A} \, , \, x \in \phi(A)\}$$

Nous obtenons ainsi une application $x \to \mathcal{U}(x)$ de E' dans $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$. Pour chaque $x \in E'$, $\mathcal{U}(x)$ est permise pour $\cup$ dans $\mathcal{A}$. Inversement, toute application $\mathcal{U}$ de E' dans l'espace $\mathcal{P}_{\cup}(\mathcal{A})$ des parties de $\mathcal{A}$ permises pour $\cup$ dans $\mathcal{A}$ est de la forme (8-4-1) pour l'application ϕ de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{P}(E')$ définie par $\phi(A) = \{x : A \in \mathcal{U}(x)\}$.

Nous prendrons toujours, dans ce qui suit, $\mathcal{A} = \mathcal{F}(E)$ ou $\mathcal{A} = \mathcal{K}(E)$. Si $\mathcal{A} = \mathcal{K}$, on posera $\mathcal{B} = \mathcal{G}$ et $\mathcal{A}' = \mathcal{F}$. Si $\mathcal{A} = \mathcal{F}$, on posera $\mathcal{A}' = \mathcal{K}$ et $\mathcal{B} = \{G : G = K^c, \, K \in \mathcal{K}\}$, et dans ce cas $\mathcal{B}$ sera muni de la topologie déduite de celle de $\mathcal{K}$ par l'application $K \to K^c$. Comme dans la proposition 8-1-4, si ϕ est une application croissante définie sur $\mathcal{A}$, on désignera par ϕ_b son plus petit prolongement sur $\mathcal{B}$ et par ϕ_a le plus grand prolongement de ϕ_b sur $\mathcal{A}$, soit explicitement :

(8-4-2) $$\begin{cases} \phi_b(B) = \cup \{\phi(A), \, A \in \mathcal{A} \, , \, A \subset B\} & (B \in \mathcal{B}) \\ \phi_a(A) = \cap \{\phi(B), \, B \in \mathcal{B} \, , \, B \supset A\} & (A \in \mathcal{A}) \end{cases}$$

Au lieu des espaces $\mathcal{F}_u(\mathcal{A})$, définis au paragraphe suivant, nous utiliserons les espaces $\tilde{\mathcal{F}}_u(\mathcal{A})$ qui s'en déduisent par adjonction d'un élément :

$$\tilde{\mathcal{F}}_u(\mathcal{K}) = \mathcal{F}_u(\mathcal{K}) \cup \{\mathcal{K}\} \; ; \quad \tilde{\mathcal{F}}_u(\mathcal{F}) = \mathcal{F}_u(\mathcal{F}) \cup \{\emptyset\}$$

de manière à lever les restrictions $\emptyset \notin \mathcal{F}_u(\mathcal{F})$ et $\mathcal{U} \in \mathcal{F}_u(\mathcal{K}) \Rightarrow \emptyset \notin \mathcal{U}$. L'espace $\tilde{\mathcal{F}}_u(\mathcal{A})$ est ainsi l'ensemble de toutes les parties permises pour $\cup$ dans $\mathcal{A}$, y compris la famille vide et $\mathcal{A}$ lui-même. Pour la topologie induite par celle de $\mathcal{F}(\mathcal{A})$, les voisinages de ϕ sont les $\{\mathcal{U} \subset \mathcal{A}_{A}^{c}\}$, $A \in \mathcal{A}$, et ceux de $\mathcal{A}$ les $\{\mathcal{U} : \mathcal{U} \cap \mathcal{A}^{A'} \neq \emptyset\}$, $A' \in \mathcal{A}'$, et l'application $\mathcal{U} \to \mathcal{U}'$ change $\emptyset$ en $\mathcal{A}'$ et $\mathcal{A}$ en $\emptyset$. Ainsi, $\mathcal{U} \to \mathcal{U}'$ est encore un homéomorphisme de $\tilde{\mathcal{F}}_u(\mathcal{A})$ sur $\tilde{\mathcal{F}}_u(\mathcal{A}')$, et la proposition 8-4-1 reste applicable à ces espaces.

Cherchons alors sous quelles conditions on a $\phi_a = \phi$ sur $\mathcal{A}$. D'après (8-4-2), il en est ainsi si et seulement si pour tout $A \in \mathcal{A}$ et tout $x \notin \phi(A)$ on peut trouver $B \supset A$ dans $\mathcal{B}$ avec $x \notin \phi(A')$

pour tout $A' \subset B$ dans $\mathcal{A}$ (cf Proposition 8-1-4). Cette condition équivaut à : $A \notin \mathcal{O}(x)$ entraine qu'il existe $B \in \mathcal{B}$, $B \supset A$ avec $\mathcal{O}(x) \subset \mathcal{A}_{B^c}$. Mais B^c est un élément de $\mathcal{A}'$, et $\mathcal{A}^{B^c}$ est donc un voisinage ouvert de A disjoint de $\mathcal{O}(x)$. Par suite $\mathcal{O}(x) \in \mathcal{F}(\mathcal{A})$. Inversement, si, pour tout $x \in E'$, $\mathcal{O}(x)$ est fermé et permis pour $\cup$ dans $\mathcal{A}$, son complémentaire est permis pour $\cap$ et la relation ci-dessus est vérifiée. D'où un premier résultat : on a $\phi = \phi_a$ sur $\mathcal{A}$ <u>si et seulement si $\mathcal{O}$ applique E' dans $\mathcal{F}_u(\mathcal{A})$.</u>

En second lieu, cherchons à quelle condition ϕ applique $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{F}(E')$: $\phi(A)$ sera fermé dans E' pour $A \in \mathcal{A}$ si et seulement si on a $x \in \phi(A)$ pour toute suite $n \to x_n \in \phi(A)$ convergeant vers x dans E', soit $A \in \mathcal{O}(x_n)$ et $x_n \to x$ entraine $A \in \mathcal{O}(x)$. Limitons-nous au cas où on a $\mathcal{O}(x) \in \widetilde{\mathcal{F}}_u(\mathcal{A})$ c'est-à-dire $\phi = \phi_a$. La condition exprimant que $\phi(A)$ est fermé s'écrit alors :

$$(x_n) \not\subset \mathcal{A}_{A^c} \text{ et } x_n \to x \text{ entraine } \mathcal{O}(x) \not\subset \mathcal{A}_{A^c}$$

Comme les ouverts s.c.s. de $\widetilde{\mathcal{F}}_u(\mathcal{A})$ sont du type $\{\mathcal{O} \subset \mathcal{A}_{A^c}\}$, cette condition est satisfaite <u>si et seulement si $\mathcal{O}$ est une application s.c.s. de E' dans $\widetilde{\mathcal{F}}_u(\mathcal{A})$.</u>

Nous avons donc montré que l'on a $\phi = \phi_a$ et $\phi(A)$ fermé pour tout $A \in \mathcal{A}$ si et seulement si est une application s.c.s. de E' dans $\widetilde{\mathcal{F}}_u(\mathcal{A})$. Cette condition est remplie si et seulement si ϕ est une application s.c.s. de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{F}(E')$. En effet, si ϕ est s.c.s. on a $\phi = \phi_a$ d'après la Proposition 8-1-4, et, puisque ϕ applique $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{F}(E')$, $\mathcal{O}$ est une application s.c.s. de E' dans $\widetilde{\mathcal{F}}_u(\mathcal{A})$ d'après ce qui précède. Inversement, si $\mathcal{O}$ est s.c.s. de E' dans $\widetilde{\mathcal{F}}_u(\mathcal{A})$, on a $\phi = \phi_a$ et $\phi(A) \in \mathcal{F}(E')$ pour $A \in \mathcal{A}$, et ϕ applique donc $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{F}(E')$. Montrons que ϕ est s.c.s. Soit $K' \in \mathcal{K}(E')$. On a $\phi^{-1}(\mathcal{F}_{K'}) = \bigcup_{x \in K'} \mathcal{O}(x)$. Si une suite $n \to A_n \in \phi^{-1}(\mathcal{F}_{K'})$ converge vers A dans $\mathcal{A}$, pour chaque n il existe $x_n \in K'$ avec $A_n \in \mathcal{O}(x_n)$. Soit $x_o \in K'$ une valeur d'adhérence de la suite $\{x_n\} \subset K'$. Comme $\mathcal{O}$ est s.c.s., on trouve $A \in \mathcal{O}(x_o)$, soit, puisque $x_o \in K'$, $A \in \phi^{-1}(\mathcal{F}_{K'})$. Ainsi, $\phi^{-1}(\mathcal{F}_{K'})$ est fermé, et ϕ est s.c.s.

En résumé :

<u>Proposition 8-4-2</u>.- Soit ϕ une application croissante de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{P}(E')$, et $\mathcal{O}$ l'application de E' dans $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ définie par $\mathcal{O}(x) = \{A : x \in \phi(A)\}$. On a $\phi = \phi_a$ sur $\mathcal{A}$ si et seulement si ϕ applique E' dans $\widetilde{\mathcal{F}}_u(\mathcal{A})$. De plus, les quatre conditions suivantes sont équivalentes :

1- ϕ est une application s.c.s. de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{F}(E')$.

2- $\mathcal{O}$ est une application s.c.s. de E' dans $\widetilde{\mathcal{F}}_u(\mathcal{A})$.

3- $\phi(A)$ est fermé pour tout $A \in \mathcal{A}$ et $\mathcal{V}(x)$ est fermé pour tout $x \in E'$.

4- ϕ applique $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{F}(E')$ et on a $\phi = \phi_a$ sur $\mathcal{A}$.

Considérons à nouveau une application $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{P}(E')$ vérifiant $\phi = \phi_a$, c'est-à-dire telle que $\mathcal{V}$ applique E' dans $\tilde{\mathcal{F}}_u(\mathcal{A})$, et cherchons à quelle condition $\mathcal{V}$ est s.c.i. D'après la Proposition 8-4-1, $\mathcal{V}$ est s.c.i. si et seulement si pour tout $A' \in \mathcal{A}'$ l'ensemble $\{x : \mathcal{V}(x) \cap \mathcal{A}^{A'} \neq \emptyset\}$ est ouvert dans E', c'est-à-dire s'il existe $A \in \mathcal{V}(x)$, $A \cap A' = \emptyset$. Or $A \cap A' = \emptyset$ équivaut à $A \subset A'^c$ et $A'^c \in \mathcal{B}$. Ainsi, $\mathcal{V}$ s.c.i. équivaut à : pour tout $B \in \mathcal{B}$, $\bigcup_{A \subset B} \phi(A)$ est ouvert dans E'. Finalement :

$\mathcal{V}$ est s.c.i. si et seulement si ϕ_b applique $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{G}(E')$. On en déduit la proposition suivante :

<u>Proposition 8-4-3</u>.- Soit ϕ une application de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{P}(E')$, ϕ_b son plus petit prolongement sur $\mathcal{B}$, ϕ_a le plus grand prolongement de ϕ_b sur $\mathcal{A}$. Pour que ϕ_b applique $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{G}(E')$ et que $\phi = \phi_a$, il faut et il suffit que $\mathcal{V}$ soit une application s.c.i. de E' dans $\tilde{\mathcal{F}}_U(\mathcal{A})$.

<u>COROLLAIRE</u> - Pour que ϕ soit une application s.c.s. de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{F}(E')$ et que son plus petit prolongement ϕ_b applique $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{G}(E')$, il faut et il suffit que $\mathcal{V}$ soit une application continue de E' dans $\tilde{\mathcal{F}}_U(\mathcal{A})$.

Lorsque $E = \mathbb{R}^d$ et que ϕ est compatible avec les translations, $\mathcal{V}'(x)$ est le translaté $\mathcal{V}(x)$ du noyau $\mathcal{V}$. Dès que $\mathcal{V}$ est fermé dans $\mathcal{A}$, l'application $x \to \mathcal{V}_x$ est continue, et les conditions du corollaire sont remplies.

Considérons maintenant l'homéomorphisme $\mathcal{V} \to \mathcal{V}'$ de la proposition 8-3-5. A toute application $\mathcal{V}$ de E' dans $\tilde{\mathcal{F}}_U(\mathcal{A})$, cet homéomorphisme associe l'application $\mathcal{V}'$ de E' dans $\tilde{\mathcal{F}}_U(\mathcal{A}')$ définie par : $\mathcal{V}'(x) = \cap \{\mathcal{A}'_A , A \in \mathcal{V}(x)\}$. A ces applications $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}'$ sont associées les applications $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{P}(E')$ et $\phi' : \mathcal{A}' \to \mathcal{P}(E')$ respectivement, qui vérifient $\phi = \phi_a$ et $\phi' = \phi'_a$. Il est clair d'ailleurs que ϕ' est duale de ϕ_b et ϕ duale de ϕ'_b.

On a vu dans la Proposition 8-4-1 que cet homéomorphisme $\mathcal{V} \to \mathcal{V}'$ échange les ouverts s.c.s. et s.c.i. de $\mathcal{F}_U(\ )$ et $\mathcal{F}_U(\mathcal{A}')$. Autrement dit, l'application $\mathcal{V} : E' \to \mathcal{F}_U(\mathcal{A})$ est s.c.s. (s.c.i.) si et seulement si $\mathcal{V}'$ est s.c.i. (s.c.s.). D'après les Propositions 8-4-2 et 8-4-3, il en résulte que ϕ_b applique $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{G}(E')$ si et seulement si ϕ' est s.c.s., et de même ϕ est s.c.s. si et seulement si ϕ'_b applique $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{G}(E')$. Pour que ϕ et ϕ' soient toutes deux s.c.s., il faut et il suffit que ϕ soit s.c.s. et ϕ_b applique $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{G}(E')$, ou encore que $\mathcal{V}$ soit continu.

Ainsi :

__Proposition 8-4-4.__- Soit ϕ une application de $\mathcal{O}$ dans $\mathcal{P}(E')$ vérifiant $\phi = \phi_a$ sur $\mathcal{O}$, et $\mathcal{V}$ l'application de E' dans $\tilde{\mathcal{F}}_U(\mathcal{O})$ associée à ϕ. L'application ϕ' de $\mathcal{O}'$ dans $\mathcal{P}(E')$ associée à $\mathcal{V} : E' \to \tilde{\mathcal{F}}_U(\mathcal{O}')$, $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}'$ étant liées par les formules réciproques :

$$\mathcal{V}'(x) = \cap \{\mathcal{O}'_A , A \in \mathcal{V}(x)\} \quad ; \quad \mathcal{V}(x) = \cap \{\mathcal{O}_{A'} , A' \in \mathcal{V}'(x)\}$$

vérifie également la condition $\phi' = \phi'_{a'}$. Les quatre propriétés suivantes sont alors équivalentes :

1 - $\mathcal{V}$ est une application s.c.s. (resp. s.c.i.) de E' dans $\tilde{\mathcal{F}}_U(\mathcal{O})$.

2 - $\mathcal{V}'$ est une application s.c.i. (resp. s.c.s.) de E' dans $\tilde{\mathcal{F}}_U(\mathcal{O}')$.

3 - ϕ (resp. ϕ') est une application s.c.s. de $\mathcal{O}$ (resp. $\mathcal{O}'$) dans $\mathcal{F}(E')$.

4 - $\phi'_{b'}$ (resp. ϕ_b) applique $\mathcal{B}'$ (resp. $\mathcal{B}$) dans $\mathcal{G}(E')$.

De même encore les cinq propriétés suivantes sont équivalentes :

1 - ϕ et ϕ' sont s.c.s.

2 - $\mathcal{V}$ est continue.

3 - $\mathcal{V}'$ est continue.

4 - ϕ est s.c.s. et ϕ_b applique $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{G}(E')$.

5 - ϕ' est s.c.s. et ϕ'_b applique $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{G}(E')$.

- CHAPITRE 9 -

INTEGRALES ET MESURES A VALEURS DANS $\mathcal{K}_0$

On a vu dans le chapitre 1 que la famille λK des homothétiques d'un compact convexe K vérifie la relation des demi-groupes $\lambda K \oplus \mu K = (\lambda+\mu)K$, ou encore que $\lambda \geq \mu$ entraine $\lambda K \succ \mu K$ pour le pré-ordre $\succ$ défini par $A \succ B$ si A est ouvert selon B. C'est à cette propriété que l'application $A \to A_{\lambda K}$ doit de constituer une granulométrie possédant de bonnes propriétés. Il y aurait donc, plus généralement, un certain intérêt à caractériser les familles $\{K(\lambda)\} \subset \mathcal{K}$ d'un paramètre vérifiant $K(\lambda) \succ K(\mu)$ pour $\lambda \geq \mu$. L'intégrale de Riemann-Minkowski (premier paragraphe) donne un exemple simple de familles possédant cette propriété, et présente de plus cette particularité de prendre obligatoirement ses valeurs dans l'espace $C(\mathcal{K})$ ces compacts convexes. L'intégrale de Stieltjes-Minkowski, de son côté, conduit à des exemples simples de familles $K(\lambda)$ croissantes pour $\succ$ et qui cette fois ne sont plus nécessairement dans $C(\mathcal{K})$. Les deux paragraphes suivants constituent une transposition de la théorie de l'intégration, avec la dualité habituelle du point de vue ensembliste et du point de vue fonctionnel. Le point de vue ensembliste conduit d'associer à toute mesure à valeurs dans $\mathcal{K}_0$ une fonctionnelle croissante et semi-additive, c'est-à-dire vérifiant $I(f+f') = I(f) \oplus I(f')$ seulement si les ensembles $\{f > 0\}$ et $\{f' > 0\}$ sont disjoints, seules étant additives les mesures à valeurs convexes. Inversement, le point de vue fonctionnel conduit d'associer à toute fonctionnelle croissante convexe et semi-additive une mesure à valeurs dans $\mathcal{K}_0$ dont elle est l'intégrale, et qui ne prend ses valeurs dans $C(\mathcal{K}_0)$ que si la fonctionnelle est elle-même additive. Mais cette transposition de la théorie classique de l'intégration ne peut pas être poussée beaucoup plus loin, du fait notamment que le théorème de Radon-Nikodym ne se généralise pas.

9-1 L'INTEGRALE DE RIEMANN-MINKOWSKI.

Soit $A(\lambda)$ une famille continue à 1 paramètre de compacts non vides de $\mathbb{R}^d$. Nous nous proposons de construire l'intégrale de Riemann-Minkowski $\int_a^b A(\lambda)d\lambda$, $\mathcal{K}'(\mathbb{R}^d)$ étant muni de l'addition de Minkowski et de la topologie myope. Par changement de paramètre, on se ramène à la construction de l'ensemble compact :

$$I = \int_0^1 A(\lambda)d\lambda \in \mathcal{K}'(\mathbb{R}^d)$$

<u>Construction du compact $I = \int_0^1 A(\lambda)d\lambda$.</u>

Soit $A(\lambda)$ une famille continue à 1 paramètre dans $\mathcal{K}'(\mathbb{R}^d)$. L'image de $[0,1]$ par l'application $\lambda \to A(\lambda)$ est compacte dans $\mathcal{K}'$, de sorte que pour $\lambda \in [0,1]$, <u>les $A(\lambda)$ sont contenus dans le compact fixe</u> $K_o \in \mathcal{K}'$. De plus, la famille $A(\lambda)$ esy uniformément continue sur le compact $[0,1]$, de sorte qu'à tout $\varepsilon > 0$ on peut associer un $\eta(\varepsilon)$ avec

(9-1-1) $$|\lambda - \lambda'| \leq \eta(\varepsilon),\ \lambda,\ \lambda' \leq [0,1] \Rightarrow d(A(\lambda),\ A(\lambda')) \leq \varepsilon$$

d désignant la distance de Hausdorff dans $\mathcal{K}'$.

Soit s une <u>subdivision</u> $x_o = 0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n = 1$ de l'intervalle $[0,1]$ et $|s| = \mathrm{Sup}\{|x_i - x_{i-1}|,\ i = 1,2,..n\}$ son module. A tout choix $X = (\xi_1,\ \xi_2,..\xi_n)$ de points $\xi_i \in [x_{i-1},\ x_i]$, associons le compact :

(9-1-2) $$I_s(X) = \bigoplus_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\ A(\xi_i)$$

et désignons par $\mathfrak{I}_s$ la famille des $I_s(X)$ pour tous les choix possibles des ξ_i .

a/ <u>$\mathfrak{I}_s$ est compacte dans l'espace LCD $\mathcal{K}'$.</u>

Comme les $I_s(X)$ sont contenus dans le compact fixe $C(K_o)$, il suffit de montrer que $\mathfrak{I}_s$ est fermé dans $\mathcal{K}'$. Soit donc :

$$X_k = (\xi_1(k),\ \xi_2(k),\ldots,\xi_n(k))$$

une suite de choix possiblesdu vecteur X tels que les $B_k = I_s(X_k)$ convergent vers un compact B. Comme chacun des $\xi_i(k)$ appartient à un intervalle compact, on peut trouver une suite partielle k_j telle que les X_{kj} convergent vers un vecteur $X_o = (\xi_1^o,\ \xi_2^o,..,\xi_n^o)$ constituant encore un choix possible de X. La continuité de $\oplus$ montre ensuite que les B_{kj} convergent vers $I_s(X_o)$. On a donc $B = I_s(X_o) \in \mathfrak{I}_s$ et $\mathfrak{I}_s$ est bien fermée dans $\mathcal{K}'$.

b/ <u>Pour $|s| \leq \eta(\varepsilon)$, le diamètre de $\mathfrak{I}_s$ est $\leq \varepsilon$.</u>

Si $|s| \leq \eta(\varepsilon)$, pour deux choix X_1 et X_2 du vecteur X, les relations (9-1-2) entraînent

pour chaque i
$$A(\xi_i^1) \subset A(\xi_i^2) \oplus B_\varepsilon \ , \ A(\xi_i^2) \subset A(\xi_i^1) \oplus B_\varepsilon$$

d'où l'on tire, par exemple :

$$I_s(X_1) = \bigoplus_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \ A(\xi_i^1) \subset \bigoplus_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})(A(\xi_i^2) \oplus B_\varepsilon =$$

$$= B_\varepsilon \oplus (\bigoplus_{i=1}^{n} (x_i - x_i\ldots) \ A(\xi_i^2)) = I_s(X_2) \oplus B_\varepsilon$$

et la relation réciproque, d'où résulte bien :

$$d(I_s(X_1) \ , \ I_s(X_2)) \leq \varepsilon$$

Considérons maintenant l'ensemble S des subdivisions de $[0,1]$, qui est filtrant pour la relation $\vdash (s_1 \vdash s_2$ si s_1 est plus fine que $s_2)$.

c/ <u>Montrons que la famille filtrante $\mathcal{J}_s$, $s \in S$ converge dans $\mathcal{K}(\mathcal{K}')$.</u>

Pour tout $s \in S$, et tout choix possible de ■ , on a $I_s(X) \subset C(K_o)$, donc $\mathcal{J}_s \subset \mathcal{K}^{(C(K_o))^c}$, et la famille $\mathcal{J}_s$, $s \in S$ est donc contenue dans le compact fixe $\mathcal{K}^{(C(K_o))^c}$ de l'espace $\mathcal{K}(\mathcal{K}')$. Il suffit donc de montrer que cette famille vérifie le critère de Cauchy pour la distance de Hausdorff δ dans $\mathcal{K}(\mathcal{K}')$.

Soient s et s' $\in$ S deux subdivisions de $[0,1]$ avec $s \vdash s'$, X et X' deux choix possible des vecteurs X associés à s et s'. Pour $|s'| \leq \eta(\varepsilon)$ (donc a fortiori aussi $|s| \leq \eta(\varepsilon)$), on vérifie comme en b/ :

$$I_s(X) \subset I_{s'}(X') \oplus B_\varepsilon \ , \ I_{s'}(X') \subset I_s(X) \oplus B_\varepsilon$$

donc, dans $\mathcal{K}'$: $d(I_s(X), I_{s'}(X')) \leq \varepsilon$, et par suite aussi $d(\mathcal{J}_s \ , \mathcal{J}_{s'}) \leq \varepsilon$ dans $\mathcal{K}(\mathcal{K}')$.

Soient alors $s_o \in S$ avec $|s_o| \leq \varepsilon$, et s et s' deux subdivisions quelconques plus fines que s_o . On a :

$$\delta(\mathcal{J}_s \ , \mathcal{J}_{s'}) \leq \delta(\mathcal{J}_{s_o}, \mathcal{J}_s) + \delta(\mathcal{J}_{s_o} \ , \mathcal{J}_{s'}) \leq 2\varepsilon$$

et la famille filtrante $\mathcal{J}_s$, $s \in S$ vérifie bien le critère de Cauchy. Comme elle est contenue dans un compact fixe de $\mathcal{K}(\mathcal{K}')$, elle converge donc vers une limite $\mathcal{J} \in \mathcal{K}(\mathcal{K}')$.

d/ Cette limite $\mathfrak{J} \in \mathcal{K}(\mathcal{K}')$ est constituée d'un unique élément $I \in \mathcal{K}'$, que nous noterons $I = \int_0^1 A(\lambda)d\lambda$.

Cela résulte aussitôt de b/, puisque le diamètre est une fonction continue pour la topologie myope : le diamètre de $\mathfrak{J}$ est nul, et on a donc $\mathfrak{J} = \{I\}$ pour un $I \in \mathcal{K}'$.

e/ A toute subdivision $s \in S$, associons (de manière quelconque) un choix X_s du vecteur X associé. Alors, la famille filtrante $I_s(X_s)$, $s \in S$ converge vers I dans $\mathcal{K}'$.

En effet, cette famille est contenue dans le compact fixe $C(K_0)$, donc admet une valeur d'adhérence J dans $\mathcal{K}'$. Mais $I_s(X_q) \in \mathfrak{J}_s$, et la famille filtrante $\mathfrak{J}_s$, $s \in S$ converge vers $\mathfrak{J} = \{I\}$ dans $\mathcal{K}(\mathcal{K}')$. On a donc nécessairement $J \in \mathfrak{J}$, c'est-à-dire $J = I$. Par suite, la famille $I_s(X_s)$ converge elle-même vers I.

Convexité de l'Intégrale R.M.

Ainsi est achevée la construction de l'intégrale de Riemann-Minkowski. D'après e/, on peut en particulier écrire :

(9-1-3) $$I = \int_0^1 A(\lambda)d\lambda = \lim_{n \to \infty} \bigoplus_{k=1}^{n} \frac{1}{n} A(\frac{k}{n})$$

Plus généralement, l'intégrale sur un intervalle $[a,b]$ s'obtient sous la forme :

$$\int_a^b A(\lambda)d\lambda = \lim_{|s| \to 0} \bigoplus_i (x_i - x_{i-1})\, A(\xi_i)$$

pour des subdivisions $a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = b$ de module $|s|$, et des choix quelconques des $\xi_i \in (x_i - x_{i-1})$. En particulier, on a la relation d'additivité :

$$\int_a^b A(\lambda)d\lambda \oplus \int_b^c A(\lambda)d\lambda = \int_o^c A(\lambda)d\lambda \qquad (a \leq b \leq c)$$

De même, si $A(\lambda)$ et $B(\lambda)$ sont deux familles continues, on vérifie sans peine :

(9-1-4) $$\int_a^b A(\lambda) \oplus B(\lambda)d\lambda = \int_a^b A(\lambda)d\lambda \oplus \int_a^b B(\lambda)d\lambda$$

THEOREME 9-1-1 - L'intégrale de Riemann-Minkowski prend ses valeurs dans $C(\mathcal{K}')$. Plus précisément, pour toute famille $A(\lambda)$ continue dans $\mathcal{K}'$, on a :

$$\int_a^b A(\lambda)d\lambda = \int_a^b C(A(\lambda))d\lambda \in C(\mathcal{K}') \qquad (a \leq b)$$

Posons d'abord un lemme.

LEMME 9-1-1 - Si $A(\lambda) = A \in \mathcal{K}'$ est indépendant de λ, on a :

$$\int_a^b A(\lambda)d\lambda = (b-a)\ C(A) \qquad (a \leq b)$$

En particulier, pour une famille $B(\lambda)$ continue dans $\mathcal{K}_0$ et $A \in \mathcal{K}_0$, on a :

(9-1-5) $$\int_a^b A \oplus B(\lambda)d\lambda = (b-a)\ C(A) \oplus \int_a^b B(\lambda)d\lambda$$

Le premier énoncé est une conséquence immédiate de la Proposition 1-5-5 et de la relation (9-1-3). La relation (9-1-5) résulte ensuite de la relation (9-1-4).

Soit maintenant $A(\lambda)$ une famille continue dans $\mathcal{K}'$, et $C(A(\lambda))$ la famille (continue) constituée des enveloppes vonvexes des $A(\lambda)$. Il faut montrer que l'intégrale I vérifie :

$$I = \int_0^1 A(\lambda)d\lambda = \int_0^1 C(A(\lambda))d\lambda$$

(il en résultera aussitôt $I \in C(\mathcal{K}')$, puisque $C(\mathcal{K}')$ est fermé dans $\mathcal{K}'$). Posons, pour n entier > 0, et $0 < k \leq n$:

$$J_k(n) = \int_{\frac{k-1}{n}}^{k/n} A(\lambda)d\lambda$$

d'où résulte : $I = \bigoplus_{k=1}^{n} J_k(n)$.

Soit $\varepsilon > 0$, et $\eta(\varepsilon)$ le module de continuité uniforme figurant en (9-1-1). Pour n vérifiant : $\frac{1}{n} \leq \eta(\varepsilon)$, on a :

$$\lambda \in [\tfrac{k-1}{n}, \tfrac{k}{n}] \Rightarrow A(\lambda) \subset A(\tfrac{k}{n}) \oplus B_\varepsilon \ , \ A(\tfrac{k}{n}) \subset A(\lambda) \oplus B_\varepsilon$$

On vérifie sans peine que l'intégrale de Riemann est croissante pour $\subset$. On a donc, pour

$\lambda \in [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$, compte tenu du lemme 9-1-1 :

$$\begin{cases} J_k(n) \subset \frac{1}{n} C(A(\frac{k}{n})) \oplus \frac{1}{n} B_\varepsilon = \frac{1}{n} [B_\varepsilon \oplus C(A(\frac{k}{n}))] \\ \frac{1}{n} C(A(\frac{k}{n})) \subset \frac{1}{n} B_\varepsilon \oplus J_k(n) \end{cases}$$

Prenons la somme de Minkowski de ces relations. Il vient :

$$\begin{cases} I = \bigoplus_{k=1}^{n} J_k(n) \subset B_\varepsilon \oplus \left(\bigoplus_{k=1}^{n} \frac{1}{n} C(A(\frac{k}{n})) \right) \\ \bigoplus_{k=1}^{n} \frac{1}{n} C(A(\frac{k}{n})) \subset B_\varepsilon \oplus I \end{cases}$$

(B_ε : boule fermée de centre 0 et de rayon ε). Pour n tendant vers l'infini, on en déduit, d'après (9-1-3) :

$$\begin{cases} I \subset B_\varepsilon \oplus \int_0^1 C(A(\lambda))d\lambda \\ \int_0^1 C(A(\lambda))d\lambda \subset B_\varepsilon \oplus I \end{cases}$$

Il suffit alors de faire tendre ε vers 0 pour obtenir :

$$I = \int_0^1 C(A(\lambda))d\lambda$$

Le théorème est démontré.

Considérons maintenant le cas particulier d'une famille $A(\lambda)$ dans l'espace $C(\mathcal{K}_0)$ des compacts convexes contenant l'origine. Chaque $A(\lambda)$ est caractérisé par sa podaire $r_\lambda \in \mathcal{R}$ (paragraphe 4-4), qui est une fonction continue sur la sphère unité S_0 de $\mathbb{R}^d$.

<u>Proposition 9-1-1</u>.- Une famille à un paramètre de compacts convexes $A(\lambda) \in C(\mathcal{K}_0)$ est continue si et seulement si les images r_λ des $A(\lambda)$ dans le cône convexe R vérifient :

a/ $\sup_{\lambda \in [a,b]} \sup_{u \in S_0} r_\lambda(u) < \infty$ pour tout intervalle fini $[a,b]$.

b/ Pour chaque $u \in S_0$, l'application $\lambda \to r_\lambda(u)$ est continue.

L'intégrale $I = \int_a^b A(\lambda)d\lambda$ admet alors dans $\mathcal{R}$ l'image r_I définie par :

$$r_I(u) = \int_a^b r_\lambda(u)d\lambda \tag{9-1-6}$$

La condition a/ est nécessaire, car la famille continue $A(\lambda)$, $\lambda \in [a,b]$ est compacte dans $C(\mathcal{K}_0)$, donc contenue dans un compact fixe. La nécessité de b/ est évidente. Inversement, si a/ et b/ sont vérifiées, soit λ_n une suite convergeant vers λ_0. De a/ résulte que les $A(\lambda_n)$ sont contenus dans un compact fixe. Soit alors A une valeur d'adhérence dans $\mathcal{K}_0$ de la suite $A(\lambda_n)$, et r_A son image dans $\mathcal{R}$. De b/ résulte $r_A = r_{\lambda_0}$, donc $A = A(\lambda_0)$ et la suite $A(\lambda_n)$ converge elle-même vers $A(\lambda_0)$.

Il est alors immédiat que l'image dans $\mathcal{R}$ de l'intégrale I est donnée par (9-1-6).

<u>REMARQUE 1</u> - Plus généralement, si μ est une mesure à support compact sur la droite réelle, on peut associer à toute famille continue $A(\lambda) \in C(\mathcal{K}_0)$ l'intégrale :

$$I = \int A(\lambda)\ \mu(d\lambda) \in C(\mathcal{K}_0)$$

définie par son image dans $\mathcal{R}$:

$$r_I(\omega) = \int r_\lambda(\omega)\ \mu(d\lambda)$$

(il suffit de prendre une suite de mesures μ_n à supports finis convergeant étroitement vers μ pour s'assurer que r_I est bien dans $\mathcal{R}$).

<u>REMARQUE 2</u> - L'intérêt de l'intégrale de Riemann-Minkowski est lié au problème suivant qui se pose lors de la définition des granulométries : caractériser les familles $B(\lambda)$ à un paramètre $\lambda \geq 0$ dans $\mathcal{K}'$ telles que $\lambda \geq \mu$ entraîne que $B(\lambda)$ est ouvert selon $B(\mu)$, soit :

$$B(\lambda) = (B(\lambda) \ominus \check{B}(\mu)) \oplus B(\mu) \tag{9-1-7}$$

c'est-à-dire <u>$B(\lambda)$ croissante pour le préordre $\succ$</u> ($A \succ B$ si $A_B = A$)

Si $A(\lambda)$ est une famille continue dans $\mathcal{K}'$, et $C \in \mathcal{K}'$ un compact quelconque, la famille :

$$B(\lambda) = C \oplus \int_0^\lambda A(\chi)d\chi \qquad (\lambda \geq 0) \tag{9-1-8}$$

vérifie, pour $\lambda \geq \mu$:

$$B(\lambda) = B(\mu) \oplus \int_\mu^\lambda A(\lambda)d\lambda$$

donc, vérifie la condition (9-1-7). B(λ) n'est pas forcément convexe (à cause da la constante arbitraire $C \in C(\mathcal{K}'))$.

Mais cette constante C ne jouant pas un rôle essentiel, on peut prendre $C = \{0\}$, et la famille B(λ) est alors dans $C(\mathcal{K}')$. Elle est évidemment continue en λ, d'après la proposition ci-dessus. Elle est même <u>dérivable</u> en λ, comme on le déduit de (9-1-6).

En sens inverse, on peut se poser la question suivante : à quelle condition une famille B(λ) croissante pour $\succ$ dans $\mathcal{K}'$ est-elle de la forme (9-1-8) et, en particulier, est-elle convexe à une constante près $C \in \mathcal{K}'$?

Si B(λ) est de la forme (9-1-8), pour $\lambda \geq \mu$, on a, d'après (9-1-8) et le Théorème 9-1-1 :

$$B_\lambda \ominus \check{B}_\mu = \int_\mu^\lambda C(A(\lambda)d\lambda \in C(\mathcal{K}'))$$

Il en résulte, d'après ce qui précède, que les <u>dérivées à droite et à gauche</u> :

$$\frac{d^+}{d\lambda} B(\lambda) = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{\varepsilon} (B_{\lambda+\varepsilon} \ominus \check{B}_\lambda)$$

$$\frac{d^-}{d\lambda} B(\lambda) = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{\varepsilon} (B_\lambda \ominus \check{B}_{\lambda-\varepsilon}$$

existent et coïncident. Nous désignerons par $\frac{d}{d\lambda} B_\lambda$ leur valeur commune, ici égale à $C(A(\lambda))$:

$$\frac{d}{d\lambda} B_\lambda = C(A(\lambda)) \in C(\mathcal{K}_0)$$

Cette dérivée est de plus continue en λ.

Ces conditions sont évidemment nécessaires pour qu'une famille B(λ) possédant la propriété (9-1-7) soit de la forme (9-1-8). Il reste à voir qu'elles sont suffisantes : cela découlera immédiatement de la proposition 9-1-2 ci-dessous.

<u>Mesure sur $\mathbb{R}$ à valeur dans $C(\mathcal{K}')$</u>

Considérons d'abord les applications positivement linéaires de $\mathcal{C}^+_{\mathcal{K}}(\mathbb{R})$ dans $C(\mathcal{K}_0)$ (espace des compacts convexes contenant l'origine) identifié à $\mathcal{R}$. A toute fonction positive à support compact

$f \in \mathcal{C}^+_{\mathcal{K}}(\mathbb{R})$ est ainsi associée une fonction $r \in \mathcal{R}$ et, pour tout u sur la sphère unité S_0, le nombre $r_f(u)$. A u fixé, la fonctionnelle $r_f(u)$ est positivement linéaire et continue. Il existe donc une mesure positive sur R, soit $r(u;d\lambda)$, avec

$$(9\text{-}1\text{-}9 \qquad r_f(u) = \int f(\lambda)\ r(u;d\lambda)$$

et cette mesure possède la propriété : $(u \to r_f(u)) \in \mathcal{R}$, $\forall f \in \mathcal{C}^+_{\mathcal{K}}(\mathbb{R})$. En désignant par A(f) l'ovoïde associé à cette application $u \to r_f(u)$, on peut écrire (9-1-9) sous la forme :

$$A(f) = \int A(d\lambda)\ f(\lambda)$$

et définie ainsi une mesure $A(d\lambda)$ à valeur dans $C(\mathcal{K}_0)$: on note que toute application positivement linéaire de $\mathcal{C}^+_{\mathcal{K}}(\mathbb{R})$ dans $C(\mathcal{K}_0)$ est nécessairement de cette forme.

Soit maintenant $f \to A(f)$ une application positivement linéaire de $\mathcal{C}^+_{\mathcal{K}}(\mathbb{R})$ dans $C(\mathcal{K}')$: l'ovoïde de A(f) ne contient plus nécessairement l'origine. Parmi les translatés de A(f) qui contiennent l'origine, soit $A_0(f)$ celui dont l'image dans $\mathcal{R}$ minimise la norme dans $L^2(S_0)$. On vérifie sans peine que l'application $A \to A_0$ est continue dans $C(\mathcal{K}')$. Ainsi A(f) est de la forme :

$$A(f) = A_0(f) \oplus \{h(f)\}$$

avec $A_0(f) = \int A_0(d\lambda)\ f(\lambda)$ pour une mesure $A_0(d\lambda)$ à valeurs dans $C(\mathcal{K}_0)$. Le point h(f) représente la translation $A_0(f) \to A(f)$. On vérifie sans peine que h(f) est une fonction positivement linéaire et continue de f : il existe donc une mesure (vectorielle) $h = (h_1,..h_d)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, telle que : $h(f) = \int h(d\lambda)\ f(\lambda)$.

Finalement, la forme générale de la fonctionnelle A(f) est :

$$A(f) = \int A_0(d\lambda)\ f(\lambda) \oplus \{\int h(d\lambda)\ f(\lambda)\}$$

ce que l'on peut écrire symboliquement :

$$A(f) = \int A(d\lambda)\ f(\lambda)\ ,\quad A(d\lambda) = A_0(d\lambda) \oplus \{h(d\lambda)\}$$

Passons maintenant à la caractérisation des familles $B(\lambda)$ vérifiant la propriété (9-1-7).

<u>Proposition 9-1-2</u>.- Soit $B(\lambda)$, $\lambda \geq 0$ une famille à un paramètre dans $C(\mathcal{K}')$. $B(\lambda)$ est ouvert selon $B(\mu)$ pour tous λ,μ vérifiant $\lambda \geq \mu \geq 0$ si et seulement si on a $B(\lambda) = B(0) \oplus \int_{+0}^{+\lambda} A(dx)$ à une translation près pour une mesure $A(dx)$ à valeurs dans $C(\mathcal{K}_0)$.

Il est clair, tout d'abord, que la propriété de l'énoncé est invariante par translation. On peut donc supposer $0 \in B(\lambda)$. L'additivité de l'intégrale montre qu'une famille de la forme :

(9-1-10) $$B(\lambda) = B(0) \oplus \int_{+0}^{+\lambda} A(dx)$$

vérifie la propriété. Inversement, soit $B(\lambda)$ une famille vérifiant cette propriété dans $C(\mathcal{K}_0)$, et $r(\lambda)$ l'image dans $\mathcal{R}$ de $B(\lambda)$. Pour $\lambda \geq \mu$, $r(\lambda) - r(\mu)$ est dans $\mathcal{R}$, donc, en particulier $r(\lambda) \geq r(\mu)$. Pour tout $u \in S_0$, la fonctionnumérique $r(\lambda,u)$ est non décroissante, et il existe une mesure $r(u;d\lambda)$ telle que :

$$r(\lambda,u) = r(o,u) + \int_{+0}^{+\lambda} r(u;d\lambda)$$

De plus, pour tout intervalle I, la fonction $u \to r(u;I)$ est dans $\mathcal{R}$. On en déduit que pour $f \in \mathcal{C}_{\mathcal{K}}^{+}(\mathbb{R})$, la fonction $u \to r(u,f)$ est encore dans $\mathcal{R}$, de sorte que $r(u;d\lambda)$ est l'image d'une mesure $A(d\lambda)$ à valeurs dans $C(\mathcal{K}_0)$ d'où résulte la représentation (9-1-10).

<u>COROLLAIRE 1</u> - Pour qu'une famille $B(\lambda)$ possédant dans $C(\mathcal{K}_0)$ la propriété ci-dessus soit à une constante près l'intégrale de Riemann-Minkowski d'une famille $A(\lambda)$ continue, il faut et il suffit qu'elle admette en tout λ une dérivée continue, nécessairement égale à $A(\lambda)$.

<u>COROLLAIRE 2</u> - Dans $\mathcal{K}'$, tout demi-groupe B_λ à un paramètre $\lambda \geq 0$, tel que $0 \in B_\lambda$ pour tout λ est constitué des homothétiques λB pour un $B \in C(\mathcal{K}_0)$.

En effet, d'après le théorème 1-5-1, les B_λ sont convexes. On a donc $B_\lambda \in C(\mathcal{K}_0)$.

L'image r_λ de B_λ dans $\mathcal{R}$ vérifie $r_{\lambda+\mu} = r_\lambda + r_\mu$: s'agissant de fonctions ≥ 0, r_λ est nécessairement de la forme $r_\lambda = \lambda r$ pour un $r \in \mathcal{R}$.

<u>REMARQUE</u> - On note qu'il n'est pas nécessaire de supposer la continuité du demi-groupe ; ou, si l'on préfère, que tout demi-groupe dans $C(\mathcal{K}_0)$ est continu. Mais le résultat ne s'étend pas à $C(\mathcal{K}')$. On sait, en effet, qu'il existe des fonctions $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^d$ (non mesurables) vérifiant $h(\lambda+\mu) = h(\lambda) + h(\mu)$ sans être de la forme λh pour un $h \in \mathbb{R}^d$: pour $B \in C(\mathcal{K}')$, la famille :

(9-1-11) $$B(\lambda) = \lambda B \oplus \{h(\lambda)\}$$

constitue alors un <u>demi-groupe non continu</u> dans $C(\mathcal{K}')$.

<u>COROLLAIRE 3</u> - Tout demi-groupe non continu dans $C(\mathcal{K}')$ est de la forme (9-1-11). Autrement dit, tout demi-groupe dans $C(\mathcal{K}')$ est de la forme λB, $B \in C(\mathcal{K})$ à une translation près.

En effet, soit B_λ un tel demi-groupe, et, parmi les translatés de B_λ qui contiennent 0, soit C_λ l'élément dont l'image dans $\mathcal{R}$ minimise la norme dans $L^2(S)$. On a $C_\lambda = B_\lambda \oplus \{h'_\lambda\}$, d'où

$$C_{\lambda+\mu} = B_{\lambda+\mu} \oplus \{h'_{\lambda+\mu}\} = C_\lambda \oplus C_\mu \oplus \{h'_{\lambda+\mu} - h'_\lambda - h'_\mu\}$$

Mais les éléments de norme minimale dans $\mathcal{R}$ forment un cône convexe dans $L^2(S)$, de sorte que $C_\lambda \oplus C_\mu$ est lui-même de norme minimale. On a donc $C_{\lambda+\mu} = C_\lambda \oplus C_\mu$ et $h'_{\lambda+\mu} = h'_\lambda + h'_\mu$. Comme C_λ est dans $C(\mathcal{K}_0)$, le Corollaire 2 donne $C_\lambda = \lambda C$ pour un $C \in C(\mathcal{K}_0)$ et, avec $h_\lambda = - h'_\lambda$, d'où :

$$B_\lambda = \lambda C \oplus \{h_\lambda\}$$

avec une translation h_λ vérifiant $h(\lambda+\mu) = h(\lambda) + h(\mu)$.

Nous avons ainsi caractérisé les familles $B(\lambda)$ vérifiant (9-1-7) dans $C(\mathcal{K}')$. Nous allons voir, maintenant, que toute famille $B(\lambda)$ dans $\mathcal{K}'$ vérifiant cette propriété admet une enveloppe convexe $C(B(\lambda))$ vérifiant encore (9-1-7).

<u>LEMME 9-1-3</u> - Pour $A, B \in \mathcal{K}'$, on a $C(A \ominus \check{B}) \subset C(A) \ominus C(\check{B})$. Si A est ouvert selon B ($A_B = A$), on a :

$$C(A \ominus \check{B}) = C(A) \ominus C(\check{B}) \;,\; C(A_B) = (C(A) \ominus C(\check{B})) \oplus C(B) \tag{9-1-12}$$

En effet, $(A \ominus \check{B}) \oplus B \subset A$ donne $C(A \ominus \check{B}) \oplus C(B) \subset C(A)$, puis $C(A \ominus \check{B}) \subset C(A) \ominus C(B)$. Ces inclusions deviennent des égalités si $A_B = A$.

<u>Proposition 9-1-3</u>.- Si une famille à un paramètre B_λ dans $\mathcal{K}'$ est croissante pour le préordre $\succ$ ($A \succ B$ si $A_B = B$), les enveloppes convexes $C(B_\lambda)$ constituent une famille croissante pour $\succ$, et admettent à une translation près une représentation de la forme :

$$C(B_\lambda) = C_0 \oplus \int_{+0}^{+\lambda} A(dx) \qquad (\lambda \geq 0)$$

pour une mesure à valeur dans $C(\mathcal{K}_0)$.

En effet, d'après le lemme, $(B_\lambda \ominus \check{B}_\mu) \oplus B_\mu = B_\lambda$ entraîne

$$(C(B_\lambda) \ominus C(\check{B}_\mu)) \oplus C(B_\mu) = C(B_\lambda)$$

et il suffit d'appliquer la Proposition 9-1-2.

<u>COROLLAIRE</u> - Si une famille B_λ croissante pour $\succ$ dans $\mathcal{K}'$ et vérifiant $0 \in B_\lambda$ admet en tout $\lambda \geq 0$ une dérivée à droite égale à $\{0\}$, elle se réduit à un compact B_0 indépendant de λ.

La propriété est vraie dans $C(\mathcal{K}_0)$, d'après la proposition 9-1-2, corollaire 1. Dans $\mathcal{K}'$, d'après le Lemme 9-1-3, on a pour $\lambda \geq \mu$:

$$B_\lambda \ominus \check{B}_\mu \subset C(B_\lambda) \ominus C(\check{B}_\mu)$$

Mais (le passage à l'enveloppe convexe étant continu) $C(B_\lambda)$ admet la dérivée à droite $C\{0\} = \{0\}$, d'où $C(B_\lambda) = C^{ste}$ d'après la Proposition 9-1-3, et $C(B_\lambda) \circ C(B_\mu) = \{0\}$. On a donc $B_\lambda \ominus \check{B}_\mu = \{0\}$, et :

$$B_\lambda = (B_\lambda \ominus \check{B}_\mu) \oplus B_\mu = B_\mu = B_0$$

Il resterait à étendre la Proposition 9-1-2 et son corollaire 1 à l'espace $\mathcal{K}'$ lui-même. Si une famille B_λ dans $\mathcal{K}'$ admet une dérivée continue $A(\lambda)$, on vérifie assez facilement l'inclusion $B_\lambda \subset B_0 \oplus \int_0^\lambda A(\chi)d\chi$. Pour montrer que l'on a l'égalité, il faudrait établir que les $\frac{B_{\lambda+h} \ominus \check{B}_\lambda}{h}$ convergent uniformément vers $A(\lambda)$ sur tout intervalle borné. Si cette propriété est vraie, toute famille B_λ à dérivée continue sera l'intégrale R.M. de sa dérivée, et sera donc convexe à un compact constant près. Nous n'aborderons pas cette question.

<u>L'Intégrale de Stieltjes-Minkowski.</u>

Pour montrer qu'il existe dans $\mathcal{K}'$ des familles B_λ croissantes ne se laissant pas ramener à des familles convexes, nous allons en construire effectivement à partir d'une intégrale S.M.

Soit $A(\lambda)$ une famille continue à 1 paramètre et $F(\lambda)$ une fonction non décroissante de λ. En remplaçant les $x_i - x_{i-1}$, qui figurent dans la construction de l'intégrale de Riemann, par les $F(x_i) - F(x_{i-1})$, on s'aperçoit sans peine que les raisonnements faits ci-dessus restent valables, et l'on obtient ainsi l'intégrale de Stieltjes-Minkowski ou intégrale S.M.

$$\int_a^b A(\lambda)\, dF(\lambda) = \lim_{|s|\to 0} \underset{i}{\oplus}\, F(x_i) - F(x_{i-1})\, A(\xi_i) \tag{9-1-12}$$

Mais le lemme 9-1-2 ne subsiste plus, en général, et le Théorème 9-1-1 n'est plus valable : l'intégrale de Stieltjes-Minkowski ne prend plus ses valeurs dans $C(\mathcal{K}')$.

La famille $B(\lambda) = \int_{0_+}^{\lambda_+} A(\lambda)\, dF(\lambda)$ est croissante pour $\succ$. En effet, on a :

$$B(\lambda) = B(\mu) \oplus \int_{\mu_+}^{\lambda_+} A(x)\, dF(x) \qquad (\lambda \geq \mu)$$

et $B(\lambda)$ est ouvert selon $B(\mu)$. Mais les $B(\lambda)$ cette fois ne sont plus nécessairement convexes.

Par l'intermédiaire de l'intégrale de Stieltjes, on peut associer à toute famille $A(\lambda)$ continue à support compact (c'est-à-dire $A(\lambda) = \{0\}$ dès que λ n'appartient pas à un intervalle $[a,b]$ donné) son intégrale selon une mesure positive μ donnée sur $\mathbb{R}_+$. On prendra $F(x) = \int_a^x \mu(dy)$ pour $x \geq a$, et on posera :

$$\int A(\lambda)\, \mu(d\lambda) = \int_{a_-}^{b_+} A(\lambda)\, F(d\lambda)$$

Mais des anomalies vont apparaître. Par exemple, si une suite μ_n de mesures converge vaguement vers une mseure μ, les intégrales $\int A(\lambda)\, \mu_n(d\lambda)$ ne convergeront pas obligatoirement vers $\int A(\lambda)\mu(d\lambda)$. Pour le voir, supposons que les μ_n soient des régularisées de leur limite vague μ, et admettent des densités $f_n(\lambda)$ continues. On montre alors :

$$I_n = \int A(\lambda)\, \mu_n(d\lambda) = \int f_n(\lambda)\, A(\lambda) d\lambda$$

(la seconde intégrale étant prise au sens de Riemann). Comme la famille $f_n(\lambda)\, A(\lambda)$ est continue, le théorème 9-1-1 montre que I_n est convexe :

$$I_n = \int f_n(\lambda)\, C(A(\lambda)) d\lambda \in C(\mathcal{K}')$$

On peut alors montrer que la suite I_n converge dans $C(\mathcal{K}')$ vers la limite J définie par :

$$J = \int C(A(\lambda))\, \mu(d\lambda) \in C(\mathcal{K}')$$

et non vers l'intégrale $I = \int A(\lambda)\, \mu(d\lambda)$. Compte tenu de la continuité de l'application $A \to C(A)$, on peut vérifier que l'on a $J = C(I)$, mais non en général $J = I$.

Il suit de là que c'est sur $C(\mathcal{K}')$, plutôt que sur $\mathcal{K}'$ lui-même, que la théorie générale de l'intégration conduira à des résultats intéressants.

9-2 LE POINT DE VUE FONCTIONNEL.

Dans ce premier paragraphe, nous allons transposer la théorie des mesures de Radon en définissant une intégrale à valeur dans l'espace $\mathcal{K}_0$ des compacts contenant l'origine comme une application d'un espace de fonctions dans $\mathcal{K}_0$. Il faut donc, au préalable, caractériser ces espaces de fonctions.

Les espaces Φ_k^+ , Φ_g^+ et $\mathcal{C}_{\mathcal{K}}^+$.

Soit E un espace LCD, $\mathcal{C}_{\mathcal{K}}^+$ l'espace des fonctions continues positives à support compact dans E, Φ_g^+ l'espace des fonctions s.c.i. positives sur E (à valeurs finies ou non) et Φ_k^+ l'espace des fonctions s.c.s. positives sur E et à supports compacts. Nous allons définir que Φ_g^+ et Φ_k^+ des topologies analogues à celles que nous avons introduites dans le premier chapitre. Pour cela, remarquons qu'une fonction $f \geq 0$ sur E peut être caractérisée par son sous-graphe supérieur $\overline{\Gamma}$, qui est le sous-ensemble de l'espace produit $E \times \overline{\mathbb{R}}_+$ ($\overline{\mathbb{R}}_+$ est la demi-droite > 0 complétée par son point à l'infini) défini par :

$$\overline{\Gamma} = \{(x,r) \; ; \; x \in E \; , \; r > 0, \; f(x) \leq r\}$$

vu, aussi bien, par son sous-graphe inférieur $\mathring{\Gamma}$ défini par :

$$\mathring{\Gamma} = \{(x,r) \; ; \; x \in E \; , \; r > 0 \; , \; f(x) < r\}$$

On a alors le résultat suivant :

Proposition 9-2-1.- Une fonction $f \geq 0$ sur E est dans Φ_g^+ (resp. dans Φ_k^+) si et seulement si son sous-graphe inférieur $\mathring{\Gamma}$ (resp. son sous-graphe supérieur $\overline{\Gamma}$) est ouvert (resp. compact) dans $E \times \overline{\mathbb{R}}_+$.

Soit, en effet, $r \to x_n$ une suite convergeant vers x dans E. On a $(x_n,r_n) \notin \mathring{\Gamma}$ si et seulement si $r_n \geq f(x_n)$. Donc, pour toute suite $n \to (x_n,r_n) \notin \mathring{\Gamma}$ convergeant vers une limite (x,r) dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, on a $f(x) \leq \underline{\lim} \, f(x_n) \leq r$ si f est s.c.i., soit $(x,r) \notin \mathring{\Gamma}$, et $\mathring{\Gamma}$ est ouvert dans $E \times \overline{\mathbb{R}}_+$. Inversement, si $\mathring{\Gamma}$ est ouvert et si $n \to x_n$ converge vers x dans E, on a $(x_n, f(x_n)) \notin \mathring{\Gamma}$, d'où $(x, \underline{\lim} f(x_n)) \notin \mathring{\Gamma}$ c'est-à-dire $f(x) \leq \underline{\lim} f(x_n)$. De même, $(x,r) \in \overline{\Gamma}$ équivaut à $r \leq f(x)$. Supposons f s.c.s. et à support compact. Si une suite $n \to (x_n, r_n) \in \overline{\Gamma}$ converge vers (x,r) dans $E \times \overline{\mathbb{R}}_+$, on a $r \leq \overline{\lim} f(x_n) \leq f(x)$, et $(x,r) \in \overline{\Gamma}$, donc $\overline{\Gamma}$ est fermé, et même compact puisque contenu dans le compact $\mathrm{Supp}\, f \times \overline{\mathbb{R}}_+$. Inversement, si $\overline{\Gamma}$ est compact, le support de f est compact. Si $n \to x_n$ converge vers x dans E, on trouve $(x_n, f(x_n)) \in \overline{\Gamma}$, d'où $(x, \overline{\lim} f(x_n)) \in \overline{\Gamma}$, et par suite $\overline{\lim} f(x_n) \leq f(x)$: f est s.c.s.

Nous pouvons donc identifier $\overset{+}{\Phi}_g$ a un sous-espace de $\mathcal{G}(E \times \overline{\mathbb{R}}_+)$ et $\overset{+}{\Phi}_k$ à un sous-espace de $(E \times \overline{\mathbb{R}}_+)$, et munir ces espaces de fonctions des topologies induites correspondantes. Il est facile de vérifier que $\overset{+}{\Phi}_g$ et $\overset{+}{\Phi}_k$ sont des sous-espaces fermés de $\mathcal{G}(E \times \overline{\mathbb{R}}_+^+)$ et $\mathcal{K}(E \times \overline{\mathbb{R}}_+)$ respectivement. En particulier, Φ_g^+ est compact, et Φ_k^+ est LCD.

Si $k \in \overset{+}{\Phi}_k$ et $g \in \overset{+}{\Phi}_g$, on pose $k < g$ si le sous-graphe supérieur $\overline{\Gamma}_k$ de k est contenu dans le sous-graphe inférieur $\mathring{\Gamma}_g$ de g, soit $\overline{\Gamma}_k \subset \mathring{\Gamma}_g$. Cette relation signifie donc : pour tout $x \in E$, on a soit $g(x) = k(x) = 0$, soit $k(x) < g(x)$ strictement. De même, $k \not< g$ signifie $\overline{\Gamma}_k \not\subset \mathring{\Gamma}_g$, c'est-à-dire : il existe $x \in E$ avec $k(x) \geq g(x) > 0$ ou $k(x) > g(x) = 0$.

Avec cette convention, il est facile de vérifier que la topologie de $\overset{+}{\Phi}_g$ est engendrée par le sous-ensemble $\{g : g > k\}$, $k \in \overset{+}{\Phi}_k$ (ouverts s.c.i.) et $\{g \not> g_0\}$, $g_0 \in \overset{+}{\Phi}_g$ (ouverts s.c.s.). De même la topologie de $\overset{+}{\Phi}_k$ est engendrée par les sous-ensembles $\{k : k < g\}$, $g \in \overset{+}{\Phi}_g$ (ouverts s.c.s.) et $\{k : k \not< k_0\}$, $k_0 \in \overset{+}{\Phi}_k$ (ouverts s.c.i.)

En ce qui concerne les fonctions continues à support compact, on a manifestement $\overset{+}{\mathcal{C}}_{\mathcal{K}} = \overset{+}{\Phi}_g \cap \overset{+}{\Phi}_k$. Nous conviendrons d'écrire $\varphi < g$ pour $g \in \overset{+}{\Phi}_g$ et $\varphi \in \overset{+}{\mathcal{C}}_{\mathcal{K}}$ si $\overline{\Gamma}_\varphi \subset \mathring{\Gamma}_g$, et de même, pour $k \in \overset{+}{\Phi}_k$, $k < \varphi$ signifiera $\overline{\Gamma}_k \subset \mathring{\Gamma}_\varphi$. Avec cette convention, on vérifie que les topologies de $\overset{+}{\Phi}_g$ et de $\overset{+}{\Phi}_k$ sont encore engendrées par les familles de sous-ensembles :

$$\{g : g > \varphi\}\ ,\ \{g,\ g \not> \varphi\}\ ,\ \varphi \in \overset{+}{\mathcal{C}}_{\mathcal{K}} \qquad \text{pour l'espace } \overset{+}{\Phi}_g$$

$$\{k : k < \varphi\}\ ,\ \{k : k \not< \varphi\}\ ,\ \varphi \in \overset{+}{\mathcal{C}}_{\mathcal{K}} \qquad \text{pour l'espace } \overset{+}{\Phi}_k$$

On vérifie aussi que les restrictions à $\overset{+}{\mathcal{C}}_{\mathcal{K}}$ des ensembles de ces quatre types sont des ouverts de $\overset{+}{\mathcal{C}}_{\mathcal{K}}$, lesquels, inversement, engendrent à eux tous la topologie de $\overset{+}{\mathcal{C}}_{\mathcal{K}}$. Autrement dit, <u>une suite φ_n converge vers φ dans $\overset{+}{\mathcal{C}}_{\mathcal{K}}$ si et seulement si elle converge vers φ à la fois dans $\overset{+}{\Phi}_k$ et dans $\overset{+}{\Phi}_g$</u>.

En ce qui concerne la <u>convergence monotone</u>, on notera :

$$\varphi_n , \varphi \in \overset{+}{\mathcal{C}}_{\mathcal{K}}, \varphi_n \uparrow \varphi \text{ ou } \varphi_n \downarrow \varphi \Rightarrow \varphi_n \to \varphi \text{ dans } \overset{+}{\mathcal{C}}_{\mathcal{K}}$$

$$g_n , g \in \overset{+}{\Phi}_g , g_n \uparrow g \text{ ou } g_n \downarrow g \Rightarrow g_n \to g \text{ dans } \overset{+}{\Phi}_g$$

$$k_n , k \in \overset{+}{\Phi}_k , k_n \uparrow k \text{ ou } k_n \downarrow k \Rightarrow k_n \to k \text{ dans } \overset{+}{\Phi}_k$$

En ce qui concerne l'addition, on note que :

$(k, k') \to k + k'$ est une application s.c.s. de $\overset{+}{\Phi}_k \times \overset{+}{\Phi}_k$ dans $\overset{+}{\Phi}_k$

$(\varphi, \varphi') \to \varphi + \varphi'$ est une application continue de $\overset{+}{\mathcal{C}}_{\mathcal{K}} \times \overset{+}{\mathcal{C}}_{\mathcal{K}}$ dans $\overset{+}{\mathcal{C}}_{\mathcal{K}}$

$(g, g') \to g + g'$ est une application s.c.i. de $\overset{+}{\Phi}_g \times \overset{+}{\Phi}_g$ dans $\overset{+}{\Phi}_g$

Prolongement d'une pseudo-intégrale à valeurs dans $\mathcal{K}_0$.

Soit I une application $\overset{+}{\mathcal{C}}_{\mathcal{K}}(E)$ dans $\mathcal{K}_0(R^d)$. Nous dirons que I est positivement homogène si $I(\lambda\varphi) = \lambda\, I(\varphi)$, $\lambda \geq 0$, $\varphi \in \overset{+}{\mathcal{C}}_{\mathcal{K}}$; croissante si $\varphi \leq \varphi'$ dans $\overset{+}{\mathcal{C}}_{\mathcal{K}}$ entraîne $I(\varphi) \subset I(\varphi')$; sous-additive, sur-additive ou additive selon que l'on a $I(\varphi + \varphi') \subset I(\varphi) \oplus I(\varphi')$, $I(\varphi + \varphi') \supset I(\varphi) \oplus I(\varphi')$ ou $I(\varphi + \varphi') = I(\varphi) \oplus I(\varphi')$; convexe (concave), si I est positivement homogène et sous-additive (sur-additive) ; positivement linéaire, si elle est à la fois convexe et concave.

Toute application positivement hologène vérifie $I(0) = \{0\}$. Comme on a toujours $0 \subset I(\varphi)$ ($\mathcal{K}_0$ désignant l'espace des compatcs contenant 0), toute application concave (en particulier toute application positivement linéaire) est croissante.

Nous dirons qu'une application I de $\overset{+}{\mathcal{C}}_{\mathcal{K}}$ dans $\mathcal{K}_0(R^d)$ est une intégrale, si elle est positivement linéaire ; qu'elle est pseudo-intégrale si elle est convexe croissante rt si de plus l'application CI de $\overset{+}{\mathcal{C}}_{\mathcal{K}}$ dans $C(\mathcal{K}_0)$ associant à tout $\varphi \in \overset{+}{\mathcal{C}}_{\mathcal{K}}$ l'enveloppe convexe $CI(\varphi)$ de $I(\varphi)$ est une intégrale. On vérifie immédiatement que toute intégrale est une pseudo-intégrale.

Proposition 9-2-2.- Toute application croissante et convexe (en particulier toute pseudo-intégrale) de $\overset{+}{\mathcal{C}}_{\mathcal{K}}(E)$ dans $\mathcal{K}_0$ est continue. Toute intégrale, et, plus généralement, toute application concave prend ses valeurs dans $C(\mathcal{K}_0)$.

Soit I une application convexe de $\overset{+}{\mathcal{C}}_{\mathcal{K}}$ dans $\mathcal{K}_0$, et φ_n une suite convergeant vers φ dans $\overset{+}{\mathcal{C}}_{\mathcal{K}}$. Les φ_n ont leurs supports dans un compact fixe $K_0 \subset E$, et on peut trouver une fonction $\varphi_0 \in \overset{+}{\mathcal{C}}_{\mathcal{K}}$ avec $\varphi_0(x) = 1$ pour $x \in K_0$. Pour n assez grabd, on a donc :

$$\varphi \leq \varphi_n + \varepsilon\,\varphi_o\ ,\ \varphi_n \leq \varphi + \varepsilon\,\varphi_o$$

I étant convexe et croissante, on en déduit

$$I(\varphi) \subset I(\varphi_n + \varepsilon\,\varphi_o) \subset I\ (\varphi_n) \oplus \varepsilon\ I(\varphi_o),\ I(\varphi_n) \subset I(\varphi) \oplus \varepsilon\ I(\varphi_o)$$

Par suite $I(\varphi_n)$ converge vers $I(\varphi)$ dans $\mathcal{K}_o$.

Si I est une application concave, pour tout $\varphi \in \overset{+}{\mathcal{C}}_{\mathcal{K}}$, on a $\varphi = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \varphi_i$ avec $\varphi_i = \varphi$, d'où $I(\varphi) \supset \frac{1}{n}\ (I(\varphi))^{\oplus n}$, et, pour n infini, $I(\varphi) \supset CI(\varphi)$ d'après la Proposition 1-5-5. L'inclusion inverse étant toujours vraie, $I(\varphi)$ est convexe.

Nous allons maintenant prolonger sur I le <u>compactifié</u> $\overline{\mathcal{K}}_o = \mathcal{K}_o \cup \{\omega\}$, ω désignant le point à l'infini de $\mathcal{K}_o$.

<u>Prolongement sur $\overset{+}{\Phi}_g$.</u>

Dans ce qui suit, I désigne une application <u>croissante convexe</u> (donc <u>continue</u>) de $\overset{+}{\mathcal{C}}_{\mathcal{K}}$ dans $\mathcal{K}_o$, qui ne sera pas, en général, une pseudo-intégrale, sauf mention ecplicite du contraire.

Pour tout $g \in \overset{+}{\Phi}_g$, on posera :

(9-2-1) $$I(g) = \lim\ \{I(\varphi),\ \varphi \in \overset{+}{\mathcal{C}}_{\mathcal{K}},\ \varphi < g\} \in \overline{\mathcal{K}}_o$$

La limite est prise au sens de limite dans $\overline{\mathcal{K}}_o$ de la famille filtrante croissante des $I(\varphi)$, $\varphi \in \overset{+}{\mathcal{C}}_{\mathcal{K}}$. On sait que cette limite est :

$$I(g) = \cup\ \{I(\varphi),\ \varphi < g,\ \varphi \in \overset{+}{\mathcal{C}}_{\mathcal{K}}\}$$

si ce fermé est dans $\mathcal{K}_o$ – ou, sinon, le point à l'infini ω.

<u>Proposition 9-2-3</u>.– I est croissante, convexe et s.c.i. sur $\overset{+}{\Phi}_g$, et vérifie la continuité monotone séquentielle : $g_n \uparrow g$ dans $\overset{+}{\Phi}_g$ entraine $I(g_n) \to I(g)$ dans $\overline{\mathcal{K}}_o$.

On vérifie sans peine que I est croissante. Si $g_n \to g$ dans $\overset{+}{\Phi}_g$, soit $\varphi < g$ (strictement) une fonction de $\overset{+}{\mathcal{C}}_{\mathcal{K}}$. On a $g_n > \varphi$ pour n assez grand, d'où $I(g_n) \supset I(\varphi)$. D'après la définition (9-2-1), il en résulte $\underline{\lim}\ I(g_n) \supset I(g)$, et I est s.c.i.

La continuité monotone $g_n \uparrow g$ entraine $g_n \to g$ dans $\overset{+}{\Phi}_g$, d'où $\underline{\lim}\ I(g_n) \supset I(g)$, puisque I est s.c.i. On a aussi $I(g_n) \subset I(g)$ puisque I est croissante, d'où $\overline{\lim}\ I(g_n) \subset I(g)$, et $I(g_n) \to I(g)$ dans $\mathcal{K}_o$.

Soient g, g' dans $\overset{+}{\Phi}_g$, φ_n et φ_n' deux suites dans $\overset{+}{\mathcal{C}}_{\mathcal{K}}$ avec $\varphi_n \uparrow g$, $\varphi_n' \uparrow g'$. Pour λ, μ réels ≥ 0, on a aussi $\lambda\ \varphi_n + \mu\ \varphi_n') \uparrow (\lambda\ g + \mu\ g')$. La continuité monotone et la convexité sur $\overset{+}{\mathcal{C}}_{\mathcal{K}}$ donnent :

$$I(\lambda g + \mu g') = \lim I(\lambda\varphi_n + \mu\varphi_n') \subset \lim [\lambda\ I(\varphi_n) \oplus \mu\ I(\varphi_n')] = \lambda\ I(g) \oplus \mu\ I(g')$$

COROLLAIRE - Si I est une intégrale, son prolongement sur $\overset{+}{\Phi}_g$ est positivement linéaire. Si I est une pseudo-intégrale, CI est positivement linéaire sur Φ_g^+.

Prolongement de I sur $\overset{+}{\Phi}_k$.

Sur $\overset{+}{\Phi}_k$, définissons la fonction $\overline{I}$ en posant :

$$\overline{I}(k) = \lim \{I(g),\ g \in \overset{+}{\Phi}_g,\ g > k\} = \bigcap_{g>k} I(g) \in \mathcal{K}_o \tag{9-2-2}$$

(limite de la famille filtrante $I(g)$, $g > k$, égale dans $\mathcal{K}_o$ à l'intersection de cette famille). Comme tout $k \in \overset{+}{\Phi}_k$ est majoré par un $\varphi \in \overset{+}{\mathcal{C}}_{\mathcal{K}}$, $\overline{I}$ prend ses valeurs dans $\mathcal{K}_o(\overline{I}(k) \neq \omega)$. On vérifie, d'ailleurs, que l'on peut, dans la définition (9-2-2), remplacer les $g \in \Phi_g^+$, $g > k$ par les $\varphi \in \overset{+}{\mathcal{C}}_{\mathcal{K}}$, $\varphi > k$. Plus précisément, pour toute suite $\varphi_n \in \overset{+}{\mathcal{C}}_{\mathcal{K}}$, $\varphi_n \downarrow k$ entraine $I(\varphi_n) \to \overline{I}(k)$ dans $\mathcal{K}_o$ (en effet, pour $\varepsilon > 0$, soit $g \in \Phi_g^+$ avec $g > k$ et $\overline{I}(k) \subset I(g) \subset \overline{I}(k) \oplus B_\varepsilon$, B_ε désignant la boule de rayon ε : le support de k étant compact, on a $\varphi_n < g$ pour n assez grand, d'où $\overline{I}(k) \subset I(\varphi_n) \subset I(k) \oplus B_\varepsilon$, et $I(\varphi_n) \to \overline{I}(k)$).

Proposition 9-2-4.- L'application $\overline{I}$ est convexe, croissante et s.c.s. sur $\overset{+}{\Phi}_k$. La convergence monotone $k_n \downarrow k$ dans $\overset{+}{\Phi}_k$ entraine $\overline{I}(k_n) \to \overline{I}(k)$ dans $\mathcal{K}_o$. Pour tout $g \in \Phi_g^+$, on a $I(g) = \lim \{I(k),\ k \in \Phi_k^+,\ k < g\}$. Si I est une intégrale (resp. une pseudo-intégrale), $\overline{I}$ (resp. $\overline{CI} = C\overline{I}$) est positivement linéaire sur Φ_k^+.

On vérifie immédiatement que $\overline{I}$ est croissante. Soit $\varphi_o \in \overset{+}{\mathcal{C}}_{\mathcal{K}}$ avec $\varphi_o > k$ et $I(\varphi_o) \subset \overline{I}(k) \oplus B_\varepsilon$. Pour tout $k' \in \Phi_k^+$ tel que $k' < \varphi_o$, on a aussi $\overline{I}(k') \subset I(\varphi_o) \subset \overline{I}(k) \oplus B_\varepsilon$, donc $\overline{I}$ est s.c.s. sur Φ_k^+. La convergence monotone $k_n \downarrow k$ dans Φ_k^+ entraine $k_n \to k$ et $\overline{\lim}\ \overline{I}(k_n) \subset \overline{I}(k)$, puisque $\overline{I}$ est s.c.s. Mais $\overline{I}$ étant croissante, on a aussi $\underline{\lim}\ \overline{I}(k_n) \supset \overline{I}(k)$, et $\overline{I}(k_n) \to \overline{I}(k)$ dans $\mathcal{K}_o$. Pour $g \in \Phi_g^+$, on a

$I(g) \supset \lim \{\overline{I}(k),\ k < g\}$. Mais $I(g) = \lim \{I(\varphi),\ \varphi \in \mathcal{C}_{\mathcal{K}},\ \varphi < g\}$, et $\mathcal{C}^+_{\mathcal{K}} \subset \Phi^+_g$ donnent l'inclusion inverse, et l'égalité.

Enfin, soient $k,\ k' \in \Phi^+_k$ et $\varphi_n \downarrow k$, $\varphi'_n \downarrow k'$, φ_n , $\varphi'_n \in \mathcal{C}^+_{\mathcal{K}}$. On a aussi $(\lambda\varphi_n + \mu\varphi'_n) \downarrow (\lambda k + \mu k')$, $\lambda,\ \mu \geq 0$, d'où :

$$I(\lambda k + \mu k') = \lim I(\lambda\varphi_n + \mu\varphi'_n) \subset \lim \lambda I(\varphi_n) \oplus \mu I(\varphi'_n) = \lambda I(\varphi) \oplus \mu I(\varphi')$$

et l'inclusion inverse si I est concave. Ainsi, $\overline{I}$ est convexe sur Φ^+_k , et positivement linéaire si I est une intégrale.

L'espace Φ^+_0 des fonctions pseudo-intégrables.

Dans ce qui suit, I désignera une pseudo-intégrale (bien que certaines des propositions ci-dessous subsistent si I est simplement une application croissante convexe). Nous désignerons par I' l'intégrale associée à I, définie par $I'(f) = CI(f)$, ou enveloppe convexe de I.

Pour toute fonction f (définie sur E, à valeurs dans la demi-droite compacte $\overline{\mathbb{R}}_+$), posons :

$$(9\text{-}2\text{-}3)\qquad \begin{cases} \overline{I}(f) = \lim \{I(g),\ g \in \Phi^+_g\ ,\ g > f\} \\ \underline{I}(f) = \lim \{\overline{I}(k),\ k \in \Phi^+_k\ ,\ k < f\} \end{cases}$$

(Il s'agit des limites dans $\overline{\mathcal{K}}_0$ des familles filtrantes considérées). Nous désignerons par $\overline{\Phi^+_0}$ l'ensemble des fonctions f telles que $\overline{I}(f) = \underline{I}(f)$, et par Φ^+_0 le sous-ensemble de $\overline{\Phi^+_0}$ défini par la condition supplémentaire $\overline{I}(f) \in \mathcal{K}_0$. Nous poserons $I(= \overline{I} = \underline{I})$ sur $\overline{\Phi^+_0}$ et Φ^+_0 . D'après la proposition 9-2-3, Φ^+_g est contenu dans $\overline{\Phi^+_0}$. L'inclusion $\Phi^+_k \subset \Phi^+_0$ n'est pas tout-à-fait évidente, car l'inégalité $k < f$ est stricte dans la définition (9-2-3). Mais, pour $\varepsilon_n \downarrow 0$, la suite $k_n = (1-\varepsilon_n)k$ vérifie $k_n < k$, et $\overline{I}(k_n) \to \overline{I}(k)$ dans $\mathcal{K}_0$, d'où $\Phi^+_k \subset \Phi^+_0$.

Pour deux fonctions f, f' positives quelconques, on établit sans peine les inclusions :

$$(9\text{-}2\text{-}3)\qquad \begin{cases} I(f) \subset \overline{I}(f) \\ \overline{I}(f+f') \subset \overline{I}(f) \oplus \overline{I}(f') \\ \underline{I}'(f+f') \supset \underline{I}'(f) \oplus \underline{I}'(f') \end{cases}$$

(la seconde inclusion s'applique à I et I', la troisième à I' seulement).

<u>LEMME 9-2-1</u> - On a $f \in \Phi_o^+$ si et seulement si on peut trouver une suite $g_n > f$ décroissante dans Φ_g^+ et une suite $k_n < f$ croissante dans Φ_k^+ telles que $I(g_n - k_n)$ converge vers $\{0\}$ dans $\mathcal{K}_o$. On a $f \in \overline{\Phi_o^+}$ et $I(f) = \omega$ si et seulement si on peut trouver une suite $k_n < f$ croissante dans Φ_k^+ telle que $\bar{I}(k_n)$ converge vers ω dans $\overline{\mathcal{K}}_o$.

Le deuxième énoncé résulte immédiatement des définitions. Soit f une fonction telle que $\bar{I}(f) \neq \omega$. On peut trouver une suite décroissante $g_n > f$ dans Φ_g^+ telle que $I(g_1) \neq \omega$ et une suite $k_n < f$ croissante dans Φ_k^+ avec $\lim I(g_n) = \bar{I}(f)$ et $\lim I(k_n) = \underline{I}(k)$. La suite $g_n - k_n$, décroissante dans Φ_g^+, vérifie $I(g_n - k_n) \in \mathcal{K}_o$ (puisque $I(g_1) \neq \omega$), et, dans $\mathcal{K}_o$, la suite décroissante $I(g_n - k_n)$ admet une limite A. D'après la seconde inclusion (9-2-3'), on a :

$$I(g_n) = I(g_n - k_n + k_n) \subset I(g_n - k_n) \oplus \bar{I}(k_n)$$

et, pour n infini, $\bar{I}(f) \subset A \oplus \underline{I}(f)$. Si $A = \{0\}$, on en déduit $\bar{I}(f) = \underline{I}(f)$ et $f \in \Phi_o^+$. Inversement, supposons $f \in \Phi_o^+$. Les deux dernières inclusions (9-2-3') montrent que l'intégrale I' associée à I est additive, soit $(\bar{I}(f+f') = \underline{I}'(f+f') = I'(f) \oplus I'(f')$ pour $f, f' \oplus \Phi_o^+)$, de sorte que l'inclusion ci-dessus est une égalité pour I' : $\bar{I}'(f) = C(A) \oplus I'(f)$. Mais $\bar{I}'(f) = \underline{I}'(f)$, puisque $f \in \Phi_o^+$, et par suite $C(A) = \{0\}$, et, a fortiori, $A = \{0\}$.

<u>Proposition 9-2-5</u>.- $\overline{\Phi_o^+}$ est stable pour $\vee$ et Φ_o^+ est stable pour $\wedge$.

Soient f et f' dans Φ_o^+, et k_n, g_n(k_n', g_n') des suites dans Φ_k^+ et Φ_g^+ vérifiant relativement à f (à f') les conditions du lemme 9-2-1. Il en résulte que :

$$I(g_n + g_n' - k_n - k_n') \subset I(g_n - k_n) \oplus I'(g_n' - k_n')$$

converge vers $\{0\}$ dans $\mathcal{K}_o$, donc aussi son enveloppe convexe :

$$I'(g_n + g_n' - k_n - k_n') = I'(g_n \vee g_n' = k_n \vee k_n') \oplus I'(g_n \wedge g_n' - k_n \wedge k_n')$$

(on désigne par $f \vee f'$ et $f \wedge f'$ les fonctions Sup (f,f') et Inf (f,f') respectivement). Mais cela n'est possible que si chacune des suites décroissantes $I'(g_n \vee g_n' - k_n \vee k_n')$ et $I'(g_n \wedge g_n' - k_n \wedge k_n')$ converge vers $\{0\}$ dans $\mathcal{K}_o$. A fortiori, on a alors :

$$I(g_n \vee g_n' - k_n \vee k_n') \to \{0\} \text{ , } I(g_n \wedge g_n' - k_n \wedge k_n') \to \{0\}$$

et, d'après le lemme, cela entraîne $f \wedge f' \in \Phi_o^+$ et $f \vee f' \in \Phi_o^+$.

Si une fonction $f \in \overline{\Phi_o^+}$ vérifie $I(f) = \omega$, on peut trouver dans Φ_k^+ une suite croissante $k_n \leq f$ avec $I(k_n) \to \omega$ dans $\mathcal{K}_o$. Pour toute fonction f', l'inégalité $f \vee f' > k_n$ entraine $\underline{I}(f \vee f') = \omega$ donc $f \vee f' \in \overline{\Phi_o^+}$, d'après le lemme 9-2-1.

<u>Proposition 9-2-6</u>.- Si f et f' sont deux fonctions de Φ_o^+ on a $f + f' \in \Phi_o^+$. Si de plus $f \geq f'$, on a aussi $f - f' \in \Phi_o^+$.

Prenons, en effet, des suites g_n , $k_n(g_n'$, $k_n')$ vérifiant les conditions du lemme pour f et f'. L'inclusion de sous-additivité :

$$I(g_n + g_n' - k_n - k_n') \subset I(g_n - k_n) \oplus I(g_n' - k_n')$$

montre $I(g_n + g_n' - k_n - k_n') \to \{0\}$, d'où $f + f' \in \Phi_o^+$, d'après le lemme. Si $f - f' \geq 0$, on a aussi :

$$g_n - k_n' > f - f' > (k_n - g_n')_+$$

et :

$$g_n - k_n' - (k_n - g_n')_+ \leq g_n - k_n' - (k_n - g_n') = (g_n - k_n) + (g_n' - k_n')$$

On en déduit (croissance et sous-additivité) :

$$I(g_n - k_n' - (k_n - g_n')_+ \subset I(g_n - k_n) \oplus I(g_n' - k_n')$$

Le premier membre converge donc vers $\{0\}$, et, d'après le lemme, $f - f' \in \Phi_o^+$.

<u>COROLLAIRE</u> - Φ_o^+ et $\overline{\Phi_o^+}$ sont stables pour l'addition, et I est croissante et convexe sur $\overline{\Phi_o^+}$.

Pour Φ_o^+ , cela découle de la proposition. Si $f \in \overline{\Phi_o^+}$, et $I(f) = \omega$, pour toute fonction positive f', $f + f' \in \overline{\Phi_o^+}$ (Proposition 9-2-5), et la relation $I(\lambda f + \mu f') = \omega$ montre la convexité.

<u>Proposition 9-2-7</u>.- $\overline{\Phi_o^+}$ est stable pour l'addition dénombrable. Pour toute f_n dans Φ_o^+ , on a $I(\sum_n f_n) = \lim I(\sum_{n=1}^N f_n) \subset \bigoplus_{n=1}^\infty I(f_n)$ pour la pseudo- intégrale I, et $I'(\sum f_n) = \bigoplus_{n=1}^\infty I'(f_n)$ pour l'intégrale associée.

Soit f_n une suite dans $\overline{\Phi_o^+}$. Si $I(f_{n_o}) = \omega$ pour un n_o , $f = \sum_n f_n$ vérifie $f \geq f_{n_o}$, d'où

$\underline{I}(f) \supset I(f_{n_o})$, et $f \in \overline{\Phi_o^+}$, $I(f) = \omega$. Supposons donc $f_n \in \Phi_o^+$ pour tout n. Soit ε_n une suite de réels > 0 avec $\Sigma\, \varepsilon_n = \varepsilon$. D'après le lemme 9-2-1 et la Proposition 9-2-6, on peut trouver $g_n \in \Phi_g^+$ avec $g_n > f_n$, et $k_n \in \Phi_k^+$ avec $k_n < f_n$ tels que :

$$\text{(a)} \qquad I(g_n - k_n) \subset B_{\varepsilon_n}$$

(boule de rayon ε_n). D'après la Proposition 9-2-3, $g = \Sigma\, g_n$ et $h = \Sigma\, k_n$ vérifient :

$$\text{(b)} \qquad I(g) = \lim_N I(\sum_{n=1}^{N} g_n) \text{ , } I(g-k) = \lim_N \ I(\sum_{n=1}^{N} (g_n - k_n))$$

Supposons d'abord $I(g) \neq \omega$. De (a) résulte :

$$\text{(c)} \qquad I(\sum_{n=1}^{N} (g_n - k_n)) \subset \bigoplus_{n=1}^{N} I(g_n - k_n) \subset B_\varepsilon$$

et la seconde relation (b) donne $I(g-k) \subset B_\varepsilon$. Il suffit d'appliquer le lemme 9-2-1 pour en déduire $f \in \Phi_o^+$.

Mais (c) donne $I(\sum_{n=1}^{N} g_n) \subset I(\sum_{n=1}^{N} f_n) \oplus B_\varepsilon$. Enfin, (Proposition 9-2-3) pour N assez grand, on a aussi $I(g) \subset I(\sum_{n=1}^{N} g_n) \oplus B_\varepsilon$, donc :

$$I(f) \subset I(g) \subset I(\sum_{n=1}^{N} f_n) \oplus K_{2\varepsilon} \subset (\lim_N I(\sum_{n=1}^{N} f_n)) \oplus K_{2\varepsilon}$$

Par suite, $I(f) = \lim_N I(\sum_{n=1}^{N} f_n)$. L'inégalité $I(f) \subset \bigoplus_{n=1}^{\infty} I(f_n)$ en résulte aussitôt, par sous-additivité, et devient une égalité pour l'intégrale associée I' aui est additive.

Il reste à examiner le cas où $I(g_n) \neq \omega$ mais $I(g) = \omega$. On a a fortiori $I'(g) = \omega$, et la suite :

$$I'(\sum_{n=1}^{N} g_n) = \bigoplus_{n\neq 1}^{N} I'(g_n)$$

converge vers ω (Proposition 9-3-2). Comme on déduit de (a) :

$$I'(f_n) \subset I'(g_n) \subset I'(f_n) \oplus K_{\varepsilon_n}$$

on a aussi :

$$\bigoplus_{n\neq 1}^{N} I'(g_n) \subset K_\varepsilon \oplus (\bigoplus_{n=1}^{N} I'(f_n))$$

Donc $\overset{N}{\underset{n\neq 1}{\oplus}} I'(f_n) = I'(\sum_{n=1}^{N} f_n)$ converge aussi vers ω, d'où $\underline{I}'(f) = \omega$ et par suite $\underline{I}(f) = \omega$.

Proposition 9-2-8.- $\overline{\Phi_o^+}$ est stable pour la convergence monotone $\uparrow$, et $f_n \uparrow f$ dans $\overline{\Phi_o^+}$ entraîne $I(f_n) \to I(f)$ dans $\overline{\mathcal{K}}_o$.

En effet, posons $h_1 = f_1$, $h_n = f_n - f_{n-1}$, d'où $f_N = \sum_{n=1}^{N} h_n$, $f = \sum h_n$. Si $I(f_{n_o}) = \omega$ pour un n_o, $f \geq f_{n_o}$ entraîne $\underline{I}(f) = \omega$, et la proposition en résulte. Si $f_n \in \Phi_o^+$ pour tout n, $h_n \in \Phi_o^+$ (Proposition 9-2-6), et la Proposition 9-2-7 permet de conclure.

Proposition 9-2-9.- Φ_o^+ est stable pour la convergence monotone $\downarrow$, et $f_n \downarrow f$ dans Φ_o^+ entraîne $I(f_n) \to I(f)$ dans $\mathcal{K}_o$.

Soit d'abord $f_n \in \Phi_o^+$ avec $f_n \downarrow 0$. On a $f_1 - f_n \in \Phi_o^+$ (Proposition 9-2-6) et $f_1 - f_n \uparrow f_1$, d'où $I(f_1-f_n) \to I(f_1)$ dans $\mathcal{K}_o$ (Proppsition 9-2-7). Mais, dans $\mathcal{K}_o$, la suite décroissante $I(f_n)$ admet une limite A, et $I'(f_n)$ converge vers C(A). L'additivité de I' donne alors :

$$I'(f_1) = I'(f_1-f_n) \oplus I'(f_n)$$

et, en passant à la limite, $I'(f_1) = C(A) \oplus I'(f_1)$, d'où $C(A) = \{0\}$ et, a;fortiori, $A = \{0\}$.

Soit maintenant $f_n \downarrow f$, $f_n \in \Phi_o^+$. On a encore $f_1 - f_n \in \Phi_o^+$ (Proposition 9-2-6), et $f_1-f_n \uparrow f_1-f$ entraîne (Proposition 9-2-8) $f_1 - f \in \Phi_o^+$ et $I(f_1-f_n) \to I(f_1-f)$. Mais la Proposition 9-2-6 montre $f = f_1 - (f_1-f) \in \Phi_o^+$, donc aussi f_n-f. Comme f_n-f tend vers 0, on a, d'après la première partie, $I(f_n-f) \to \{0\}$ dans $\mathcal{K}_o$. Par suite, $I(f_n) \subset I(f) \oplus I(f_n-f)$ vérifie $\overline{\lim}\, I(f_n) \subset I(f)$, d'où $I(f_n) \to I(f)$, puisque $f_n > f$.

Plus généralement :

LEMME de Fatou-Lebesgue - Soit f_n une suite dans Φ_o^+ majorée par une fonction $g \in \Phi_o^+$ fixe. On a :

$$I(\limsup_n f_n) \supset \overline{\lim}\, I(f_n)$$

$$I(\liminf f_n) \subset \underline{\lim}\, I(f_n)$$

En particulier, si une suite $f_n \in \Phi_o^+$ majorée par un $g \in \Phi_o^+$ fixe converge ponctuellement vers une fonction f, on a $f \in \Phi_o^+$ et $I(f_n) \to I(f)$ dans $\mathcal{K}_o$.

On a $g \geq \operatorname{Sup}_{m\geq n} f_m$, d'où $\sup_{m\geq n} f_m \in \Phi_o^+$ (Proposition 9-2-3), et $I(\lim_n \sup f_n) = \lim_n I(\sup_{m\geq n} f_m)$ (Proposition 9-2-9). Comme $I(f_n) \subset I(\sup_{m\geq n} f_m)$, la première inclusion en résulte. De même, $g \geq \operatorname{Inf}_{m\geq n} f_m$ donne $\operatorname{Inf}_{m\geq n} f_m \in \Phi_o^+$ (Proposition 9-2-9) et $I(\lim_n \operatorname{Inf} f_n) = \lim_n I(\operatorname{Inf}_{m\geq n} f_m)$ (Proposition 9-2-8). De $I(f_n) \supset I(\operatorname{Inf}_{m\geq n} f_m)$ résulte la seconde inclusion.

<u>LEMME 9-2-3</u> - Pour $f \in \Phi_o^+$ et a réel $\in$ O, on a $f \wedge a \in \Phi_o^+$.

En effet, soit K_n une suite croissante de compacts recouvrant E. On a $1_{K_n} \in \Phi_K^+ \subset \Phi_o^+$, puis $f \wedge (a\, 1_{K_n}) \in \Phi_o^+$ (Proposition 9-2-5). Comme $(f \wedge a\, 1_{K_n}) \uparrow (f \wedge a)$, la Proposition 9-2-8 donne $(f \wedge a) \in \Phi_o^+$.

<u>Proposition 9-2-10</u>.- Pour $f \in \Phi_o^+$, on a $1_{\{f>b\}} \in \Phi_o^+$, et de même $1_{\{a\geq f>b\}} \in \Phi_o^+$ pour $a \geq b > 0$.

Pour $a > b \geq 0$, posons $r_a = \dfrac{f \wedge a - f \wedge b}{a - b}$. D'après le lemme 9-2-3 et la Proposition 9-2-6, on a $r_a \in \Phi_o^+$ si $f \in \Phi_o^+$. Pour $a \downarrow b$, on a $r_a \uparrow 1_{\{f>b\}}$, d'où $1_{\{f>b\}} \in \overline{\Phi_o^+}$ (Proposition 9-2-8), et même $1_{\{f>b\}} \in \Phi_o^+$ si $b > 0$. Pour $a \geq b > 0$, $1_{\{f>b\}} - 1_{\{f>a\}} = 1_{\{a\geq f>b\}} \in \Phi_o^+$, d'après la Proposition 9-2-6.

<u>COROLLAIRE</u> - Pour toute $f \in \overline{\Phi_o^+}$, les fonctions :

$$r_n = \sum_{k=1}^{\infty} (k/2^n)\; 1_{\{(k+1)/2^n \geq f > k/2^n\}}$$

vérifient $r_n \uparrow f$, $I(r_n) \to I(f)$ dans $\mathcal{K}_o$, et l'intégrale I' vérifie :

$$I'(f) = \lim_n \bigoplus_{k=1}^{\infty} (k/2^n)\; I'(A_{\{(k+1)/2^n \geq f > k/2^n\}})$$

<u>Pseudo-Intégrales semi-additives, ou $\mathcal{K}_o$-Intégrales.</u>

Nous dirons qu'une pseudo-intégrale est <u>semi-additive</u> si elle vérifie $I(\varphi+\varphi') = I(\varphi) \oplus I(\varphi')$ pour $\varphi, \varphi' \in \mathcal{C}_{\mathcal{K}}^+$ <u>à supports disjoints</u>. Si $\varphi\, \varphi' = 0$, les supports de φ et φ' ne sont pas forcément disjoints, mais $\varphi_n = (\varphi-\varepsilon_n)_+$ et $\varphi'_n = (\varphi'-\varepsilon_n)_+$ ($\varepsilon_n \downarrow 0$) sont à supports disjoints, donc $I(\varphi_n+\varphi'_n) = I(\varphi_n) \oplus I(\varphi'_n)$. De $\varphi_n \uparrow \varphi$ et $\varphi'_n \uparrow \varphi$ résulte ensuite $I(\varphi+\varphi') = I(\varphi) \oplus I(\varphi')$. Plus généralement :

Proposition 9-2-11.- Si I est une pseudo-intégrale semi-additive, on a $I(f+f') = I(f) \oplus I(f')$ pour $f, f' \in \overline{\Phi_0^+}$ dès que les ensembles $\{f > 0\}$ et $\{f' > 0\}$ sont disjoints.

La proposition est vraie sur $\Phi_{\mathcal{K}}^+$, et on vérifie immédiatement qu'elle subsiste sur Φ_g^+ et Φ_k^+. Pour $f \in \overline{\Phi_0^+}$ telle que $I(f) = \omega$, la proposition est encore vraie (par définition $\omega \oplus K = \omega$ dans $\overline{\mathcal{K}}_0$). Supposons donc f et $f' \in \Phi_0^+$, et soient $k_n < f$, $k_n' < f'$ deux suites croissantes telles que $I(k_n) \to I(f)$ et $I(k_n') \to f'$ dans $\mathcal{K}_0$. Si $\{f > 0\} \cap \{f' > 0\} = \emptyset$, a fortiori $k_n\, k_n' = 0$ et $I(k_n+k_n') = I(k_n) \oplus I(k_n')$. Pour n infini, on en déduit :

$$I(f+f') \supset \lim I(k_n+k_n') = I(f) \oplus I(f')$$

L'inclusion inverse étant vérifiée, puisque I est convexe, on a l'égalité.

COROLLAIRE - Si la pseudo-intégrale I est semi-additive, pour toute fonction $f \in \Phi_0^+$, on a :

$$I(f) = \lim_n \bigoplus_{k=1}^{\infty} (k/2^n)\, I(1_{\{(k+1)/2^n \geq f > k/2^n\}})$$

En effet, considérons les fonctions r_n introduites dans le corollaire de la Proposition 9-2-10. Les Propositions 9-2-7 et 9-2-11 donnent :

$$I(r_n) = \bigoplus_{k=1}^{\infty} (k/2^n)\, I(1_{\{(k+1)/2^n \geq f > k/2^n\}})$$

et il suffit d'appliquer le corollaire de la Proposition 9-2-10.

A partir de maintenant, nous ne considérerons plus que des pseudo-intégrales semi-additives, que nous appellerons intégrales à valeurs dans $\mathcal{K}_0$, ou $\mathcal{K}_0$-intégrales, pour les distinguer des intégrales proprement dites, ou $C(\mathcal{K}_0)$-intégrales, qui prennent leurs valeurs dans $C(\mathcal{K}_0)$.

9-3 MESURES SUR E A VALEURS DANS $\overline{\mathcal{K}}_0$.

Soit I une $\mathcal{K}_0$-intégrale sur un espace LCD E, et $\overline{\Phi_0^+}$ l'espace fonctionnel sur lequel I se prolonge. D'après ce qui précède, $\overline{\Phi_0^+}$ contient les fonctions boréliennes sur E, et, en particulier, les indicatrices des boréliens de E. Désignons par $\mathcal{B} = \mathcal{B}(E)$ l'ensemble des boréliens. En posant $I(B) = I(1_B)$ pour $B \in \mathcal{B}$, on voit que I applique $\mathcal{B}$ dans $\overline{\mathcal{K}}_0$. Cette fonction d'ensemble est croissante, vérifie $I(\emptyset) = \{0\}$, possède la continuité monotone séquentielle : $B_n \uparrow B$ entraîne

$I(B_n) \to I(B)$; $B_n \downarrow B$ avec $I(B_{n_0}) \neq \omega$ pour un n_0 entraîne $I(B_n) \to I(B)$. D'après la Proposition 9-2-11, I est additive sur $\mathcal{B}$, donc aussi <u>σ-additive</u>. Enfin, $I(K) \neq \omega$ pour $K \in \mathcal{K}(E)$.

Le corollaire de la Proposition 9-2-11 montre que $I(f)$ peut se mettre sous la forme $\int_E f(x)\, I(dx)$, ce symbole ayant le sens usuel de limite d'intégrales de fonctions étagées.

E, sens inverse, si E est un espace quelconque muni d'une σ-algèbre $\mathcal{B}$, nous dirons qu'une application $\mu : \mathcal{B} \to \mathcal{K}_0$ est une <u>mesure</u> (<u>finie</u>) <u>à valeurs dans $\mathcal{K}_0$</u> si elle vérifie les 3 axiomes :

1 - $B, B' \in \mathcal{B}$, $B \subset B' \Rightarrow \mu(B) \subset \mu(B')$ (croissance)

2 - $B, B' \in \mathcal{B}$, $B \cap B' = \emptyset \Rightarrow \mu(B \cup B') = \mu(B) \oplus \mu(B')$ (additivité)

3 - $B_n \in \mathcal{B}$, $B_n \downarrow \emptyset \Rightarrow \mu(B_n) \to \{0\}$ dans $\mathcal{K}_0$.

On note que $\mu(B)$ est toujours un <u>compact contenu dans le compact fixe $\mu(E)$</u>, <u>d'où résulte en particulier que l'espace image $\mu(\mathcal{B})$ est compact dans $\mathcal{K}_0$</u>. Des trois axiomes résultent les propriétés :

$$I(\emptyset) = \{0\}$$

$$B_n \uparrow B, \text{ ou } B_n \downarrow B \Rightarrow \mu(B_n) \to \mu(B) \text{ dans } \mathcal{K}_0 .$$

ainsi que la <u>σ-additivité</u> : $\mu(\bigcup_n B_n) = \bigoplus_n \mu(B_n)$ pour des B_n disjoints.

Montrons, par exemple, la propriété de continuité monotone. Soit $B_n \uparrow B$ dans $\mathcal{B}$, donc $(B \setminus B_n) \downarrow \emptyset$. L'axiome 3 donne $\mu(B \setminus B_n) \to \{0\}$ dans $\mathcal{K}_0$. De $\mu(B) = \mu(B_n) \oplus \mu(B \setminus B_n)$ (axiome 2) et du fait que la suite $\mu(B_n)$ croissante dans $\mathcal{K}_0$ converge vers la limite $A = \overline{\bigcup \mu(B_n)} \in \mathcal{K}_0$ (puisque tous ces compacts sont contenus dans le compact fixe $\mu(E)$), résulte alors $\mu(B) = A$. De même, si $B_n \downarrow B$ dans $\mathcal{B}$, $(B_n \setminus B) \downarrow \emptyset$ et $\mu(B_n \setminus B) \downarrow \{0\}$, d'où $\mu(B_n) = \mu(B) \oplus \mu(B_n \setminus B) \downarrow \mu(B)$ dans $\mathcal{K}_0$.

De même, une application μ de $\mathcal{B}$ dans le compactifié $\overline{\mathcal{K}_0} = \mathcal{K}_0 \cup \{\omega\}$ sera une <u>mesure σ-finie</u> sur E s'il existe dans $\mathcal{B}$ une suite croissante E_n avec $E = \bigcup E_n$ telle que $\mu(E_n) \in \mathcal{K}_0$, $\mu(B \cap E_n) \uparrow \mu(B)$ dans $\overline{\mathcal{K}_0}$ pour tout $B \in \mathcal{B}$ et que la restriction μ_n de μ à chaque E_n vérifie les trois axiomes ci-dessus.

Une mesure μ σ-finie est <u>croissante</u>, <u>σ-additive</u>, et vérifie $B_n \uparrow B \Rightarrow \mu(B_n) \to \mu(B)$ dans $\mathcal{K}_0$ pour toute suite B_n dans $\mathcal{B}$. Montrons, par exemple, la <u>continuité monotone</u>.

Pour $B_n \uparrow B$, on a dans $\mathcal{K}_0$:

$$\mu(B) = \lim_m \mu(B \cap E_m) = \overline{\bigcup_m \mu(B \cap E_m)}$$

$$\mu(B_n) = \lim_m \mu(B_n \cap E_m) = \overline{\bigcup_m \mu(B_n \cap E_m)}$$

puisqu'il s'agit de suites croissantes dans $\mathcal{K}_o$, et de même :

$$\lim \mu(B_n) = \overline{\bigcup_n \mu(B_n)} = \overline{\bigcup_n \overline{\bigcup_m \mu(B_n \cap E_m)}} =$$

$$\overline{\bigcup_n (\bigcup_m \mu(B_n \cap E_m))} = \overline{\bigcup_m \bigcup_n (\mu(B_n \cap E_m))} =$$

$$\overline{\bigcup_m \overline{\bigcup_n (\mu(B_n \cap E_m))}} = \overline{\bigcup_m \mu(B \cap E_m)} = \mu(B)$$

La σ-additivité se déduit alors de l'additivité simple, qui se démontre elle-même sans peine.

Par contre, la continuité monotone $B_n \downarrow B \Rightarrow \mu(B_n) \to \mu(B)$ dans $\mathcal{K}_o$ n'est assurée, au départ, que si les B_n , au-delà d'un certain rang, restent contenues dans E_m fixe.

Enfin, nous dirons qu'une mesure μ σ-finie sur un espace LCD E muni de sa σ-algèbre borélienne est <u>régulière</u> s'il existe une $\mathcal{K}_o$-intégrale I telle que $\mu(B) = I(1_B)$ pour tout $B \in \mathcal{B}$. Celà implique, en particulier, que $\mu(K)$ soit fini pour tout compact $K \in \mathcal{K}(E)$, et aussi que les restrictions de μ à $\mathcal{G}(E)$ et à $\mathcal{K}(E)$ soient respectivement s.c.i. et s.c.s. (nous verrons que ces conditions sont remplies automatiquement dès que μ est finie pour tout compact).

<u>REMARQUE</u> - Toute mesure μ à valeurs dans $\mathcal{K}_o$ est <u>croissante pour le préordre</u> $\preccurlyeq$ sur $\mathcal{K}_o$ ($A \succcurlyeq B$ si $A_B = A$). En effet, pour $B' \subset B$ dans $\mathcal{B}$, on a $\mu(B) = \mu(B') \oplus \mu(B \cap B'^c)$, donc $\mu(B') \preccurlyeq \mu(B)$: telle est la raison de la présente étude, dont l'objectif initial était de caractériser les familles à 1 paramètre B_λ croissant pour $\preccurlyeq$ dans $\mathcal{K}_o$.

<u>Construction de l'Intégrale associée à une mesure à valeurs dans $\mathcal{K}_o$</u> .

Soit μ une mesure <u>finie</u> sur un espace mesurable $(E,\mathcal{B})$ à valeurs dans $\mathcal{K}_o$,et $\mathcal{E}_+$ l'ensemble des fonctions étagées positives sur E (de la forme $f = \sum x_i 1_{Bi}$, $x_i \geq 0$, $B_i \in \mathcal{B}$ partition de E). Pour $f \in \mathcal{E}_+$, définissons $\mu(f)$ en posant

$$\mu(f) = \quad f(x)\ \mu(dx) = \bigoplus_i x_i\ \mu(B_i)$$

Si f' est une autre fonction étagée, de la forme $f' = \Sigma\, x'_j\, 1_{B'_j}$, on a

$$f+f' = \sum_{i,j} (x_i + x'_j)\, 1_{B_i \cap B'_j}$$

et :

$$\mu(f+f') = \bigoplus_{i,j} (x_i + x'_j)\, \mu(B_i \cap B'_j)$$

La relation $(\lambda + \mu)\, K \subset \lambda\, K \oplus \mu\, K$ ($K \in \mathcal{K}_0$) montre :

$$\mu(f+f') \subset \mu(f) \oplus \mu(f')$$

Mais, si $f\, f' = 0$, on met $f + f'$ sous la forme $\sum_i x_i\, 1_{B_i} + \sum_j x'_j\, 1_{B_j}$ puisque $B_i \cap B_j = \emptyset$ dès que $x_i\, x_j \neq 0$, d'où :

$$\mu(f+f') = (\bigoplus_i x_i\, \mu(B_i)) \oplus (\bigoplus_j x'_j\, \mu(B_j)) = \mu(f) \oplus \mu(f')$$

Ainsi μ est <u>convexe</u>, <u>croissante</u> et <u>semi-additive</u> sur $\mathcal{E}_+$.

A la mesure μ, associons la mesure μ' à valeur dans $C(\mathcal{K}_0)$, en posant $\mu'(B) = C(\mu(B))$, $B \in \mathcal{B}$. Sur $\mathcal{E}_+$, on a $\mu'(f) = C(\mu(f))$ et l'égalité $\lambda\, K \oplus \mu\, K = (\lambda + \mu)K$, valable pour $K \in C(\mathcal{K}_0)$, montre que la fonctionnelle μ' est <u>positivement linéaire</u> sur $\mathcal{E}_+$.

En reprenant le raisonnement classique (par exemple, dans Neveu, Proposition II-3-1), on montre que $\mu(f)$ est l'unique fonctionnelle convexe, croissante et semi-additive sur $\mathcal{E}_+$ vérifiant $\mu(1_A) = \mu(A)$ pour $A \in \mathcal{B}$, et que de plus μ jouit de la propriété de <u>continuité monotone séquentielle</u> : $f_n \uparrow f$ ou $f_n \downarrow f$ dans $\mathcal{E}^+$ entraîne $\mu(f_n) \to \mu(f)$ dans $\mathcal{K}_0$.

Puis (en suivant par exemple Neveu, Proposition II-3-2) on étend μ à l'espace $\mathcal{J}_+$ (stable pour $\uparrow$) des limites supérieures $f = \lim \uparrow f_n$ des suites croissantes dans $\mathcal{E}^+$. on pose pour cela : $\mu(f) = \lim \mu(f_n)$ dans $\overline{\mathcal{K}}_0$ (cette limite existe, puisqu'il s'agit d'une suite croissante) ; on vérifie que $\mu(f)$ ne dépend pas du choix de la suite $f_n \uparrow f$, et que l'application $\mu : \mathcal{J}_+ \to \overline{\mathcal{K}}_0$ ainsi définie est croissante, convexe (positivement linéaire, si μ prend ses valeurs dans $C(\mathcal{K}_0)$) et vérifie la continuité monotone pour $\uparrow$: $f_n \uparrow f$ dans $\mathcal{J}_+$ entraine $\mu(f_n) \to \mu(f)$ dans $\mathcal{K}_0$. Enfin, le <u>lemme de Fatou</u> reste valable. Si une suite f_n dans $\mathcal{J}_+$ est majorée par un $g \in \mathcal{J}_+$ tel que $\mu(g) \neq \omega$, on a :

$$\begin{cases} \mu(\lim \operatorname{Sup} f_n) \supset \overline{\lim}\, \mu(f_n) \\ \\ \mu(\lim \operatorname{Inf} f_n) \subset \underline{\lim}\, \mu(f_n) \end{cases}$$

En particulier, si la suite $f_n \in {}_+$ est majorée par un $g \in \mathcal{J}_+$ avec $I(g) \neq \omega$ et converge ponctuellement vers f, on a $f \in \mathcal{J}_+$ et $\mu(f_n) \to \mu(f)$ dans $\mathcal{K}_o$.

Supposons maintenant que E soit LCD et muni de sa σ-algèbre borélienne $\mathcal{B}$. Soit E_n une suite croissante de compacts couvrant E en vérifiant $E_n \subset \mathring{E}_{n+1}$ et μ une mesure σ-finie pour les E_n , à valeur dans $\mathcal{K}_o$ sur chaque E_n. Pour $\varphi \in \mathcal{C}^+_{\mathcal{K}}$, le support de φ est contenu dans un E_n , et $\mu(\varphi) = \int \varphi \, d\mu$ est dans $\mathcal{K}_o$. Cette intégrale définit une application croissante et convexe de $\mathcal{C}^+_{\mathcal{K}}$ dans $\mathcal{K}_o$ (donc continue, d'après la Proposition 9-2-1) d'ailleurs semi-additive, comme on le vérifie immédiatement. Il s'agit donc d'une $\mathcal{K}_o$-intégrale I, et on a $\mu(\varphi) = I(\varphi)$ pour $\varphi \in \mathcal{C}^+_{\mathcal{K}}$. Cette $\mathcal{K}_o$-intégrale se prolonge ensuite sur $\Phi^+_o \supset \mathcal{J}_+$, et nous noterons encore ce prolongement I (qui prend ses valeurs dans le compactifié $\overline{\mathcal{K}}_o$). Il reste à montrer que I coïncide avec μ sur $\mathcal{J}_+$, et, en particulier, que l'on a $\mu(B) = I(1_B)$ pour $B \in \mathcal{B}$.

Pour cela, supposons d'abord la mesure <u>μ finie</u> ($\mu(E)$ compact). Pour tout $g \in \Phi^+_g$, on peut trouver une suite $\varphi_n \in \Phi^+_g$, on peut trouver une suite $\varphi_n \in \mathcal{C}^+_{\mathcal{K}}$ avec $\varphi_n \uparrow g$. I et μ vérifiant la continuité monotone $\uparrow$, on en déduit $\mu(g) = I(g)$, et I et μ coïncident sur Φ^+_g . Pour $k \in \Phi^+_k$, on peut trouver $\varphi_n \in \mathcal{C}^+_{\mathcal{K}}$ avec $\varphi_n \downarrow k$, et la continuité monotone $\downarrow$ montre que I et μ coïncident encore sur Φ^+_k . Soit, maintenant, $f \in \Phi^+_o$. Par définition, on peut trouver une suite k_n croissante dans Φ^+_k et une suite g_n décroissante dans Φ^+_g avec $k_n < f < g_n$ et $\lim I(k_n) = I(f) = \lim I(g_n)$ dans $\mathcal{K}_o$. Mais les suites k_n et g_n ont des limites dans $\mathcal{J}^+$, soient $k_n \uparrow f_o$, $g_n \downarrow f'_o$, d'où f_o , $f'_o \in \mathcal{J}^+$ et $f_o \leq f \leq f'_o$. Par continuité monotone, il en résulte :

$$\mu(f_o) = I(f_o) = I(f) = I(f'_o) = \mu(f'_o)$$

En particulier, si $f \in \mathcal{J}_+$, on a $\mu(f) = I(f)$, et μ coïncide avec I sur $\mathcal{J}_+$.

Si μ est seulement σ-finie et finie sur les compacts, on vérifie que le résultat subsiste, par continuité monotone, en prenant les restrictions de I et de μ à une suite croissante de compacts couvrant E. Finalement :

<u>Proposition 9-3-1</u>.- Si E est un espace LCD muni de sa σ-algèbre borélienne $\mathcal{B}$, toute mesure μ σ-finie sur $\mathcal{B}$ à valeurs dans $\mathcal{K}_o$ telle que $\mu(K) \in \mathcal{K}_o$ pour tout compact $K \subset E$ est associée de manière unique à une $\mathcal{K}_o$-Intégrale I vérifiant $\mu(B) = I(1_B)$ pour $B \in \mathcal{B}$, et réciproquement. Il y a donc identité entre l'ensemble des intégrales des mesures μ de ce type, et l'ensemble des pseudo-intégrales semi-additives $I : \mathcal{C}^+_{\mathcal{K}} \to \mathcal{K}_o$. Le prolongement de I coïncide sur $\mathcal{J}_+$ avec l'intégrale de la mesure μ associée, et pour tout $f \in \Phi^+_o$, on peut trouver f_o , f'_o dans $\mathcal{J}_+$

avec $f_o \leq f \leq f_o'$ et $\mu(f_o) = I(f) = \mu(f_o')$. Enfin I est positivement linéaire (donc à valeurs convexes) si et seulement si la mesure μ associée est elle-même à valeurs convexes.

COROLLAIRE - Toute mesure μ σ-finie sur $(E,\mathcal{B})$ finie pour tout compact possède la propriété d'approximation :

$$\forall\ B \in \mathcal{B},\quad \mu(B) = \lim_{K\subset B}\ \{\mu(K),\ K \in \mathcal{K}(E)\}$$

(Il s'agit de la limite dans $\overline{\mathcal{K}}_o$ de la famille filtrante croissante des $\mu(K)$, $K \subset B$). En effet, soit A cette limite dans $\overline{\mathcal{K}}_o$. On a $A \subset \mu(B)$. Soit I la $\mathcal{K}_o$-Intégrale associée à μ, et k_n une suite croissante dans Φ_K^+ avec $k_n < 1_B$ et $\lim I(k_n) = I(1_B) = \mu(B)$. Soit $f_o = \lim \uparrow k_n \in \mathcal{J}_+$ la limite des k_n. On a aussi $\mu(B) = I(f_o) = \mu(f_o)$. Soit $\varepsilon_n \downarrow 0$ une suite de réels > 0, et K_n les compacts de E définis par :

$$K_n = \{k_n \geq \varepsilon_n\}$$

La suite croissante 1_{K_n} admet une limite f_o' dans $\mathcal{J}_+$. Mais 1_{K_n} majore 1_B, donc aussi f_o, sur K_n ; on a donc $1_B \geq f_o' \geq f_o$, d'où $\mu(B) = I(f_o')$. Mais $I(f_o') = \lim \mu(K_n)$ dans $\overline{\mathcal{K}}_o$, donc $\mu(B) \subset A$, et l'égalité $\mu(B) = A$ en résulte.