Osnovy Prikladnoi Geostatistiki

J. Serra
1978

ЖОРЖ МАТЕРОН

СЛУЧАЙНЫЕ МНОЖЕСТВА И ИНТЕГРАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Перевод с английского
В. П. НОСКО

под редакцией
В. М. МАКСИМОВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР» МОСКВА 1978

УДК 519.2 + 513 + 513.83

Автор, один из ведущих специалистов в области приложения математических методов к задачам геологии, уже знаком нашему читателю по переводу его книги «Основы прикладной геостатистики» («Мир», 1968).

Настоящая монография — первое в мировой литературе систематическое изложение теории случайных множеств — перспективного и быстро развивающегося направления теории вероятностей. Оно сложилось при решении практических проблем, возникающих при изучении пористых сред и объектов сложной природы в таких областях, как металлография, петрография, биология.

Рассматривается широкий круг вопросов — случайные замкнутые множества, безгранично делимые случайные множества, пуассоновские гиперплоскости, полиэдры и т. д. Почти все результаты в этой области получены за последнее десятилетие. Применяемый автором подход нов и оригинален.

Хотя изложение носит чисто математический характер, книга представляет интерес не только для математиков (работающих в области теории вероятностей и функционального анализа), но и для специалистов по прикладным наукам, занимающихся статистическим анализом образцов и структур.

Редакция литературы по математическим наукам

М $\frac{20203-006}{041(01)-78}$ 6—78

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Последние двадцать лет весьма успешно развивается теория случайных множеств. Хотя первоначально она появилась в чистой математике в виде теории ёмкостей Шоке, одним из основных источников, стимулировавших интерес к случайным множествам, послужили прикладные науки, как-то: математическая морфология, петрография, металлография, в которых одна из важных задач — это восстановление структуры объекта по структуре его сечений. Возникающие здесь множества (твердые части и пустоты или темные пятна и светлые пятна) как раз и дают типичный пример случайных множеств.

Предлагаемая книга — единственная в мировой литературе монография, посвященная основаниям теории случайных замкнутых множеств и ее геометрическим приложениям.

Естественная идея характеризовать случайные множества их свойствами по отношению к некоторому фиксированному набору «стандартных» множеств привела автора к важному понятию гранулометрии, допускающему далеко идущие обобщения. Именно эти вопросы определяют основную научную направленность книги. Им посвящены первые три и последние три главы.

В промежуточных трех главах речь идет о пуассоновских сетях, полумарковских случайных линейных многообразиях и их связи с функционалами Минковского для выпуклых тел, т. е. о специальных классах случайных замкнутых множеств. На основе комбинаторной формулы Штейнера, а также операций сложения и вычитания по Минковскому для множеств из $\mathbf{R}^n$ в этих главах последовательно развивается техника вычисления средних значений для различных геометрических характеристик случайных сечений выпуклых тел пуассоновскими линейными многообразиями (средняя площадь сечений, площадь проекций, объем случайного многогранника, образованного случайными плоскостями, и т. д.).

Необходимо отметить, что рассмотренные применения в интегральной геометрии связаны исключительно с интересами автора (которому принадлежит значительная часть приводимых результатов) и образуют лишь часть возможных применений.

Для понимания средней части книги требуются хорошее владение техникой пуассоновских сетей и знание некоторых фактов из интегральной геометрии. В остальном книга вполне доступна лицам, знакомым с элементами топологии, теорией меры и теорией случайных процессов в объеме стандартной университетской программы.

Несмотря на то что книга написана абстрактно и бедна конкретными примерами, ее вполне можно рекомендовать всем лицам, работающим в прикладных областях, связанных с наблюдением и анализом случайных объектов самой различной природы — в астрофизике, в экспериментальной биологии (изучение структуры клеток и молекул), в задачах распознавания образов и т. д. Во всех этих приложениях особенно будут полезны параграфы, посвященные линейной гранулометрии. Книга демонстрирует перспективность всестороннего вероятностного изучения замкнутых подмножеств локально компактных пространств, и можно надеяться, что читатель найдет в ней много интересного.

В. М. Максимов

ПРЕДИСЛОВИЕ

Современную статистику можно было бы определить как применение ЭВМ и математики к анализу экспериментальных данных. Рассмотрение все новых и новых типов данных и постоянное совершенствование вычислительной техники определяют сейчас ее развитие. В процессе этого развития привлекается все более разнообразный математический аппарат. Поскольку ЭВМ позволяют к тому же регистрировать принципиально новые типы данных, именно их в конечном счете следует считать первопричиной революционных изменений в статистике.

В большинстве руководств по статистике предполагается, что каждый отдельный представитель рассматриваемой «популяции» может быть охарактеризован одним вещественным числом или в крайнем случае вектором. При этом в соответствующей математической теории достаточно иметь дело с вещественнозначными или векторнозначными случайными величинами. Если первоначально ЭВМ лишь облегчали вычисление определенных величин по заданным формулам (например, обращение матриц, вычисление их собственных значений и собственных векторов), то в настоящее время они используются для вывода информации на дисплеи и статистических оценок совершенно нового типа.

Переход к изучению стохастических процессов привел к расширению математической картины (стали рассматривать случайные функции), однако статистический анализ таких процессов при помощи клавишных калькуляторов был просто невозможен. Большинство современных исследований сопряжено с тем отрадным фактом, что в настоящее время могут проводиться такие вычисления, которые были недоступны каких-нибудь 15 лет назад. Расширение возможностей регистрации, запоминания данных, более полного описания отдельных представителей популяции, безусловно, требует появления статистической теории, оперирующей с более общими типами случайных величин.

По причинам как психологического, так и математического характера наиболее естественно для нас мыслить геометрически. Однако до самого последнего времени статистике геометрических объектов уделялось не слишком много внимания, несмотря на то что такого рода задачи возникают во многих областях науки. Причина заключена, видимо, в том, что здесь в принципиально новых идеях нуждались в равной мере и теория, и практика. Идеи, касающиеся либо теории, либо практики, предлагались и в других местах, однако только в Фонтенбло сознательно и координированно осуществлялось их совместное развитие. Именно здесь проблема анализа пространственных геологических объектов привела Матерона и его сотрудников по Центру математической морфологии при Высшей национальной горной школе к идее параллельно развивать надлежащую вычислительную технику и согласованную с ней вероятностно-статистическую теорию.

Книга «Случайные множества и интегральная геометрия» отражает один из аспектов этой работы. В ее названии подчеркивается тот факт, что теорию геометрических вероятностей следует понимать как теорию случайных множеств. Изложение имеет подчеркнуто математический характер, но основные идеи весьма просты и элегантны и важны для данной области приложений статистики. Многое, однако, еще предстоит сделать. Наиболее очевидна необходимость в конкретных моделях случайных множеств.

Если мои представления об *общей* теории статистики правильны, то предлагаемая книга послужит основой для многих будущих исследований, поскольку понятие множества является краеугольным камнем математики. (Единственная другая книга, посвященная такого рода обобщениям, — это монография Гренандера «Вероятности на алгебраических структурах»[1].) Возможности здесь столь широки, что, кажется, можно без всяких опасений предсказать, что в дальнейшем продвижении вперед роль маяка снова будут играть не умозрительные математические соображения, а конкретные типы возникающих задач. Перед нами захватывающие перспективы.

Дж. С. Уотсон

Принстон
Май 1974

[1] Русский перевод этой книги вышел в изд-ве «Мир» в 1965 г. — *Прим. перев.*

ОТ АВТОРА

В течение последнего десятилетия наблюдалось быстрое развитие методов анализа образов. Имеющиеся сейчас экспериментальные устройства, как правило, объединяют в себе блок записи и блок обработки информации. Первый обычно предусматривает сканирование посредством телевизионной камеры, что дает возможность исследовать десятки тысяч точек выборки в течение нескольких минут. Второй представляет собой средней мощности ЭВМ, возможно специально приспособленную для работы с геометрическими объектами (см., например, Мур, Уаймэн и Джозеф, 1968, или Кляйн и Серра, 1971). Если оставить в стороне специфические задачи распознавания образов, то назначение указанных методов — анализ структуры образа, а именно получение объективного ее описания при помощи некоторых количественных параметров, таких, как площадь поверхности, периметр, число связных компонент, распределение размера, радиус кривизны. Все это приводит к целому ряду теоретических задач геометрической или вероятностной природы, относящихся к области, которую можно назвать «математической морфологией» (см. Хаас, Матерон и Серра, 1967).

Подлежащие измерению геометрические параметры прежде всего должны быть математически строго определены (требование, не всегда выдерживаемое в специальной литературе, например когда говорят о распределении размера). После того как данный параметр определен, следует разработать по возможности наиболее простой метод проведения соответствующих измерений. Здесь оказывается весьма полезной интегральная геометрия, предлагающая различные способы косвенного измерения параметров, непосредственное измерение которых затруднено. Примерами таких параметров служат периметр, распределение радиусов кривизны, число связных компонент. Часто возникают также задачи стереометрического плана, связанные с восстановлением геометрических свойств трехмерного объекта на основе наблюдений, проведенных на плоскостях или прямых. Некоторые из этих задач решаются, другие — нет. И здесь опять никак не обойтись без помощи интегральной геометрии, особенно без формул Штейнера и Крофтона.

Наконец, геометрическая сложность изучаемых объектов (в таких областях, как металлография, петрография, пористые среды, биология) часто вынуждает прибегать к статистической, или вероятностной, интерпретации. Имеются, однако, два существенно различных подхода к рассмотрению геометрических вероятностей. Можно считать, что изучаемый объект — совершенно детерминированный, а случайно лишь расположение наблюдателя относительно этого объекта. Интегральная геометрия (в которой со времен Дельтейля, 1926, и Бляшке, 1936/37, главное внимание уделяется мерам, инвариантным относительно эвклидовых преобразований) исходит как раз из этой точки зрения. С другой стороны, часто возникает необходимость введения случайности на более фундаментальном уровне, когда допускается, что случаен и сам объект, сама его геометрическая форма, а не только его положение. При этом мы по существу обращаемся к понятию *случайного множества*, которое является основным в данной книге.

К понятию случайного множества естественно подводят, например, теория пористых сред (см., скажем, Фара и Шайдеггер, 1961), а также ряд явлений, наблюдаемых в металлографии (см., скажем, Майлз, 1972, и труды симпозиума по статистическим и вероятностным задачам металлургии, опубликованные в декабрьском номере журнала «Advances in Applied Probability» за 1972 г.). Именно эти интуитивные представления и послужили отправной точкой настоящей работы. Математически строгое определение случайного замкнутого множества восходит к Шоке (1953/54), который дал полное математическое описание этого объекта. Одно весьма широкое обобщение понятия случайного множества было недавно предложено Д. Кендаллом (1973). Несмотря на то что изложение в настоящей книге носит чисто математический характер, и постановка и сам выбор задач были непосредственно стимулированы экспериментальными методами структурного анализа, которые в данное время позволяют проводить детальное изучение таких сред (см., например, Серра, 1969). Обратно, многие из теоретических результатов, которые будут ниже доказаны, ведут к новым и полезным экспериментальным методикам. Так, строгая математическая формализация такого распространенного, но весьма расплывчатого понятия, как распределение размера частиц, приводит к чрезвычайно интересным практическим применениям (см., скажем, Дельфинер, 1970, 1971).

Естественно начать с выяснения тех условий, при которых теория случайных множеств может быть применена к физической реальности. Возьмем для примера пористый материал. Совершенно очевидно, что нет никакой возможности исследовать одну за другой все «гранулы», составляющие такой материал, или изучить в деталях их геометрическую форму и размеры. Более того, гранулы эти обычно в той или иной мере связаны друг с другом, так что в теоретическом пределе само понятие индивидуальной гранулы перестает быть реалистичным. Далее, вовсе не всегда главный интерес представляет твердая компонента материала. Напротив, именно сеть пор с ее невероятной сложностью и массой возможностей для тока жидкости непосредственно определяет такое важное для практики свойство материала, как его проницаемость. В связи с этим в одной из своих ранних работ (Матерон, 1967) я предложил первую интерпретацию пористых материалов как случайных множеств, позволяющую выразить наиболее существенные свойства их сложной структуры, используя небольшое число статистически представительных и доступных для экспериментального определения параметров. Уже в то время стало ясно, что морфологическое изучение пористых сред требует привлечения целого ряда вероятностно-геометрических понятий, которые в свою очередь могут быть привязаны к центральному понятию случайного множества.

Приступая к построению «математической морфологии», необходимо сказать несколько общих слов о понятии формы, структуры. Обычно структура произвольного объекта определяется как совокупность отношений между элементами или частями объекта. При экспериментальном определении структуры данного объекта надо для каждого возможного отношения определить, имеет оно место или нет. Конечно, построенный в результате образ будет весьма существенно зависеть от того, как выбрана система $\mathcal{R}$ отношений, считающихся возможными. Следовательно, этот выбор играет априорную конститутивную роль (в смысле Канта) и определяет относительную ценность того понятия структуры, к которому мы приходим.

В нашем случае пористого материала обозначим через A твердую компоненту (объединение гранул) и через A^c — сеть пор. Будем перемещать в материале некоторую фигуру B, называемую структурным шаблоном и играющую роль зонда для сбора информации. Такая операция экспериментально выполнима, и даже довольно просто, по крайней мере для плоских сечений материала. Конечно, мы не можем брать в качестве B любой шаблон, а должны выбирать его из некоторого семейства $\mathcal{B}$, о котором будет сказано ниже. Простейшими, какие только можно себе представить, соотношениями, дающими информацию о структуре пористого материала, являются $B \subset A$ (B содержится в гранулах) и $B \cap A \neq \varnothing$ (B пересекается с гранулами). Конечно, нам придется иметь дело и с соотношениями, которые могут быть выведены из предыдущих при помощи логических операций «и», «или», «не». Другими словами, семейство возможных соотношений, с которыми мы должны будем работать, образует σ-алгебру $\mathcal{R}$, порожденную простыми соотношениями $B \subset A$, $B \cap A \neq \varnothing$, где B пробегает $\mathcal{B}$. С детерминистической точки зрения структуру множества A можно считать известной, если относительно любого возможного соотношения $R \in \mathscr{R}$ известно, имеет ли оно место для этого множества. Аналогично с вероятностной точки зрения мы считаем, что знаем о множестве A все, что интересно или практически возможно знать, если для любого $R \in \mathscr{R}$ известна вероятность $P(R)$ того, что соотношение R выполняется для A. Иными словами, случайное множество A мы будем определять классическим образом, задавая вероятность P на σ-алгебре $\mathscr{R}$.

Вместе с тем, как быстро становится очевидным, математическое понятие множества слишком широко, чтобы его можно было применить, как оно есть, к физической реальности. В самом деле, скажем для пористого материала, если мы определяем A как множество точек, принадлежащих гранулам, то следует ли рассматривать A как открытое множество, замкнутое множество или что-либо топологически более сложное? Другими словами, принадлежат точки границы A самому A или нет? С точки зрения эксперимента этот вопрос абсолютно бессмыслен, поскольку понятию точки, принадлежащей границе гранулы, не отвечает никакой физической реальности. Экспериментатор имеет дело не с точками, а с пятнами, имеющими малые, но отличные от нуля размеры и довольно смутно очерченные границы. Чтобы описать реальную ситуацию математически, будем для определенности в качестве структурных шаблонов B брать открытые множества.

Итак, семейство $\mathscr{B}$, при помощи которого мы будем строить нашу σ-алгебру возможных соотношений, будет у нас семейством (всех или некоторых) открытых множеств. Но если B — открытое множество, то B содержится в множестве A тогда и только тогда, когда оно содержится в его внутренности $\mathring{A}$. Аналогично B пересекается с множеством A тогда и только тогда, когда оно пересекается с его замыканием $\bar{A}$. Таким образом, рассуждения, связанные с использованием пересечений, т. е. σ-алгебры, порожденной событиями вида $B \cap A \neq \varnothing$, естественным образом приводят к понятию случайного замкнутого множества. Подобным же образом рассуждения, связанные с использованием включений, ведут к понятию случайного открытого множества. В случае когда оба способа рассуждений применяются одновременно (а так оно обычно и бывает в приложениях), соотношения $R \in \mathscr{R}$ выражают, как легко видеть, свойства не самого множества A (являющегося просто математической абстракцией, которой не отвечает никакой физической реальности), а пары $(\mathring{A}, \bar{A})$, состоящей из его внутренности и замыкания. Иными словами, если два множества A и A' имеют одну и ту же внутренность и одно и то же замыкание, то они неразличимы между собой с точки зрения σ-алгебры $\mathscr{R}$

и должны рассматриваться как представляющие одну и ту же физическую реальность. Это действительно минимальная уступка, которую физики вправе требовать от математиков.

Оказывается, однако, что указанные σ-алгебры, непосредственно приспособленные к физической ситуации, совпадают с борелевскими σ-алгебрами, соответствующими топологиям, которыми естественно наделять пространство $\mathcal{F}$ замкнутых множеств, пространство $\mathcal{G}$ открытых множеств или пространство $\mathcal{K}$ компактных множеств. Тем самым вероятностная трактовка проблемы снова приводит нас к *интегральной геометрии* (понимаемой, например, в духе Хадвигера, 1957). Как будет показано, многие классические функционалы интегральной геометрии (в частности, хорошо известные функционалы Минковского) допускают простую вероятностную интерпретацию на языке случайных замкнутых множеств. Это — одна из основных тем настоящей работы, тема, которой придает особое звучание та важная роль, которую играет *выпуклость* в целом ряде на первый взгляд никак не связанных между собой вопросов, возникающих в случае эвклидова пространства.

Книгу можно грубо разделить на три части, по три главы в каждой. Первая часть посвящена определениям и общим свойствам случайных замкнутых множеств в пространстве E, не обязательно эвклидовом, но всегда предполагаемом локально компактным и сепарабельным (с целью избежать математических трудностей, не вызываемых существом дела). Глава 1 содержит абсолютно необходимые предварительные сведения из топологии, служащие основой для последующего изложения. Выбор определений и результатов, который может показаться довольно произвольным, полностью обусловлен последующими вероятностными приложениями. Так, весьма подробное изучение полунепрерывности объясняется тем фактом, что полунепрерывные сверху и полунепрерывные снизу отображения автоматически являются измеримыми и тем самым дают возможность строить новые случайные замкнутые множества, исходя из заданных. Это относится к отображениям взятия пересечения и объединения, а также, в эвклидовом случае, к операциям сложения и вычитания по Минковскому и к операции «заполнения множества A посредством множества B» — операции, приводящей к ряду интересных понятий, связанных с понятием гранулометрии (формализацией обычного понятия распределения размеров, при которой последнее рассматривается как отображение, значениями которого служат множества).

В главе 2 эти топологические результаты используются для определения общего понятия случайного замкнутого множества (СЗМ). Существенным результатом здесь является принадлежащая Шоке (1953/54) теорема, согласно которой сопоставление функции T на пространстве $\mathcal{K}$ некоторого СЗМ в соответствии с формулой $T(K) = P(A \cap K \neq \varnothing)$ возможно тогда и только тогда, когда T — альтернирующая емкость Шоке бесконечного порядка, удовлетворяющая условию $0 \leqslant T \leqslant 1$. Далее следует ряд важных утверждений, относящихся к условным СЗМ и к точечным законам распределения (максимальной информации о СЗМ, которую можно собрать со счетного числа точек).

В главе 3 вводится класс случайных замкнутых множеств, безгранично делимых по отношению к операции объединения. Этот класс отождествляется с пуассоновскими процессами на пространстве $\mathcal{F}'$ непустых замкнутых множеств и с классом емкостей Шоке.

В главах 4—6 изучаются связи между СЗМ в эвклидовом пространстве и интегральной геометрией. Именно здесь существенную роль играет выпуклость, особенно в весьма обширной главе 4, целиком посвященной теме выпуклости. После короткого описания классических функционалов Минковского в этой главе устанавливается тождественность почти-наверное-выпуклости СЗМ и C-аддитивности его функционала T. Затем рассматриваются классические вопросы, касающиеся случайных секущих, а также выпуклый конус $C(\mathcal{K}_0)$, образованный компактными выпуклыми множествами, содержащими начало координат. В этом конусе имеется некоторое подмножество $\mathcal{R}_1$ (*класс Штейнера*), состоящее из симметричных выпуклых компактных множеств, представляющих собой конечные суммы Минковского прямолинейных отрезков либо пределы таких сумм. Класс Штейнера $\mathcal{R}_1$ также является выпуклым конусом. В действительности он даже *симплекс*. Последнее свойство приводит к важной теореме единственности. Согласно этой теореме, например, пуассоновский стационарный процесс плоскостей вполне определяется заданием интенсивностей точечных процессов, индуцированных на каждой прямой в пространстве. Наконец, функционалам Минковского ставятся в соответствие меры, призванные выражать свойства кривизны границы компактного выпуклого множества. Определение этих мер распространяется на различные подпространства пространств $\mathcal{F}$ и $\mathcal{K}$, а затем и на само $\mathcal{F}$. В случае СЗМ соответствующие меры становятся случайными. Именно в этом смысле мы можем, в частности, говорить об относительной площади поверхности СЗМ.

В главе 5 излагается теория полумарковских СЗМ. Среди прочего дается полная характеризация безгранично делимых стационарных полумарковских СЗМ, парой прототипов для которых служат пуассоновские линейные многообразия и булевы модели с выпуклыми первичными гранулами. В качестве приложения полученных результатов в главе 6 проводится достаточно подробное исследование сетей пуассоновских гиперплоскостей. Следует отметить, что понятие штейнеровского компакта Λ, соответствующего такой сети, позволяет решать задачу вычисления характеристик сетей, индуцируемых на линейных многообразиях, в один прием.

В третьей части книги рассматриваются отображения со значениями в пространстве $\mathscr{F}$ или $\mathscr{K}$. Мы не гнались за общностью как таковой. Напротив, как раз здесь роль физических мотивировок наиболее велика. Руководствуясь этими мотивировками, мы выбираем для рассмотрения довольно специальные алгебраические и топологические структуры (математическая привлекательность которых сначала не очевидна). Глава 7, бесспорно наиболее важная для практических приложений, посвящена *гранулометриям*. Необходимо было дать строгое аксиоматическое определение для широко распространенного (но не всегда четкого) понятия распределения размера гранул, так, чтобы это понятие было применимо в равной мере и к порам, и к гранулам пористого материала, т. е. было применимо к случаю множеств, которые невозможно или неинтересно разлагать на связные компоненты. Соответствующий набор аксиом и развиваемая на их основе чисто алгебраическая теория весьма просты. Если, однако, мы хотим применять эти понятия к случайным открытым или замкнутым множествам, то мы должны прежде всего быть уверенными в измеримости соответствующих отображений. Это приводит к понятию «хороших» гранулометрий, изучение которых требует весьма глубоких топологических рассмотрений. В связи с этим мы (вопреки логической последовательности) сначала исследуем простейший частный случай эвклидовых гранулометрий (единственно полезных в практических приложениях). И здесь опять самым неожиданным образом мы сталкиваемся с выпуклостью. Именно, наилучшими эвклидовыми гранулометриями оказываются попросту заполнения посредством гомотетических образов некоторого выпуклого компактного множества.

В следующей, восьмой главе речь идет о возрастающих отображениях, большей частью о таких, которые согласованы со сдвигами в эвклидовом пространстве. Цель ее состоит в основном в том, чтобы прояснить некоторые результаты, полученные при изучении эвклидовых гранулометрий.

Наконец, глава 9 посвящена интегралам и мерам со значениями в пространстве $\mathscr{K}$ компактных множеств или в пространстве $C(\mathscr{K})$ выпуклых компактных множеств в эвклидовом пространстве.

Фонтенбло, Франция
Май 1974

Ж. Матерон

БЛАГОДАРНОСТИ

Я хотел бы поблагодарить Дж. С. Уотсона, который предложил мне написать настоящую книгу и поддерживал меня при осуществлении этой рискованной затеи, а также Н. Кресси, чьи критические замечания способствовали устранению большого числа ошибок и неясных мест. Я весьма обязан сотрудникам Центра математической морфологии в Фонтенбло, особенно П. Дельфинéру, Ж. Жако и Ж. Серра. Многие идеи, развитые в этой книге, родились в беседах с тем или иным из них, а вся работа в целом выросла из размышлений по поводу экспериментальных методов структурного анализа. Мне приятно с благодарностью упомянуть о поддержке Высшей национальной горной школы в Париже. Наконец, я должен выразить признательность г-же Крейберг, которая тщательнейшим образом выправила рукопись.

Ж. М.

ОБОЗНАЧЕНИЯ

$\bigcup$	объединение
$\bigcap$	пересечение
$\varnothing$	пустое множество
$\complement A$ или A^c	дополнение к множеству A
$A \setminus B$	разность множеств A и B (т. е. $A \cap B^c$)
$A_n \uparrow A$	$\{A_n\}$ — возрастающая последовательность множеств, и $\bigcup A_n = A$
$A_n \downarrow A$	$\{A_n\}$—убывающая последовательность множеств, и $\bigcap A_n = A$
$\overline{A}$	топологическое замыкание множества A
$\mathring{A}$	внутренность множества A
∂A	граница множества A (т. е. $\overline{A} \cap \overline{A^c}$)
$\oplus$	сложение по Минковскому
$\ominus$	вычитание по Минковскому
$\check{B}$	множество, симметричное множеству B относительно начала координат: $\check{B} = \{-x,\ x \in B\}$
A_B	заполнение множества A множеством B: $A_B = (A \ominus \check{B}) \oplus B$
A^B	пополнение множества A множеством B: $A^B = (A \oplus \check{B}) \ominus B$
A_x	сдвиг множества A на вектор x: $A_x = A \oplus \{x\}$
b_k	объем единичного шара в $\mathbf{R}^k$: $b_k = \pi^{k/2}/\Gamma(1 + k/2)$
$C(A)$	выпуклая оболочка множества A

$C(\mathscr{K})$	пространство компактных выпуклых множеств
$C(\mathscr{K}_0)$	пространство компактных выпуклых множеств, содержащих начало координат
$C(\mathscr{K}')$	пространство непустых компактных выпуклых множеств
$C(\mathscr{F})$	пространство замкнутых выпуклых множеств
$C(\mathscr{F}')$	пространство непустых замкнутых выпуклых множеств
$C(\mathscr{G})$	пространство открытых выпуклых множеств
$\boldsymbol{C}(E)$ или $\boldsymbol{C}$	пространство непрерывных функций на E
$\boldsymbol{C}_{\mathscr{K}}(E)$ или $\boldsymbol{C}_{\mathscr{K}}$	пространство непрерывных функций на E с компактным носителем
E	обычно — произвольное ЛКС-пространство (локально компактное отделимое сепарабельное пространство)
$\mathscr{F}(E)$ или $\mathscr{F}$	пространство всех замкнутых множеств в E
$\mathscr{F}'$	пространство непустых замкнутых множеств в E
$\mathscr{F}_0$	пространство замкнутых множеств в E, содержащих 0
$\mathscr{F}^A$	$=\{F,\ F\in\mathscr{F},\ F\cap A=\varnothing\}$ $(A\subset E)$
$\mathscr{F}_B$	$=\{F,\ F\in\mathscr{F},\ F\cap B\neq\varnothing\}$ $(B\subset E)$
$\mathscr{F}^A_{B_1,\ldots,B_n}$	$=\mathscr{F}^A\cap\mathscr{F}_{B_1}\cap\ldots\cap\mathscr{F}_{B_n}$
$\mathscr{F}_u(\mathscr{F})$	пространство $\bigcup$-наследственных семейств, замкнутых в $\mathscr{F}$
$\mathscr{F}_u(\mathscr{K})$	пространство $\bigcup$-наследственных семейств, замкнутых в $\mathscr{K}$
Φ_k	пространство полунепрерывных сверху функций $E\to\mathbf{R}_+$ с компактным носителем
Φ_g	пространство полунепрерывных снизу функций $E\to\mathbf{R}_+$
Φ	пространство псевдоинтегрируемых функций
$\mathscr{G}(E)$ или $\mathscr{G}$	пространство всех открытых подмножеств в E
$\mathscr{G}_B$	$=\{G,\ G\in\mathscr{G},\ G\supset B\}$
$\mathscr{G}^A$	$=\{G,\ G\in\mathscr{G},\ G\not\supset A\}$
$\mathscr{G}_k$	пространство ограниченных открытых множеств в $\mathbf{R}^d$

$\mathscr{H}$	пространство пар вида $(\mathring{A}, \bar{A})$, $A \in \mathscr{P}$, отождествляемое с пространством $\{(G, F),\ G \in \mathscr{G},\ F \in \mathscr{F},\ G \subset F\}$ (см. аксиому 1.3.1)
$\mathscr{T}$	класс конечных подмножеств в E
$\mathscr{T}'$	класс непустых конечных подмножеств E
inf	нижняя грань
$\mathscr{K}(E)$ или $\mathscr{K}$	пространство компактных подмножеств E
$\mathscr{K}'$	пространство непустых компактных подмножеств E
$\mathscr{K}_0$	пространство компактных подмножеств E, содержащих начало координат
$\mathscr{K}^A$	$=\{K,\ K \in \mathscr{K},\ K \cap A = \varnothing\}$ $(A \subset E)$
$\mathscr{K}_B$	$=\{K,\ K \in \mathscr{K},\ K \cap B \neq \varnothing\}$ $(B \subset E)$
$\mathscr{K}^A_{B_1, \ldots, B_n}$	$=\mathscr{K}^A \cap \mathscr{K}_{B_1} \cap \ldots \cap \mathscr{K}_{B_n}$
$\mathscr{M}_c$	пространство мер в $\mathbf{R}^d$ с компактным носителем
$\mathscr{M}_c^+$	пространство положительных мер в $\mathbf{R}^d$ с компактным носителем
$\mathscr{P}(E)$ или $\mathscr{P}$	пространство всех подмножеств в E
$\mathscr{P}_x$	$=\{A,\ A \in \mathscr{P},\ x \in A\}$
Π_A	проектор на замкнутое выпуклое множество A
Π_0	пуассоновский полиэдр
$\mathbf{R}$	одномерное эвклидово пространство
$\mathbf{R}^k$	k-мерное эвклидово пространство
$\mathbf{R}_+$	$=[0, \infty)$ — положительная полупрямая
$\bar{\mathbf{R}}_+$	$=[0, \infty]$ — компактифицированная полупрямая
ρ	метрика Хаусдорфа
$\mathscr{R}$	выпуклый конус всех опорных функций (отождествляемый с $C(\mathscr{K}_0)$)
$\mathscr{R}_s$	класс непустых симметричных компактных выпуклых множеств
$\mathscr{R}_1$	класс Штейнера
$\mathscr{R}_\alpha$	см. следствие 1 теоремы 4.5.1
S_0	обычно — единичная сфера в $\mathbf{R}^d$
$\mathfrak{S}$	кольцо выпуклости
σ_f	борелевская σ-алгебра пространства $\mathscr{F}$

σ_g	борелевская σ-алгебра пространства $\mathcal{G}$
σ_h	борелевская σ-алгебра пространства $\mathcal{H}$
σ_k	борелевская σ-алгебра пространства $\mathcal{K}$
$\mathcal{S}_k$	пространство всех k-мерных подпространст пространства $\mathbf{R}^d$ $(k=0, 1, \ldots, d)$
sup	верхняя грань
supp	носитель
$\mathcal{T}_f$	топология пространства $\mathcal{F}$
$\mathcal{T}_g$	топология пространства $\mathcal{G}$
$\mathcal{T}_h$	топология пространства $\mathcal{H}$
$\mathcal{T}_k$	топология пространства $\mathcal{K}$ (миопическая топология)
W_k^d или W_k	функционал Минковского порядка k на $C(\mathcal{K}(\mathbf{R}^d)$
$W_k(dx)$ или W_k	мера Минковского

ГЛАВА 1

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ и $\mathcal{K}$

Пространства $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ и $\mathcal{K}$ соответственно замкнутых, открытых и компактных подмножеств заданного топологического пространства E топологизируются многими различными способами (см. Майкл, 1951). Выбранные нами топологии представляются наиболее подходящими для вероятностных применений. Миопическая топология пространства $\mathcal{K}$ является классической в интегральной геометрии, а компактную топологию пространства $\mathcal{F}$ можно получить, исходя из миопической топологии в пространстве $\mathcal{K}(\bar{E})$ компактных подмножеств компактификации $\bar{E}$ пространства E (см. Шоке, 1953/54 и замечания после нашей теоремы 1.4.1). Для случая эвклидова пространства $E=\mathbf{R}^d$ определяется целый ряд непрерывных и полунепрерывных операций: сложение $\oplus$ и вычитание $\ominus$ по Минковскому, заполнение и пополнение множества A посредством множества B и т. д.

Особенный интерес представляет случай выпуклых компактных множеств (см. гл. 4 и последующие главы). Теорема о безграничной делимости компактных множеств относительно сложения по Минковскому приводит к характеризации непрерывных полугрупп на пространстве $C(\mathcal{K})$ и к важному понятию гранулометрии множества A по отношению к компактному выпуклому множеству K.

1.1. ОБЩИЕ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Всюду в этой книге символ E будет обозначать *локально компактное* хаусдорфово (отделимое) *сепарабельное* топологическое пространство (сокращенно ЛКС-пространство). Другими словами, каждая точка из E обладает компактной окрестностью и топология пространства E обладает счетной базой. Приведем ряд свойств пространства E, которыми мы будем пользоваться в дальнейшем без явных оговорок.

а) Любое компактное множество $K\subset E$ имеет счетную фундаментальную систему открытых окрестностей $G_1, G_2, \ldots$, причем всегда можно предполагать, что $\{G_n\}$ — убывающая последовательность множеств из E. Иначе говоря, для каждого открытого множества $G \supset K$ при достаточно больших значениях n имеет место включение $G_n \subset G$. В частности, $K = \bigcap G_n$. Если замкнутое множество F и компактное множество K в E не пересекаются, т. е. $F \cap K = \varnothing$, то существуют два непересекающихся открытых множества G и G', таких, что $G \supset F$ и $G' \supset K$.

b) Пусть $G \subset E$ — открытое множество. Тогда существует возрастающая последовательность относительно компактных открытых множеств $\{B_n\}$ (т. е. само B_n открыто, а его замыкание $\bar{B}_n$ компактно), для которой $\bar{B}_n \subset B_{n+1}$ и $G = \bigcup B_n = \bigcup \bar{B}_{n+1}$. В частности, любое компактное множество $K \subset G$ содержится в B_n, если n достаточно велико.

c) Существует счетное семейство $\mathcal{B}$ открытых множеств из E, такое, что каждое открытое множество G является объединением множеств из некоторого подсемейства семейства $\mathcal{B}$ (т. е. $\mathcal{B}$ является базой топологии в E). Более того, семейство $\mathcal{B}$ можно выбрать таким образом, чтобы каждое $B \in \mathcal{B}$ было относительно компактным (т. е. $\bar{B}$ — компактным) и каждое открытое множество G являлось объединением множеств $B \in \mathcal{B}$, удовлетворяющих условию $\bar{B} \subset G$.

Если A — подмножество пространства E, то символами A^c (или иногда $\complement A$), $\mathring{A}$, $\bar{A}$ и $\partial A = \bar{A} \cap \complement A$ обозначаются соответственно его дополнение, внутренность, замыкание и граница. Далее, мы используем обозначение $A \setminus B = A \cap B^c$ (теоретико-множественная разность). Соотношение $A_n \uparrow A$ (соотв. $A_n \downarrow A$) отначает, что $\{A_n\}$ — возрастающая (соотв. убывающая) последовательность множеств из E, удовлетворяющая условию $A = \bigcup A_n$ (соотв. $A = \bigcap A_n$).

Через $\mathcal{F}(E)$, $\mathcal{G}(E)$ и $\mathcal{K}(E)$ (или, если это не может вызвать путаницы, просто через $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ и $\mathcal{K}$) обозначаются соответственно класс замкнутых, класс открытых и класс компактных подмножеств из E. Аналогично $\mathcal{P}(E)$, или $\mathcal{P}$, — это класс всех подмножеств из E.

Вообще говоря (насколько это было возможно), строчные курсивные буквы x, y, ... обозначают элементы, или *точки* пространства E ($x \in E$), прописные курсивные буквы A, F, K, ... — подмножества из E ($A \subset E$), а рукописные прописные $\mathcal{A}$, $\mathcal{F}$, ... — классы подмножеств из E ($\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$), так что можно записать $a \in A \in \mathcal{A}$.

Поскольку в рассуждениях, относящихся к пространству $\mathcal{F}$, фигурируют в основном пересечения, определим для каждого $B \in \mathcal{P}(E)$ класс $\mathcal{F}_B$ замкнутых множеств, пересекающихся с B, и дополнительный к нему класс $\mathcal{F}^B$ замкнутых множеств, не пересекающихся с B:

$$\mathcal{F}_B=\{F : F\in\mathcal{F},\ F\cap B\neq\varnothing\},$$
$$\mathcal{F}^B=\{F : F\in\mathcal{F},\ F\cap B=\varnothing\}.$$

Если $\{B_i,\ i\in I\}$ — некоторый класс подмножеств из E, то мы, очевидно, имеем равенства

$$\bigcup\mathcal{F}_{B_i}=\mathcal{F}_{\cup B_i},\quad \bigcap\mathcal{F}^{B_i}=\mathcal{F}^{\cup B_i},\tag{1.1.1}$$

но лишь включения

$$\bigcap\mathcal{F}_{B_i}\supset\mathcal{F}_{\cap B_i};\quad \bigcup\mathcal{F}^{B_i}\subset\mathcal{F}^{\cap B_i}.$$

Тем не менее, если $K\in\mathcal{K}$ — *компактное* множество и $\{G_n\}$ — фундаментальная система его открытых окрестностей, то справедливы равенства

$$\bigcap\mathcal{F}_{G_n}=\mathcal{F}_K;\quad \bigcup\mathcal{F}^{G_n}=\mathcal{F}^K.\tag{1.1.2}$$

Ввиду того что в рассуждениях, связанных с пространством $\mathcal{G}$, главную роль играют включения, положим для каждого $B\in\mathcal{P}(E)$

$$\mathcal{G}_B=\{G,\ G\in\mathcal{G},\ G\supset B\},$$
$$\mathcal{G}_B=\{G,\ G\in\mathcal{G},\ G\not\supset B\}.$$

Очевидно, включение $G\in\mathcal{G}_B$ эквивалентно включению $G^c\in\mathcal{F}^B$. Поэтому каждому свойству пространства $\mathcal{F}$ соответствует двойственное ему свойство пространства $\mathcal{G}$, и обратно. В связи с этим мы будем формулировать только утверждения относительно пространства $\mathcal{F}$, предоставляя читателю переформулировать их в терминах пространства $\mathcal{G}$.

Для пространства $\mathcal{K}$ обозначения те же, что и для пространства $\mathcal{F}$:

$$\mathcal{K}_B=\{K : K\in\mathcal{K},\ K\cap B\neq\varnothing\},$$
$$\mathcal{K}^B=\{K : K\in\mathcal{K},\ K\cap B=\varnothing\}.$$

1.2. КОМПАКТНОЕ ПРОСТРАНСТВО $\mathcal{F}(E)$

Всюду в этой книге пространство $\mathcal{F}$ наделяется топологией $\mathcal{T}_f$, порождаемой двумя семействами — семейством $\mathcal{F}^K$, $K\in\mathcal{K}$, и семейством $\mathcal{F}_G$, $G\in\mathcal{G}$. В силу (1.1.1) семейство $\mathcal{F}^K$, $K\in\mathcal{K}$, замкнуто относительно операции конечного объединения. Поэтому, полагая для $K\in\mathcal{K}$, целых $n\geqslant 0$ и $G_1,\ldots,G_n\in\mathcal{G}$

$$\mathcal{F}^K_{G_1,\ldots,G_n}=\mathcal{F}^K\cap\mathcal{F}_{G_1}\cap\ldots\cap\mathcal{F}_{G_n}\tag{1.2.1}$$

мы получим класс подмножеств из $\mathscr{F}$, являющийся *баз* *топологии* $\mathscr{T}_f$ в $\mathscr{F}$. Отметим, что $\mathscr{T}_G^{\varnothing} = \mathscr{F}_G$ и для $n = 0$ мн жество (1.2.1) есть просто $\mathscr{F}^K$, так что множества $\mathscr{F}_G$, $G \in$ и $\mathscr{F}^K$, $K \in \mathscr{K}$, принадлежат этой базе, равно как и $\mathscr{F}^{\varnothing} =$ и $\mathscr{F}_{\varnothing} = \varnothing$. Множества $\mathscr{F}^K$, $K \in \mathscr{K}$, образуют фундаментальну систему окрестностей для элемента $\varnothing \in \mathscr{F}$, а множеств $\mathscr{F}_{G_1, \ldots, G_n}$ ($n > 0$ целое, $G_1, \ldots, G_n \in \mathscr{G}$) — фундаментальну систему окрестностей для элемента $E \in \mathscr{F}$. Таким образо пустое множество $\varnothing$ и всё множество E характеризуются бе ностью фильтров своих окрестностей.

Исследуем теперь основные свойства пространства $\mathscr{F}$.

Теорема 1.2.1. *Пространство $\mathscr{F}$ является компактным хау дорфовым сепарабельным пространством.*

Доказательство. а) Покажем сначала, что пространство $\mathscr{F}$ сепарабельно, т. е. что его топология обладает счетной базой Пусть $\mathscr{B}$ — база топологии $\mathscr{G}$ в E, обладающая свойством с из § 1.1. Это означает, что каждое $B \in \mathscr{B}$ есть относительн компактное открытое множество и каждое $G \in \mathscr{G}$ представляе собой объединение множества $B \in \mathscr{B}$, таких, что $\bar{B} \subset G$. Пуст $\mathscr{T}_b$ — класс подмножеств из $\mathscr{F}$ вида

$$\mathscr{F}_{B_1, \ldots, B_n}^{\bar{B}'_1 \cup \ldots \cup \bar{B}'_k},$$

где $n \geqslant 0$, $k \geqslant 0$ — целые неотрицательные числа и $B_1, \ldots, B_n$, $B'_1, \ldots, B'_k \in \mathscr{B}$. Этот класс является счетным, и потому достаточно показать, что он служит базой для $\mathscr{T}_f$. Пусть $F \in \in \mathscr{F}$ — некоторое замкнутое множество, а $\mathscr{F}_{G_1, \ldots, G_n}^K$ ($K \in \mathscr{K}$, $G_1, \ldots, G_n \in \mathscr{G}$) — открытая окрестность F в пространстве $\mathscr{F}$. Тогда существует $\mathscr{V} \in \mathscr{T}_b$, такое, что $F \in \mathscr{V} \subset \mathscr{F}_{G_1, \ldots, G_n}^K$. Действительно, если $F = \varnothing$, то $n = 0$ и можно выбрать $B \in \mathscr{B}$, такое, что $B \supset K$, так что для $\mathscr{V} = \mathscr{F}^{\bar{B}} \in \mathscr{T}_b$ имеем $F \in \mathscr{F}^{\bar{B}} \subset \mathscr{F}^K$. Если же $F \neq \varnothing$, то для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ можно выбрать точку $x_i \in F \cap G_i$ и открытое множество $B_i \in \mathscr{B}$, такие, что

$$x_i \in B_i \subset \bar{B}_i \subset G_i \cap K^c.$$

Тогда найдется некоторое конечное покрытие компактного множества K открытыми множествами $B'_j \in \mathscr{B}$, $j = 1, 2, \ldots, k$, удовлетворяющими условиям $\bar{B}'_j \cap \bar{B}_i = \varnothing$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) и $F \cap \bar{B}'_j = \varnothing$. При этом мы будем иметь

$$F \in \mathscr{F}_{B_1, \ldots, B_n}^{\bar{B}'_1 \cup \ldots \cup \bar{B}'_k} \subset \mathscr{F}_{G_1, \ldots, G_n}^K.$$

b) Покажем теперь, что $\mathcal{F}$ отделимо в $\mathcal{T}_f$-топологии. Пусть F и F' — два замкнутых множества, $F \neq F'$, и точка x такова, что $x \in F$, $x \notin F'$. Тогда существует такое относительно компактное открытое множество B, что $x \in B$ и $F' \cap \overline{B} = \varnothing$. При этом $F \in \mathcal{F}_B$, $F' \in \mathcal{F}^{\overline{B}}$ и $\mathcal{F}_B \cap \mathcal{F}^{\overline{B}} = \varnothing$, откуда и вытекает отделимость пространства $\mathcal{F}$.

c) Остается показать, что пространство $\mathcal{F}$ компактно. Класс множеств, замкнутых в $\mathcal{F}$, есть замкнутый относительно операций конечного объединения и бесконечного пересечения класс, порожденный классом $\mathscr{C} = \{\mathcal{F}_K, K \in \mathscr{K}\} \cup \{\mathcal{F}^G, G \in \mathscr{G}\}$. В силу классического результата общей топологии для доказательства компактности $\mathcal{F}$ достаточно установить, что класс $\mathscr{C}$ обладает свойством конечного пересечения. Пусть K_i, $i \in I$, — семейство компактных множеств, а G_j, $j \in J$, — семейство открытых множеств, удовлетворяющих соотношению

$$\Big(\bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_{K_i}\Big) \cap \Big(\bigcap_{j \in J} \mathcal{F}^{G_j}\Big) = \varnothing.$$

Положим $\Omega = \bigcup_{j \in J} G_j$. Поскольку $\bigcap \mathcal{F}^{G_j} = \mathcal{F}^{\Omega}$, приведенное выше соотношение можно переписать в виде $\bigcap \mathcal{F}^{\Omega}_{K_i} = \varnothing$. Но это пересечение пусто тогда и только тогда, когда существует индекс $i_0 \in I$, для которого $K_{i_0} \subset \Omega$. В противном случае замкнутое множество $\Omega^c \cap (\overline{\cup K_i})$ (являющееся пустым при $I = \varnothing$) не пересекалось бы с Ω и пересекалось бы с каждым K_i, т. е. принадлежало бы пересечению $\bigcap \mathcal{F}^{\Omega}_{K_i}$. Пусть $i_0 \in I$ — индекс с указанным свойством, т. е. $K_{i_0} \subset \Omega = \bigcup G_j$. Тогда найдется конечное покрытие $G_{j_1}, \ldots, G_{j_n}$ компактного множества K_{i_0} открытыми множествами с индексами $j_1, \ldots, j_n \in J$, и пересечение $\mathcal{F}_{K_{i_0}} \cap \mathcal{F}^{G_{j_1}} \cap \ldots \cap \mathcal{F}^{G_{j_n}}$ пусто.

Замечание. Пространство $F' = F \setminus \{\varnothing\}$ непустых замкнутых подмножеств из E не обязательно компактно. Действительно, если G_j, $j \in J$, — покрытие пространства E семейством относительно компактных открытых множеств G_j, то $\bigcap \mathcal{F}^{G_j} = \mathcal{F}^E = \{\varnothing\}$. Однако конечное подсемейство, для которого пересечение есть $\{\varnothing\}$, существует только тогда, когда само E компактно (а не лишь локально компактно). Обратно, если E компактно, то из $E \in \mathscr{K}$ вытекает, что $\{\varnothing\} = \mathcal{F}^E$ — открытое подмножество из $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \setminus \{\varnothing\}$ компактно. Множество $\{\varnothing\}$ является в одно и то же время открытым и замкнутым в $\mathcal{F}$, так что $\varnothing$ — изолированная точка в $\mathcal{F}$. Таким образом, име место следующее утверждение:

Предложение 1.2.1. *Пространство $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \setminus \{\varnothing\}$ компакт тогда и только тогда, когда компактно само пространство*

Следующее утверждение касается связности пространства и в дальнейшем использоваться не будет.

Предложение 1.2.2. *Если пространство E связно и не ко пактно, то $\mathcal{F}(E)$ связно. Если E связно и компактно, то $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \setminus \{\varnothing\}$ связно.*

Доказательство. Предположим, что E связно, и пусть и $\mathcal{A}'$ — замкнутые подмножества пространства $\mathcal{F}$, удовлетво ряющие условиям $\mathcal{A} \cap \mathcal{A}' = \varnothing$ и $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}' = \mathcal{F}$. Отображени $x \to \{x\}$ из E в $\mathcal{F}$ непрерывно, так что множества $A = \{x, \{x\} \in \mathcal{A}$ и $A' = \{x, \{x\} \in \mathcal{A}'\}$ замкнуты в E и удовлетворяют условиям $A \cap A' = \varnothing$ и $A \cup A' = E$. Поскольку E связно, то одно из эти множеств пусто. Пусть, например, $A' = \varnothing$. Тогда каждое одноэлементное множество $\{x\}$ принадлежит $\mathcal{A}$. Покажем, что каждое непустое конечное множество принадлежит $\mathcal{A}$. Доказательство проведем по индукции. Предположим, что каждое непустое конечное множество, содержащее не более n различных точек, лежит в $\mathcal{A}$, и покажем, что то же справедливо и для каждого множества вида $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}\}$. Отображение $y \to \{x_1, \ldots, x_n, y\}$ из E в $\mathcal{F}$ непрерывно, так что множества $A_n = \{y: \{x_1, \ldots, x_n, y\} \in \mathcal{A}\}$ и $A'_n = \{y: \{x_1, \ldots, x_n, y\} \in \mathcal{A}'\}$ замкнуты в E и удовлетворяют условиям $A_n \cap A'_n = \varnothing$, $A_n \cup A'_n = E$. Отсюда вытекает, что $A_n = E$ и $A'_n = \varnothing$, поскольку E связно и $\{x_1, \ldots, x_n, x_n\} \in A_n$. Поэтому $\{x_1, \ldots, x_n, y\} \in \mathcal{A}$ для каждого $y \in E$. Но семейство непустых конечных множеств плотно в $\mathcal{F}'$ в силу следствия 2 теоремы 1.2.2, если E компактно, и плотно в самом $\mathcal{F}$, если E не компактно. Таким образом, поскольку $\mathcal{A}$ замкнуто, то $\mathcal{A}'$ пусто, если E не компактно, и $\mathcal{A}' = \varnothing$ или $\{\varnothing\}$, если E компактно. Утверждение доказано.

Сходимость в $\mathcal{F}$

Займемся теперь исследованием сходимости в пространстве $\mathcal{F}$. Ввиду того что $\mathcal{F}$ имеет счетную базу, можно ограничиться рассмотрением сходимости последовательностей $n \to F_n$ в $\mathcal{F}$. По определению топологии $\mathcal{T}_f$ в $\mathcal{F}$, последовательность $\{F_n\}$ сходится в $\mathcal{F}$ к пределу F тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия:

1. Если открытое множество G имеет с F непустое пересечение, то G имеет непустые пересечения и со всеми F_n, за исключением, быть может, конечного их числа.

2. Если компактное множество K не пересекается с F, то оно не пересекается и со всеми F_n, за исключением, быть может, конечного их числа.

Более удобный для практического использования критерий дает

Теорема 1.2.2. *Последовательность $\{F_n\}$ сходится в $\mathcal{F}$ к пределу F тогда и только тогда, когда она удовлетворяет следующим двум условиям:*

1′. *Какова бы ни была точка $x \in F$, для каждого n (кроме, быть может, конечного числа значений n) найдется точка $x_n \in F_n$ такая, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к x в E.*

2′. *Если $n_k \to F_{n_k}$ — некоторая подпоследовательность последовательности $\{F_n\}$, то предел каждой сходящейся подпоследовательности $n_k \to x_{n_k} \in F_{n_k}$ лежит в F: $\lim x_{n_k} \in F$.*

Условия 1′ и 2′ эквивалентны условиям 1 и 2 соответственно.

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать последнее утверждение. Покажем, что из условия 1 вытекает условие 1′. Если F пусто, то условие 1′ удовлетворяется тривиальным образом. Пусть $F \neq \varnothing$, и пусть x — некоторая точка из F и $G_1 = E \supset G_2 \supset \ldots$ — фундаментальная система ее открытых окрестностей. Каждое G_k имеет с F непустое пересечение. Поэтому в силу условия 1 найдется такое целое N_k, что $F_n \cap G_k \neq \varnothing$ для $n \geqslant N_k$. Отсюда следует, что можно построить последовательность $\{x_n\}$, $n \geqslant N_1$, удовлетворяющую для $p = N_k, N_k + 1, \ldots, N_{k+1} - 1$ соотношению $x_p \in F_p \cap G_k$. Нетрудно видеть, что эта последовательность будет сходиться к x.

Покажем, что из условия 1′ вытекает условие 1. Опять, если $F = \varnothing$, то условие 1 выполняется тривиальным образом. Если же $F \neq \varnothing$, то пусть G — некоторое открытое множество, удовлетворяющее соотношению $F \cap G \neq \varnothing$, и $x \in F \cap G$. В силу условия 1′ существует последовательность $\{x_n\}$, $n \geqslant n_0$, точек из F_n, для которой $\lim x_n = x$ в E. Но G является окрестностью точки x и $x_n \in G$ для достаточно больших n, так что G имеет с F_n непустое пересечение.

Далее, из условия 2 вытекает условие 2′. Действительно, если $F = E$, то условие 2′ выполняется. Если же $F \neq E$, то пусть x — некоторая точка, не принадлежащая F, и K — ее компактная окрестность, не пересекающаяся с F. В силу условия 2 для достаточно больших n множество K не пересекается с F_n и x не может являться пределом последовательности $n_k \to x_{n_k} \in F_{n_k}$. Таким образом, условие 2′ выполняется.

Наконец, если условие 2 не выполнено, то найдутся ко: пактное множество K, не пересекающееся с F, подпослед вательность $n_k \to F_{n_k}$ и для каждого целого k точка $x_{n_k} \in K \cap F_{n}$ Последовательность $\{x_{n_k}\}$ содержится в компактном множ стве K. Поэтому некоторая ее подпоследовательность сходитс к точке $x \in K$. Эта точка $x \notin F$, а значит, условие $2'$ н выполняется. Теорема доказана.

Следствие 1. *Отображение $(F, F') \to F \cup F'$ является непр рывным отображением пространства $\mathscr{F} \times \mathscr{F}$ на $\mathscr{F}$.*

Следствие 2. *Пусть $\mathscr{J}$ — класс конечных подмножеств из E а $\mathscr{J}' = \mathscr{J} \setminus \{\varnothing\}$ — класс непустых конечных подмножеств из E Тогда $\mathscr{J}$ плотно в $\mathscr{F}$, а $\mathscr{J}'$ плотно в $\mathscr{F}' = \mathscr{F} \setminus \{\varnothing\}$, приче если E не компактно, то $\mathscr{J}'$ плотно и в $\mathscr{F}$.*

Следствие 3. *Пусть $\{F_n\}$ и $\{F'_n\}$ — две последовательност множеств из $\mathscr{F}$.*

a) *Из $F_n \downarrow F$ вытекает, что $\lim F_n = F$ в $\mathscr{F}$.*

b) *Из $F_n \uparrow A$ вытекает, что $\lim F_n = \bar{A}$ в $\mathscr{F}$.*

c) *Из $F_n \downarrow F$ и $F'_n \downarrow F'$ вытекает, что $\lim (F_n \cap F'_n) = F \cap F'$ и $\lim (F_n \cup F'_n) = F \cup F'$ в $\mathscr{F}$.*

d) *Из $F_n \uparrow A$ и $F'_n \uparrow A$ вытекает, что $\lim (F_n \cup F'_n) = \overline{A \cup A'} = \bar{A} \cup \bar{A}'$ и $\lim (F_n \cap F'_n) = (\overline{A \cap A'}) \subset \bar{A} \cap \bar{A}'$ в $\mathscr{F}$.*

e) *Если $F_n \subset F'_n$ для всех n и $\lim F_n = F$, $\lim F'_n = F'$, то $F \subset F'$.*

Следствие 4. *Для любого $B \in \mathscr{P}(E)$ класс замкнутых множеств $F \supset B$ замкнут в $\mathscr{F}$. Для любого $F_0 \in \mathscr{F}(E)$ класс замкнутых множеств $F \subset F_0$ замкнут в $\mathscr{F}$.*

Убедимся, например, в справедливости следствия 1. Пусть $\{F_n\}$ и $\{F'_n\}$ — две последовательности, сходящиеся в $\mathscr{F}$ соответственно к F и F'. Нам надо показать, что $\lim (F_n \cup F'_n) = F \cup F'$. Пусть точка x принадлежит $F \cup F'$, скажем, для определенности, $x \in F$. Тогда (в силу условия $1'$, примененного к последовательности $\{F_n\}$) существует последовательность $n \to x_n \in F_n$, для которой $x = \lim x_n$. Поскольку тем более $x_n \in F_n \cup F'_n$, то условие $1'$ выполняется и для последовательности $\{F_n \cup F'_n\}$. Пусть теперь $\{F_{n_k} \cup F'_{n_k}\}$ — некоторая ее подпоследовательность и $n_k \to x_{n_k} \in F_{n_k} \cup F'_{n_k}$ — последовательность, сходящаяся в E к x. Выберем из этой последней подпоследовательность $n_{k_p} \to x_{n_{k_p}} \in F_{n_{k_p}}$. Тогда $x \in F$ согласно условию $2'$, примененному к $\{F_n\}$.

Тем более $x \in F \cup F'$, и, следовательно, $\{F_n \cup F'_n\}$ удовлетворяет условию $2'$.

Заметим, что операция пересечения в отличие от операции объединения *не является непрерывной.*

Операции $\underline{\lim}$ и $\overline{\lim}$

Определение 1.2.1. *Пусть $\{F_n\}$ — последовательность множеств из $\mathcal{F}$. Тогда под $\underline{\lim}\, F_n$ и $\overline{\lim}\, F_n$ понимаются соответственно пересечение и объединение пределов всех сходящихся в $\mathcal{F}$ подпоследовательностей последовательности $\{F_n\}$.*

Ясно, что последовательность $\{F_n\}$ сходится в $\mathcal{F}$ тогда и только тогда, когда $\overline{\lim}\, F_n = \underline{\lim}\, F_n = F$, и что при этом $F = \lim F_n$. Описание этих двух множеств $\underline{\lim}\, F_n$ и $\overline{\lim}\, F_n$ дается следующим предложением.

Предложение 1.2.3. *Пусть $\{F_n\}$ — последовательность в $\mathcal{F}$.*

a) Множество $\underline{\lim}\, F_n$ является наибольшим замкнутым множеством $F \in \mathcal{F}$, удовлетворяющим эквивалентным условиям 1 и $1'$. Другими словами, $x \in \underline{\lim}\, F_n$ тогда и только тогда, когда для всякого достаточно большого целого числа n существует $x_n \in F_n$, такое, что $\lim x_n = x$ в E, или же тогда и только тогда, когда всякая окрестность точки x имеет непустые пересечения со всеми F_n, за исключением, быть может, конечного их числа.

b) Множество $\overline{\lim}\, F_n$ замкнуто и является наименьшим замкнутым множеством, удовлетворяющим эквивалентным условиям 2 и $2'$. Другими словами, $x \in \overline{\lim}\, F_n$ тогда и только тогда, когда существуют подпоследовательность $\{F_{n_k}\}$ и последовательность $n_k \to x_{n_k} \in F_{n_k}$, такие, что $x = \lim x_{n_k}$, или еще тогда и только тогда, когда каждая окрестность точки x имеет непустые пересечения с бесконечным числом F_n. Кроме того, имеет место следующее соотношение:

$$\overline{\lim}\, F_n = \bigcap_{N>0} \overline{\bigcup_{n \geqslant N} F_n}. \tag{b}$$

Доказательство. a) Пусть F — замкнутое множество, состоящее из тех и только тех точек x, каждая окрестность которых имеет непустое пересечение со всеми F_n, за исключением, быть может, конечного их числа. Каждая точка $x \in F$ является в этом случае пределом последовательности точек x_n, принадлежащих F_n для достаточно больших n, так что $x \in \underline{\lim}\, F_n$ и $F \subset \underline{\lim}\, F_n$. Обратно, пусть точка y не принадлежит F. Тогда найдутся окрестность V точки y и подпоследовательность $\{F_{n_k}$ удовлетворяющие соотношению $V \cap F_{n_k} = \varnothing$ для любого Поскольку пространство $\mathcal{F}$ компактно, из последовател ности $\{F_{n_k}\}$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюс к некоторому замкнутому множеству $A \supset \underline{\lim}\, F_n$. Таким образо: если $y \notin A$, то $y \notin \underline{\lim}\, F_n$, так что $F \supset \underline{\lim}\, F_n$.

b) Пусть F' — замкнутое множество, образованное теми только теми точками x, каждая окрестность которых имее непустые пересечения с бесконечным числом F_n. Если $x \in F$ то существуют подпоследовательность $\{F_{n_k}\}$ и для каждого точка $x_{n_k} \in F_{n_k}$, такие, что $x = \lim x_{n_k}$ в E. Если A являетс пределом в $\mathcal{F}$ подпоследовательности $\{F_{n_k}\}$, то $x \in A \subset \overline{\lim}\, F$ и, следовательно, $F' \subset \overline{\lim}\, F_n$. Обратно, если $x \in \overline{\lim}\, F_n$, т пусть $\{F_{n_k}\}$ — подпоследовательность, предел A' которой в $\mathcal{F}$ содержит точку $x \in A'$. В силу условия 1′ найдется последова тельность $n_k \to x_{n_k} \in F_{n_k}$, такая, что $x = \lim x_{n_k}$. Таким образом $x \in F'$ и $\overline{\lim}\, F_n \subset F'$.

Полунепрерывность снизу и сверху

Определение 1.2.2. *Пусть Ω — топологическое пространство а ψ — отображение из Ω в $\mathcal{F}$. Мы будем говорить, что отображе ние ψ полунепрерывно сверху, если для любого $K \in \mathcal{K}$ мно жество $\psi^{-1}(\mathcal{F}^K)$ открыто в Ω, и будем называть ψ полунепре рывным снизу, если для любого $G \in \mathcal{G}$ множество $\psi^{-1}(\mathcal{F}_G$ открыто в Ω.*

Ясно, что отображение ψ непрерывно тогда и только тогда, когда оно полунепрерывно и снизу и сверху. Если топология пространства Ω обладает счетной базой, то справедлив следующий критерий.

Предложение 1.2.4. *Пусть Ω — сепарабельное пространство и ψ — отображение из Ω в $\mathcal{F}$.*

a) *Отображение ψ полунепрерывно сверху в том и только том случае, когда $\psi(\omega) \supset \overline{\lim}\, \psi(\omega_n)$ для любой точки $\omega \in \Omega$ и для любой последовательности $\{\omega_n\}$, сходящейся к ω в Ω.*

b) *Отображение ψ полунепрерывно снизу в том и только том случае, когда $\psi(\omega) \subset \underline{\lim}\, \psi(\omega_n)$ для любой точки $\omega \in \Omega$ и для любой последовательности $\{\omega_n\}$, сходящейся к ω в Ω.*

Доказательство. Поскольку Ω сепарабельно, то $\psi^{-1}(\mathcal{F}_K)$ (соотв. $\psi^{-1}(\mathcal{F}^G)$) замкнуто в Ω для любого $K \in \mathcal{K}$ (соотв. для любого $G \in \mathcal{G}$) тогда и только тогда, когда из соотношений $\lim \omega_n = \omega$ в Ω и $\psi(\omega_n) \in \mathcal{F}_K$ (соотв. $\psi(\omega_n) \in \mathcal{F}^G$) вытекает, что $\psi(\omega) \in \mathcal{F}_K$ (соотв. $\psi(\omega) \in \mathcal{F}^G$), т. е. в силу условия 2 (соотв. условия 1) тогда и только тогда, когда $\overline{\lim}\, \psi(\omega_n) \subset \psi(\omega)$ (соотв. $\underline{\lim}\, \psi(\omega_n) \supset \psi(\omega)$).

Следствие 1. *Отображение $(F, F') \to (F \cap F')$ из $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ в $\mathcal{F}$ полунепрерывно сверху.*

Доказательство. Пусть $\{F_n\}$ и $\{F'_n\}$ — последовательности, сходящиеся в $\mathcal{F}$ соответственно к F и F'. Если множество $\overline{\lim}\,(F_n \cap F'_n)$ непусто, то пусть x — какая-нибудь точка, принадлежащая этому множеству и (см. предложение 1.2.3) $\{x_{n_k}\}$ — последовательность точек $x_{n_k} \in F_{n_k} \cap F'_{n_k}$, сходящаяся к x. В силу условия 2′ из включений $x_{n_k} \in F_{n_k}$ вытекает, что $x \in F$, а из включений $x_{n_k} \in F'_{n_k}$, — что $x \in F'$. Таким образом, $x \in F \cap F'$ и $\overline{\lim}\,(F_n \cap F'_n) \subset F \cap F'$. Поэтому, согласно предложению 1.2.4, отображение $(F, F') \to (F \cap F')$ полунепрерывно сверху.

Следствие 2. *Отображение $F \to \overline{F^c}$ пространства $\mathcal{F}$ в себя полунепрерывно снизу.*

Доказательство. Соотношение $\overline{F^c} \cap G = \varnothing$ для $G \in \mathcal{G}$ равносильно соотношению $F^c \cap G = \varnothing$, т. е. соотношению $F \supset G$. Но множество $\{F\colon F \in \mathcal{F},\ F \supset G\}$ замкнуто в силу следствия 4 теоремы 1.2.2. Отсюда вытекает, что отображение $F \to \overline{F^c}$ полунепрерывно снизу.

Следствие 3. *Если E — локально связное пространство, то отображение взятия границы $F \to \partial F$ из $\mathcal{F}$ в $\mathcal{F}$ полунепрерывно снизу.*

Доказательство. Пусть G — связное открытое множество. Граница $\partial F = F \cap \overline{F^c}$ замкнутого множества F имеет с G непустое пересечение тогда и только тогда, когда непустым является пересечение множества G с F и $\overline{F^c}$. Таким образом, $\partial^{-1}(\mathcal{F}_G) = \mathcal{F}_G \cap \{F \not\supset G\}$, а это множество открыто в $\mathcal{F}$ в силу следствия 4 теоремы 1.2.2. Если множество $G' \in \mathcal{G}$ открыто, то его связные компоненты G_i, $i \in I$, открыты ввиду локальной связности пространства E. Поэтому $\partial^{-1}(\mathcal{F}_G) = \partial^{-1}\left(\bigcup \mathcal{F}_{G_i}\right) = \bigcup \partial^{-1}\left(\mathcal{F}_{G_i}\right)$ открыто в $\mathcal{F}$.

Следствие 4. *Пусть E и E' — два* ЛКС-*пространства, а ψ — возрастающее отображение пространства $\mathcal{F}(E)$ в $\mathcal{F}(E')$ [т. е. из* *выполнения соотношения $F_1 \subset F_2$ в $\mathcal{F}(E)$ вытекает, что $\psi(F_1) \subset \subset \psi(F_2)$]. Тогда для полунепрерывности сверху отображения необходимо и достаточно, чтобы из сходимости $F_n \downarrow F$ в $\mathcal{F}(E$ вытекала сходимость $\psi(F_n) \downarrow \psi(F)$.*

Доказательство. Предположим, что отображение ψ полу непрерывно сверху. Если $F_n \downarrow F$, то (в силу следствия 2 теоремы 1.2.2) $F = \lim F_n$ в $\mathcal{F}(E)$, так что $\overline{\lim}\, \psi(F_n) \subset \psi(F$ С другой стороны, из включения $F_n \supset F$ вытекает включени $\underline{\lim}\, \psi(F_n) \supset \psi(F)$. Поэтому $\psi(F) = \lim \psi(F_n)$ в $\mathcal{F}(E')$. Но отобра жение ψ возрастающее, так что и $\psi(F_n) \downarrow \bigcap \psi(F_n)$. Поэтому согласно следствию 3 теоремы 1.2.2, $\bigcap \psi(F_n) = \psi(F)$, т. е $\psi(F_n) \downarrow \psi(F)$.

Обратно, пусть из $F_n \downarrow F$ вытекает, что $\psi(F_n) \downarrow \psi(F)$, и пуст $\{F_n\}$ — последовательность множеств из $\mathcal{F}(E)$, сходящаяся к не которому пределу F. В силу соотношения (b) из предложени 1.2.3 множество F представимо в виде $F = \bigcap A_N$, где $A_N = \overline{\bigcup_{n \geqslant N} F_n}$.

Последовательность $\{A_N\}$ убывающая, так что $\psi(A_N) \downarrow \psi(F$ Поскольку $F_N \subset A_N$, то мы имеем также $\overline{\lim}\, \psi(F_N) \subset \overline{\lim}\, \psi(A_N) = \lim \psi(A_N) = \psi(F)$. Следовательно, отображение ψ полунепре рывно сверху.

Следствие 5. *Пусть T — возрастающее отображение из $\mathcal{F}(E$ в расширенную прямую $[-\infty, +\infty]$. Тогда для полунепрерыв ности сверху отображения T необходимо и достаточно, чтобы и сходимости $F_n \downarrow F$ в $\mathcal{F}$ вытекала сходимость $T(F_n) \downarrow T(F)$.*

Это сразу получается из следствия 4, если каждую точку расширенной прямой „отождествить" с замкнутым множество $\{y\colon y \leqslant x\}$.

Случай, когда пространство E является метрическим

Предположим теперь, что E — локально компактное сепарабельное метрическое пространство, топология которого порождается метрикой $d\colon E \times E \to \mathbf{R}_+$. Пусть $B_\varepsilon(x)$ (соотв. $\overline{B_\varepsilon}(x)$) — открытый (соотв. замкнутый) шар с центром в точке x и радиусом $\varepsilon > 0$. Тогда топология пространства $\mathcal{F}(E)$ порождается системой множеств $\mathcal{F}_{B_\varepsilon(x)}$ и $\mathcal{F}^{\overline{B}_\varepsilon(x)}$, $x \in E$, $\varepsilon > 0$. Для любых $F \in \mathcal{F}$ и $x \in E$ положим

$$d(x, F) = \inf\{d(x, y),\ y \in F\},$$

если $F \neq \varnothing$, и $d(x, \varnothing) = \infty$. Очевидно, что включение $F \in \in \mathcal{F}_{B_\varepsilon(x)}$ эквивалентно неравенству $d(x, F) < \varepsilon$, а включение

$F \in \mathcal{F}^{\overline{B}_\varepsilon(x)}$ — неравенству $d(x, F) > \varepsilon$. Поэтому последовательность $\{F_n\}$ сходится к пределу F тогда и только тогда, когда для любого $x \in E$ последовательность $\{d(x, F_n)\}$ сходится к $d(x, F)$ в топологии компактифицированной полупрямой $\overline{\mathrm{R}}_+$. Сформулируем этот результат более точно.

Предложение 1.2.5. *Предположим, что топология пространства E порождается метрикой d. Тогда для сходимости последовательности $\{F_n\}$ в $\mathcal{F}$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $x \in E$ последовательность $\{d(x, F_n)\}$ сходилась в $\overline{\mathrm{R}}_+$.*

Необходимость вытекает из предыдущих рассуждений. Докажем достаточность. Предположим, что для любого $x \in E$ последовательность $\{d(x, F_n)\}$ имеет предел $f(x) \in [0, +\infty]$. В силу компактности $\mathcal{F}$ существует подпоследовательность $\{F_{n_k}\}$, сходящаяся в $\mathcal{F}$ к некоторому пределу F. В соответствии с уже доказанной необходимостью мы имеем тогда $d(x, F) = \lim d(x, F_{n_k}) = f(x)$. Таким образом, каждая подпоследовательность сходится к замкнутому множеству $F = \{x\colon f(x) = 0\}$, откуда вытекает, что $F = \lim F_n$.

1.3. ПРОСТРАНСТВА $\mathcal{G}$ И $\mathcal{K}$

Топология $\mathcal{T}_g$ на $\mathcal{G}$ порождается классами $\mathcal{G}_K$, $K \in \mathcal{K}$, и $\mathcal{G}^G$, $G \in \mathcal{G}$. Отображение $\complement\colon F \to F^c$, как легко видеть, является гомеоморфизмом $\mathcal{F}$ на $\mathcal{G}$, так что все результаты предыдущего раздела можно переформулировать в двойственные им утверждения. Например, критерий сходимости, даваемый теоремой 1.2.2, принимает при этом следующий вид:

Теорема 1.3.1. *Последовательность $\{G_n\}$ сходится в $\mathcal{G}$ к пределу G тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия:*

1′. Для любой точки $x \notin G$ существует последовательность $\{x_n\}$, такая, что $x = \lim x_n$ в E и $x_n \notin G_n$ для достаточно больших n.

2′. Для любой подпоследовательности $\{G_{n_k}\}$ и любой последовательности $n_k \to x_{n_k} \notin G_{n_k}$, сходящейся в E, $\lim x_n = x \notin G$.

Пусть ψ — отображение некоторого топологического пространства Ω в $\mathcal{G}$. Будем называть ψ *полунепрерывным снизу* (соотв. *сверху*), если множество $\psi^{-1}(\mathcal{G}_K)$ (соотв. $\psi^{-1}(\mathcal{G}^G)$) открыто в Ω для любого $K \in \mathcal{K}$ (соотв. для любого $G \in \mathcal{G}$). Таким образом:

Предложение 1.3.1. *Отображение ψ топологического пространства Ω в $\mathcal{G}$ полунепрерывно снизу (соотв. сверху) тогда* *и только тогда, когда отображение*[1] $\complement \circ \psi$ *из* Ω *в* $\mathscr{F}$ *полунепрерывно сверху (соотв. снизу).*

Введем теперь новое пространство $\mathscr{H}$.

Определение 1.3.1. *Пространство* $\mathscr{H}$ *— это образ отображения* $A \to (\mathring{A}, \bar{A})$ *из* $\mathscr{P}(E)$ *в произведение пространств* $\mathscr{G} \times \mathscr{F}$.

Пространство $\mathscr{H}$ очевидным образом содержится в подпространстве $\{(G, F);\ G \subset F\}$ пространства $\mathscr{G} \times \mathscr{F}$. Если $G \in \mathscr{G}$ и $F \in \mathscr{F}$, то вовсе не обязательно должно существовать множество $A \in \mathscr{P}(E)$, такое, что $\mathring{A} = G$ и $\bar{A} = F$. Тем не менее так будет всегда, если пространство E удовлетворяет следующей аксиоме.

Аксиома 1.3.1. *В пространстве* E *существует множество* D*-такое, что и само* D *и его дополнение* D^c *плотны в* E.

Если $G \in \mathscr{G}$, $F \in \mathscr{F}$ и $G \subset F$, то для множества

$$A = G \cup ((\bar{G})^c \cap \mathring{F} \cap D) \cup \partial F$$

имеет место соотношения $\mathring{A} = G$ и $\bar{A} = F$. Аксиома 1.3.1 выполняется, в частности, если в E содержится несчетное число открытых множеств, как, например, в случае, когда E — эвклидово пространство.

Предложение 1.3.2. *Пусть выполнена аксиома* 1.3.1. *Тогда пространство* $\mathscr{H}$ *компактно и сепарабельно в топологии* $\mathscr{T}_h$, *индуцированной произведением топологий* $\mathscr{T}_f \times \mathscr{T}_g$.

Доказательство. Поскольку $\mathscr{G} \times \mathscr{F}$ компактно и сепарабельно, то достаточно показать, что $\mathscr{H}$ замкнуто в $\mathscr{G} \times \mathscr{F}$. Для этого в силу аксиомы 1.3.1 достаточно показать, что для любых последовательностей $\{G_n\}$ и $\{F_n\}$, сходящихся соответственно в $\mathscr{G}$ и $\mathscr{F}$ к пределам G и F и удовлетворяющих условию $G_n \subset F_n$ при всех n, имеет место и включение $G \subset F$. Если $G = \varnothing$, то этот результат верен тривиальным образом. Пусть $G \neq \varnothing$, и пусть x — какая-нибудь точка, принадлежащая G. Множество $\mathscr{G}_{\{x\}}$ открыто в $\mathscr{G}$, так что для достаточно больших n мы имеем $x \in G_n \subset F_n$. Но $\mathscr{F}_{\{x\}}$ замкнуто в $\mathscr{F}$. Поэтому из $x \in F_n$ вытекает, что $x \in F$. Таким образом, $G \subset F$.

---

[1]) Знак $\circ$ обозначает композицию отображений. Например, $(\complement \circ \psi)(u) = \complement(\psi(u)) = (\psi(u))^c$ для $u \in \Omega$. — *Прим. ред.*

1.4. ПРОСТРАНСТВО $\mathscr{K}(E)$ И МИОПИЧЕСКАЯ ТОПОЛОГИЯ

Миопическая топология $\mathcal{T}_k$ в $\mathscr{K}(E)$ порождается классами $\mathscr{K}^F$, $F \in \mathscr{F}$ и $\mathscr{K}_G$, $G \in \mathscr{G}$. Если пространство E компактно, то топологические пространства $\mathscr{F}$ и $\mathscr{K}$ совпадают между собой. Если же E не компактно, то миопическая топология строго сильнее топологии, индуцированной на $\mathscr{K} = \mathscr{K} \cap \mathscr{F}$ топологией $\mathcal{T}_f$, так что $\mathscr{K}$ не является топологическим подпространством пространства $\mathscr{F}$. Фактически индуцированная $\mathcal{T}_f$ на $\mathscr{K}$ топология порождается классами $\mathscr{F}^K \cap \mathscr{K} = \mathscr{K}^K$, $K \in \mathscr{K}$, и $\mathscr{F}_G \cap \mathscr{K} = \mathscr{K}_G$, $G \in \mathscr{G}$, открытыми в топологии $\mathcal{T}_k$. Однако если F — некомпактное замкнутое множество, то $\mathscr{K}^F$ не будет открытым в индуцированной $\mathcal{T}_f$ топологии. Взаимно однозначное отображение $K \to K$ из $\mathscr{K}$ в $\mathscr{F}$ непрерывно, так что любое компактное подмножество $\mathscr{V} \subset \mathscr{K}(E)$ компактно (а значит, и замкнуто) в $\mathscr{F}$, и поэтому любое подмножество $\mathscr{V}' \subset \mathscr{V}$, замкнутое (а значит, и компактное) в миопической топологии, является также замкнутым в $\mathscr{F}$. Следовательно, миопическая топология совпадает с топологией $\mathcal{T}_f$ на компактных подмножествах пространства $\mathscr{K}(E)$.

Обратно, если множество $\mathscr{V} \subset \mathscr{K}$ замкнуто (а значит, и компактно) в $\mathscr{F}$ в топологии $\mathcal{T}_f$ и если относительная миопическая топология и относительная $\mathcal{T}_f$-топология совпадают на $\mathscr{V}$, то $\mathscr{V}$ компактно и в топологии $\mathcal{T}_k$. Это условие, очевидно, выполняется для каждого класса $\mathscr{K}^{K^c}$, $K \in \mathscr{K}$ (т. е. класса компактных множеств, содержащихся в фиксированном $K \in \mathscr{K}$). С другой стороны, если $\mathscr{B}$ — такая база топологии E, что для любого $B \in \mathscr{B}$ справедливо соотношение $\bar{B} \in \mathscr{K}$, то совокупность $\mathscr{K}^{B^c}$, $B \in \mathscr{B}$, образует открытое покрытие пространства $\mathscr{K}(E)$. Таким образом, если $\mathscr{V}$ компактно в $\mathscr{K}$ в миопической топологии, то существует относительно компактное множество B, такое, что $\mathscr{V} \subset \mathscr{K}^{B^c}$ и (тем более) $\mathscr{V} \subset \mathscr{K}^{K^c}$ (где $K = \bar{B} \in \mathscr{K}$). Другими словами, подмножество $\mathscr{V} \subset \mathscr{K}$ компактно в миопической топологии тогда и только тогда, когда оно замкнуто в $\mathscr{F}$ и содержится в $\mathscr{K}^{K^c}$ для некоторого компактного множества $K \in \mathscr{K}$. Нетрудно показать, что пространство $\mathscr{K}$ с миопической топологией является ЛКС-пространством. Сформулируем теперь полученные результаты.

Предложение 1.4.1. *Миопическая топология сильнее, чем топология, индуцированная на $\mathscr{K}$ из $\mathscr{F}$, и строго сильнее последней, если пространство E не компактно. Тем не менее эти две топологии совпадают на множествах $\mathscr{V} \subset \mathscr{K}$, компактных в миопической топологии. Подмножество $\mathscr{V} \subset \mathscr{K}$ компактно в миопической* *топологии тогда и только тогда, когда оно замкнуто в $\mathcal{F}$ и существует множество $K_0 \in \mathcal{K}$, такое, что $K_0 \supset K$ для всех $K \in \mathcal{V}$.*

Следствие. *Пространство $\mathcal{K}$ является* ЛКС-*пространством.*

Приводимый ниже критерий сходимости в пространстве $\mathcal{K}$ также является очевидным следствием предложения 1.4.1.

Теорема 1.4.1. *Последовательность $\{K_n\}$ сходится в пространстве $\mathcal{K}$, наделенном миопической топологией, тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия:*

1. *Существует такое множество $K_0 \in \mathcal{K}$, что для любого n имеет место включение $K_0 \supset K_n$.*
2. *Последовательность $\{K_n\}$ сходится в $\mathcal{F}$.*

Следствие 1. *Пустое множество $\varnothing$ является изолированной точкой в пространстве $\mathcal{K}$.*

Следствие 2. *Отображения $(K, K') \to K \cup K'$ из $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$ в $\mathcal{K}$ и $(K, F) \to (K \cup F)$ из $\mathcal{K} \times \mathcal{F}$ в $\mathcal{F}$ непрерывны.*

Следствие 3. *Пусть $\{K_n\}$ — последовательность множеств из $\mathcal{K}$. Тогда из соотношения $K_n \downarrow K$ вытекает, что $K = \lim K_n$ в $\mathcal{K}$. Соотношение $K_n \uparrow A$ влечет за собой соотношение $\lim K_n = \bar{A}$ в $\mathcal{K}$ тогда и только тогда, когда множество $\bar{A}$ компактно.*

Следствие 4. *Множество $\mathcal{G}' = \mathcal{G} \setminus \{\varnothing\}$ (т. е. класс всех непустых конечных множеств из E) плотно в $\mathcal{K}' = \mathcal{K} \setminus \{\varnothing\}$.*

Замечание. В случае когда E не компактно, предшествующие результаты становятся более прозрачными, если мы рассмотрим компактное пространство $\bar{E} = E \cup \{\omega\}$, получаемое добавлением к E бесконечно удаленной точки ω (см. Шоке, 1953/54). Открытые окрестности точки ω являются множествами, дополнительными (в $\bar{E}$) к множествам $K \in \mathcal{K}(E)$. Компактные множества $K \in \mathcal{K}(E)$ совпадают с замкнутыми множествами из $\mathcal{F}(\bar{E})$, не содержащими ω, так что $\mathcal{K}(E) = \mathcal{F}^{\{\omega\}}(\bar{E})$ есть открытое подмножество пространства $\mathcal{F}(\bar{E})$. Легко убедиться в том, что миопическая топология совпадает с топологией, индуцируемой $\mathcal{F}(\bar{E})$ на этом открытом подмножестве $\mathcal{K}(E)$. Другими словами, *$\mathcal{K}(E)$ является топологическим подпространством пространства $\mathcal{F}(\bar{E})$, открытым в нем.* С другой стороны, дополнительным множеством к $\mathcal{K}(E)$ в $\mathcal{F}(\bar{E})$ служит замкнутое множество $\mathcal{F}_{\{\omega\}}(\bar{E})$ и отображение $F \to F \cup \{\omega\}$ есть гомеоморфизм $\mathcal{F}(E)$ на $\mathcal{F}_{\{\omega\}}(\bar{E})$. Поэтому $\mathcal{F}(\bar{E})$ представляет собой объединение двух непересекающихся топологических подпространств $\mathcal{F}^{\{\omega\}}$ и $\mathcal{F}_{\{\omega\}}$, гомеоморфных соответственно $\mathcal{K}(E)$ и $\mathcal{F}(E)$.

В силу теоремы 1.4.1 отображения, определенные на $\mathscr{K}$ или принимающие значения из $\mathscr{K}$, должны иметь свойства, аналогичные тем, которые были указаны при рассмотрении пространства $\mathscr{F}$. Если Ω — произвольное топологическое пространство, то отображение ψ: $\Omega \to \mathscr{K}$ называется *полунепрерывным сверху* (соотв. *снизу*), если множество $\psi^{-1}(\mathscr{K}^F)$ (соотв. $\psi^{-1}(\mathscr{K}_G)$) открыто в Ω для любого $F \in \mathscr{F}$ (соотв. для любого $G \in \mathscr{G}$). Мы приведем ниже лишь результаты для полунепрерывных сверху и возрастающих отображений из $\mathscr{K}$ в расширенную прямую $[-\infty, +\infty]$.

Предложение 1.4.2. *Пусть T — возрастающее отображение пространства $\mathscr{K}$ в расширенную прямую (т. е. из $K \subset K'$ в $\mathscr{K}$ вытекает, что $T(K) \leqslant T(K')$). Для полунепрерывности T сверху необходимо и достаточно, чтобы из $K_n \downarrow K$ в $\mathscr{K}$ следовало $T(K_n) \downarrow T(K)$.*

В силу теоремы 1.4.1 это утверждение непосредственно вытекает из следствия 5 предложения 1.2.4.

Предложение 1.4.3. a) *Пусть T — возрастающее отображение из $\mathscr{K}$ в расширенную прямую, и пусть $T_g(G) = \sup\{T(K),\ K \in \mathscr{K},\ K \subset G\}$ для всех $G \in \mathscr{G}$ и $T_k(K) = \inf\{T_g(G),\ G \in \mathscr{G},\ G \supset K\}$ для всех $K \in \mathscr{K}$. Тогда T_g полунепрерывно снизу на $\mathscr{G}$, а T_k полунепрерывно сверху на $\mathscr{K}$. Точнее говоря, T_k является наименьшей полунепрерывной сверху верхней гранью отображения T на $\mathscr{K}$, и $T = T_k$ тогда и только тогда, когда само T полунепрерывно сверху. Далее, для любого $G \in \mathscr{G}$ справедлива обратная формула $T_g(G) = \sup\{T_k(K),\ K \in \mathscr{K},\ K \subset G\}$.*

b) *Пусть T' — возрастающее отображение из $\mathscr{G}$ в расширенную прямую, и пусть $T'_k(K) = \inf\{T'(G),\ G \in \mathscr{G},\ G \supset K\}$ для всех $K \in \mathscr{K}$ и $T'_g(G) = \sup\{T'_k(K),\ K \in \mathscr{K},\ K \subset G\}$ для всех $G \in \mathscr{G}$. Тогда T'_k полунепрерывно сверху на $\mathscr{K}$, а T'_g есть наибольшая полунепрерывная снизу нижняя грань T' на $\mathscr{G}$, причем $T' = T'_g$ в том и только том случае, если само T' полунепрерывно снизу. Кроме того, для любого $K \in \mathscr{K}$ имеет место обратная формула $T'_k(K) = \inf\{T'_g(G),\ G \in \mathscr{G},\ G \supset K\}$.*

Доказательство. Докажем, например, первое утверждение. Пусть G — открытое множество, а ε — некоторое действительное число, $\varepsilon > 0$. Существует $K_0 \in \mathscr{K}$, такое, что $K_0 \subset G$ и $T_g(G) \leqslant \leqslant T(K_0) + \varepsilon$. Поэтому для любого $G' \in \mathscr{G}_{K_0}$ (т. е. $G' \supset K_0$) справедливо соотношение $T_g(G') \geqslant T(K_0) \geqslant T_g(G) - \varepsilon$, так что T_g полунепрерывно снизу. Пусть K — какое-либо компактное множество. Существует $G_0 \in \mathscr{G}$, такое, что $G_0 \supset K$ и $T_k(K) \geqslant$

топологии тогда и только тогда, когда оно замкнуто в $\mathscr{F}$ и существует множество $K_0 \in \mathscr{K}$, такое, что $K_0 \supset K$ для всех $K \in \mathscr{V}$.

Следствие. *Пространство $\mathscr{K}$ является* ЛКС-*пространством.*

Приводимый ниже критерий сходимости в пространстве $\mathscr{K}$ также является очевидным следствием предложения 1.4.1.

Теорема 1.4.1. *Последовательность $\{K_n\}$ сходится в пространстве $\mathscr{K}$, наделенном миопической топологией, тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия:*

1. *Существует такое множество $K_0 \in \mathscr{K}$, что для любого n имеет место включение $K_0 \supset K_n$.*
2. *Последовательность $\{K_n\}$ сходится в $\mathscr{F}$.*

Следствие 1. *Пустое множество $\varnothing$ является изолированной точкой в пространстве $\mathscr{K}$.*

Следствие 2. *Отображения $(K, K') \to K \cup K'$ из $\mathscr{K} \times \mathscr{K}$ в $\mathscr{K}$ и $(K, F) \to (K \cup F)$ из $\mathscr{K} \times \mathscr{F}$ в $\mathscr{F}$ непрерывны.*

Следствие 3. *Пусть $\{K_n\}$ — последовательность множеств из $\mathscr{K}$. Тогда из соотношения $K_n \downarrow K$ вытекает, что $K = \lim K_n$ в $\mathscr{K}$. Соотношение $K_n \uparrow A$ влечет за собой соотношение $\lim K_n = \bar{A}$ в $\mathscr{K}$ тогда и только тогда, когда множество $\bar{A}$ компактно.*

Следствие 4. *Множество $\mathscr{G}' = \mathscr{G} \setminus \{\varnothing\}$ (т. е. класс всех непустых конечных множеств из E) плотно в $\mathscr{K}' = \mathscr{K} \setminus \{\varnothing\}$.*

Замечание. В случае когда E не компактно, предшествующие результаты становятся более прозрачными, если мы рассмотрим компактное пространство $\bar{E} = E \cup \{\omega\}$, получаемое добавлением к E бесконечно удаленной точки ω (см. Шоке, 1953/54). Открытые окрестности точки ω являются множествами, дополнительными (в $\bar{E}$) к множествам $K \in \mathscr{K}(E)$. Компактные множества $K \in \mathscr{K}(E)$ совпадают с замкнутыми множествами из $\mathscr{F}(\bar{E})$, не содержащими ω, так что $\mathscr{K}(E) = \mathscr{F}^{\{\omega\}}(\bar{E})$ есть открытое подмножество пространства $\mathscr{F}(\bar{E})$. Легко убедиться в том, что миопическая топология совпадает с топологией, индуцируемой $\mathscr{F}(\bar{E})$ на этом открытом подмножестве $\mathscr{K}(E)$. Другими словами, *$\mathscr{K}(E)$ является топологическим подпространством пространства $\mathscr{F}(\bar{E})$, открытым в нем.* С другой стороны, дополнительным множеством к $\mathscr{K}(E)$ в $\mathscr{F}(\bar{E})$ служит замкнутое множество $\mathscr{F}_{\{\omega\}}(\bar{E})$ и отображение $F \to F \cup \{\omega\}$ есть гомеоморфизм $\mathscr{F}(E)$ на $\mathscr{F}_{\{\omega\}}(\bar{E})$. Поэтому $\mathscr{F}(\bar{E})$ представляет собой объединение двух непересекающихся топологических подпространств $\mathscr{F}^{\{\omega\}}$ и $\mathscr{F}_{\{\omega\}}$, гомеоморфных соответственно $\mathscr{K}(E)$ и $\mathscr{F}(E)$.

В силу теоремы 1.4.1 отображения, определенные на $\mathscr{K}$ или принимающие значения из $\mathscr{K}$, должны иметь свойства, аналогичные тем, которые были указаны при рассмотрении пространства $\mathscr{F}$. Если Ω — произвольное топологическое пространство, то отображение ψ: $\Omega \to \mathscr{K}$ называется *полунепрерывным сверху* (соотв. *снизу*), если множество $\psi^{-1}(\mathscr{K}^F)$ (соотв. $\psi^{-1}(\mathscr{K}_G)$) открыто в Ω для любого $F \in \mathscr{F}$ (соотв. для любого $G \in \mathscr{G}$). Мы приведем ниже лишь результаты для полунепрерывных сверху и возрастающих отображений из $\mathscr{K}$ в расширенную прямую $[-\infty, +\infty]$.

Предложение 1.4.2. *Пусть T — возрастающее отображение пространства $\mathscr{K}$ в расширенную прямую (т. е. из $K \subset K'$ в $\mathscr{K}$ вытекает, что $T(K) \leqslant T(K')$. Для полунепрерывности T сверху необходимо и достаточно, чтобы из $K_n \downarrow K$ в $\mathscr{K}$ следовало $T(K_n) \downarrow T(K)$.*

В силу теоремы 1.4.1 это утверждение непосредственно вытекает из следствия 5 предложения 1.2.4.

Предложение 1.4.3. a) *Пусть T — возрастающее отображение из $\mathscr{K}$ в расширенную прямую, и пусть $T_g(G) = \sup\{T(K),\ K \in \mathscr{K},\ K \subset G\}$ для всех $G \in \mathscr{G}$ и $T_k(K) = \inf\{T_g(G),\ G \in \mathscr{G},\ G \supset K\}$ для всех $K \in \mathscr{K}$. Тогда T_g полунепрерывно снизу на $\mathscr{G}$, а T_k полунепрерывно сверху на $\mathscr{K}$. Точнее говоря, T_k является наименьшей полунепрерывной сверху верхней гранью отображения T на $\mathscr{K}$, и $T = T_k$ тогда и только тогда, когда само T полунепрерывно сверху. Далее, для любого $G \in \mathscr{G}$ справедлива обратная формула $T_g(G) = \sup\{T_k(K),\ K \in \mathscr{K},\ K \subset G\}$.*

b) *Пусть T' — возрастающее отображение из $\mathscr{G}$ в расширенную прямую, и пусть $T'_k(K) = \inf\{T'(G),\ G \in \mathscr{G},\ G \supset K\}$ для всех $K \in \mathscr{K}$ и $T'_g(G) = \sup\{T'_k(K),\ K \in \mathscr{K},\ K \subset G\}$ для всех $G \in \mathscr{G}$. Тогда T'_k полунепрерывно сверху на $\mathscr{K}$, а T'_g есть наибольшая полунепрерывная снизу нижняя грань T' на $\mathscr{G}$, причем $T' = T'_g$ в том и только том случае, если само T' полунепрерывно снизу. Кроме того, для любого $K \in \mathscr{K}$ имеет место обратная формула $T'_k(K) = \inf\{T'_g(G),\ G \in \mathscr{G},\ G \supset K\}$.*

Доказательство. Докажем, например, первое утверждение. Пусть G — открытое множество, а ε — некоторое действительное число, $\varepsilon > 0$. Существует $K_0 \in \mathscr{K}$, такое, что $K_0 \subset G$ и $T_g(G) \leqslant T(K_0) + \varepsilon$. Поэтому для любого $G' \in \mathscr{G}_{K_0}$ (т. е. $G' \supset K_0$) справедливо соотношение $T_g(G') \geqslant T(K_0) \geqslant T_g(G) - \varepsilon$, так что T_g полунепрерывно снизу. Пусть K — какое-либо компактное множество. Существует $G_0 \in \mathscr{G}$, такое, что $G_0 \supset K$ и $T_k(K) \geqslant$

$\geqslant T_g(G_0) - \varepsilon$. Для любого $K' \in \mathcal{K}^{G_0^c}$ (т. е. $K' \subset G_0$) выполняется соотношение $T_k(K') \leqslant T_g(G_0) \leqslant T_k(K) + \varepsilon$, так что T_k полунепрерывно сверху.

Очевидно, что $T_k \geqslant T$ на $\mathcal{K}$. Если T полунепрерывно сверху, то $T_k = T$. Действительно, пусть K — произвольное компактное множество, а $\{G_n\}$ — фундаментальная система его открытых окрестностей, удовлетворяющая соотношениям $G_n \downarrow K$ и $T_g(G_n) \downarrow T_k(K)$. Для заданного $\varepsilon > 0$ и любого целого n найдется $K_n \in \mathcal{K}$, такое, что $K \subset K_n \subset G_n$ и $T(K_n) \geqslant T_g(G_n) - \varepsilon$. Но, как легко убедиться, используя теорему 1.4.1, последовательность $\{K_n\}$ сходится в $\mathcal{K}$ к K, так что $\overline{\lim}\, T(K_n) \leqslant T(K)$ в силу полунепрерывности сверху отображения T. Отображение T возрастающее, поэтому $\underline{\lim}\, T(K_n) \geqslant T(K)$. Отсюда вытекает, что $T(K) = \lim T(K_n) \geqslant \lim T_g(G_n) - \varepsilon = T_k(K) - \varepsilon$. Таким образом, $T(K) = T_k(K)$.

Если отображение T не является полунепрерывным сверху, то пусть T' — какая-нибудь полунепрерывная сверху верхняя грань для T. Тогда те же самые рассуждения приводят к соотношениям $T'_g \geqslant T_g$ и $T'_k \geqslant T_k$. Но в силу полунепрерывности сверху отображения T' мы имеем равенство $T'_k = T'$. Поэтому $T' \geqslant T_k$, и T_k является наименьшей полунепрерывной сверху верхней гранью отображения T. Наконец, полагая $\overline{T}_g(G) = \sup\{T_k(K), K \in \mathcal{K}, K \subset G\}$, получаем, что $T(K) \leqslant T_k(K) \leqslant T_g(G)$ для любого компактного множества $K \subset G$; беря верхнюю грань, находим, что $T_g(G) \leqslant \overline{T}_g(G) \leqslant T_g(G)$. Таким образом, $\overline{T}_g = T_g$.

Метрика Хаусдорфа

Предположим теперь, что топология ЛКС-пространства E порождается метрикой d: $E \times E \to \mathbf{R}_+$. Мы можем определить метрику ρ на $\mathcal{K}' = \mathcal{K} \setminus \{\varnothing\}$, положив

$$\rho(K, K') = \max\{\sup_{x \in K} d(x, K'), \sup_{x' \in K'} d(x', K)\}.$$

Эта метрика называется *метрикой Хаусдорфа* (или *хаусдорфовой метрикой*) на $\mathcal{K}'$.

Предложение 1.4.4. *Топология, определяемая хаусдорфовой метрикой ρ, эквивалентна относительной миопической топологии на $\mathcal{K}' = \mathcal{K} \setminus \{\varnothing\}$.*

Доказательство. Для заданного $K \in \mathcal{K}'$ функция $x \to d(x, K)$ непрерывна. Поэтому для любого $K' \in \mathcal{K}'$ найдется $x' \in K'$, такое, что $d(x', K) = \sup\{d(y, K), y \in K'\}$. Если $B_\varepsilon(y)$ — открытый шар с центром в точке y и радиусом $\varepsilon > 0$, то

$$\sup_{x \in K'} d(x, K) < \varepsilon \Leftrightarrow K' \subset \bigcup_{y \in K} B_\varepsilon(y),$$

$$\sup_{y \in K} d(y, K') < \varepsilon \Leftrightarrow K' \in \bigcap_{y \in K} \mathcal{K}_{B_\varepsilon}(y).$$

Пусть $\mathcal{B}_\varepsilon(K) = \{K', K' \in \mathcal{K}', \rho(K, K') < \varepsilon\}$ — открытый шар с центром K и радиусом $\varepsilon > 0$ в $\mathcal{K}'$. Компактное множество K допускает конечное покрытие открытыми шарами $B_1, B_2, \ldots, B_n$ с радиусами, не превосходящими $\varepsilon/2$, так что $\mathcal{K}_{B_1, \ldots, B_n} \subset \bigcap \bigcap \{\mathcal{K}_{B_\varepsilon(y)}, y \in K\}$. Отсюда следует, что если множество $F \in \mathcal{F}$ является дополнительным для открытого множества $\bigcup \{B_\varepsilon(y), y \in K\}$, то $\mathcal{K}^F_{B_1, \ldots, B_n}$ является миопической открытой окрестностью K, содержащейся в открытом шаре $\mathcal{B}_\varepsilon(K)$, так что этот шар открыт в миопической топологии.

Обратно, пусть F — замкнутое множество, не пересекающееся с $K \in \mathcal{K}$, и пусть $\varepsilon = \inf\{d(x, F), x \in K\}$. Тогда из $\rho(K', K) < \varepsilon$ вытекает, что $K' \subset \bigcup \{B_\varepsilon(y), y \in K\}$, и поэтому $K' \cap F = \varnothing$. Далее, множество $\mathcal{K}^F$ открыто в хаусдорфовой топологии на $\mathcal{K}'$. Если открытое множество G имеет с $K \in \mathcal{K}$ непустое пересечение, то существуют точка $y \in K \cap G$ и число $\varepsilon > 0$, такие, что $B_\varepsilon(y) \subset G$. Тогда из $\rho(K, K') < \varepsilon$ вытекает, что $K' \in \mathcal{K}_{B_\varepsilon(y)} \subset \mathcal{K}_G$. Отсюда следует, что $\mathcal{K}_G$ открыто в хаусдорфовой топологии, чем наше утверждение и доказано.

Замечание. В случае когда E — *эвклидово пространство*, в $\mathcal{P}(E)$ определена операция суммирования по Минковскому $A \oplus B = \{a + b, a \in A, b \in B\}$ (см. ниже). Если B_ε — шар с центром 0 и радиусом $\varepsilon \geqslant 0$, то хаусдорфово расстояние $\rho(K, K')$, $K, K' \in \mathcal{K}'$, дается следующей полезной формулой:

$$\rho(K, K') = \inf\{\varepsilon: K \subset K' \oplus B_\varepsilon, K' \subset K \oplus B_\varepsilon\}. \qquad (1.4.1)$$

1.5. СЛУЧАЙ ЭВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА $E = \mathbf{R}^d$

В этом параграфе мы рассмотрим случай, когда $E = \mathbf{R}^d$. Ввиду наличия в E векторной структуры можно определить ряд новых операций в $\mathcal{P}(E)$. Всюду в дальнейшем $A, B, \ldots$ — подмножества пространства $E = \mathbf{R}^d$.

Сложение и вычитание по Минковскому

Операция *сложения по Минковскому* $\oplus$ определяется в $\mathcal{P}(E)$ формулой

$$A \oplus B = \{a + b, a \in A, b \in B\}.$$

Эта операция ассоциативна и коммутативна, так что с ее введением $\mathcal{P}(E)$ превращается в абелеву полугруппу. Отметим, что $A \oplus \{0\} = A$ и $A \oplus \varnothing = \varnothing$ (по определению), так что полугруппа $\mathcal{P}(E)$ обладает единичным элементом $\{0\}$, но группой не является.

Для $x \in \mathbf{R}^d$ множество $A \oplus \{x\}$ представляет собой *сдвиг* множества A на вектор x. Мы будем часто писать A_x вместо $A \oplus \{x\}$.

Для любого $B \in \mathcal{P}(E)$ положим $\check{B} = \{-x,\ x \in B\}$; иначе говоря, $\check{B}$ — это множество, симметричное множеству B относительно начала 0. Очевидно, что соотношение $y \in A \oplus B$ эквивалентно соотношению $(\check{B})_y \cap A \neq \varnothing$. Поэтому справедлива следующая формула:

$$A \oplus B = \bigcup_{y \in A} B_y = \bigcup_{x \in B} A_x = \{z\colon\ A \cap (\check{B})_z \neq \varnothing\}. \tag{1.5.1}$$

Множество $\{z\colon\ A \cap B_z \neq \varnothing\}$ точек z, таких, что A имеет непустое пересечение с B_z, называется *дилатацией* множества A посредством множества B и равно $A \oplus \check{B}$.

Двойственная к сложению по Минковскому операция, называемая *вычитанием по Минковскому*, определяется следующим образом:

$$A \ominus B = (A^c \oplus B)^c.$$

В соответствии с (1.5.1), имеем

$$A \ominus B = (A^c \oplus B)^c = \bigcap_{x \in B} A_x = \{z\colon\ (\check{B})_z \subset A\}. \tag{1.5.2}$$

Операция, двойственная к дилатации, называется *эрозией*. Эрозия множества A посредством множества B есть множество $\{z\colon\ B_z \subset A\}$ точек z, для которых B_z содержится в A. В силу (1.5.2) оно равно $A \ominus \check{B}$.

Очевидно, что

$$\begin{gathered}(A \ominus C) \oplus B \subset (A \oplus B) \ominus C,\\ (A \ominus B) \ominus C = (A \ominus C) \ominus B = A \ominus (B \oplus C).\end{gathered} \tag{1.5.3}$$

Кроме того, из $B \subset C$ вытекает, что $A \oplus B \subset A \oplus C$, $A \ominus B \supset A \ominus C$ и $B \ominus A \subset C \ominus A$.

Отметим, что для любого $A \in \mathcal{P}$ справедливо включение $\{0\} \subset A \ominus \check{A}$; равенство здесь, вообще говоря, не имеет места. Впрочем, если точка $x \neq 0$ принадлежит множеству $A \ominus \check{A}$, то $A_x \subset A$ и $A_{nx} \subset A$ для любого целого $n \geqslant 0$, так что A содержит неограниченную последовательность $\{A_{nx}\}$. Отсюда следует, что для любого *ограниченного* множества A мы имеем равенство

$$A \ominus \check{A} = \{0\}. \qquad (1.5.4)$$

Что касается операции объединения, то мы можем записать

$$A \oplus (B \cup C) = \bigcup_{x \in A} (B_x \cup C_x) = \Big(\bigcup_{x \in A} B_x\Big) \cup \Big(\bigcup_{x \in A} C_x\Big).$$

Отсюда получаются следующие формулы:

$$\begin{gathered} A \oplus (B \cup C) = (A \oplus B) \cup (A \oplus C), \\ A \ominus (B \cup C) = (A \ominus B) \cap (A \ominus C), \\ (B \cap C) \ominus A = (B \ominus A) \cap (C \ominus A). \end{gathered} \qquad (1.5.5)$$

С другой стороны, имеют место лишь включения

$$\begin{gathered} A \oplus (B \cap C) \subset (A \oplus B) \cap (A \oplus C), \\ A \ominus (B \cap C) \supset (A \ominus B) \cup (A \ominus C), \\ (B \cup C) \ominus A \supset (B \ominus A) \cup (C \ominus A), \end{gathered}$$

но, вообще говоря, не равенства.

Если множество A *выпукло*, то $A \ominus B$ выпукло для любого $B \in \mathscr{P}$, а если выпуклы и A и B, то выпукло также $A \oplus B$. Первое вытекает из того, что $A \ominus B = \bigcap \{\check{A}_x;\ x \in B\}$ является пересечением выпуклых множеств, а второе очевидно.

Если A и B *связны*, то связно и $A \oplus B$.

Докажем это. Для $b \in B$ множество A_b связно и содержится в $A \oplus B$, так что оно содержится в некоторой связной компоненте C множества $A \oplus B$: $A_b \subset C$. Таким образом, для любого $x \in A$ мы имеем $x + b \in C$. Но из включения $(x + b) \in A_b \cap B_x$ вытекает, что $A_b \cup B_x$ связно как объединение двух связных множеств, имеющих непустое пересечение. Поэтому $B_x \subset C$ для любого $x \in A$, т. е. $A \oplus B \subset C$.

Пусть B связно и C_i, $i \in I$, — связные компоненты множества A. Тогда

$$A \ominus B = \bigcup_{i \in I} C_i \ominus B, \qquad (1.5.6)$$

поскольку из $C_i \subset A$ вытекает, что $C_i \ominus B \subset A \ominus B$ и $\bigcup (C_i \ominus B) \subset A \ominus B$. Обратно, если $z \in A \ominus B$, т. е. $(\check{B})_z \subset A$, то $(\check{B})_z \subset C_i$ для некоторого $i \in I$, т. е. $z \in C_i \ominus B$ и $A \ominus B \subset \bigcup (C_i \ominus B)$.

Заполнение и пополнение множества *A* посредством множества *B*

Путем комбинирования операций эрозии и дилатации можно получить еще две операции, которые мы будем называть соответственно *заполнением* и *пополнением*[1] множества A посредством множества (или, короче, множеством) B. Заполнение A_B и пополнение A^B множества A множеством B определяются следующим образом:

$$A_B = (A \ominus \check{B}) \oplus B, \quad A^B = (A \oplus \check{B}) \ominus B. \tag{1.5.7}$$

Для заданного $B \in \mathcal{P}$ отображения $A \to A_B$ и $A \to A^B$ являются *возрастающими* (т. е. из $A \subset A'$ вытекает, что $A_B \subset A'_B$ и $A^B \subset A'^B$), *идемпотентными* (т. е. $(A_B)_B = A_B$ и $(A^B)^B = A^B$) и двойственными друг другу (т. е. $(A^c)_B = (A^B)^c$ и $(A^c)^B = (A_B)^c$). Кроме того, пополнение — *экстенсивная*, а заполнение — *антиэкстенсивная* операция, т. е. $A_B \subset A \subset A^B$.

Мы говорим, что множество A *заполнимо по отношению к* B, если $A_B = A$, и *пополнено по отношению к* B, если $A^B = A$. Множество A заполнимо (соотв. пополнено) по отношению к B тогда и только тогда, когда существует такое множество $C \in \mathcal{P}$, что $A = C \oplus B$ (соотв. $A = C \ominus B$).

Заполнение множества A множеством B представляет собой объединение сдвигов B_y, содержащихся в A, т. е.

$$A_B = \bigcup \{B_y \colon y \in E,\ B_y \subset A\}. \tag{1.5.8}$$

Доказательство. Заметим, что соотношение $x \in (A \ominus \check{B}) \oplus B$ равносильно соотношению $(\check{B})_x \cap (A \ominus \check{B}) \neq \varnothing$, а значит, равносильно тому, что существует точка $y \in E$, для которой $B_y \subset A$ и $x \in B_y$.

Если A и B — *выпуклые* множества, то таковы же и множества A_B и A^B. Если B *связно* и C_i, $i \in I$, — связные компоненты множества A, то

$$A_B = \bigcup_{i \in I} (C_i)_B.$$

Это непосредственно следует из аналогичных результатов для операций $\oplus$ и $\ominus$.

В дальнейшем мы будем рассматривать главным образом дилатации, эрозии, заполнения и пополнения посредством

[1] В оригинале соответственно opening (дословно: открывание) и closing (дословно: закрывание). Для краткости мы будем в дальнейшем называть заполнением (пополнением) как саму операцию, так и ее результат. — *Прим. перев.*

непустых компактных множеств. Для всякого $K \in \mathcal{K}'$ имеют место следующие утверждения:

если $F \in \mathcal{F}$, то $F \oplus K$, $F \ominus K$, F_K, $F^K \in \mathcal{F}$;
если $G \in \mathcal{G}$, то $G \oplus K$, $G \ominus K$, G_K, $G^K \in \mathcal{G}$;
если $K' \in \mathcal{K}$, то $K' \oplus K$, $K' \ominus K$, K'_K, $K'^K \in \mathcal{K}$.

Докажем, например, справедливость утверждения, относящегося к пространству $\mathcal{F}$. Пусть $\{x_n\} \subset F \oplus K$ — некоторая последовательность, сходящаяся в E к пределу x. Для каждого n элемент x_n представим в виде $x_n = f_n + k_n$, где $f_n \in F$ и $k_n \in K$. Но K компактно; поэтому существует подпоследовательность $n_p \to k_{n_p} \in K$, сходящаяся к некоторой точке $k \in K$. Таким образом, $\lim f_{n_p} = x - k = f \in \mathcal{F}$ и $x = k + f \in F \oplus K$. Отсюда вытекает, что $F + K \in \mathcal{F}$. Если G — некоторое открытое множество, то множество $G \oplus K = \bigcup_{x \in K} G_x$ также открыто. Поэтому множество $F \ominus K = (F^c \oplus K)^c$ замкнуто. Наконец, поскольку множества $F \oplus \check{K}$ и $F \ominus \check{K}$ замкнуты, то таковыми же являются и множества $F_K = (F \ominus \check{K}) \oplus K$ и $F^K = (F \oplus \check{K}) \ominus K$.

Что касается *непрерывности* указанных операций, то здесь справедливы такие результаты.

Предложение 1.5.1. *Все перечисленные ниже отображения являются непрерывными:*

$(F, K) \to F \oplus K$ *из* $\mathcal{F} \times \mathcal{K}$ *на* $\mathcal{F}$;
$(K, K') \to K \oplus K'$ *из* $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$ *на* $\mathcal{K}$;
$F \to \check{F}$ *из* $\mathcal{F}$ *на* $\mathcal{F}$ *и* $K \to \check{K}$ *из* $\mathcal{K}$ *на* $\mathcal{K}$;
$(\lambda, F) \to \lambda F$ *из* $\mathbf{R}_+ \times \mathcal{F}$ *на* $\mathcal{F}$ *и*
$(\lambda, K) \to \lambda K$ *из* $\mathbf{R}_+ \times \mathcal{K}$ *на* $\mathcal{K}$.

Напомним, что по определению $\check{A} = \{-x,\ x \in A\}$, $\lambda A = \{\lambda x,\ x \in A\}$. Отображение $A \to \lambda A$ (для фиксированного $\lambda \geqslant 0$) называется *положительной гомотетией*.

Доказательство. Докажем, например, непрерывность отображения $(F, K) \to F \oplus K$. Пусть $\{F_n\}$ и $\{K_n\}$ — две последовательности, сходящиеся к F и K соответственно в $\mathcal{F}$ и $\mathcal{K}$. Если $K = \varnothing$, то для достаточно больших n множества K_n пусты в силу следствия 1 теоремы 1.4.1. Отсюда следует, что $F_n \oplus K_n = \varnothing$, так что последовательность $\{F_n \oplus K_n\}$ сходится в $\mathcal{F}$ к $F \oplus K = \varnothing$. Предположим теперь, что $K \neq \varnothing$, и покажем, что $\{F_n \oplus K_n\}$ сходится к $F \oplus K$, проверив выполнение условий 1′ и 2′ теоремы 1.2.2.

Условие 1'. Если $F \oplus K \neq \varnothing$, то найдется точка x, такая, что $x = f + k \in F \oplus K$, $f \in F$, $k \in K$. В силу условия 1', примененного к последовательностям $\{F_n\}$ и $\{K_n\}$, для каждого значения n (кроме, быть может, конечного числа значений) существует пара точек $f_n \in F_n$ и $k_n \in K_n$, такая, что $f = \lim f_n$ и $k = \lim k_n$ в E. Таким образом, $x = \lim x_n$, где $x_n = f_n + k_n \in \in F_n \oplus K_n$, так что последовательность $\{F_n \oplus K_n\}$ удовлетворяет условию 1'.

Условие 2'. Пусть $n_p \to x_{n_p} = f_{n_p} + k_{n_p}$ — последовательность, сходящаяся к $x \in E$, причем $f_{n_p} \in F_{n_p}$ и $k_{n_p} \in K_{n_p}$. В силу теоремы 1.4.1 компактные множества K_{n_p} содержатся в некотором фиксированном $K_0 \in \mathcal{K}$, и последовательность $\{k_{n_p}\}$ имеет подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке $k \in K$. Тогда точка $f = x - k$ будет предельной точкой для последовательности $\{f_{n_p}\}$, так что $f \in F$ в силу условия 2', примененного к $\{F_n\}$. Таким образом, $x = f + k \in F \oplus K$.

Предложение 1.5.2. *Отображения $(A, K) \to A \ominus K$, $(A, K) \to A_K$ и $(A, K) \to A^K$ из $\mathcal{F} \times \mathcal{K}'$ (соотв. $\mathcal{K} \times \mathcal{K}'$) в $\mathcal{F}$ (соотв. $\mathcal{K}$) полунепрерывны сверху.*

Доказательство. Пусть $\{A_n\}$ и $\{K_n\}$ — две последовательности, сходящиеся соответственно к A и K в $\mathcal{F}$ и $\mathcal{K}'$. Согласно предложению 1.2.4 отображение $(A, K) \to A \ominus K$ полунепрерывно сверху, если $A \ominus K \supset \overline{\lim}\,(A_n \ominus K_n)$. Пусть $n_k \to x_{n_k} \in A_{n_k} \ominus K_{n_k}$ — последовательность, сходящаяся к некоторой точке $x \in E$. Мы имеем $\check{K}_{n_k} \oplus \{x_{n_k}\} \subset A_{n_k}$, так что $\check{K} \oplus \{x\} \subset A$ в соответствии с предложением 1.5.1 и следствием 3 теоремы 1.2.2. Иначе говоря, $x \in A \ominus K$. Из предложения 1.2.3 вытекает теперь, что $\overline{\lim}\,(A_n \ominus K_n) \subset A \ominus K$. Аналогичным образом проводится доказательство и для случаев A_K и A^K.

Следствие. *Пусть A — замкнутое (соотв. компактное) множество, а $\{K_n\}$ — возрастающая последовательность в $\mathcal{K}'$. Тогда если $\overline{\bigcup K_n} = K \in \mathcal{K}$, то $A \ominus K_n \downarrow A \ominus K$ и $\lim (A \ominus K_n) = A \ominus K$ в $\mathcal{F}$ (соотв. в $\mathcal{K}$).*

Доказательство. В силу следствия 3 теоремы 1.4.1 $\lim K_n = K$ в $\mathcal{K}$, и из полунепрерывности сверху вытекает, что $A \ominus K \supset \supset \overline{\lim}\,(A \ominus K_n)$. Но из $A \ominus K_n \supset A \ominus K$ следует, что $A \ominus K \subset \subset \underline{\lim}\,(A \ominus K_n)$, так что $A \ominus K = \lim (A \ominus K_n)$. При этом $A \ominus K_n \downarrow A \ominus K$, так как последовательность $\{A \ominus K_n\}$ убывающая.

Выпуклость

В дальнейшем изложении, особенно в гл. 4—6, определяющую роль будут играть свойства, связанные с выпуклостью в эвклидовом пространстве $E = \mathbf{R}^d$. Приведем ряд предварительных результатов в этой связи. Если $A \in \mathcal{P}(E)$ — некоторое подмножество пространства $E = \mathbf{R}^d$, то *выпуклая оболочка* множества A определяется как множество точек вида $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, где n — целое число > 0, λ_i — действительные числа, заключенные между 0 и 1, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ и $x_i \in A$ для $i = 1, 2, \ldots, n$. Выпуклая оболочка множества A будет обозначаться далее через $C(A)$. Если множество F замкнуто (компактно), то $C(F)$ также замкнуто (компактно). Отметим также, что для любых $A, A' \in \mathcal{P}$

$$C(A \oplus A') = C(A) \oplus C(A'). \tag{1.5.9}$$

Предложение 1.5.3. *Пусть F — замкнутое, а B — ограниченное подмножество пространства E. Тогда $F^B \subset C(F)$. Если F к тому же и выпукло, то F пополнено по отношению к B. Если F и F' — два замкнутых выпуклых множества, таких, что $F \oplus B = F' \oplus B$, то $F = F'$.*

Доказательство. Если $F \in \mathcal{F}$, то $C(F)$ является пересечением полупространств, содержащих F. Пусть $x \notin C(F)$. Тогда существуют замкнутое полупространство $H \supset F$, такое, что $x \notin H$, и непересекающийся с H сдвиг B_y множества B, содержащий точку x. В соответствии с (1.5.8) отсюда вытекает, что $x \in (F^c)_B = (F^B)^c$, так что $F^B \subset C(F)$. Если F выпукло, то мы имеем также $C(F) = F \subset F^B$ и, таким образом, $F = F^B$. Если F и F' замкнуты и выпуклы, то в силу определения операций заполнения и пополнения из $F \oplus B = F' \oplus B$ вытекает, что $F^{\check{B}} = F'^{\check{B}}$. Отсюда в свою очередь следует, согласно предшествующим результатам, что $F = F'$.

Предложение 1.5.4. *Отображение $K \to C(K)$ непрерывно на $\mathcal{K}$. Отображение $F \to C(F)$ полунепрерывно снизу на $\mathcal{F}$.*

Доказательство. Пусть $\{F_n\}$ — последовательность, сходящаяся к F в $\mathcal{F}$ и x — точка, принадлежащая выпуклой оболочке $C(F)$, так что $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$, где $x_i \in F$, $\sum \lambda_i = 1$ и $\lambda_i \geqslant 0$. В соответствии с условием сходимости 1′ (теорема 1.2.2), примененным к последовательности $\{F_n\}$, для каждого $i = 1, 2, \ldots, k$

точка x_i является пределом некоторой последовательности $n \to x_n(i) \in F_n$. Поэтому в силу предложения 1.2.3 $x \in \underline{\lim}\, C(F_n)$ и $\lim C(F_n) \supset C(F)$. Отсюда, применяя утверждение b) предложения 1.2.4, получаем, что отображение $F \to C(F)$ полунепрерывно снизу на $\mathcal{F}$.

Пусть теперь $\{K_n\}$ — некоторая последовательность, сходящаяся в $\mathcal{K}$ к K, так что существует такое $K_0 \in \mathcal{K}$, что для любого $n > 0$ мы имеем $K_n \subset K_0$, а значит, $C(K_n) \subset C(K_0)$. Последовательность $\{C(K_n)\}$ удовлетворяет первому условию теоремы 1.4.1. Согласно первой части доказательства, $\underline{\lim}\, C(K_n) \supset$ $\supset C(K)$. Остается показать, что $\overline{\lim}\, C(K_n) \subset C(K)$. Пусть H — открытое полупространство, содержащее K. Тогда, в силу определения миопической топологии, для достаточно больших n имеют место соотношения $K_n \subset H$ и $C(K_n) \subset H$. Поэтому если x является предельной точкой для последовательности $n_k \to x_{n_k} \in C(K_{n_k})$, то $x \in \bar{H}$. Но $C(K)$ есть пересечение замкнутых полупространств $\bar{H}$, таких, что $H \supset K$. Отсюда вытекает, что $x \in C(K)$ и $\overline{\lim}\, C(K_n) \subset C(K)$, согласно утверждению b) предложения 1.2.3. Таким образом, отображение C непрерывно на $\mathcal{K}$.

Следствие. *Пространство $C(\mathcal{F})$ замкнутых выпуклых множеств замкнуто в $\mathcal{F}$. Пространство $C(\mathcal{K})$ компактных выпуклых множеств замкнуто в $\mathcal{K}$.*

Доказательство. Пусть $\{F_n\}$ — последовательность, сходящаяся к F в $\mathcal{F}$ и удовлетворяющая условию $F_n \in C(\mathcal{F})$, т. е. $F_n = C(F_n)$. Поскольку отображение C полунепрерывно снизу на $\mathcal{F}$, то $C(F) \subset \underline{\lim}\, C(F_n) = \lim F_n = F$ и, значит, $F = C(F)$, т. е. $F \in C(\mathcal{F})$. Таким образом, пространство $C(\mathcal{F})$ замкнуто. Доказательство для пространства $C(\mathcal{K})$ аналогично.

Компактные множества, безгранично делимые по отношению к операции $\oplus$

Гомотетии $(\lambda, B) \to \lambda B$ с $\lambda \geqslant 0$ очевидным образом удовлетворяют соотношению $\lambda B \oplus \mu B \supset (\lambda + \mu) B$. Если множество B выпукло, то это включение становится равенством, так что семейство $B_\lambda = \lambda B$ образует однопараметрическую полугруппу в $\mathcal{P}(E)$, т. е. $B_\lambda \oplus B_\mu = B_{\lambda+\mu}$, $\lambda, \mu \geqslant 0$. Более того, если B компактно, то эта полугруппа непрерывна в $\mathcal{K}$ в силу предложения 1.5.1. Покажем, что имеет место и обратное. Обозначим с этой целью через $A^{\oplus n}$ сумму Минковского n слагаемых, каждое из которых равно A. Будем говорить, что множество A

безгранично делимо относительно суммирования по Минковскому $\oplus$, если для любого целого $n > 0$ существует такое множество B_n, что $A = B_n^{\oplus n}$.

Теорема 1.5.1. *Компактное множество $A \in \mathcal{K}$ безгранично делимо относительно суммирования по Минковскому тогда и только тогда, когда оно выпукло.*

Доказательство. Если $A \in C(\mathcal{K})$, то, полагая $B_n = (1/n) A$, получаем $A = B_n^{\oplus n}$, так что A безгранично делимо. Обратно, предположим, что $A \in \mathcal{K}$ и для всех $n > 0$ существуют множества B_n, такие, что $A = B_n^{\oplus n}$. Поскольку множество A компактно, то B_n ограничено. Далее, заменяя, если надо, B_n на $\overline{B}_n$, можно считать, что $B_n \in \mathcal{K}$. (Такая замена возможна благодаря тому, что $\overline{B \oplus B'} = \overline{B} \oplus \overline{B}'$ для любых ограниченных множеств B и B'.) Очевидно, что $nB_n \subset A \in \mathcal{K}$. Поэтому в силу теоремы 1.4.1 существует подпоследовательность $\{n_k B_{n_k}\}$, сходящаяся в $\mathcal{K}$ к некоторому пределу B.

Покажем, что $C(A) = C(B)$. Для целых $n > 0$ и $k > 0$ имеют место включения $nB_n \subset A \subset B_k^{\oplus k} \subset kC(B_k)$, так что $nC(B_n) \subset \subset kC(B_k)$. Отсюда вытекает, что $nC(B_n) = kC(B_k) = C(A)$. Применяя утверждение 1.5.4, получаем, что $C(B) = \lim n_k C(B_{n_k}) = = C(A)$.

Докажем теперь, что $C(B) \subset A$. Пусть x — некоторая точка из $C(B)$, имеющая представление

$$x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i, \quad x_i \in B, \quad \lambda_i \geqslant 0, \quad \sum \lambda_i = 1.$$

Согласно условию сходимости 1′, примененному к последовательности $\{n_k B_{n_k}\}$, для каждого $i = 1, 2, \ldots, r$ существует последовательность $n_k \to y_{n_k}(i) \in n_k B_{n_k}$, удовлетворяющая условию $x_i = \lim y_{n_k}(i)$. Выбирая целые числа $N(i, k) \geqslant 0$ так, чтобы

$$\sum_{i=1}^{r} N(i, k) = n_k, \quad \lim_{k \to \infty} \frac{N(i, k)}{n_k} = \lambda_i,$$

и полагая $x_k = (1/n_k) \sum_{i=1}^{r} N(i, k)\, y_{n_k}(i)$, получаем, что $x_k \in B_{n_k}^{\oplus n_k} = A$ и $x = \lim x_k$. Таким образом, $x \in A$ и $C(B) \subset A$.

Соотношения $C(B) \subset A$ и $C(A) = C(B)$ очевидным образом дают соотношение $A = C(A)$, чем выпуклость множества A и доказана.

Следствие. *Для того чтобы семейство B_λ, $\lambda \geqslant 0$, в $\mathcal{K}'$ было однопараметрической полугруппой (т. е. $B_\lambda \oplus B_\mu = B_{\lambda+\mu}$, $\lambda, \mu \geqslant 0$), необходимо и достаточно, чтобы $B_\lambda = \lambda B$, где $B \in C(\mathcal{K}')$.*

Доказательство. Достаточность мы уже доказали. Докажем необходимость. Пусть семейство B_λ, $\lambda \geqslant 0$, образует полугруппу в $\mathcal{K}'$ Тогда для любого целого $n > 0$ множество B_λ представимо в виде $B_\lambda = (B_{\lambda/n})^{\oplus n}$ и в силу теоремы 1.5.1 $B_\lambda \in C(\mathcal{K})$. Далее, используя полугрупповое свойство, мы получаем, что $B_\lambda = nB_{\lambda/n} = (n/k) B_{\lambda k/n}$ при любых целых $n > 0$ и $k > 0$, откуда ввиду непрерывности отображения $\lambda \to B_\lambda$ следует, что $B_\lambda = \lambda B_1$.

Этот результат справедлив и при более слабом, чем непрерывность полугруппы B_λ, предположении (см. § 9.1). В гл. 9 нам понадобится следующий результат.

Предложение 1.5.5. *Для любого $A \in \mathcal{K}'$ последовательность $\{(1/n) A^{\oplus n}\}$ сходится в $\mathcal{K}$ к $C(A)$.*

Доказательство. Поскольку $(1/n) A^{\oplus n} \subset C(A)$, то в соответствии с теоремой 1.4.1 достаточно доказать сходимость в $\mathcal{F}$. Очевидно, что $\overline{\lim}(1/n) A^{\oplus n} \subset C(A)$, так что все, что надо, — это установить соотношение $\underline{\lim}(1/n) A^{\oplus n} \supset C(A)$. Пусть $x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i$ — представление некоторой точки $x \in C(A)$, в котором $x_i \in C(A)$, $\lambda_i \geqslant 0$, $\sum \lambda_i = 1$. Для любого $n \geqslant r$ существуют целые числа $N(n, i)$, удовлетворяющие условиям

$$\sum_{i=1}^{r} N(n, i) = n, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{N(n, i)}{n} = \lambda_i.$$

Полагая $y_n = \sum (N(n, i)/n) x_i$, имеем $y_n \in (1/n) A^{\oplus n}$ и $x = \lim y_n$, так что $x \in \underline{\lim}(1/n) A^{\oplus n}$. Отсюда вытекает, что $C(A) \subset \underline{\lim}(1/n) A^{\oplus n}$. Тем самым наше утверждение доказано.

Гранулометрии

Пусть B_λ, $\lambda \geqslant 0$, — однопараметрическая непрерывная полугруппа на $\mathcal{K}'$, т. е. (в соответствии со следствием теоремы 1.5.1) $B_\lambda = \lambda B$ для некоторого фиксированного $B \in C(\mathcal{K}')$. Для любых $A \in \mathcal{P}(E)$ и $\lambda > 0$ положим по определению

$$\psi_\lambda(A) = A_{\lambda B} = \bigcup \{\lambda B_x,\ x \in E,\ \lambda B_x \subset A\}.$$

Отображение $\lambda \to \psi_\lambda(A)$ будем называть *гранулометрией* множества A относительно компактного выпуклого множества B. (Более общая теория гранулометрий будет представлена в гл. 7.)

Отображение ψ_λ *обладает следующими свойствами:*

1. $\psi_0(A) = A$ *и из* $\lambda \geqslant \mu$ *вытекает, что* $\psi_\lambda(A) \subset \psi_\mu(A)$

2. *Для любых* $\lambda \geqslant 0$ *и* $A \subset A'$ *имеет место включение* $\psi_\lambda(A) \subset \psi_\lambda(A')$.

3. *Для любых* $\lambda \geqslant \mu \geqslant 0$ *имеет место соотношение* $\psi_\lambda \circ \psi_\mu = \psi_\mu \circ \psi_\lambda = \psi_\lambda$.

Доказательство. Свойство 1 является следствием выпуклости множества B, а свойство 2 справедливо ввиду того, что заполнение посредством λB — возрастающая операция. Остается доказать свойство 3. Положим $\lambda = \mu + \nu$, $\nu \geqslant 0$. Прежде всего, $\psi_\lambda(A) = C \oplus \mu B$, где $C = (A \ominus \lambda \check{B}) \oplus \nu B$. Поэтому $\psi_\lambda(A)$ заполнимо относительно μB, так что $\psi_\mu \circ \psi_\lambda = \psi_\lambda$. Но операция заполнения идемпотентна. Поэтому $\psi_\lambda \circ \psi_\mu \circ \psi_\lambda = \psi_\lambda$. В силу же антиэкстенсивности этой операции

$$\psi_\lambda \circ \psi_\mu(A) \supset \psi_\lambda \circ \psi_\mu \circ \psi_\lambda(A) = \psi_\lambda(A).$$

Наконец, $\psi_\lambda \circ \psi_\mu(A) \subset \psi_\lambda(A)$, поскольку заполнение — возрастающая операция. Отсюда вытекает, что $\psi_\lambda \circ \psi_\mu = \psi_\lambda$ и $\psi_\lambda \subset \psi_\mu$.

По отношению к операциям сдвига $A \to A_x$ и положительным гомотетиям гранулометрия ψ_λ обладает следующими свойствами (которые приведут нас в гл. 7 к общему определению *эвклидовых гранулометрий*):

4. $\psi_\lambda(A_x) = \psi_\lambda(A) \oplus \{x\}$.

5. $\psi_\lambda(\mu A) = \mu \psi_{\lambda/\mu}(A)$.

Из предложения 1.5.2 и из непрерывности гомотетий следует, что отображение $(\lambda, F) \to \psi_\lambda(F)$ из $\mathbf{R}_+ \times \mathcal{F}$ в $\mathcal{F}$ полунепрерывно сверху. Аналогично отображение $(\lambda, G) \to \psi_\lambda(G)$ из $\mathbf{R}_+ \times \mathcal{G}$ в $\mathcal{G}$ полунепрерывно снизу. Далее, отображение ψ_λ является убывающим по λ, откуда вытекают такие свойства:

6. *Если* $F \in \mathcal{F}$ *и* $\lambda \uparrow \mu$, *то* $\psi_\lambda(F) \downarrow \psi_\mu(F)$ *и* $\psi_\mu(F) = \lim \psi_\lambda(F)$.

7. *Если* $G \in \mathcal{G}$ *и* $\lambda \downarrow \mu$, *то* $\psi_\lambda(G) \uparrow \psi_\mu(G)$ и $\psi_\mu(G) = \lim \psi_\lambda(G)$.

Пусть теперь V — некоторая положительная мера на E, причем $V(F) < \infty$ или $V(G) < \infty$. В качестве такой меры можно взять, например, меру Лебега, если замкнутое множество F или открытое множество G имеют конечный объем. Отображение $\lambda \to V(\psi_\lambda(F))$ является убывающим и непрерывным слева, если $F \in \mathcal{F}$. Отображение $\lambda \to V(\psi_\lambda(G))$ будет убывающим и непрерывным справа, если $G \in \mathcal{G}$. По определению, $V(\psi_\lambda(F))$ есть объем, занимаемый сдвигами λB, содержащимися в F, так что функция $\lambda \to V(\psi_\lambda(F))$ представляет в определенном смысле „распределение размера“ (или гранулометрию) замкнутого множества F по мере V.

Гранулометрии множества A относительно множества $B \in C(\mathcal{K}')$ можно также придать локальный смысл, полагая для любого $x \in A$

$$\Lambda_A(x) = \sup\{\lambda: \exists y \in E, x \in (\lambda B)_y \subset A\} \tag{1.5.10}$$

[и $\Lambda_A(x) = 0$, если $x \notin A$]. Здесь $\Lambda_A(x)$ представляет собой размер множества A, измеренный в точке x, по отношению к стандартному множеству B. Если $A \in \mathcal{F}$, то верхняя грань достигается [т. е. $x \in \psi_{\Lambda_A(x)}(A)$], так что на самом деле существует сдвиг множества $\Lambda_A(x) B$, содержащий точку x и содержащийся в A. Напротив, если $A \in \mathcal{G}$, то верхняя грань не достигается. Более точная формулировка такова.

Предложение 1.5.6. *Отображение $(F, x) \to \Lambda_F(x)$ является полунепрерывным сверху отображением из $\mathcal{F} \times E$ в $\mathbf{R}_+$, и $\psi_\lambda(F) = \{x: \Lambda_F(x) \geqslant \lambda\}$ для любого $F \in \mathcal{F}$. Отображение $(G, x) \to \Lambda_G(x)$ является полунепрерывным снизу отображением из $\mathcal{G} \times E$ в $\mathbf{R}_+$ и $\psi_\lambda(G) = \{x: \Lambda_G(x) > \lambda\}$ для любого $G \in \mathcal{G}$.*

Доказательство. Соотношение $\psi_\lambda(F) = \{x: \Lambda_F(x) \geqslant \lambda\}$ выполняется благодаря тому, что в (1.5.10) достигается верхняя грань. Поскольку отображение $F \to \psi_\lambda(F)$ полунепрерывно сверху на $\mathcal{F}$, то множество $\{(F, x), \Lambda_F(x) \geqslant \lambda\} = \{(F, x), x \in \psi_\lambda(F)\}$ замкнуто в $\mathcal{F} \times E$, так что отображение $(F, x) \to \Lambda_F(x)$ полунепрерывно сверху на $\mathcal{F} \times E$. Для случая пространства $\mathcal{G}$ доказательство аналогично.

Наконец, отметим следующий результат, который будет использован в гл. 6.

Предложение 1.5.7. *Пусть K — выпуклое компактное множество с непустой внутренностью $\mathring{K}$, а $F \in \mathcal{F}$. Тогда*

$$C(F) = \overline{\bigcup_{\rho > 0} F^{\rho K}} = \lim_{\rho \to \infty} F^{\rho K}.$$

Предел здесь берется в $\mathcal{F}$ (или в $\mathcal{K}$, если F компактно).

Доказательство. В силу предложения 1.5.3 имеем $F^{\rho K} \subset C(F)$. Положим $F' = \overline{\bigcup F^{\rho K}}$. Это предел в $\mathcal{F}$ возрастающего семейства $F^{\rho K}$. Ясно, что $F' \subset C(F)$. Если $F \in \mathcal{K}$, то $C(F)$ компактно и F' является пределом возрастающего семейства $F^{\rho K}$ также и в $\mathcal{K}$. Остается показать, что $F' \supset C(F)$. Пусть x — некоторая точка, не принадлежащая F', и V — компактная окрестность точки x, не пересекающаяся с F'. Мы можем, очевидно, предположить, что $0 \in \mathring{K}$, и взять в качестве V сдвиг $(\varepsilon K)_x$ некоторой гомотетии K. Для любого $\rho > 0$ выполняется соотношение $(\varepsilon K)_x \subset (F^c \ominus \rho \check{K}) \oplus \rho K$, откуда следует, что $x \in (F^c \ominus \rho \check{K}) \oplus (\rho - \varepsilon) K$ для $\rho \geqslant \varepsilon$. Подставляя теперь $\rho + \varepsilon$ вместо ρ, получаем, что $x \in (F^c \ominus (\rho + \varepsilon) \check{K}) \oplus \rho K = (F^c \ominus \varepsilon \check{K})_{\rho K}$. Пусть $\{\rho_n\}$ — последовательность в $\mathbf{R}_+$, такая, что $\rho_n \uparrow \infty$. Для любого $n > 0$ существует такая точка $y_n \in E$, что $x \in (\rho_n K)_{y_n} \subset F^c \ominus \varepsilon \check{K}$. Отсюда вытекает, что $x \in (\varepsilon \mathring{K})_x \subset ((\rho_n + \varepsilon) \mathring{K})_{y_n} \subset F^c$. Таким образом, последовательность $n \to \{(\rho_n + \varepsilon) \mathring{K}\}$ имеет в $\mathcal{G}$ предельную точку, удовлетворяющую соотношению $x \in (\varepsilon \mathring{K})_x \subset G \subset F^c$. Но, как нетрудно убедиться, множество G необходимо является открытым полупространством H, так что $x \in H$ и $F \subset H^c$, т. е. $C(F) \subset H^c$ и $x \notin C(F)$. Значит, $F' \supset C(F)$.

Следствие. *Пусть K — непустое компактное множество, а B_r — шар с центром в нуле и радиусом $r \geqslant 0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ соотношение $K \oplus B_{r+\varepsilon} \supset C(K) \oplus B_r$ справедливо при всех достаточно больших r.*

Доказательство. В соответствии с предложением 1.5.7, $C(K) = \lim K^{B_r}$ в $\mathcal{K}$ при $r \uparrow \infty$. Согласно (1.4.1), отсюда вытекает, что $C(K) \subset K^{B_r} \oplus B_\varepsilon$ для всех достаточно больших r, а тогда из $K^{B_r} \oplus B_\varepsilon \subset (K \oplus B_{r+\varepsilon}) \ominus B_r$ следует, что $C(K) \oplus B_r \subset (K \oplus B_{r+\varepsilon})_{B_r} \subset K \oplus B_{r+\varepsilon}$.

ГЛАВА 2

СЛУЧАЙНЫЕ ЗАМКНУТЫЕ МНОЖЕСТВА (СЗМ)

Приводимое ниже в § 2.1 определение случайного замкнутого множества принадлежит Шоке (1953/54). Ему же принадлежит характеризация весьма важных функционалов T („сопровождающих" функционалов случайных замкнутых множеств) — аналогов функций распределения для обычных случайных величин: класс таких функционалов T представляет собой класс альтернирующих емкостей Шоке бесконечного порядка (§ 2.2). Что касается общего понятия случайного множества, равно как и обобщенного варианта теоремы Шоке, то читатель может обратиться по этим вопросам к статье Д. Кендалла (1973). В § 2.3 вводится понятие условного замкнутого случайного множества. В § 2.4 и 2.5 изучаются вопросы, связанные с сепарабельностью, P-непрерывностью, п. н.-непрерывностью и измеримостью. Наконец, в последнем параграфе главы рассматриваются специальные вопросы, важные для практических приложений теории (функционалы P и Q, ковариация, линейные гранулометрии).

2.1. ФУНКЦИОНАЛ T, СООТВЕТСТВУЮЩИЙ СЛУЧАЙНОМУ ЗАМКНУТОМУ МНОЖЕСТВУ

Пусть E — некоторое ЛКС-пространство и $\mathscr{F}=\mathscr{F}(E)$ — пространство его замкнутых подмножеств, топологизированное, как указано в гл. 1. С топологией $\mathscr{T}_f$ на $\mathscr{F}$ связана σ-алгебра σ_f борелевских множеств, порождаемая этой топологией, т. е. σ-алгебра, порожденная классами $\mathscr{F}^K$, $K\in\mathscr{K}$, и $\mathscr{F}_G$, $G\in\mathscr{G}$. В действительности σ_f порождается даже любым одним из этих двух классов, поскольку если $\{K_n\}$ — такая последовательность в $\mathscr{K}$, для которой $K_n\uparrow G\in\mathscr{G}$, то и $\mathscr{F}_{K_n}\uparrow\mathscr{F}_G$ в $\mathscr{P}(\mathscr{F})$; обратно, если $\{G_n\}$ — фундаментальная счетная система открытых окрестностей множества $K\in\mathscr{K}$, такая, что $G_n\downarrow K$, то $\mathscr{F}_{G_n}\downarrow\mathscr{F}_K$ в силу (1.1.2).

Мы можем определить теперь *случайное замкнутое множество* (СЗМ) как измеримое отображение A некоторого вероятностного пространства $(\Omega,\mathscr{A},P')$ в измеримое пространство $(\mathscr{F},\sigma_f)$. Пусть P — вероятностная мера, индуцируемая на σ_f, т. е. $P\{\mathscr{V}\} = P'(A^{-1}(\mathscr{V}))$ для всех $\mathscr{V} \in \sigma_f$. СЗМ A можно также определить, непосредственно задав на измеримом пространстве $(\mathscr{F}, \sigma_f)$ вероятностную меру[1] P: СЗМ A будет при этом тождественным отображением пространства $\mathscr{F}$ на себя (т. е. $A(F) = F$). В этом случае мы будем говорить, что A является *каноническим* СЗМ на вероятностном пространстве $(\mathscr{F}, \sigma_f, P)$.

Аналогичным образом можно определить семейство A_i, $i \in I$, случайных замкнутых множеств на соответствующем произведении пространств. В § 2.4 мы укажем связь между понятием СЗМ и более общим понятием случайного (не обязательно замкнутого) множества в $\mathscr{P}(E)$.

Если Ω — топологическое пространство, $\mathscr{A}$ — совокупность его борелевских подмножеств, а α — полунепрерывное сверху или снизу отображение из Ω в $\mathscr{F}$, то α измеримо и определяет СЗМ, если на $\mathscr{A}$ определена некоторая вероятность P', поскольку σ_f, как указано выше, порождается уже одним классом $\mathscr{F}^K$, $K \in \mathscr{K}$, либо же одним классом $\mathscr{F}_G$, $G \in \mathscr{G}$. Поэтому в силу результатов гл. 1, если A и A' — СЗМ, то таковы же и $A \cup A'$, $A \cap A'$, $\complement \mathring{A}$ и $\overline{\mathring{A}}$, а также и $\partial A = A \cap \complement \mathring{A}$. Если пространство E эвклидово, а K — непустое компактное множество, то $A \oplus K$, $A \ominus K$, A^K, A_K и т. д. тоже будут СЗМ.

Хорошо известно, что обычная случайная величина полностью характеризуется заданием ее функции распределения. В случае СЗМ имеется весьма похожее понятие. Пусть A — каноническое СЗМ, соответствующее вероятности P на σ_f. Для любого $K \in \mathscr{K}$ и любого $G \in \mathscr{G}$ положим

$$T(K) = P(\mathscr{F}_K) = P(A \cap K \neq \varnothing),$$
$$T(G) = P(\mathscr{F}_G) = P(A \cap G \neq \varnothing).$$

Если так определенная функция T задана на $\mathscr{K}$ (или на $\mathscr{G}$), то вероятность P на σ_f полностью определена. Было бы нетрудно дать прямое доказательство этого результата. Однако проще получить его как непосредственное следствие из теоремы Шоке, которую мы докажем в следующем параграфе.

Произвольная функция на $\mathscr{K}$ или на $\mathscr{G}$ может и не быть связанной ни с каким СЗМ. Ясно, что функционал T, соответствующий какому-либо СЗМ[2], должен быть *возрастающим* и удовлетворять условию $T(\varnothing) = 0$, поскольку никакое замкнутое

[1] В дальнейшем почти всегда вместо термина „вероятностная мера" употребляется термин „вероятность"; это не может вызвать путаницы. — *Прим. ред.*

[2] Мы будем иногда называть такие функционалы *сопровождающими*. — *Прим. перев.*

множество не пересекается с пустым множеством. Кроме того, должно выполняться соотношение $0 \leqslant T \leqslant 1$. Если $G \in \mathscr{G}$ и $K \in \mathscr{K}$, то из $K \subset G$ вытекает, что $T(K) \leqslant T(G)$. Если $K_n \uparrow G$, то и $\mathscr{F}_{K_n} \uparrow \mathscr{F}_G$ в $\mathscr{P}(\mathscr{F})$, так что $T(K_n) \uparrow T(G)$ (непрерывность относительно монотонных последовательностей). Аналогично, если $\{G_n\}$ — счетная фундаментальная система открытых окрестностей компактного множества K, то из $G_n \downarrow K$ вытекает, как мы видели ранее, что $\mathscr{F}_{G_n} \downarrow \mathscr{F}_K$, так что $T(G_n) \downarrow T(K)$. Функционал T должен, таким образом, удовлетворять условиям

$$\begin{aligned} T(G) &= \sup\{T(K),\ K \in \mathscr{K},\ K \subset G\} \quad (G \in \mathscr{G}), \\ T(K) &= \inf\{T(G),\ G \in \mathscr{G},\ G \supset K\} \quad (K \in \mathscr{K}). \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

В соответствии с предложением 1.4.3 это означает, что функционал T полунепрерывен сверху на $\mathscr{K}$ и полунепрерывен снизу на $\mathscr{G}$. Согласно следствию 5 предложения 1.2.4, предложению 1.3.1 и предложению 1.4.2, эти условия полунепрерывности T сверху и снизу равносильны соответственно следующим двум условиям непрерывности относительно монотонных последовательностей:

$$\begin{aligned} &K_n \downarrow K \text{ в } \mathscr{K} \Rightarrow T(K_n) \downarrow T(K), \\ &G_n \uparrow G \text{ в } \mathscr{G} \Rightarrow T(G_n) \uparrow T(G). \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

Пусть теперь $K, K_1, K_2, \ldots$ — компактные множества. Определим функции $S_1, S_2, \ldots$ при помощи следующей реккурентной процедуры:

$$\begin{aligned} S_1(K; K_1) &= T(K \cup K_1) - T(K), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ S_n(K; K_1, \ldots, K_n) &= S_{n-1}(K; K_1, \ldots, K_{n-1}) - \\ &\quad - S_{n-1}(K \cup K_n; K_1, \ldots, K_{n-1}). \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

Очевидно, что $S_n(K; K_1, \ldots, K_n)$ есть вероятность $P\left(\mathscr{F}^K_{K_1, \ldots, K_n}\right)$ того, что СЗМ A не пересекается с K и имеет непустые пересечения с $K_1, K_2, \ldots, K_n$. Таким образом, функции S_n должны при любых $K, K_1, \ldots, K_n \in \mathscr{K}$ принимать неотрицательные значения. Аналогичное утверждение справедливо для случая, когда мы исходим из открытых множеств $G, G_1, G_2, \ldots$.

Мы покажем, что при указанных условиях T является емкостью. Напомним сначала общее определение (см., например, Шоке, 1953/54, или Мейер, 1966). Если E — локально компактное пространство, то *емкостью* на E называется всякое отображение T из $\mathscr{P}(E)$ в расширенную прямую $[-\infty, +\infty]$, удовлетворяющее следующим трем условиям:

1. $A,\ A' \in \mathscr{P}(E)$ и $A \subset A' \Rightarrow T(A) \leqslant T(A')$;
2. $A_n \uparrow A$ в $\mathscr{P}(E) \Rightarrow T(A_n) \uparrow T(A)$;
3. $K_n \downarrow K$ в $\mathscr{K}(E) \Rightarrow T(K_n) \downarrow T(K)$.

В случае когда E является ЛКС-пространством (что всегда предполагается в этой книге), условие 3 эквивалентно полунепрерывности сверху функционала T на $\mathscr{K}$.

Подмножество $B \subset E$ называется *емким*, если справедлива следующая аппроксимационная формула:

$$T(B) = \sup\{T(K),\ K \in \mathscr{K},\ K \subset B\}. \tag{2.1.4}$$

Можно показать (см., например, Мейер, 1966), что в случае, когда E является ЛКС-пространством, всякое борелевское множество в E емко.

Пусть теперь T — полунепрерывная сверху функция на $\mathscr{K}$, такая, что определяемые соотношениями (2.1.3) функции S_n неотрицательны для всех $n > 0$. Положим $T^*(G) = \sup\{T(K),\ K \in \mathscr{K},\ K \subset G\}$ для $G \in \mathscr{G}$ и $T^*(A) = \inf\{T^*(G),\ G \in \mathscr{G},\ G \supset A\}$ для $A \in \mathscr{P}(E)$. Можно показать, что функция T^* на $\mathscr{P}(E)$ удовлетворяет указанным выше условиям 1—3, так что T^* является емкостью. Далее, в силу предложения 1.4.3, $T^*(K) = T(K)$ для $K \in \mathscr{K}$, т. е. $T^* = T$ на $\mathscr{K}$. Поэтому мы будем вместо $T^*(A)$ писать $T(A)$ и для всех $A \in \mathscr{P}(E)$. Можно проверить, что функции $S_n(A;\ A_1, \ldots, A_n)$, определенные посредством соотношений (2.1.3), остаются неотрицательными при любых $A,\ A_1, \ldots \in \mathscr{P}(E)$. Так определенную емкость T называют *альтернирующей емкостью Шоке бесконечного порядка* или для краткости просто *емкостью Шоке*.

Мы получим очень схожую с этой конструкцию, если будем исходить из функции T, полунепрерывной снизу на $\mathscr{G}$ и такой, что функции S_n из (2.1.3) неотрицательны. Функции S_n остаются неотрицательными при преобразованиях (2.1.1), поэтому эти две точки зрения совершенно равносильны.

Пусть теперь B — борелевское или, более общим образом, T-емкое подмножество в E. Вовсе не очевидно, что $\mathscr{F}_B$ принадлежит σ_f, так что вероятность $P(\mathscr{F}_B)$ может быть и не определена и соотношение $T(B) = P(\mathscr{F}_B)$ может не иметь смысла. Тем не менее, согласно определению емкости Шоке, существуют убывающая последовательность $\{G_n\} \subset \mathscr{G}$, удовлетворяющая соотношениям $G_n \supset B$ и $T(G_n) \downarrow T(B)$, а также (согласно (2.1.4)) возрастающая последовательность $\{K_n\} \subset \mathscr{K}$, удовлетворяющая соотношениям $K_n \subset B$ и $T(K_n) \uparrow T(B)$. Положим $\mathscr{V} = \bigcup \mathscr{F}_{K_n} = \mathscr{F}_{\cup K_n}$ и $\mathscr{V}' = \bigcap \mathscr{F}_{G_n}$. Тогда $\mathscr{V} \in \sigma_f$, $\mathscr{V}' \in \sigma_f$, $\mathscr{V} \subsetneq \mathscr{F}_B \subset \mathscr{V}'$ и $P(\mathscr{V}) = T(B) = P(\mathscr{V}')$. Отсюда вытекает, что $\mathscr{F}_B$

измеримо относительно пополнения $(\mathcal{F}, \tilde{\sigma}_f, \tilde{P})$ вероятностного пространства $(\mathcal{F}, \sigma_f, P)$ и $\tilde{P}(\mathcal{F}_B) = T(B)$.

В соответствии с изложенным всякий функционал T, являющийся сопровождающим для некоторого СЗМ, будет емкостью Шоке, причем $T(\varnothing) = 0$ и $0 \leqslant T \leqslant 1$. Мы увидим далее, что верно и обратное.

2.2. ТЕОРЕМА ШОКЕ

Приводимая ниже теорема была доказана Шоке с привлечением теории интегральных представлений на выпуклых конусах. Мы дадим здесь чисто вероятностное доказательство.

Теорема 2.2.1 (Шоке). *Пусть E — некоторое ЛКС-пространство, а T — функция, определенная на $\mathcal{K}(E)$ (соотв. на $\mathcal{G}(E)$). Тогда (необходимо единственная) вероятность P на σ_f, удовлетворяющая условию $P(\mathcal{F}_K) = T(K)$ для $K \in \mathcal{K}$ (соотв. условию $P(\mathcal{F}_G) = T(G)$ для $G \in \mathcal{G}$) существует в том и только в том случае, если T является емкостью Шоке, для которой $0 \leqslant T \leqslant 1$ и $T(\varnothing) = 0$.*

Напомним, что утверждение „T является емкостью Шоке" означает, что выполнены следующие два условия:

1. Функции S_n из (2.1.3) принимают неотрицательные значения при всех $K, K_1, \ldots \in \mathcal{K}$ $(G, G_1, \ldots \in \mathcal{G})$.

2. Функционал T полунепрерывен сверху на $\mathcal{K}$ (полунепрерывен снизу на $\mathcal{G}$), или, что равносильно, из соотношения $K_n \downarrow K$ в $\mathcal{K}$ вытекает соотношение $T(K_n) \downarrow T(K)$ [соотв. из $G_n \uparrow G$ в $\mathcal{G}$ вытекает, что $T(G_n) \uparrow T(G)$].

Часть „только если" теоремы Шоке была доказана в предыдущем параграфе. Что касается части „если", то здесь достаточно доказать утверждение, касающееся пространства $\mathcal{K}$, поскольку при преобразовании (2.1.1) полунепрерывные сверху функции на $\mathcal{K}$ преобразуются в полунепрерывные снизу функции на $\mathcal{G}$, а функции S_n остаются неотрицательными. Мы начнем доказательство со следующих двух лемм.

Лемма 2.2.1. *Пусть $\mathcal{V}$ — класс подмножеств в E, содержащий пустое множество $\varnothing$ и замкнутый относительно конечных объединений, а $\mathcal{S}$ — замкнутый относительно конечных пересечений класс, порожденный в $\mathcal{P}(\mathcal{F})$ классами $\mathcal{F}_V$, $V \in \mathcal{V}$ и $\mathcal{F}^V$, $V \in \mathcal{V}$. Тогда $\mathcal{S}$ является полуалгеброй и любое непустое множество $S \in \mathcal{S}$ представимо в виде $S = \mathcal{F}^V_{V_1, \ldots, V_n}$, где $n \geqslant 0$ — некоторое целое число, а подмножества $V, V_1, \ldots, V_n \in \mathcal{V}$ таковы, что $V_i \not\subset V \cup V$ для $i \neq j$. Такое представление назы-*

вается *редуцированным. Если $\mathscr{F}^{V'}_{V'_1, \ldots, V'_k}$ — другое редуцированное представление множества S, то $V = V'$ и существует такая перестановка $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ чисел $1, 2, \ldots, n$, что $V_j \cup V = V'_{i_j} \cup V$ для $j = 1, 2, \ldots, n$.*

Доказательство. Напомним, что класс $\mathscr{S}$ называется *полуалгеброй*, если он замкнут относительно конечных пересечений, $\varnothing \in \mathscr{S}$ и дополнение любого множества $S \in \mathscr{S}$ является конечным объединением непересекающихся множеств из $\mathscr{S}$. Класс $\mathscr{S}$, фигурирующий в утверждении леммы, замкнут относительно конечных пересечений по построению. Далее, $\varnothing = \mathscr{F}_\varnothing \in \mathscr{S}$, поскольку $\varnothing \in \mathscr{V}$. Если $S = \mathscr{F}^V_{V_1, \ldots, V_n}$, то дополнительным к нему будет множество

$$S^c = \mathscr{F}_V \cup \mathscr{F}^{V \cup V_1} \cup \mathscr{F}^{V \cup V_2}_{V_1} \cup \ldots \cup \mathscr{F}^{V \cup V_n}_{V_1, V_2, \ldots, V_{n-1}}.$$

Таким образом, класс $\mathscr{S}$ является полуалгеброй.

Пусть $S = \mathscr{F}^V_{V_1, \ldots, V_n}$ — непустой элемент класса $\mathscr{S}$. Если для каких-нибудь двух индексов i и j, $i \neq j$, имеет место включение $V_i \subset V \cup V_j$, то множество V_j в представлении $\mathscr{F}^V_{V_1, \ldots, V_n}$ излишне и может быть устранено. Итак, редуцированное представление существует.

Пусть $\mathscr{F}^V_{V_1, \ldots, V_n}$ и $\mathscr{F}^{V'}_{V'_1, \ldots, V'_k}$ — два редуцированных представления множества $S \in \mathscr{S}$, $S \neq \varnothing$. Докажем, что в этом случае $V = V'$. Допустим, что существует точка $x \in V' \cap V^c$. Так как множество S непусто, то $V'_j \not\subset V'$ для $j = 1, 2, \ldots, k$ и существует k точек $x_1, \ldots, x_k$, таких, что $x_j \in V'_j$, $x_j \notin V'$, и

$$\{x_1, \ldots, x_k\} \in \mathscr{F}^{V'}_{V'_1, \ldots, V'_k} = S = \mathscr{F}^V_{V_1, \ldots, V_n}.$$

Но из того, что $x \notin V$, вытекает, что $\{x, x_1, \ldots, x_k\} \in \mathscr{F}^V_{V_1, \ldots, V_n}$, а из $x \in V'$ вытекает, что $\{x, x_1, \ldots, x_k\} \notin \mathscr{F}^{V'}_{V'_1, \ldots, V'_k}$. Полученное противоречие показывает, что в действительности $V = V'$.

Для $i = 1, 2, \ldots, n-1$ мы имеем $V_i \not\subset V_n \cup V$, поскольку наши представления редуцированные. Пусть теперь $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ — такие $n-1$ точек, для которых $y_i \in V_i \cap V_n^c \cap V^c$, и $y \in V_n \cap V^c$. Ввиду того что $\{y_1, \ldots, y_{n-1}\} \notin S$ и $\{y, y_1, \ldots, y_{n-1}\} \in S$, найдется такой индекс j_n $(0 < j_n \leqslant k)$, что $y \in V'_{j_n}$ и $y_i \notin V'_{j_n}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Пусть y' — какая-нибудь другая точка в $V_n \cap V^c$. Тогда тем же самым образом мы получаем, что $y' \in V'_{j_n}$. Отсюда вытекает, что $V_n \cap V^c \subset V'_{j_n}$, т. е. $V_n \subset V \cup V'_{j_n}$.

Снова тем же самым образом получаем, что существует индекс i_n $(0 < i_n \leqslant n)$, такой, что $V'_{i_n} \cap V'^c = V'_{i_n} \cap V^c \subset V_{i_n}$. Если бы $i_n \neq n$, то мы имели бы $V_n \subset V_{i_n} \cup V$. Значит, $i_n = n$ и $V_n \cap V^c = V'_{i_n} \cap V^c$. Повторяя это доказательство для каждого i, мы и получим утверждение леммы.

Лемма 2.2.2. *При тех же обозначениях, что и в лемме 2.2.1, пусть T — функция на $\mathscr{V}$, для которой $T(\varnothing) = 0$, $0 \leqslant T \leqslant 1$, а функции S_n, определенные посредством соотношений*

$$S_0(V) = 1 - T(V),$$
$$\dots\dots\dots \tag{a}$$
$$S_n(V; V_1, \dots, V_n) = S_{n-1}(V; V_1, \dots, V_{n-1}) - S_{n-1}(V \cup V_n; V_1 \dots, V_{n-1}),$$

принимают неотрицательные значения для всех целых $n \geqslant 0$ и $V, V_1, V_2, \ldots \in \mathscr{V}$. Тогда существует единственное аддитивное отображение из $\mathscr{S}$ в $[0, 1]$, такое, что $P(\varnothing) = 0$, $P(\mathscr{F}_V) = T(V)$ для $V \in \mathscr{V}$; оно определяется формулой

$$P\left(\mathscr{F}^V_{V_1, \dots, V_n}\right) = S_n(V; V_1, \dots, V_n). \tag{b}$$

Доказательство. Прежде всего мы должны убедиться в том, что соотношение (b) действительно определяет некоторую функцию на $\mathscr{S}$, т. е. что из $\mathscr{F}^V_{V_1, \dots, V_n} = \mathscr{F}^{V'}_{V'_1, \dots, V'_k}$ вытекает, что $S_n(V; V_1, \dots, V_n) = S_k(V'; V'_1, \dots, V'_k)$. Пусть $S \in \mathscr{S}$ — элемент класса $\mathscr{S}$, допускающий оба указанных представления. Если $S = \varnothing$, то $V_i \subset V$ и $V'_j \subset V'$ для некоторых i и j $(0 < i \leqslant n$, $0 < j \leqslant k)$. Но как легко показать при помощи рекуррентной процедуры, из $V_i \subset V$ вытекает, что $S_n(V; V_1, \dots, V_n) = 0$, так что мы получаем требуемое равенство $S_n(V; V_1, \dots, V_n) = S_k(V'; V'_1, \dots, V'_k)$.

Предположим теперь, что $S \neq \varnothing$. Мы можем привести представление $\mathscr{F}^V_{V_1, \dots, V_n}$ к одной из его редуцированных форм без изменения величины $S_n(V; V_1, \dots, V_n)$. Действительно, если, к примеру, $V_1 \subset V \cup V_n$, т. е. $\mathscr{F}^V_{V_1, \dots, V_n} = \mathscr{F}^V_{V_1, \dots, V_{n-1}}$, то из соотношений (a) вытекает, что также и $S_n(V; V_1, \dots, V_n) = S_{n-1}(V; V_1, \dots, V_{n-1})$. Таким образом, мы можем считать, что указанные два представления множества S являются редуцированными. В силу леммы 2.2.1, $V = V'$ и $k = n$. Поэтому мы можем, произведя, если надо, перестановку индексов i, не меняющую величины S_n, предположить также, что $V_i \cup V = V'_i \cup V$, $i = 1, 2, \dots, n$. Легко проверяется, что из (a) вытекает соотношение $S_n(V; V_1, \dots, V_n) = S_n(V; V \cup V_1, \dots, V \cup V_n)$. Таким образом, $S_n(V; V_1, \dots, V_n) = S_n(V; V'_1, \dots, V'_n)$ и соотношение (b) действительно определяет некоторую функцию P на $\mathcal{S}$.

Эта функция P неотрицательна на $\mathcal{S}$, поскольку неотрицательны S_n, и удовлетворяет условию $P(\varnothing) = P(\mathcal{F}_\varnothing) = T(\varnothing) = 0$. В силу (a) и того, что $S_n \geqslant 0$, мы также имеем

$$0 \leqslant P\left(\mathcal{F}^V_{V_1, \ldots, V_n}\right) \leqslant P\left(\mathcal{F}^V_{V_1, \ldots, V_{n-1}}\right) \leqslant \ldots \leqslant P(\mathcal{F}^V) \leqslant 1.$$

Таким образом, P является отображением из $\mathcal{S}$ в $[0, 1]$.

Остается показать, что отображение P *аддитивно* на $\mathcal{S}$. Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}'$ — два непустых элемента класса $\mathcal{S}$, допускающие редуцированные представления

$$\mathcal{A} = \mathcal{F}^V_{V_1, \ldots, V_n}, \quad \mathcal{A}' = \mathcal{F}^{V'}_{V'_1, \ldots, V'_k}.$$

Нам надо доказать, что из условий $\mathcal{A} \cap \mathcal{A}' = \varnothing$ и $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}' \in \mathcal{S}$ вытекает, что $P(\mathcal{A} \cup \mathcal{A}') = P(\mathcal{A}) + P(\mathcal{A}')$. Очевидно, что

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{A}' = \mathcal{F}^{V \cup V'}_{V_1, \ldots, V_n, V'_1, \ldots, V'_k}$$

и что это пересечение пусто тогда и только тогда, когда либо V_i, либо V'_j содержится в $V \cup V'$. Пусть, например,

$$V_n \subset V \cup V'. \tag{c}$$

Если $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}' \in \mathcal{S}$, то это объединение представимо в виде

$$\mathcal{A} \cup \mathcal{A}' = \mathcal{F}^{V''}_{V''_1, \ldots, V''_p}.$$

Если $V^c = \varnothing$, то $\mathcal{A} = \{\varnothing\}$ или $\mathcal{A} = \varnothing$, так что соотношение аддитивности является тривиальным. Предположим, что $V^c \neq \varnothing$, и выберем $x \in V^c$, $x_i \in V_i \cap V^c$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, так что $F = \{x, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathcal{A}$. Тем более $F \in \mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$, откуда вытекает, что $F \cap V'' = \varnothing$, т. е. $x \notin V''$. Отсюда следует, что $V'' \subset V$. Тем же самым способом можно показать, что $V'' \subset V'$. Другими словами,

$$V'' \subset V \cap V'. \tag{d}$$

Докажем теперь, что $V = V''$. Предположим, что существуют две точки x и x', такие, что $x \in V \cap \complement V''$ и $x' \in V' \cap \complement V''$, так что множества $\{x, x'\}$ и V'' не пересекаются. Выберем точки $x''_i \in V''_i \cap \complement V''$, $i = 1, 2, \ldots, p$. Тогда $\{x, x', x''_1, \ldots, x''_p\} \in \mathcal{F}^{V''}_{V''_1, \ldots, V''_p} = \mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$. Но это означает, что либо $\{x, x'\} \cap V = \varnothing$, либо $\{x, x'\} \cap V' = \varnothing$, но и то и другое ведет к противоречию. Мы заключаем поэтому, что одно из соотношений $V \subset V''$ и $V' \subset V''$ является истинным. Если верно $V' \subset V''$, то $V' = V''$ в силу (d). Однако это невозможно, ибо в этом случае мы имели бы $V' \subset V$, а тогда в силу (c) выполнялись бы соотношения $V_n \subset V$ и $\mathscr{A} = \varnothing$ вопреки сделанному предположению. Значит, $V \subset V''$ и ввиду (d) и (c)

$$V = V''; \quad V \subset V'; \quad V_n \subset V'.$$

Пусть теперь F — некоторый элемент из $\mathscr{A} \cup \mathscr{A}'$. Тогда $F \in \mathscr{F}_{V_n}$ влечет за собой $F \notin \mathscr{A}'$, поскольку $V_n \subset V'$, так что $F \in \mathscr{A}$. С другой стороны, из $F \in \mathscr{F}^{V_n}$ вытекает, что $F \notin \mathscr{A}$ и, таким образом, $F \in \mathscr{A}'$. Это означает, что

$$\mathscr{A} = (\mathscr{A} \cup \mathscr{A}') \cap \mathscr{F}_{V_n} = \mathscr{F}^{V}_{V''_1, \ldots, V''_p, V_n},$$

$$\mathscr{A}' = (\mathscr{A} \cup \mathscr{A}') \cap \mathscr{F}^{V_n} = \mathscr{F}^{V \cup V_n}_{V''_1, \ldots, V''_p}.$$

Используя рекуррентную формулу $S_{p+1}(V; V''_1, \ldots, V''_p, V_n) = S_p(V; V''_1, \ldots, V''_p) - S_p(V \cup V_n; V''_1, \ldots, V''_p)$, мы получаем, что $P(\mathscr{A}) = P(\mathscr{A} \cup \mathscr{A}') - P(\mathscr{A}')$; следовательно, функция P аддитивна.

Доказательство теоремы 2.2.1. Мы теперь в состоянии доказать часть „если" теоремы Шоке. Пусть T — некоторая функция на $\mathscr{K}$, удовлетворяющая условиям теоремы, $\mathscr{V}$ — класс множеств вида $V = G \cup K$, $G \in \mathscr{G}$, $K \in \mathscr{K}$, и $\mathscr{P}$ — полуалгебра на $\mathscr{F}$, элементами которой являются множества вида $\mathscr{F}^{V}_{V_1, \ldots, V_n}$, где n — целое число $\geqslant 0$, а $V, V_1, \ldots, V_n \in \mathscr{V}$. Емкость Шоке T можно продолжить на класс $\mathscr{V}$, при этом соответствующие функции S_n остаются неотрицательными. В силу двух предыдущих лемм соотношение

$$P\left(\mathscr{F}^{V}_{V_1, \ldots, V_n}\right) = S_n(V; V_1, \ldots, V_n)$$

определяет аддитивное отображение P из $\mathscr{P}$ в $[0, 1]$, для которого $P(\varnothing) = 0$. С другой стороны, σ-алгебра, порождаемая классом $\mathscr{P}$, есть не что иное, как σ_f. В соответствии с классическими результатами теории меры (см., например, Невё, 1964, предложение I.6.2) отображение P является σ-аддитивным на $\mathscr{P}$ и допускает (заведомо единственное) продолжение до вероятности на σ_f, если существует такой компактный подкласс $\boldsymbol{C}$ класса $\mathscr{P}$, что для каждого $\mathscr{A} \in \mathscr{P}$

$$P(\mathscr{A}) = \sup\{P(C),\ C \in \boldsymbol{C},\ C \subset \mathscr{A}\}. \tag{2.2.1}$$

Возьмем в качестве $\boldsymbol{C}$ класс $\{\mathscr{F}^{G}_{K_1, \ldots, K_n},\ n$ — целое $\geqslant 0$, $G \in \mathscr{G}$, $K_1, \ldots, K_n \in \mathscr{K}\}$. Этот класс замкнут относительно пересечений, а его элементы компактны в $\mathscr{F}$, так что $\boldsymbol{C}$ — действительно компактный подкласс в $\mathscr{G}$. Остается убедиться в справедливости соотношения (2.2.1) для этого $\boldsymbol{C}$, и этим будет завершено доказательство теоремы.

Пусть $\mathscr{A}=\mathscr{F}^{V}_{V_1,\ldots,V_k}$ — некоторый элемент класса $\mathscr{G}$ и $V=G_0\cup K_0$, где G_0 — открытое, а K_0 — компактное множество. Существует последовательность $\{G_n\}\subset\mathscr{G}$, удовлетворяющая соотношениям $G_n\supset\overline{G}_{n+1}\in\mathscr{K}$ и $G_n\downarrow K_0$. Отсюда вытекает в силу (1.1.2), что $\mathscr{F}^{G_n}\uparrow\mathscr{F}^{K_0}$ и $\mathscr{F}^{G_0\cup G_n}\uparrow\mathscr{F}^{V}$. Аналогичным образом для каждого $i=1, 2, \ldots, k$ множество V_i является объединением некоторого открытого и некоторого компактного множеств, и существует последовательность $\{K_n(i)\}\subset\mathscr{K}$, такая, что $K_n(i)\uparrow V_i$, а значит, $\mathscr{F}_{K_n(i)}\uparrow\mathscr{F}_{V_i}$. Если мы положим

$$\mathscr{A}_n=\mathscr{F}^{G_0\cup G_n}_{K_n(1),\ldots,K_n(k)},$$

то $\mathscr{A}_n\in\boldsymbol{C}$ и $\mathscr{A}_n\uparrow\mathscr{A}$. Остается доказать, что $P(\mathscr{A}_n)\uparrow P(\mathscr{A})$. Элементарные вычисления показывают, что

$$P(\mathscr{A})=-T(V)+\sum_i T(V\cup V_i)-\sum_{i_1<i_2}T(V\cup V_{i_1}\cup V_{i_2})+\ldots,$$

$$P(\mathscr{A}_n)=-T(G_0\cup G_n)+\sum_i T(G_0\cup G_n\cup K_n(i))-$$

$$-\sum_{i_1<i_2}T(G_0\cup G_n\cup K_n(i_1)\cup K_n(i_2))+\ldots.$$

Поскольку суммы здесь конечные, достаточно убедиться в том, что каждое слагаемое в выражении для $P(\mathscr{A}_n)$ сходится к соответствующему слагаемому в выражении для $P(\mathscr{A})$. Но это является немедленным следствием следующей леммы.

Лемма 2.2.3. *Пусть T — емкость Шоке, G и G_0 — два открытых множества, K — компактное множество, $\{K_n\}\subset\mathscr{K}$ — последовательность, для которой $K_n\uparrow G$, а $\{G_n\}\subset\mathscr{G}$ — последовательность, для которой $G_n\supset\overline{G}_{n+1}\in\mathscr{K}$ и $G_n\downarrow K$. Тогда $T(G_0\cup K\cup G)=\lim T(G_0\cup G_n\cup K_n)$.*

Доказательство. Поскольку T — возрастающее отображение, то

$$T(G_0\cup G_n\cup G)\geqslant T(G_0\cup G_n\cup K_n)\geqslant T(G_0\cup K\cup K_n). \qquad \text{(f)}$$

Докажем, что $T(G_0\cup G_n\cup G)\downarrow T(G_0\cup G\cup K)$. По условию T является емкостью Шоке, поэтому $T(G_0\cup G\cup K)=\inf\{T(G'),\ G'\in\mathscr{G},\ G'\supset G_0\cup G\cup K\}$. Но если $G'\in\mathscr{G}$ и $G'\supset G_0\cup G\cup K$, то $G_n\subset G'$ для достаточно больших n и $T(G')\geqslant T(G_0\cup G\cup G_n)$. Отсюда вытекает, что утверждаемая сходимость действительно имеет место. Аналогичным образом из $K\cup K_n\cup G_0\uparrow$ $\uparrow K\cup G\cup G_0$ вытекает, что $T(K\cup K_n\cup G_0)\uparrow T(K\cup G\cup G_0)$ в соответствии с аксиомой 2 для емкостей. Из этих двух сходимостей и неравенств (f) вытекает, что $T(G_0 \cup K \cup G) = \lim T(G_0 \cup G_n \cup K_n)$.

Замечание. Функционалы на $\mathscr{K}$ играют весьма важную роль в интегральной геометрии (см., например, книгу Хадвигера, 1957). Теорема Шоке характеризует те из них, которые допускают вероятностную интерпретацию, и выявляет интересные связи между интегральной геометрией и теорией случайных замкнутых множеств. В последующих главах будет дано много примеров таких связей.

2.3. УСЛОВНЫЕ СЗМ

Простым следствием теоремы Шоке является

Предложение 2.3.1. *Пусть $\mathscr{B}$ — счетная база топологии $\mathscr{G}$ в E, удовлетворяющая условию $\bar{B} \in \mathscr{K}$ для всякого $B \in \mathscr{B}$, замкнутая относительно взятия конечных объединений и такая, что для любых $K \in \mathscr{K}$ и $G \in \mathscr{G}$*

$$K = \bigcap \{\bar{B},\ B \in \mathscr{B},\ B \supset K\}; \quad G = \bigcup \{B;\ B \in \mathscr{B},\ \bar{B} \subset G\}. \tag{a}$$

Пусть $\mathscr{B}' = \{\bar{B},\ B \in \mathscr{B}\}$ и T — некоторая функция, определенная на $\mathscr{B}'$. Тогда для существования (необходимо единственной) вероятности P на σ_f, удовлетворяющей соотношению $P(\mathscr{F}_{B'}) = T(B')$ для всех $B' \in \mathscr{B}'$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие три условия:

1. $T(\varnothing) = 0$ и $0 \leqslant T \leqslant 1$.
2. Функции S_n, определенные в (2.1.3), неотрицательны на $\mathscr{B}'$.
3. Функция T полунепрерывна сверху в относительной миопической топологии на $\mathscr{B}'$.

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Предположим, что T удовлетворяет указанным трем условиям, и положим $T^*(G) = \sup \{T(B'),\ B' \in \mathscr{B}',\ B' \subset G\}$ для любого $G \in \mathscr{G}$ и $T^*(K) = \inf \{T^*(G),\ G \in \mathscr{G},\ G \supset K\}$ для любого $K \in \mathscr{K}$. Используя соотношения (a), можно показать, что T^* полунепрерывно сверху на $\mathscr{K}$ и полунепрерывно снизу на $\mathscr{G}$ и что $T = T^*$ на $\mathscr{B}'$ (доказательство такое же, как и в случае предложения 1.4.3). Поэтому можно писать T вместо T^*. Очевидно, что $T(\varnothing) = 0$ и $0 \leqslant T \leqslant 1$ на $\mathscr{G}$. Остается доказать, что функции S_n неотрицательны на $\mathscr{G}$, другими словами, что выполняются неравенства

$$\sum_{i=1}^{k} T(G \cup G_i) + \sum_{i_1 < i_2 < i} T(G \cup G_{i_1} \cup G_{i_2} \cup G_i) + \ldots$$
$$\ldots \geqslant T(G) + \sum_{i_1 < i_2} T(G \cup G_{i_1} \cup G_{i_2}) + \ldots \tag{b}$$

для $G, G_1, \ldots, G_k \in \mathcal{G}$. В $\mathcal{B}$ существуют такие последовательности $\{B_n\}$ и $\{B_n(i)\}$, что $\overline{B}_n \subset B_{n+1}$, $\overline{B_n(i)} \subset B_{n+1}(i)$, $\overline{B}_n \uparrow G$ и $\overline{B}_n(i) \uparrow G_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$. С другой стороны, согласно условию 2,

$$\sum_i T(\overline{B}_n \cup \overline{B}_n(i)) + \ldots \geqslant T(\overline{B}_n) + \sum_{i_1 < i_2} T(\overline{B}_n \cup \overline{B}_n(i_1) \cup \overline{B}_n(i_2)) + \ldots,$$

и неравенства (b) выполняются в силу определения продолжения T на $\mathcal{G}$.

Таким образом, для функции T выполняются условия теоремы Шоке, и на σ_f существует вероятность P, такая, что $P(\mathcal{F}_{B'}) = T(B')$. Единственность вытекает из соотношения (a). Действительно, если $K \in \mathcal{K}$, то ввиду (a) существует последовательность $\{B'_n\} \subset \mathcal{B}'$, для которой $B'_n \downarrow K$. Поэтому $T(B'_n) \downarrow \downarrow P(\mathcal{F}_K) = T(K)$, так что вероятность P единственна.

Поскольку пространство E является ЛКС-пространством, счетную базу $\mathcal{B}$ его топологии, удовлетворяющую условиям предложения 2.3.1, можно всегда найти. Например, если пространство E эвклидово, такой базой будет класс конечных объединений открытых шаров с рациональными центрами и радиусами.

Теперь мы можем определить понятие *СЗМ, условного по отношению к случайной величине u*. Пусть $A = (\mathcal{F}, \sigma_f, P)$ — некоторое СЗМ, u — измеримое отображение из $\mathcal{F}$ в какое-то измеримое пространство $(\Omega, \mathcal{H})$, а F — вероятность, индуцированная на $\mathcal{H}$ вероятностью P, т. е. $F(H) = P(u^{-1}(H))$ для всех $H \in \mathcal{H}$. Пусть опять $\mathcal{B}$ — база топологии $\mathcal{G}$, удовлетворяющая условиям предложения 2.3.1, и $\mathcal{B}' = \{\overline{B}, B \in \mathcal{B}\}$. Совокупность $\mathcal{B}'$ счетная. Для всякого $B' \in \mathcal{B}'$ условное математическое ожидание $E(1_{\mathcal{F}_{B'}} | u)$ определено P-почти всюду на $\mathcal{F}$ и $u^{-1}(\mathcal{H})$-измеримо. Поэтому существует функция $T_u(B'; \cdot)$, определенная F-почти всюду на Ω и такая, что P-почти всюду на $\mathcal{F}$

$$E(1_{\mathcal{F}_{B'}} | u) = T_u(B') \circ u.$$

Другими словами, для любых $B' \in \mathcal{B}'$ и $H \in \mathcal{H}$

$$P(u^{-1}(H) \cap \mathcal{F}_{B'}) = \int_H T_u(B'; \omega) F(d\omega). \tag{c}$$

В силу свойств условного математического ожидания, для почти всех (относительно F) $\omega \in \Omega$ функция $B' \to T_u(B'; \omega)$ удовлетворяет условиям предложения 2.3.1. Следовательно, существует вероятность $P_u(\cdot; \omega)$ на σ_f, такая, что $P_u(\mathcal{F}_{B'}; \omega) = T_u(B'; \omega)$. Соответствующее СЗМ $[\mathcal{F}, \sigma_f, P_u(\cdot; \omega)]$, определенное F-почти наверное на Ω, обозначим через $A_u(\omega)$.

В соответствии с условием (а) предложения 2.3.1 соотношение (с) сохраняет силу, если вместо B' подставить любое открытое или компактное множество. Таким образом, мы получаем, что для любых $H \in \mathscr{H}$ и $\mathscr{V} \in \sigma_f$

$$P(u^{-1}(H) \cap \mathscr{V}) = \int_H P_u(\mathscr{V}; \omega) F(d\omega). \tag{2.3.1}$$

Это соотношение выполняется, если $\mathscr{V}$ принадлежит счетному компактному классу $\mathscr{F}^B_{\overline{B}_1, \ldots, \overline{B}_n}$, где n — целое $\geqslant 0$, а B, $B_1, \ldots, B_n \in \mathscr{B}$, и остается справедливым для любого $\mathscr{V} \in \sigma_f$ ввиду аппроксимационной формулы (2.2.1).

Мы будем говорить, что СЗМ $\mathscr{A}_u(\omega)$, которое мы определили выше для F-почти всех $\omega \in \Omega$, есть *СЗМ A, условное относительно u*. Оно характеризуется соотношением (2.3.1). Отметим также следующие свойства:

α) Если $\mathscr{V} \in \sigma_f$ и $P(\mathscr{V}) = 1$, то $P_u(\mathscr{V}, \omega) = 1$ (F-п. н.).

β) $P_u(\{u^{-1}(\omega)\}; \omega) = 1$ (F-п. н.) (иными словами, $u(A_u(\omega)) = \omega$ почти наверное для F-почти всех $\omega \in \Omega$).

Это — следствие соотношения (2.3.1), в силу которого для H, $H' \in \mathscr{H}$

$$\int_{H'} P_u(u^{-1}(H); \omega) F(d\omega) = F(H \cap H') = \int_{H'} 1_H(\omega) F(d\omega)$$

и, таким образом, $P_u(u^{-1}(H); \omega) = 1_H(\omega)$ (F-п. н.).

γ) Пусть φ — измеримое отображение пространства $\mathscr{F}$ в себя, $v = u \circ \varphi$, P' — вероятность на σ_f, соответствующая случайному замкнутому множеству $\varphi(A) = A'$, и F — вероятность на $\mathscr{H}$, связанная со случайной величиной $v = u \circ \varphi$ согласно следующей диаграмме:

$$\begin{array}{ccc} (\mathscr{F}, \sigma_f, P) & \xrightarrow{v = u \circ \varphi} & (\Omega, \mathscr{H}, F) \\ & \varphi \searrow \quad \nearrow u & \\ & (\mathscr{F}, \sigma_f, P') & \end{array}$$

Тогда *условное СЗМ* $A'_u(\omega) = (\varphi(A))_u(\omega)$ *эквивалентно* $\varphi(A_v(\omega))$ для F-почти всех $\omega \in \Omega$.

Доказательство. Пусть $P_v(\cdot; \omega)$ и $P'_u(\cdot; \omega)$ — вероятности, F-почти всюду связанные с условными СЗМ A_v и A'_u. Прежде всего для любых $H \in \mathcal{H}$ и $\mathcal{Y} \in \sigma_f$

$$P'(\mathcal{Y} \cap u^{-1}(H)) = \int_H P'_u(\mathcal{Y}, \omega)\, F(d\omega).$$

С другой стороны,

$$P'(\mathcal{Y} \cap u^{-1}(H)) = P(\varphi^{-1}(\mathcal{Y}) \cap v^{-1}(H)) = \int_H P_v(\varphi^{-1}(\mathcal{Y});\ \omega)\, F(d\omega).$$

Отсюда вытекает, что для любого $\mathcal{Y} \in \sigma_f$

$$P'_u(\mathcal{Y}, \omega) = P_v(\varphi^{-1}(\mathcal{Y}), \omega) \quad (F\text{-п. н.}), \tag{2.3.2}$$

т. е. $A'_u(\omega)$ эквивалентно $\varphi(A_v(\omega))$.

б) При тех же условиях предположим, что существует такое взаимно однозначное отображение γ множество Ω в себя, что и само γ, и обратное ему отображение γ^{-1} измеримы и $u \circ \varphi = \gamma \circ u$ (P-п. н.), в соответствии со следующей диаграммой:

$$\begin{tikzcd} & (\mathcal{F}, \sigma_f, P') \arrow[dr, "u"] & \\ (\mathcal{F}, \sigma_f, P) \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[rr, "v = u\circ\varphi = \gamma\circ u"] \arrow[dr, "u"'] & & (\Omega, \mathcal{H}, F) \\ & (\Omega, \mathcal{H}, F') \arrow[ur, "\gamma"'] & \end{tikzcd}$$

Пусть F' — вероятность на $\mathcal{H}$, определяемая соотношением $F'(H) = P(u^{-1}(H))$. Для любых $\mathcal{Y} \in \sigma_f$ и $H \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned} P'(\mathcal{Y} \cap u^{-1}(H)) &= P[\varphi^{-1}(\mathcal{Y}) \cap u^{-1}(\gamma^{-1}(H))] = \\ &= \int_{\gamma^{-1}(H)} P_u(\varphi^{-1}(\mathcal{Y});\ \omega)\, F'(d\omega) = \\ &= \int_H P_u(\varphi^{-1}(\mathcal{Y});\ \gamma^{-1}(\omega))\, F(d\omega). \end{aligned}$$

Поэтому

$$P'_u(\mathcal{Y};\ \omega) = P_u(\varphi^{-1}(\mathcal{Y});\ \gamma^{-1}(\omega)) \quad (F\text{-п. н.}). \tag{2.3.3}$$

Другими словами, *условные СЗМ* $A'_u(\omega)$ *и* $\varphi[A_u(\gamma^{-1}(\omega))]$ *эквивалентны*. Как частный случай отметим следующий результат, полезный для дальнейшего.

Предложение 2.3.2. *Пусть* $A = (\mathcal{F}, \sigma_f, P)$ — *некоторое СЗМ,* φ — *измеримое отображение* $\mathcal{F}$ *в себя, сохраняющее вероятность* P, u — *измеримое отображение из* $\mathcal{F}$ *в измеримое пространство* $(\Omega, \mathcal{H})$ *и* F — *вероятность на* $\mathcal{H}$, *соответствующая случайной величине* $v = u \circ \varphi$. *Если существует такое взаимно* *однозначное отображение γ множества Ω в себя, что и само γ, и обратное к нему отображение γ^{-1} измеримы и $u \circ \varphi = \gamma \circ u$ P-п. н., то для F-почти всех $\omega \in \Omega$ условные СЗМ $A_u(\omega)$ и $\varphi[A_u(\gamma^{-1}(\omega))]$ эквивалентны. Другими словами, для любого $\mathscr{V} \in \sigma_f$*

$$P_u(\mathscr{V};\ \omega) = P_u(\varphi^{-1}(\mathscr{V});\ \gamma^{-1}(\omega)) \quad (F\text{-п. н.}). \tag{2.3.4}$$

Доказательство. Случайные замкнутые множества A и $A' = \varphi(A)$ эквивалентны, так что $P'_u(\mathscr{V};\ \omega) = P_u(\mathscr{V};\ \omega)$, и (2.3.4) вытекает из (2.3.3).

Пример. Пусть E — *эвклидово* пространство, а φ — *сдвиг* $F \to \varphi(F) = F_h = F \oplus \{h\}$ на вектор $h \in E$. Пусть, далее, K — компактное множество и u — отображение $F \to u(F) = F \oplus K$ (или $F \ominus K$, F_K, F^K и т. д.). Эти отображения согласованы со сдвигом в том смысле, что $u(F_h) = (u(F))_h$. Отсюда следует, что $v(F) = u(F_h) = (u(F))_h$, и γ представляет собой тот же самый сдвиг $F \to \gamma(F) = F_h$. Если СЗМ A *стационарно* (т. е. вероятность инварианта относительно сдвигов), то выполняется (2.3.4) и СЗМ $A_u(F)$ (т. е. СЗМ A, взятое при условии $u(A) = F$) эквивалентно $(A_u(F_{-h}))_h$, т. е. сдвигу A, взятому при условии $u(A) = F_{-h}$.

Независимые СЗМ

Не представляет труда определить пару СЗМ (A_1, A_2) при помощи вероятности P на произведении σ-алгебр $\sigma_f \otimes \sigma_f$. Можно определить также понятие независимости двух СЗМ A_1 и A_2. Именно, СЗМ A_1 и A_2 *независимы*, если $P(\mathscr{V} \times \mathscr{V}') = P(\mathscr{V} \times \mathscr{F}) P(\mathscr{F} \times \mathscr{V}')$ для любых $\mathscr{V}$, $\mathscr{V}' \in \sigma_f$. Эта независимость имеет место тогда и только тогда, когда для любых K, $K' \in \mathscr{K}$

$$P(\mathscr{F}_K \times \mathscr{F}_{K'}) = T_1(K) T_2(K'), \tag{2.3.5}$$

где $T_1(K) = P(\mathscr{F}_K \times \mathscr{F})$ и $T_2(K') = P(\mathscr{F} \times \mathscr{F}_{K'})$.

Индуктивный предел СЗМ

Пусть $\{B_n\} \subset \mathscr{G}$ — последовательность, такая, что $B_{n+1} \supset \bar{B}_n$, $\bar{B}_n \in \mathscr{K}$ и $B_n \uparrow E$, и пусть для каждого целого $n > 0$ определено СЗМ A_n, почти наверное содержащееся в $\bar{B}_n$. Тогда A_n определяется посредством функционала T_n на $\mathscr{K}$, для которого $T_n(K) = P(A_n \in \mathscr{F}_K)$ при $K \in \mathscr{K}(\bar{B}_n)$, и $T_n(K) = T_n(K \cap \bar{B}_n)$ при $K \in \mathscr{K}$, $K \not\subset \bar{B}_n$. Будем считать выполненным следующее условие:

$$T_{n+m}(K) = T_n(K) \quad (n,\ m > 0,\ K \in \mathscr{K},\ K \subset \bar{B}_n). \tag{2.3.6}$$

При этом условии СЗМ $A_{n+m}\cap\bar{B}_n$ и A_n эквивалентны, причем можно определить такое СЗМ A на $(\mathcal{F}, \sigma_f)$, что для любого $n>0$ СЗМ $A\cap\bar{B}_n$ эквивалентно A_n. Мы будем говорить, что СЗМ A является *индуктивным пределом* последовательности $\{A_n\}$ случайных замкнутых множеств A_n, функционалы которых удовлетворяют соотношению (2.3.6).

Докажем существование указанного СЗМ A. Предположим, что K — некоторое компактное множество. Поскольку $B_n\uparrow E$, то $K\subset\bar{B}_n$ для всех достаточно больших n, скажем для $n\geqslant n_0$. Кроме того, $T_n(K)=T_{n_0}(K)$ в силу (2.3.6). Таким образом, мы можем определить на $\mathcal{K}$ функционал T, положив $T(K)=T_{n_0}(K)$. Очевидно, что $T(\varnothing)=0$ и $0\leqslant T\leqslant 1$. Функционал T полунепрерывен сверху на $\mathcal{K}$, поскольку если $K_n\downarrow K$ в $\mathcal{K}$, то компактные множества K_n содержатся в некотором фиксированном $\bar{B}_{n_0}$ и T_{n_0} полунепрерывен сверху. По тем же соображениям функции S_n, связанные с T, неотрицательны, ибо T_{n_0} есть емкость Шоке. Отсюда по теореме 2.2.1 вытекает существование СЗМ A, вероятность P которого удовлетворяет соотношению $P(\mathcal{F}_K)=T(K)$ для всех $K\in\mathcal{K}$. Далее, случайному замкнутому множеству $A\cap\bar{B}_n$ соответствует функционал $K\to T(K\cap\bar{B}_n)=T_n(K)$, и, следовательно, оно эквивалентно СЗМ A_n.

2.4. ТОЧЕЧНЫЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Рассмотрим теперь более общее понятие *случайного множества* (не обязательно замкнутого). Всякое множество $A'\in\mathcal{P}(E)$ однозначно определяется своим *индикатором* $1_{A'}$ ($1_{A'}(x)=1$ при $x\in A'$ и $1_{A'}(x)=0$ при $x\notin A'$). Если такой индикатор заменить случайной функцией со значениями из множества $\{0, 1\}$, то мы получим случайное множество A' на $\mathcal{P}(E)=\{0, 1\}^E$, однако это A' — очевидным образом не СЗМ. Будем обозначать через $\mathcal{I}$ *класс всех конечных подмножеств из* E и для любых $I, I'\in\mathcal{I}$ положим

$$M_I^{I'}=\{A'\colon A'\in\mathcal{P}(E),\ I\subset A',\ I'\cap A'=\varnothing\}.$$

Пусть $\mathcal{M}$ — σ-алгебра, порожденная классом $M_I^{I'}$, $I, I'\in\mathcal{I}$, P' — вероятность на $\mathcal{M}$. Положим

$$P'(I, I')=P'(M_I^{I'}),$$
$$T'(I)=1-P'(M^I)=P'(\{A'\cap I\neq\varnothing\}).$$

При помощи рекуррентных формул

$$P'(\varnothing, I')=1-T'(I'),$$
$$P'(I\cup\{x\}, I')=P'(I, I')-P'(I, I'\cup\{x\}) \qquad (2.4.1)$$

функция P' определяется на $\mathcal{I} \times \mathcal{I}$, если функция T' задана на $\mathcal{I}$. Очевидно, для T' выполняются следующие условия:

1) $T'(\varnothing) = 0$ и $0 \leqslant T' \leqslant 1$.

2) Функция P', определенная на $\mathcal{I} \times \mathcal{I}$ соотношениями (2.4.1), неотрицательна.

Обратно, если некоторая функция T' на $\mathcal{I}$ удовлетворяет этим двум условиям, то существует, и притом единственная, вероятность P' на $\mathcal{M}$, такая, что $P'(M^I) = 1 - T'(I)$ для всех $I \in \mathcal{I}$. Это вытекает из классической теоремы Колмогорова, примененной к частному случаю случайного индикатора. Другой способ установить этот факт состоит в следующем. Заметим, что класс $M_I^{I'}$, I, $I' \in \mathcal{I}$, является полуалгеброй $\mathcal{P}$, порождающей $\mathcal{M}$. В силу условий 1 и 2 функция P', определяемая соотношениями (2.4.1), аддитивна и $0 \leqslant P' \leqslant 1$ на $\mathcal{P}$. Наконец, поскольку

$$\bigcap_{i \in I} M_{I_i}^{I_i'} = M_{\cup I_i}^{\cup I_i'},$$

то класс $\mathcal{P}$ компактен в $\mathcal{M}$[1]. Поэтому в силу классических теорем теории меры существует единственное продолжение P' до вероятности на $\mathcal{M}$.

Всякую функцию T' на $\mathcal{I}$, удовлетворяющую указанным выше условиям 1 и 2, мы будем называть *точечным законом распределения*[2]. Зафиксируем полученный результат:

Предложение 2.4.1. *Если T' — точечный закон распределения, то существует единственная вероятность P' на $\mathcal{M}$, такая, что соответствующее ей случайное множество A' удовлетворяет для любого $I \in \mathcal{I}$ соотношению $P'(\{A' \cap I \neq \varnothing\}) = T'(I)$.*

Пусть теперь $A = (\mathcal{F}, \sigma_f, P)$ — СЗМ, а T — его сопровождающий функционал, определенный соотношением $T(K) = P(\mathcal{F}_K)$, $K \in \mathcal{K}$. Ясно, что сужение T на $\mathcal{I}$ удовлетворяет условиям 1 и 2 и, значит, является точечным законом распределения, с которым связана некоторая вероятность P' на $\mathcal{M}$, такая, что $P'(M_I^{I'}) = P(\{I \subset A\} \cap \mathcal{F}^{I'})$. Если φ — взаимно однозначное отображение $A \to \varphi(A) = A$ из $\mathcal{F}$ в $\mathcal{P}(E)$, то случайное множество $\varphi(A)$ очевидным образом эквивалентно случайному множеству $A' = (\mathcal{P}(E), \mathcal{M}, P')$.

Далее возникает следующий вопрос. При каких условиях можно с заданным точечным законом распределения T' связать

[1] Имеется в виду топология, порождаемая множествами $M_I^{I'}$, взятыми в качестве окрестностей. — *Прим. ред.*

[2] В оригинале space law. — *Прим. ред.*

случайное замкнутое множество A таким образом, чтобы $T'(I)=P(A\in\mathcal{F}_I)$ для любого $I\in\mathcal{I}$? Сначала дадим частичный ответ на этот вопрос.

Предложение 2.4.2. *Пусть T' — некоторый точечный закон распределения. Тогда, для того чтобы существовало СЗМ A, точечный закон распределения которого совпадал бы с T', необходимо и достаточно, чтобы функционал T' был полунепрерывен сверху в относительной миопической топологии на $\mathcal{I}$.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Предположим, что функционал T' полунепрерывен сверху на $\mathcal{I}$, и положим $T(G)=\sup\{T'(I),\ I\in\mathcal{I},\ I\subset G\}$ для всех $G\in\mathcal{G}$ и $T(K)=\inf\{T(G),\ G\in\mathcal{G},\ G\supset K\}$ для всех $K\in\mathcal{K}$. Нетрудно убедиться в том, что функционал T полунепрерывен снизу на $\mathcal{G}$, полунепрерывен сверху на $\mathcal{K}$ и удовлетворяет условию, сформулированному в теореме Шоке 2.2.1. Остается показать, что $T(I)=T'(I)$ для всех $I\in\mathcal{I}$. Ясно, что $T(I)\geqslant T'(I)$. Обратно, пусть $\{G_n\}\subset\mathcal{G}$ — такая последовательность, что $G_n\downarrow I$ и $T(G_n)\downarrow T(I)$, и пусть $\varepsilon>0$. Для каждого $n>0$ существует $I_n\in\mathcal{I}$, такое, что $I\subset I_n\subset G_n$ и $T'(I_n)+\varepsilon\geqslant T(G_n)$. Если $n\uparrow\infty$, то последовательность I_n сходится к I в $\mathcal{K}$, так что $\overline{\lim}\,T'(I_n)\leqslant T'(I)$, поскольку T' полунепрерывен сверху на $\mathcal{I}$. С другой стороны, из соотношения $T'(I_n)\geqslant T'(I)$ вытекает, что $\underline{\lim}\,T'(I_n)\geqslant T'(I)$, так что $T'(I)=\lim T'(I_n)\geqslant\lim(T(G_n)-\varepsilon)=T(I)-\varepsilon$. Отсюда следует, что $T'(I)=T(I)$, и наше утверждение доказано.

Замечание. СЗМ A с точечным законом распределения T' отнюдь не является единственным. В случае когда A' — пуассоновский точечный процесс, не зависящий от A, СЗМ $A\cup A'$ имеет тот же точечный закон распределения T'. Усиливая результат предложения 2.4.2, покажем теперь, что существует единственное (с точностью до эквивалентности) СЗМ, имеющее точечный закон распределения T' и сепарабельное в следующем смысле:

Определение 2.4.1. *Случайное замкнутое множество $A=(\mathcal{F},\sigma_f,P)$ называется сепарабельным, если существует такое счетное подмножество $D\subset E$, плотное в E, что $A=\overline{A\cap D}$ п. н. Всякое такое множество D будем называть множеством сепарабельности для A.*

Для того чтобы убедиться в корректности этого определения, мы должны показать, что множество $\{A=\overline{A\cap D}\}$ измеримо. При любом $G\in\mathcal{G}$ соотношение $\overline{A\cap D}\cap G\neq\varnothing$ эквивалентно соотношению $A\cap D\cap G\neq\varnothing$. Таким образом, если $\mathcal{B}$ — счетная база для $\mathcal{G}$, то

$$\{A=\overline{A\cap D}\}=\bigcap_{B\in\mathcal{B}}(\mathcal{F}^B\cup\mathcal{F}_{B\cap D})\in\sigma_f.$$

Отметим также, что A сепарабельно и D является множеством сепарабельности для A тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}_G=\mathcal{F}_{G\cap D}$ п. н. для каждого $G\in\mathcal{G}$ (или для каждого $B\in\mathcal{B}$), и что если D — множество сепарабельности для A, то таковым же будет и всякое счетное множество $D'\supset D$.

Теорема 2.4.1. *Пусть T' — некоторый точечный закон распределения, а T — функция, определенная на $\mathcal{G}$ соотношением $T(G)=\sup\{T'(I),\ I\in\mathcal{I},\ I\subset G\}$, $G\in\mathcal{G}$, и на $\mathcal{K}$ соотношением $T(K)=\inf\{T(G),\ G\in\mathcal{G},\ G\supset K\}$, $K\in\mathcal{K}$.*

a) *Существует СЗМ $A=(\mathcal{F},\sigma_f,P)$, такое, что $P(\mathcal{F}_K)=T(K)$ для всех $K\in\mathcal{K}$, и T есть наименьшая функция на $\mathcal{K}$, удовлетворяющая условиям теоремы Шоке и такая, что $T'\leqslant T$ на $\mathcal{I}$.*

b) *Указанное СЗМ A сепарабельно. Если D — его множество сепарабельности (в определенном выше смысле) и $A'=(\mathcal{P}(E),\mathcal{M},P')$ — случайное множество, соответствующее точечному закону распределения T', то A эквивалентно случайному множеству $\overline{A'\cap D}$[1].*

c) *СЗМ, имеющее точечный закон распределения T', существует тогда и только тогда, когда для любого $x\in E$*

$$T'(\{x\})=T(\{x\}).\tag{c}$$

В этом случае $\overline{A'\cap D}$ является единственным (с точностью до эквивалентности) сепарабельным СЗМ с точечным законом распределения T'.

Доказательство. a) Нетрудно убедиться, что условия теоремы Шоке для T выполняются и $T\geqslant T'$ на $\mathcal{I}$. Пусть T'' — какая-нибудь другая емкость, удовлетворяющая этим условиям, для которой $T''\geqslant T'$ на $\mathcal{I}$. Тогда, полагая $T''(G)=\sup\{T''(K),\ K\in\mathcal{K},\ K\subset G\}$, мы получим, что $T''\geqslant T$ на $\mathcal{G}$, а значит, и на $\mathcal{K}$.

b) Пусть $\mathcal{B}\subset\mathcal{G}$ — счетная база топологии $\mathcal{G}$ на E, замкнутая относительно взятия конечных объединений. Для каждого $B\in\mathcal{B}$ пусть $\{I_n(B)\}\subset\mathcal{I}$ — такая возрастающая последовательность, что $I_n(B)\subset B$ и $T'(I_n(B))\uparrow T(B)$. Множество $D(B)=\bigcup_n I_n(B)$ счетно. Из $I_n(B)\uparrow D(B)$ вытекает, что

$$T'(I_n(B))\uparrow P'(A'\cap D(B)\neq\varnothing),$$

[1] Здесь имеется в виду замыкание в E. — *Прим. ред.*

так что $T(B)=P'(A'\cap D(B)\neq\varnothing)$. Положим теперь $D=\bigcup\{D(B),\ B\in\mathscr{B}\}$. Множество D счетно. Из включения $D\cap B\supset D(B)$ вытекает, что $T(B)\leqslant P'(A'\cap D\cap B\neq\varnothing)$ и, таким образом,

$$T(B)=P'(A'\cap D\cap B\neq\varnothing)\quad (B\in\mathscr{B}),\tag{b}$$

поскольку обратное неравенство всегда имеет место в соответствии с определением $T(B)$. Для любого $G\in\mathscr{G}$ существует в силу замкнутости $\mathscr{B}$ относительно взятия конечных объединений последовательность $\{B_n\}\subset\mathscr{B}$, для которой $B_n\uparrow G$. Но функционал T полунепрерывен снизу на $\mathscr{G}$. Поэтому, согласно следствию 5 предложения 1.2.4, имеем $T(B_n)\uparrow T(G)$. С другой стороны, из $B_n\uparrow G$ следует, что $\{A'\cap D\cap B_n\neq\varnothing\}\uparrow\{A'\cap D\cap\cap G\neq\varnothing\}$ и, значит, $P'(A'\cap D\cap B_n\neq\varnothing)\uparrow P(A'\cap D\cap C\neq\varnothing)$. Но тогда в соответствии с (b)

$$T(G)=P'(A'\cap D\cap G\neq\varnothing)\quad (G\in\mathscr{G}).\tag{b$'$}$$

Отображение α: $A'\to\alpha(A')=(\overline{A'\cap D})$ из $(\mathscr{P}(E),\mathscr{M})$ в $(\mathscr{F},\sigma_f)$ измеримо, поскольку соотношение $\overline{A'\cap D}\cap G\neq\varnothing$ эквивалентно соотношению $A'\cap D\cap G\neq\varnothing$, $G\in\mathscr{G}$, и $\alpha^{-1}(\mathscr{F}_G)=\{A'\cap D\cap\cap G\neq\varnothing\}\in\mathscr{M}$. Таким образом, СЗМ $\alpha(A')$ существует и удовлетворяет соотношению $P(\alpha(A')\in\mathscr{F}_G)=T(G)$, т. е. оно эквивалентно A. Более того, $\alpha(A')$ сепарабельно и D можно взять в качестве его множества сепарабельности, поскольку из $\alpha(A')\cap\cap D\supset A'\cap D$ вытекает, что $\overline{\alpha(A')\cap D}\supset\alpha(A')$, т. е. $\overline{\alpha(A')\cap D}=\alpha(A')$.

Остается показать, что если D' — какое-нибудь другое множество сепарабельности для A, то $\overline{A'\cap D'}$ будет по-прежнему эквивалентно A. Иначе говоря, надо доказать справедливость соотношения

$$\overline{A'\cap D'}=\overline{A'\cap D}\quad (P'\text{-п. н.}).\tag{b$''$}$$

Заметим прежде всего, что $D''=D\cup D'$ является множеством сепарабельности для A. Поэтому для любого $G\in\mathscr{G}$

$$T(G)=P'(A'\cap G\cap D''\neq\varnothing)=P'(A'\cap G\cap D'\neq\varnothing)=$$
$$=P'(A'\cap G\cap D\neq\varnothing).$$

Поэтому, используя включения $\{A'\cap G\cap D'\neq\varnothing\}\subset\{A'\cap G\cap\cap D''\neq\varnothing\}$ и $\{A'\cap G\cap D\neq\varnothing\}\subset\{A'\cap G\cap D''\neq\varnothing\}$, мы получаем п. н.-равенства $\{A'\cap G\cap D''\}=\{A'\cap G\cap D'\}=\{A'\cap G\cap D\}$. Отсюда вытекает, что имеет место (b$''$).

c) Согласно части a) теоремы, T' является точечным законом распределения некоторого СЗМ тогда и только тогда, когда $T=T'$ на $\mathscr{S}$. Это условие, очевидно, влечет за собой выполнение соотношения (c). Обратно, предположим, что выполнено (c). Пусть x — некоторая точка из E и $D'=D\cup\{x\}$ — множество сепарабельности для A, содержащее x. В силу (b″) можно записать

$$\{x \in A'\} \subset \{x \in \overline{A' \cap D'}\} \overset{\text{п. н.}}{=} \{x \in \overline{A' \cap D}\}.$$

Но ввиду условия (c), $P'(x \in A') = P'(x \in \overline{A' \cap D})$. Отсюда вытекает, что $\{x \in A'\} = \{x \in \overline{A' \cap D}\}$ P'-н. п., а это означает, что точечным законом распределения для $A' \cap D$ служит T'.

Наконец, пусть $A'' = (\mathscr{F}, \sigma_f, P'')$ — какое-нибудь другое сепарабельное СЗМ с точечным законом распределения T', и пусть D'' — множество сепарабельности для A. Для любого $G \in \mathscr{G}$ имеем $P''(\mathscr{F}_G) = P''(\mathscr{F}_{G \cap D''}) = \sup \{T'(I),\ I \in \mathscr{I},\ I \subset G \cap D''\}$. Поэтому $P''(\mathscr{F}_G) \leqslant T(G)$. Однако строгое неравенство здесь невозможно согласно части a). Таким образом, $P''(\mathscr{F}_G) = T(G)$, т. е. $P'' = P$, так что с точностью до эквивалентности A единственно.

Замечание. Пусть $A = (\mathscr{F}, \sigma_f, P)$ — какое-нибудь несепарабельное СЗМ, $A_1 = (\mathscr{F}, \sigma_f, P_1)$ — сепарабельное СЗМ с тем же точечным законом распределения, что и A, а D — множество сепарабельности для A_1. Отображение α: $A \to \alpha(A) = \overline{A \cap D}$ пространства $(\mathscr{F}, \sigma_f)$ в себя измеримо и потому определяет некоторое СЗМ α. Это СЗМ, очевидно, эквивалентно A_1. В соответствии с результатом § 2.3 для P_1-почти всех α существует условное СЗМ $A_\alpha = (\mathscr{F}, \sigma_f, P_\alpha)$, такое, что

$$\int_H P_\alpha(\mathscr{V}) P_1(d\alpha) = P(\mathscr{V} \cap \{\alpha(A) \in H\})$$

для любых H и $\mathscr{V}$ из σ_f. Это A_α является вариантом СЗМ A, условного по отношению к $\alpha = (\overline{A \cap D})$. Другими словами, вероятность P_α представляет собой остаточную неопределенность в отношении A, которая еще остается, когда мы располагаем всей информацией, какую только можно получить на основании счетного числа наблюдений. Очевидно, что $P_\alpha(A_\alpha \supset \alpha) = 1$ и $P_\alpha(x \in A_\alpha,\ x \notin A) = 0$ для любого $x \in E$ (P_1-п. н. для каждого α).

2.5. П. Н.-НЕПРЕРЫВНОСТЬ, P-НЕПРЕРЫВНОСТЬ И ИЗМЕРИМОСТЬ

Определение 2.5.1. *СЗМ $A = (\mathscr{F}, \sigma_f, P)$ называется P-непрерывным в точке $x \in E$, если для всякого y, сходящегося к x в E, мы имеем $\lim P(\{x \in A\} \cap \{y \notin A\}) = \lim P(\{x \notin A\} \cap \{y \in A\}) = 0$. Будем говорить, что A является P-непрерывным, если оно P-непрерывно в каждой точке $x \in E$.*

Это определение связано только с точечным законом распределения A. Поэтому мы можем говорить о P-непрерывности точечного закона распределения безотносительно к СЗМ.

Предложение 2.5.1. a) *Точечный закон распределения T' P-непрерывен в точке $x \in E$ тогда и только тогда, когда из того, что $\lim x_n = x$ в E, вытекает, что $T'(\{x\}) = \lim T'(\{x_n\})$ и $T'(\{x\}) = \lim T'(\{x, x_n\})$.*

b) *Пусть A — некоторое СЗМ и T — его точечный закон распределения. Для того чтобы A было P-непрерывно в точке $x \in E$, необходимо и достаточно, чтобы из $x = \lim x_n$ в E вытекало, что $T(\{x\}) = \lim T(\{x_n\})$.*

c) *Пусть $A' = (\mathcal{P}(E), \mathcal{M}, P')$ — некоторое P-непрерывное случайное множество. Тогда для любых счетных подмножеств D и D', плотных в E, P'-п. н. выполняется соотношение $\overline{A' \cap D} = \overline{A' \cap D'}$. Далее, для сепарабельного СЗМ A из теоремы 2.4.1 каждое счетное подмножество D, плотное в E, является множеством сепарабельности и A эквивалентно $\overline{A' \cap D}$.*

d) *Если некоторое СЗМ P-непрерывно, то каждое счетное подмножество, плотное в E, служит его множеством сепарабельности.*

Доказательство. Утверждение a) следует из того, что $P(\{x \in A\} \cap \{y \notin A\}) = T'(\{x\}) - T'(\{x, y\})$. Если T — точечный закон распределения некоторого СЗМ, то из $x = \lim x_n$ вытекает, что $T(\{x\}) = \lim T(\{x, x_n\})$, поскольку T полунепрерывен сверху на $\mathcal{K}$. Отсюда получаем утверждение b).

Для доказательства утверждения c) заметим прежде всего, что из P-непрерывности вытекает, что $M_{\{x\}}^{G \cap D} = \varnothing$ п. н. для любых $x \in G \in \mathcal{G}$ и любых счетных подмножеств D и D', плотных в E, так что $M^{G \cap D} \subset M^{G \cap D'}$ п. н. Аналогичным образом $M_{G \cap D} \subset M_{G \cap D'}$ п. н., так что $M^{G \cap D'} = M^{G \cap D}$ п. н. Отсюда следует, что $\overline{A' \cap D} = \overline{A' \cap D'}$ P'-п. н. Сепарабельное СЗМ A из теоремы 2.4.1 эквивалентно $\overline{A' \cap D}$ для некоторого счетного всюду плотного множества D, а значит, эквивалентно $\overline{A' \cap D'}$ для любого другого счетного всюду плотного множества D' — при условии, что каждое такое D' служит множеством сепарабельности для A'. Последнее же доказать нетрудно.

Наконец, утверждение d) — это простое следствие утверждения c).

Замечание. В случае когда $E = \mathbf{R}^d$ — эвклидово пространство, мы будем говорить, что СЗМ A *стационарно в слабом смысле* (или имеет *второй порядок стационарности*), если его точечный закон распределения T удовлетворяет соотношению $T(\{x, y\}) =$

$=T(\{x\})+T(\{y\})-C(x-y)$, где C — функция на $E=\mathbf{R}^d$, такая, что $C(x-y)=P(\mathcal{F}_{\{x\},\{y\}})$. Из только что доказанного предложения вытекает следующее

Следствие. *Всякое стационарное в слабом смысле СЗМ A является P-непрерывным, а его случайный индикатор 1_A непрерывен в среднем квадратическом (ср. кв.), т. е.* $\lim E[(1_A(x_n)-1_A(x))^2]=0$ *для любой последовательности* $\{x_n\}$, *сходящейся к точке* $x\in E$.

Доказательство. В силу стационарности СЗМ A, $T(\{x\})=C(0)$ есть константа. Поэтому A P-непрерывно, согласно утверждению b) предложения. С другой стороны, случайный индикатор 1_A случайного замкнутого множества A непрерывен в ср. кв. тогда и только тогда, когда непрерывна ковариация $C(x-y)=E[1_A(x)1_A(y)]$. Последнее же всегда имеет место ввиду непрерывности отображения $(x,y)\to T(\{x,y\})$.

В соответствии со следствием 3 предложения 1.2.4 отображение взятия границы $A\to\partial A$ полунепрерывно снизу и поэтому измеримо, если E локально связно. В связи с этим введем следующее

Определение 2.5.2. *В случае когда E — локально связное ЛКС-пространство, мы говорим, что СЗМ A на E п. н. непрерывно в точке $x\in E$, если $P(\{x\in\partial A\})=0$, и говорим, что A п. н. непрерывно, если оно п. н. непрерывно в каждой точке $x\in E$.*

П. н.-непрерывность является в действительности свойством точечного закона распределения, как показывает

Предложение 2.5.2. *СЗМ A п. н. непрерывно тогда и только тогда, когда оно P-непрерывно и $\overline{A\cap D}$ является п. н. непрерывным для некоторого счетного плотного подмножества $D\subset E$. В этом случае $\overset{\circ}{\overline{A}}=\overline{A\cap D'}$ п. н. для всякого счетного подмножества D', плотного в E, и $\overset{\circ}{\overline{A}}$ эквивалентно СЗМ, строящемуся исходя из точечного закона распределения T случайного замкнутого множества A так, как указано в теореме 2.4.1.*

Доказательство. Ясно, что п. н.-непрерывность влечет за собой P-непрерывность. Поэтому мы можем предположить, что A является P-непрерывным. Если D — некоторое счетное подмножество, плотное в E, то $\overset{\circ}{\overline{A}}=\overset{\circ}{\overline{A\cap D}}$ п. н. и

$$\partial(\overline{A\cap D})\subset\partial A\subset\partial(\overline{A\cap D})\cup((\overline{A\cap D})^c\cap A).$$

Ввиду P-непрерывности A из предложения 2.5.1 и теоремы 2.4.1 вытекает, что $\overline{A \cap D}$ и A имеют один и тот же точечный закон распределения. Используя включение $\overline{A \cap D} \subset A$ [1], получаем, что $P(x \in A \cap (\overline{A \cap D})^c) = 0$ для всех $x \in E$ и, таким образом,

$$P(x \in \partial A) = P(x \in \partial(\overline{A \cap D})).$$

Отсюда следует, что A п. н.-непрерывно тогда и только тогда, когда таково же $\overline{A \cap D}$. Если A п. н.-непрерывно, то $A \cap D \subset \mathring{A}$ п. н. для любого счетного подмножества D, плотного в E. Поэтому $\overline{A \cap D} \subset \overline{\mathring{A}}$ п. н. Но включение $\overline{\mathring{A}} \subset \overline{A \cap D}$ справедливо всегда, так что $\overline{\mathring{A}} = \overline{A \cap D}$ п. н.

Займемся теперь *измеримостью* СЗМ, что приведет нас к более удобному критерию п. н.-непрерывности.

Теорема 2.5.1. *Любое СЗМ A является измеримым в следующем смысле: отображение k: $E \times \mathcal{F} \to \{0, 1\}$, определенное равенствами $k(x, A) = 1$ для $x \in A$ и $k(x, A) = 0$ для $x \notin A$, измеримо относительно произведения σ-алгебр $\sigma_g \otimes \sigma_f$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{B}$ — счетная база топологии $\mathcal{G}$ на E. Тогда соотношение $x \notin A$ эквивалентно соотношению {существует такое $B \in \mathcal{B}$, что $x \in B$ и $A \cap B = \varnothing$}. Таким образом,

$$k^{-1}(0) = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \times \mathcal{F}^B \in \sigma_g \otimes \sigma_f.$$

Следствие 1. *Пусть μ — положительная мера на (E, σ_g). Тогда отображение $A \to \mu(A) = \int k(x, A)\,\mu(dx)$ из $\mathcal{F}$ в $\mathbb{R}_+$ представляет собой неотрицательную случайную величину с математическим ожиданием*

$$E(\mu(A)) = \int P(\{x \in A\})\,\mu(dx).$$

Аналогично, если α — измеримое отображение пространства $\mathcal{F}$ в себя, то $\mu(\alpha(A))$ является случайной величиной с математическим ожиданием

$$E[\mu(\alpha(A))] = \int P(\{x \in \alpha(A)\})\,\mu(dx).$$

Это следствие имеет силу для всех измеримых отображений, которые встречались нам в гл. 1. Рассмотрим, к примеру, отображение взятия границы $A \to \partial A$ (которое измеримо в силу

[1] A — случайное замкнутое множество. — *Прим. ред.*

соотношения $\partial A = \bar{A} \cap \overline{A^c}$ и следствий 1 и 2 предложения 1.2.4). Применяя предыдущее следствие, мы заключаем, что *СЗМ A п. н. непрерывно тогда и только тогда, когда $\mu(\partial A) = 0$ п. н. для любой неотрицательной меры $\mu \geqslant 0$*. В частности, справедлив такой результат:

Следствие 2. *Пусть $E = \mathbf{R}^d$ — эвклидово пространство и μ — мера Лебега в E. Если отображение $x \to P(x \in \partial A)$ непрерывно на E, в частности если A стационарно (т. е. вероятность P инвариантна относительно сдвигов), то A п. н. непрерывно тогда и только тогда, когда $\mu(\partial A) = 0$ п. н.*

Доказательство. Пусть μ — мера Лебега на $E = \mathbf{R}^d$. Соотношение $E(\mu(\partial A)) = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда $P(x \in \partial A) = 0$ для μ-почти всех $x \in E$ и, значит, для всех $x \in E$, если отображение $x \to P(x \in \partial A)$ непрерывно на E. В стационарном случае вероятность $P(x \in \partial A)$ есть константа, и это условие выполняется автоматически.

2.6. ОТКРЫТЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ МНОЖЕСТВА И СЛУЧАЙНЫЕ МНОЖЕСТВА НА $\mathscr{H}$

Не представляет труда определить понятие открытого случайного множества. Пусть σ_g — совокупность борелевских множеств на $\mathscr{G}$, которая порождается семейством $\mathscr{G}_K$, $K \in \mathscr{K}$, равно как и семейством $\mathscr{G}^G$, $G \in \mathscr{G}$. *Открытое случайное множество* — это измеримое отображение вероятностного пространства $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ в $(\mathscr{G}, \sigma_g)$. В канонической форме открытое случайное множество задается просто вероятностью P на σ_g. Гомеоморфизм $F \to F^c$ из $\mathscr{F}$ в $\mathscr{G}$ является, очевидно, также изоморфизмом σ-алгебр σ_f и σ_g, так что результаты, полученные в предыдущем параграфе, немедленно можно переформулировать по двойственности.

Рассмотрим теперь случай пространства $\mathscr{H}$, отождествляемого с подпространством $\{G \subset F\} \subset \mathscr{G} \times \mathscr{F}$; будем предполагать выполненной аксиому 1.3.1 (см. § 1.3). Элемент пространства $\mathscr{H}$ представляет собой пару $(\mathring{A}, \bar{A})$, где $\mathring{A}$ — внутренность, а $\bar{A}$ — замыкание множества $A \in \mathscr{P}(E)$. Мы можем определить отношение эквивалентности в $\mathscr{P}(E)$, полагая $A \equiv A'$, если $\mathring{A} = \mathring{A}'$ и $\bar{A} = \bar{A}'$, и отождествить пространство $\mathscr{H}$ с факторпространством $\mathscr{P}(E)/\equiv$. С этой точки зрения два подмножества A и A' из E считаются неразличимыми, если они имеют одну и ту же внутренность и одно и то же замыкание. Представляется, что этот подход весьма хорошо соответствует физическим условиям, с которыми мы встречаемся в приложениях теории.

Можно также определить на самом пространстве $\mathscr{P}(E)$ σ-алгебру σ_p, порожденную классом $M_G^{G'} = \{A,\ A \in \mathscr{P}(E),\ A \supset G,\ A \cap G' = \varnothing\}$, G', $G \in \mathscr{G}$. Поскольку соотношение $A \supset G$ эквивалентно соотношению $\mathring{A} \supset G$ и $A \cap G' = \varnothing$ эквивалентно $\bar{A} \cap G = \varnothing$, то мы можем также записать

$$M_G^{G'} = \{A\colon (\mathring{A},\ \bar{A}) \in \mathscr{G}_G \times \mathscr{F}^{G'}\},$$

так что σ-алгебра σ_p согласована с введенным выше отношением эквивалентности $\equiv$, и фактор-σ-алгебру $\sigma_p/\equiv$ можно отождествить с σ-алгеброй σ_h, индуцированной на $\mathscr{H}$ произведением σ-алгебр $\sigma_g \otimes \sigma_f$. Другими словами, $(\mathscr{P},\ \sigma_p)/\equiv = (\mathscr{H},\ \sigma_h)$.

Результаты, которые были получены для пространств $\mathscr{F}$ и $\mathscr{G}$, можно легко переформулировать в терминах пространства $\mathscr{H}$. В частности, A сепарабельно, если СЗМ $\bar{A}$ и $\complement\mathring{A}$ сепарабельны, и легко доказать следующее утверждение:

Предложение 2.6.1. *Если случайное множество $A = (\mathscr{H},\ \sigma_h,\ P)$ сепарабельно и п. н. непрерывно, то $\bar{A} = \bar{\mathring{A}}$ и $\mathring{A} = \mathring{\bar{A}}$ п. н.*

Эти соотношения характеризуют «хорошие» множества, у которых ни $\bar{A}$ ни $\complement\mathring{A}$ не имеют изолированных точек. Такого рода модель весьма часто приемлема в практических приложениях. Например, можно полагать, что пористая среда должна достаточно удовлетворительно описываться как реализация некоторого сепарабельного п. н. непрерывного случайного множества на $(\mathscr{H},\ \sigma_h)$.

2.7. ПРИМЕРЫ

Пусть A — некоторое СЗМ. В практических приложениях важны следующие вероятности:

$$P(B) = P(\{B \subset A\}); \quad Q(B) = P(\{B \cap A = \varnothing\}) = 1 - T(B)$$

($B \in \mathscr{G}$ или $B \in \mathscr{K}$). Множество $\{F\colon F \in \mathscr{F},\ F \supset B\}$ замкнуто в $\mathscr{F}$ для любого подмножества $B \subset E$, так что вероятность $P(B)$ всегда существует.

В общем случае трудно (или практически невозможно) выписать явное выражение для P, зная Q, и наоборот. Тем не менее в том частном случае, когда $B \in \mathscr{F}$ — *конечное* множество, можно записать

$$Q(\{x_1, \ldots, x_n\}) = E\left(\prod_{i=1}^{n} 1_{A^c}(x_i)\right),$$

$$P(\{x_1, \ldots, x_n\}) = E\left(\prod_{i=1}^{n} 1_A(x_i)\right).$$

Используя соотношение $1_{A^c} = 1 - 1_A$, после несложных выкладок получаем

$$Q(\{x_1, \ldots, x_n\}) = 1 - \sum_{i=1}^{n} P(\{x_i\}) + \sum_{i_1 < i_2} P(\{x_{i_1}, x_{i_2}\}) + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^n P(\{x_1, \ldots, x_n\}).$$

Аналогичное соотношение справедливо и для функционала P.

Если мы имеем дело только с одной точкой $x \in E$, то $Q(x) = 1 - P(x)$. В случае пористой среды объединение A гранул среды можно рассматривать как реализацию некоторого СЗМ и $Q(x)$ — это *пористость* среды в точке $x \in E$. Если мы имеем дело с двумя точками x_1 и x_2, то

$$Q(x_1, x_2) = 1 - P(x_1) - P(x_2) + P(x_1, x_2).$$

Будем называть функцию $(x_1, x_2) \to P(x_1, x_2)$ (нецентрированной) *ковариацией* СЗМ A (или, более точно, его случайного индикатора 1_A). Если пространство E эвклидово, а вероятность P инвариантна относительно сдвига, то СЗМ A называется *стационарным*. В соответствии с теоремой Шоке, A стационарно тогда и только тогда, когда его функционал T инвариантен на $\mathcal{K}$ относительно сдвигов. Если A стационарно, то ковариация $P(x_1, x_2)$ зависит не от самих точек x_1 и x_2, а только от их разности. В связи с этим мы полагаем

$$C(h) = P(x, x + h)$$

и говорим, что функция $h \to C(h)$ является (стационарной) ковариацией СЗМ A.

Рассмотрим несколько формул преобразований. Предположим, что пространство E эвклидово и K — некоторое компактное множество в E: Тогда мы можем определить СЗМ $A \oplus \check{K}$ (*дилатацию* A посредством K) и $A \ominus \check{K}$ (*эрозию* A посредством K). Мы видели, что соотношение $x \in A \oplus \check{K}$ эквивалентно соотношению $K_x \cap A \neq \varnothing$, а $x \in A \ominus \check{K}$ эквивалентно $K_x \subset A$. Отсюда вытекает, что

$$P(K_x) = P(K_x \subset A) = P(x \in A \ominus \check{K}),$$
$$Q(K_x) = P(K_x \cap A = \varnothing) = P(x \in A \oplus \check{K}).$$

В стационарном случае эти вероятности не зависят от точки $x \in E$. К сожалению, выписать явные выражения для $P(x \in A^K)$ и $P(x \in A_K)$ не просто.

Теперь возникает вопрос об относительной площади поверхности СЗМ A. Если $K \in \mathcal{K}$, то обозначим через $V(\rho) = V(K \oplus \rho B)$ объем дилатации множества K шаром ρB с центром в нуле и радиусом $\rho \geqslant 0$. Простейший способ, используетмый в интегральной геометрии для определения площади поверхности $S(K)$ компактного множества K состоит в том, что полагается $S(K) = \lim (V(\rho) - V(0))/\rho$ при $\rho \downarrow 0$ (если этот предел существует). Переводя это определение на вероятностный язык, хотелось бы положить

$$\sigma(x) = \lim_{\rho \downarrow 0} \frac{P(x \in A \oplus \rho B) - P(x \in A)}{\rho}$$

(если этот предел существует) и говорить, что $\sigma(x)$ представляет собой значение в точке $x \in E$ относительной площади поверхности нашего СЗМ A. В частности, $\sigma(x)$ будет константой, если A стационарно. Однако такое определение в действительности не является удовлетворительным, поскольку оно не связано с геометрическими свойствами реализации СЗМ A. В общем случае доказательство существования некоторой случайной величины, связанной (в каком-либо смысле) с площадью или относительной площадью поверхности случайного замкнутого множества, — отнюдь не простая задача. Ниже мы рассмотрим только ряд частных случаев в гл. 4 и 5.

Гранулометрии

Обратимся теперь к изучению *гранулометрий* СЗМ A и его дополнения A^c относительно некоторого непустого выпуклого компактного множества $B \in C(\mathcal{K}')$. Согласно предложению 1.5.6, отображение $x \to \Lambda_A(x) = \sup \{\lambda: x \in A_{\lambda B}\}$ представляет собой случайную функцию, реализации (траектории, выборочные функции) которой полунепрерывны сверху, причем $P(\Lambda_A(x) \geqslant \lambda) = P(x \in A_{\lambda B})$ для любого $\lambda > 0$. Аналогичным образом, отображение $x \to \Lambda_{A^c}(x) = \sup \{\lambda: x \in A^c_{\lambda B}\}$ является случайной функцией, реализации которой полунепрерывны снизу, и $P(\Lambda_{A^c}(x) > \lambda) = P(x \notin A^{\lambda B})$ для любых $\lambda \geqslant 0$. Поэтому *функции распределения* случайных величин $\Lambda_A(x)$ и $\Lambda_{A^c}(x)$ характеризуют при каждом $x \in E$ гранулометрические свойства СЗМ A и его дополнения A^c, т. е. распределение размеров этих случайных множеств, измеренных в точке $x \in E$, по отношению к „стандартному“ множеству B. В стационарном случае эти гранулометрические распределения не зависят от точки $x \in E$ и представляют собой внутренние характеристики СЗМ A как такового.

За исключением нескольких весьма частных случаев (один пример см. в гл. 6), оказывается крайне сложным выразить эти гранулометрические распределения в терминах (скажем) функционалов P и Q. Однако есть случай, когда это возможно. Это ситуация, когда компактное множество B имеет вид

$B=\{\lambda u,\ 0\leqslant\lambda\leqslant 1\}$, где u — заданный единичный вектор в эвклидовом пространстве E. Соответствующие гранулометрии часто называют *линейными*. Рассмотрим случай *стационарного* СЗМ A в пространстве $E=\mathbf{R}^d$.

Пусть α — направление единичного вектора u, а $P_\alpha(l)$ — вероятность того, что множество $\{x+tu,\ 0\leqslant t\leqslant l\}$ содержится в A (в силу стационарности не зависящая от $x\in E$). Пусть, далее, $P_\alpha(l,\ l')$ — вероятность того, что множество $\{x+tu,\ -l'\leqslant t\leqslant l\}$ содержится в A. Ввиду стационарности мы имеем

$$P_\alpha(l,\ l')=P_\alpha(l+l'). \tag{a}$$

Эту вероятность можно связать со случайными величинами L и L', равными соответственно расстояниям от точки x до замкнутых множеств $\overline{A^c\cap D_\alpha(x)}$ и $\overline{A^c\cap D_{-\alpha}(x)}$, где $D_\alpha(x)=\{x+tu,\ t\geqslant 0\}$, а $D_{-\alpha}(x)=\{x+tu,\ t\leqslant 0\}$. Ясно, что

$$P_\alpha(l,\ l')=P(\{L\geqslant l\}\cap\{L'\geqslant l'\}),$$
$$P_\alpha(l)=P(\{L\geqslant l\})=P(\{L'\geqslant l\})^1.$$

Пусть $\bar\omega(\lambda)=E(\exp(-\lambda L))$ и $\psi(\lambda,\ \mu)=E(\exp(-\lambda L-\mu L'))$ $(\lambda,\ \mu\geqslant 0)$ — соответствующие преобразования Лапласа. Произведя элементарные вычисления, получаем из (a), что

$$\psi(\lambda,\ \mu)=\frac{\mu\bar\omega(\mu)-\lambda\bar\omega(\lambda)}{\mu-\lambda}.$$

Если μ сходится к λ, то $\psi(\lambda,\ \lambda)=\bar\omega(\lambda)+\lambda\bar\omega'(\lambda)$. Эта функция $\Phi(\lambda)=\psi(\lambda,\ \lambda)=E[\exp(-\lambda(L+L'))]$ является преобразованием Лапласа для $L+L'$. Обозначим через F_α закон распределения случайной величины $L+L'$. Тогда

$$\Phi(\lambda)=\int_0^\infty \exp(-\lambda x)\,F_\alpha(dx)=\frac{d}{d\lambda}(\lambda\bar\omega(\lambda)). \tag{b}$$

Заметим, что событие $\{L+L'\geqslant l\}$ эквивалентно событию $\{x\in A_l\}$ (т. е. событию, состоящему в том, что точка x принадлежит множеству A_l, получающемуся в результате заполнения A посредством множества $\{tu,\ 0\leqslant t\leqslant l\}$). Поэтому линейная гранулометрия $P(x\in A_l)$ задается формулой

$$P(x\in A_l)=1-F_\alpha(l). \tag{c}$$

С другой стороны, из (b) вытекает, что

$$\bar\omega(\lambda)=\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda \Phi(\mu)\,d\mu=\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty \frac{1-\exp(-\lambda x)}{x}\,F_\alpha(dx)$$

[1] Поскольку, согласно (a), $P_\alpha(l)=P_\alpha(l,0)=P_\alpha(0,l)$. — *Прим. ред.*

и, таким образом,

$$\frac{1-\tilde{\omega}(\lambda)}{\lambda}=\frac{1}{\lambda^2}\int\limits_0^\infty \frac{\exp(-\lambda x)-1+\lambda x}{x}F_\alpha(dx)=$$

$$=\int\limits_0^\infty \exp(-\lambda x)\,dx\int\limits_x^\infty \frac{y-x}{y}F_\alpha(dy).$$

Левая часть последнего соотношения есть преобразование Лапласа для $P_\alpha(l)$, и мы заключаем, что

$$P_\alpha(l)=\int\limits_l^\infty \frac{y-l}{y}F_\alpha(dy). \tag{d}$$

Интуитивный смысл соотношения (d) состоит в следующем. Если известно, что заданная точка $x\in E$ принадлежит некоторому сегменту сечения $A\cap(D_\alpha(x)\cup D_{-\alpha}(x))$, имеющему длину y, то один из концов этого сегмента может равновероятно попасть в любую точку отрезка $\{x+tu,\ 0\leqslant t\leqslant y\}$. Отсюда следует, что условная вероятность события $\{L\geqslant l\}$ равна $(y-l)/y$, если $l\leqslant y$, и нулю в противном случае.

В силу (d) функция $P_\alpha(l)$ выражается через гранулометрию F_α. Обратно, представляет также интерес выразить гранулометрию F_α через $P_\alpha(l)$. Из (d) видно, что функция P_α имеет производную $P'_\alpha(l)$ при каждом $l>0$, а (b) мы можем переписать так: $(1-\Phi(\lambda))/\lambda=(1-\tilde{\omega}(\lambda))/\lambda-\tilde{\omega}'(\lambda)$. Отсюда получаем желаемое выражение для гранулометрии:

$$1-F_\alpha(l)=P_\alpha(l)-lP'_\alpha(l).$$

Отметим, что линейная гранулометрия F_α является *взвешенной* (*с длинами*), а именно, для того чтобы оценить $1-F_\alpha(l)$ по конечному числу измеренных сегментов сечений, мы должны приписать каждому из этих сегментов вес, пропорциональный его длине l.

Экспериментально получаемая гистограмма, в которой наблюденные сегменты засчитываются все одинаково, с равными весами, соответствует *натуральной гранулометрии*[1], т. е. закону распределения $(C/l)F_\alpha(dl)$, в котором постоянная C определяется из соотношения $1/C=\int\limits_0^\infty(1/l)F_\alpha(dl)$ при условии, что последний интеграл конечен. Однако этот интеграл не обязательно схо-

[1] В оригинале number granulometry. — *Прим. перев.*

6 26

дится. Если $\int\limits_0^\infty (1/l)\, F_\alpha(dl) = \infty$, то существует бесконечное число бесконечно малых сегментов и натуральной гранулометрии не существует. (В противоположность этому взвешенная гранулометрия F_α существует всегда.) Тем не менее для любого $l > 0$ число $N(l)$ сегментов длины $\geqslant l$, начальные точки которых расположены на заданном единичном сегменте, не превосходит $1/l$, так что всегда можно определить *урезанную* натуральную гранулометрию. Действительно, событие $\{L' \in (l, l + dl)\}$ (вероятность которого равна $-P'_\alpha(l)\, dl$) эквивалентно событию {интервал $(x, x + dl)$ содержит начало некоторого сегмента длины $\geqslant l$, содержащегося в A}, и мы получаем

$$E(N(l)) = -P'_\alpha(l).$$

Сравнивая с (d), заключаем, что $E(N(l)) = \int\limits_l^\infty (1/y)\, F_\alpha(dy)$. В частности, среднее число сегментов сечения, т. е. $E(N(0))$, конечно тогда и только тогда, когда $1/C = \int\limits_0^\infty (1/y)\, F_\alpha(dy) < \infty$. В этом случае натуральная гранулометрия равна $(C/l)\, F_\alpha(dl)$, что следует из соотношения

$$\frac{E(N(l))}{E(N(0))} = C \int\limits_l^\infty \frac{1}{y}\, F_\alpha(dy).$$

Если $1/C = \infty$, то l_0-урезанная натуральная гранулометрия может быть определена соотношением

$$\frac{E(N(l))}{E(N(l_0))} = \frac{P'_\alpha(l)}{P'_\alpha(l_0)}.$$

ГЛАВА 3

БЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ЗАМКНУТЫЕ МНОЖЕСТВА (БДМ)

В этой главе мы исследуем некоторый подкласс класса СЗМ, а именно класс случайных замкнутых множеств, являющихся *безгранично делимыми* по отношению к операции объединения $\bigcup$. Такие множества мы кратко будем называть БДМ. В первом параграфе дается характеризация класса функционалов T или Q, соответствующих БДМ. Во втором показывается, что любое БДМ является объединением замкнутых множеств, принадлежащих некоторому пуассоновскому процессу в пространстве $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \setminus \{\varnothing\}$, причем верно и обратное. В качестве примеров мы рассмотрим: случай пуассоновского процесса в $\mathcal{K}'$ (булева модель с компактными гранулами), СЗМ в эвклидовом пространстве, устойчивые относительно взятия объединений, и пуассоновские плоскости.

Пространство E будет в этой главе ЛКС-пространством, но не компактным, так что и само $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \setminus \{\varnothing\}$ будет ЛКС-, но не компактным пространством. Вместо T мы будем использовать функционал $Q = 1 - T$[1], определяемый соотношением $Q(B) = P(\mathcal{F}^B) = P(A \cap B = \varnothing)$. Функционал Q, в частности, убывает, полунепрерывен снизу на $\mathcal{K}$ и полунепрерывен сверху на $\mathcal{G}$. Напомним, что два СЗМ A_1 и A_2 с функционалами Q_1 и Q_2 независимы тогда и только тогда, когда для любых K_1, $K_2 \in \mathcal{K}$

$$P(\{A_1 \in \mathcal{F}^{K_1}\} \cap \{A_2 \in \mathcal{F}^{K_1}\}) = Q_1(K_1) Q_2(K_2). \qquad (3.0)$$

3.1. ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ФУНКЦИОНАЛА Q, СООТВЕТСТВУЮЩЕГО БДМ

Пусть A — некоторое СЗМ, а Q — функционал на $\mathcal{K}$, определенный соотношением $Q(K) = P(\mathcal{F}^K) = P(\{A \cap K = \varnothing\})$, $K \in \mathcal{K}$. Мы назовем множество A *безгранично делимым* относительно $\bigcup$, (или кратко БДМ), если для любого целого $n > 0$ оно эквивалентно объединению $\bigcup_{i=1}^{n} A_i'$ независимых СЗМ A_i', $i = 1, 2, \ldots, n$,

[1] Функционал Q мы будем иногда, как и функционал T, называть *сопровождающим*. — *Прим. перев.*

эквивалентных друг другу. Это свойство фактически связано только с функционалом Q, поскольку, полагая $Q_n(K) = P(\{A'_i \cap K = \varnothing\})$, мы в соответствии с (3.0) имеем $Q = (Q_n)^n$, так что A является БДМ тогда и только тогда, когда функция $T_n = 1 - Q^{1/n}$ удовлетворяет условиям теоремы Шоке.

Для того чтобы дать характеризацию этих безгранично делимых функционалов Q, надо сначала исследовать случай, когда допускается существование в множестве A *фиксированных* точек. (*Определение*: точка x_0 называется фиксированной точкой множества A, если $P(\{x_0 \in A\}) = 1$, т. е. $Q(\{x_0\}) = 0$.)

Лемма 3.1.1. *Пусть A — БДМ. Тогда множество F его фиксированных точек замкнуто в E, а функционал Q, соответствующий A, удовлетворяет неравенству $Q(K) > 0$ для всех $K \in \mathscr{K}$, не пересекающихся с F.*

Доказательство. Поскольку Q полунепрерывен снизу на $\mathscr{K}' = \mathscr{K} \setminus \{\varnothing\}$, то множество таких $K \in \mathscr{K}'$, что $Q(K) = 0$, индуктивно относительно операции включения. Поэтому, в силу леммы Цорна, если $Q(K) = 0$, то существует минимальное $K_0 \in \mathscr{K}'$, такое, что $K_0 \subset K$ и $Q(K_0) = 0$. Если мы покажем, что всякое минимальное компактное множество K_0 есть точка (т. е. сводится к одной-единственной точке, которая, очевидно, является фиксированной), то тем самым докажем лемму. Действительно, объединение F этих фиксированных точек x_0 будет замкнутым множеством (так как A — СЗМ или же так как Q полунепрерывен снизу) и любое $K \in \mathscr{K}$, для которого $Q(K) = 0$, будет содержать минимальный компакт, т. е. некоторую фиксированную точку $x_0 \in F$, так что $K \cap F \neq \varnothing$.

Пусть K_0 — минимальное компактное множество, для которого $Q(K_0) = 0$. Покажем, что K_0 есть точка. Предположим, что в K_0 имеется две различные точки. Тогда найдутся $K_1, K_2 \in \mathscr{K}'$, такие, что $K_0 = K_1 \cup K_2$, $K_1 \neq K_2$. Но K_0 минимально, значит, $Q(K_1) > 0$ и $Q(K_2) > 0$. Поскольку $\mathscr{F}^{K_0} = \mathscr{F}^{K_1 \cup K_2} = \varnothing$ п. н., то мы имеем также

$$P(\mathscr{F}^{K_1} \cup \mathscr{F}^{K_2}) = Q(K_1) + Q(K_2).$$

Далее, множество A безгранично делимо и функционал $Q_n = Q^{1/n}$ является сопровождающим для соответствующего СЗМ A_n, которому, очевидно, отвечают те же минимальные компактные множества, что и самому A. Отсюда вытекает, что если P_n — вероятность на σ_f, определяемая A_n, то

$$P_n(\mathscr{F}^{K_1} \cup \mathscr{F}^{K_2}) = (Q(K_1))^{1/n} + (Q(K_2))^{1/n}.$$

Поскольку $Q(K_1) > 0$ и $Q(K_2) > 0$, то правая часть последнего равенства для достаточно больших n строго больше 1, что невозможно. Таким образом, K_0 есть точка, что и доказывает лемму.

Заменяя в случае необходимости пространство E на $E \cap F^c$ (также являющееся ЛКС-пространством) и СЗМ A на СЗМ $A \cap F^c$ в $\mathcal{F}(E \cap F^c)$, мы можем предполагать, что множество A не имеет фиксированных точек, т. е. что $Q > 0$ на $\mathcal{K}$.

Лемма 3.1.2. *Пусть T — емкость, удовлетворяющая условиям теоремы Шоке* (*теорема* 2.2.1), *и* $G(s) = \sum_0^\infty p_n s^n$ — *производящая функция некоторой вероятности, сосредоточенной на множестве целых неотрицательных чисел. Положим $Q = 1 - T$. Тогда $1 - G(Q)$ также является емкостью и удовлетворяет условиям теоремы Шоке.*

Доказательство. В соответствии с теоремой 2.2.1, Q представляет собой сопровождающий функционал некоторого СЗМ A, и для любого целого $N > 0$ функционал Q^N является сопровождающим функционалом объединения N независимых СЗМ, эквивалентных A. Пусть $\{A_n\}$ — последовательность независимых СЗМ, эквивалентных A, а N — случайная величина, не зависящая от A_n и такая, что $P(N = n) = p_n$. Нетрудно убедиться в том, что отображение $(N, A_1, A_2, \ldots) \to A_1 \cup \ldots \cup A_N$ из $\mathbf{N} \times \mathcal{F}^{\mathbf{N}}$ в $\mathcal{F}$ измеримо и что для $K \in \mathcal{K}$

$$P(\{A_1 \cup \ldots \cup A_N \in \mathcal{F}^K\}) = \sum p_n (Q(K))^n = G(Q(K)).$$

Утверждение леммы вытекает теперь из теоремы Шоке.

Следствие. *Если T — емкость, удовлетворяющая условиям теоремы Шоке, то таковой же является и $1 - \exp(-\lambda T)$ для любого $\lambda > 0$.*

Доказательство. Берем $G(s) = \exp(-\lambda(1 - s))$, т. е. производящую функцию распределения Пуассона.

Теорема 3.1.1. *Пусть Q — некоторый функционал на $\mathcal{K}$. Для существования* БДМ *A, не имеющего фиксированных точек и такого, что $Q(K) = P(\{A \cap K = \varnothing\})$, необходимо и достаточно, чтобы $Q = \exp(-\psi)$ для некоторой альтернирующей емкости ψ бесконечного порядка, удовлетворяющей условиям $\psi(\varnothing) = 0$ и $\psi(K) < \infty$ для любого $K \in \mathcal{K}$.*

Доказательство. Пусть A — БДМ без фиксированных точек. Тогда, согласно лемме 3.1.1, функционал Q строго положителен на $\mathcal{K}$ и $T_n = 1 - Q^{1/n}$ есть емкость Шоке. Для любого $K \in \mathcal{K}$ имеем $\psi(K) = -\log Q(K) = \lim (nT_n(K))$ при $n \uparrow \infty$ и $\psi(\varnothing) = 0$, $\psi(K) < \infty$. Функционал ψ полунепрерывен сверху, поскольку Q

полунепрерывен снизу и строго положителен на $\mathscr{K}$. С другой стороны, функционалы nT_n являются емкостями Шоке, так что функции S, связанные с ψ соотношениями (2.1.3), неотрицательны, будучи пределами соответствующих функций, связанных с nT_n. Поэтому ψ — емкость Шоке.

Докажем теперь достаточность. Пусть ψ — емкость Шоке, удовлетворяющая соотношениям $\psi(\varnothing)=0$ и $\psi(K)<\infty$ для любого $K\in\mathscr{K}$. Положим $Q=\exp(-\psi)$. Очевидно, что $Q(\varnothing)=1$ и $Q(K)\geqslant 0$, так что первое условие теоремы 2.2.1 выполняется для $1-Q$. Пусть $\{B_n\}\subset\mathscr{G}$ — такая последовательность, что $B_n\uparrow E$, $\bar{B}_n\in\mathscr{K}$ и $\bar{B}_n\subset B_{n+1}$ для всех $n>0$. Для каждого n определим функционал Q_n на $\mathscr{K}(\bar{B}_n)$, полагая $Q_n(K)=Q(K)=$ $=\exp(-\psi(K))$, $K\in\mathscr{K}$, $K\subset\bar{B}_n$. Для любого $K\in\mathscr{K}(\bar{B}_n)$ имеем $\psi(K)\leqslant\psi(\bar{B}_n)<\infty$. Если $\psi(\bar{B}_n)=0$ для всех $n>0$, то $Q=1$ является сопровождающим функционалом почти наверное пустого БДМ. Предположим, что $\psi(\bar{B}_n)>0$ для достаточно больших n. Емкость $\psi/\psi(\bar{B}_n)$ удовлетворяет на $\mathscr{K}(\bar{B}_n)$ условиям леммы 3.1.2. Согласно следствию этой леммы, если в нем взять $\lambda=\psi(\bar{B}_n)$, функционал $1-\exp(-\psi)$ является емкостью Шоке и удовлетворяет на $\mathscr{K}(\bar{B}_n)$ условиям теоремы 2.2.1. Таким образом, существует такое СЗМ A_n в $\mathscr{F}(\bar{B}_n)$, что $Q_n(K)=$ $=P(\{A_n\cap K=\varnothing\})$, $K\in\mathscr{K}(\bar{B}_n)$. Но условие (2.3.6) выполняется для последовательности $\{Q_n\}$, так что Q является функционалом на $\mathscr{K}(E)$, соответствующим индуктивному пределу A последовательности $\{A_n\}$. Этот предел A есть БДМ, поскольку при всяком целом $n>0$ функционал ψ/n удовлетворяет тем же условиям, что и сама емкость ψ, так что $Q^{1/n}=\exp(-\psi/n)$ также является сопровождающим функционалом некоторого СЗМ. Согласно лемме 3.1.1, A не имеет фиксированных точек, ибо для любого $K\in\mathscr{K}$, если $\psi(K)<\infty$, то $Q(K)>0$.

3.2. ПУАССОНОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ И σ-КОНЕЧНЫЕ МЕРЫ НА $\mathscr{F}'=\mathscr{F}\setminus\{\varnothing\}$

Пространство $\mathscr{F}'=\mathscr{F}\setminus\{\varnothing\}$ является ЛКС-пространством в относительной топологии, индуцируемой $\mathscr{F}$. Однако оно не компактно, поскольку предполагалось, что E не компактно. Окрестностями пустого множества $\varnothing$ в $\mathscr{F}$ служат множества $\mathscr{F}^K$, $K\in\mathscr{K}$. Поэтому каждое компактное подмножество пространства $\mathscr{F}'$ содержится в некотором $\mathscr{F}_K$, $K\in\mathscr{K}$. Пусть $\{B_n\}$ — такая последовательность множеств из $\mathscr{K}$, что $B_n\subset\mathring{B}_{n+1}$ и $B_n\uparrow E$. Тогда всякая σ-конечная мера θ на $\mathscr{F}'$ определяется своими сужениями на $\mathscr{F}_{B_n}$ для всех $n>0$. Обратно, если для любого

$n \geqslant 0$ задана мера θ_n на $\mathcal{F}_{B_n}$ и $\theta_{n+m}(\mathcal{V}') = \theta_n(\mathcal{V}')$ для $n, m > 0$ и $\mathcal{V}' \in \sigma_f$, $\mathcal{V}' \subset \mathcal{F}_{B_n}$, то соотношение

$$\theta(\mathcal{V}) = \lim_n \theta_n(\mathcal{V} \cap \mathcal{F}_{B_n}) \tag{3.2.1}$$

определяет σ-конечную меру θ на $\mathcal{F}'$.

Каждой положительной σ-конечной мере θ на $\mathcal{F}'$ соответствует некоторый пуассоновский процесс в $\mathcal{F}'$[1]. Объединение A замкнутых множеств, принадлежащих этому пуассоновскому процессу, почти наверное замкнуто в E, поскольку из $\theta(\mathcal{F}_{B_n}) < \infty$ вытекает, что каждое B_n почти наверное имеет непустые пересечения лишь с конечным числом этих замкнутых множеств. Более того, A есть СЗМ. Это следует из того, что событие $A \in \mathcal{F}^K$, $K \in \mathcal{K}$, эквивалентно событию {в $\mathcal{F}_K$ нет элементов указанного пуассоновского процесса}, последнее же измеримо и имеет вероятность

$$Q(K) = \exp[-\theta(\mathcal{F}_K)]. \tag{3.2.2}$$

Поскольку Q не обращается на $\mathcal{K}$ в нуль, то A есть БДМ без фиксированных точек. Обратно, в силу теоремы 3.1.1 всякое БДМ без фиксированных точек характеризуется сопровождающим функционалом $K \to Q(K) = \exp(-\psi(K))$, $K \in \mathcal{K}$, где ψ — емкость Шоке, удовлетворяющая условиям $\psi(\varnothing) = 0$ и $\psi < \infty$ на $\mathcal{K}$. Используя теорему Шоке (теорема 2.2.1), нетрудно показать, что существует единственная σ-конечная мера θ на $\mathcal{F}'$, удовлетворяющая соотношению $\theta(\mathcal{F}_K) = \psi(K)$ для всех $K \in \mathcal{K}$. Таким образом, класс σ-конечных неотрицательных мер на $\mathcal{F}'$ мы можем отождествить с классом БДМ без фиксированных точек и тем самым с классом таких пуассоновских процессов на $\mathcal{F}'$, для которых при любом $K \in \mathcal{K}$ в $\mathcal{F}_K$ почти наверное содержится лишь конечное число элементов этого процесса. Сформулируем теперь эти результаты в виде отдельного утверждения.

Предложение 3.2.1. *Пусть A — БДМ, а $K \to Q(K) = P(\{A \cap K = \varnothing\})$ — его сопровождающий функционал. Тогда следующие три условия эквивалентны:*

a) *A есть БДМ без фиксированных точек.*

b) *На $\mathcal{F}'$ существует (необходимо единственная) σ-конечная мера $\theta \geqslant 0$, такая, что $\theta(\mathcal{F}_K) = -\log Q(K)$ для любого $K \in \mathcal{K}$.*

---

[1] Он определяется по аналогии с точечным пуассоновским процессом, только здесь в качестве „точек“ берутся замкнутые множества и вероятность того, что в окрестности $\mathcal{F}_K$ будет равно n замкнутых множеств, равна $\dfrac{e^{-\theta(\mathcal{F}_K)}\theta(\mathcal{F}_K)^n}{n!}$, где θ — мера на $\mathcal{F}'$. — *Прим. ред.*

c) *A эквивалентно объединению множеств, принадлежащих некоторому локально конечному пуассоновскому процессу в $\mathcal{F}'$ (т. е. для каждого $K \in \mathcal{K}$ в $\mathcal{F}_K$ почти наверное содержится лишь конечное число элементов этого процесса).*

Замечание. Процедуру, использованную выше для построения БДМ, можно обобщить следующим образом. Пусть $\mathcal{V}$ — замкнутое подмножество пространства $\mathcal{F}'$. Тогда объединение $V = \bigcup \{F \in \mathcal{V}\}$ замкнуто в E и отображение $\mathcal{V} \to V$ из $\mathcal{F}(\mathcal{F}')$ в $\mathcal{F}(E)$ непрерывно, поскольку $V \in \mathcal{F}^B$ равносильно $\mathcal{V} \cap \mathcal{F}_B = \varnothing$. Таким образом, каждому СЗМ $\mathcal{A} = (\mathcal{F}(\mathcal{F}'), \sigma_f(\mathcal{F}'), \tilde{P})$ сопоставляется СЗМ $A = \bigcup \{F, F \in \mathcal{A}\}$, сопровождающий функционал Q которого есть $K \to Q(K) = \tilde{P}(A \cap K = \varnothing\} = \tilde{Q}(\mathcal{F}_K)$. В частности, если $\mathcal{A}$ — пуассоновский процесс на $\mathcal{F}'$, соответствующий σ-конечной мере $\theta \geqslant 0$, то $Q(K) = \tilde{Q}(\mathcal{F}_K) = \exp(-\theta(\mathcal{F}_K))$.

Результаты § 2.3, касающиеся условных вероятностей на σ_f, частично сохраняют силу и для σ-конечных мер и будут весьма полезны в дальнейшем. Пусть снова $\{B_n\} \subset \mathcal{K}$ — такая последовательность, что $B_n \subset \mathring{B}_{n+1}$ и $B_n \uparrow E$, и пусть θ — некоторая σ-конечная положительная мера на $\mathcal{F}'$. Будем предполагать, что $\theta \neq 0$, и обозначим через ψ емкость Шоке $K \to \psi(K) = \theta(\mathcal{F}_K)$, $K \in \mathcal{K}$. Поскольку $\theta \neq 0$, то $\psi(B_n) > 0$ для всех достаточно больших n, так что мы можем предположить, что $\psi(B_n) > 0$ для всех $n > 0$. Для каждого целого n определим на σ_f вероятность P_n, полагая

$$P_n(\mathcal{V}) = \frac{\theta(\mathcal{V} \cap \mathcal{F}_{B_n})}{\psi(B_n)} \quad (\mathcal{V} \in \sigma_f).$$

Пусть u — измеримое отображение из $(\mathcal{F}, \sigma_f)$ в некоторое пространство $(\Omega, \mathcal{H})$ и E_n — вероятность на $\mathcal{H}$, определяемая соотношением $F_n(H) = P_n(u^{-1}(H))$, $H \in \mathcal{H}$. В соответствии с результатами § 2.3, для F_n-почти всех $\omega \in \Omega$ существует вероятность $P_{u,n}(\cdot;\omega)$, такая, что для любых $H \in \mathcal{H}$ и $\mathcal{V} \in \sigma_f$

$$\theta(\mathcal{V} \cap \mathcal{F}_{B_n} \cap u^{-1}(H)) = \psi(B_n) \int_H P_{u,n}(\mathcal{V};\omega) F_n(d\omega). \quad (3.2.3)$$

Определим теперь на $\mathcal{H}$ вероятность G, положив

$$G = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} F_n.$$

Для каждого $n > 0$ вероятность F_n абсолютно непрерывна относительно G, так что существует такая последовательность $\{\varphi_n\}$ измеримых функций на Ω, что $F_n = \varphi_n G$. Если $\mathcal{V} \subset \mathcal{F}_{B_n}$ и $m > n$, то, как вытекает из (3.2.3), $\psi(B_n) P_{u,n}(\mathcal{V}; \cdot) F_n = \psi(B_m) P_{u,m}(\mathcal{V}, \cdot) F_m$, так что для G-почти всех $\omega \in \Omega$ и любых $\mathcal{V} \in \sigma_f$, $\mathcal{V} \subset \mathcal{F}_{B_n}$ выполняется соотношение

$$\varphi_n \psi(B_n) P_{u,n}(\mathcal{V}; \cdot) = \varphi_m \psi(B_m) P_{u,m}(\mathcal{V}; \cdot).$$

Таким образом, полагая для каждого $\mathcal{V} \in \sigma_f$

$$\theta_u(\mathcal{V}; \omega) = \lim_{n \uparrow \infty} \varphi_n(\omega) P_{u,n}(\mathcal{V}; \omega) \psi(B_n),$$

мы определяем для G-почти всех $\omega \in \Omega$ некоторую σ-конечную меру $\theta_u(\cdot; \omega) \geqslant 0$ на $\mathcal{F}'$. При этом, согласно (3.2.3), для любых $\mathcal{V} \in \sigma_f$ и $H \in \mathcal{H}$

$$\theta(\mathcal{V} \cap u^{-1}(H)) = \int_H \theta_u(\mathcal{V}, \omega) G(d\omega).$$

Из этого соотношения видно, что понятие условной вероятности на σ_f может быть распространено и на случай неотрицательных σ-конечных мер на $\mathcal{F}'$. Однако следует заметить, что вероятность G на $\mathcal{H}$ определяется уже не однозначным образом. Действительно, если φ — какая-либо измеримая функция на Ω, такая, что $\varphi > 0$ (G-п. н.) и $\int \varphi(\omega) G(d\omega) = 1$, то вместо G и θ_u можно взять соответственно φG и θ_u/φ. Подытожим полученные результаты.

Предложение 3.2.2. *Пусть θ — некоторая σ-конечная положительная мера на $\mathcal{F}'$, а u — измеримое отображение из $\mathcal{F}'$ в измеримое пространство $(\Omega, \mathcal{H})$. Тогда существуют такая вероятность G на $\mathcal{H}$ и для G-почти всех $\omega \in \mathcal{H}$ такие σ-конечные меры $\theta_u(\cdot; \omega) \geqslant 0$ на $\mathcal{F}'$, что для любых $H \in \mathcal{H}$ и $\mathcal{V} \in \sigma_f$*

$$\theta(\mathcal{V} \cap u^{-1}(H)) = \int_H \theta_u(\mathcal{V}; \omega) G(d\omega). \tag{3.2.4}$$

Если $\theta(\mathcal{V}) = 0$, то $\theta_u(\mathcal{V}; \omega) = 0$ (G-п. н.). Далее, для G-почти всех $\omega \in \Omega$ мы имеем $u(F) = \omega$ для $\theta_u(\cdot; \omega)$-почти всех $F \in \mathcal{F}'$.

Следствие. *Пусть φ—измеримое отображение пространства $\mathcal{F}'$ в себя. Если мера θ φ-инвариантна (т. е. $\theta(\mathcal{V}) = \theta(\varphi^{-1}(\mathcal{V}))$ для любого $\mathcal{V} \in \sigma_f$), а отображение u φ-инвариантно θ-п. н. (т. е. $\theta(\{u \circ \varphi \neq u\}) = 0$), то для G-почти всех $\omega \in \Omega$ мера $\theta_u(\cdot; \omega)$ φ-инвариантна.*

Доказательство. При сделанных предположениях для любых $H \in \mathcal{H}$ и $\mathcal{V} \in \sigma_f$ мы имеем $\theta(\mathcal{V} \cap u^{-1}(H)) = \theta(\varphi^{-1}(\mathcal{V}) \cap \varphi^{-1} u^{-1}(H)) =$

$=\theta(\varphi^{-1}(\mathscr{V})\cap u^{-1}(H))$. Поэтому, в силу (3.2.4), $\theta_u(\mathscr{V};\ \omega)=$ $=\theta_u(\varphi^{-1}(\mathscr{V});\ \omega)$ для G-почти всех $\omega\in\Omega$.

В предложении 3.2.2 мы представили меру θ при помощи вероятности G на $\mathscr{H}$ и условной σ-конечной меры θ_u на $\mathscr{F}'$. В ряде случаев, однако, хотелось бы иметь в некотором смысле обратное, а именно представить θ при помощи σ-конечной меры μ на Ω и условной вероятности P_u на $\mathscr{F}'$. К сожалению, это возможно не всегда.

Предложение 3.2.3. *При тех же обозначениях, что и в предложении 3.2.2, предположим, что существует такая последовательность $\{H_n\}\subset\mathscr{H}$, что $H_n\uparrow\Omega$ и $0<\theta(u^{-1}(H_n))<\infty$ для всех $n>0$. Тогда существуют σ-конечная мера $\mu\geqslant 0$ на $\mathscr{H}$ и для μ-почти каждого $\omega\in\Omega$ вероятность $P_u(\cdot\,;\ \omega)$ на σ_f, такие, что для любых $H\in\mathscr{H}$ и $\mathscr{V}\in\sigma_f$*

$$\theta(\mathscr{V}\cap u^{-1}(H))=\int\limits_H P_u(\mathscr{V};\ \omega)\,\mu(d\omega). \tag{3.2.5}$$

Доказательство. При сделанных предположениях для каждого $n>0$ можно определить вероятность P_n на σ_f, положив

$$P_n(\mathscr{V})=\frac{\theta(\mathscr{V}\cap u^{-1}(H_n))}{\theta(u^{-1}(H_n))}\qquad(\mathscr{V}\in\sigma_f).$$

Согласно результатам § 2.3, существуют вероятность F_n на $\mathscr{H}$ и для F_n-почти каждого $\omega\in\Omega$ условная вероятность $P_{u,n}(\cdot\,;\ \omega)$ на σ_f, такие, что

$$P_n(\mathscr{V}\cap u^{-1}(H))=\int\limits_H P_{u,n}(\mathscr{V};\ \omega)\,F_n(d\omega)$$

для любых $\mathscr{V}\in\sigma_f$ и $H\in\mathscr{H}$. Положим теперь $\mu_n=\theta(u^{-1}(H_n))\,F_n$. Для $H\subset H_n$ имеем тогда

$$\theta(\mathscr{V}\cap u^{-1}(H))=\int\limits_H P_{u,n}(\mathscr{V},\ \omega)\,\mu_n(d\omega).$$

Если $H\subset H_n$, то $\mu_n(H)=\theta(u^{-1}(H))$, так что $\mu_n=1_{H_n}\mu_{n+m}$ для любого $m>0$. Таким образом, полагая $\mu(H)=\lim\mu_n(H\cap H_n)$, мы определим на $\mathscr{H}$ σ-конечную меру μ, сужение которой на каждое H_n есть μ_n, и

$$\theta(\mathscr{V}\cap u^{-1}(H))=\int\limits_H P_{u,n}(\mathscr{V};\ \omega)\,\mu(d\omega),$$

если $H\subset H_n$. Отсюда вытекает существование такой вероятности P_u, что $P_{u,n}\uparrow P_u$ и выполняется (3.2.5).

Следствие 1. *Для любого* $\mathscr{V} \in \sigma_f$ *если* $\theta(\mathscr{V})=0$, *то* $P_u(\mathscr{V};\omega)=0$ *для* μ-*почти всех* $\omega \in \Omega$.

Следствие 2. *Пусть* $A_u(\omega)$ — СЗМ, *определяемое вероятностью* $P_u(\cdot;\omega)$. *Тогда для* μ-*почти всех* $\omega \in \Omega$ *справедливо равенство* $u(A_u(\omega))=\omega$ $(P_u(\cdot;\omega)$-*п. н.*).

Следствие 3. *Предположим, что существует такое измеримое отображение* φ *пространства* $\mathscr{F}'$ *в себя, что мера* θ φ-*инвариантна, и такое взаимно однозначное отображение* $\mathfrak{f}$ *пространства* Ω *в себя, измеримое вместе с обратным ему отображением* $\mathfrak{f}^{-1}$, *что* $u \circ \varphi = \mathfrak{f} \circ u$ θ-*п. н. в* $\mathscr{F}'$. *Тогда для* μ-*почти всех* $\omega \in \Omega$ *соотношение*

$$P_u(\mathscr{V};\omega)=P_u\left(\varphi^{-1}(\mathscr{V});\ \mathfrak{f}^{-1}(\omega)\right)$$

выполняется для любого $\mathscr{V} \in \sigma_f$.

Доказательство проводится аналогично доказательству соответствующих результатов в § 2.3.

3.3. СТАЦИОНАРНЫЕ БУЛЕВЫ МОДЕЛИ В ЭВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Теперь мы будем предполагать, что E — эвклидово пространство и σ-конечная мера $\theta \geqslant 0$ на $\mathscr{F}'$ сосредоточена на $\mathscr{K}'=\mathscr{K} \setminus \{\varnothing\}$, т. е. $\theta(\mathscr{F}' \setminus \mathscr{K}')=0$. Согласно предложению 3.2.1, мере θ соответствует некоторый пуассоновский процесс $\mathscr{A}$ на $\mathscr{K}'$. Случайное БДМ $A=\bigcup\{K\colon K \in \mathscr{A}\}$ называется *булевой моделью*. Если мера θ инвариантна относительно сдвигов, то соответствующая булева модель A стационарна.

Пусть $K \in \mathscr{K}'$ — непустое компактное множество и $u(K)$ — центр шара, описанного вокруг K. Нетрудно убедиться в том, что отображение $K \to u(K)$ непрерывно в относительной миопической топологии на $\mathscr{K}'$ и, следовательно, измеримо для $\sigma_f \cap \mathscr{P}(\mathscr{K}')$. Продолжим u на всё $\mathscr{F}'$, положив, например, для любого $F \in \mathscr{F}' \setminus \mathscr{K}'$ по определению $u(F)=0$. Тогда u будет измеримым отображением из $\mathscr{F}'$ в E.

Предположим теперь, что БДМ A стационарно, т. е. σ-конечная мера θ инвариантна относительно сдвигов. Тогда отображение $u\colon \mathscr{F}' \to E$ удовлетворяет условиям предложения 3.2.3. Действительно, пусть B — ограниченный полуоткрытый куб в E, а $\{y_k\} \subset E$ — такая последовательность, что последовательности $\{B_k\}$ и $\{B'_k\}$, $B_k = B \oplus \{y_k\}$, $B'_k = B \oplus \{-y_k\}$, образуют два разбиения эвклидова пространства E. Ввиду инвариантности относительно сдвигов можно записать

$$\infty > \theta(\mathcal{F}_B) = \sum_k \theta(u^{-1}(B_k) \cap \mathcal{F}_B) = \sum_k \theta\left(u^{-1}(B) \cap \mathcal{F}_{B'_k}\right) \geqslant$$

$$\geqslant \theta\left(u^{-1}(B) \cap \left(\bigcup_k \mathcal{F}_{B'_k}\right)\right) = \theta(u^{-1}(B)).$$

Отсюда следует, что $\theta(u^{-1}(K)) < \infty$ для любого $K \in \mathcal{K}'$. Поэтому в силу предложения 3.2.3, существуют σ-конечная мера $\mu \geqslant 0$ на E и для μ-почти всех $x \in E$ вероятности $P_u(\cdot\,;\, x)$ на σ_f, такие, что выполняется (3.2.5). Согласно следствию 1 предложения 3.2.3, вероятность $P_u(\cdot\,;\, x)$ сосредоточена на $\mathcal{K}'$. Для заданного $h \in E$ пусть φ — отображение $F \to F_k = F \oplus \{h\}$ пространства $\mathcal{F}'$ на себя (сдвиг на h). По предположению мера θ является φ-инвариантной. В то же время $u(K_h) = u(K) + h$. Поэтому $u \circ \varphi = f \circ u$ θ-почти всюду на $\mathcal{F}'$, где f обозначает сдвиг $x \to f(x) = x + h$. Таким образом, согласно следствию 3 предложения 3.2.3, мера μ инвариантна относительно сдвигов и, значит, *пропорциональна мере Лебега dx на E*, скажем $\mu(dx) = a\,dx$ для некоторой константы $a > 0$, и условная вероятность P_u (определенная почти всюду в E) удовлетворяет соотношению

$$P_u(\mathcal{V};\, x) = P_u(\mathcal{V}_{-x};\, 0)$$

($\mathcal{V} \in \sigma_f$, $\mathcal{V}_{-x} = \{F,\ F_x \in \mathcal{V} \cap \mathcal{F}'\}$). Другими словами, СЗМ $A(x)$, вероятность которого есть $P_0(\cdot\,;\, x)$, эквивалентно сдвинутому множеству $A_0 \oplus \{x\}$, где $A_0 = A(0)$ есть п. н. компактное СЗМ, соответствующее вероятности $P_u(\cdot\,;\, 0)$.

Центры шаров, описанных вокруг компактных множеств, принадлежащих пуассоновскому процессу $\mathcal{A}$ на $\mathcal{K}'$, образуют пуассоновский точечный процесс в E, поскольку мера μ пропорциональна мере Лебега. Для соответствующей булевой модели $A = \bigcup\{K\colon\ K \in \mathcal{A}\}$ сопровождающим будет функционал $Q = \exp(-\psi)$, определяемый соотношением

$$\psi(K) = \theta(\mathcal{F}_K) = a \int_E P_u(\mathcal{F}_K;\, x)\,dx = a \int_E P_u\left(F_{K_{-x}},\, 0\right) dx.$$

Далее, используя следствие 1 теоремы 2.5.1, мы получаем

$$a \int P_u(\mathcal{F}_{K_{-x}},\, 0)\,dx = a \int P(\{A_0 \cap K_{-x} \neq \varnothing\})\,dx = aE(V(A_0 \oplus \check{K})),$$

где V обозначает *объем*. Таким образом,

$$Q(K) = \exp[-aE(V(A_0 \oplus \check{K}))] \quad (K \in \mathcal{K}). \tag{3.3.1}$$

В гл. 5 мы рассмотрим булевы модели с другой точки зрения.

3.4. УСТОЙЧИВЫЕ СЗМ В ЭВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть снова E — эвклидово пространство. Мы говорим, что СЗМ A является $\bigcup$-*устойчивым* (или просто *устойчивым*), если для любого целого $n > 0$ существует такое вещественное $\lambda_n > 0$, что объединение $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ n независимых СЗМ A_i, эквивалентных A, эквивалентно $\lambda_n A$. Если Q: $K \to Q(\mathcal{F}^K)$ — сопровождающий функционал для A, то сопровождающим для λA будет функционал $K \to Q_\lambda(K) = Q(K/\lambda)$. Таким образом, A устойчиво тогда и только тогда, когда существует такая последовательность $\{\lambda_n\} \subset \mathbf{R}_+ \setminus \{0\}$, что

$$(Q(K))^n = Q\left(\frac{K}{\lambda_n}\right) \qquad (n > 0,\ K \in \mathcal{K}).$$

Если A устойчиво, то оно эквивалентно объединению $\bigcup\limits_{k=1}^{n} (A_i/\lambda_n)$, $n > 0$, и поэтому A есть БДМ. Предположим, что A не имеет фиксированных точек. Тогда по теореме 3.1.1 его функционал Q имеет вид $Q = \exp(-\psi)$, где ψ — емкость Шоке, удовлетворяющая условиям $\psi(\varnothing) = 0$ и $\psi(K) < \infty$, $K \in \mathcal{K}$. При этом A будет устойчивым тогда и только тогда, когда

$$n\psi(K) = \psi\left(\frac{K}{\lambda_n}\right) \qquad (n > 0,\ K \in \mathcal{K}). \tag{3.4.1}$$

В следующей теореме дается более удобный критерий.

Теорема 3.4.1. *Пусть A — СЗМ в эвклидовом пространстве, не имеющее фиксированных точек и не являющееся п. н. пустым. Тогда, для того чтобы A было $\bigcup$-устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы сопровождающий функционал Q: $K \to P(\mathcal{F}^K)$ имел вид $Q = \exp(-\psi)$, где ψ — емкость Шоке, удовлетворяющая условиям $\psi(\varnothing) = 0$ и $\psi(\lambda K) = \lambda^\alpha \psi(K)$ $(\lambda \geqslant 0,\ K \in \mathcal{K})$ для некоторого вещественного $\alpha > 0$.*

Доказательство. Достаточность очевидным образом вытекает из (3.4.1). Докажем необходимость. Пусть A — устойчивое СЗМ, не являющееся п. н. пустым и не имеющее фиксированных точек. Положим $\psi = -\log Q$.

a) Прежде всего, $\psi(\{0\}) = 0$, т. е. $Q(\{0\}) = 1$. Действительно, поскольку $(Q(\{0\}))^n = Q(\{0\})$, то $Q(\{0\}) = 0$ или 1. Но случай $Q(\{0\}) = 0$ невозможен, так как у A нет фиксированных точек.

b) Пусть B — единичный шар. Если существует такое вещественное $a \geqslant 0$, что $\psi(aB) = \psi(B)$, то $a = 1$. Действительно, при, скажем, $a > 1$ из равенств $\psi(a^n B) = \psi(B) = \psi(a^{-n} B)$ вытекало бы, что $\psi(E) = \psi(\{0\})$, поскольку $a^n B \uparrow E$ и $a^{-n} B \downarrow \{0\}$. Но тогда, в силу части a) доказательства, $\psi(E)=0$, а следовательно A должно быть п. н. пустым.

c) Используя (3.4.1), нетрудно убедиться в том, что для всякого рационального $r>0$ существует такое $\lambda_r>0$, что $r\psi(K)=\psi(K/\lambda_r)$, $K\in\mathscr{K}$. Отсюда в свою очередь вытекает, что $\psi(K/\lambda_r\lambda_{r'})=r\psi(K/\lambda_{r'})=rr'\psi(K)$. Поэтому, согласно части b),

$$\lambda_{rr'}=\lambda_r\lambda_{r'} \quad (r,\ r' \text{ — рациональные числа} > 0). \tag{3.4.2}$$

d) Пусть $K\in C(\mathscr{K}_0)$, т. е. K выпукло, компактно и $0\in K$. Для любого $\lambda\geqslant 1$ имеет место включение $K/\lambda\subset K$, и для любого $0<\lambda\leqslant 1$ справедливо обратное включение $K/\lambda\supset K$. Пусть r — рациональное число >1. Поскольку $\psi(K/\lambda_r)=r\psi(K)>\psi(K)$, а ψ — возрастающая функция, то $K/\lambda_r\supset K$, и, значит, $\lambda_r\leqslant 1$. В соответствии с (3.4.1) функция $r\to\lambda_r$ не возрастает. Поэтому она непрерывна справа ввиду полунепрерывности сверху емкости ψ. Применяя (3.4.2), получаем, что $\lambda_r=r^{-1/\alpha}$ для некоторого вещественного $\alpha>0$, так что

$$\psi(r^{1/\alpha}K)=r\psi(K) \quad (r \text{ — рациональное} \geqslant 0). \tag{3.4.3}$$

e) Осталось показать, что (3.4.3) выполняется для всех вещественных $r\geqslant 0$. Пусть x — положительное вещественное число и $\{r_n\}$ — убывающая последовательность рациональных чисел, сходящаяся к x, $r_n\downarrow x$. В силу непрерывности гомотетий, $x^{1/\alpha}K=\lim(r_n)^{1/\alpha}K$ для любого $K\in\mathscr{K}$. Но ψ полунепрерывна сверху, и из (3.4.3) следует, что

$$x\psi(K)=\lim\psi(r_n^{1/\alpha}K)\leqslant\psi(x^{1/\alpha}K).$$

Обратно, пусть ε — произвольное вещественное число >0. Из определения (1.4.1) метрики Хаусдорфа вытекает, что для достаточно больших n

$$x^{1/\alpha}K\subset(r_n^{1/\alpha}K)\oplus\varepsilon B=(r_n)^{1/\alpha}(K\oplus\varepsilon r_n^{-1/\alpha}B)$$

(B — единичный шар). С другой стороны, $r_n^{-1/\alpha}\leqslant x^{-1/\alpha}$, поскольку последовательность $\{r_n\}$ убывающая, так что $x^{1/\alpha}K\subset r_n^{1/\alpha}\times\times(K\oplus\varepsilon x^{-1/\alpha}B)$. Но r_n — рациональное число, значит, для него выполняется (3.4.3). Поэтому $\psi(x^{1/\alpha}K)\leqslant r_n\psi(K\oplus\varepsilon x^{-1/\alpha}B)$, так что $\psi(x^{1/\alpha}K)\leqslant x\psi(K\oplus\varepsilon x^{-1/\alpha}B)$. Устремляя $\varepsilon\downarrow 0$, получаем $\psi(x^{1/\alpha}K)\leqslant x\psi(K)$, поскольку ψ полунепрерывна снизу, и, следовательно, (3.4.3) выполняется для $r=x$.

Пример. В трехмерном эвклидовом пространстве $E=\mathbf{R}^3$ условиям теоремы 3.4.1 удовлетворяет *ньютонова емкость*. Таким образом, если ψ — ньютонова емкость, то существует некоторое СЗМ A в $\mathbf{R}^3$, сопровождающий функционал которого $Q=\exp(-\psi)$. Такое СЗМ называется *гармоническим* (см.

Шоке, 1953/54). Хорошо известно, что ψ инвариантна относительно сдвигов (а значит, A стационарно) и относительно вращений (так что A изотропно). Если B_r и C_r — соответственно шар и круг радиуса r, то $\psi(B_r) = r$ и $\psi(C_r) = 2r/\pi$. Напротив, прямая линия имеет емкость 0 и поэтому п. н. не пересекается с A. Далее, $\psi(\lambda K) = \lambda\psi(K)$ для любого $K \in \mathcal{K}$ и, следовательно, устойчиво.

Опишем теперь явную процедуру построения указанного гармонического СЗМ и исследуем его связь с броуновским движением. Пусть B — шар произвольно большого радиуса. Поскольку $0 < \psi(B) < \infty$, то функционал T': $K \to T'(K) = \psi(B \cap K)/\psi(B)$, $K \in \mathcal{K}$, удовлетворяет условиям теоремы Шоке и является сопровождающим для некоторого СЗМ $A' \subset B$. Если $\{A'_n\}$ — последовательность независимых СЗМ, эквивалентных A', а N — пуассоновская случайная величина, не зависящая от $\{A'_n\}$ и такая, что $E(N) = \psi(B)$, то СЗМ $A \cap B$ эквивалентно $A'_1 \cup \ldots \cup A'_N$, и само A может быть получено при помощи процедуры индуктивного предела, если радиус шара B устремить к бесконечности.

Что касается СЗМ A', то его можно построить следующим образом. Пусть μ_B — вероятность с носителем B (т. е. сосредоточенная на B), соответствующая почти всюду постоянному потенциалу U_B на B (известно, что μ_B фактически сосредоточена на границе ∂B шара B). Тогда, по самому определению ньютоновой емкости, $U_B = 1/\psi(B)$. Пусть $K \in \mathcal{K}$ содержится в B и μ_K — сосредоточенная на (границе) K мера, соответствующая почти всюду на K тому же самому постоянному потенциалу U_B, так что

$$\int \mu_K(dx) = \frac{U_B}{U_K} = \frac{\psi(K)}{\psi(B)}.$$

Иными словами, этот интеграл равен $P(A' \cap K \neq \varnothing)$. Но хорошо известно, что μ_K представляет собой также закон распределения точки первого попадания в множество K частицы, совершающей броуновское движение и имеющей начальное распределение μ_B. В частности, $\int \mu_K(dx)$ есть вероятность того, что траектория этого броуновского движения пересечется с K, так что A' эквивалентно этой траектории. Отсюда мы получаем следующую процедуру. В момент $t = 0$ запускается пуассоновское случайное число N броуновских частиц с одним и тем же начальным распределением μ_B и берется объединение их траекторий. Это объединение эквивалентно на B СЗМ $A \cap B$.

3.5. ПУАССОНОВСКИЕ ПЛОСКОСТИ В ЭВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В качестве третьего примера рассмотрим пуассоновские процессы линейных многообразий (или *пуассоновские плоскости*) в эвклидовом пространстве $E=\mathbf{R}^d$ (дальнейшее их исследование проводится в гл. 4 и 6). Пусть $\mathcal{S}_k$ — класс всех *k-мерных подпространств* в E. Если $k=0$, то $\mathcal{S}_k=\{0\}$; если $k=d$, то $\mathcal{S}_d=\{\mathbf{R}^d\}$. Для $0\leqslant k\leqslant d$ класс $\mathcal{S}_k$ замкнут в $\mathcal{F}$ и компактен в $\mathcal{F}'=\mathcal{F}\setminus\{\varnothing\}$ ввиду включения $\mathcal{S}_k\subset\mathcal{F}_{\{0\}}$. Пусть, далее, $\mathcal{V}_k$ — класс всех *k-мерных линейных многообразий* в $\mathbf{R}^d$, т. е. каждое $V\in\mathcal{V}_k$ получается сдвигом некоторого $S\in\mathcal{S}_k$. Для $k=0$ класс $\mathcal{V}_0$ представляет собой класс одноточечных множеств $\{x\}$, $x\in\mathbf{R}^d$; его можно отождествить с самим $\mathbf{R}^d$. Для $k=d$ имеем $\mathcal{V}_d=\{\mathbf{R}^d\}$. Заметим, что класс $\mathcal{V}_k$ замкнут в $\mathcal{F}'$, но не в $\mathcal{F}$, потому что существуют такие последовательности $\{V_n\}\subset\mathcal{V}_k$, что $\varnothing=\lim V_n$ в $\mathcal{F}$ [1].

Если S — элемент класса $\mathcal{S}_k$, то мы обозначаем через $S^\perp\in\mathcal{S}_{d-k}$ ортогональное ему подпространство в E. Очевидно, отображение $S\to S^\perp$ является гомеоморфизмом $\mathcal{S}_k$ на $\mathcal{S}_{d-k}$ (в относительных $\mathcal{F}$-топологиях). Всякое многообразие $V\in\mathcal{V}_k$ определяется своим *направлением* $S\in\mathcal{S}_k$ (т. е. k-мерным подпространством, параллельным V) и точкой пересечения с ортогональным подпространством — той единственной точкой $s\in S^\perp$, для которой $\{s\}=V\cap S^\perp$. В частности, линейные многообразия, параллельные некоторому фиксированному $S\in\mathcal{S}_k$, образуют подпространство в $\mathcal{V}_k$, гомеоморфное $\mathbf{R}^{d-k}$.

С каждой σ-конечной мерой $\theta\geqslant 0$, сосредоточенной на $\mathcal{V}_k$ (т. е. такой, что $\theta(\mathcal{F}'\setminus\mathcal{V}_k)=0$), связан некоторый *пуассоновский процесс* $\mathcal{A}$ *в* $\mathcal{V}_k$. При этом БДМ $A=\bigcup\{F,\ F\in\mathcal{A}\}$ называется k-мерной *пуассоновской сетью плоскостей*. Мы будем предполагать в дальнейшем, что мера θ инвариантна относительно сдвигов, тем самым ограничиваясь рассмотрением стационарных пуассоновских сетей. Как обычно, мы обозначаем через Q функционал $K\to Q(K)=P(\{A\cap K\}=\varnothing)$ и полагаем $\psi=-\log Q$, т. е. $\psi(K)=\theta(\mathcal{F}_K)$, $K\in\mathcal{K}$.

Наша цель состоит в том, чтобы найти вид этого функционала ψ в случае, когда он соответствует стационарной пуассоновской сети. Пусть θ — соответствующая σ-конечная мера, инвариантная относительно сдвигов и сосредоточенная на $\mathcal{V}_k$. Если $k=0$, то $\mathcal{V}_0$ гомеоморфно E и θ представляет собой

---

[1] Например, $V_n=S_{n\alpha}$, где α — единичный вектор, перпендикулярный некоторому подпространству S. — *Прим. ред.*

меру, индуцированную при этом гомеоморфизме некоторой σ-конечной мерой на E, инвариантной относительно сдвигов, т. е. пропорциональной мере Лебега на E. Иначе говоря, соответствующее БДМ A является точечным пуассоновским процессом в E. Если $k=d$, то БДМ A п. н. совпадает с E.

Предположим, что $0<k<d$. Мы уже видели, что любое $V\in\mathscr{V}_k$ задается парой (S, s), где $S\in\mathscr{S}_k$ — направление V, а $s\in S^{\perp}$ — точка пересечения $s\in V\cap S^{\perp}$. Ясно, что отображение $V\to S$ непрерывно на $\mathscr{V}_k$. Полагая $u(V)=S$, $V\in\mathscr{V}_k$, мы определим θ-п. в. на $\mathscr{F}'$ измеримое отображение из $\mathscr{F}'$ в $\mathscr{S}_k$. Согласно предложению 3.2.2, существуют вероятность G на $\mathscr{S}_k$ и для G-почти всех $S\in\mathscr{S}_k$ такие σ-конечные меры $\theta_u(\cdot\,;S)\geqslant 0$ на σ_f, что имеет место (3.2.4). Далее, мера θ_u сосредоточена на $\mathscr{V}_k$ и $u(V)=S$ $\theta_u(\cdot\,;S)$-п. в. на $\mathscr{F}'$, так что мера $\theta_u(\cdot\,;S)$ сосредоточена на подпространстве $\mathscr{V}_k(S)\subset\mathscr{V}_k$, определяемом соотношением $\mathscr{V}_k(S)=\{V\colon V\in\mathscr{V}_k, u(V)=S\}$. Если $s(V)$ — точка пересечения $s(V)\in V\cap S^{\perp}$, то отображение $V\to s(V)$ является гомеоморфизмом $\mathscr{V}_k(S)$ на $S^{\perp}$, и $\theta_u(\cdot\,;S)$ может быть отождествлена с такой σ-конечной мерой μ_S на $S^{\perp}$, для которой

$$\theta_a(\mathscr{F}_K;\,S)=\mu_S(\Pi_{S^{\perp}}K)\quad(K\in\mathscr{K}).$$

В этом соотношении $\Pi_{S^{\perp}}K$ — проекция K на $S^{\perp}$.

С другой стороны, отображение u θ-п. в. инвариантно относительно сдвигов и, согласно следствию предложения 3.2.2, таковы же меры θ_u и μ_S. Таким образом, μ_S пропорциональна мере Лебега на $S^{\perp}$. Обозначим через μ_{d-k} меру Лебега на эвклидовом пространстве $\mathbf{R}^{d-k}$ (отождествляемом с $S^{\perp}$). Тогда для G-почти всех $S\in\mathscr{S}_k$ мы имеем

$$\theta_u(\mathscr{F}_K;\,S)=\varphi(S)\,\mu_{d-k}(\Pi_{S^{\perp}}K)\quad(K\in\mathscr{K}),$$

где $\varphi(S)$ — коэффициент пропорциональности, и в силу (3.2.4)

$$\theta(\mathscr{F}_K)=\int\limits_{\mathscr{S}_k}\varphi(S)\,\mu_{d-k}(\Pi_{S^{\perp}}K)\,G(dS).$$

В частности, функция $S\to\varphi(S)$ G-интегрируема на $\mathscr{S}_k$ (поскольку $\mu_{d-k}(\Pi_{S^{\perp}}K)=\text{const}$, если K — единичный шар в $\mathbf{R}^d$).

Беря $\varphi G/a$, где $a=\int\varphi(S)\,G(dS)$, в качестве новой меры G, получаем следующее представление для ψ:

$$\psi(K)=a\int\limits_{\mathscr{S}_k}\mu_{d-k}(\Pi_{S^{\perp}}K)\,G(dS)\quad(K\in\mathscr{K}).\tag{3.5.1}$$

Обратно, пусть G — некоторая вероятность на $\mathscr{S}_k$ и $a>0$ — некоторое вещественное число. Определим функцию $K\to\psi(K)$

соотношением (3.5.1). Тогда из сходимости $K_n \downarrow K$ в $\mathcal{K}$ вытекает сходимость $\Pi_{S^\perp}K_n \downarrow \Pi_{S^\perp}(K)$. Поэтому $\mu_{d-k}(\Pi_{S^\perp}K_n) \downarrow \mu_{d-k}(\Pi_{S^\perp}K)$ и, значит, $\psi(K_n) \downarrow \psi(K)$, в силу непрерывности интеграла. Отсюда вытекает, что ψ полунепрерывна сверху на $\mathcal{K}$. Из очевидной формулы

$$\Pi_{S^\perp}(K \cup K') = (\Pi_{S^\perp}K) \cup (\Pi_{S^\perp}K')$$

следует, что функционал $K \to \mu_{d-k}(\Pi_{S^\perp}K)$ удовлетворяет для каждого $S \in \mathcal{S}_k$ условиям положительности, требующимся для того, чтобы он был емкостью Шоке. Отсюда в свою очередь вытекает, что емкостью Шоке является и сама функция ψ. Но тогда по теореме 3.1.1 существует такое БДМ A, что $P(\{A \cap K = \varnothing\}) = \exp(-\psi(K))$, $K \in \mathcal{K}$.

Остается убедиться в том, что A представляет собой k-мерную пуассоновскую сеть плоскостей. Для любого $S \in \mathcal{S}_k$ пусть θ_S — такая σ-конечная положительная мера на $\mathcal{F}'$, что $\theta_S(\mathcal{F}_K) = a\mu_{d-k}(\Pi_{S^\perp}K)$. Ясно, что эта мера θ_S сосредоточена на $\mathcal{V}_k(S)$. Поэтому и сама мера $\theta(\cdot) = \int_{\mathcal{S}_k} \theta_S(\cdot)\,G(dS)$ сосредоточена на $\mathcal{V}_k$, и A — стационарная пуассоновская сеть. Подытожим полученный результат (чуть изменив обозначения).

Предложение 3.5.1. *Для того чтобы СЗМ A было стационарной k-мерной пуассоновской сетью плоскостей, необходимо и достаточно, чтобы соответствующий ему функционал $\psi = -\log Q$ допускал представление*

$$\psi(K) = \int_{\mathcal{S}_k} \mu_{d-k}(\Pi_{S^\perp}K)\,G(dS) \quad (K \in \mathcal{K}), \tag{3.5.1'}$$

где G — некоторая положительная мера на $\mathcal{S}_k$. (Здесь $\Pi_{S^\perp}K$ — проекция множества K на ортогональное подпространство $S^\perp \in \mathcal{S}_{d-k}$, а μ_{d-k} — мера Лебега в пространстве $S^\perp$, отождествляемом с $\mathbb{R}^{d-k}$.)

Результаты, относящиеся к пространству $C(\mathcal{K}')$

Пространство $C(\mathcal{K}')$ непустых выпуклых компактных подмножеств в $E = \mathbb{R}^d$ будет детально изучаться в гл. 4 одновременно с точки зрения интегральной геометрии и с точки зрения теории СЗМ. Для того чтобы подготовиться к этому более общему исследованию, приведем несколько результатов, касающихся сужения на $C(\mathcal{K}')$ функционала ψ, определенного соотношением (3.5.1').

Определение 3.5.1. *Функционал ψ на $C(\mathscr{K}')$ называется C-аддитивным, если из того, что K, K' и $K \cup K' \in C(\mathscr{K}')$, вытекает, что*

$$\psi(K \cup K') + \psi(K \cap K') = \psi(K) + \psi(K'). \tag{3.5.2}$$

Предложение 3.5.2. *Функционал ψ, определенный соотношением* (3.5.1′), *непрерывен и C-аддитивен на $C(\mathscr{K}')$.*

Доказательство. Для любых K, $K' \in C(\mathscr{K}')$ и $S \in \mathscr{S}_k$ имеем $\Pi_{S\perp}(K \cup K') = (\Pi_{S\perp}K) \cup (\Pi_{S\perp}K')$. Далее, как легко убедиться, если $K \cup K'$ выпукло, то выполняется также соотношение $\Pi_{S\perp}(K \cap K') = (\Pi_{S\perp}K) \cap (\Pi_{S\perp}K')$. Ввиду аддитивности меры Лебега на μ_{d-k} получаем поэтому

$$\mu_{d-k}(\Pi_{S\perp}(K \cup K')) + \mu_{d-k}(\Pi_{S\perp}(K \cap K')) = \\ = \mu_{d-k}(\Pi_{S\perp}K) + \mu_{d-k}(\Pi_{S\perp}K').$$

В силу (3.5.1′) отсюда следует, что функционал ψ является C-аддитивным на $C(\mathscr{K}')$.

Для доказательства непрерывности нам понадобятся следующие три леммы.

Лемма 3.5.1. *Отображение $F \to \mathring{F}$ из $C(\mathscr{F})$ в $C(\mathscr{G})$ непрерывно.*

Доказательство. Согласно следствию 2 предложения 1.2.4, отображение $F \to \complement\mathring{F}$ из $\mathscr{F}$ в $\mathscr{F}$ полунепрерывно снизу, так что нам надо доказать, что сужение на $C(\mathscr{F})$ этого отображения полунепрерывно сверху. Пусть $\{F_n\} \subset C(\mathscr{F})$ — последовательность, сходящаяся в $\mathscr{F}$ к $F = \lim F_n$. В силу предложения 1.5.4, $F \in C(\mathscr{F})$. Пусть $\{F_{n_k}\}$ — произвольная подпоследовательность последовательности $\{F_n\}$, и пусть для каждого k существует такая точка $x_{n_k} \notin \mathring{F}_{n_k}$, что $\lim x_{n_k} = x$ в E. Для каждого $k > 0$ найдется такое замкнутое полупространство H_{n_k}, что $x_{n_k} \in H_{n_k}$ и $F_{n_k} \cap \mathring{H}_{n_k} = \varnothing$. У последовательности $\{\mathring{H}_{n_k}, H_{n_k}\}$ в компактном пространстве $\mathscr{H}$ имеется точка прикосновения $\{\mathring{H}, H\}$, где H снова — замкнутое полупространство (или же $H = \mathbf{R}^d$, если $F = \varnothing$). Поскольку $x_{n_k} \in H_{n_k}$ и $F_{n_k} \subset \complement\mathring{H}_{n_k}$, мы получаем, что $x \in H$ и $F \cap \mathring{H} = \varnothing$, так что $\mathring{F} \cap H = \varnothing$.

Таким образом, $x \notin \mathring{F}$ и $\overline{\lim} \complement\mathring{F}_n \subset \complement\mathring{F}$. В силу предложения 1.2.4 отсюда следует, что отображение $F \to \complement\mathring{F}$ полунепрерывно сверху на $C(\mathscr{F})$.

Лемма 3.5.2. *Мера Лебега непрерывна на $C(\mathscr{K}')$.*

Доказательство. Пусть μ — мера Лебега на эвклидовом пространстве $E=\mathbf{R}^d$. Для любого $K\in C(\mathcal{K}')$ имеем $\mu(K)=\mu(\overset{\circ}{K})$. Если $\overset{\circ}{K}=\varnothing$, то размерность K меньше d и поэтому $\mu(K)=\mu(\overset{\circ}{K})=0$. Если $\overset{\circ}{K}\neq\varnothing$, то можно предположить, что $0\in\overset{\circ}{K}$. Для любого $\lambda>0$ имеем $\mu(\lambda K)=\lambda^d\mu(K)$, и из $\overset{\circ}{K}=\lim\lambda K$, $\lambda\uparrow 1$, вытекает, что $\mu(\overset{\circ}{K})=\lim\mu(\lambda K)=\mu(K)$.

С другой стороны, мера μ полунепрерывна сверху на $\mathcal{K}$ и полунепрерывна снизу на $\mathcal{G}$. Пусть $\{K_n\}$ — некоторая последовательность в $C(\mathcal{K}')$ и $K=\lim K_n$. Из леммы 3.5.1 вытекает, что $\lim\overset{\circ}{K}_n=\overset{\circ}{K}$ в $\mathcal{G}$, так что $\mu(K)=\mu(\overset{\circ}{K})\leqslant\underline{\lim}\,\mu(\overset{\circ}{K}_n)\leqslant\overline{\lim}\,\mu(K_n)\leqslant\mu(K)$. Отсюда $\mu(K)=\lim\mu(K_n)$.

Лемма 3.5.3. *Отображение $(S, K)\to\Pi_{S\perp}K$ из $\mathcal{S}_k\times\mathcal{K}'$ в $\mathcal{K}'$ непрерывно.*

Доказательство. Пусть $\{S_n\}\subset\mathcal{S}_k$ и $\{K_n\}\subset\mathcal{K}'$ — некоторые последовательности и $S=\lim S_n$, $K=\lim K_n$ соответственно в $\mathcal{S}_k$ и $\mathcal{K}'$. Пусть, далее, $k\to x_{n_k}\in\Pi_{S^\perp_{n_k}}K_{n_k}$ — такая последовательность в E, что $\lim x_{n_k}=x$. Для каждого $k>0$ точка $x_{n_k}\in S^\perp_{n_k}$ и существует такая точка $y_{n_k}\in S_{n_k}$, что $z_{n_k}=x_{n_k}+y_{n_k}\in K_{n_k}$. Но компактные множества K_{n_k} все содержатся в некотором фиксированном $K_0\in\mathcal{K}'$, так что у последовательностей $\{z_{n_k}\}$, $\{x_{n_k}\}$ и $\{y_{n_k}\}$ имеются точки прикосновения z, x и y соответственно, причем $z=x+y$. Отсюда следует, что $y\in S$, $x\in S^\perp$ и $z\in K$. Таким образом, $x\in\Pi_{S\perp}K$ и отображение $(S, K)\to\Pi_{S\perp}K$ полунепрерывно сверху.

Пусть теперь x — некоторая точка из $\Pi_{S\perp}K$, так что $x\in S^\perp$ и $x+y\in K$ для некоторой точки $y\in S$. Для каждого $n>0$ найдется тогда точка $z_n\in K_n$, такая, что $x+y=\lim z_n$ в E и $z_n=x_n+y_n$, $x_n=\Pi_{S_n}z_n\in S_n$, $y_n=\Pi_{S^\perp_n}z_n\in S^\perp_n$. Из того, что $z=\lim z_n$, вытекает, как нетрудно проверить, что $\lim x_n=x_0\in S^\perp_n$, $\lim y_n=y_0\in S_n$ и $z=x_0+y_0$. В силу единственности ортогонального разложения векторов $z\in\mathbf{R}^d$ мы заключаем, что $x_0=x$ и $y_0=y$. Таким образом, $x=\lim x_n$ для последовательности $n\to x_n\in\Pi_{S^\perp_n}K_n$, и отображение $(S, K)\to\Pi_{S\perp}K$ полунепрерывно снизу.

Доказательство предложения 3.5.2 (окончание). Пусть b_k — объем единичного шара в $\mathbf{R}^k$. Для любых $K\in\mathcal{K}'$ и $S\in\mathcal{S}_k$ имеем

$$\mu_{d-k}(\Pi_{S\perp}K)=\frac{1}{b_k}\mu_d\left((\Pi_{S\perp}K)\oplus(B\cap S)\right)$$

(B — единичный шар в $\mathbf{R}^d$). В силу предложения 1.5.1 (т. е. непрерывности суммы Минковского $\oplus$) и лемм 3.5.2 и 3.5.3 отсюда вытекает, что отображение $(S, K) \to \mu_{d-k}(\Pi_{S\perp}K)$ непрерывно на $\mathcal{S}_k \times C(\mathcal{K}')$. Но пространство $\mathcal{S}_k$ компактно, и поэтому функция $K \to \mu_{d-k}(\Pi_{S\perp}K)$ непрерывна на $C(\mathcal{K}')$ равномерно относительно $S \in \mathcal{S}_k$. Следовательно, ввиду (3.5.1′), функционал ψ непрерывен на $C(\mathcal{K}')$.

Замечание. Мера Лебега μ_{d-k} на $\mathbf{R}^{d-k}$ является однородной функцией степени $d-k$ (см. (3.5.1′)). Поэтому соответствующая пуассоновская сеть является устойчивым СЗМ (теорема 3.4.1). Как мы увидим в гл. 5, C-аддитивность функционала ψ эквивалентна полумарковскому свойству соответствующего БДМ, так что любая стационарная пуассоновская сеть является устойчивой и полумарковской. Мы докажем (теорема 5.4.2) также и обратное, т. е. что любое устойчивое стационарное полумарковское СЗМ эквивалентно некоторой пуассоновской сети, так что эти условия характеризуют пуассоновскую сеть.

Случайные сечения компактного множества B

Пусть $A = \bigcup \mathcal{A}$ — некоторая k-мерная пуассоновская сеть плоскостей, а B — такое компактное множество, что $\psi(B) = \theta(\mathcal{F}_B) > 0$ (и потому, в силу (3.5.1′), B не содержится ни в каком линейном многообразии размерности, меньшей $d-k$). Вероятность того, что B пересекается с одним и только одним из линейных многообразий, принадлежащих пуассоновскому процессу $\mathcal{A}$ на $\mathcal{V}_k$, равна $\psi(B)\exp(-\psi(B))$. При условии выполнения этого события пусть A' обозначает это единственное (случайное) линейное многообразие, пересекающееся с B. Тогда $A' \cap B$ представляет собой СЗМ на $\mathcal{F}(B)$; оно называется *случайным сечением* (множества B пуассоновской сетью). В интегральной геометрии весьма подробно исследованы случайные сечения, соответствующие изотропным пуассоновским сетям. По существу вероятность случайного сечения $A' \cap B$ зависит только от меры $G \geqslant 0$ из соотношения (3.5.1) — точнее, она зависит лишь от вероятности $G/\int G(dS)$ на $\mathcal{S}_k$, — и в том частном случае, который рассматривается в интегральной геометрии, эта вероятность является единственной вероятностью на $\mathcal{S}_k$, инвариантной относительно сдвигов.

Вероятность события „ровно одно линейное многообразие попадает в $\mathcal{F}_B$ и ни одного — в $\mathcal{F}_B^K$“ равна $\psi(K)\exp(-\psi(B))$ для любого $K \in \mathcal{K}(B)$ (т. е. $K \subset B$), так что условный закон

T_B: $K \to T_B(K) = P(A' \cap B \in \mathscr{F}_K)$ определяется соотношением

$$T_B(K) = \frac{\psi(K)}{\psi(B)} \quad [K \in \mathscr{K}(B)].$$

Вместо $A' \cap B$ мы можем рассмотреть и само линейное многообразие A'. Его закон, также обозначаемый через T_B, можно определить уже на всем пространстве $\mathscr{K}$, а не только на $\mathscr{K}(B)$. Если $K \not\subset B$, то событие „ровно одно многообразие попадает в $\mathscr{F}_{B,K}$ и ни одного — в $\mathscr{F}_B^K$" имеет вероятность

$$\theta(\mathscr{F}_B \cap \mathscr{F}_K) \exp[-\theta(\mathscr{F}_B \cap \mathscr{F}_K) - \theta(\mathscr{F}_B \cap \mathscr{F}^K)] = \\ = \theta(\mathscr{F}_B \cap \mathscr{F}_K) \exp[-\theta(\mathscr{F}_B)].$$

Таким образом, в силу соотношения $\theta(\mathscr{F}_B \cap \mathscr{F}_K) = \psi(B) + \psi(K) - \psi(B \cup K)$, закон T_B задается для $K \in \mathscr{K}$ соотношением

$$T_B(K) = \frac{\psi(B) + \psi(K) - \psi(B \cup K)}{\psi(B)} \quad (K \in \mathscr{K}). \tag{3.5.3}$$

С другой стороны, многообразие $A' \in \mathscr{V}_k$ можно отождествить со (случайной) парой (S, s), где $S \in \mathscr{S}_k$ — направление многообразия A', а $x \in S^\perp$ — точка его пересечения с $S^\perp$, т. е. $\{s\} = A' \cap S^\perp$. Очевидно, что $s \in \Pi_{S^\perp} B$ п. н., поскольку A' пересекается с B. В соответствии с результатами § 2.3 существуют такая единственная вероятность F_B на $\mathscr{S}_k$ и для F_B-почти всякого $S \in \mathscr{S}_k$ такое условное СЗМ A'_S (которое п. н. содержится в $\mathscr{V}_k(S)$) с законом T_S, что

$$T_B(K) = \int_{\mathscr{S}_k} T_S(K) F_B(dS) \quad (K \in \mathscr{K}).$$

Сравнивая (3.5.3) и (3.5.1) и принимая во внимание единственность закона F_B и (для F_B-почти всех $S \in \mathscr{S}_k$) законов T_S, получаем следующие явные выражения:

$$\left.\begin{aligned} F_B(dS) &= \frac{\mu_{d-k}(\Pi_{S^\perp} B)\, G(dS)}{\int \mu_{d-k}(\Pi_{S^\perp} B)\, G(dS)}, \\ T_S(K) &= \frac{\mu_{d-k}((\Pi_{S^\perp} B) \cap (\Pi_{S^\perp} K))}{\mu_{d-k}(\Pi_{S^\perp} B)} \quad (K \in \mathscr{K}). \end{aligned}\right\} \tag{3.5.4}$$

Иначе говоря, *направление S случайного сечения A' имеет закон F_B, определяемый соотношением* (3.5.4) (*мера G, взвешенная с мерой проекции $\Pi_{S^\perp} B$*), *и для фиксированного S точка пересечения $s \in A' \cap S^\perp$ равномерно распределена на проекции $\Pi_{S^\perp} B$, т. е. имеет закон распределения вероятностей*

$$\left(1_{\Pi_{S^\perp} B}(s) / \mu_{d-k}(\Pi_{S^\perp} B)\right) \mu_{d-k}(ds).$$

Пуассоновская сеть, индуцируемая на линейном многообразии

Пусть p — такое целое число, что $d-k \leqslant p < d$, и пусть $V_p \in \mathscr{V}_p$ — некоторое p-мерное линейное многообразие в $E = \mathbf{R}^d$, а $S_p \in \mathscr{S}_p$ — его направление. Мы можем отождествить V_p с эвклидовым пространством $\mathbf{R}^p$. Рассмотрим тогда отображение α из $\mathscr{F}(\mathbf{R}^d)$ в $\mathscr{F}(\mathbf{R}^p)$, определяемое соотношением $\alpha(F) = F \cap V_p$, $F \in \mathscr{F}$. Это отображение полунепрерывно сверху и, следовательно, измеримо. Если θ — некоторая σ-конечная мера на $\mathscr{F}'(\mathbf{R}^d)$, то ее образом при отображении α является σ-конечная мера θ_p на $\mathscr{F}'(V_r)$, определяемая соотношением $\theta_r(\mathscr{V}) = \theta(\alpha^{-1}(\mathscr{V}))$ для всех $\mathscr{V} \in \sigma_f(V_p)$. Очевидно, что если мера θ инвариантна относительно сдвигов в $\mathbf{R}^d$, то мера θ_p будет инвариантной относительно сдвигов в $V_p = \mathbf{R}^p$. Поэтому, если A — некоторое БДМ на $\mathbf{R}^d$, соответствующее мере θ, то $A_p = A \cap V_p$ есть БДМ на $\mathbf{R}^p$, соответствующее мере θ_p, и A_p стационарно, если A стационарно в $\mathbf{R}^d$.

Вероятность стационарного БДМ A_p зависит только от направления S_p многообразия $V_p \in \mathscr{V}_p$ (и не зависит от точки пересечения $s \in V_p \cap S_p^{\perp}$). В частности, если A — стационарная пуассоновская сеть в $\mathbf{R}^d$, то A_p будет стационарной пуассоновской сетью в $V_p = \mathbf{R}^p$ (ее называют пуассоновской сетью, *индуцированной* на V_p сетью A). Действительно, мера θ инвариантна относительно сдвигов и сосредоточена на $\mathscr{V}_k(\mathbf{R}^d)$ и для θ-почти всех $F \in \mathscr{V}_p(\mathbf{R}^d)$ мы имеем $\alpha(F) = F \cap V_p \in \mathscr{V}_{k-d+p}(\mathbf{R}^p)$ $(0 \leqslant k-d+p < k)$, так что и мера θ_p инвариантна относительно сдвигов и сосредоточена на $\mathscr{V}_{k-d+p}(\mathbf{R}^p)$. Далее, пуассоновская сеть, индуцированная на V_p, является $(k+p-d)$-мерной. В частности, для $p = d-k$ индуцированная сеть представляет собой обычный стационарный точечный пуассоновский процесс в $\mathbf{R}^d$ и характеризуется постоянной „интенсивностью“[1]. Мы сначала исследуем именно этот частный случай.

В дальнейшем нам пригодятся следующие обозначения. Пусть S, S' — два подпространства $E = \mathbf{R}^d$ (быть может, различной размерности). *Через $|S, S'|$ мы будем обозначать абсолютную величину определителя линейного отображения* $s \to \Pi_{S'}s$ подпространства S в его образ в S', если размерность этого образа равна $\dim S$; в противном случае полагаем $|S, S'| = 0$.

[1] В оригинале density. — *Прим. перев.*

Другими словами, если $S \in \mathscr{S}_p$, то $|S, S'|$ — это такая неотрицательная константа, что

$$\mu_p(\Pi_{S'}K) = |S, S'| \mu_p(K) \tag{3.5.5}$$

для любого компактного множества $K \subset S$. Ясно, что $|S, S'| = |S, \Pi_{S'}S|$ и что $|S, S'| = 0$ тогда и только тогда, когда $\dim \Pi_{S'}S < \dim S$. В частности, $|S, S'| = 0$, если $\dim S' < \dim S$. Если S и S' имеют одинаковые размерности, то, очевидно, $|S, S'| = |S', S|$.

Точечные процессы, индуцируемые на $(d-k)$-мерных многообразиях

Пусть $V \in \mathscr{V}_{d-k}$ — некоторое $(d-k)$-мерное многообразие и $\sigma \in \mathscr{S}_{d-k}$ — его направление. Точечный пуассоновский процесс, индуцируемый на V сетью A, является стационарным и характеризуется своей интенсивностью $\varphi(\sigma)$, т. е. таким вещественным числом $\varphi(\sigma) \geqslant 0$, что $\psi(K) = \varphi(\sigma) \mu_{d-k}(K)$ для любого компактного множества $K \subset V$ (или, что то же самое, $K \subset \sigma$). Мы хотим найти выражение для функции $\sigma \to \varphi(\sigma)$, представляющей интенсивность точечного пуассоновского процесса, индуцируемого на каждом $\sigma \in \mathscr{S}_{d-k}$.

Предположим сначала, что мера $G \geqslant 0$ в (3.5.1′) является мерой Дирака δ_S для заданного $S \in \mathscr{S}_k$. В этом случае пуассоновская сеть в $\mathbf{R}^d$ образована параллельными многообразиями, имеющими одно и то же направление S, и (3.5.1′) превращается просто в $\psi(K) = \mu_{d-k}(\Pi_{S\perp}K)$. Для любых $\sigma \in \mathscr{S}_{d-k}$ и $K \in \mathscr{K}$, $K \subset \sigma$ имеем $\mu_{d-k}(\Pi_{S\perp}K) = |\sigma, S^\perp| \mu_{d-k}(K)$ (см. (3.5.5)). Поэтому интенсивность $\varphi(\sigma)$ точечного процесса, индуцированного на σ, есть $\varphi(\sigma) = |\sigma, S^\perp|$. В общем случае, когда G — произвольная мера на $\mathscr{S}_k$, применяя стандартные рассуждения, получаем

$$\varphi(\sigma) = \int_{\mathscr{S}_k} |\sigma, S^\perp| G(dS), \quad (\sigma \in \mathscr{S}_{d-k}). \tag{3.5.6}$$

Обратно, пусть φ — произвольная функция на $\mathscr{S}_{d-k}$, допускающая такое представление. Тогда $\varphi(\sigma)$ для каждого $\sigma \in \mathscr{S}_{d-k}$ является интенсивностью точечного процесса, индуцируемого на σ пуассоновской сетью, соответствующей положительной мере G согласно (3.5.1′). Обозначим класс таких функций через $\mathscr{R}_{d-k}$. Нетрудно проверить, что $\mathscr{R}_{d-k}$ — выпуклый конус в пространстве $C(\mathscr{S}_{d-k})$ непрерывных функций на $\mathscr{S}_{d-k}$ (наделенном топологией равномерной сходимости), обладающий компактным основанием. При этом возникают два вопроса.

1. Каким условиям должна удовлетворять заданная функция $\varphi \in C(\mathcal{S}_{d-k})$, чтобы она представляла интенсивности точечных процессов, индуцированных на каждом $\sigma \in \mathcal{S}_{d-k}$ некоторой пуассоновской сетью в $\mathbb{R}^d$?

2. Второй вопрос относится к единственности интегрального представления (3.5.6): будет ли пуассоновская сеть в $\mathbb{R}^d$ определена однозначно, если для каждого $\sigma \in \mathcal{S}_{d-k}$ известна индуцированная этой сетью интенсивность $\varphi(\sigma)$? Другими словами, будет ли выпуклый конус $\mathcal{R}_{d-k}$ *симплексом* в $C(\mathcal{S}_{d-k})$? Ясно, что $\mathcal{R}_{d-k}$ будет симплексом тогда и только тогда, когда векторное подпространство в $C(\mathcal{S}_{d-k})$, порожденное функциями $\sigma \to |\sigma, S^{\perp}|$, $S \in \mathcal{S}_d$, всюду плотно.

В следующей главе мы дадим (положительный) ответ на второй вопрос, но только для случаев $k=1$ и $k=d-1$ (т. е. для сетей линий и сетей гиперплоскостей) и полностью охарактеризуем симплексы $\mathcal{R}_1$ и $\mathcal{R}_{d-1}$. Можно предполагать, что эта теорема единственности остается справедливой, и если $1<k<d-1$ $(d \geqslant 4)$.

Сети, индуцируемые на многообразиях размерности, большей $d-k$

Рассмотрим теперь случай p-мерного многообразия $V \in \mathcal{V}_p$, $d-k<p<d$. Пусть $S_p \in \mathcal{S}_p$ — его направление. Пуассоновская сеть, индуцируемая на V, образована многообразиями размерности $k+p-d>0$. В силу (3.5.1) эта индуцированная сеть характеризуется мерой $G_p(\cdot;\, S_p) \geqslant 0$ на пространстве $\mathcal{S}_{k+p-d}(S_p)$ всех $(k+p-d)$-мерных подпространств в S_p. Чтобы определить G_p, возьмем некоторое компактное множество $K \subset V$. Тогда события $\{A \cap K = \varnothing\}$ и $\{A_p \cap K = \varnothing\}$ совпадают. Другими словами, для любого компактного $K \subset S_p$ справедливо соотношение

$$\psi(K) = \int\limits_{\mathcal{S}_{k+p-d}(S_p)} \mu_{d-k}\left(\Pi'_{\sigma\perp} K\right) G_p\left(d\sigma;\, S_p\right) \quad \left(K \in \mathcal{K},\, K \subset S_p\right). \tag{3.5.7}$$

Здесь $\Pi'_{\sigma\perp}$ — проектирование на подпространство $\sigma^{\perp} \subset S_p$ (ортогональное к σ в S_p), размерность которого равна $d-k$. Сравнивая (3.5.1) и (3.5.7), получим выражение для G_p.

Если мера G в (3.5.1′) есть функция Дирака δ_{S_0} для заданного $S_0 \in \mathcal{S}_k$, то наши пуассоновские многообразия параллельны направлению S_0, и в этом случае $\psi(K) = \mu_{d-k}\left(\Pi_{S_0^{\perp}} K\right)$ для любого $K \in \mathscr{K}$. Очевидно, что сеть, индуцированная на $S_p \in \mathscr{F}_p$, образована многообразиями, параллельными $\sigma_0 = S_0 \cap S_p$. Если $\dim \sigma_0 > k + p - d$, то $\mu_{d-k}\left(\Pi_{S_0^\perp} K\right) = 0$ для любого компактного множества $K \subset S_p$, и $G_p = 0$, так что индуцированная сеть — пустая. Пусть $\sigma_0^\perp = \Pi_{S_p} S_0^\perp$ — подпространство в S_p, ортогональное к σ_0. Из (3.5.5) вытекает, что для любого $K \in \mathscr{K}(S_p)$

$$\mu_{d-k}\left(\Pi_{S_0^\perp} K\right) = \mu_{d-k}\left(\Pi_{S_0^\perp} \Pi'_{\sigma_0^\perp} K\right) = \left| S_0^\perp, \sigma_0^\perp \right| \mu_{d-k}\left(\Pi'_{\sigma_0^\perp} K\right).$$

Но из $\sigma_0^\perp = \Pi_{S_p} S_0^\perp$ следует, что $| S_0^\perp, \sigma_0^\perp | = | S_0^\perp, S_p |$ и $| S_0^\perp, S_p | = 0$, если $\dim \sigma_0 > k + p - d$, так что соотношение

$$\mu_{d-k}\left(\Pi_{S_0^\perp} K\right) = \left| S_0^\perp, S_p \right| \mu_{d-k}\left(\Pi'_{\sigma_0^\perp} K\right)$$

выполняется во всех случаях. Таким образом, $G_p = | S_0^\perp, S_p | \delta_{\sigma_0}$, и G_p характеризуется соотношением $\int f(\sigma) G_p(d\sigma) = |S_0^\perp, S_p| \times$ $\times f(S_0 \cap S_p)$ для любой непрерывной функции f на $\mathscr{S}_{k+p-q}(S_p)$. В общем случае (т. е. для произвольной меры $G \geqslant 0$ на $\mathscr{S}_k$) получаем в силу (3.5.1)

$$\int\limits_{\mathscr{S}_{k+p-d}} f(\sigma) G_p(d\sigma; S_p) = \int\limits_{\mathscr{S}_k} | S^\perp, S_p | f(S \cap S_p) G(dS)$$

для любой непрерывной функции f на $\mathscr{S}_{k+p-d}(S_p)$. Заметим, что определенная таким путем функция $S \to | S^\perp, S_p | f(S \cap S_p)$ непрерывна на $\mathscr{S}_k$. Если $d - k < p < d$, то индуцируемая на S_p сеть сама индуцирует на каждом $S_{d-k} \in \mathscr{S}_{d-k}(S_p)$ некоторый точечный процесс, интенсивность которого задается соотношением (3.5.6), а также аналогичным соотношением, в котором вместо G участвует G_p и вместо $\mathbf{R}^d$ участвует S_p, т. е. соотношением

$$\varphi(S_{d-k}) = \int\limits_{\mathscr{S}_{k+p-d}(S_p)} | \sigma^\perp, S_{d-k} | G_p(d\sigma; S_p) \qquad (3.5.8)$$

для любых $S_{d-k} \in \mathscr{S}_{d-k}$ и $S_p \in \mathscr{S}_p$, таких, что $S_p \supset S_{d-k}$. Здесь $\sigma^\perp$ — подпространство в S_p, ортогональное к S_{d-k}. Отсюда следует, что семейство $G_p(\cdot; S_p)$, $S_p \in \mathscr{S}_p$, положительных мер, соответствующих сетям, индуцируемым одной и той же пуассоновской сетью на $\mathbf{R}^d$, должно удовлетворять следующему условию: для каждого $S_{d-k} \in \mathscr{S}_{d-k}$ интеграл в правой части (3.5.8) не зависит от выбора подпространства $S_p \supset S_{d-k}$.

ГЛАВА 4

ВЫПУКЛОСТЬ

В этой главе пространство E будет d-мерным эвклидовым пространством, $E = \mathbf{R}^d$. В первом параграфе мы рассматриваем функционалы Минковского, в связи с результатами, относящимися к пуассоновским сетям. Для ссылок на факты из интегральной геометрии используется книга Хадвигера (1957). Далее мы показываем, что п. н. выпуклые СЗМ характеризуются некоторым свойством их функционалов T, а именно C-аддитивностью. Третий параграф посвящен линейным гранулометриям.

Затем доказывается, что пространство $C(\mathscr{K}_0)$ выпуклых компактных множеств, содержащих начало координат, гомеоморфно некоторому выпуклому конусу $\mathscr{R}$ с компактным основанием в пространстве $\boldsymbol{C}(S_0)$ непрерывных функций на единичной сфере. Хотя этот конус $\mathscr{R}$ и не является симплексом, он содержит в себе симплекс $\mathscr{R}_1$, связанный с одним интересным классом симметричных выпуклых компактных множеств, а именно классом Штейнера, элементы которого удовлетворяют обобщенному варианту знаменитой формулы Штейнера. Результаты, относящиеся к симплексу $\mathscr{R}_1$, приводят к теореме единственности, согласно которой пуассоновская сеть прямых (или гиперплоскостей) полностью определяется заданием интенсивностей точечных процессов, индуцированных на гиперплоскостях (или прямых линиях). Эта теорема единственности дает также характеризацию касательных конусов ковариационных функций в $\mathbf{R}^d$ в точке 0. В случае эвклидова пространства $\mathbf{R}^2$ класс Штейнера совпадает с классом выпуклых компактных множеств, симметричных относительно начала координат 0, однако для $d > 2$ это уже не так.

Наконец, мы приводим результаты, касающиеся интерпретации функционалов Минковского при помощи мер на $\mathbf{R}^d$ и двух возможных продолжений мер Минковского на кольцо выпуклости $\mathfrak{S}$; первое основано на знаменитой характеристике Эйлера — Пуанкаре, а второе — на показателе выпуклости. Второе продолжение может быть также интерпретировано при помощи мер на $\mathbf{R}^d$ и применено к некоторым СЗМ, так что оказывается возможным определить плотности в $\mathbf{R}^d$ соответствующих функционалов Минковского.

4.1. ФУНКЦИОНАЛЫ МИНКОВСКОГО

В интегральной геометрии особое внимание уделяется тем функционалам, определенным на пространстве $C(\mathscr{K}')$ непустых выпуклых компактных множеств в E, которые инвариантны относительно эвклидовых преобразований, т. е. относительно вращений и сдвигов в эвклидовом пространстве $E = \mathbf{R}^d$. С другой стороны, мы знаем, что СЗМ *стационарно* тогда и только тогда, когда функционал T, связанный с ним по теореме Шоке, инвариантен относительно сдвигов. Аналогичным образом мы будем называть СЗМ *изотропным*, если соответствующая ему вероятность инвариантна относительно ортогональной группы $\Omega = \Omega(E)$, т. е. группы вращений в E с центром в 0.

Очевидно, что СЗМ изотропно в том и только том случае, когда его сопровождающий функционал T инвариантен относительно этой группы. Поэтому было бы интересно установить связь между стационарными и изотропными СЗМ и классическими функционалами интегральной геометрии.

Рассмотрим прежде всего одну простую процедуру, дающую возможность строить изотропные функционалы на $\mathscr{K}'$. Ортогональная группа Ω компактна и, как хорошо известно (см. Нахбин, 1965), на ней существует единственная с точностью до постоянного множителя ограниченная мера Хаара, т. е. ограниченная положительная мера, инвариантная относительно вращений. Другими словами, *на ортогональной группе Ω существует единственная инвариантная относительно вращений вероятность*, которую мы будем обозначать через ϖ [1].

Если K — компактное (или замкнутое) множество, то отображение $\omega \to \omega K$ из Ω в $\mathscr{K}$ (или $\mathscr{F}$) будет, очевидно, непрерывным (в естественной топологии на Ω). Для любой измеримой функции φ на $\mathscr{K}$ функция $\bar{\varphi}$, определяемая соотношением

$$\bar{\varphi}(K) = \int_{\Omega} \varphi(\omega K)\, \varpi(d\omega) \quad (K \in \mathscr{K}'),$$

является изотропной функцией на $\mathscr{K}'$; мы будем называть ее *средним по вращениям* функции φ. Легко видеть, что $\bar{\varphi}$ будет непрерывной, если непрерывна сама φ. (Это вытекает из инвариантности метрики Хаусдорфа на $\mathscr{K}'$ относительно ортогональной группы.)

[1] Буква ϖ читается „л скорописное“. — *Прим. перев.*

Аналогично, если $S_0 \in \mathscr{S}_k$ — некоторое заданное k-мерное подпространство в $E = \mathbf{R}^d$ $(0 < k < d)$, то отображение $\omega \to \omega S_0$ из Ω в $\mathscr{S}_k$ непрерывно, а образ вероятности ϖ при этом отображении есть вероятность, инвариантная относительно вращений и не зависящая от конкретного выбора подпространства $S_0 \in \mathscr{S}_k$. Эту инвариантную вероятность на $\mathscr{S}_k$ мы будем обозначать через ϖ_k^d или просто ϖ_k, если не возникает сомнений относительно размерности E. Можно показать, что ϖ_k является единственной вероятностью на $\mathscr{S}_k$, инвариантной относительно вращений.

Пусть теперь ψ: $\mathscr{K}(\mathbf{R}^k) \to \mathbf{R}$ — изотропный функционал на пространстве $\mathscr{K}(\mathbf{R}^k)$, где $\mathbf{R}^k$ — это k-мерное эвклидово пространство и $0 < k < d$. Для каждого $S \in \mathscr{S}_k$ определен функционал $\psi(\Pi_S K)$, где Π_S обозначает проектирование на S. Действительно, каждое заданное $S_0 \in \mathscr{S}_k$ можно отождествить с $\mathbf{R}^k$, и для любого $S \in \mathscr{S}_k$ существует вращение $\omega_S \in \Omega$, переводящее S в S_0, т. е. такое, что $\omega_S(S) = S_0$. Ввиду инвариантности ψ относительно вращений выражение $\psi(\omega_S \Pi_S K)$ не зависит от выбора вращения ω_S, так что можно положить $\psi(\Pi_S K) = \psi(\omega_S \Pi_S K)$. Если предположить, что функционал ψ измерим, то отображение $(S, K) \to \psi(\Pi_S K)$ будет измеримым на $\mathscr{S}_k \times \mathscr{K}(\mathbf{R}^d)$ в силу леммы 3.5.3. Оно будет также и непрерывным, если сам функционал ψ непрерывен. В частности, можно определить среднее по вращениям ψ^d функционала ψ в $\mathbf{R}^d$, полагая для любого $K \in \mathscr{K}'$

$$\psi^d(K) = \int_{\mathscr{S}_k} \psi(\Pi_S K)\, \varpi_k(dS) = \int_{\Omega} \psi(\Pi_{\omega S_0} K)\, \varpi(d\omega). \tag{4.1.1}$$

Функционал ψ^d изотропен и измерим; он непрерывен, если сам функционал ψ непрерывен.

Пусть теперь k' — такое целое число, что $k < k' < d$. Аналогично предыдущему мы можем определить среднее по вращениям $\psi^{k'}$ функционала ψ относительно вращений в $\mathbf{R}^{k'}$; $\psi^{k'}$ есть изотропный и измеримый функционал на $\mathscr{K}(\mathbf{R}^{k'})$. Этому функционалу $\psi^{k'}$ мы опять можем сопоставить его среднее по вращениям $\bar{\psi}^{k'}$ относительно вращений в $\mathbf{R}^d$, которое будет изотропным функционалом на $\mathscr{K}(\mathbf{R}^d)$. Оказывается, что этот новый функционал совпадает с ψ^d. Иначе говоря, если $0 < k < k' < d$, то для любого $K \in \mathscr{K}(E)$

$$\psi^d(K) = \int_{\mathscr{S}_{k'}} \psi^{k'}(\Pi_{S'} K)\, \varpi_{k'}(dS') = \int_{\Omega} \psi^{k'}\left(\Pi_{\omega S_0'} K\right) \varpi(d\omega) \tag{4.1.2}$$

(здесь S_0' — произвольный элемент из $\mathscr{S}_{k'}$).

Доказательство соотношения (4.1.2). Выберем подпространства $S_0 \in \mathcal{S}_k$ и $S'_0 \in \mathcal{S}_{k'}$, такие, что $S_0 \subset S'_0$, и отождествим S_0 с $\mathbf{R}^k$, а S'_0 с $\mathbf{R}^{k'}$. Посредством непрерывного отображения из Ω в $\mathcal{S}_k \times \mathcal{S}_{k'}$, определяемого правилом $\omega \to (\omega S_0, \omega S'_0)$, вероятность ϖ индуцирует вероятность $G(dS, dS')$ на $\mathcal{S}_k \times \mathcal{S}_{k'}$, инвариантную относительно вращений. При этом $G(\mathcal{S}_k; dS') = \varpi_{k'}(dS')$ и $G(dS, dS') = \varpi_{k'}(dS')\,G_{S'}(dS)$, где $G_{S'}(dS)$ — некоторая условная вероятность на $\mathcal{S}_k$, определенная для $\varpi_{k'}$-почти всех $S' \in \mathcal{S}_{k'}$ и сосредоточенная на S' (т. е. $S \subset S'$ п. н. для $G_{S'}$). Далее $G_{S'}$ инвариантна относительно подгруппы $\Omega(S')$, т. е. относительно вращений в S'. Другими словами, если $\omega' \in \Omega$ таково, что $\omega' S' = S'_0$, то $G_{S'}$ есть образ инвариантной вероятности $\varpi_k^{k'}$ на $\mathcal{S}_k(\mathbf{R}^{k'})$ при отображении ω'. С другой стороны, по определению $\psi^{k'}$

$$\int \psi(\Pi_S K)\,G_{S'}(dS) = \int \psi(\Pi_S \Pi_{S'} K)\,G_{S'}(dS) =$$
$$= \int \psi(\Pi_S \Pi_{S'} K)\,\varpi_k^{k'}(dS) = \psi^{k'}(\Pi_{S'} K).$$

Отсюда следует, что

$$\int\limits_{\mathcal{S}_{k'}} \psi^{k'}(\Pi_{S'} K)\,\varpi_{k'}(dS') = \int\limits_{\mathcal{S}_k \times \mathcal{S}_{k'}} \psi(\Pi_S K)\,G(dS, dS') = \psi^d(K),$$

т. е. выполняется (4.1.2). Это соотношение очень часто используется в интегральной геометрии.

Теперь мы можем определить знаменитые *функционалы Минковского*. Стационарная k-мерная пуассоновская сеть плоскостей *изотропна* тогда и только тогда, когда мера G на $\mathcal{S}_k$ в (3.5.1′) пропорциональна единственной вероятности ϖ_k, инвариантной относительно вращений. Поэтому мы определяем ψ_k^d (в дальнейшем будем писать просто ψ_k, если не может возникнуть недоразумений), беря среднее по вращениям от[1] $\mu_{d-k}(\Pi_{S^\perp} K)$, т. е. полагая

$$\psi_k(K) = \int\limits_{\mathcal{S}_k} \mu_{d-k}(\Pi_{S^\perp} K)\,\varpi_k(dS) \quad (K \in \mathcal{K}) \tag{4.1.3}$$

при $0 < k < d$ и $\psi_0(K) = \mu_d(K)$ (т. е. $\psi_0(K)$ — это объем множества K). С точностью до постоянного множителя функционалы Минковского W_k и являются этими средними по вращениям, суженными на область определения $C(\mathcal{K}')$. Точнее говоря, пусть b_k — *объем единичного шара в* $\mathbf{R}^k$, т. е.

$$b_k = \frac{\pi^{k/2}}{\Gamma(1 + k/2)}. \tag{4.1.4}$$

---

[1] Напоминаем, что μ_m — мера Лебега в $\mathbf{R}^m$. — *Прим. ред.*

Тогда k-й функционал Минковского W_k^d (или просто W_k, если не возникает опасности путаницы), $0 \leqslant k \leqslant d$, определяется соотношениями

$$\left.\begin{aligned} W_k(K) &= \frac{b_d}{b_{d-k}} \psi_k(K), \\ W_d(K) &= b_d \end{aligned}\right\} [K \in C(\mathcal{K}')]. \tag{4.1.5}$$

Для единичного шара B в $\mathbf{R}^d$ в силу выбора нормирующих множителей имеем $W_k(B) = b_d$, $k = 0, 1, \ldots, d$.

Из результатов гл. 3, и в частности из предложения 3.5.2, вытекает, что справедливо следующее утверждение.

Предложение 4.1.1. *Для $k = 0, 1, \ldots, d$ функционал Минковского W_k на $C(\mathcal{K}')$ является возрастающим, непрерывным, C-аддитивным, однородным степени $d - k$ и инвариантным относительно эвклидовых преобразований.*

Применяя к ψ_k^d соотношение (4.1.2), получаем

$$\psi_k^d(K) = \int\limits_{\mathcal{S}_{d'}} \psi_{k'}^{d'}(\Pi_S K)\, \tilde{\omega}_{d'}^d(dS)$$

$(d > d' > d - k,\ k' = d' - d + k)$. Таким образом, имеет место

Предложение 4.1.2. *Если $d > d' > d - k$ и $k' = d' - d + k$, то функционал W_k^d на $\mathcal{K}(\mathbf{R}^d)$ пропорционален среднему по вращениям функционала $W_{k'}^{d'}$ на $\mathcal{K}(\mathbf{R}^{d'})$, а именно*

$$W_k^d(K) = \frac{b_d}{b_{d'}} \int\limits_{\mathcal{S}_{d'}} W_{k'}^{d'}(\Pi_S K)\, \tilde{\omega}_{d'}(dS). \tag{4.1.6}$$

Среди введенных нами функционалов Минковского наиболее важными являются W_0, W_1, W_2 и W_{d-1} (W_d есть просто константа b_d). Как мы уже видели, W_0 представляет собой *объем.* Функционал W_1 пропорционален *площади поверхности.* Точнее говоря, если $F(K)$ — площадь поверхности множества $K \in C(\mathcal{K}')$, то

$$W_1^d(K) = \frac{1}{d} F(K).$$

Действительно, из определения (4.1.3) вытекает, что

$$\psi_1(K) = \int\limits_{\mathcal{S}_1} \mu_{d-1}(\Pi_{S\perp} K)\, \tilde{\omega}_1(dS),$$

так что $\psi_1(K)$ есть среднее $(d-1)$-мерных объемов $\mu_{d-1}(\Pi_{S\perp} K)$ проекций множества K на гиперплоскости в $\mathbf{R}^d$. Если K — выпуклый многогранник, площадь поверхности $F(K)$ которого определяется элементарным образом, то, как легко видеть, $\psi_1(K) =$

$=(b_{d-1}/db_d)\, F(K)$. Это соотношение (принадлежащее Коши) можно продолжить по непрерывности на все пространство $\mathscr{K}(\mathbf{R}^d)$, поскольку выпуклые многогранники образуют плотное подпространство в $\mathscr{K}$. Отсюда и вытекает приведенная выше формула.

Если *граница* ∂K множества $K \in C(\mathscr{K}')$ достаточно гладка, так что в каждой ее точке x можно определить $d-1$ главных кривизн, то функционалы Минковского допускают простые интегральные представления, в которых фигурируют симметрические функции от этих кривизн. Например, функционал W_2 пропорционален интегралу M от средней кривизны, а именно $W_2 = M/d$.

Наконец, величина $N(K) = dW_{d-1}(K)$ называется *нормой* множества $K \in C(\mathscr{K}')$. В формуле (4.1.3) величина $\mu_1(\Pi_{S^\perp}K)$ представляет собой *ширину* выпуклого компактного множества K в направлении $S^\perp \in \mathscr{S}_1$, т. е. расстояние между двумя соответствующими опорными гиперплоскостями, параллельными S. Таким образом, *норма* $N(K)$ *пропорциональна средней ширине* $\bar{b}(K)$ *множества* K, а именно

$$N(K) = \frac{db_d}{2}\, \bar{b}(K).$$

Далее, *функционал* W_{d-1} *и норма линейны по отношению к суммированию по Минковскому*, т. е.

$$N(\alpha K \oplus \beta K') = \alpha N(K) + \beta N(K')\, [\alpha,\ \beta \geqslant 0;\ K,\ K' \in C(\mathscr{K}')]. \quad (4.1.7)$$

Соотношение (4.1.7) легко доказать, заметив, что ширина $\mu_1(\Pi_{S^\perp}K)$ в заданном направлении $S^\perp \in \mathscr{S}_1$ линейна. Это свойство фактически характеризует норму, поскольку, как можно показать, любой непрерывный линейный функционал φ на $C(\mathscr{K})$, инвариантный относительно вращений и сдвигов, обязательно имеет вид $\varphi = a + bN$ с некоторыми константами a и b (см. Хадвигер, 1957).

Если размерность $d \leqslant 3$, то функционалы Минковского допускают очень простое геометрическое истолкование.

Для $d=1$: $W_0 = N$ представляет собой *длину*, а $W_1 = F = b_1 = 2$ (константа).

Для $d=2$: W_0 — это двумерный объем (*площадь*), $N = 2W_1$ — *периметр*, а $M = 2W_2 = 2\pi$.

Для $d=3$: W_0 — обычный *объем*, $3W_1 = F$ — *площадь поверхности*, а норма $N = M = 3W_2$ есть интеграл от средней кривизны.

Функционалы Минковского характеризуются условиями, сформулированными в предложении 4.1.1. Точнее говоря, имеет место следующая теорема, доказательство которой можно найти у Хадвигера (1957, стр. 221—225).

Теорема 4.1.1. a) *Если функция* φ *на* $C(\mathscr{K})$ *непрерывна,* C*-аддитивна и инвариантна относительно эвклидовых преобразований, то* $\varphi=\sum_{0}^{d} a_k W_k$ *для надлежащим образом подобранных констант* a_k.

b) *Если функция* φ *на* $C(\mathscr{K})$ *является возрастающей,* C*-аддитивной и инвариантной относительно эвклидовых преобразований, то* $\varphi=\sum_{0}^{d} a_k W_k$ *при соответствующих константах* $a_k \geqslant 0$.

Замечание. В связи с теоремой 4.1.1 возникает вопрос, не будет ли всякий функционал φ на $C(\mathscr{K})$, являющийся C-аддитивным, непрерывным (или возрастающим) и инвариантным относительно сдвигов (без вращений!), представим в виде $\varphi=\sum_{k=0}^{d} a_k\psi_k$, где каждый из функционалов ψ_k представляет собой функционал на $C(\mathscr{K})$, определяемый по формуле (3.5.1′) для некоторой меры $G_k \geqslant 0$ на $\mathscr{S}_k$. Мы увидим в § 4.5, что это *не так*, и, следовательно, теорема 4.1.1 не может быть далее обобщена.

Аналогично можно обобщить формулу Штейнера (4.1.8), беря вместо единичного шара B произвольное выпуклое компактное множество A. При этом мы получим

$$V(K\oplus\rho A)=\sum_{0}^{d}\binom{d}{k} W_k(A, K)\,\rho^k.$$

Эти «смешанные функционалы» $(A, K)\to W_k(A, K)$ непрерывны на произведении $C(\mathscr{K}')\times C(\mathscr{K}')$, инвариантны относительно сдвигов и C-аддитивны по каждому из своих аргументов A и K. Но отображение $K\to W_k(A, K)$ не допускает представления вида (3.5.1), за исключением случая, когда A принадлежит классу Штейнера (§ 4.5).

Из теоремы 4.1.1 как следствие вытекают знаменитые и полезные формулы Штейнера и Крофтона.

Формула Штейнера

Объем $V(K\oplus\rho B)$ дилатации множества $K\in C(\mathscr{K}')$ шаром ρB радиуса $\rho\geqslant 0$ равен

$$V(K\oplus\rho B)=\sum_{k=0}^{d}\binom{d}{k}\bar{W}_k(K)\,\rho^k. \qquad (4.1.8)$$

Более общим образом, функционал Минковского W_i $(0 \leqslant i \leqslant k)$ удовлетворяет соотношению

$$W_i(K \oplus \rho B) = \sum_{k=0}^{d-i} \binom{d-i}{k} W_{k+i}(K)\rho^k. \tag{4.1.9}$$

Доказательство. Отображение $K \to W_i(K \oplus \rho B)$ непрерывно на $C(\mathcal{K}')$ и инвариантно относительно эвклидовых преобразований. Оно также C-аддитивно в силу соотношений $(K \cup K') \oplus A = (K \oplus A) \cup (K' \oplus A)$, справедливых для любых K, K' и A из $\mathcal{P}(E)$, и соотношения

$$(K \cap K') \oplus A = (K \oplus A) \cap (K' \oplus A) \, [K,\ K',\ A \text{ и } K \cup K' \in C(\mathcal{K})], \tag{4.1.10}$$

выполняющегося для выпуклых K, K', A и $K \cup K'$. Из теоремы 4.1.1 следует поэтому, что $W_i(K \oplus \rho B) = \sum a_k(\rho) W_k(K)$. Беря $K = \lambda B$, находим, что $(\rho + \lambda)^{d-i} = \sum a_k(\rho)\lambda^{d-k}$. Отсюда простым подсчетом получаем (4.1.8) и (4.1.9).

Формулу Штейнера можно обобщить следующим образом. Подставляя вместо шара ρB произвольное множество $K' \in C(\mathcal{K})$ и беря среднее по вращениям от $V(K \oplus \omega K')$, $\omega \in \Omega(E)$, мы определим функционал на $C(\mathcal{K}') \times C(\mathcal{K}')$, удовлетворяющий условиям теоремы 4.1.1 по каждому из своих аргументов K и K'. Приравнивая коэффициенты, получим после некоторых вычислений

$$\int_{\Omega} W_i(K \oplus \omega K')\, \varpi(d\omega) = \frac{1}{b_d} \sum_{k=0}^{d-i} W_{k+i}(K)\, W_{d-k}(K'). \tag{4.1.11}$$

Формула Крофтона

Для $K \in C(\mathcal{K})$ и $S \in \mathcal{S}_k$ мы можем рассмотреть пересечения $K \cap (S \oplus \{s\}) = K \cap S_s$, где $s \in S^{\perp}$, и вычислить интегралы $\int_{S^{\perp}} W_{k'}^{k}(K \cap S_s)\, \mu_{d-k}(dS)$. (Здесь μ_{d-k} — мера Лебега в $S^{\perp}$, отождествляемом с $\mathbf{R}^{d-k}$, а $W_{k'}^{k}$ — функционал Минковского в $\mathbf{R}^k$.) Таким образом мы получим функционал, инвариантный относительно сдвигов. Если мы теперь возьмем среднее по вращениям, то получим инвариантный функционал на $C(\mathcal{K})$, причем можно убедиться, что он является возрастающим и C-аддитивным, так что можно использовать утверждение b) теоремы 4.1.1.

Соответствующие коэффициенты легко вычислить, беря $K = B$ (единичный шар). Окончательно получим

$$\int_{\mathcal{S}_k} \tilde{\omega}_k(dS) \int_{S^\perp} W^k_{k'}(K \cap S_s)\,\mu_{d-k}(ds) = \frac{b_k b_{d-k'}}{b_d b_{k-k'}} W^d_{k'}(K). \quad (4.1.12)$$

4.2. ПОЧТИ НАВЕРНОЕ ВЫПУКЛЫЕ СЗМ

Множество F в эвклидовом пространстве $E = \mathbf{R}^d$ называется выпуклым, если из x, $y \in F$ вытекает, что $\lambda x + (1 - \lambda) y \in F$ при $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Отталкиваясь от этого определения, введем следующее

Определение 4.2.1. *Пусть K, K' и C — три компактных множества в E. Будем говорить, что K и K' разделяются множеством C, если для любых $x \in K$ и $x' \in K'$ найдется такое вещественное λ, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, что $\lambda x + (1 - \lambda) x' \in C$.*

Имеет место

Предложение 4.2.1. *Пусть K и K' — два компактных множества, объединение $K \cup K'$ которых выпукло. Тогда K и K' разделяются множеством $K \cap K'$.*

Доказательство. Возьмем $x \in K$ и $x' \in K'$ и положим $x(\alpha) = \alpha x + (1 - \alpha) x'$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Поскольку $K \cup K'$ выпукло, то $x(\alpha) \in K \cup K'$. Положим $\alpha_0 = \sup\{\alpha,\ x(\alpha) \in K'\}$. Тогда $x(\alpha_0) \in K'$, так как K' компактно. Если $\alpha_0 = 1$, то $x(\alpha_0) \in K \cap K'$ и наше утверждение справедливо. Если $\alpha_0 < 1$, то $x(\alpha_0 + \varepsilon) \in K$ для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ и поэтому $x(\alpha_0) \in K$ в силу компактности K. Отсюда вытекает, что $x(\alpha_0) \in K \cap K'$.

Согласно определению 4.2.1, если K и K' разделяются множеством C, то всякое выпуклое множество, пересекающееся с K и K', обязательно пересекается и с C. Другими словами, $\mathcal{F}^C_{K,K'}$ и $C(\mathcal{F})$ не пересекаются в $\mathcal{F}$. В частности, всякое п. н. выпуклое СЗМ A будет удовлетворять условию $P(\mathcal{F}^C_{K,K'}) = 0$, т. е.

$$T(K \cup K' \cup C) + T(C) = T(K \cup C) + T(K' \cup C),$$

и в силу предложения 4.2.1 его сопровождающий функционал T будет C-аддитивен на $C(\mathcal{K})$.

Верно также и обратное:

Теорема 4.2.1. *Пусть A — некоторое СЗМ в эвклидовом пространстве E, а T — функционал, задаваемый правилом $K \to T(K) = P(\{A \cap K \neq \varnothing\})$, $K \in \mathcal{K}$. Тогда следующие три условия равносильны:*

а) *СЗМ A п. н. выпукло.*

b) *Для любых K, K' и $C \in \mathcal{K}$, таких, что K и K' разделяются множеством C, выполнено соотношение*

$$T(K \cup K' \cup C) + T(C) = T(K \cup C) + T(K' \cup C). \qquad (4.2.1)$$

c) *Функционал T является C-аддитивным на $C(\mathcal{K}')$, т. е.*

$$T(K \cup K') + T(K \cap K') = T(K) + T(K')$$

для K, K' и $K \cup K' \in C(\mathcal{K}')$.

Доказательство. Условие b) следует из a) согласно определению 4.2.1, а условие c) вытекает из b) в силу предложения 4.2.1. Остается показать, что из c) следует a).

Если множество $F \in \mathcal{F}$ не выпукло, то найдутся такие $x \in F$, $x' \in F$ и λ, $0 < \lambda < 1$, что $y = \lambda x + (1-\lambda) x' \notin F$. Поскольку F замкнуто, то найдется шар $B_\varepsilon(y_0)$ с рациональным[1] центром y_0 и рациональным радиусом $\varepsilon > 0$, для которого $y \in B_\varepsilon(y_0)$ и $F \cap B_\varepsilon(y_0) = \varnothing$. Тогда можно выбрать такие две рациональные точки x_0 и x_0' в $E = \mathbf{R}^d$, что x_0, x_0' и y_0 лежат на одной прямой и $x \in B_\varepsilon(x_0)$, $x' \in B_\varepsilon(x_0')$. Пусть C — выпуклая оболочка множества $B_\varepsilon(x_0) \cup B_\varepsilon(y_0)$, а C' — выпуклая оболочка множества $B_\varepsilon(x_0') \cup B_\varepsilon(y_0)$. Очевидно, $C \cup C'$ будет выпуклой оболочкой множества $B_\varepsilon(x_0) \cup B_\varepsilon(x_0')$. Таким образом C, C', $C \cup C' \in C(\mathcal{K})$ и $F \in \mathcal{F}^{C \cap C'}_{C, C'}$. Но класс $\mathbf{C}$ возможных пар (C, C') *счетен*. Таким образом, СЗМ A п. н. выпукло тогда и только тогда, когда $P(\mathcal{F}^{C \cap C'}_{C, C'}) = 0$ для любой пары $(C, C') \in \mathbf{C}$. Так как $P(\mathcal{F}^{C \cap C'}_{C, C'}) = T(C) + T(C') - T(C \cup C') - T(C \cap C')$, отсюда следует, что c) влечет a).

Если СЗМ A п. н. выпукло и компактно, то $W_k(A)$ является случайной величиной, поскольку функционал Минковского непрерывен, а значит, и измерим на $C(\mathcal{K})$. Мы налагаем здесь условие п. н.-компактности, поскольку пока еще не определено продолжение W_k на $C(\mathcal{F})$. Тем не менее объем $V = W_0$ вполне определен соотношением $V(F) = \mu_d(F)$, $F \in \mathcal{F}$ (где μ_d — мера Лебега). Нетрудно проверить, что замкнутое множество $F \in \mathcal{F}$ компактно тогда и только тогда, когда объем дилатации $F \oplus \varepsilon B$ множества F шаром радиуса $\varepsilon > 0$ конечен при некотором $\varepsilon > 0$. Отсюда вытекает, что СЗМ A п. н. компактно тогда и только тогда, когда случайная величина $V(A \oplus \varepsilon B)$ п. н. конечна для некоторого $\varepsilon > 0$. Согласно формуле Штейнера, если A — п. н.

[1] Здесь под рациональной точкой понимается точка с рациональными координатами. — *Прим. перев.*

выпуклое и компактное СЗМ, то

$$V(A \oplus \varepsilon B) = \sum_{k=0}^{d} \binom{d}{k} W_k(A)\, \varepsilon^k. \qquad \text{(п. н.)}$$

В частности, если $E(V(A \oplus \varepsilon B)) < \infty$ для заданного $\varepsilon > 0$, то A п. н. компактно и все $W_k(A)$ имеют конечные математические ожидания ($k = 0, 1, \ldots, d$). Более того, $\mathrm{E}(V(A \oplus \rho B)) < \infty$ для любого $\rho > 0$. Обратное очевидно. Далее, в силу следствия 1 теоремы 2.5.1 имеем[1]

$$E(V(A \oplus B)) = \int P(x \in A \oplus B)\, dx = \int T(B_x)\, dx,$$

так что справедливо следующее

Предложение 4.2.2. *Пусть A—некоторое п. н. выпуклое СЗМ, а T — функционал $K \to T(K) = P(\{A \cap K \neq \varnothing\})$. Тогда A п. н. компактно, а случайные величины W_k: $A \to W_k(A)$ имеют конечные математические ожидания $E(W_k) < \infty$ ($k=0, 1, \ldots, d$) в том и только том случае, если $\int T((\varepsilon B)_x)\, dx < \infty$ для некоторого шара εB радиуса $\varepsilon > 0$. В этом случае для любого $\rho \geqslant 0$*

$$E[V(A \oplus \rho B)] = \int T((\rho B)_x)\, dx = \sum_{k=0}^{d} \binom{d}{k} E(W_k)\, \rho^k.$$

Процедура, использованная выше для построения инвариантного относительно вращений функционала по заданному произвольному функционалу, может быть использована также для *изотропизации* заданного СЗМ A. Действительно, если Ω — ортогональная группа, то отображение $(\omega, F) \to \omega F$ непрерывно на $\Omega \times F$, а значит, и измеримо. Пусть $\mathfrak{W}$ — единственная вероятность на Ω, инвариантная относительно вращений, P — вероятность на σ_f, соответствующая A, и $\mathfrak{W} \otimes P$ — произведение вероятностей на $\Omega \times \mathcal{F}$. Тогда вероятность P' на σ_f, соответствующая СЗМ A': $(\omega, F) \to \omega F$, инвариантна относительно вращений

[1] По теореме Фубини

$$E(V(A)) = \int_{\mathcal{F}} \left(\int_{E} \chi(x, A)\, dx \right) dP(A) = \int_{E} \left(\int_{\mathcal{F}} (\chi(x, A)\, dP(A))\, dx = \right.$$

$$= \int_{E} P(x \in A)\, dx,$$

где $\chi(\cdot, A) = 1_A$. — *Прим. ред.*

и A' изотропно. В частности, функционал T': $K \to T'(K) = P(\{A' \cap K \neq \varnothing\})$ задается соотношением

$$T'(K) = \int_{\Omega} T(\omega^{-1}K)\,\varpi(d\omega) = \int_{\Omega} T(\omega K)\,\varpi(d\omega) \quad (K \in \mathscr{K}).$$

Иначе говоря, T' *есть среднее по вращениям функционала* T. Мы будем говорить, что A' получается из A *изотропизацией*.

Предложение 4.2.3. *Всякое стационарное п. н. выпуклое СЗМ A п. н. совпадает с $\varnothing$ или E (т. е. $P(\{A=\varnothing\} \cup \{A=E\})=1$).*

Доказательство. Пусть A—стационарное п. н. выпуклое СЗМ. Тогда изотропированное множество A' стационарно, изотропно и п. н. выпукло, так что его сопровождающий функционал T' удовлетворяет условиям утверждения b) теоремы 4.1.1. Но единственным ограниченным функционалом Минковского является W_d, так что T' постоянен на $C(\mathscr{K})$. Отсюда вытекает, что A' равно п. н. $\varnothing$ или E, а потому то же самое справедливо и для A.

В силу (4.1.11) имеет место также следующее

Предложение 4.2.4. *Если СЗМ A изотропно и п. н. выпукло, то для любого $K \in C(\mathscr{K})$*

$$E(V(A \oplus K)) = \frac{1}{b_d} \sum_{k=0}^{d} \binom{d}{k} E(W_k(A))\, W_{d-k}(K).$$

В частности, если $d=2$ (т. е. если E—эвклидова плоскость), то норма N и периметр совпадают и

$$E(V(A \oplus K)) = E(V(A)) + \frac{1}{2\pi} N(K)\, E(N(A)) + V(K).$$

Если $d=3$, то, обозначая через F и N соответственно площадь поверхности и норму, имеем

$$E(V(A \oplus K)) = E(V(A)) + \frac{1}{4\pi} E(F(A))\, N(K) + \frac{1}{4\pi} E(N(A))\, F(K) + V(K).$$

4.3. ЛИНЕЙНЫЕ ГРАНУЛОМЕТРИИ

Пусть K — выпуклое компактное множество в $E = \mathbf{R}^d$. Для любого вектора $h \in \mathbf{R}^d$ обозначим через $g_K(h)$ объем пересечения $K \cap K_h$, где $K_h = K \oplus \{h\}$ — сдвиг множества K на вектор h.

Таким образом, если 1_K — индикатор множества K, то

$$g_K(h) = \mu_d(K \cap K_h) = \int_E 1_K(x)\, 1_K(x+h)\, dx. \tag{4.3.1}$$

Очевидны следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned} g_K(0) &= V(K) = \mu_d(K),\\ 0 \leqslant g_K(h) &\leqslant g_K(0),\\ \int_E g_K(h)\, dh &= (V(K))^2 \end{aligned}\right\} \quad (h \in E). \tag{4.3.2}$$

Отображение $(K, h) \to g_K(h)$ *непрерывно* на $C(\mathscr{K}') \times E$.

Действительно, это отображение полунепрерывно сверху, поскольку сдвиг $h \to K_h$ непрерывен, отображение взятия пересечения $(K, h) \to K \cap K_h$ полунепрерывно сверху и мера Лебега полунепрерывна сверху на $\mathscr{K}$. С другой стороны, $g_K(h) = \mu_d(\mathring{K} \cap \mathring{K}_h)$, так как $K \cap K_h$ выпукло и его внутренность есть $\mathring{K} \cap \mathring{K}_h$. Согласно лемме 3.5.1, отображение $K \to \mathring{K}$ непрерывно на $C(\mathscr{K})$. Указанное выше отображение взятия пересечения непрерывно на $\mathscr{G}$, а мера Лебега полунепрерывна снизу на $\mathscr{G}$. Отсюда вытекает, что отображение $(K, h) \to g_K(h)$ полунепрерывно снизу. Таким образом, оно непрерывно на $C(\mathscr{K}') \times E$.

Будем теперь рассматривать множество $K \in C(\mathscr{K}')$ как фиксированный элемент и писать g вместо g_K. Нам будет удобно использовать *полярные координаты*. Пусть S_0 — единичная сфера в $\mathbf{R}^d$. Тогда любой вектор $h \in \mathbf{R}^d \setminus \{0\}$ задается парой (r, u), где $r = |h|$ — вещественное число > 0, а $u \in S_0$ — единичный вектор $u = h/r$. Мы будем писать $g(r, u)$ вместо $g(ru)$. В соответствии со сказанным выше, для фиксированного $u \in S_0$ отображение $r \to g(r, u)$ является непрерывной функцией на $\mathbf{R}^+$. Более того, эта функция обладает некоторыми свойствами дифференцируемости, которые мы сейчас и исследуем.

Положим

$$\gamma(r, u) = \mu_{d-1}(\Pi_{u\perp}(K \cap K_{ru}))$$

(это $(d-1)$-мерный объем проекции множества $K \cap K_{ru}$ на гиперплоскость, ортогональную направлению u вектора сдвига ru).

Для заданного $u \in S_0$ отображение $r \to \gamma(r, u)$ непрерывно слева при любом $r > 0$, так как из $r_n \uparrow r$ вытекает, что $K \cap K_{r_n u} \downarrow K \cap K_{ru}$ (ввиду полунепрерывности сверху нашего отображения взятия пересечения) и $\Pi_{u\perp}(K \cap K_{r_n u}) \downarrow \Pi_{u\perp}(K \cap K_{ru})$ по лемме 3.5.3. Таким образом, $\gamma(r_n, u) \downarrow \gamma(r, u)$ в силу непрерывности относительно монотонных последовательностей, Аналогично предыдущему функция $r \to \gamma(r, u)$ непрерывна справа при любом $r \geqslant 0$, таком, что $g(r; u) > 0$, поскольку $\mathring{K} \cap \mathring{K}_{ru}$ не пусто и его проекция на $u^{\perp}$ совпадает с внутренностью множества $\Pi_{u\perp}(K \cap K_{ru})$ (рассматриваемого как подмножество в эвклидовом пространстве $u^{\perp} = \mathbf{R}^{d-1}$). Отсюда вытекает, что функция $r \to \gamma(r, u)$ полунепрерывна снизу и, следовательно, непрерывна справа.

Для любых $r > 0$ и $\varepsilon > 0$, таких, что $r > \varepsilon > 0$, справедливы очевидные неравенства

$$\varepsilon\gamma(r-\varepsilon, u) \geqslant g(r-\varepsilon, u) - g(r, u) \geqslant \varepsilon\gamma(r, u).$$

Отсюда и из непрерывности слева функции $r \to \gamma(r, u)$ вытекает, что у функции g существует левая производная, равная $-\gamma(r; u)$. Аналогично из неравенств

$$\varepsilon\gamma(r, u) \geqslant g(r, u) - g(r+\varepsilon, u) \geqslant \varepsilon\gamma(r+\varepsilon, u)$$

вытекает, что $g(r, u)$ имеет правую производную, также равную $-\gamma(r; u)$, в любой точке, для которой $g(r, u) > 0$. Подведем итог сказанному.

Предложение 4.3.1. *Пусть K — выпуклое компактное множество, а $u \in S_0$ — единичный вектор. Для любого $r \geqslant 0$ положим $g(r, u) = \mu_d(K \cap K_{ru})$ и $\gamma(r, u) = \mu_{d-1}(\Pi_{u\perp}(K \cap K_{ru}))$.*

a) *Функция $r \to g(r, u)$ не возрастает, непрерывна при любом $r \geqslant 0$ и имеет непрерывную производную, равную $-\gamma(r, u)$, в открытом интервале, определяемом условиями $r > 0$, $g(r, u) > 0$.*

b) *Функция $r \to \gamma(r, u)$ непрерывна слева при всех $r > 0$ и непрерывна справа при таких $r \geqslant 0$, для которых $g(r, u) > 0$. Более того, если $\mathring{K} \neq \varnothing$, то у функции $r \to g(r, u)$ при $r = 0$ существует правая производная, равная $-\gamma(0, u)$, и при любых $r > 0$ — левая производная, равная $-\gamma(r, u)$.*

Случайные секущие

Если $K \in C(\mathscr{K}')$ имеет непустую внутренность $\mathring{K}$, то функция $r \to \gamma(r, u)$ допускает простую вероятностную интерпретацию. Пусть x — случайная точка на гиперплоскости $u^{\perp}$, равномерно распределенная на $\Pi_{u\perp}K$ (т. е. ее вероятность есть $\left(1_{\Pi_{u\perp}K}/\gamma(0, u)\right)\mu_{d-1}(dx)\big)$, и пусть $L(x)$ — длина секущей $K \cap \{x + \lambda u, \lambda \in \mathbf{R}\}$. Тогда $x \to L(x)$ представляет собой случайную величину, закон распределения которой определяется соотношением

$$P(L \geqslant l) = \frac{\gamma(l; u)}{\gamma(0, u)}.$$

Мы будем говорить, что L является *длиной случайной секущей* множества K для заданного направления $u \in S_0$.

Можно также определить случайную секущую, считая случайным и само направление u. Наиболее естественный путь состоит здесь в использовании стационарной пуассоновской сети, изотропной в E, и определения случайного сечения, данного в § 3.5. Тогда длина случайной секущей — это длина L пересечения $K \cap D$, где D обозначает случайное сечение. В силу (3.5.4), вероятностный закон направления $S \in \mathscr{S}_1$ случайного сечения D не совпадает с инвариантным законом ϖ_1, а имеет вид

$$\frac{\gamma(0,\ u)\,\varpi_1(du)}{\int\limits_{\mathscr{S}_1} \gamma(0,\ u)\,\varpi_1(du)} = \frac{db_d}{b_{d-1}} \frac{\gamma(0,\ u)\,\varpi_1(du)}{F(K)}.$$

[В этой формуле мы неявно отождествляем вектор $u \in S_0$ с элементом $S \in \mathscr{S}_1$, параллельным u. Это возможно благодаря тому, что функция $u \to \gamma(0,\ u)$ симметрична, т. е. $\gamma(0,\ u) = \gamma(0,\ -u)$.]

При условии фиксации направления $u \in S_0$ точка $s \in u^{\perp} \cap D$ пересечения D с $u^{\perp}$ равномерно распределена на $\Pi_{u^\perp} K$, так что $P_u(L \geqslant l) = \gamma(l,\ u)/\gamma(0,\ u)$. Отсюда вытекает, что соответствующая безусловная вероятность равна

$$P(L \geqslant l) = \frac{db_d}{b_{d-1}F(K)} \int\limits_{\mathscr{S}_1} \gamma(l,\ u)\,\varpi_1(du). \tag{4.3.3}$$

С помощью этого соотношения довольно легко вычислить математическое ожидание $E(L) = \int\limits_0^\infty P(L \geqslant l)\,dl$. В силу предложения 4.3.1, $\gamma(l,\ u) = -g_l'(l,\ u)$ и поэтому $\int\limits_0^\infty \gamma(l,\ u)\,du = g(0,\ u) = V(K)$. Другими словами, математическое ожидание длины случайной секущей пропорционально отношению $V(K)/F(K)$ объема множества K к площади его поверхности. В явном виде:

$$E(L) = \frac{db_d}{b_{d-1}} \frac{V(K)}{F(K)}. \tag{4.3.4}$$

С другой стороны, рассмотрим третье соотношение в (4.3.2), т. е.

$$(V(K))^2 = db_d \int\limits_{\mathscr{S}_1} \varpi_1(du) \int\limits_0^\infty r^{d-1} g(r,\ u)\,dr.$$

Принимая во внимание предложение 4.3.1, после несложных вычислений получаем

$$\int_0^\infty r^{d-1} g(r,\ u)\,dr = \frac{1}{d}\int_0^\infty r^d \gamma(r,\ u)\,dr.$$

Подставляя полученный результат в равенство

$$E(L^{d+1}) = (d+1)\int_0^\infty l^d P(L \geqslant l)\,dl,$$

приходим к следующей формуле:

$$E(L^{d+1}) = \frac{d(d+1)}{b_{d-1}}\,\frac{(V(K))^2}{F(K)}.$$

4.4. ВЫПУКЛЫЙ КОНУС $\mathscr{R} = \boldsymbol{C}(\mathscr{K}_0)$

Мы охарактеризуем сейчас пространство $C(\mathscr{K}_0)$ (т. е. пространство компактных выпуклых множеств в E, содержащих начало координат 0) как выпуклый конус с компактным основанием в некотором функциональном пространстве (по поводу общей теории выпуклых конусов см., например, Альфсен, 1971). Пусть S_0 — единичная сфера в $E = \mathbf{R}^d$, а $\boldsymbol{C}(S_0)$ — пространство непрерывных функций на S_0, наделенное топологией равномерной сходимости. Для заданного $K \in C(\mathscr{K}_0)$ можно каждому $u \in S_0$ поставить в соответствие расстояние $r_K(u)$ от начала координат 0 до опорной гиперплоскости множества K, имеющей положительную нормаль u. Обратно, хорошо известно, что всякий выпуклый компакт K может быть определен как пересечение $K = \bigcap_{u \in S_0} \{x\colon \langle x,\ u\rangle \leqslant r_K(u)\}$ замкнутых полупространств, соответствующих его опорным гиперплоскостям (здесь $\langle x,\ u\rangle$ обозначает скалярное произведение в $\mathbf{R}^d$).

Мы будем называть функцию $u \to r_K(u)$ *опорной функцией* множества $K \in C(\mathscr{K}_0)$. Для каждого $K \in C(\mathscr{K}_0)$ опорная функция r_K непрерывна на S_0, т. е. $r_K \in \boldsymbol{C}(S_0)$.

Обозначим через α взаимно однозначное отображение $K \to r_K$ из $C(\mathscr{K}_0)$ в $\boldsymbol{C}(S_0)$, а через $\mathscr{R}$ — образ $C(\mathscr{K}_0)$ в $\boldsymbol{C}(S_0)$, т. е. класс опорных функций.

Отображение α является *гомеоморфизмом* пространства $C(\mathscr{K}_0)$ на его образ $\mathscr{R} \subset \boldsymbol{C}(S_0)$, поскольку если B — единичный шар в $\mathbf{R}^d$, то неравенство

$$\sup_{u \in S_0} |r_K(u) - r_{K'}(u)| \leqslant \varepsilon$$

эквивалентно включениям $K \subset K' \oplus \varepsilon B$ и $K' \subset K \oplus \varepsilon B$, т. е. неравенству $\rho(K, K') \leqslant \varepsilon$, где ρ — метрика Хаусдорфа.

С другой стороны, в силу очевидных соотношений

$$r_{K \oplus K'} = r_K + r_{K'}, \quad r_{\alpha K} = \alpha r_K, \quad K \subset K' \Leftrightarrow r_K \leqslant r_{K'},$$
$$[\alpha \geqslant 0, \ K, \ K' \in C(\mathscr{K}_0)]$$

отображение α является также *изоморфизмом* из $C(\mathscr{K}_0)$ в $\mathscr{R}$ относительно следующих операций: сложения по Минковскому в $C(\mathscr{K}_0)$ и обычного сложения в $\boldsymbol{C}(S_0)$; положительных гомотетий в $C_0(\mathscr{K})$ и умножения на положительные константы в $\boldsymbol{C}(S_0)$; упорядочения $\subset$ в $C(\mathscr{K}_0)$ и упорядочения $\leqslant$ в $\boldsymbol{C}(S_0)$. Поэтому *$C(\mathscr{K}_0)$ можно отождествлять с выпуклым конусом $\mathscr{R}$*, замкнутым в $\boldsymbol{C}(S_0)$ и обладающим компактным основанием.

Предложение 4.4.1. *Конус $\mathscr{R}$ устойчив относительно операции взятия максимума, т. е. если $f, g \in \mathscr{R}$, то $\sup(f, g) \in \mathscr{R}$. Далее, если K_i, $i \in I$, — класс компактных выпуклых множеств, содержащихся в некотором фиксированном компактном множестве, то опорные функции r_{K_i} равномерно ограничены и $\sup\{r_{K_i}, i \in I\}$ является опорной функцией замкнутой выпуклой оболочки $C(\overline{\bigcup K_i}) \in C(\mathscr{K}_0)$.*

Доказательство. Пусть r_K, $r_{K'}$ — опорные функции множеств K, $K' \in C(\mathscr{K}_0)$. Очевидно, $r_{C(K \cup K')} = \sup(r_K, r_{K'}) \in \mathscr{R}$. Если некоторое семейство K_i, $i \in I$, ограничено в $C(\mathscr{K}_0)$, то положим $K_J = C\left(\bigcup_{i \in J} K_i\right)$ для любого конечного подмножества $J \subset I$. Фильтрующееся семейство K_J сходится в $\mathscr{K}$ к $K_0 = C\left(\overline{\bigcup_{i \in I} K_i}\right)$ в силу следствия 3 теоремы 1.2.2 и непрерывности C на $\mathscr{K}$ (предложение 1.5.4). Поэтому семейство r_J соответствующих опорных функций сходится в $\boldsymbol{C}(S_0)$ к опорной функции r_{K_0} множества $K_0 \in C(\mathscr{K}_0)$, ввиду гомеоморфизма $K \to r_K$. Следовательно, из $r_J = \sup\{r_{K_i}, \ i \in J\}$ вытекает, что $r_{K_0} = \sup\{r_{K_i}, \ i \in I\} \in \mathscr{R}$.

Предложение 4.4.1 можно несколько уточнить. Пусть u_1 и u_2 — два единичных вектора, $\langle u_1, u_2 \rangle$ — их скалярное произведение в $\mathbf{R}^d$ и $\langle u_1, u_2 \rangle_+ = \langle u_1, u_2 \rangle$, если $\langle u_1, u_2 \rangle \geqslant 0$, и равно нулю в противном случае. Для заданного $u_0 \in S_0$ функция $u \to \langle u, u_0 \rangle_+$ является опорной функцией отрезка $\{\lambda u_0, \ 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\} \in C(\mathscr{K}_0)$ и поэтому принадлежит $\mathscr{R}$. Пусть (λ_i, u_i), $i \in I$, — подмножество в $\mathbf{R}_+ \times S_0$, такое, что $\sup\limits_i \lambda_i < \infty$. Тогда в силу нашего предположения функция r: $u \to r(u) = \sup\{\lambda_i \langle u, u_i \rangle_+, \ i \in I\}$ принадлежит $\mathcal{R}$. Обратно, каждая опорная функция допускает такое представление, поскольку любое множество $K \in C(\mathcal{K}_0)$ является замкнутой выпуклой оболочкой своих крайних точек. Возможно даже взять счетное множество I, выбирая семейство (λ_i, u_i), $i \in I$, так, чтобы $\{\lambda_i, u_i, i \in I\}$ было счетным плотным подмножеством в ∂K. Тем самым мы получаем

Следствие 1. *Для того чтобы функция r на S_0 принадлежала $\mathcal{R}$, необходимо и достаточно, чтобы она допускала представление $r(u) = \sup\{\lambda_i \langle u, u_i\rangle_+, i \in I\}$, $u \in S_0$, для некоторого счетного семейства (λ_i, u_i), $i \in I$ в $\mathbf{R}_+ \times S_0$.*

Следствие 2. *Функция r на S_0 принадлежит $\mathcal{R}$ тогда и только тогда, когда множество $F = \{x\colon |x|\, r(x/|x|) \leqslant 1\}$ является замкнутой выпуклой окрестностью начала координат в $E = \mathbf{R}^d$.*

Доказательство. В силу следствия 1, $r \in \mathcal{R}$ тогда и только тогда, когда $r(u) = \sup\{\lambda_i \langle u, u_i\rangle_+, i \in I\}$ $(u \in S_0)$ для некоторого семейства (λ_i, u_i), $i \in I$ в $\mathbf{R}_+ \times S_0$, такого, что $\gamma = \sup \lambda_i < \infty$. Но это равносильно тому, что $F = \bigcap_{i \in I} \{x\colon \langle x, u_i\rangle_+ \leqslant 1/\lambda_i\}$ и $\inf(1/\lambda_i) > 0$, а это условие удовлетворяется в том и только том случае, если F — замкнутая выпуклая окрестность нуля.

Отметим, что замкнутое множество F компактно тогда и только тогда, когда $r > 0$ (строго!) на S_0, т. е. когда нуль является внутренней точкой множества $K \in C(\mathcal{K}_0)$, опорной функцией которого служит r.

Конус $\mathcal{R}$ устойчив относительно взятия максимума (предложение 4.4.1), однако он не замкнут по отношению к взятию (точной) нижней грани (inf). Для того чтобы охарактеризовать свойства этой операции, нам понадобится следующая лемма.

Лемма 4.4.1. *Если K, $K' \in C(\mathcal{K})$, то $K \cup K' \in C(\mathcal{K})$ в том и только том случае, если $K \oplus K' = (K \cup K') \oplus (K \cap K')$.*

Доказательство. Включение $(K \cup K') \oplus K \cap K' \subset K \oplus K'$ выполняется для произвольных множеств K, $K' \in \mathcal{P}(E)$. Поэтому нам достаточно доказать, что обратное включение эквивалентно соотношению $K \cup K' \in C(\mathcal{K})$.

Предположим, что $K \cup K' \in C(\mathcal{K})$, и пусть $y \in K \oplus K'$, т. е. $y = x + x'$, где $x \in K$, $x' \in K'$. Согласно предложению 4.2.1, существует такое $\lambda \in [0, 1]$, что $\lambda x + (1-\lambda)x' \in K \cap K'$. Таким образом, $y = z_1 + z_2$, где $z_1 = \lambda x + (1-\lambda)x' \in K \cap K'$ и $z_2 = (1-\lambda)x + \lambda x' \in K \cup K'$ (поскольку $K \cup K'$ выпукло). Отсюда следует, что $y \in (K \cup K') \oplus (K \cap K')$, и искомое включение действительно имеет место.

Обратно, предположим, что $(K \cup K') \oplus (K \cap K') = K \oplus K'$, и возьмем $x \in K$, $x' \in K'$. Для некоторой точки $y \in K \cup K'$ и некоторой точки $z \in K \cap K'$ мы имеем $x + x' = y + z$. Отсюда вытекает, что $(x + x')/2 = (y + z)/2 \in K \cup K'$. Повторяя эту процедуру, получаем, что множество $\{\lambda x + (1 - \lambda) x',\ 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\}$ содержится в замкнутом множестве $K \cup K'$. Поэтому $K \cup K' \in C(\mathcal{K})$.

Предложение 4.4.2. *Пусть K и K' — два множества из $C(\mathcal{K}_0)$, а r_K и $r_{K'}$ — их опорные функции. Тогда опорной функцией множества $K \cap K'$ будет $r_{K \cap K'} = \sup \{r:\ r \in \mathcal{R},\ r \leqslant \inf (r_K, r_{K'})\}$. При этом $\inf (r_K, r_{K'}) \in \mathcal{R}$ в том и только том случае, если $K \cup K'$ выпукло, и в этом случае $r_{K \cap K'} = \inf ((r_K, r_{K'}))$.*

Доказательство. Первое утверждение вытекает из предложения 4.4.1, так как $K \cap K'$ есть наибольшее компактное выпуклое множество, содержащееся в K и K'. Поскольку $r_K + r_{K'} = \sup (r_K, r_{K'}) + \inf (r_K, r_{K'})$, то $K \oplus K' = (K \cup K') \oplus (K \cap K')$ тогда и только тогда, когда $r_{K \cap K'} = \inf (r_K, r_{K'})$, т. е., в силу первого утверждения, тогда и только тогда, когда $\inf (r_K, r_{K'}) \in \mathcal{R}$. Второе утверждение вытекает теперь из леммы 4.4.1.

Замечание. Если функционал L на $C(\mathcal{K}_0)$ удовлетворяет соотношению $L(K \oplus K') = L(K) + L(K')$ для K, $K' \in C(\mathcal{K}_0)$, то он C-аддитивен.

Это вытекает из определения 3.5.1 и леммы 4.4.1.

Упорядочение $\geqslant$ в $\mathcal{R} = C(\mathcal{K}_0)$

В пространстве $C(S_0)$ можно ввести отношение (частичного) упорядочения $\geqslant$, определяемое следующим образом: $f \geqslant f'$, если $f - f' \in \mathcal{R}$. Аналогичным образом можно ввести и в самом пространстве $C(\mathcal{K}_0)$ упорядочение, индуцированное упорядочением $\geqslant$. По определению, соотношение $A \geqslant B$ в $C(\mathcal{K}_0)$ эквивалентно соотношению $r_A - r_B \in \mathcal{R}$, а это последнее выполняется тогда и только тогда, когда существует такое $C \in C(\mathcal{K}_0)$, что $r_A = r_B + r_C$, т. е. $A = B \oplus C$. Иначе говоря (в терминологии § 1.5), *$A \geqslant B$ тогда и только тогда, когда множество A заполнимо множеством B*, т. е. $A_B = A$.

Выпуклый конус является симплексом, если каждая его точка допускает единственное представление в виде интеграла по множеству крайних точек (см., например, Шоке, 1960, или Альфсен, 1971). Однако правильный шестиугольник в $\mathbb{R}^2$ получается как сложением по Минковскому двух равносторонних треугольников, так и сложением трех (прямолинейных) отрезков, а треугольники и отрезки суть крайние точки в $C(\mathcal{K}_0)$.

Отсюда мы заключаем, что *выпуклый конус $C(\mathscr{K}_0)$ не является симплексом.*

В следующем параграфе мы определим другой выпуклый конус $\mathscr{R}_1 \subset \mathscr{R}$, отождествимый с некоторым подмножеством в $C(\mathscr{K}_0)$, называемым *классом Штейнера*, и этот конус $\mathscr{R}_1$ уже будет симплексом. В случае эвклидовой плоскости $\mathbf{R}^2$ класс Штейнера совпадает с классом $\mathscr{R}_s$ симметричных компактных выпуклых множеств, однако для $d > 2$ имеет место лишь (строгое) включение $\mathscr{R}_1 \subset \mathscr{R}_s$.

Пространство Минковского $\mathscr{M}(S_0)$

Векторное подпространство в $\boldsymbol{C}(S_0)$, порожденное конусом $\mathscr{R}$, называется *пространством Минковского* и обозначается через $\mathscr{M}(S_0)$. Иначе говоря, $\varphi \in \mathscr{M}(S_0)$ тогда и только тогда, когда существуют такие $f_1, f_2 \in \mathscr{R}$, что $\varphi = f_1 - f_2$. Пространство Минковского плотно в $\boldsymbol{C}(S_0)$ (но не совпадает с ним). Это вытекает из следующей леммы 4.4.2, в которой $\boldsymbol{C}_2(S_0)$ обозначает пространство функций, дважды непрерывно дифференцируемых на S_0.

Лемма 4.4.2. *Для любой функции $f \in \boldsymbol{C}_2(S_0)$ существует такая константа $C \geqslant 0$, что $f + C \in \mathscr{R}$, и, следовательно, $\boldsymbol{C}_2(S_0) \subset \subset \mathscr{M}(S_0)$.*

Доказательство. Положительные константы C содержатся в $\mathscr{R}$ как опорные функции шаров с центрами в начале координат, так что вторая часть утверждения вытекает из первой. Пусть f — некоторая функция из $\boldsymbol{C}_2(S_0)$, ∇f — ее второй дифференциал (непрерывный на S_0), а γ — метрический тензор на единичной сфере S_0. Тогда тензор $\gamma f + \nabla f$ непрерывен на компактном пространстве S_0, и поэтому существует такая константа $C \geqslant 0$, что $\gamma(f + C) + \nabla f$ положительно определен на S_0. Но, как хорошо известно, функция $\varphi \in \boldsymbol{C}_2(S_0)$ является опорной функцией (т. е. $\in \mathscr{R}$) тогда и только тогда, когда тензор $\varphi\gamma + \nabla f$ положительно определен. Значит, $f + C \in \mathscr{R}$.

Продолжение положительно линейного функционала на $\mathscr{R}$

Пусть L — функционал, определенный на $\mathscr{R} = C(\mathscr{K}_0)$. Мы называем функционал L *возрастающим*, если из $r \leqslant r'$ в $\mathscr{R}$ вытекает, что $L(r) \leqslant L(r')$, и *положительно линейным*, если $L(\alpha r + \beta r') = \alpha L(r) + \beta L(r')$ для любых $\alpha, \beta \geqslant 0$ и $r, r' \in \mathscr{R}$. Если функционал L является возрастающим и положительно линейным, то $L(0) = 0$ и $L(r) \geqslant 0$ на $\mathscr{R}$. Как показывает следующее предложение, всякий такой функционал можно отождествить с некоторой мерой Радона на S_0.

Предложение 4.4.3. *Пусть L — возрастающий положительно линейный функционал на $\mathscr{R}$. Тогда существует единственное непрерывное линейное продолжение L на $\boldsymbol{C}(S_0)$. Другими словами, существует единственная мера $\lambda \geqslant 0$ на S_0, для которой*

$$L(r) = \int_{S_1} r(u)\,\lambda(du) \qquad (r \in \mathscr{R}).$$

Доказательство. Пусть f — некоторая функция из $\boldsymbol{C}_2(S_0)$, а константа $C \geqslant 0$ такова, что $f + C \in \mathscr{R}$ (лемма 4.4.2). Разность $L(f + C) - L(C)$ не зависит от выбора этой константы C в силу положительной линейности L. Поэтому мы можем определить на $\boldsymbol{C}_2(S_0)$ функционал L_2, полагая $L_2(f) = L(f + C) - L(C)$, и этот функционал L_2 будет совпадать с L на $\mathscr{R} \cap \boldsymbol{C}_2(S_0)$. Ясно, что L_2 аддитивен, $L_2(\alpha f) = \alpha L_2(f)$, $\alpha \geqslant 0$, и $L_2(-f) = -L_2(f)$, так что L_2 линеен на $\boldsymbol{C}_2(S_0)$. Далее, L_2 — возрастающий функционал. Действительно, если $f \leqslant f'$ в $\boldsymbol{C}_2(S_0)$, то пусть C — такая константа $< \infty$, что $f + C$ и $f' + C$ принадлежат $\mathscr{R}$ (лемма 4.4.2). Тогда $L_2(f + C) \leqslant L_2(f' + C)$ и поэтому $L_2(f) \leqslant L_2(f')$. В соответствии с классическими результатами теории меры (см. Бурбаки, 1965b, гл. III, § 1, предложение 2) отсюда вытекает, что L_2 допускает продолжение до меры $\lambda \geqslant 0$ на $\boldsymbol{C}(S_0)$, причем эта мера λ единственна, поскольку $\boldsymbol{C}_2(S_0)$ плотно в $\boldsymbol{C}(S_0)$. Очевидно, что это продолжение совпадает с L на $\mathscr{R}$.

4.5. ВЫПУКЛЫЙ КОНУС $\mathscr{R}_1$ И КЛАСС ШТЕЙНЕРА

В этом параграфе мы рассматриваем более узкий класс $\mathscr{R}_s \subset \mathscr{R}$ непустых компактных выпуклых множеств, *симметричных относительно начала координат* 0. Этот класс по-прежнему является выпуклым конусом с компактным основанием. Функции $r \in \mathscr{R}_s$ суть симметричные опорные функции (т. е. $r(u) = r(-u)$ для любых $u \in S_0$). Факторпространство $S_0/\equiv$ по отношению эквивалентности $\equiv$, определяемому условием «$u \equiv u'$, если $u = u'$ или $u = -u'$», может быть отождествлено с пространством $\mathscr{S}_1 \subset \mathscr{F}$, т. е. с пространством одномерных подпространств в $\mathbf{R}^d$. Точно так же симметричные функции и меры на S_0 могут быть отождествлены с функциями и мерами на $\mathscr{S}_1$. Поэтому в дальнейшем класс $\mathscr{R}_s$ будет рассматриваться как выпуклый конус с компактным основанием в пространстве $\boldsymbol{C}(\mathscr{S}_1)$ непрерывных функций на $\mathscr{S}_1$ (с топологией равномерной сходимости).

Для заданного $u_0 \in S_0$ отрезок $\{\lambda u_0, |\lambda| \leqslant 1\}$ является симметричным компактным выпуклым множеством, а его опорная функция $u \to |\langle u, u_0\rangle|$ симметрична в $\mathscr{R}$. Если $L_0 \in \mathscr{S}_1$ — одномерное подпространство $\{\lambda u_0, \lambda \in R\} \in \mathscr{S}_1$, то в $\mathscr{R}_s$ этому отрезку соответствует функция $L \to |L, L_0|$ на $\mathcal{P}_1$ (относительно обозначения $|L, L_0|$ см. (3.5.5)). Будем обозначать через $\mathcal{R}_1$ класс функций φ на $\mathcal{P}_1$, допускающих *интегральное представление*

$$\varphi(L) = \int_{\mathcal{P}_1} |L, L'| G(dL') \quad (L \in \mathcal{P}_1) \tag{4.5.1}$$

с некоторой мерой $G \geqslant 0$ на $\mathcal{P}_1$.

Если мера G сосредоточена на конечном подмножестве в $\mathcal{P}_1$, то φ будет опорной функцией *суммы Минковского конечного числа симметричных отрезков прямых*. Более общим образом, будем говорить, что $K \in C(\mathcal{K}_0)$ является *штейнеровским компактом* (или принадлежит *классу Штейнера*), если существует такая последовательность $\{K_n\} \subset \mathcal{K}$, что $K = \lim K_n$ в $\mathcal{K}$ и K_n для каждого $n > 0$ есть конечная сумма Минковского симметричных отрезков прямых. При этом *функция φ на $\mathcal{P}_1$ принадлежит $\mathcal{R}_1$ тогда и только тогда*, когда *она представляет собой опорную функцию некоторого штейнеровского компакта*, так что класс Штейнера в $C(\mathcal{K}_0)$ можно отождествить с выпуклым конусом $\mathcal{R}_1$.

Доказательство. Если последовательность $\{G_n\}$ положительных мер на $\mathcal{P}_1$ слабо сходится к мере G, то последовательность $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{R}_1$, определяемая соотношением $\varphi_n(L) = \int |L, L'| \times G_n(dL')$, равномерно сходится к функции φ, задаваемой равенством (4.5.1). С другой стороны, всякая положительная мера на $\mathcal{P}_1$ является слабым пределом некоторой последовательности конечных[1] мер. Поэтому $\varphi \in \mathcal{R}_1$ тогда и только тогда, когда φ есть опорная функция некоторого штейнеровского компакта.

Выпуклый конус $\mathcal{R}_1$ замкнут в $\boldsymbol{C}(\mathcal{P}_1)$ и обладает компактным основанием.

Доказательство. Пусть последовательность $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{R}_1$ равномерно сходится к $\varphi \in \boldsymbol{C}(\mathcal{P}_1)$, и пусть G_n для каждого $n > 0$ — такая положительная мера, что $\varphi_n(L) = \int |L, L'| G_n(dL')$, $L \in \mathcal{P}_1$. Если $\mathfrak{S}$ обозначает инвариантную вероятность на $\mathcal{P}_1$, то соотношение $\int \varphi_n(L) \mathfrak{S}(dL) = C \int G_n(dL')$ $\left[\text{где } C = \int |L, L'| \mathfrak{S}(dL) \text{ не зависит от } L'\right]$ показывает, что последовательность $\{G_n\}$ *ограничена*. Поэтому существует подпоследовательность $\{G_{n_k}\}$, слабо

[1] Мера называется *конечной*, если ее носитель — конечное множество. — *Прим. перев.*

сходящаяся к некоторой мере $G \geqslant 0$, и последовательность $\{\varphi_{n_k}\}$ равномерно сходится к функции

$$\varphi': L \to \varphi'(L) = \int |L, L'| G(dL').$$

Таким образом, $\varphi = \varphi' \in \mathscr{R}_1$, и конус $\mathscr{R}_1$ замкнут. Очевидно, что подмножество в $\mathscr{R}_1$, образованное функциями φ, соответствующими вероятностям на $\mathscr{S}_1$ $\left(\text{т. е. мерам } G \text{ с } \int G(dL) = 1\right.$ в $\left.(4.5.1)\right)$, служит компактным основанием замкнутого выпуклого конуса $\mathscr{R}_1$.

В дальнейшем мы покажем, что $\mathscr{R}_1$ является *симплексом* (т. е. что интегральное представление (4.5.1) единственно), а именно покажем, что отображение $G \to \varphi$, определяемое соотношением (4.5.1), есть гомеоморфизм пространства $\mathscr{M}^+(S_0)$ неотрицательных мер на S_0 на штейнеровский конус $\mathscr{R}_1$.

Но прежде заметим, что *в случае* $d = 2$ *класс Штейнера совпадает с классом симметричных компактных выпуклых множеств*, т. е. $\mathscr{R}_1 = \mathscr{R}_s$, поскольку всякий симметричный многоугольник в $\mathbf{R}^2$ представим в виде конечной суммы Минковского симметричных отрезков, а класс симметричных многоугольников плотен в $\mathscr{R}_s$. *Это*, однако, *уже не так для* $d > 2$: включение $\mathscr{R}_1 \subset \mathscr{R}_s$ является в этом случае строгим.

Доказательство. Пусть T — равносторонний треугольник, содержащийся в некотором двумерном линейном многообразии, не содержащем начала координат, а T' — симметричное ему относительно начала координат множество. Тогда выпуклая оболочка $C(T \cup T') \in \mathscr{R}_s$ не принадлежит $\mathscr{R}_1$, поскольку любая двумерная грань многогранника из $\mathscr{R}_1$ представляет собой сумму Минковского конечного числа отрезков и потому не может быть треугольником.

Теорема единственности

Для доказательства единственности интегрального представления (4.5.1) мы применим процедуру, основанную на гармоническом анализе. Прежде всего напомним некоторые классические результаты. Говорят, что вещественная функция $h \to K(h)$ на $\mathbf{R}^d$ является *условно положительно определенной порядка* 0 (или, для краткости, просто условно положительно определенной), если $\iint \lambda(dx) K(x-y) \lambda(dy) \geqslant 0$ для любой конечной меры λ с $\int \lambda(dx) = 0$.

Предложение 4.5.1. a) *Вещественная функция K на $\mathbf{R}^d$ условно положительно определена в том и только том случае, когда для любого $t > 0$ положительно определена функция $C = \exp(tK)$. В этом случае функция K симметрична.*

b) *Вещественная непрерывная функция K на $\mathbf{R}^d$ условно положительно определена тогда и только тогда, когда она представима в виде*

$$K(h) = \int \frac{\cos(2\pi\langle u, h\rangle) - 1}{4\pi^2 |u|^2} \chi(du) + a + Q(h),$$

где a — некоторое вещественное число, Q — некоторая положительная квадратичная форма, а χ — положительная симметричная мера на $\mathbf{R}^d$, обязательно единственная, не имеющая атома в начале координат и такая, что $\int (1/(1 + 4\pi^2 |u|^2)) \chi(du) < \infty$. (Здесь $\langle\ \rangle$ — скалярное произведение в $\mathbf{R}^d$.)

Доказательство. a) Если функция $\exp(tK)$ положительно определена для любых $t > 0$, то функция $K_t = (\exp(tK) - 1)/t$ условно положительно определена и таковой же будет и функция $K = \lim K_t$, $t \downarrow 0$. Обратно, пусть K — условно положительно определенная функция на $\mathbf{R}^d$. Тогда функция σ на $\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d$, задаваемая соотношением $\sigma(x, y) = K(x - y) - K(x) - K(y) + K(0)$, удовлетворяет условию $\int \mu(dx) \sigma(x, y) \mu(dy) \geqslant 0$ для любой конечной меры μ, что без труда устанавливается элементарными вычислениями. Поэтому существует случайная функция Y второго порядка (т. е. отображение из $\mathbf{R}^d$ в гильбертово пространство $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$), ковариация которой равна σ, т. е. $\sigma(x, y) = \langle Y(x), Y(y)\rangle$. Пусть $\{Y_n\}$ — последовательность независимых случайных функций, эквивалентных Y, а N—пуассоновская случайная величина, не зависящая от $\{Y_n\}$, с математическим ожиданием $E(N) = t$. Тогда отображение Z: $\mathbf{R}^d \to L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$, определяемое следующим образом: $Z = 1$ для $N = 0$ и $Z = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ для $N = n$, — является случайной функцией второго порядка с ковариацией $(x, y) \to \langle Z(x), Z(y)\rangle = \exp(t\sigma(x, y) - 1)$. Поэтому случайная функция $x \to Z(x)/\|Z(x)\|$ имеет ковариацию $(x, y) \to \exp(tK(x - y) - 1)$ и, таким образом, функция $C = \exp(tK)$ положительно определена на $\mathbf{R}^d$.

b) Второе утверждение является непосредственным следствием первого в силу классических результатов относительно безгранично делимых вероятностных законов.

Приведенные результаты можно использовать для исследования поведения вблизи начала координат вещественных непрерывных ковариаций C на $\mathbf{R}^d$ (т. е. положительно определенных непрерывных вещественных функций на $\mathbf{R}^d$).

А именно, предположим, что существует такое число α, что для любого $h \in \mathbf{R}^d$ существует предел

$$C_0(h) \equiv \lim_{a \downarrow 0} ((C(ah) - C(0))/a^\alpha)$$

(как хорошо известно, при этом обязательно $0 \leqslant \alpha \leqslant 2$). Для $\lambda > 0$, очевидно, $C_0(\lambda h) = \lambda^\alpha C_0(h)$, так что найдется такая симметричная неотрицательная функция φ на единичной сфере S_0, для которой $C_0(h) = -|h|^\alpha \varphi(h/|h|)$, $h \neq 0$. Мы рассматриваем только случай, когда φ непрерывна на S_0, т. е. $\varphi \in \boldsymbol{C}(S_0)$. Если $\alpha = 2$, то, как хорошо известно, $C_0(h)$ есть неотрицательная квадратичная форма на $\mathbf{R}^d$; если $\alpha = 0$, то $C_0(h) \equiv 0$. Таким образом, интерес представляет случай $0 < \alpha < 2$. В дальнейшем нам понадобятся лишь результаты для $\alpha = 1$, так что следующая теорема единственности является даже более общей, чем здесь необходимо.

Теорема 4.5.1. *Пусть α — вещественное число, $0 < \alpha < 2$, а $\varphi \in \boldsymbol{C}(S_0)$ — непрерывная функция на единичной сфере S_0 в $\mathbf{R}^d$. Тогда следующие три условия эквивалентны (и влекут за собой симметричность функции φ):*

a) *Существует такая вещественная ковариация C на $\mathbf{R}^d$, что для любого $h \in \mathbf{R}^d$*

$$\lim_{a \downarrow 0} ((C(0) - C(ah))/a^\alpha) = |h|^\alpha \varphi(h/|h|).$$

b) *Функция K: $h \to K(h) = -|h|^\alpha \varphi(h/|h|)$ условно положительно определена на $\mathbf{R}^d$.*

c) *Существует такая необходимо единственная симметричная мера $\mu \geqslant 0$ на S_0, для которой*

$$\varphi(s) = \int_{S_0} |\langle s, s' \rangle|^\alpha \mu(ds') \qquad (s \in S_0).$$

Доказательство. Пусть C — ковариация. Тогда для любого $a > 0$ функция K_α: $h \to (C(ah) - C(0))/a^\alpha$ условно положительно определена, и таковым же будет и ее предел K при $a \downarrow 0$. Поэтому a) $\Rightarrow$ b).

Доказательство импликации b) $\Rightarrow$ c) сложнее. Предположим, что функция K: $h \to K(h) = -|h|^\alpha \varphi(h/|h|)$ условно положительно определена. Тогда она представима в виде

$$K(h) = \int \frac{\cos(2\pi\langle uh \rangle) - 1}{4\pi^2 |u|^2} \chi(du), \tag{4.5.2}$$

где $\chi \geqslant 0$ — *необходимо единственная* симметричная мера на $\mathbf{R}^d$, не имеющая атома в начале координат и такая, что

$$\int (1/(1+4\pi^2 |u|^2))\, \chi(du) < \infty.$$

(Это вытекает из утверждения 4.5.1 и соотношений $K(0)=0$ и $\lim (K(h)/|h|^2)=0$ при $|h| \uparrow \infty$.)

Поскольку $K(ah)=a^\alpha K(h)$, $a>0$, то мера χ в (4.5.2) удовлетворяет условию $\chi(adu)=a^{2-\alpha}\chi(du)$ в силу единственности спектральной меры, соответствующей условно положительно определенной функции. Для любого борелевского множества $B \subset S_0$ положим $\tilde{B}=\bigcup \{aB, 0 \leqslant a \leqslant 1\}$ и $\nu(B)=\chi(\tilde{B})/\chi(\tilde{S_0})$, так что ν — симметричная вероятность на S_0. Поскольку $\chi(a\tilde{B})/\chi(S_0)= = a^{2-\alpha}\nu(B)$, то

$$\int f(u)\,\chi(du) = A \int_{S_0} \nu(d\sigma) \int_0^\infty f(\rho\sigma)^{1-\alpha}\, d\rho$$

для любой непрерывной функции f с компактным носителем в $\mathbf{R}^d$; здесь $A=(2-\alpha)\chi(\tilde{S}_0)$, а ν — та *единственная вероятность* на S_0, для которой выполняется это соотношение. Далее, ввиду единственности спектрального представления (4.5.2), это соотношение эквивалентно соотношению

$$r^\alpha \varphi(s) = A \int_{S_0} \nu(d\sigma) \int_0^\infty \frac{1-\cos(2\pi\rho r\langle\sigma, s\rangle)}{4\pi^2\rho^2}\, \rho^{1-\alpha}\, d\rho. \qquad (4.5.3)$$

С другой стороны, функция $h \to -|h|^\alpha$ условно положительно определена на $\mathbf{R}^1$ и представима в виде

$$|h|^\alpha = B \int_0^\infty \frac{1-\cos 2\pi\rho h}{4\pi^2\rho^2}\, \rho^{1-\alpha}\, d\rho,$$

где $B>0$ — надлежащим образом выбранная постоянная. Полагая $h=r\langle\sigma, s\rangle$ и производя соответствующую подстановку в (4.5.3), получаем следующее соотношение, *эквивалентное* (4.5.3):

$$\varphi(s) = A' \int_{S_0} |\langle\sigma, s\rangle|^\alpha\, \nu(d\sigma); \qquad (4.5.4)$$

здесь $A'>0$ — постоянная, очевидным образом однозначно определенная.

Таким образом, функция φ имеет единственное представление, указанное в условии c) (с $\mu = A'\nu$), и единственность вероятности ν влечет за собой единственность меры μ. Итак, условие c) выполняется.

Обратно, c)$\Rightarrow$b), поскольку (4.5.4) и (4.5.3) равносильны. Наконец, b)$\Rightarrow$a) в силу утверждения a) предложения 4.5.1, в котором надо положить $C(h) = \exp(-|h|^\alpha \varphi(h/|h|))$.

С учетом гомеоморфизма между пространством непрерывных функций (соотв. мер) на $\mathcal{P}_1$ и пространством непрерывных симметричных функций (соотв. симметричных мер) на S_0, доказанную теорему единственности можно переформулировать следующим образом.

Следствие 1. *Пусть* α *— вещественное число,* $0<\alpha<2$, *а* $\mathcal{R}_\alpha \subset \boldsymbol{C}(\mathcal{P}_1)$ *— выпуклый конус, образованный функциями* φ, *допускающими представление* $\varphi(L) = \int\limits_{\mathcal{P}_1} |L, L'|^\alpha G(dL')$, $L \in \mathcal{P}_1$, *где* G *— неотрицательная мера на* $\mathcal{P}_1$. *Тогда* $\mathcal{R}_\alpha$ *является симплексом, а отображение* $G \to \varphi$ *— гомеоморфизмом из* $\mathcal{M}^+(\mathcal{P}_1)$ *на* $\mathcal{R}_\alpha$. *В частности, линейное подпространство, порожденное функциями* $L \to |L, L'|^\alpha$, $L' \in \mathcal{P}_1$, *плотно в* $\boldsymbol{C}(\mathcal{P}_1)$.

Доказательство. Первые утверждения непосредственно вытекают из теоремы единственности 4.5.1. Предположим, что мера μ ортогональна функциям $L \to |L, L'|^\alpha$, $L' \in \mathcal{P}_1$, и пусть $\mu = \mu_+ - \mu_-$ — ее жорданово разложение на две положительные меры μ_+ и μ_-. Тогда в силу теоремы единственности из $\int \mu_+(dL')|L, L'|^\alpha = \int \mu_-(dL')|L, L'|^\alpha$ вытекает, что $\mu = \mu_+ - \mu_- = 0$, чем следствие и доказано.

Геометрическая интерпретация

Пусть C — такая ковариация на $\mathbf{R}^d$, что условие c) теоремы 4.5.1 выполняется при $\alpha = 1$. Тогда график функции $h \to C(h)$ в $\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}$ имеет при $h=0$ *касательный конус*, основанием которого в $\mathbf{R}^d$ служит граница ∂F множества $F = \{x\colon |x|\varphi(x/|x|) \leqslant C(0)\}$. В силу следствия 2 предложения 4.4.1, F является симметричной замкнутой выпуклой окрестностью нуля в $\mathbf{R}^d$. В случае $d=2$ верно и обратное, поскольку класс Штейнера в $\mathbf{R}^2$ совпадает с классом $\mathcal{R}_s$ симметричных компактных выпуклых множеств. Итак, мы можем зафиксировать

Следствие 2. *Пусть* F *— некоторое подмножество эвклидовой плоскости* $\mathbf{R}^2$. *Для существования непрерывной ковариации на* $\mathbf{R}^2$, *касательный конус которой в точке* $h=0$ *имеет основание* ∂F, *необходимо и достаточно, чтобы* F *было симметричной замкнутой выпуклой окрестностью нуля в* $\mathbf{R}^2$.

В случае $d > 2$ рассматриваемое условие принимает вид „существует штейнеровский компакт, опорная функция φ которого такова, что $F = \{x\colon |x|\varphi(x/|x|) \leqslant 1\}$“. Иначе говоря, функция φ на единичной сфере тогда и только тогда является опорной функцией некоторого штейнеровского компакта, когда функция $h \to \exp(-|h|\varphi(h/|h|))$ есть ковариация на $\mathbf{R}^d$.

Характеризация сети прямых и сети гиперплоскостей

Пусть A — пауссоновская сеть гиперплоскостей (соотв. прямых), отвечающая согласно (3.5.1′) мере $G \geqslant 0$ на $\mathcal{S}_{d-1}$ (соотв. $\mathcal{S}_1$). Как мы видели, пуассоновский точечный процесс, индуцируемый сетью A на прямой с направлением $S \in \mathcal{S}_1$ (соотв. на гиперплоскости с направлением $S \in \mathcal{S}_{d-1}$), имеет постоянную *интенсивность*

$$\varphi(S) = \int |S, \sigma^{\perp}|\, G(d\sigma).$$

С учетом гомеоморфизма $S \to S^{\perp}$ из $\mathcal{S}_1$ на $\mathcal{S}_{d-1}$ и соотношения $|S_1, S_2| = |S_1^{\perp}, S_2^{\perp}|$ получаем, воспользовавшись следствием 2 теоремы 4.5.1, что эти функции φ в точности те же, что и функции из $\mathcal{R}_1$, и указанная пуассоновская сеть полностью определяется заданием соответствующей функции φ. Мы сформулируем точное утверждение только для случая пуассоновских гиперплоскостей.

Следствие 3. *Пусть φ — некоторая функция на $\mathcal{S}_1$, отождествляемая с симметричной функцией $u \to \varphi(S)$ на S_0, где $S \in \mathcal{S}_1$ — направление единичного вектора $u \in S_0$. Тогда следующие четыре условия эквивалентны:*

a) *Существует такая стационарная пуассоновская сеть плоскостей A в $\mathbf{R}^d$, что $\varphi(S)$ для любого $S \in \mathcal{S}_1$ является интенсивностью пуассоновского точечного процесса, индуцированного сетью A на прямых, имеющих направление S.*

b) *Существует такая необходимо единственная мера $G \geqslant 0$ на $\mathcal{S}_1$, что $\varphi(S) = \int |S, S'|\, G(dS')$ для любого $S \in \mathcal{S}_1$.*

c) *Функция K: $h \to -|h|\varphi(h/|h|)$ непрерывна и условно положительно определена на $\mathbf{R}^d$.*

d) *Функция $C = \exp(K)$ является непрерывной ковариацией на $\mathbf{R}^d$.*

Кроме того, если выполнено какое-нибудь из этих условий, то G является положительной мерой, соответствующей согласно (3.5.1′) пуассоновской сети A, посредством которой на каждом

$S \in \mathcal{S}_1$ индуцируются интенсивности $\varphi(S)$, и $C(x-y)$ для любых x, $y \in \mathbb{R}^d$ является вероятностью того, что точки x и y не разделяются множеством A.

Поверхностная мера G^K_{d-1}

Прежде чем проводить дальнейшее исследование класса Штейнера, покажем, что *со всяким множеством* $K \in C(\mathcal{K}_0)$ *связана необходимо единственная мера* $G^K_{d-1} \geqslant 0$ *на* $\mathcal{S}_{d-1}$, *для которой*

$$\mu_{d-1}(\Pi_S K) = \int\limits_{\mathcal{S}_{d-1}} |S, S'|\, G^K_{d-1}(dS') \quad (S \in \mathcal{S}_{d-1}). \tag{4.5.5}$$

Эта единственная мера G^K_{d-1} называется *поверхностной мерой*, соответствующей множеству K.

Доказательство. Единственность такой меры вытекает из теоремы 4.5.1. Для доказательства ее существования предположим, что K — полиэдр. Пусть $u_i \in S_0$, $i = 1, \ldots, p$ — положительные нормали, соответствующие $(d-1)$-мерным граням полиэдра K, а F_i, $i = 1, \ldots, p$ суть $(d-1)$-мерные объемы этих граней. Положим $F = (^1/_2)\, \Sigma F_i \delta_{u_i}$. Тогда F — положительная мера на S_0 и интеграл $\int F(du) = dW_1(K)$ представляет собой площадь поверхности полиэдра K. Далее, $\mu_{d-1}(\Pi_{u\perp} K) = \int |\langle u, u' \rangle|\, F(du')$ для любого $u \in S_0$. Если теперь K — произвольное выпуклое компактное множество в $C(\mathcal{K}_0)$, то найдется такая последовательность $\{K_n\}$, сходящаяся в $C(\mathcal{K}_0)$ к K, в которой для каждого $n > 0$ множество K_n является полиэдром и, значит, ему соответствует некоторая мера F_n, удовлетворяющая указанному выше условию. Ввиду непрерывности функционалов Минковского W_1, $\sup\limits_n \int F_n < \infty$, и последовательность $\{F_n\}$ ограничена в $\mathcal{M}^+(S_0)$. Поэтому у нее найдется подпоследовательность $\{F_{n_k}\}$, слабо сходящаяся к некоторой неотрицательной мере F на S_0. В соответствии с леммами 3.5.2 и 3.5.3 отображение $K \to \mu_{d-1}(\Pi_{u\perp} K)$ непрерывно, так что соотношение $\mu_{d-1}(\Pi_{u\perp} K) = \int |\langle u, u' \rangle|\, F(du')$ удовлетворяется и для F.

Обозначим теперь через $G = G^K_{d-1}$ меру на $\mathcal{S}_{d-1}$, определенную соотношением $\int \varphi(S)\, G(dS) = \int f(u)\, F(du)$, $\varphi \in \mathbf{C}(\mathcal{S}_{d-1})$, где f — симметричная функция $u \to f(u) = \varphi(u^{\perp})$ на $\mathcal{S}_1$. Эта мера G удовлетворяет условию (4.5.5).

Указанная поверхностная мера связана со смешанными функционалами Минковского W_k, определенными на $C(\mathcal{K}') \times C(\mathcal{K}')$, соотношением

$$\mu_d(K \oplus \rho K') = \mu_d(K) + \sum_{k=1}^{d-1} \binom{d}{k} \rho^k W_k(K, K') + \rho^d \mu_d(K') \quad (4.5.6)$$

(см. замечание после теоремы 4.1.1). Эти функционалы C-аддитивны и инвариантны относительно сдвигов по каждому из своих аргументов K и K'. В частности, для любых $K, K' \in C(\mathcal{K}')$

$$dW_1(K, K') = \lim_{\rho \downarrow 0} \frac{\mu_d(K \oplus \rho K') - \mu_d(K)}{\rho}.$$

Для заданного $K \in C(\mathcal{K}_0)$ отображение $K' \to W_1(K, K')$ непрерывно, C-аддитивно и возрастает на $C(\mathcal{K}_0)$, а также аддитивно относительно сложения по Минковскому $\oplus$ и однородно степени 1, т. е. положительно линейно. Поэтому, согласно предложению 4.4.4, существует единственная мера $\lambda_K \geqslant 0$ на единичной сфере S_0, такая, что

$$dW_1(K, K') = \int_{S_0} r_{K'}(u) \lambda_K(du).$$

Но мера λ_K симметрична на S_0, и $\mu_1(\Pi_{S^\perp} K) = r_K(u) + r_K(-u)$, если $S^\perp$ — направление единичных векторов u и $-u$. Следовательно, существует мера $H_K \geqslant 0$ на S_{d-1}, для которой

$$dW_1(K, K') = \int_{\mathcal{S}_{d-1}} \mu_1(\Pi_{S^\perp} K') H_K(dS).$$

Если K' — отрезок единичной длины, имеющий направление $S_1^\perp$, $S_1 \in \mathcal{S}_{d-1}$, то

$$dW_1(K, K') = \mu_{d-1}(\Pi_{S_1} K) = \int_{\mathcal{S}_{d-1}} |S, S_1| H_K(dS).$$

В силу теоремы единственности отсюда вытекает, что $H_K = G_{d-1}^K$, и, таким образом, нами доказано

Предложение 4.5.2. *Поверхностная мера, соответствующая множеству $aK \in C(\mathcal{K}_0)$ согласно* (4.5.5), *обладает тем свойством, что для любого $K' \in C(\mathcal{K}_0)$*

$$dW_1(K, K') = \lim_{\rho \downarrow 0} \frac{\mu_d(K \oplus \rho K') - \mu_d(K)}{\rho} = \int_{\mathcal{S}_{d-1}} \mu_1(\Pi_{S^\perp} K') G_{d-1}^K(dS).$$

Продолжение формулы Штейнера

Представляет интерес выяснить, не существует ли таких мер $G^K_{d-k} \geqslant 0$ на $\mathscr{S}_{d-k}$, $k=2, \ldots, d$, для которых бы функционалы $K' \to W_k(K, K')$ допускали интегральные представления, аналогичные указанному в предложении 4.5.2. В общем случае ответ оказывается отрицательным, даже если K является симметричным компактным выпуклым множеством (исключение составляет лишь случай $d=2$).

Теорема 4.5.2. *Пусть K — симметричное компактное выпуклое множество в $\mathbf{R}^d$. Тогда, для того чтобы для каждого $k=1$, $2, \ldots, d-1$ существовала такая положительная мера G^K_{d-k} на $\mathscr{S}_{d-k}$, что для любых $\rho \geqslant 0$ и $K' \in C(\mathscr{K}_0)$*

$$\mu_d(K \oplus \rho K') = \mu_d(K) + \sum_{k=1}^{d-1} \rho^k \int_{\mathscr{S}_{d-k}} \mu_k(\Pi_{S\perp} K')\, G^K_{d-k}(dS) + \rho^d \mu_d(K'), \tag{4.5.7}$$

необходимо и достаточно, чтобы K было штейнеровским компактом (т. е. $K \in \mathscr{R}_1$). В этом случае для $k=2, \ldots, d-1$ мера G^K_k есть образ при отображении $(S_1, S_2, \ldots, S_k) \to S_1 \oplus S_2 \oplus \ldots \oplus S_k$ меры $(1/k!)\, V(u_1, \ldots, u_k) \times G^K_1(dS_1)\, G^K_1(dS_2) \ldots G^K_1(dS_k)$ на $(\mathscr{S}_1)^k$, где $V(u_1, \ldots, u_k)$ обозначает объем параллелепипеда, построенного на единичных векторах $u_i \in S_0$, $i=1, 2, \ldots, k$, таких, что S_i параллельно u_i.

Доказательство. Докажем сначала необходимость. В силу (4.5.6), для смешанных функционалов W_k на $C(\mathscr{K}') \times C(\mathscr{K}')$ имеем $W_k(K, K') = W_{d-k}(K', K)$. Из предложения 4.5.2 вытекает тогда, что если выполняется (4.5.7), то

$$dW_{d-1}(K, K') = dW_1(K', K) = \int_{\mathscr{S}_{d-1}} \mu_1(\Pi_{S\perp} K)\, G^{K'}_{d-1}(dS) = \int_{\mathscr{S}_1} \mu_{d-1}(\Pi_{S\perp} K')\, G^K_1(dS).$$

Далее, если $K' \subset S_1 \subset \mathscr{S}_{d-1}$ и $\mu_{d-1}(K')=1$, то $G^{K'}_{d-1} = \delta_{S_1}$ и и $\mu_{d-1}(\Pi_{S\perp} K') = |S_1, S^\perp|$. Таким образом, опорная функция r_k: $u \to (1/2)\mu_1(\Pi_u K)$, $u \in S_0$, симметричного компактного выпуклого множества K удовлетворяет условию $r_K(u_0) = (1/2)\int |S_1, S^\perp|\, G^K_1(dS)$, если $S_1^\perp \in \mathscr{S}_1$ есть направление единичного вектора $u_0 \in S_0$. Другими словами, $r_K \in \mathscr{R}_1$ и K — штейнеровский компакт.

Достаточность доказывается несколько сложнее, с использованием индукции. Пусть

$$A = \bigoplus_{i=1}^{n} l_i L_i$$

$$\left(l_i \geqslant 0,\ L_i = \left\{\lambda u_i,\ |\lambda| \leqslant \frac{1}{2}\right\},\ u_i \in S_0,\ i = 1, 2, \ldots, n\right),$$

т. е. $A \in \mathcal{R}_1$ является конечной суммой Минковского n отрезков прямых. Докажем, что для такого множества A соотношение (4.5.7) выполняется. Пусть $V(u_1, \ldots, u_n)$ обозначает n-мерный объем параллелепипеда $u_1 \oplus \ldots \oplus u_n$. Соотношение

$$\mu_k(\Pi_\sigma(K \oplus lL)) = \mu_k(\Pi_\sigma K) + l\,|u, \sigma|\,\mu_{k-1}(\Pi_{S^\perp \cap \sigma} K) \quad (4.5.8)$$

справедливо для любого $K \in C(\mathcal{K})$, любого $\sigma \in \mathcal{S}_k$ и любого единичного вектора u, отождествляемого с его направлением S в $\mathcal{S}_1$ (здесь L обозначает отрезок $\{\lambda u,\ |\lambda| \leqslant {}^1/_2\}$). Если $\sigma = E$, то мы имеем просто

$$\mu_d(K \oplus lL) = \mu_d(K) + l\mu_{d-1}(\Pi_{u^\perp} K).$$

Отсюда вытекает, что (4.5.7) выполняется для $lL \in \mathcal{R}_1$, если положить $G_1^{lL} = l\delta_{S_u}$ (S_u есть направление вектора $u \in S_0$) и $G_2 = G_3 = \ldots = 0$.

Предположим теперь, что (4.5.7) выполняется для любого $A = \bigoplus_{i=1}^{n} l_i L_i \in \mathcal{R}_1$, являющегося суммой Минковского не более чем n отрезков прямых, где меры G_k определены следующим образом:

a) $G_1 = \Sigma l_i \delta_{S_i}$ (S_i — направление вектора $u_i \in S_0$).

b) Для $k = 1, 2, \ldots, d-1$ мера G_k есть образ меры

$$\nu_k = (1/k!)\, V(u_1, \ldots, u_k)\, G_1(dS_1)\, G_1(dS_2) \ldots G_1(dS_k)$$

на $(\mathcal{S}_1)^k$ при отображении $(S_1, \ldots, S_k) \to S_1 \oplus \ldots \oplus S_k$ из $(\mathcal{S}_1)^k$ в $\mathcal{S}_k$ (в действительности это отображение определено ν_k-п. в. в $(\mathcal{S}_1)^k$ поскольку размерность $S_1 \oplus \ldots \oplus S_k$ меньше k тогда и только тогда, когда $V(u_1, \ldots, u_k) = 0$).

Покажем теперь, что (4.5.7) будет выполняться и для множества $A \oplus lL$ $\left(L = \left\{\lambda u,\ |\lambda| \leqslant \frac{1}{2}\right\},\ u \in S_0\right)$, с мерами G_k', строящимися в соответствии с правилами a) и b), так что утверждение теоремы будет справедливым для любой суммы Минковского конечного числа отрезков прямых. При этом мы будем исходить из индуктивного предположения

$$\mu_d(A\oplus K)=V(K)+\sum_i l_i\mu_{d-1}\left(\Pi_{u_i^\perp}K\right)+\ \dots$$
$$\dots+\sum_{i_1<\dots<i_k} l_{i_1}l_{i_2}\dots l_{i_k}V\left(u_{i_1}\dots u_{i_k}\right)\mu_{d-k}\Pi_{u_{i_1}^\perp\cap\dots\cap u_{i_k}^\perp}K+$$
$$+\sum_{i_1<\dots<i_d} l_{i_1}l_{i_2}\dots l_{i_d}V(u_{i_1}\dots u_{i_d}). \tag{4.5.9}$$

Заменим в этом соотношении K на $K\oplus lL$. В силу (4.5.8) имеем

$$\mu_{d-k}\left(\Pi_{\sigma_{i_1},\dots,i_k}(K\oplus lL)\right)=\mu_{d-k}\left(\Pi_{\sigma_{i_1},\dots,i_k}K\right)+$$
$$+l\left|u,\sigma_{i_1,\dots,i_k}\right|\mu_{d-k-1}\left(\Pi_{u^\perp\cap\sigma_{i_1},\dots,i_k}K\right),$$

где $\sigma_{i_1,\dots,i_k}=u_{i_1}^\perp\cap\dots\cap u_{i_k}^\perp$. Но $\left|u,\sigma_{i_1,\dots,i_k}\right|=V\left(u_{i_1},\dots,u_{i_k},u\right)$ и $u^\perp\cap\sigma_{i_1,\dots,i_k}=u_{i_1}^\perp\cap\dots\cap u_{i_k}^\perp\cap u^\perp$. Подставляя эти выражения в (4.5.9), получаем ту же самую формулу (4.5.9), только вместо n стоит $n+1$ и $u_{n+1}=u$, $l_{n+1}=l$.

Таким образом, теорема справедлива для множеств $A\in\mathcal{R}_1$, являющихся конечными суммами Минковского отрезков. Если K — произвольное штейнеровское компактное множество, то найдется такая последовательность $\{A_n\}\subset\mathcal{R}_1$, сходящаяся в $C(\mathcal{K}_0)$ к K, что для каждого $n>0$ множество A_n является суммой Минковского конечного числа отрезков. Пусть $G_k^{A_n}$ меры, связанные с множествами A_n соотношением (4.5.7). Последовательности $\left\{G_k^{A_n}\right\}$ ограничены интегралами $\int G_{d-k}^{A_n}(dS)=C_kW_k\left(A_n\right)$, где W_k — функционал Минковского, а $C_k\geqslant 0$ — надлежащим образом выбранная константа. Поэтому найдется такая подпоследовательность $\left\{A_{n_p}\right\}$, что каждая последовательность $\left\{G_k^{A_{n_p}}\right\}$ слабо сходится к некоторой мере $G_k^K\geqslant 0$ на $\mathcal{S}_k$.

Таким образом, (4.5.7) сохраняет силу и для этих мер G_k^K, что и доказывает теорему.

Приводимые ниже следствия весьма полезны в приложениях.

Следствие 1. *Пусть A — штейнеровский компакт, p — целое число, $0<p<d$, $S\in\mathcal{S}_p$ и $K\in C(\mathcal{K}_0)$. Тогда*

$$\mu_{d-p}\left(\Pi_{S^\perp}A\oplus K\right)=$$
$$=\mu_{d-p}\left(\Pi_{S^\perp}K\right)+\sum_{k=1}^{d-p}\int\left|\sigma,S^\perp\right|\mu_{d-k-p}\left(\Pi_{S^\perp\cap\sigma^\perp}K\right)G_k^A(d\sigma),$$

и, в частности,

$$\mu_{d-p}(\Pi_{S^\perp}A) = \int\limits_{\mathcal{S}_{d-p}} |\sigma, S^\perp|\, G^A_{d-p}(d\sigma). \tag{4.5.10}$$

Доказательство точно такое же, как и доказательство самой теоремы.

Из симметрии $W_k(K, K') = W_{d-k}(K', K)$ смешанных функционалов в (4.5.6) вытекает

Следствие 2. *Для* $K, K' \in \mathcal{R}_1$ *и* $0 < k < d$

$$\binom{d}{k} W_k(K, K') = \int\limits_{\mathcal{S}_{d-k}} \mu_k(\Pi_{S^\perp}K')\, G^K_{d-k}(dS) = \int\limits_{\mathcal{S}_k} \mu_{d-k}(\Pi_{\sigma^\perp}K)\, G^{K'}_k(d\sigma).$$

Если B — *единичный шар* в $\mathbf{R}^d$, то $B \in \mathcal{R}_1$ и меры G^B_k пропорциональны инвариантным вероятностям $\mathfrak{S}_k$. Коэффициенты пропорциональности легко вычисляются путем сравнения (4.5.7) и (4.1.8). Таким образом, мы получаем

Следствие 3. *Единичный шар* B *является штейнеровским компактом, и*

$$G^B_k = \binom{d}{k} \frac{b_d}{b_{d-k}} \mathfrak{S}_k \quad (k = 1, 2, \ldots, d-1).$$

Следствие 2, примененное к $K = A \in \mathcal{R}_1$ и $K' = B$, дает

$$b_k \int\limits_{\mathcal{S}_{d-k}} G^A_{d-k}(dS) = \binom{d}{k} W_k(A).$$

Следствие 4. *Для любых* $A \in \mathcal{R}_1$ *и* $k = 1, 2, \ldots, d-1$ *функционал Минковского* W_k *удовлетворяет соотношению*

$$W_k(A) = \frac{b_k}{\binom{d}{k}} \int\limits_{\mathcal{S}_{d-k}} G^A_{d-k}(dS).$$

Записав соотношение из следствия 1 для $A = B$ и $K = \rho B$, и сопоставив результат с формулой Штейнера, получаем

Следствие 5. *Для заданного* $S \in \mathcal{S}_p$ *и для* $0 < k \leqslant p$ *среднее по вращениям функции* $\sigma \to |\sigma, S|$ *на* $\mathcal{S}_k$ *равно*

$$\int\limits_{\mathcal{S}_k} |\sigma, S|\, \mathfrak{S}_k(d\sigma) = \frac{\binom{p}{k} b_p b_{d-k}}{\binom{d}{k} b_d b_{p-k}}$$

и не зависит от $S \in \mathcal{S}_p$. *При* $k = p$ *оно равно* $b_p b_{d-p} \Big/ \left(\binom{d}{p} b_d\right)$.

Следствие 6. *Пусть d, d' и k — такие целые числа, что $0<k<d'<d$, а $K\in C(\mathscr{K}')$ — такое компактное выпуклое множество в $\mathbf{R}^d$, что $K\subset S_{d'}$ для заданного подпространства $S_{d'}\in\mathscr{S}_{d'}$. Тогда для $k=0, 1, \ldots, d'$ функционалы W^d_{d-k} на $\mathbf{R}^d$ и $W^{d'}_{d'-k}$ на $S_{d'}=\mathbf{R}^{d'}$ связаны между собой соотношением*

$$W^d_{d-k}(K)=\frac{\binom{d'}{k}b_{d-k}}{\binom{d}{k}b_{d'-k}}W^{d'}_{d'-k}(K).$$

Доказательство. Отображение $K\to W^d_{d-k}(K)$ удовлетворяет условиям теоремы 4.1.1. По предположению $K\subset S_{d'}$, где $S_{d'}$ — пространство, отождествляемое с $\mathbf{R}^{d'}$. Поэтому $W^d_{d-k}(K)=$ $=CW^{d}_{d'-k}(K)$. Для вычисления константы C положим $K=\Pi_{S_{d'}}B$, где B — единичный шар в $\mathbf{R}^d$. Тогда, в силу следствия 5,

$$W^d_{d-k}(\Pi_{S_{d'}}B)=b_d\int\limits_{\mathscr{S}_k}|\sigma, S_{d'}|\,\mathfrak{G}_k(d\sigma)=\frac{\binom{d'}{k}b_{d'}b_{d-k}}{\binom{d}{k}b_{d'-k}}.$$

С другой стороны, $W^{d'}_{d'-k}(\Pi_{S_{d'}}B)=b_{d'}$, так что

$$C=\binom{d'}{k}b_{d-k}\Big/\left(\binom{d}{k}b_{d'-k}\right).$$

4.6. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ $|S, S_p|$

Напомним, что $|S, S_p|$ для любых $S\in\mathscr{S}_k$ и $S_p\in\mathscr{S}_p$ обозначает абсолютную величину определителя линейного отображения Π_{S_p} из S в S_p. Ясно, что при $k>p$ мы имеем $|S, S_p|=0$. Поэтому будем предполагать, что $0<k\leqslant p<d$. Мы дадим явное выражение вероятностного закона случайной величины $S\to|S, S_p|$ на $(\mathscr{S}_k, \mathfrak{G}_k)$, где $\mathfrak{G}_k$, как обычно, — это единственная инвариантная вероятность на $\mathscr{S}_k$.

Для краткости будем писать[1] $X\overset{\mathscr{L}}{=}Y$, если случайные величины X и Y эквивалентны, т. е. имеют один и тот же вероятностный закон. Далее, будем обозначать через $Z_{\alpha,\beta}$ случайную величину, имеющую бета-распределение с параметрами $\alpha, \beta>0$, т. е. имеющую на $[0, 1]$ плотность

$$f_{\alpha,\beta}(z)=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}z^{\alpha-1}(1-z)^{\beta-1}\qquad(z\in[0, 1]).$$

[1] Буква $\mathscr{L}$ — от law (закон). — *Прим. перев.*

Моменты этой случайной величины имеют вид

$$E((Z_{\alpha,\beta})^\lambda) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha+\lambda)}{\Gamma(\alpha+\beta+\lambda)} (\lambda \geqslant 0). \qquad (4.6.1)$$

Рассмотрим прежде всего случай $k=1$. Пусть Y_p случайная величина, эквивалентная $|S, S_p|$. Поскольку вероятность $\mathfrak{V}_1$ инвариантна относительно вращений, то закон распределения случайной величины Y_p не зависит от конкретного выбора подпространства $S_p \in \mathcal{S}_p$. Иными словами, если S и S_p случайны и независимы на $\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_p$ и совместная их вероятность есть $\mathfrak{V}_1 \otimes P_p$ (где P_p — произвольная вероятность на $\mathcal{S}_p$), то *случайная величина* $|S, S_p|$ *не зависит от* S_p.

Чтобы определить закон Y_p, обозначим через $X=(X_1, \ldots, X_d)$ гауссовский случайный вектор в $\mathbf{R}^d$, имеющий плотность

$$g_d(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \exp\left(\frac{-|x|^2}{2}\right),$$

а через $X'=(X_1, \ldots, X_p)$, $X''=(X_{p+1}, \ldots, X_d)$ — его проекции в подпространства, порожденные соответственно первыми p и последними $d-p$ координатными осями. Очевидно, что X' и X'' независимы и имеют плотности распределения g_p и g_{d-p} соответственно. С другой стороны, случайная величина $|X'|/|X|$ эквивалентна Y_p и не зависит от $|X|^2=|X'|^2+|X''|^2$. Случайные величины $|X'|^2$ и $|X''|^2$ независимы и имеют гамма-распределения с параметрами $p/2$ и $(d-p)/2$ соответственно. Элементарные выкладки показывают, что отношение $|X'|^2/|X|^2$ имеет бета-распределение с параметрами $\alpha=p/2$ и $\beta=(d-p)/2$. Таким образом,

$$Y_p \overset{\mathcal{L}}{\equiv} (Z_{p/2,\,(d-p)/2})^{1/2},$$

или, что то же самое,

$$E((Y_p)^\lambda) = \frac{\Gamma(d/2)}{\Gamma(p/2)} \frac{\Gamma((\lambda+p)/2)}{\Gamma((\lambda+d)/2)} (\lambda \geqslant 0). \qquad (4.6.2)$$

Предположим теперь, что $1<k \leqslant p<d$, и рассмотрим случайную величину $S \to |S, S_p|$ на $(\mathcal{S}_k, \mathfrak{V}_k)$ для заданного $S_p \in \mathcal{S}_p$. Закон распределения $|S, S_p|$ не зависит от $S_p \in \mathcal{S}_p$. С другой стороны, вероятность $\mathfrak{V}_k$ на $\mathcal{S}_k$ есть образ вероятности $\mathfrak{V}_1(dL_1)\mathfrak{V}_1(dL_2) \ldots \mathfrak{V}_1(dL_k)$ на $(\mathcal{S}_1)^k$ при (п. в. определенном) отображении $(L_1, L_2, \ldots, L_k) \to L_1 \oplus L_2 \oplus \ldots \oplus L_k$. Следовательно, если $u_1, \ldots, u_k$ суть k независимых случайных единичных векторов с одинако-

вым инвариантным законом на S_0, то случайная величина $|S, S_p|$ эквивалентна

$$\frac{V(\Pi_{S_p}u_1 \dots \Pi_{S_p}u_k)}{V(u_1, \dots, u_k)},$$

где $V(\Pi_{S_p}u_1, \dots, \Pi_{S_p}u_k)$ и $V(u_1, \dots, u_k)$ обозначают объемы соответствующих параллелепипедов. Но

$$V(u_1, \dots, u_k) = |u_1| \times \left|\Pi_{u_1^\perp}u_2\right| \times \dots \times \left|\Pi_{u_1^\perp \cap \dots \cap u_{k-1}^\perp} u_k\right|$$

и

$$V(\Pi_{S_p}u_1, \dots, \Pi_{S_p}u_k) =$$
$$= \left|\Pi_{S_p}u_1\right| \times \left|\Pi_{S_p \cap u_1^\perp}u_2\right| \times \dots \times \left|\Pi_{S_p \cap u_1^\perp \cap \dots \cap u_{k-1}^\perp} u_k\right|.$$

Независимость и изотропность случайных векторов u_i снова приводят к тому, что сомножители в предыдущих формулах являются независимыми случайными величинами. Поэтому из (4.6.2) получаем, что

$$\begin{aligned} V(u_1, \dots, u_k) &\overset{\mathcal{L}}{\equiv} \prod_{j=d-k+1} Y_j, \\ V(\Pi_{S_p}u_1, \dots, \Pi_{S_p}u_k) &\overset{\mathcal{L}}{\equiv} \prod_{p-k+1} Y_j, \end{aligned} \tag{4.6.3}$$

где Y_j — независимые случайные величины с законом распределения (4.6.2) (и $Y_d = 1$ п. н.).

С другой стороны, случайная величина $V(u_1, u_2, \dots, u_k)$ инвариантна относительно вращений и поэтому не зависит от $S = L_1 \oplus \dots \oplus L_k$. Отношение $V(\Pi_{S_p}u_1, \dots, \Pi_{S_p}u_k)/V(u_1, \dots, u_k) = |S, S_p|$, наоборот, зависит только от S (для фиксированного $S_p \in \mathcal{S}_p$). Поэтому имеет место эквивалентность

$$|S, S_p| \prod_{d-k+1}^{d} Y_j \overset{\mathcal{L}}{\equiv} \prod_{p-k+1} Y'_j,$$

где Y_j и Y'_j — независимые случайные величины с законом распределения (4.6.2). Другими словами, для любого вещественного $\lambda \geqslant 0$ мы имеем, в силу (4.6.2),

$$E(|S, S_p|^\lambda) = \prod_{p-k+1}^{p} \frac{E((Y_j)^\lambda)}{E((Y_{j+d-p})^\lambda)}.$$

Но из (4.6.1) и (4.6.2) вытекает, что

$$\frac{E((Y_j)^\lambda)}{E((Y_{j+d-p})^\lambda)} = \frac{\Gamma((j+d-p)/2)}{\Gamma(j/2)} \frac{\Gamma((j+\lambda)/2)}{\Gamma((j+d-p+\lambda)/2)} =$$
$$= E((Z_{j/2,\,(d-p)/2})^\lambda),$$

Таким образом, мы получаем окончательно эквивалентность

$$|S, S_p| \equiv \prod_{p-k+1}^{p} (Z_{j/2,\,(d-p)/2})^{1/2}.$$

Иначе говоря, случайная величина $|S, S_p|^2$ эквивалентна произведению k независимых случайных величин $Z_{j/2,\,(d-p)/2}$, имеющих бета-распределение, т. е. для любого $\lambda \geqslant 0$

$$E(|S, S_p|^\lambda) = \prod_{j=p-k+1}^{p} \frac{\Gamma((j+d-p)/2)}{\Gamma(j/2)} \frac{\Gamma((j+\lambda)/2)}{\Gamma((j+d-p+\lambda)/2)}. \qquad (4.6.4)$$

Теперь мы применим полученные результаты к пуассоновским сетям плоскостей в $\mathbf{R}^d$. Относительно случая пуассоновских гиперплоскостей см. также гл. 6.

Случайная мера, соответствующая пуассоновской сети плоскостей

Пусть A — некоторая k-мерная пуассоновская сеть плоскостей $(0 < k < d)$, ψ — функционал $K \to \psi(K) = -\log P(\{A \cap K = \varnothing\})$ на $\mathcal{K}$, G — положительная мера на $\mathcal{S}_k$, такая, что (см. предложение 3.5.1)

$$\psi(K) = \int_{\mathcal{S}_k} \mu_{d-k}\left(\Pi_{S^\perp} K\right) G(dS) \quad (K \in \mathcal{K}). \qquad (3.5.1)$$

Для всякого k-мерного многообразия $V \in \mathcal{V}_k$ в $\mathbf{R}^d$, отождествляемого с эвклидовым пространством $\mathbf{R}^k$, можно определить меру μ_V на $\mathbf{R}^d$, полагая для любой непрерывной функции φ с компактным носителем в $\mathbf{R}^d$

$$\int_{\mathbf{R}^d} \varphi(x)\, \mu_V(dx) = \int_V \varphi(x)\, \mu_k(dx)$$

(μ_k — мера Лебега на $V = \mathbf{R}^k$). Сеть A является объединением множеств пуассоновского процесса $\mathcal{A}$ в $\mathcal{V}_k$, а $\mathcal{A}$ локально конечен (т. е. каждое компактное множество K в $\mathbf{R}^d$ п. н. пересекается только с конечным числом многообразий, принадлежащих $\mathcal{A}$), так что мера $\nu^A = \sum_{V \in \mathcal{A}} \mu_V$ п. н. определена для каждого $\mathcal{A}$ или, что то же самое, для каждого A. В явном виде, для всякой непрерывной функции φ с компактным носителем в $\mathbf{R}^d$ и почти всякого A

$$\int \nu^A(dx)\, \varphi(x) = \sum_{V \in \mathcal{A}} \int \mu_V(dx)\, \varphi(x).$$

Для заданной функции $\varphi \in C_{\mathcal{K}}(\mathbf{R}^d)$ (пространство непрерывных функций с компактным носителем) отображение $V \to \int \mu_V(dx)\varphi(x)$ непрерывно на $\mathcal{V}_k$, так что $A \to \int \nu^A(dx)\varphi(x)$ есть случайная величина. В случае $\varphi \geqslant 0$ мы имеем $\int \nu^A(dx)\varphi(x) \geqslant 0$ п. н., так что функционал $\varphi \to E\left(\int \nu^A(dx)\varphi(x)\right)$ положителен и линеен на пространстве $C_{\mathcal{K}}(\mathbf{R}^d)$. Согласно теореме Рисса, на $\mathbf{R}^d$ существует такая мера $\bar{\nu}$, что $E\left(\int \nu^A(dx)\varphi(x)\right) = \int \bar{\nu}(dx)\varphi(x)$. Но СЗМ A стационарно, так что мера $\bar{\nu}$ инвариантна относительно сдвигов и, значит, пропорциональна мере Лебега μ_d в $\mathbf{R}^d$. Иными словами, существует такая константа $\nu \geqslant 0$, что $\bar{\nu}(dx) = E(\nu^A(dx)) = \nu\mu_d(dx)$. Мы будем называть эту константу ν *интенсивностью k-мерной пуассоновской сети плоскостей.*

Найдем явное выражение для ν. Пусть B — единичный шар, так что $E(\nu^A(B)) = \nu b_d$. Для вычисления $E(\nu^A(B))$ воспользуемся результатами, относящимися к случайному сечению A' шара B (§ 3.5). Принимая во внимание изотропность B, получаем, что случайная величина $\mu_k(A' \cap B)$ не зависит от направления $S \in \mathcal{S}_k$ случайного сечения A', и из формулы Крофтона вытекает, что $E(\mu_k(A' \cap B)) = b_d/b_{d-k}$.

С другой стороны, пусть N — случайное число линейных многообразий из $\mathcal{A}$, пересекающих B, так что $E(N) = \psi(B) = b_{d-k}\gamma$ в силу (3.5.1′), где $\gamma = \int G(dS)$. Тогда $E(\nu^A(B)) = b_{d-k}\gamma \times (b_d/b_{d-k}) = \gamma b_d$ и, таким образом,

$$\nu = \int_{\mathcal{S}_k} G(dS). \tag{4.6.5}$$

Ковариационная мера

Стационарной случайной мере ν^A соответствует в свою очередь (стационарная) ковариационная мера C на $\mathbf{R}^d$, характеризуемая соотношением

$$\left[\left(\int \nu^A(dx)\varphi(x)\right)^2\right] = \int C(dh)\, g(h)$$

для любой функции $\varphi \in C_{\mathcal{K}}(\mathbf{R}^d)$, где функция $g = \varphi * \check{\varphi}$ определяется формулой $g(h) = \int \varphi(x)\varphi(x+h)\,dx$. Мы выведем явное выражение для этой ковариационной меры, но *лишь в изотропном случае*, т. е. в случае $G = \nu\varpi_k$.

Лемма 4.6.1. *Пусть C — изотропная (т. е. инвариантная относительно вращений) мера на $\mathbf{R}^d$, B — единичный шар и g_r для каждого $r \geqslant 0$ функция на $\mathbf{R}^d$, определенная соотношением*

$$g_r(h) = \int_{\mathbf{R}^d} 1_{rB}(x)\, 1_{rB}(x+h)\, \mu_d(x).$$

Мера C полностью определяется заданием функции $r \to \to \int g_r(h)\, C(dh)$.

Доказательство. Пусть $\widetilde{C}$ — мера на $\mathbf{R}_+$, являющаяся образом меры C при отображении $x \to |x|$ из $\mathbf{R}^d$ в $\mathbf{R}_+$, так что $C \to \widetilde{C}$ есть взаимно однозначное отображение пространства изотропных мер на $\mathbf{R}^d$ на пространство мер на $\mathbf{R}_+$. Будем вместо $g_r(h)$ писать $g_r(\rho)$, $\rho = |h|$. Согласно предложению 4.3.1, функция $\rho \to g_r(\rho)$ имеет при любом $\rho > 0$ производную $-\gamma_r(\rho)$, равную $b_{d-1}(r^2 - \rho^2/4)^{(d-1)/2}$ при $\rho \leqslant 2r$, и нулю при $\rho > 2r$. Положим $F(\rho) = \widetilde{C}([0, \rho])$ для любого $\rho > 0$. Тогда

$$\int_0^\infty g_r(\rho)\, \widetilde{C}(dp) = \int_0^\infty F(\rho)\, \gamma_r(\rho) = b_{d-1} \times \int_0^{2r} (r^2 - \rho^2/4)^{(d-1)/2} F(\rho)\, d\rho.$$

Положим, далее, $x = r^2$ и $\xi^2 = \rho^2/4$, так что

$$\int_0^\infty g_r(\rho)\, \widetilde{C}(d\rho) = b_{d-1} \int_0^x (x - \xi)^{(d-1)/2}\, \xi^{-1/2} F\left(2\sqrt{\xi}\right) d\xi.$$

Применяя преобразование Лапласа, получаем утверждение леммы.

Лемма 4.6.2. *При тех же обозначениях, изотропная мера C имеет вид*

$$C(dh) = \sum_0^{d-1} (a_p/|h|^p)\, \mu_d(dh) + a_d \delta(dh)$$

тогда и только тогда, когда

$$\int g_r(h)\, C(dh) = \sum_0^{d-1} a_p \frac{2^{1+d-p} d}{(d-p)(1+d-p)} \frac{b_d b_{2d-p}}{b_{1+d-p}} r^{2d-p} + a_d b_d r^d.$$

Доказательство. Этот результат получается простым вычислением с использованием леммы 4.6.1 и равенства $g_r'(\rho) = -b_{d-1}(r^2 - \rho^2/4)^{(d-1)/2}$.

Если A — изотропная k-мерная пуассоновская сеть плоскостей, то ковариационная мера C, соответствующая случайной мере ν^A, также изотропна, и лемма 4.6.2 дает возможность получить для нее явное выражение. Если A' — случайное сечение шара rB, $r > 0$, то $E(\mu_k)(A' \cap rB)) = (b_d/b_{d-k}) r^k$ и

$$E[(\mu_k(A' \cap rB))^2] = \frac{(d-k)(b_k)^2}{r^{d-k}} \int_0^r (r^2 - \rho^2)^k \rho^{d-k-1} d\rho = \frac{(b_k r^k)^2 b_{d+k}}{b_{2k} b_{d-k}}.$$

Случайная величина $\nu^A(rB)$ является суммой N независимых случайных величин, эквивалентных $\mu_k(A' \cap rB)$, где N — пуассоновская случайная величина с $E(N) = \psi(rB) = \nu b_{d-k} r^{d-k}$. Отсюда вытекает, что

$$E[(\nu^A(rB))^2] = [\psi(rB) E(\mu_k(A' \cap rB))]^2 + \psi(rB) E[(\mu_k(A' \cap rB))^2] =$$
$$= (\nu b_d r^d)^2 + \nu \left[\frac{b_{d-k} b_{d+k} (b_k)^2}{b_{2k} b_{d-k}}\right] r^{d+k}.$$

Применяя лемму 4.6.2 и учитывая соотношение

$$b_{2k} = (1+k) b_k b_{1+k} 2^{-1-k},$$

после несложных выкладок получаем явное выражение для (нецентрированной) ковариационной меры: если $k > 0$, то

$$C = \nu^2 \mu_d + \nu \left(\frac{k b_k}{d b_d}\right) \left(\frac{1}{|h|^{d-k}}\right) \mu_d; \tag{4.6.6}$$

если $k = 0$ (т. е. A — пуассоновский точечный процесс с интенсивностью ν в $\mathbf{R}^d$), то

$$C = \nu^2 \mu_d + \nu\delta$$

(здесь δ — мера Дирака, а μ_d — мера Лебега в $\mathbf{R}^d$). Эти результаты можно переформулировать следующим образом.

Предложение 4.6.1. *Пусть A — некоторая k-мерная пуассоновская сеть плоскостей, изотропная в $\mathbf{R}^d$ $(0 < k < d)$, $G = \nu\mathfrak{G}_k$ — мера, соответствующая A согласно (3.5.1), $K \in \mathcal{K}$ — некоторое компактное множество, $V(K)$ — его объем, а g_K — функция, определяемая соотношением $g_K(h) = \int 1_K(x) 1_K(x+h)\, dx$. Тогда k — мерный объем $\nu^A(K)$ пересечения $A \cap K$ имеет математическое ожидание $E(\nu^A(K)) = \nu A(K)$ и дисперсию*

$$D^2(\nu^A(K)) = \nu \left(\frac{k b_k}{d b_d}\right) \int_{\mathbf{R}^d} \frac{g_K(h)}{|h|^{d-k}}\, dh.$$

Следствие. *Если множество K выпукло и A' — соответствующее случайное сечение этого множества, то первые два момента случайного k-мерного объема $\mu_k(A' \cap K)$ равны*

$$E(\mu_k(A' \cap K)) = \frac{b_d}{b_{d-k}} \frac{W_0(K)}{W_k(K)},$$

$$E[(\mu_k(A' \cap K))^2] = \frac{kb_k}{db_{d-k}W_k(K)} \int \frac{g_K(h)}{|h|^{d-k}} dh.$$

Доказательство. Имеем

$$E(\mu_k(A' \cap K)) = (\psi(K))^{-1} E(\nu^A(K))$$

и

$$E[(\mu_k(A' \cap K))^2] = (\psi(K))^{-1} D^2(\nu^A(K)),$$

где

$$\psi(K) = \nu \int \mu_{d-k}(\Pi_{S\perp}K) \mathfrak{G}_k(dS) = \nu(b_{d-k}/b_d) W_k(K),$$

откуда и следует искомый результат.

4.7. МЕРЫ МИНКОВСКОГО

Мы придадим теперь функционалам Минковского W_k, $k = 0, 1, \ldots, d$, некоторый локальный смысл, сопоставив каждому из них отображение $K \to W_k^K$ из $C(\mathscr{K}')$ в пространство $\mathscr{M}_C^+$ положительных мер с компактными носителями в $\mathbf{R}^d$. Известно, что пространство $\mathscr{M}_C$ мер с компактными носителями является (топологическим) сопряженным к пространству $C(\mathbf{R}^d)$ (т. е. пространству непрерывных функций на $\mathbf{R}^d$ с топологией компактной сходимости). В дальнейшем пространство $\mathscr{M}_C$ всегда будет наделяться слабой топологией; ее можно определить, задав соответствующую сходимость: $\mu = \lim \mu_n$ в $\mathscr{M}_C$, если $\int \mu\varphi = \lim \int \mu_n \varphi$ для любой функции $\varphi \in C(\mathbf{R}^d)$. Последнее условие эквивалентно следующим двум условиям: (a) последовательность мер $\{\mu_n\}$ слабо сходится к μ, (b) существует такое фиксированное компактное множество $K_0 \in \mathscr{K}$, что $\operatorname{supp} \mu_n \subset K_0$ для любого $n > 0$ (где $\operatorname{supp} \mu_n$ — носитель меры μ_n).

Нашим следующим шагом будет распространение определения мер Минковского на непустые замкнутые выпуклые множества, а именно мы построим отображение $F \to W_k^F$ из $C(\mathscr{F}')$ в пространство мер Радона на $\mathbf{R}^d$. Напомним, что *мерой Радона* называется всякий линейный непрерывный функционал на пространстве $C_{\mathscr{K}}(\mathbf{R}^d)$ непрерывных функций с компактными носителями, наделенном своей обычной топологией. (В этой топологии $\varphi = \lim \varphi_n$ в $C_{\mathcal{K}}$, если (a) последовательность $\{\varphi_n\}$ равномерно сходится к φ и (b) существует фиксированное компактное множество, содержащее носители функций φ_n для всех $n > 0$.) Наконец, мы распространим определение мер Минковского двумя различными способами на *кольцо выпуклости* $\mathfrak{S}$, т. е. на порожденный $C(\mathcal{K})$ класс, замкнутый относительно взятия конечных объединений.

Нам понадобятся следующие две леммы.

Лемма 4.7.1. *Отображение* $\mu \to \operatorname{supp} \mu$ *из* $\mathcal{M}_C$ *в* $\mathcal{K}$ *полунепрерывно снизу.*

Доказательство. Пусть G — открытое множество и $\mu \in \mathcal{M}_C$. Носитель K меры μ пересекается с G тогда и только тогда, когда существует такая функция $\varphi \in C(\mathbf{R}^d)$ с носителем в G, что $\left|\int \varphi(x)\, \mu(dx)\right| > 0$, т. е. $K \in \mathcal{K}_G$ тогда и только тогда, когда μ принадлежит множеству

$$\left\{\mu\colon\ \exists \varphi \in C,\ \operatorname{supp} \varphi \subset G,\ \left|\int \varphi\mu\right| > 0\right\},$$

открытому в $\mathcal{M}_C$. Значит, отображение $\mu \to \operatorname{supp} \mu$ полунепрерывно снизу.

Лемма 4.7.2. *Отображение* $K \to \partial K$ *непрерывно на* $C(\mathcal{K}')$.

Доказательство. Отображение $K \to \partial K$ полунепрерывно снизу ввиду включения $K \supset \partial K$ и следствия 3 предложения 1.2.4. Пусть $\{K_n\} \subset C(\mathcal{K})$—сходящаяся последовательность, $K = \lim K_n$, $\{K_{n_k}\}$ — ее подпоследовательность, и пусть x_{n_k} для каждого k — такая точка, что $x_{n_k} \in \partial K_{n_k}$ и $\lim x_{n_k} = x$ в $\mathbf{R}^d$. Очевидно, что $x \in K$. Далее, для каждого k существует такое замкнутое полупространство $H \supset K_{n_k}$, что $x_{n_k} \in \partial H_{n_k}$. Пусть $\{H, H'\}$ — точка прикосновения в $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ для последовательности $\{H_{n_k}, \partial H_{n_k}\}$. Ясно, что H является полупространством и что $H' = \partial H$ — его граница. Поэтому $K \subset H$ и $x \in \partial H$. Отсюда вытекает, что ∂H служит опорной гиперплоскостью для K и что $x \in \partial K$. Таким образом, в силу предложения 1.2.4, отображение ∂ полунепрерывно сверху на $C(\mathcal{K})$.

Лемма 4.7.3. *Отображение* $(\varphi, K) \to \int_K \varphi(x)\, dx$ *непрерывно на* $C(\mathbf{R}^d) \times C(\mathcal{K}')$.

Доказательство. Если для любого $\alpha > 0$ выполняются соотношения $\varphi - \alpha \leqslant \varphi' \leqslant \varphi + \alpha$ $(\varphi, \varphi' \in C(\mathbf{R}^d))$ и $K \subset K' \oplus \alpha B$,

$K' \subset K \oplus \alpha B$ $(K,\ K' \in C(\mathscr{K}')$, а B — единичный шар), то

$$\int_K \varphi(x)\,dx \leqslant \int_{K' \oplus \alpha B} \varphi'(x)\,dx + \alpha \|\varphi'\|\, V(K' \oplus \alpha B),$$

$$\int_{K'} \varphi'(x)\,dx \leqslant \int_{K \oplus \alpha B} \varphi(x)\,dx + \alpha \|\varphi\|\, V(K \oplus \alpha B)$$

(здесь V — объем, а $\|\varphi\|$ и $\|\varphi'\|$ — верхние грани φ и φ' на $K \oplus aB$ для некоторого вещественного $a > \alpha$). Отсюда следует, что

$$\|\varphi\|\,(V(K \oplus \alpha B) - V(K) + \alpha V(K \oplus \alpha B)) \leqslant$$
$$\leqslant \left| \int_K \varphi(x)\,dx - \int_{K'} \varphi'(x)\,dx \right| \leqslant$$
$$\leqslant (\alpha + \|\varphi\|)\,(V(K' \oplus \alpha B) - V(K') + \alpha V(K' \oplus \alpha B)).$$

Применяя формулу Штейнера и учитывая непрерывность функционалов Минковского, получаем утверждение леммы.

Теперь мы в состоянии определить *меру Минковского*, используя обобщенный вариант формулы Штейнера.

Возьмем $K \in C(\mathscr{K}')$. В соответствии с классической теоремой о проекциях, для любого $x \in \mathbf{R}^d$ существует единственная точка $x' = \Pi_K x$, такая, что $|x - x'| = \inf\{|x - y|,\ y \in K\}$. Положим $\rho_K(x) = |x - x'|$. Очевидно, что соотношение $x \in K$ равносильно тому, что $\rho_K(x) = 0$, а также тому, что $x = \Pi_K x$, и отображение α: $x \to (\Pi_K x,\ \rho_K(x))$ из $\mathbf{R}^d$ в $K \times \mathbf{R}_+$ непрерывно. Пусть W — мера на $K \times \mathbf{R}_+$, являющаяся образом при этом отображении α меры Лебега dx на $\mathbf{R}^d$. Ясно, что $\alpha(K) = K \times \{0\}$ и $\alpha(K^c) = \partial K \times (\mathbf{R}_+ \setminus \{0\})$, так что $W = 1_K\,dx\,\delta_0 + W'$, где W' — некоторая положительная мера на $\partial K \times (\mathbf{R}_+ \setminus \{0\})$. Если граница ∂K представляет собой дважды непрерывно дифференцируемое многообразие, то, как известно,

$$W'(dx,\ d\rho) = \sum_{k=1}^{d} \binom{d}{k} W_k^K(dx)\,d\rho,$$

где мера W_k^K пропорциональна поверхностной мере (соответствующей $(k-1)$-мерному объему ∂K). Кроме того, для каждого $k = 2, \ldots, d$ мера W_k^K абсолютно непрерывна относительно W_1^K и соответствующая плотность зависит только от радиусов кривизны (см., например, Боннезен и Фенхель, 1934). Поэтому для любых $\varphi \in \boldsymbol{C}(\mathbf{R}^d)$ и $r \geqslant 0$

$$\int_{K \oplus rB} \varphi(\Pi_K x)\,dx = \int_K \varphi(x)\,dx + \sum_{k=1}^{d} \binom{d}{k} r^k \int \varphi(x)\,W_k^K(dx).$$

Это соотношение остается справедливым и для произвольного $K \in C(\mathcal{K}')$, как показывает следующая теорема.

Теорема 4.7.1. *Пусть K — выпуклое компактное множество, а Π_K — оператор проектирования на K. Тогда существуют такие $d+1$ мер $W_k^K \geqslant 0$ $(0 \leqslant k \leqslant d)$, первая из которых имеет вид $W_0^K(dx) = 1_K(x)(dx)$, а остальные сосредоточены на границе ∂K, что для любых $\varphi \in \boldsymbol{C}(\mathbf{R}^d)$ и $r \geqslant 0$*

$$\int\limits_{K \oplus rB} \varphi(\Pi_K x)\, dx = \sum_{k=0}^{d} \binom{d}{k} r^k \int \varphi(x)\, W_k^K(dx) \qquad (4.7.1)$$

(B — единичный шар). Кроме того, функционалы Минковского W_k удовлетворяют соотношениям

$$W_k(K) = \int W_k^K(dx) \quad (0 \leqslant k \leqslant d) \qquad (4.7.2)$$

и отображения $(\varphi, K) \to \int \varphi(x)\, W_k^K(dx)$ непрерывны на произведении $\boldsymbol{C}(\mathbf{R}^d) \times C(\mathcal{K}')$.

Доказательство. Как мы уже видели, если ∂K является дважды непрерывно дифференцируемым многообразием, меры W_k^K существуют и удовлетворяют соотношению (4.7.1). Но класс выпуклых компактных множеств, границы которых удовлетворяют этому условию, плотен в $C(\mathcal{K}')$. Поэтому для любого $K \in C(\mathcal{K}')$ найдется такая последовательность $\{K_n\} \subset C(\mathcal{K}')$, что $K = \lim K_n$ и для каждого $n > 0$ меры $W_k^{K_n} = W_k^n$ существуют и удовлетворяют соотношению (4.7.1). Но отображения $\varphi \to \varphi \circ \Pi_K$ и $K \to K \oplus rB$ непрерывны на $\boldsymbol{C}(\mathbf{R}^d)$ и $C(\mathcal{K}')$ соответственно. Поэтому, в силу леммы 4.7.3, для любого $r \geqslant 0$

$$\int\limits_{K \oplus rB} \varphi(\Pi_K x)\, dx = \lim \int\limits_{K_n \oplus rB} \varphi(\Pi_{K_n} x)\, dx.$$

Используя (4.7.1) и беря конечные разности по r, получаем отсюда, что предел $\lim\limits_n \int W_k^n(dx)\varphi(x)$ существует для каждой функции $\varphi \in \boldsymbol{C}(\mathbf{R}^d)$ и определяет положительно линейный функционал на $\boldsymbol{C}(\mathbf{R}^d)$. Поэтому меры W_k^K существуют и удовлетворяют соотношению (4.7.1). При $r = 0$ это соотношение дает $W_0^K(dx) = 1_K(x)\, dx$. Если $k > 0$, то из $\operatorname{supp} W_k^n \subset \partial K_n$ вытекает в силу лемм 4.7.1 и 4.7.2, что $\operatorname{supp} W_k^K \subset \partial K$. Равенство (4.7.2) получается из формулы Штейнера (4.1.8), если в (4.7.1) положить $\varphi = 1$.

Наконец, как легко проверить, отображение $(\varphi, K) \to \varphi \circ \Pi_K$ из $\boldsymbol{C}(\mathbf{R}^d) \times C(\mathscr{K}')$ и $\boldsymbol{C}(\mathbf{R}^d)$ непрерывно. Но сложение по Минковскому $\oplus$ и положительные гомотетии также непрерывны, и на основании леммы 4.7.3 мы заключаем, что отображение $(\varphi, K, r) \to \int\limits_{K \oplus rB} \varphi(x)\,dx$ непрерывно на произведении $\boldsymbol{C}(\mathbf{R}^d) \times \times C(\mathscr{K}') \times \mathbf{R}_+$. Беря конечные разности по r, убеждаемся, что отображение $(\varphi, K) \to \int \varphi(x) W_k^K(dx)$ также непрерывно для каждого k.

Продолжим теперь определенное нами на $C(\mathscr{K}')$ отображение $K \to W_k^K$ до отображения, определенного на $C(\mathscr{F}')$. Нам понадобятся следующие две леммы, первая из которых выявляет локальный смысл меры W_k^K.

Лемма 4.7.4. *Пусть $K, K' \in C(\mathscr{K}')$ и $G \in \mathscr{G}$ таковы, что $K \cap G = K' \cap G$. Тогда $1_G W_k^K = 1_G W_k^{K'}$, $0 \leqslant k \leqslant d$.*

Доказательство. Существует такое $\alpha > 0$, что $G \ominus \rho B \neq \varnothing$ для $0 < \rho < \alpha$ и $G \ominus \rho B \uparrow G$ при $\rho \downarrow 0$. Ясно, что $K \cap (G \ominus \rho B) = K' \cap (G \ominus \rho B)$. Отсюда следует, что $(K \oplus \rho B) \cap (G \ominus \rho B) = (K' \oplus \rho B) \cap (G \ominus \rho B)$. Действительно, если точка x принадлежит левой части (т. е. $(\rho B)_x \subset G$ и $x = y + \rho b$, где $y \in K$ и $b \in B$), то $y = x - \rho b \in (\rho B)_x \subset G$ и поэтому $y \in K \cap G = K' \cap G$. Отсюда вытекает, что $x = y + \rho b \in K' \oplus \rho B$ и $x \in (K' \oplus \rho B) \cap (G \ominus \rho B)$, так как $(\rho B)_x \subset G$. Следовательно, $(K \oplus \rho B) \cap (G \ominus \rho B) \subset (K' \oplus \rho B) \cap \cap (G \ominus \rho B)$. Меняя местами K и K', получаем указанное равенство.

Ясно, что из $\Pi_K x \in G \ominus \rho B$ вытекает, что $\Pi_{K'} x = \Pi_K x$. Пусть $\{\varphi_n\} \subset \boldsymbol{C}(\mathbf{R}^d)$ — такая последовательность, что $\varphi_n \uparrow 1_{G \ominus \rho B}$. В соответствии с предыдущими рассмотрениями

$$\int\limits_{K \oplus \rho B} \varphi_n(\Pi_K x)\,\psi(\Pi_K x)\,dx = \int\limits_{K' \oplus \rho B} \varphi_n(\Pi_{K'} x)\,\psi(\Pi_{K'} x)\,dx$$

для любой функции $\psi \in \boldsymbol{C}(\mathbf{R}^d)$. Отсюда, используя (4.7.1) и непрерывность относительно монотонных последовательностей, получаем, что $1_{G \ominus \rho B} W_k^K = 1_{G \ominus \rho B} W_k^{K'}$, и, устремляя $\rho \downarrow 0$, что $1_G W_k^K = 1_G W_k^{K'}$.

Лемма 4.7.5. *Пусть $G \in \mathscr{G}$ и $K_0 \in \mathscr{K}$ таковы, что $G \subset K_0$, а последовательность $\{F_n\} \subset \mathscr{F}$ такова, что $\lim F_n = F$ в $\mathscr{F}$. Тогда $(\underline{\lim}(F_n \cap K_0)) \cap G = F \cap G$.*

Доказательство. В силу полунепрерывности сверху операции $\cap$ имеем

$$(\underline{\lim}\,(F_n \cap K_0)) \subset \overline{\lim}\,(F_n \cap K_0) \subset F \cap K_0.$$

Обратно, пусть $x \in F \cap G$. Тогда найдется такая последовательность $n \to x_n \in F_n$, что $x = \lim x_n$ в $\mathbf{R}^d$. Для достаточно больших n точка x_n принадлежит окрестности G точки x, т. е. $x_n \in F_n \cap G \subset F_n \cap K_0$. Поэтому $x \in \underline{\lim}\,(F_n \cap K_0)$, и $F \cap G \subset (\underline{\lim}\,(F_n \cap K_0)) \cap G$.

Теперь мы можем определить продолжение $F \to W_k^F$ на $C(\mathcal{F}')$ отображения $K \to W_k^K$. Заметим сразу, что W_k^F будет положительной мерой Радона, вообще говоря не ограниченной на $\mathbf{R}^d$.

Предложение 4.7.1. *Для любых $F \in C(\mathcal{F}')$ и $k = 0, 1, \ldots, d$, существует единственная мера Радона $W_k^F \geqslant 0$ на $\mathbf{R}^d$, такая, что $1_G W_k^F = 1_G W_k^{K \cap F}$ для всех $K \in C(\mathcal{K}')$ и $G \in \mathcal{G}$, удовлетворяющих соотношению $K \cap G = F \cap G$. При этом $W_0^F(dx) = 1_F(x)\,dx$, $\operatorname{supp} W_k^F \subset \partial F$ $(k=1, 2, \ldots, d)$ и отображение $(\varphi, F) \to \int \varphi(x)\, W_k^F(dx)$ непрерывно на $C_{\mathcal{K}}(\mathbf{R}^d) \times C(\mathcal{F}')$ для $k = 0, 1, \ldots, d$.*

Доказательство. Пусть $\{B_n\} \subset C(\mathcal{K}')$ — последовательность, для которой $B_n \subset \mathring{B}_{n+1}$ и $B_n \uparrow \mathbf{R}^d$. С каждым множеством $F \in C(\mathcal{F}')$ свяжем последовательности $n \to K_n = F \cap B_n$ и $n \to W_k^n = 1_{\mathring{B}_n} W_k^{K_n}$. Согласно лемме 4.7.4, $W_k^n = 1_{\mathring{B}_n} W_k^m$ для $m \geqslant n$. Поэтому существует такая σ-конечная мера $W_k^F \geqslant 0$ на $\mathbf{R}^d$, что $W_k^F = \lim W_k^n$ при $n \uparrow \infty$. Нетрудно убедиться в том, что W_k^F не зависит от выбора последовательности $\{B_n\}$. Если $K \in C(\mathcal{K}')$ и $G \in \mathcal{G}$ таковы, что $K \cap G = F \cap G$, то $1_G = W_k^F = 1_G W_k^K$, в силу леммы 4.7.4, и это свойство можно принять в качестве определения. В частности, $W_0^F = 1_F(dx)$ и $\operatorname{supp} W_k^F \subset \partial F$ для $k = 1, 2, \ldots, d$.

Пусть теперь $\{\varphi_n\} \subset C_{\mathcal{K}}(\mathbf{R}^d)$ — последовательность, для которой $\lim \varphi_n = \varphi$ в $C_{\mathcal{K}}(\mathbf{R}^d)$, $K_0 \in C(\mathcal{K}')$ — компактное выпуклое множество, содержащее носители функций φ_n при всех $n > 0$, а $\{F_n\} \subset C(\mathcal{F}')$ — последовательность, для которой $\lim F_n = F \in C(\mathcal{F}')$. Для того чтобы закончить доказательство, нам надо показать, что $\int \varphi(x)\, W_k^F(dx) = \lim \int \varphi_n(x)\, W_k^{F_n}(dx)$. Пусть G — такое открытое выпуклое множество, что $K_0 \subset G \subset \overline{G} \in C(\mathcal{K}')$. Положим $K_n = F_n \cap \overline{G}$, $K = F \cap \overline{G}$. В силу первой части доказательства $1_G W_k^{F_n} = 1_G W_k^{K_n}$, $1_G W_k^F = 1_G W_k^K$, а поэтому также

$\int \varphi_n W_k^{F_n} = \int \varphi_n W_k^{K_n}$, $\int \varphi W_k^F = \int \varphi W_k^K$. Поскольку $K_n \subset \bar{G} \in C(\mathscr{K}')$, то $\int W_k^{K_n} \leqslant \int W_k^{\bar{G}}$ (ибо функционалы Минковского возрастают), так что последовательность $\{W_k^{K_n}\}$ мажорируется в $\mathscr{M}_c^+$. Поэтому последовательность $n \to \int \varphi_n W_k^{K_n}$ ограничена в $\mathbf{R}$ и имеет предельную точку $u \in \mathbf{R}$. Тогда существует такая подпоследовательность $\{n_p\}$, что $K_{n_p} = K'$ в $C(\mathscr{K}')$ и $\lim W_k^{K_{n_p}} = W_k^{K'}$ в $\mathscr{M}_c$. Согласно лемме 4.7.5, отсюда вытекает, что $K' \cap G = K \cap G$, и, таким образом, в силу теоремы 4.7.1 и леммы 4.7.4,

$$u = \lim \int \varphi_{n_p} W_k^{K_{n_p}} = \int \varphi W_k^{K'} = \int \varphi 1_G W_k^{K'} = \int \varphi 1_G W_k^K = \int \varphi W_k^K.$$

Следовательно, u является единственной предельной точкой последовательности $n \to \int \varphi_n W_k^{K_n}$, и $\lim \int \varphi_n W_k^{F_n} = \lim \int \varphi_n W_k^{K_n} = \int \varphi W_k^K = \int \varphi W_k^F$.

Следствие. *Пусть φ — положительная полунепрерывная снизу функция на $\mathbf{R}^d$ (которая может принимать и бесконечные значения). Тогда отображение $F \to \int \varphi(x) W_k^F(dx)$ $(k = 0, 1, \ldots, d)$ полунепрерывно снизу на $C(\mathscr{F}')$. В частности, отображение $F \to W_k(F) = \int W_k^F(dx) \leqslant \infty$ является полунепрерывным снизу продолжением на $C(\mathscr{F}')$ соответствующего функционала Минковского, первоначально определенного на $C(\mathscr{K}')$.*

Доказательство. Пусть $\{\varphi_n\} \subset C_{\mathscr{K}}(\mathbf{R}^d)$ — такая последовательность, что $\varphi_n \uparrow \varphi$, так что $\int \varphi_n W_k^F \uparrow \int \varphi W_k^F$. Неравенство $\int \varphi W_k^F > a$ (a — вещественное число) выполняется тогда и только тогда, когда F принадлежит множеству $\bigcup_n \left\{F' \colon F' \in C(\mathscr{F}'), \int \varphi_n W_k^{F'} > a\right\}$, которое открыто в $C(\mathscr{F})$ в силу доказанного предложения. Значит, отображение $F \to \int \varphi W_k^F$ полунепрерывно снизу.

Случайные меры Минковского

Пусть $A = (\mathscr{F}, \sigma_f, P)$ — п. н. выпуклое СЗМ. Для каждого $k = 0, 1, \ldots, d$ мера W_k^F определена для P-почти всех $F \in \mathscr{F}'$ (если $F = \varnothing$, то мы полагаем $W_k^F = 0$). Согласно предложению 4.7.1, для любой функции $\varphi \in C_{\mathcal{K}}(\mathbf{R}^d)$ существует случайная величина $\int W_k^A(dx)\,\varphi(x)$, P-п. в. определяемая отображением $F \to \int \varphi W_k^F$. Кроме того, в силу того же предложения, из $\varphi = \lim \varphi_n$ в $C_{\mathcal{K}}(\mathbf{R}^d)$ вытекает, что $\int \varphi W_k^A = \lim \int \varphi_n W_k^A$ п. н. Другими словами, W_k^A является *положительной случайной мерой.*

Для всякой функции $\varphi \in C_{\mathcal{K}}(\mathbf{R}^d)$

$$E\left(\left|\int \varphi W_k^A\right|\right) < \infty.$$

Доказательство. Мы можем считать, что $\varphi \geqslant 0$. Пусть $K_0 \in \mathcal{K}$ — носитель функции φ, $G \in \mathcal{G}$, а $K_0' \in C(\mathcal{K}')$ таково, что $K_0 \subset G \subset K_0'$. В силу предложения 4.7.1 мы имеем п. н.

$$\int \varphi W_k^A = \int W_k^{A \cap K_0'} \varphi \leqslant (\sup \varphi)\left(W_k\left(K_0' \cap A\right)\right) \leqslant (\sup \varphi)\, W_k\left(K_0'\right),$$

поскольку функционалы Минковского возрастают. Поэтому $E\left(\int \varphi W_k^A\right) \leqslant (\sup \varphi)\, W_k\left(K_0'\right) < \infty$.

Отсюда следует, что отображение $\varphi \to E\left(\int \varphi W_k^A\right)$ является положительным линейным функционалом на $C_{\mathcal{K}}(\mathbf{R}^d)$, т. е. мерой Радона; она называется *ожидаемой мерой Минковского*, соответствующей мере W_k, и обозначается через $E\left(W_k^A\right)$, или $E(W_k)$, или просто $W_k(dx)$, если не может возникнуть путаницы.

Если ψ — положительная полунепрерывная снизу функция на $\mathbf{R}^d$ (с конечными или бесконечными значениями), то существует последовательность $\{\varphi_n\} \subset C_{\mathcal{K}}(\mathbf{R}^d)$, такая, что $\varphi_n \uparrow \psi$. Отсюда следует, что $\int \varphi_n W_k^A \uparrow \int \psi W_k^A$ п. н. и $E\left(\int \varphi_n W_k^A\right) \uparrow E\left(\int \psi W_k^A\right)$, т. е. $\int \psi(x)\, E(W_k(dx)) = E\left(\int \psi(x)\, W_k^A(dx)\right)$. Аналогично для любой измеримой положительной функции f соотношение $\int f W_k^A = \inf\left\{\int \psi W_k^A,\ \psi \text{ — полунепрерывная снизу функция, } \psi \geqslant f\right\}$ п. н. приводит к соотношению $E\left(\int f W_k^A\right) = \int f E(W_k)$. Таким образом, справедливо следующее

Предложение 4.7.2. *Пусть $A = (\mathcal{F}, \sigma_f, P)$—п. н. выпуклое СЗМ. Тогда для любой измеримой функции f интеграл $\int f W_k^A$ $(k = 0, 1, \ldots, d)$ является случайной величиной, определенной P-п. в.*

на $\mathscr{F}$, а отображение $\varphi \to \int \varphi W_k^A$ — положительной случайной мерой на $C_{\mathscr{K}}(\mathbf{R}^d)$. Далее, отображение $\varphi \to E\left(\int \varphi W_k^A\right)$ представляет собой положительную меру Радона на $C_{\mathscr{K}}(\mathbf{R}^d)$, называемую ожидаемой мерой Минковского, соответствующей мере W_k, и обозначаемую через $E(W_k)$. Для любой измеримой положительной функции f на $\mathbf{R}^d$

$$E\left(\int f W_k^A\right) = \int f E(W_k).$$

Замечание. В случае когда ожидаемая мера $E(W_k)$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега, ее плотность мы часто будем называть *плотностью функционала Минковского* W_k (по отношению к СЗМ A).

Кольцо выпуклости $\mathfrak{S}$

Рассмотрим замкнутый относительно взятия конечных объединений класс $\mathfrak{S}$, порожденный $C(\mathscr{K})$. Этот класс, называемый *кольцом выпуклости*, плотен в пространстве $\mathscr{K}(\mathbf{R}^d)$ (но не совпадает с ним). В интегральной геометрии на $\mathfrak{S}$ определяется некий функционал χ, называемый *характеристикой Эйлера — Пуанкаре.* Он определяется следующим образом. Прежде всего, полагают $\chi(\varnothing)=0$ и $\chi(K)=1$ для любого $K \in C(\mathscr{K}')$. Далее, если множество $K \in \mathscr{K}$ представимо в виде объединения $K = \bigcup_{i=1}^{p} K_i$ выпуклых компактных множеств $K_1, \ldots, K_p \in C(\mathscr{K}')$, то полагают

$$\chi(K) = \sum_i \chi(K_i) - \sum_{i_1 < i_2} \chi(K_{i_1} \cap K_{i_2}) + \ldots + (-1)^{p-1} \chi(K_1 \cap \ldots \cap K_p). \tag{4.7.3}$$

Можно показать (см., например, Хадвигер, 1957), что величина $\chi(K)$, определяемая формулой (4.7.3), не зависит от способа представления заданного множества $K \in \mathfrak{S}$ в виде $K = \bigcup K_i$, $K_i \in C(\mathscr{K}')$, так что формула (4.7.3) действительно определяет некоторую функцию на $\mathfrak{S}$ с целочисленными значениями (которые могут быть как положительными, так и отрицательными).

В силу определения (4.7.3) функция χ аддитивна на $\mathfrak{S}$ в следующем смысле:

$$\chi(K \cup K') + \chi(K \cap K') = \chi(K) + \chi(K') \quad (K, K' \in \mathfrak{S}).$$

Пусть B — единичный шар и $r \geqslant 0$. Если $K = \bigcup K_i$, $K_1, \ldots, K_p \in C(\mathscr{K}')$, то для любого $x \in \mathbf{R}^d$

$$\chi(K \cap (rB)_x) = \sum_i \chi(K_i \cap (rB)_x) - \sum_{i_1 < i_2} \chi(K_{i_1} \cap K_{i_2} \cap (rB)_x) + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{p-1} \chi(K_1 \cap \ldots \cap K_p \cap (rB)_x).$$

Таким образом, функция $x \to \chi(K \cap (rB)_x)$ имеет вид

$$\sum_i 1_{K_i \oplus rB} - \sum_{i_1 < i_2} 1_{(K_{i_1} \cap K_{i_2}) \oplus rB} + \ldots$$

и потому интегрируема, так что

$$\int \chi(K \cap (rB)_x)\, dx = \sum_i V(K_i \oplus rB) - \sum_{i_1 < i_2} V((K_{i_1} \cap K_{i_2}) \oplus rB) + \ldots,$$

где V обозначает объем. Левая часть этого равенства не зависит от выбора конкретного представления $K = \bigcup K_i$. Что касается правой части, то в соответствии с формулой Штейнера (4.1.8), она является многочленом от r.

Приведенное выше равенство можно записать в виде

$$\int \chi(K \cap (rB)_x)\, dx = \sum_{k=0}^{d} \binom{d}{k} r^k \overline{W}_k(K),$$

где (4.7.4)

$$\overline{W}_k(K) = \sum_i W_k(K_i) - \sum_{i_1 < i_2} W_k(K_{i_1} \cap K_{i_2}) + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{p-1} W_k(K_1 \cap \ldots \cap K_p).$$

Значения $\overline{W}_k(K)$, $k = 0, 1, \ldots, d$, не зависят от выбора представления $K = \bigcup K_i$. Таким образом, для каждого $k = 0, 1, \ldots, d$ отображение $K \to \overline{W}_k(K)$ служит *продолжением на* $\mathfrak{S}$ *функционала Минковского* W_k, первоначально определенного на $C(\mathscr{K})$. В частности, $\overline{W}_0$ — это объем, $d\overline{W}_1$ — площадь поверхности, а $(1/b_d)\overline{W}_d$ — сама характеристика Эйлера — Пуанкаре.

Эти функционалы *аддитивны* на $\mathfrak{S}$, т. е.

$$\overline{W}_k(K \cup K') + \overline{W}_k(K \cap K') = \overline{W}_k(K) + \overline{W}_k(K') \quad (K, K' \in \mathfrak{S}).$$

Отметим также, что *формула Крофтона* (4.1.12) остается в силе на $\mathfrak{S}$, поскольку она выполняется для каждого пересечения $K_{i_1} \cap \ldots \cap K_{i_n} \in C(\mathscr{K})$ в правой части (4.7.4). Полагая $k' = k$

в (4.1.12), мы получаем $\overline{W}_k^k(K \cap S_s) = b_k\chi(K \cap S_s)$. Отсюда вытекает следующая формула:

$$\overline{W}_k^d(K) = \frac{b_d}{b_{d-k}} \int_{\mathscr{S}_k} \tilde{\omega}_k(dS) \int_{S^\perp} \chi(K \cap S_s)\, ds,$$

которую можно использовать и как определение.

Заметим, что указанные продолжения $\overline{W}_k$, $k=0, 1, \ldots, d$, на $\mathfrak{S}$ не являются единственно возможными. Например, отображение $K \to (b_d/b_{d-k}) \int_{\mathscr{S}_k} \mu_{d-k}(\Pi_{S^\perp}K)\,\tilde{\omega}_k(dS)$ представляет собой продолжение на всё пространство $\mathscr{K}$, не совпадающее с $\overline{W}_k$ на $\mathfrak{S}$. Мы сейчас рассмотрим еще одно возможное продолжение, которое будет продолжением не только функционалов, но и мер Минковского.

Продолжение мер Минковского

Прежде чем непосредственно приступить к продолжению на $\mathfrak{S}$ мер Минковского, введем одно определение. Пусть x — некоторая точка в $\mathbf{R}^d$ и $K \in \mathscr{K}$. Будем говорить, что $x' \in \mathscr{K}$ является *проекцией* точки x на K, если существует такое открытое множество G, что $x' \in G$ и $|x-y| > |x-x'|$ для любого $y \in G \cap K$, $y \neq x'$. *Совокупность всех проекций x на K будем обозначать через* $\Pi_K(x)$.

Если $K \in \mathfrak{S}$, то множество $\Pi_K(x)$ *конечно*. При этом, если $K = \bigcup K_i$, $K_1, \ldots, K_n \in C(\mathscr{K}')$, — представление множества K, то всякая точка $x' \in \Pi_K(x)$ будет (единственной) проекцией $\Pi_{K_i}x$ точки x на K_i по крайней мере для одного индекса i $(i=1, 2, \ldots, n)$.

Доказательство. Поскольку $x' \in \bigcup K_i$, то найдется такой индекс i_0, что $x' \in K_{i_0}$. Если $x \in K_{i_0}$, то $x = x'$ и утверждение теоремы справедливо, ибо $\Pi_{K_{i_0}}x = x = x'$. Предположим, что $x \notin K_{i_0}$, и положим $x_{i_0} = \Pi_{K_{i_0}}x$. Если $x' \neq x_{i_0}$, то отрезок $[x_{i_0}, x']$ содержится в K_{i_0}, и для любого открытого множества $G \ni x'$ отрезок $[x_{i_0}, x']$ содержит такую точку $y \in G$, $y \neq x'$, для которой $|x-y| \leqslant |x-x'|$. Однако это невозможно, так как $x' \in \Pi_K(x)$. Значит, $x' = x_{i_0}$.

Обратно, точка $x_i = \Pi_{K_i}x$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ принадлежит $\Pi_K(x)$ тогда и только тогда, когда выполнено одно из двух следующих условий:

a) $x = x_i$, т. е. $x \in K_i$.

b) $x \neq x_i$ и существует такая открытая окрестность G точки x_i, что для любой точки $y \neq x_i$, $y \in K \cap G$ имеет место строгое неравенство $|x - y| > |x - x_i|$.

Очевидно, что условие b) эквивалентно следующему условию:

b′) $x \neq x_i$ и гиперплоскость $H \ni x_i$ локально является опорной гиперплоскостью множества K (т. е. существует такое открытое множество $G' \ni x_i$, что точка x и множество $K \cap G'$ разделяются этой гиперплоскостью).

Множество $\Pi_K(x)$ состоит не более чем из n различных точек. Обозначим эти точки через $x'_1, \ldots, x'_p$ $(0 \leqslant p \leqslant n)$ и положим $x_i = \Pi_{K_i}x$, $x_{i_1, \ldots, i_k} = \Pi_{K_{i_1} \cap \ldots \cap K_{i_k}}x$ $(0 < k \leqslant n,\ 0 < i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n)$. Пусть F_i — функция, определяемая следующим образом: $F_i(x) = 1$, если $x_i = \Pi_{K_i}x \notin K_j$, $j \neq i$, и $F_i(x) = 0$ в противном случае. Аналогично для $0 < i_1 < \ldots < i_k \leqslant n$ положим $F_{i_1, \ldots, i_k}(x) = 1$, если точки $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ лежат в $K_{i_1} \cap \ldots \cap K_{i_k}$ и ни одна из них не принадлежит K_j, $j \neq i_1, \ldots, i_k$ и $F_{i_1}, \ldots, F_{i_k}(x) = 0$ в противном случае. Очевидно, из $F_{i_1, \ldots, i_k}(x) = 1$ вытекает, что $x_{i_1} = \ldots = x_{i_k} = x_{i_1, \ldots, i_k}$.

Для $i = 1, 2, \ldots, n$ точка $x_i = \Pi_{K_i}x$ принадлежит $\Pi_K(x)$ тогда и только тогда, когда $F_{i_1, \ldots, i_k}(x) = 1$ для некоторого набора индексов $0 < i_1 < \ldots < i_k \leqslant n$, содержащего индекс i.

Доказательство. Предположим, например, что $i = n$. Если $F_{i_1, \ldots, i_k, n}(x) = 1$ $(0 < i_1 < i_2 < \ldots < i_k < n)$ и $x \in K_{i_1} \cap \ldots \cap K_{i_k} \cap K_n$, то очевидно, что $x = x_n = x_{i_1, \ldots, i_k, n} \in \Pi_K(x)$. Если $F_{i_1, \ldots, i_k}(x) = 1$ и $x \notin K_{i_1} \cap \ldots \cap K_{i_k} \cap K_n$, то $x \neq x_n$ и $x_{i_1} = \ldots = x_{i_k} = x_n = x_{i_1, \ldots, i_k, n}$. Пусть тогда H_n — гиперплоскость, ортогональная отрезку $[x, x_n]$ и такая, что $x_n \in H_n$. Поскольку $x_{i_1} = \ldots = x_{i_k} = x_n = x_{i_1, i_2, \ldots, i_k, n}$, то H_n является опорной гиперплоскостью для $K_{i_1}, K_{i_2}, \ldots, K_{i_k}$ и K_n. Кроме того, H_n удовлетворяет условию b′), так как $x_n \notin K_j$, если $j \neq i_1, i_2, \ldots, n$. Таким образом, $x_n \in \Pi_K(x)$.

Обратно, пусть x' — некоторая точка из $\Pi_K(x)$, а $i_1, \ldots, i_k$ — те значения индекса i, при которых $x' \in K_i$. Тогда $x' = x_{i_1} = \ldots = x_{i_k}$ и $x' \neq x_j$, если $j \neq i_1, \ldots, i_k$, т. е. $F_{i_1, \ldots, i_k}(x) = 1$.

Итак, справедливо

Предложение 4.7.3. *В тех же обозначениях, что и выше, индикатор множества* $\Pi_K(x)$ *равен*

$$1_{\Pi_K(x)} = \sum_i F_i(x)\, 1_{\{x_i\}} + \sum_{i_1<i_2} F_{i_1, i_2}(x)\, 1_{\{x_{i_1, i_2}\}} + \ldots,$$

а число различных точек в $\Pi_K(x)$ *равно*

$$n(K,\ x) = \sum_i F_i(x) + \sum_{i_1<i_2} F_{i_1, i_2}(x) + \ldots.$$

Обозначим через $\Pi_K(x;\ r)$ подмножество множества $\Pi_K(x)$, определяемое следующим образом:

$$\Pi_K(x;\ r) = \{x':\ x' \in \Pi_K(x),\ |x - x'| \leqslant r\} = \Pi_K(x) \cap B_r(x)$$

($r \geqslant 0$). Индикатором множества $\Pi_K(x;\ r)$ является $1_{\Pi_K(x)} 1_{(rB)_x}$, а число $n(K,\ r,\ x)$ различных точек в $\Pi_K(x,\ r)$ равно

$$n(K;\ r,\ x) = \sum_i F_i(x)\, 1_{(rB)_x}(x_i) + \sum_{i_1<i_2} F_{i_1, i_2}(x)\, 1_{(rB)_x}(x_{i_1, i_2}) + \ldots. \tag{4.7.5}$$

Более общим образом, для любой функции $\varphi \in \boldsymbol{C}(\mathbf{R}^d)$

$$\sum_{x' \in \Pi_K(x,\, r)} \varphi(x') = \sum_i F_i(x)\, 1_{(rB)_x}(x_i)\, \varphi(x_i) + \\ + \sum_{i_1<i_2} F_{i_1, i_2}(x)\, 1_{(rB)_x}\left(x_{i_1, i_2}\right) \varphi\left(x_{i_1, i_2}\right) + \ldots. \tag{4.7.6}$$

Нетрудно убедиться в том, что функции $F_{i_1, \ldots, i_k}$ измеримы. Отсюда вытекает, что измеримым будет и отображение $x \to \sum_{x' \in \Pi_K(x,\, r)} \varphi(x')$.

Интегрированием по $\mathbf{R}^d$ получаем

$$\int \Bigg(\sum_{x' \in \Pi_K(x,\, r)} \varphi(x') \Bigg) dx = \sum_i \int_{K_i \oplus rB} F_i(x)\, \varphi\left(\Pi_{K_i} x\right) dx + \\ + \sum_{i_1<i_2} \int_{(K_{i_1} \cap K_{i_2}) \oplus rB} F_{i_1, i_2}(x)\, \varphi\left(\Pi_{K_{i_1} \cap K_{i_2}} x\right) dx + \ldots.$$

Левая часть последнего соотношения не зависит от выбора конкретного представления $K = \bigcup K_i$. Согласно (4.7.1), правая его часть является многочленом от r, так что имеет место явная формула

$$\int \Big(\sum_{x' \in \Pi_K(x,\, r)} \varphi(x') \Big)\, dx = \sum_{k=0}^{d} \binom{d}{k} r^k \int W_k^K(dx)\, \varphi(x), \tag{4.7.7}$$

где

$$W_k^K = \sum_i F_i W_k^{K_i} + \sum_{i_1 < i_2} F_{i_1 i_2} W_k^{K_{i_1} \cap K_{i_2}} + \ldots .$$

Меры W_k^K, определенные нами таким образом, не зависят от выбора представления $K = \bigcup K_i$, поскольку от него не зависит левая часть первого соотношения в (4.7.7). Если $\varphi = 1$, то подынтегральное выражение равно просто числу $n(K,\, r,\, x)$ различных точек в $\Pi_K(x,\, r)$. Полагая $W_k(K) = \int W_k^K(dx)$, получаем тогда из общей формулы:

$$\int n(K;\, r;\, x)\, dx = \sum_{k=0}^{d} \binom{d}{k} r^k W_k(K). \tag{4.7.8}$$

Следовательно, в соответствии с формулой Штейнера (4.1.8) отображение $K \to W_k(K)$ является *продолжением на* $\mathfrak{S}$ *функционала Минковского*, первоначально определенного на $C(\mathcal{K})$. Заметим, что в общем случае $W_k(K) \neq \overline{W}_k(K)$, а значит, только что рассмотренное продолжение не совпадает с продолжением $\overline{W}_k$, определяемым соотношением (4.7.4).

Более общо, если $K \in C(\mathcal{K}')$, то правая часть (4.7.7) есть просто $\int_{K \oplus rB} \varphi(\Pi_K(x))\, dx$, так что меры W_k^K совпадают с мерами Минковского (теорема 4.7.1). Поэтому отображение $K \to W_k^K$, определяемое соотношением (4.7.7), в действительности является продолжением на кольцо выпуклости $\mathfrak{S}$ аналогичного отображения, которое мы использовали для определения мер Минковского на $C(\mathcal{K})$.

Если $k = 0$, то $W_0^K = 1_K\, dx$; эта мера соответствует объему. Если $k = 1$, то W_1^K — это (с точностью до коэффициента пропорциональности) мера, соответствующая площади поверхности. Для $k = d$ мера W_d^K доставляет обобщение понятия полной кривизны; соответствующий функционал Минковского $K \to W_k(K) = \int W_k^K(dx)$ тесно связан с показателем выпуклости, который мы сейчас определим.

Показатель выпуклости

Для любого единичного вектора $u \in S_0$ и любого $r \in \mathbb{R}$ будем обозначать через $H(u,\, r)$ гиперплоскость $H(u,\, r) =$

$=\{x\colon\ x\in\mathbf{R}^d,\ \langle x, u\rangle = r\}$, ортогональную к u и содержащую точку ru. Пусть K — компактное множество из $\mathfrak{S}$, а C_i, $i=1, 2, \ldots, p$, — (непустые) связные компоненты множества $K\cap H(u, r)$ ($p<\infty$, так как $K\in\mathfrak{S}$). При заданном индексе i_0 ($0\leqslant i_0\leqslant p$) мы будем говорить, что связная компонента C_{i_0} является *выступающей частью* множества K, соответствующей (u и) $H(u, r)$, если найдется такое открытое связное множество $G\supset C_{i_0}$, что $G\cap C_i=\varnothing$ для $i\neq i_0$ и $G\cap K\cap H(u, r-\varepsilon)=\varnothing$ для всех достаточно малых $\varepsilon>0$. Обозначим через $f(r)$ число ($\leqslant p$) выступающих частей, соответствующих $H(u, r)$. Если единичный вектор $u\in S_0$ фиксирован, то это число $f(r)$ отлично от нуля лишь для *конечного* числа вещественных чисел $r_1, r_2, \ldots$, так что мы можем положить $\nu(K, u)=\sum_r f(r)$. Мы будем называть $\nu(K, u)$ *показателем выпуклости* множества $K\in\mathfrak{S}$ *относительно единичного вектора* u. Далее, *средним показателем выпуклости* $\nu(K)$ (или просто *показателем выпуклости*) будем называть среднее по вращениям показателя $\nu(K, u)$, т. е. $\nu(K)=\int_{S_0}\nu(K, u)\,\varpi(du)$, где ϖ обозначает единственную инвариантную вероятность на S_0.

***Предложение** 4.7.4. Пусть K — компактное множество из $\mathfrak{S}$, $\nu(K)$ — его показатель выпуклости, а $W_d(K)$ — значение на K функционала Минковского, определяемого соотношением* (4.7.8) *для $k=d$. Тогда*

$$\nu(K)=\frac{1}{b_d}W_d(K). \tag{4.7.9}$$

Доказательство. Предположим сначала, что $K\in C(\mathcal{K}')$ — компактное множество с достаточно гладкой границей ∂K. Тогда мера W_d^K абсолютно непрерывна относительно поверхностной меры W_1^K, и ее плотность пропорциональна полной кривизне на ∂K. Если ϖ — единственная инвариантная вероятность на S_0, а $B\subset\partial K$ — борелевское множество, то $(1/b_d)W_d^K(B)$ представляет собой ϖ-меру множества $\{u\colon u$ — единичный вектор внешней нормали к ∂K в точке $x\in B\}$. Другими словами, $(1/b_d)W_d^K(B)$ — это вероятность того, что для пакета параллельных гиперплоскостей $H(-u, r)$, $r\in\mathbf{R}$, единичный вектор $-u$ которого является случайной величиной на (S_0, ϖ), в борелевском множестве B содержится *выступающая точка*[1] мно-

[1] То есть точка, принадлежащая выступающей части множества K. Всякая такая точка лежит на его границе. — *Прим. перев.*

жества K. Эта интерпретация справедлива, когда нормаль в любой точке $x' \in \partial K$ определена однозначно, в частности она справедлива для любого $K \in C(\mathscr{K}')$ вида $K = K_0 \oplus \varepsilon B$, где $K_0 \in C(\mathscr{K}')$ и $\varepsilon > 0$ (B — единичный шар), так как выступающая часть множества K, отвечающая случайному классу $H(-u, r)$, $r \in \mathbf{R}$, $\mathfrak{W}$-п. н. состоит из единственной точки.

Возьмем теперь такое $K \in \mathfrak{S}$, что $K = \bigcup (K_i \oplus \varepsilon B) = (\bigcup K_i) \oplus \varepsilon B$ для $i = 1, 2, \ldots, n$, $K_i \in C(\mathscr{K}')$ и $\varepsilon > 0$. Пусть u — единичный вектор и $0 < i_1 < \ldots < i_k \leqslant n$. Тогда выступающая точка x' множества $(K_{i_1} \oplus \varepsilon B) \cap \ldots \cap (K_{i_k} \oplus \varepsilon B)$, соответствующая единичному вектору $u \in S_0$, принадлежит выступающей части множества K в том и только том случае, если $F_{i_1, \ldots, i_k}(x) = 1$, и в этом случае эта выступающая часть $\mathfrak{W}$-п. н. состоит из единственной точки, т. е. имеет вид $\{x\}$. Поэтому вероятность того, что выступающая точка множества $(K_{i_1} \oplus \varepsilon B) \cap \ldots \cap (K_{i_k} \oplus \varepsilon B)$ (отвечающая случайному единичному вектору u) будет также и выступающей точкой множества K, равна

$$\frac{1}{b_d} \int F_{i_1, \ldots, i_k}(x)\, W_d^{(K_{i_1} \oplus \varepsilon B) \cap \ldots \cap (K_{i_k} \oplus \varepsilon B)}(dx).$$

В силу (4.7.7) отсюда следует, что $b_d \nu(K) = \int W_d^K(dx) = W_d(K)$, и (4.7.9) выполняется.

Наконец, пусть K — произвольное компактное множество из $\mathfrak{S}$, а $K = \bigcup K_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $K_i \in C(\mathscr{K}')$, — какое-нибудь представление этого множества. Для любого $\varepsilon > 0$ положим $K_\varepsilon = K \oplus \varepsilon B$, $K_i(\varepsilon) = K_i \oplus \varepsilon B$. В силу первой части доказательства

$$b_d \nu(K_\varepsilon) = W_d(K_\varepsilon) \qquad (\varepsilon > 0). \tag{4.7.10}$$

Далее, $\nu(K_\varepsilon) \uparrow \nu(K)$ при $\varepsilon \downarrow 0$. Действительно, если $u \in S_0$ — заданный единичный вектор, то, как нетрудно проверить, отображение $K \to \nu(K, u)$ полунепрерывно снизу на $\mathfrak{S}$, а $\varepsilon \to \nu(K_\varepsilon, u)$ — невозрастающая функция на $\mathbf{R}_+$. Поэтому при $\varepsilon \downarrow 0$ мы имеем $\nu(K_\varepsilon, u) \uparrow \nu(K, u)$, а значит $\nu(K_\varepsilon) = \int \nu(K_\varepsilon, u) \mathfrak{W}\, du \uparrow \int \nu(K, u) \mathfrak{W} \times \times (du) = \nu(K)$ в силу монотонной непрерывности.

С другой стороны, при $\varepsilon \downarrow 0$ также $W_d(K_\varepsilon) \uparrow W_d(K)$. Действительно, если $x' \in \partial K$ — проекция на K точки $x \neq x'$, то $x' + \varepsilon(x - x')/|x - x'|$ тоже будет проекцией x на $K \oplus \varepsilon B$ для достаточно малых $\varepsilon > 0$, и обратно. Поэтому при $\varepsilon \downarrow 0$ мы имеем $n(K_\varepsilon, r - \varepsilon, x) \uparrow n(K, r, x)$, откуда, ввиду (4.7.8), вытекает сделанное утверждение. На основании (4.7.10) мы заключаем теперь, что $b_d \nu(K) = W_d(K)$.

Обобщенные случайные меры Минковского

Обратимся теперь к вероятностному варианту теории. В приводимых ниже предварительных результатах кольцо выпуклости $\mathfrak{S}$ наделяется относительной миопической топологией. Для любых $x \in \mathbf{R}^d$ и $K \in \mathfrak{S}$ множество $\Pi_K(x)$ проекций x на K *конечно* и поэтому компактно в $\mathbf{R}^d$.

Лемма 4.7.6. *Отображение* $(x, K) \to \Pi_K(x)$ *из* $\mathbf{R}^d \times \mathfrak{S}$ *в* $\mathcal{K}$ *полунепрерывно снизу. Аналогично отображение* $(x, K, r) \to \Pi_K(x) \cap \mathring{B}_r(x)$ *из* $\mathbf{R}^d \times \mathfrak{S} \times (\bar{\mathbf{R}}_+ \setminus \{0\})$ *в* $\mathcal{K}$ *полунепрерывно снизу. (Здесь* $\mathring{B}_r(x)$ — *открытый шар с центром* x *и радиусом* $r > 0$, *а* $\bar{\mathbf{R}}_+$ — *расширенная полупрямая* $[0, \infty]$.)

Доказательство. Пусть $\{x_n\} \subset \mathbf{R}^d$ и $\{K_n\} \subset \mathfrak{S}$ — такие последовательности, что $\lim x_n = x$ в $\mathbf{R}^d$ и $\lim K_n = K \in \mathfrak{S}$ в $\mathcal{K}$. В силу включения $\Pi_{K_n}(x_n) \subset K_n$ и предложения 1.2.4, наше первое утверждение будет доказано, если мы покажем, что $\Pi_K(x) \subset \underline{\lim}\, \Pi_{K_n}(x_n)$. Пусть x' — некоторая точка в $\Pi_K(x)$. Докажем, что $x' \in \underline{\lim}\, \Pi_{K_n}(x_n)$.

a) Предположим сначала, что $x' = x$, так что $x \in K$. Для каждого $n > 0$ пусть x'_n — одна из точек, минимизирующих $|x_n - y|$, $y \in K_n$. В частности, $x'_n \in \Pi_{K_n}(x_n)$. Как легко проверить, $x = \lim x'_n$. Поэтому из $x = x'$ и $x'_n \in \Pi_{K_n}(x_n)$ вытекает, что $x' \in \underline{\lim}\, \Pi_{K_n}(x_n)$.

b) Предположим теперь, что $x' \neq x$. Тогда найдется такая открытая окрестность G точки x', что

$$|x - y| > |x - x'| \quad \text{для любого} \quad y \in G \cap K, \quad y \neq x'. \qquad \text{(b)}$$

Допустим, что $x' \notin \underline{\lim}\, \Pi_{K_n}(x_n)$. Тогда существуют подпоследовательность $n_k \to \Pi_{K_{n_k}}(x_{n_k})$ и замкнутый шар $B_\varepsilon(x') \subset G$, такие, что

$$B_\varepsilon(x') \cap \Pi_{K_{n_k}}(x_{n_k}) = \varnothing \qquad \text{(b}')$$

для любого $k > 0$. Поскольку $x' \in K$, то найдется такая последовательность $\{y_{n_k}\}$, что $x' = \lim y_{n_k}$, $y_{n_k} \in K_{n_k}$. Отсюда видно, что если k достаточно велико, то $K_{n_k} \cap B_\varepsilon(x') \neq \varnothing$. Пусть y'_{n_k} — одна из точек, минимизирующих $|x_{n_k} - y|$, $y \in K_{n_k} \cap B_\varepsilon(x')$, т. е. y'_{n_k} — проекция x_{n_k} на $K_{n_k} \cap B_\varepsilon(x') \in \mathfrak{S}$. Тогда $y'_{n_k} \notin \mathring{B}_\varepsilon(x')$, ибо в противном случае точка y'_{n_k} была бы также проекцией точки x_{n_k} на само K_{n_k}, что невозможно ввиду (b′). Поэтому $y'_{n_k} \in \partial B_\varepsilon(x') \cap K_{n_k}$ и $\left|x_{n_k} - y'_{n_k}\right| < \left|x_{n_k} - y_{n_k}\right|$. Пусть теперь y_0—предельная точка последовательности $\{y'_{n_k}\}$. Тогда $y_0 \in \partial B_\varepsilon(x')$, т. е. $y_0 \neq x'$, и $|x - y_0| \leqslant |x - x'|$. Но это невозможно в силу (b). Мы заключаем поэтому, что $x' \in \underline{\lim}\, \Pi_{K_n}(x_n)$. Таким образом, отображение $(x, K) \to \Pi_K(x)$ полунепрерывно снизу.

c) Перейдем ко второму утверждению. Пусть $\{x_n, K_n, r_n\}$ — последовательность, сходящаяся к $\{x, K, r\}$ в $\mathbf{R}^d \times \mathfrak{S} \times (\overline{\mathbf{R}}_+ \setminus \{0\})$, и $x' \in \Pi_K(x) \cap \mathring{B}_r(x)$. Согласно первому утверждению, существует такая последовательность $\{x'_n\} \subset \mathbf{R}^d$, что $x' = \lim x'_n$ и $x'_n \in \Pi_{K_n}(x_n)$ для достаточно больших n. Но из $r = \lim r_n$ в $\overline{\mathbf{R}}_+ \setminus \{0\}$ и $|x - x'| < r$ вытекает, что $|x_n - x'_n| < r_n$ для достаточно больших n, и поэтому $x'_n \in \Pi_{K_n}(x_n) \cap \mathring{B}_{r_n}(x_n)$. Отсюда следует, что $x' \in \underline{\lim}\, \Pi_{K_n}(x_n) \cap \mathring{B}_{r_n}(x_n)$, и лемма доказана.

Для любых $K \in \mathfrak{S}$, $r \in \overline{\mathbf{R}}_+ \setminus \{0\}$, $x \in \mathbf{R}^d$ и любой функции $\varphi \geqslant 0$ на $\mathbf{R}^d$ положим

$$S(K, \varphi, r; x) = \sum_{x' \in \Pi_K(x) \cap B_r(x)} \varphi(x'),$$

$$\mathring{S}(K, \varphi, r; x) = \sum_{x' \in \Pi_K(x) \cap \mathring{B}_r(x)} \varphi(x'),$$

так что, в силу (4.7.7), меры Минковского W_k^K определяются соотношением

$$\int S(K, \varphi, r; x)\, dx = \sum \binom{d}{k} r^k \int W_k^K(dx)\, \varphi(x). \qquad (4.7.7')$$

Предложение 4.7.5. *Для любой полунепрерывной снизу функции $\varphi \geqslant 0$ отображение $(K, r) \to \int S(K, \varphi, r; x)\, dx$ полунепрерывно снизу на $\mathfrak{S} \times (\overline{\mathbf{R}}_+ \setminus \{0\})$.*

Доказательство. Пусть $K \in \mathfrak{S}$ и $r > 0$. Множество тех точек x, для которых $\Pi_K(x) \cap \partial \overline{B}_r(x) \neq \varnothing$, имеет нулевую меру Лебега, и, следовательно,

$$\int S(K, \varphi, r; x)\, dx = \int \mathring{S}(K, \varphi, r; x)\, dx.$$

С другой стороны, согласно лемме 4.7.6, отображение $(K, r) \to \mathring{S}(K, \varphi, r; x)$ полунепрерывно снизу на $\mathfrak{S} \times (\overline{\mathbf{R}}_+ \setminus \{0\})$ для любого фиксированного $x \in \mathbf{R}^d$. Поэтому, если $\{K_n, r_n\} \subset \mathfrak{S} \times$

$\times(\bar{\mathbf{R}}_+ \setminus \{0\})$ — последовательность, сходящаяся к $(K, r) \in \mathfrak{S} \times \times (\bar{\mathbf{R}}_+ \setminus \{0\}$, то

$$\mathring{S}(K, \varphi, r; x) \leqslant \varliminf \mathring{S}(K_n, \varphi, r_n; x)$$

и по лемме Фату — Лебега

$$\int \mathring{S}(K, \varphi, r; x)\, dx \leqslant \varliminf \int \mathring{S}(K_n, \varphi, r_n; x)\, dx,$$

откуда и вытекает доказываемое утверждение.

Следствие. *Для любой функции $\varphi \geqslant 0$, полунепрерывной снизу на $\mathbf{R}^d$, и каждого $k = 0, 1, \ldots, d$, отображение $K \to \int W_k^K(dx)\varphi(x)$ из $\mathfrak{S}$ в $\bar{\mathbf{R}}_+$ измеримо (относительно σ-алгебры, индуцированной на $\mathfrak{S}$ борелевской σ-алгеброй σ_f).*

Доказательство. В силу предложения 4.7.5 и формулы (4.7.7′) отображение $(K, r) \to \sum \binom{d}{k} r^k \int \varphi W_k^K$ измеримо. Беря конечные разности по r, убеждаемся в справедливости нашего утверждения.

Продолжим теперь отображение $F \to W_k^F$ на следующий класс $\mathfrak{S}_f \subset \mathcal{F}$:

Определение 4.7.1. *Через $\mathfrak{S}_f$ мы будем обозначать класс таких замкнутых множеств $F \in \mathcal{F}$, которые представимы в виде $F = \bigcup F_i$ для некоторого локально конечного семейства $\{F_i, i \in I\} \subset \subset C(\mathcal{F})$ (т. е. каждое F_i, $i \in I$, замкнуто и выпукло и для любого $K \in \mathcal{K}$ пересечение $F_i \cap K$ непусто лишь для конечного числа индексов $i \in I$).*

Для произвольной точки $x \in \mathbf{R}^d$ множество $\Pi_F(x)$ ее проекций на заданное множество $F \in \mathfrak{S}_f$ определяется точно так же, как и в случае $F \in \mathfrak{S}$. В частности, $\Pi_F(x)$ локально конечно и потому замкнуто, а $\Pi_F(x) \cap \mathring{B}_r(x)$ конечно $(0 < r < \infty)$. Следовательно, для любой функции $\varphi \in C_{\mathcal{K}}(\mathbf{R}^d)$ интеграл $\int S(F, \varphi, r; x)\, dx$ конечен, и (4.7.7′) всегда выполняется. Отметим, что соответствующие меры Радона W_k^F $(k = 0, 1, \ldots, d)$ теперь уже не обязательно ограничены. Лемма 4.7.6 и предложение 4.7.3 сохраняют силу, так что отображение $F \to \int \varphi W_k^K$ из $\mathfrak{S}_f$ в $\mathbf{R}_+$ измеримо для любой положительной функции $\varphi \in C_{\mathcal{K}}(\mathbf{R}^d)$. Далее справедлива

Лемма 4.7.7. *$\mathfrak{S}_f$ является измеримым подмножеством в $\mathcal{F}$.*

Доказательство. Пусть B_n — замкнутый шар с центром 0 и радиусом $n>0$ (n целое), а $\mathfrak{S}_{m,n} \subset \mathcal{F}$ — класс таких замкнутых множеств $F \in \mathcal{F}$, что $F \cap B_n$ является объединением $m' \leqslant m$ компактных выпуклых множеств. Тогда множество $\mathfrak{S}_{m,n}$ измеримо как прообраз замкнутого подмножества пространства $\mathcal{K}(B_n)$ при полунепрерывном сверху отображении $F \to F \cap B_n$. Отсюда вытекает, что $\mathfrak{S}_f = \bigcap_n \bigcup_m \mathfrak{S}_{m,n} \in \sigma_f$.

При $F=\varnothing$ мы полагаем $W_k^F=0$. Подытоживая предыдущие результаты, мы можем записать следующую теорему.

Теорема 4.7.2. *Для любых $F \in \mathfrak{S}_f$ и $k=0, 1, \ldots, d$ существует такая мера Радона $W_k^F \geqslant 0$ на $\mathbf{R}^d$, что для каждой полунепрерывной снизу функции $f \geqslant 0$ и каждого $r>0$*

$$\int S(F, f, r; x)\, dx = \sum_{k=0}^{d} \binom{d}{k} r^k \int W_k^F(dx) f(x)$$

и $W_0^F = 1_F\, dx$, $\operatorname{supp} W_k^F \subset \partial F$, $k=1, \ldots, d$. Далее, отображение $(F, r) \to \int S(F, f, r; x)\, dx$ полунепрерывно снизу и для каждого $k=0, 1, \ldots, d$ отображение $F \to \int f(x) W_k^F(dx)$ измеримо на $\mathfrak{S}_f$.

Следствие. *Пусть A — некоторое СЗМ, п. н. принадлежащее $\mathfrak{S}_f$, т. е. $P(A \in \mathfrak{S}_f)=1$. Тогда для каждого $k=0, 1, \ldots, d$ существует случайная мера $W_k^A \geqslant 0$, определяемая для почти всякого $F \in \mathcal{F}$ и всякой функции $\varphi \in \boldsymbol{C}_{\mathcal{K}}(\mathbf{R}^d)$ посредством отображения $F \to \int \varphi(x) W_k^F(dx)$.*

Замечание. Если $E\left(\int \varphi W_k^A\right) < \infty$ для любой функции $\varphi \in \boldsymbol{C}_{\mathcal{K}}^{+}(\mathbf{R}^d)$ (т. е. любой непрерывной положительной функции с компактным носителем в $\mathbf{R}^d$), то отображение $\varphi \to E\left(\int \varphi W_k^A\right)$ является положительным линейным функционалом на $\boldsymbol{C}_{\mathcal{K}}$. Поэтому существует такая мера Радона $E(W_k) \geqslant 0$, называемая ожидаемой мерой СЗМ A, что $E\left(\int \varphi W_k^A\right) = \int \varphi E(W_k)$. Однако условие $E(\varphi W_k^A) < \infty$ не обязательно выполняется.

Если СЗМ A *стационарно* и выполнено указанное выше условие, то ожидаемая мера $E(W_k)$ инвариантна относительно сдвигов и, значит, пропорциональна мере Лебега. Следовательно, существует такое число $w_k \geqslant 0$, называемое *плотностью функционала Минковского* W_k (относительно A), что $E(W_k(dx)) =$

$=w_k\,dx$. Если условие $E\left(\int \varphi(x)\,W_k^A(dx)\right) < \infty$ выполняется не для всех функций $\varphi \in C_{\mathscr{K}}^+$, то, как нетрудно видеть, $E\left(\int \varphi(x) \times \times W_k^A(dx)\right) = \infty$ для любой функции $\varphi \in C_{\mathscr{K}}^+(\mathrm{R}^d)$, $\varphi \neq 0$, и мы можем положить $w_k = \infty$.

Дальнейшее обобщение

Если $F \in \mathscr{F}$ — произвольное замкнутое множество, не обязательно из класса $\mathfrak{S}_f$, то по-прежнему оказывается возможным определить такие положительные линейные отображения $\varphi \to W_k^F(\varphi)$ $(k = 0, 1, \ldots, d)$ из $C_{\mathscr{K}}^+$ в $\overline{\mathrm{R}}_+$, что для любой функции $\varphi \in C_{\mathscr{K}}^+$ отображение $F \to W_k^F(\varphi)$ будет продолжением отображения $F \to \int \varphi(x)\,W_k^F(dx)$, первоначально определенного на $\mathfrak{S}_f$. Однако это продолжение уже отнюдь не является единственно возможным (см., например, книгу Федерера, 1969). Отметим также, что $W_k^F(\varphi)$ может принимать бесконечные значения, так что отображение $F \to W_k^F(\varphi)$ не будет мерой Радона. Докажем прежде всего следующую лемму.

Лемма 4.7.8. *Пусть Ω — ЛКС-пространство, а f — отображение из Ω в расширенную прямую $\overline{\mathrm{R}} = [-\infty, +\infty]$. Положим $\gamma = \{(\omega, x)\colon \omega \in \Omega,\ x \in \overline{\mathrm{R}},\ x < f(\omega)\}$ и $\Gamma = \{(\omega, x)\colon \omega \in \Omega,\ x \in \overline{\mathrm{R}},\ x \leqslant f(\omega)\}$.*

a) Отображение f полунепрерывно снизу (соотв. сверху) тогда и только тогда, когда γ (соотв. Γ) открыто (соотв. замкнуто) в $\Omega \times \overline{\mathrm{R}}$.

b) Отображение f обладает наименьшей полунепрерывной сверху верхней гранью и наибольшей полунепрерывной снизу нижней гранью.

c) Пусть f' — полунепрерывное снизу (соотв. сверху) отображение некоторого подпространства Ω', плотного в Ω, в $\overline{\mathrm{R}}$. Тогда f' допускает наибольшее полунепрерывное снизу (соотв. наименьшее полунепрерывное сверху) продолжение f на Ω. Кроме того, для любого $\omega \in \Omega$, $\omega \notin \Omega'$, существует такая последовательность $\{\omega_n\} \subset \Omega'$, для которой $\omega = \lim \omega_n$ и $f(\omega) = \lim f(\omega_n)$.

Доказательство. Достаточно доказать утверждения, относящиеся к полунепрерывным сверху функциям (при замене $f \to -f$ множество γ заменяется на $-\complement\Gamma$, и обратно).

a) Пусть f — полунепрерывная сверху функция, и пусть $\{\omega_n, x_n\} \subset \Omega \times \overline{\mathrm{R}}$ — такая последовательность, для которой

$\lim(\omega_n, x_n) = (\omega, x)$ и $(\omega_n, x_n) \in \Gamma$, т. е. $x_n \leqslant f(\omega_n)$ при любом $n > 0$. Тогда $x \leqslant \underline{\lim} f(\omega_n) \leqslant \overline{\lim} f(\omega_n) \leqslant f(\omega)$, поскольку f полунепрерывна сверху, и $(\omega, x) \in \Gamma$. Таким образом, множество Γ замкнуто.

Обратно, пусть Γ — замкнутое множество в $(\Omega \times \overline{\mathbf{R}})$, а $\{\omega_n\} \subset \Omega$ — последовательность, для которой $\lim \omega_n = \omega$ в Ω. Из $(\omega_n, f(\omega_n)) \in \Gamma$ вытекает, что $(\omega, \overline{\lim} f(\omega_n)) \in \Gamma$ (ибо Γ замкнуто), т. е. $\overline{\lim} f(\omega_n) \leqslant f(\omega)$. Таким образом, функция f полунепрерывна сверху.

b) Функция f определяется своим *подграфиком* $\Gamma_f = \{(\omega, x), \omega \in \Omega, x \in \overline{\mathbf{R}}, x \leqslant f(\omega)\} \subset \Omega \times \overline{\mathbf{R}}$, причем неравенство $f \leqslant g$ равносильно включению $\Gamma_f \subset \Gamma_g$. Поэтому заданная функция f имеет наименьшую полунепрерывную сверху верхнюю грань, подграфиком которой служит замыкание $\overline{\Gamma}_f$ подграфика Γ_f.

c) Пусть $\Gamma' = \{(\omega', x), \omega' \in \Omega', x \in \overline{\mathbf{R}}, x \leqslant f(\omega')\}$ — подграфик некоторой полунепрерывной сверху функции f': $\Omega' \to \overline{\mathbf{R}}$, так что множество Γ' замкнуто в $\Omega' \times \overline{\mathbf{R}}$. Тогда существует наименьшее замкнутое множество $\Gamma \subset \Omega \times \overline{\mathbf{R}}$, такое, что $\Gamma \cap (\Omega' \times \overline{\mathbf{R}}) = \Gamma'$, а именно замыкание $\overline{\Gamma}'$ множества Γ' в $\Omega \times \overline{\mathbf{R}}$.

Для всякого $\omega \in \Omega$ множество $\{x: (\omega, x) \in \overline{\Gamma}'\}$ непусто, поскольку Ω' плотно в Ω. Если положить $f(\omega) = \sup\{x: (\omega, x) \in \overline{\Gamma}'\}$, то f будет наименьшим полунепрерывным сверху продолжением f'. Пусть $\omega \notin \Omega'$, т. е. $(\omega, f(\omega)) \notin \Gamma'$. Тогда найдется последовательность $\{(\omega_n, x_n)\} \subset \Gamma'$, для которой $(\omega, f(\omega)) = \lim(\omega_n, x_n)$ (поскольку $\overline{\Gamma}'$ — замыкание Γ') и, значит, $f(\omega) = \lim f(\omega_n)$.

Класс $\mathfrak{S}_f$ содержит в себе класс $\mathcal{Y}$ конечных подмножеств в $\mathbf{R}^d$ и потому плотен в $\mathcal{F}$, в силу следствия 2 теоремы 1.2.2. Для любой полунепрерывной снизу функции $f \geqslant 0$ отображение

$$(F, r) \to \int S(F, f, r; x)\, dx = \sum_{k=0}^{d} \binom{d}{k} r^k \int W_k^F(dx) f(x)$$

из $\mathfrak{S}_f \times (\overline{\mathbf{R}}_+ \setminus \{0\})$ в $\overline{\mathbf{R}}_+$, как мы уже видели, полунепрерывно снизу, так что, согласно доказанной лемме, оно допускает наибольшее полунепрерывное снизу продолжение на $\mathcal{F} \times (\overline{\mathbf{R}}_+ \setminus \{0\})$. Итак, справедливо

Предложение 4.7.6. *Для каждого $k = 0, 1, \ldots, d$ существует такое отображение $(F, \varphi) \to W_k^F(\varphi)$ из $\mathcal{F} \times C_{\mathcal{K}}^+$ в $\overline{\mathbf{R}}_+$, что выполняются следующие утверждения:*

a) *Для любого* $F \in \mathcal{F}$ *отображение* $\varphi \to W_k^F(\varphi)$ *положительно линейно. Далее,* $W_0^F(\varphi) = \int_F \varphi(x)\,dx$ *и* $W_k^F(\varphi) = 0$ $(k = 1, \ldots, d)$, *если* $\operatorname{supp}\varphi \cap \partial F = \varnothing$. *Кроме того, существует такая последовательность* $\{F_n\} \subset \mathfrak{S}_f$, *что* $F = \lim F_n$, $W_k^F(\varphi) = \lim W_k^{F_n}(\varphi)$.

b) *Отображение* $(F, \varphi) \to W_k^F(\varphi)$ *является продолжением отображения* $(F, \varphi) \to \int W_k^F(dx)\varphi(x)$ *из* $\mathfrak{S}_f \times C_{\mathcal{X}}^+$ *в* R_+.

c) *Для каждого* $k = 0, 1, \ldots, d$ *и каждой функции* $\varphi \in \mathbf{C}_{\mathcal{X}}^+$ *отображение* $F \to W_k^F(\varphi)$ *измеримо и* $(F, r) \to \sum \binom{d}{k} r^k W_k^F(\varphi)$ *есть наибольшее полунепрерывное снизу продолжение отображения* $(F, r) \to \sum \binom{d}{k} r^k W_k^F(\varphi)$, *первоначально определенного на* $\mathfrak{S}_f \times \mathbf{R}_+ \setminus \{0\}$.

В силу этого предложения, соответствующие случайные функционалы $W_k^A(\varphi)$ существуют также для любого СЗМ A. В частности, $\varphi \to dW_1^A(\varphi)$ представляет собой обобщенный вариант случайной поверхностной меры СЗМ A и приводит, в случае когда A стационарно, к понятию относительной площади поверхности. К сожалению, как отмечалось выше, указанное продолжение не является единственно возможным.

ГЛАВА 5

ПОЛУМАРКОВСКИЕ СЗМ в $\mathbf{R}^d$

Исследуемое в этой главе свойство полумарковости тесным образом связано с выпуклостью. Хотя существуют полумарковские СЗМ, и не являющиеся безгранично делимыми, мы будем главным образом изучать полумарковские безгранично делимые случайные замкнутые множества (сокращенное ПБМ).

В первом параграфе приводятся общие определения и свойства и затем дается характеризация ПБМ в терминах пуассоновских процессов на $C(\mathscr{F}')$, из которой вытекает, что этот класс СЗМ можно отождествить с классом C-аддитивных емкостей Шоке. Во втором параграфе показывается, что в случае $d=1$ стационарные полумарковские СЗМ — это просто альтернирующие процессы восстановления. В третьем параграфе мы исследуем один более общий пример, а именно булеву модель с компактными выпуклыми гранулами, или, что то же самое, пуассоновский процесс, сосредоточенный на $C(\mathscr{K}')$, и для стационарного случая даем интерпретацию соответствующих параметров.

В § 5.4 дана общая характеризация стационарных ПБМ. Из нее следует, что любое стационарное ПБМ представляет собой объединение случайных цилиндров, основаниями которых служат булевы модели с выпуклыми гранулами в соответствующих пространствах, так что произвольные стационарные ПБМ могут быть построены из двух прототипов: пуассоновских сетей и булевых моделей. В частности, СЗМ является пуассоновской сетью тогда и только тогда, когда оно устойчиво, стационарно и обладает полумарковским свойством. Далее, исследуются ковариации и линейные гранулометрии; в частности, как оказывается, функция $h \to Q(h)$ всегда положительно определена на $\mathbf{R}^d$.

5.1. ПОЛУМАРКОВСКОЕ СВОЙСТВО

Пусть C, K и $K' \in \mathscr{K}$. Мы говорим, что множества K и K' *разделяются* множеством C, если для любых $x \in K$ и $x' \in K'$ отрезок $[x, x'] = \{(1-\lambda)x + \lambda x';\ 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\}$ пересекается с компактным множеством C (см. определение 4.2.1). В частности, если K или K' пусто, то K и K' разделяются любым $C \in \mathcal{K}$. С другой стороны, если $C = \varnothing$, то K и K' разделяются C тогда и только тогда, когда либо K, либо K' пусто.

Напомнив это понятие, введем следующее определение.

Определение 5.1.1. *Пусть A — некоторое СЗМ, а Q — его сопровождающий функционал на $\mathcal{K}$, определяемый соотношением $Q(K) = P(\mathcal{F}^K)$.. Множество A называется полумарковским, если*

$$Q(K \cup K' \cup C)\, Q(C) = Q(K \cup C)\, Q(K' \cup C) \tag{5.1.1}$$

для любых K, K' и $C \in \mathcal{K}$, таких, что K и K' разделяются множеством C.

Дадим интерпретацию соотношения (5.1.1). Если $Q(C) = 0$, то (5.1.1) всегда выполняется. Если $Q(C) \neq 0$, то (5.1.1) выполняется в том и только том случае, если *СЗМ $A \cap K$ и $A \cap K'$ условно независимы при условии выполнения события $\mathcal{F}^C$* (т. е. при условии, что $A \cap C = \varnothing$).

Доказательство. Пусть A' — условное подмножество СЗМ A при условии $\mathcal{F}^C$, а P — соответствующая ему вероятность на σ_f, т. е. $P'(\mathcal{A}) = P'(\mathcal{A} \cap \mathcal{F}^C)/Q(C)$, $\mathcal{A} \in \sigma_f$. Тогда Q': $K_1 \to P'(\mathcal{F}^{K_1}) = Q(K_1 \cup C)/Q(C)$ будет его сопровождающим функционалом на $\mathcal{K}$. Поэтому (5.1.1) можно переписать в виде $Q'(K \cup K') = Q'(K)\, Q'(K')$. Пусть K_1, $K_1' \in \mathcal{K}$ таковы, что $K_1 \subset K$ и $K_1' \subset K'$. Множества K_1 и K_1' и подавно разделяются C, и из (5.1.1) вытекает, что $Q'(K_1 \cup K_1') = Q'(K_1)\, Q'(K_1')$, т. е.

$$P'\left(\left\{A' \cap K \in \mathcal{F}^{K_1}\right\} \cap \left\{A' \cap K' \in \mathcal{F}^{K_1'}\right\}\right) = \\ = P'\left(A' \cap K \in \mathcal{F}^{K_1}\right) \times P'\left(\left\{A' \cap K' \in \mathcal{F}^{K_1'}\right\}\right).$$

Используя (2.3.5), получаем отсюда, что СЗМ $A' \cap K$ и $A' \cap K'$ независимы.

Отметим также следующий простой результат.

Предложение 5.1.1. *Пусть A — полумарковское СЗМ, а $K_0 \in C(\mathcal{K}')$. Тогда дилатация $A \oplus \check{K}_0$ является полумарковским СЗМ.*

Доказательство. Если K и $K' \in \mathcal{K}$ разделяются множеством $C \in \mathcal{K}$, а $K_0 \in C(\mathcal{K}')$, то, как нетрудно видеть, $K \oplus K_0$ и $K' \oplus K$ разделяются множеством $C \oplus K_0$. Далее, сопровождающий функционал для $A \oplus \check{K}_0$ имеет вид Q_{K_0}: $K \to Q_{K_0}(K) = Q(K \oplus K_0)$. Поэтому, в силу (5.1.1),

$$
\begin{aligned}
Q_{K_0}(K \cup K' \cup C)\, Q_{K_0}(C) &= Q((K \cup K' \cup C) \oplus K_0)\, Q(C \oplus K_0) = \\
&= Q((K \oplus K_0) \cup (K' \oplus K_0) \cup (C \oplus K_0))\, Q(C \oplus K_0) = \\
&= Q_{K_0}(K \cup C)\, Q_{K_0}(K' \cup C),
\end{aligned}
$$

т. е. СЗМ $A \oplus \check{K}_0$ является полумарковским.

Для дальнейшего будет удобно положить $\psi = -\log Q$, так что в соответствии с (5.1.1) полумарковское свойство будет характеризоваться соотношением

$$
\psi(K \cup K' \cup C) + \psi(C) = \psi(K \cup C) + \psi(K' \cup C). \tag{5.1.2}
$$

Если K, K' и $K \cup K' \in C(\mathscr{K})$, то, как нам известно из предложения 4.2.1, множества K и K' разделяются своим пересечением, и в этом случае (5.1.2) приводит к соотношению $\psi(K \cup K') + \psi(K \cap K') = \psi(K) + \psi(K')$. Иначе говоря, *функционал $\psi = -\log Q$, соответствующий полумарковскому СЗМ, C-аддитивен на $C(\mathscr{K})$.*

Далее, если полумарковское СЗМ *стационарно* и *изотропно*, то его функционал ψ инвариантен относительно эвклидовых движений в $\mathbf{R}^d$. Поэтому, согласно теореме 4.1.1. существуют такие константы $\beta_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, d$, что

$$
\psi(K) = -\log Q(K) = \sum_{i=1}^{d} \beta_i W_i(K) \quad [K \in C(K)] \tag{5.1.3}
$$

(здесь W_i — соответствующий функционал Минковского).

Полумарковское СЗМ вовсе не обязано быть безгранично делимым по отношению к операции $\cup$. С одним простым контрпримером мы познакомимся в § 5.2. Тем не менее основной целью настоящей главы является исследование именно безгранично делимого случая, (т. е. исследование ПБМ), поскольку в этом случае полумарковское свойство эквивалентно C-аддитивности. Более точно, справедлива

Теорема 5.1.1. *Пусть A — некоторое БДМ без фиксированных точек, и $\psi = -\log \psi$ — соответствующий ему функционал* (т. е. $\psi(K) = -\log P(\mathscr{F}^K)$, $K \in \mathscr{K}$). *Тогда следующие три условия эквивалентны:*

a) *A — полумарковское.*

b) *Функционал ψ C-аддитивен на $C(\mathscr{K})$.*

c) *A является объединением множеств пуассоновского процесса $\mathscr{A}$ на $C(\mathscr{F}')$.*

Доказательство. Как мы уже видели, из a) вытекает b). Пусть выполняется b). Согласно предложению 3.2.1, БДМ A является объединением множеств пуассоновского процесса[1] на $\mathcal{F}'$, соответствующего σ-конечной мере θ, для которой $\theta(\mathcal{F}_K) = \psi(K)$. Пусть последовательность $\{B_n\} \subset \mathcal{K}$ такова, что $B_n \subset \overset{\circ}{B}_{n+1}$, $B_n \uparrow \mathbf{R}^d$. Можно считать, что $\psi(B_n) > 0$ для достаточно больших n (если это не так, то $A = \varnothing$ п. н. и условие c) выполняется). Тогда $K \to \psi(K \cap B_n)/\psi(B_n)$ является емкостью Шоке, соответствующей вероятности P_n на σ_f. Но функционал ψ C-аддитивен, так что таковым же будет и $K \to \psi(K \cap B_n)/\psi(B_n)$. Поэтому, согласно теореме 4.2.1, вероятность P_n сосредоточена на $C(\mathcal{F}')$. Значит, и σ-конечная мера θ сосредоточена на $C(\mathcal{F}')$, и условие c) выполнено.

Наконец, если выполнено c), то в силу теоремы 4.2.1

$$\psi((K' \cup K \cup C) \cap B_n) + \psi(C \cap B_n) = \psi((K \cup C) \cap B_n) + \psi((K' \cup C) \cap B_n),$$

если K и K' разделяются множеством C. Устремляя $n \uparrow \infty$, приходим к (5.1.2), так что A есть ПБМ.

В соответствии с этой теоремой пуассоновские сети, изучавшиеся в § 3.5, представляют собой ПБМ. Мы приведем и более общие примеры и прежде всего рассмотрим случай $d = 1$, т. е. полумарковские СЗМ на эвклидовой прямой. Заметим, что если A — полумарковское СЗМ (соотв. ПБМ), а V — линейное многообразие размерности $k < d$ (отождествляемое с эвклидовым пространством $\mathbf{R}^k$), то $A \cap V$ — полумарковское СЗМ (соотв. ПБМ) в $\mathbf{R}^k$. Оно называется полумарковским СЗМ (соотв. ПБМ), *индуцированным* A на V. Указанный факт справедлив ввиду того, что (5.1.1) очевидным образом остается верным и для $A \cap V$ при K, K' и C, содержащихся в V. В частности, результаты, касающиеся одномерного случая можно применять и к полумарковским СЗМ, индуцируемым на прямых в $\mathbf{R}^d$ произвольным стационарным полумарковским СЗМ.

5.2. СТАЦИОНАРНЫЕ ПОЛУМАРКОВСКИЕ СЗМ НА R

Пусть A — *стационарное* полумарковское СЗМ (не обязательно безгранично делимое) на эвклидовой прямой $\mathbf{R}$. Тогда вероятность $Q([x, x+h])$ того, что отрезок $[x, x+h] = \{x + \lambda h, 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\}$ не пересечет A, не зависит от точки $x \in \mathbf{R}$, а зависит только от h, так что мы будем обозначать ее $Q(h)$. Из полумарковости очевидным образом вытекает, что

$$qQ(h_1 + h_2) = Q(h_1)\,Q(h_2) \quad [h_1, h_2 \geqslant 0,\ q = Q(0)], \tag{5.2.1}$$

[1] То есть для каждой реализации процесса оно является объединением множеств, составляющих реализацию процесса. — *Прим. перев.*

поскольку отрезки $[0, h_1]$ и $[h_1, h_1+h_2]$ разделяются точкой h_1. Далее, функция $h \to Q(h)$ не возрастает на $\mathbf{R}_+$, так что

$$Q(h) = q \exp(-\theta h) \tag{5.2.2}$$

(здесь $q = Q(0) \geqslant 0$, а θ — неотрицательная константа). Если $q = 0$, то $A = \mathbf{R}$ п. н. Мы будем предполагать, что $q > 0$. Если $\theta = 0$, то $Q(h) = q$ — константа, и $P(A = \varnothing) = q$, $P(A = \mathbf{R}) = p = 1 - q$. В связи с этим предположим, что и $\theta > 0$. Если $p = 1 - q = 0$, то, как нетрудно проверить, используя полумарковское свойство, A является *пуассоновским точечным процессом* на $\mathbf{R}$. Поэтому в дальнейшем мы предполагаем, что $0 < q < 1$.

В соответствии с обозначениями § 2.7 пусть $P(h)$ — вероятность того, что отрезок $[x, x+h]$ содержится в A, $h \to C(h)$ — ковариация, т. е. $C(h) = P(x \in A,\ x+h \in A)$, а $p - F(h) = P(x \in A_{[0,h]})$ — вероятность того, что заданная точка $x \in \mathbf{R}$ принадлежит заполнению множества A отрезком $[0, h]$. Иначе говоря, $p - F(h)$ — это вероятность события {существует отрезок длины $\geqslant h$, содержащийся в A и содержащий x}. Как мы видели в § 2.7, $P(h)$ имеет при любых $h > 0$ производную $P'(h)$ и

$$p - F(h) = P(h) - hP'(h) \quad (h > 0). \tag{5.2.3}$$

Вовсе не очевидно, что всегда существует производная справа $P'(0)$, однако оказывается, что это так. Если $0 \in A$, то пусть $L = \sup\{h\colon h \geqslant 0,\ [0, h] \subset A\}$. При условии $0 \in A$ случайная величина L имеет закон распределения $P(L \geqslant h) = (1/p) P(h)$. Этот закон не может иметь атома в точке 0, поскольку если $\alpha = P(L = 0)$, то $2p\alpha$ будет вероятностью того, что 0 принадлежит границе ∂A, и если $\alpha \neq 0$, то число N точек границы, попадающих в $[0, 1]$, имеет бесконечное математическое ожидание, $E(N) = \infty$. Однако из (5.2.2) и полумарковского свойства вытекает, что $E(N) \leqslant 2\theta$ (т. е. $E(N)$ меньше удвоенного математического ожидания числа попадающих в $[0, 1]$ точек пуассоновского процесса, имеющего интенсивность θ), а $\theta = \infty$ приводит к $Q(h) = 0$ для всех $h > 0$ и, значит, к $q = Q(0) = 0$, в силу полунепрерывности Q снизу.

Иначе говоря, существует такая функция плотности $\mathfrak{S} > 0$, что

$$P(h) = p \int_h^{\infty} \mathfrak{S}(h)\, dh. \tag{5.2.4}$$

При условии $0 \notin A$ мы можем определить две случайные величины $L_0 = \sup\{x\colon [0, x] \cap A = \varnothing\}$ и $L_1 = \sup\{y\colon [L_0, L_0 + y] \subset A\}$. В частности, $L_1 = 0$, если связная компонента A, содержащая L_0, состоит из одной точки. Эти две случайные величины в силу полумарковского свойства независимы. Согласно (5.2.2), закон распределения L_0 экспоненциальный, с плотностью $\theta \exp(-\theta h)$ $(h \geqslant 0)$. Положим $F_1(x) = P(L_1 < x)$. Чтобы вычислить $F_1(x)$, $x > 0$, рассмотрим событие $\{x \notin A,\ x+h \in A$ и в интервале $[x, x+h]$ содержится только одна граничная точка$\}$. Вероятность этого события равна $qP(L_0 + L_1 \geqslant h)$. Изменяя ориентацию оси x, мы замечаем, что то же самое событие имеет вероятность, равную $pP(L_0 + L_1' \geqslant h)$, где L_1' — случайная величина с плотностью $\varpi(x)$. Отсюда вытекает, что

$$q\theta \int_0^h (1 - F_1(x)) \exp(-\theta(h-x))\, dx = p \int_0^h \varpi(x) \exp(-\theta(h-x))\, dx$$

и поэтому

$$1 - F_1(x) = \frac{p}{q\theta} \varpi(x). \tag{5.2.5}$$

В частности, случайная величина L_1 имеет *конечное математическое ожидание* m_1, равное

$$m_1 = \int_0^\infty (1 - F_1(x))\, dx = \frac{p}{q\theta}.$$

Если положить $m_0 = 1/\theta = E(L_0)$, то из последнего соотношения следует, что $p = m_1/(m_0 + m_1)$, $q = m_0/(m_0 + m_1)$, $\theta q = 1/(m_0 + m_1)$.

Вероятность того, что бесконечно малый интервал $(x, x + dx)$ содержит выступающую точку, равна $\theta q\, dx$. Поэтому математическое ожидание числа выступающих точек в единичном интервале равно $q\theta = 1/(m_0 + m_1)$. При $x \downarrow 0$ левая часть (5.2.5) сходится к $P(L_1 > 0) = 1 - \beta$, где $\beta = P(L_1 = 0)$ обозначает возможный атом закона F_1 в точке 0. В силу (5.2.4) имеем также

$$\frac{p - P(h)}{h} = \frac{\theta q}{h} \int_0^h (1 - F_1(x))\, dx$$

и $(1 - F_1(x)) \uparrow (1 - \beta)$ при $x \downarrow 0$. Таким образом, $P(h)$ действительно обладает при $h = 0$ производной справа, равной

$$P'_+(0) = \theta q(1 - \beta) = -\theta q P(L_1 > 0).$$

Заметим, что $P(h)$ и $Q(h)$ имеют в точке $h = 0$ одну и ту же производную справа тогда и только тогда, когда у F_1 нет атома в точке 0. В общем случае $Q'_+(0) = -\theta q$ и $P'_+(0) = -\theta q(1 - \beta)$ не равны между собой, *Стационарное полумарковское СЗМ A полностью определяется заданием параметра θ и закона F_1*, поскольку (в силу полумарковского свойства) A, рассматриваемое как случайный процесс, начинается заново всякий раз, как точка x выходит из множества A (см. Феллер, 1966, т. 2, стр. 446—448). Иными словами, A является стационарным процессом восстановления на $\mathbf{R}$ с двумя состояниями, или стационарным разбиением $\mathbf{R}$ последовательными отрезками. Случайные длины этих отрезков независимы и поочередно имеют закон распределения F_1 и экспоненциальный закон $\theta \exp(-\theta h)$.

Обратно, всякий такой процесс восстановления эргодичен, и его можно сделать стационарным, надлежащим образом выбрав начальное распределение (так что он становится стационарным полумарковским СЗМ), в том и только том случае, если F_1 имеет конечное математическое ожидание $m_1 = \int_0^\infty (1-F_1(x))\,dx < \infty$. В этом случае $m_0 = 1/\theta$, $p = m_1/(m_0 + m_1)$,

$$Q(h) = q \exp(-\theta h) \text{ и } P(h) = q\theta \int_h^\infty (1 - F_1(x))\,dx.$$

В соответствии с терминологией § 2.1 закон F_1 есть *линейная натуральная гранулометрия* СЗМ A. Взвешенная (с учетом длин) линейная гранулометрия задается вероятностью того, что заданная точка принадлежит отрезку длины $\geqslant h$, содержащемуся в A (т. е. $x \in A_{[0,h]}$), и эта вероятность равна $p - F(h)$. Из (5.2.3) и (5.2.5) получаем, что $F(dh) = h\theta q F_1(dh) = (ph/m_1) F_1(dh)$. Этот результат подчеркивает взвешенный с учетом длин характер гранулометрии F, поскольку частота «каждого» значения h длины секущей берется с весом, пропорциональным этому h.

Рассмотрим теперь *ковариацию* $C(h) = P(\{x \in A\} \cap \{x + h \in A\})$. Она связана с $P(h)$ уравнением свертки. Действительно, событие $\{0 \in A \text{ и } h \notin A\}$, вероятность которого равна $p - C(h)$, эквивалентно событию $\{L_1' < h \text{ и } h \notin A\}$, где $L_1' = \sup\{x\colon [0, x] \subset A\}$. В силу полумарковости отсюда вытекает, что

$$p - C(h) = -\frac{1}{q} \int_0^h P'(x)(1 - 2p + C(h-x))\,dx, \tag{5.2.6}$$

или, что то же самое,

$$p - C(h) = \theta \int_0^h (1 - F_1(x))(1 - 2p + C(h-x))\,dx.$$

Ковариация $C(h)$ имеет при $h=0$ *производную справа* $C'_+(0)=P'_+(0)=-\theta q(1-\beta)$. Это следует из очевидного неравенства $p\geqslant C(h)\geqslant P(h)$, которое дает $0\leqslant p-C(h)\leqslant p-P(h)$, так что после подстановки в (5.2.6) получаем

$$\frac{p-P(h)}{h}\geqslant\frac{p-C(h)}{h}\geqslant\frac{\theta}{h}\int_0^h(1-F_1(x))(1-2p+P(h-x))\,dx,$$

откуда и вытекает, что $(p-P(h))/h=\lim(p-C(h))/h$ при $h\downarrow 0$.

Полумарковское СЗМ A не обязательно безгранично делимо. Например, пусть F_1 — закон распределения случайной величины $L_1=l$ п. н., где $l\geqslant 0$ — заданная постоянная. Тогда соответствующее стационарное полумарковское СЗМ не является безгранично делимым.

Пусть A — стационарное ПБМ. Как мы увидим в дальнейшем (в рассматриваемом сейчас одномерном случае этот факт очевиден), A представляет собой объединение замкнутых интервалов, случайные длины которых независимы и распределены по одному и тому же закону G. Более того, начала (т. е. левые концы) этих интервалов образуют пуассоновский точечный процесс с плотностью θ. Отсюда следует, что

$$q=\exp(-\theta\mu)=\exp\left[-\theta\int_0^\infty(1-G(x))\,dx\right],$$

где μ — средняя длина этих „первичных“ интервалов, т. е. математическое ожидание для закона G. В частности, $A=\mathbf{R}$ п. н., если $\mu=\infty$. Предположим, что $\mu<\infty$. Тогда, как нетрудно получить,

$$Q(h)=q\exp(-\theta h).$$

Сравнение с (5.2.2) показывает, что параметр θ, фигурирующий в (5.2.2), фактически совпадает с интенсивностью пуассоновских ростков[1] (обозначавшейся также символом θ). Что касается ковариации, то для нее несложно получить следующее соотношение:

$$1-2p+C(h)=q\exp\left[-\theta\int_0^h(1-G(x))\,dx\right]. \tag{5.2.7}$$

Сравнивая (5.2.6) с (5.2.7), заключаем, что натуральная гранулометрия F_1 и *первичная гранулометрия* G связаны между собой интегральным уравнением, которое всегда может быть решено (по крайней мере теоретически) при помощи преобра-

[1] В оригинале germs. — *Прим. перев.*

зования Лапласа. В частности, используя эту процедуру, можно подсчитать вероятность $P(l)$ того, что интервал длины l содержится в объединении A первичных интервалов (это хорошо известная задача о покрытии). Обратно, решая (5.2.6), мы найдем ковариацию $C(h)$, соответствующую заданной натуральной гранулометрии F_1.

Однако в общем случае, если F_1 — произвольный закон распределения, функция $h \to -C'(h)/(1-2p+C(h))$ не является убывающей и не существует первичного закона G, для которого закон F_1 был бы соответствующей натуральной гранулометрией. (По этому поводу см., например, приведенный выше контрпример, где F_1 — закон распределения п. н. постоянной случайной величины.) Вообще было бы интересно выяснить, при каких условиях эта задача имеет решение, т. е. когда заданный закон F_1 является натуральной гранулометрией некоторого ПБМ, однако мы не будем заниматься этим вопросом.

5.3. БУЛЕВЫ МОДЕЛИ С ВЫПУКЛЫМИ ГРАНУЛАМИ

Если ПБМ A в теореме 5.1.1 представляет собой объединение множеств пуассоновского процесса на $C(\mathcal{K}')$, т. е. соответствует некоторой σ-конечной мере θ, сосредоточенной на $C(\mathcal{K}')$, то мы называем A *булевой моделью с выпуклыми (первичными) гранулами*, поскольку A в этом случае п. н. является локально конечным объединением компактных выпуклых множеств („первичных гранул"), т. е. заданное $K \in \mathcal{K}$ п. н. пересекается лишь с конечным числом этих первичных гранул. Настоящий параграф посвящен именно этому классу ПБМ, причем особое внимание будет уделено стационарному случаю. (Частично мы уже исследовали этот вопрос в § 3.2, однако здесь лучше начать сначала.)

Более общим образом, пусть A — БДМ, эквивалентное объединению множеств некоторого пуассоновского процесса в $\mathcal{K}'$, т. е. булевой модели с компактными (но уже не обязательно выпуклыми) первичными гранулами. Пусть θ — соответствующая σ-конечная мера, сосредоточенная на $\mathcal{K}'$ (предложение 3.2.1), и пусть $\psi(K) = \theta(\mathcal{F}_K)$, $K \in \mathcal{K}$. Используя предложение 3.2.3, мы получим следующую характеризацию таких БДМ: A эквивалентно объединению $\bigcup A_{x_i}$, где A_{x_i} — независимые п. н. компактные СЗМ, а точки $x_i \in A_{x_i}$ (т. е. независимые „первичные ростки") образуют пуассоновский точечный процесс в $\mathbf{R}^d$.

Для того чтобы применить предложение 3.2.1, нам надо иметь измеримое отображение $K \to x(K)$ из $\mathcal{K}'$ в $\mathbf{R}^d$, которое „выбирало" бы по точке в каждом $K \in \mathcal{K}'$. В § 3.3 мы использовали для этой цели центры описанных шаров. Сейчас нам будет удобнее воспользоваться *лексикографическим упорядочением* $\leqslant$ в $\mathbf{R}^d$, определяемым следующим образом. Пусть x и y — две точки в $\mathbf{R}^d$, а x_i, y_i, $i = 1, 2, \ldots, d$, — их координаты. Тогда мы полагаем по определению $x \leqslant y$, если $x_d < y_d$, или если $x_d = y_d$, и $x_{d-1} < y_{d-1}$, или если ..., или если $x_d = y_d$, $x_{d-1} = y_{d-1}, \ldots, x_2 = y_2$ и $x_1 \leqslant y_1$.

Для любого $K \in \mathcal{K}'$ существует единственная точка $x(K) \in K$, такая, что $x(K) = \inf\{x, x \in X\}$ в смысле лексикографического упорядочения, причем нетрудно проверить, что отображение $K \to x(K)$ из $\mathcal{K}'$ на $\mathbf{R}^d$ *непрерывно*. Мы можем продолжить это отображение на $\mathcal{F}'$, полагая, например, $x(F) = 0$ для любых $F \in \mathcal{F}' \setminus \mathcal{K}'$. Соответствующее отображение $F \to x(F)$ измеримо на $\mathcal{F}'$ (и даже θ-п. в. непрерывно, так как мера θ сосредоточена на $\mathcal{K}'$). Далее, для любого $B \in \mathcal{K}'$ имеем $\theta(x^{-1}(B)) \leqslant \theta(\mathcal{F}_B) < \infty$, поскольку мера θ σ-конечна и $x(F) \in F$ θ- п. в. на $\mathcal{F}'$. Поэтому условие, сформулированное в предложении 3.2.1, выполнено. Отсюда вытекает, что существуют такая σ-конечная мера $\mu \geqslant 0$ на $\mathbf{R}^d$ и для μ-почти каждого $x \in \mathbf{R}^d$ такое СЗМ $A(x)$, вероятность P_x которого на σ_f измерима относительно $x \in \mathbf{R}^d$, что

$$\theta(\mathcal{Y} \cap x^{-1}(B)) = \int_B P_x(\mathcal{Y})\, \mu(dx) \tag{5.3.1}$$

для любого $\mathcal{Y} \in \sigma_f$ и любого борелевского множества $B \subset \mathbf{R}^d$. Далее, в соответствии со следствием 1 предложения 3.2.3 для μ-почти всех $x \in \mathbf{R}^d$ мы имеем $A(x) \in \mathcal{K}'$ и $x = x(A) \in A(x)$ (P_x-п. н.).

Если теперь $\mathcal{A}$ обозначает пуассоновский процесс на $\mathcal{K}'$, объединением множеств которого является булева модель A, то $x(\mathcal{A})$ (т. е. образ $\mathcal{A}$ при отображении $F \to x(F)$) представляет собой *пуассоновский точечный процесс* на $\mathbf{R}^d$, соответствующий указанной σ-конечной мере μ.

Доказательство. Для любого борелевского множества B из $\mathbf{R}^d$ число $N(B)$ различных точек в $x(\mathcal{A}) \cap B$, т. е. число замкнутых множеств, принадлежащих $x^{-1}(B) \cap \mathcal{A}$, есть пуассоновская случайная величина, причем, в силу (5.3.1), $E(N(B)) = \theta(x^{-1}(B)) = \mu(B)$. Далее, если B_1 и B_2 — два непересекающихся борелевских множества, то $x^{-1}(B_1) \cap x^{-1}(B_2)$ имеет θ-меру нуль, так что $N(B_1)$ и $N(B_2)$ независимы. Таким образом, $x(\mathcal{A})$ — пуассоновский точечный процесс, соответствующий мере μ.

Обратно, пусть μ — положительная σ-конечная мера на $\mathbf{R}^d$ и P_x для μ-почти всех $x \in \mathbf{R}^d$ — такая вероятность на σ_f, что $P_x(\mathcal{K}') = 1$ и для каждого $\mathcal{Y} \in \sigma_f$ отображение $x \to P_x(\mathcal{Y})$

является μ-измеримым. Тогда отображение

$$\mathscr{V} \to \theta(\mathscr{V}) = \int P_x(\mathscr{V})\,\mu(dx)$$

будет σ-конечной мерой, сосредоточенной на $\mathscr{K}'$ в том и только том случае, если $\theta(\mathscr{F}_K) = \int P_x(\mathscr{F}_K)\,\mu(dx) < \infty$ для любого $K \in \mathscr{K}$. Здесь уже больше нет необходимости предполагать, что $x(A(x)) \in A(x)$ (P_x-п. н.), поскольку единственная цель введения отображения $K \to x(K)$, использованного выше, состояла в сопоставлении каждому $K \in \mathscr{K}'$ определенной точки $x(K)$, так что с успехом можно было бы использовать любые другие измеримые отображения. По определению объединение A множеств пуассоновского процесса $\mathscr{A}$ на $\mathscr{F}'$, соответствующего мере θ, является булевой моделью с компактными гранулами.

Итак, мы можем записать следующее

Предложение 5.3.1. *Пусть A — СЗМ с сопровождающим функционалом ψ: $K \to \psi(K) = -\log P(A \cap K = \varnothing)$. Тогда следующие три условия эквивалентны:*

a) *СЗМ A — булева модель с компактными гранулами.*

b) *Существуют такой класс $\{A(x),\ x \in \mathbf{R}^d\}$ п. н. компактных СЗМ, измеримых по x (т. е. для любого $K \in \mathscr{K}$ отображение $x \to T_x(K) = P(A(x) \in \mathscr{F}_K)$ измеримо), и такой пуассоновский точечный процесс Π на $\mathbf{R}^d$, соответствующий некоторой σ-конечной мере μ, что $\int T_x(K)\,\mu(dx) < \infty$ для любого $K \in \mathscr{K}$ и A эквивалентно $\bigcup_{x \in \Pi} A(x)$.*

c) *Для всякого $K \in \mathscr{K}$ значение $\psi(K) < \infty$, и*

$$\psi(K) = \int T_x(K)\,\mu(dx) \tag{5.3.2}$$

для некоторой σ-конечной положительной меры μ на $\mathbf{R}^d$ и некоторого μ-измеримого класса T_x, $x \in \mathbf{R}^d$, емкостей Шоке, соответствующих п. н. компактным СЗМ.

Из теорем 4.2.1 и 5.1.1 очевидным образом вытекает такое

Следствие. *При выполнении любого из трех указанных выше условий A будет булевой моделью с выпуклыми гранулами тогда и только тогда, когда для μ-почти каждого $x \in \mathbf{R}^d$ множество $A(x)$ выпукло, или, что то же самое, отображение T_x C-аддитивно на $C(\mathscr{K}')$.*

Предположим теперь, что A *стационарно*, т. е. функционал ψ инвариантен относительно сдвигов. Тогда, как мы видели в § 3.3, из следствия 3 предложения 3.2.3 вытекает, что мера μ

также инвариантна относительно сдвигов и, значит, пропорциональна мере Лебега на $\mathbf{R}^d$, и пуассоновский точечный процесс, соответствующий мере μ, стационарен. Далее, для μ-почти всех x и $x' \in \mathbf{R}^d$ СЗМ $A(x')$ и $A(x) \oplus \{x' - x\}$ эквивалентны. Другими словами, каждое $A(x)$ эквивалентно сдвигу $A'_x = A' \oplus \{x\}$, где $A' = A(0) = A_0$. Согласно (3.3.1), функционал ψ представим в виде

$$\psi(K) = aE(V(\check{A}_0 \oplus K)) = aE(V(A_0 \oplus \check{K})) \tag{5.3.3}$$

с некоторой константой $a \geqslant 0$ (V обозначает объем).

В частности, A является булевой моделью с выпуклыми гранулами в том и только том случае, если СЗМ A_0 в (5.3.3) п. н. выпукло и $E(V(A_0 \oplus \check{K})) < \infty$, $K \in \mathscr{K}$. В оставшейся части параграфа мы будем предполагать, что эти условия выполнены и выясним, что они дают.

Булевы модели, индуцированные на прямых

Пусть A -- стационарная булева модель с выпуклыми гранулами. Очевидно, что если L — одномерное линейное многообразие в $\mathbf{R}^d$, т. е. прямая, и $s \in \mathscr{S}_1$ — ее направление, то $A \cap L$ также представляет собой булеву модель с выпуклыми гранулами в пространстве L, отождествляемом с $\mathbf{R}^1$, и что ее вероятность зависит только от направления $s \in \mathscr{S}_1$. Мы обозначаем СЗМ, эквивалентное $A \cap L$, через $A(s)$ и называем $A(s)$ булевой моделью, индуцируемой A на $s \in \mathscr{S}_1$. Из результатов § 5.2 вытекает, что $A(s)$ определяется заданием интенсивности $\theta(s)$ первичных ростков на s и первичной гранулометрии G_s. Заметим, что первичные гранулы выпуклы, т. е. являются прямолинейными отрезками, случайные длины которых распределены по закону G_s.

Прежде всего вычислим $\theta(s)$, причем через s будем обозначать также один из единичных векторов, прямой $s \in \mathscr{S}_1$. Пусть $h \in \mathbf{R}^d$, $h \neq 0$, — какой-нибудь вектор имеющий направление s, т. е. $s = h/|h|$, и $Q(h)$ — вероятность того, что отрезок $\{x + \lambda h,\ 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\}$ не пересекается с A. Согласно (5.3.3), $Q(h) = \exp(-aV(A_0 \oplus \bar{h}))$, где $\bar{h} = \{\lambda h,\ 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\}$. Для любого $K \in C(\mathscr{K})$

$$V(K \oplus h) = V(K) + |h| \mu_{d-1}(\Pi_{s^\perp} K),$$

где μ_{d-1} — мера Лебега в $\mathbf{R}^{d-1}$. Аналогично, в силу (4.5.5),

$$V(K \oplus \bar{h}) = V(K) + |h| \int_{\mathscr{S}_{d-1}} |s^\perp, S| G^K_{d-1}(dS),$$

где G_{d-1}^K — мера поверхности, соответствующая $K \in C(\mathcal{K})$. Если вместо K берется п. н. выпуклое и компактное СЗМ A_0, то $\mu_{d-1}(\Pi_{s\perp}A_0)$ есть некоторая случайная величина, а $G_{d-1}^{A_0}$ — случайная мера. Иными словами, $Q(h) = q\exp(-\theta(s)|h|)$, где

$$\theta(s) = aE(\mu_{d-1}(\Pi_{s\perp}A_0)) = a\int_{\mathcal{S}_{d-1}} |s\perp, S|\, G_{d-1}(dS), \quad (5.3.4)$$

а $G_{d-1} = E(G_{d-1}^{A_0})$ — ожидаемая мера, соответствующая случайной поверхностной мере $G_{d-1}^{A_0}$. Из теоремы 4.5.1 вытекает, что функция $h \to Q(h) = q\exp(-|h|\theta(h/|h|))$ *положительно определена на* $\mathbf{R}^d$.

Рассмотрим теперь *ковариацию* $h \to C(h)$, задаваемую соотношением

$$1 - 2p + C(h) = P(\{x \notin A\} \cap \{x + h \notin A\}) = \exp(-\psi(\{x, x+h\})).$$

Согласно (5.3.3),

$$\psi(\{x, x+h\}) = a[2E(V(A_0)) - E(V(A_0 \cap A_0 \oplus \{h\}))].$$

В § 4.3 мы сопоставили каждому $K \in C(\mathcal{K})$ функцию $h \to g_K(h) = \int 1_K(x)\, 1_K(x+h)\, dx$. Взяв A_0 вместо K, получим случайную функцию $h \to g_{A_0}(h)$. Обозначим ее математическое ожидание через g. Согласно (4.3.1),

$$g(h) = E(g_{A_0}(h)) = E(V(A_0 \cap A_0 \oplus \{h\})).$$

Таким образом, учитывая, что $q = \exp[-aE(V(A_0))] = P(x \notin A)$, мы можем выразить ковариацию $C(h)$ следующей формулой:

$$C(h) = p - q + q\exp[-a(g(0) - g(h))]. \quad (5.3.5)$$

Сравнение с (5.2.7) показывает, что линейная гранулометрия G_s первичных выпуклых гранул, индуцированная на s, определяется соотношением

$$\theta(s)\int_0^r (1 - G_s(\xi))\, d\xi = a(g(0) - g(rs)) \qquad (r \geqslant 0). \quad (5.3.6)$$

Этот результат можно интерпретировать с помощью предложения 4.3.1. Если выпуклое СЗМ A_0 имеет п. н. пустую внутренность, то п. н.

$$\gamma_{A_0}(0; s) = \mu_{d-1}(\Pi_{s\perp}A_0) = \lim\left(\frac{g_{A_0}(0) - g_{A_0}(rs)}{r}\right)$$

при $r \downarrow 0$. В силу (5.3.4) и (5.3.6) отсюда следует, что $\lim(1 - G_s(\xi)) = 1$ при $\xi \downarrow 0$, т. е. что закон G_s не имеет атома в нуле.

В частности, ковариация C и функция Q обладают при каждом $x \in \mathscr{S}_1$ одинаковыми производными справа, т. е.

$$\lim_{r \downarrow 0} \frac{C(0) - C(rs)}{r} = \lim_{r \downarrow 0} \frac{Q(0) - Q(rs)}{r} = q\theta(s).$$

Эти соотношения не будут более выполняться, если вероятность $\alpha = P(\mathring{A}_0 = \varnothing)$ того, что внутренность A_0 пуста, строго положительна. В этом случае пусть A_0' и A_1' суть СЗМ A_0, взятое при условиях $\mathring{A}_0 = \varnothing$ и $\mathring{A}_0 \neq \varnothing$ соответственно. Тогда $g_{A_0'} = 0$, поскольку внутренность A_0' пуста, и для любого $r \geqslant 0$ $r \geqslant 0$ мы имеем $g(rs) = (1 - \alpha) E\left(g_{A_1'}(rs)\right)$. При $r \downarrow 0$ получаем отсюда $(1 - \alpha) E(\mu_{d-1} \Pi_{s \perp} A_1') = \lim (g(0) - g(rs))/r$. Аналогично $\theta(s) = \alpha\theta_0(s) + (1 - \alpha)\theta_1(s)$, где $\theta_0(s) = aE(\mu_{d-1}(\Pi_{s \perp} A_0'))$ и $\theta_1(s) = aE(\mu_{d-1}(\Pi_{s \perp} A_1'))$. Поэтому, полагая $r \downarrow 0$ в (5.3.6), мы видим, что закон G_s имеет в нуле атом $\beta(s) > 0$, причем

$$1 - \beta(s) = (1 - \alpha) \frac{\theta_1(s)}{\theta(s)}. \tag{5.3.7}$$

При этом производные справа по направлению s ковариации C и функции Q при $h = 0$ равны соответственно $(1 - \beta(s)) q\theta(s)$ и $q\theta(s)$.

Подытожим наши результаты.

Предложение 5.3.2. *Пусть A — стационарная булева модель с выпуклыми гранулами. Тогда ПБМ, индуцированные на прямых с направлением $s \in \mathscr{S}_1$, характеризуются соотношениями* (5.3.4) *и* (5.3.6). *В частности, функция $h \to Q(h)$ положительно определена на $\mathbf{R}^d$. Функции Q и C имеют один и тот же касательный конус при $h = 0$ в том и только том случае, когда первичное выпуклое компактное СЗМ A_0 имеет п. н. пустую внутренность, или же в том и только том случае, когда индуцированные гранулометрии G_s не имеют атомов в нуле для любых $s \in \mathscr{S}_1$. Если $\alpha = P(\mathring{A}_0 = \varnothing) \neq 0$, а $\theta_1(s)$ — плотность, индуцируемая СЗМ A_1', эквивалентным A_0, взятому при условии $\mathring{A}_0 \neq \varnothing$, то индуцированная первичная гранулометрия G_s имеет в нуле атом $\beta(s)$, задаваемый соотношением* (5.3.7).

Заметим, что если нам известны булевы модели, индуцируемые на прямых (т. е. для всех $s \in \mathscr{S}_1$ известны $\theta(s)$ и первичная гранулометрия G_s), то вероятность P на σ_f, соответствующая булевой модели A с выпуклыми гранулами в $\mathbf{R}^d$, этим *еще не определена*. Например, если A — булева модель, а A' — пауссоновский процесс, не зависящий от A, то A и $A \cup A'$ индуцируют на прямых одни и те же булевы модели.

Плотности функционалов Минковского

В случае когда K представляет собой шар rB радиуса $r \geqslant 0$, формула Штейнера и формула (5.3.3) дают

$$\psi(rB) = a \sum_{k=0}^{d} \binom{d}{k} r^k E(W_k(A_0)). \tag{5.3.8}$$

Математические ожидания $E(W_k(A_0))$ функционалов Минковского для п. н. выпуклого компактного первичного СЗМ A_0 являются важными параметрами самой булевой модели A. Если последняя *изотропна*, то мы можем заменить A_0 его изотропизацией (см. § 4.2), т. е. можем считать, что само A_0 изотропно. Тогда (5.3.8) применимо к любому $K \in C(\mathcal{K})$, поскольку в соответствии с предложением 4.2.4

$$\psi(K) = \frac{a}{b_d} \sum_{k=0}^{d} \binom{d}{k} E(W_k(A_0)) W_{d-k}(K) \quad [K \in C(\mathcal{K})],$$

так что сужение ψ на $C(\mathcal{K})$ (но не само ψ на $\mathcal{K}$) вполне определяется заданием $E(W_k(A_0))$, $k = 0, 1, \ldots, d$.

В общем случае стационарная булева модель A с выпуклыми гранулами не изотропна. Но $A \in \mathfrak{S}_f$ п. н., и случайные меры W_k^A, $k = 0, 1, \ldots, d$, имеют математические ожидания $W_k = E(W_k^A)$, являющиеся мерами Радона на $\mathbf{R}^d$ (следствие теоремы 4.7.2), причем для любых $\varphi \in C_{\mathcal{K}}(\mathbf{R}^d)$ и $r > 0$

$$E\left[\int \Bigl(\sum_{x' \in \Pi_A(x,r)} \varphi(x') \Bigr) dx \right] = \sum_{k=0}^{d} \binom{d}{k} r^k \int \varphi(x) W_k(dx). \tag{5.3.9}$$

В силу стационарности A, меры W_k инвариантны относительно сдвигов и, значит, пропорциональны мере Лебега на $\mathbf{R}^d$. Иными словами, существуют такие $d + 1$ констант $w_0, w_1, \ldots, w_d$, что $W_k(dx) = w_k\, dx$. Мы будем называть эти числа w_k *плотностями функционалов Минковского* для булевой модели A.

Ясно, что $w_0 = E(1_A(x)) = P(x \in A) = p$. Аналогично $dw_1 = E(W_1^A(rB))/(b_d r^d)$, где B — единичный шар, а dw_1 — математическое ожидание *относительной площади поверхности* A.

Покажем теперь, что w_d/b_d можно рассматривать как *относительный показатель выпуклости*[1] и что

$$\frac{w_d}{b_d} = aq. \tag{5.3.10}$$

Доказательство. Пусть $s \in S_0$ — единичный вектор, а $S = s^{\perp} \in \mathscr{S}_{d-1}$. При надлежащем выборе координатных осей отображение $K \to x(K)$, основанное на лексикографическом упорядочении (см. начало параграфа), обладает тем свойством, что гиперплоскость $S_{x(K)}$, параллельная S и содержащая $x(K)$, является опорной гиперплоскостью для K и K содержится в полупространстве, содержащем точку $x(K) + s$. Для $\mathfrak{S}$-почти каждого $s \in S_0$ выступающая часть п. н. выпуклого компактного СЗМ A_0, отвечающая семейству гиперплоскостей с направлением S, будет п. н. одноточечным множеством, и выступающие (относительно этого семейства гиперплоскостей) точки первичных выпуклых гранул $A'(x_i)$ можно отождествить с пуассоновскими ростками x_i. Тогда если B — борелевское множество, то число выступающих точек гранулы $A'(x_i)$, содержащихся в B, имеет математическое ожидание $aV(B)$. Далее, при условии, что x_i — пуассоновский росток, вероятность того, что x_i не содержится в какой-нибудь другой первичной грануле (или того, что x_i является выступающей точкой самого A), равна q. Поэтому число выступающих точек A, содержащихся в B, имеет (для $\mathfrak{S}$-почти всех направлений $s \in \mathscr{S}_1$) математическое ожидание $aqV(B)$. С другой стороны (см. предложение 4.7.4), это число имеет (относительно s) среднее по вращениям $(1/b_d)E\left(W_d^A(B)\right) = (w_d/b_d)\,V(B)$, так что выполняется (5.3.10). В частности, w_d/b_d есть математическое ожидание среднего числа выступающих точек на единицу объема, отвечающих случайному направлению $s \in \mathscr{S}_1$. Таким образом, w_d/b_d действительно представляет собой удельный показатель выпуклости.

Более общим образом, можно показать, что для $k = 1, 2, \ldots, d$ плотность w_k функционала Минковского W_k связана с математическим ожиданием $E(W_k(A_0))$ того же функционала относительно первичной выпуклой гранулы A_0 соотношением

$$w_k = aqE(W_k(A_0)).$$

Булевы модели, индуцируемые на линейных многообразиях

Предположим теперь, что компактное множество K в (5.3.3) является *штейнеровским* и поэтому, в частности, $K = \check{K}$. Со-

[1] Множества A. — *Прим. перев.*

гласно теореме 4.5.2, существуют $d-1$ мер G_k^K $k=1, 2, \ldots$ $\ldots, d-1$, таких, что (4.5.7) выполняется для любого $K' \in C(\mathscr{K}_0')$. В силу (5.3.3) мы имеем тогда для любого $r \geqslant 0$

$$\psi(rK) = a\left[r^d \mu_d(K) + \sum_{k=1}^{d-1} r^{d-k} \int\limits_{\mathscr{S}_{d-k}} E(\mu_k(\Pi_{S\perp} A_0))\, G_{d-k}^K(dS) + \right.$$
$$\left. + E(\mu_d(A_0))\right]. \quad (5.3.11)$$

Это соотношение дает возможность вычислить математические ожидания функционалов Минковского для булевой модели, индуцируемой на любом линейном многообразии $\mathbf{R}^d$. Пусть $S_p \in \mathscr{S}_p$ — направление некоторого p-мерного многообразия. Возьмем $K = B \cap S_p$, т. е. единичный шар в S_p. Мера $G_k^{B \cap S_p}$ сосредоточена на множестве $\mathscr{S}_k(S_p)$ k-мерных подпространств в S_p $(0 < k \leqslant p)$ и инвариантна относительно вращений в S_p. Поэтому она пропорциональна инвариантной вероятности $\varpi_k^{S_p}$ на $\mathscr{S}_k(S_p)$. Используя следствия теоремы 4.5.2, получаем

$$G_k^{B \cap S_p} = \frac{\binom{b}{k} b_p}{b_{p-k}} \varpi_k^{S_p}$$

(и $=0$ при $k > p$). Подстановка в (5.3.11) дает

$$\psi(r(B \cap S_p)) = a\left[E(\mu_d(A_0)) + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} \frac{b_p}{b_{p-k}} r^k \int\limits_{\mathscr{S}_k(S_p)} E\left(\mu_{d-k}(\Pi_{S\perp} A_0)\, \varpi_k^{S_p}(dS)\right)\right].$$

С другой стороны, в пространстве S_p, отождествляемом с $\mathbf{R}^p$, СЗМ $A_p = A \cap S_p$, индуцированные A, все еще являются булевыми моделями с выпуклыми гранулами. Поэтому существует такое п. н. выпуклое и компактное в $\mathbf{R}^p$ СЗМ $A_0(S_p)$, что

$$\psi(K) = E\left[a(S_p)\, V(A_0(S_p) \oplus K)\right]$$

для любого $K \in \mathscr{K}$, $K \subset S_p$. Если взять здесь $K = r(B \cap S_p)$ и сопоставить это с приведенным выше выражением для $\psi(r(B \cap S_p))$, то получим

$$a(S_p)\, E\left[W_k^p(A_0(S_p))\right] = a\left(\frac{b_p}{b_{p-k}}\right) \int\limits_{\mathscr{S}_k(S_p)} E(\mu_{d-k}(\Pi_{S\perp} A_0))\, \varpi_k^{S_p}(dS)$$

$(p \leqslant k)$. Индекс p в W_k^p указывает, что соответствующий функционал Минковского берется в эвклидовом пространстве $\mathbf{R}^p$. В случае $k=p$ эта формула принимает вид $a(S_p) = aE\left(\mu_{d-p} \times \times \left(\Pi_{S_p^\perp} A_0\right)\right)$. Если $k=0$, то $a(S_p)\, E[\mu_p(A_0(S_p))] = aE(\mu_d(A_0))$. При этом интенсивность $a(S_p)$ точечного пуассоновского процесса ростков и математические ожидания $E\left[W_k^p(A_0(S_p))\right]$ функционалов Минковского булевой модели, индуцированной на $S_p \in \mathscr{S}_p$, имеют вид

$$a(S_p) = aE\left(\mu_{d-p}\left(\Pi_{S_p^\perp} A_0\right)\right),$$

$$E\left[W_k^p(A_0(S_p))\right] =$$

$$= \frac{b_p}{b_{p-k} E\left(\mu_{d-p}\left(\Pi_{S_p^\perp} A_0\right)\right)} \int\limits_{\mathscr{S}_k(S_p)} E\left(\mu_{d-k}\left(\Pi_{S^\perp} A_0\right)\right) \tilde{\omega}_k^{S_p}(dS).$$

В частности, при $k=0$

$$E[\mu_p(A_0(S_p))] = \frac{E(\mu_d(A_0))}{E\left(\mu_{d-p}\left(\Pi_{S_p^\perp} A_0\right)\right)}.$$

Можно также заметить, что одномерные модели, индуцированные на заданной прямой $L \subset S_p$ посредством A и $A_p = A \cap S_p$, очевидным образом совпадают. Поэтому, в силу (5.3.6), для любого $s \in \mathscr{S}_1$, $s \subset S_p$, имеем $g(rs) = a(S_p)\, g(S_p; rs)$, где

$$g(S_p; rs) = E\left(\int 1_{A_0(S_p)}(x)\, 1_{A_0(S_p)}(x+h)\, \mu_p(dx)\right).$$

Учитывая, что $\int\limits_{S_p} g(S_p; h)\, \mu_p(dh) = E\{[\mu_p(A_0(S_p))]^2\}$, находим второй момент p-мерного объема первичной индуцированной гранулы:

$$E\{[\mu_p(A_0(S_p))]^2\} = \frac{b_p}{E\left(\mu_{d-p}\left(\Pi_{S_p^\perp} A_0\right)\right)} \int\limits_0^\infty r^{p-1}\, dr \int\limits_{\mathscr{S}_1(S_p)} g(r, s)\, \tilde{\omega}_1^{S_p}(ds).$$

Если булева модель A *изотропна*, то многие приведенные выше формулы существенно упрощаются, поскольку, как говорилось выше, мы можем предполагать в этом случае, что сами первичные гранулы A_0 и $A_0(S_p)$ изотропны в $\mathbf{R}^d$ и $\mathbf{R}^p$ соответственно и, кроме того, параметры, относящиеся к $A_0(S_p)$, являются константами, не зависящими от $S_p \in \mathscr{S}_p$. При условии изотропности A из определения функционалов Минковского (см. (4.1.3) — (4.1.5)) вытекает также, что $E\left(\mu_{d-k}\left(\Pi_{S^\perp} A_0\right)\right) =$

$=(b_{d-k}/b_d)\,E(W_k(A_0))$. Полагая $a_p=a(S_p)$, $W_k=E(W_k(A_0))$ и $W_k^p=E[W_k^p(A_0(S_p))]$, получаем на основании формулы (5.3.12) для изотропного случая

$$a_p=a\left(\frac{b_{d-p}}{b_d}\right)W_p,$$

$$W_k^p=\frac{b_p b_{d-k}}{b_{p-k}b_{d-p}}\frac{W_k}{W_p}.$$

Для первых двух моментов индуцированных первичных гранул имеем в изотропном случае

$$E[\mu_p(A_0(S_p))]=\frac{b_d W_0}{b_{d-p}W_p},$$

$$E\{[\mu_p(A_0(S_p))]^2\}=\frac{b_p b_d}{b_{d-p}W_p}\int\limits_0^\infty r^{p-1}g(r)\,dr.$$

5.4. СТАЦИОНАРНЫЕ ПБМ

Пусть A — стационарное ПБМ. Ясно, что если у A имеются фиксированные точки, то $A=\mathbf{R}^d$ п. н. Поэтому в дальнейшем мы предполагаем, что таких точек у A нет. Согласно теореме 5.1.1, A является объединением множеств пуассоновского процесса $\mathscr{A}$ на $\mathscr{F}'$, соответствующего некоторой σ-конечной мере θ, сосредоточенной на $C(\mathscr{F}')$ и инвариантной относительно сдвигов. В частности, $\psi(K)=\theta(\mathscr{F}_K)$ для любого $K\in\mathscr{K}$. Наша цель состоит сейчас в том, чтобы описать строение такой меры θ.

a) В соответствии со сказанным в предыдущем параграфе, сужение меры θ на $C(\mathscr{K}')$ отвечает некоторой булевой модели с выпуклыми гранулами, причем существует такое п. н. компактное и выпуклое СЗМ A_0, что $\theta(\mathscr{F}_K\cap C(\mathscr{K}'))=aE(V(A_0\oplus\check{K}))$. Остается рассмотреть сужение меры θ на $C(\mathscr{F}')\setminus C(\mathscr{K}')$.

b) Предположим теперь, что θ сосредоточена на $C(\mathscr{F}')\setminus C(\mathscr{K}')$, и пусть $\mathscr{T}$ — множество замкнутых выпуклых конусов в $\mathbf{R}^d$. Это множество представляет собой компактное подмножество пространства $C(\mathscr{F}')$, и мы предполагаем, что оно наделено своей борелевской σ-алгеброй σ_t, т. е. σ-алгеброй, порождаемой на нем σ-алгеброй σ_f.

Будем говорить, что конус $T\in\mathscr{T}$ *доминируется* множеством $F\in C(\mathscr{F}')$, если существует сдвиг конуса T, содержащийся в F. Если T доминируется множеством $F\in C(\mathscr{F}')$, то, как очевидно, $T_x=T\oplus\{x\}\subset F$ для любого $x\in F$, поэтому $T\oplus F\subset F$ и $F=T\oplus F$. Обратно, конусы $T\in\mathscr{T}$, доминируемые множеством F, характеризуются этим равенством $F=T\oplus F$.

Для заданного $F\in C(\mathscr{F}')$ конус T, удовлетворяющий соотношению $F=T\oplus F$, существует тогда и только тогда, когда

F не компактно, т. е. $F \in C(\mathscr{F}') \setminus C(\mathscr{K}')$. Объединение $T(F) = \bigcup \{T\colon T \in \mathscr{T},\ T \oplus F = F\}$ всех конусов $T \in \mathscr{T}$, удовлетворяющих указанному равенству, как легко показать, также является выпуклым замкнутым конусом, причем $T(F) \oplus F = F$. Иначе говоря, $T(F)$ — это наибольший выпуклый замкнутый конус, доминируемый множеством F. Чтобы завершить определение отображения $F \to T(F)$, положим $T(F) = \varnothing$ для $F \in C(\mathscr{K}')$. Тогда отображение $T\colon C(\mathscr{F}') \to \mathscr{T} \cup \{\varnothing\}$ полунепрерывно снизу и поэтому измеримо. Кроме того, оно очевидным образом инвариантно относительно сдвигов. Поскольку мера θ сосредоточена на $C(\mathscr{F}') \setminus C(\mathscr{K}')$ и инвариантна относительно сдвигов, мы можем применить предложение 3.2.2. Таким образом, существуют такая вероятность τ на $\mathscr{T}$ и для τ-почти каждого $T_0 \in \mathscr{T}$ такая σ-конечная положительная мера θ_{T_0}, инвариантная относительно сдвигов, сосредоточенная на $C(\mathscr{F}') \setminus C(\mathscr{K}')$ и удовлетворяющая соотношению $\theta_{T_0}(\{T(F) \neq T_0\}) = 0$, что

$$\theta(\mathscr{V}) = \int_{\mathscr{T}} \theta_T(\mathscr{V})\, \tau(dT) \qquad (\mathscr{V} \in \sigma_f). \tag{5.4.1}$$

c) Покажем теперь, что эта вероятность τ на $\mathscr{T}$ в действительности *сосредоточена на множестве* $\mathscr{S} = \bigcup_{k=1}^{d} \mathscr{S}_k$ *линейных подпространств в* $\mathbf{R}^d$. Пусть u — единичный вектор, $L \in \mathscr{S}_1$ — прямая линия $L = \{\lambda u,\ \lambda \subset R\}$, а $L^+ = \{\lambda u,\ \lambda \geqslant 0\}$. Для любых $x \in \mathbf{R}^d$ и $\lambda \geqslant 0$ из включения $L^+ \oplus \{x - \lambda u\} \subset F$ вытекает, что $L^+ \oplus \{x\} \subset F$. Но мера θ инвариантна относительно сдвигов, так что $\theta(\{L^+ \oplus \{x - \lambda u\} \subset F\}) = \theta(\{L^+ \oplus \{x\} \subset F\})$. Таким образом, эти два события тождественны θ-п. в. на $C(\mathscr{F}')$. Отсюда вытекает, что $\{L^+ \subset T(F)\} = \{L \subset T(F)\}$ θ-п. в. для любой прямой $L \in \mathscr{S}_1$, и потому $\theta(\{T(F) \notin \mathscr{S}\}) = 0$. Другими словами, вероятность τ сосредоточена на $\mathscr{S} = \bigcup \mathscr{S}_k$.

d) Для $k = 1, 2, \ldots, d$ обозначим через τ_k сужение τ на $\mathscr{S}_k$. Тогда для τ_k-почти каждого $S \in \mathscr{S}_k$ существует σ-конечная мера $\theta_S \geqslant 0$, сосредоточенная на $C(\mathscr{F}')$, инвариантная относительно сдвигов и такая, что $\theta_S(\{T(F) \neq S\}) = 0$. Иначе говоря, эта мера θ_S сосредоточена на множестве цилиндров $K \oplus S$, $K \in C(\mathscr{K}')$, $K \subset S^\perp$ ($S^\perp$ — подпространство в $\mathbf{R}^d$, ортогональное к $S \in \mathscr{S}_k$). Поэтому к мере θ_S применимы результаты § 5.3, и, следовательно, существуют такие константа $a_k(S) \geqslant 0$ и п. н. компактное и выпуклое СЗМ A_S в пространстве $S^\perp$ (отождествляемом с $\mathbf{R}^{d-k}$), что для любого $K \in \mathscr{K}$

$$\theta_S(\mathscr{F}_K) = a_k(S)\, E(\mu_{d-k}(A_S \oplus \Pi_{S^\perp} K)). \tag{5.4.2}$$

С другой стороны, в силу (5.4.1), $\psi(K)=\sum_{k=1}^{d}\theta_S(\mathcal{F}_K)\tau_k(dS)$ для любого $K\in\mathcal{K}$. Если в качестве K взять шар rB радиуса $r\geqslant 0$, то из формулы Штейнера получаем

$$\mu_{d-k}(A_S\oplus r\Pi_{S^\perp}B)=\sum_{p=0}^{d-k-1}\binom{d-k}{p}r^pW_p^{d-k}(A_S)+b_{d-k}r^k,$$

и отображение $S\to\theta_S(\mathcal{F}_B)=a_k(S)E(\mu_{d-k}(A_S\oplus\Pi_{S^\perp}rB))$ измеримо для любого $r\geqslant 0$, так что измеримо и само отображение $S\to a_k(S)$. Таким образом, существует положительная мера $G_k=a_k\tau_k$ на $\mathcal{S}_k$, и значит, функционал ψ, соответствующий A, допускает представление

$$\psi(K)=\sum_{k=1}^{d}\int_{\mathcal{S}_k}E(\mu_{d-k}(A_S\oplus\Pi_{S^\perp}K))\,G_k(dS).$$

Если $k=d$, то $\mathcal{S}_d=\{\mathbf{R}^d\}$ — одноточечное множество, а $S^\perp=\{0\}$ для любого $S\in\mathcal{S}_d$, так что $\int_{\mathcal{S}_k}E(\mu_{d-k}(A_S\oplus\Pi_{S^\perp}K))\times$ $\times G_k(dS)$ представляет собой постоянную величину $a_d=\theta(\{\mathbf{R}^d\})$, и $P(\{A\neq\mathbf{R}^d\})=\exp(-a_d)$.

С учетом возможной компоненты меры θ на $C(\mathcal{K}')$ мы можем подытожить полученные результаты в следующем виде.

Теорема 5.4.1. *СЗМ A является стационарным ПБМ тогда и только тогда, когда функционал $\psi=-\log Q$ ограничен на $\mathcal{K}$ и допускает представление*

$$\psi(K)=a_0\psi_0(K)+\sum_{k=1}^{d-1}\int_{\mathcal{S}_k}\psi_S^k(K)\,G_k(dS)+a_d\qquad(K\in\mathcal{K}),\tag{5.4.3}$$

где a_0 и a_d — положительные константы, G_k, $k=1,\ldots,d-1$ — положительная мера на $\mathcal{S}_k$, $\psi_0(K)=E(\mu_d(A_0\oplus\check{K}))$ для некоторого п. н. компактного и выпуклого СЗМ A_0, а отображения $(S,K)\to\psi_S^k(K)$, $K=1,2,\ldots,d-1$, таковы, что

a) для любого $K\in\mathcal{K}$ отображение $S\to\psi_S^k(K)$ является G_k-измеримым;

b) для G_k-почти каждого $S\in\mathcal{S}_k$ существует такое п. н. выпуклое и компактное СЗМ $A_S\subset S^\perp$, что

$$\psi_S^k(K)=E(\mu_{d-k}(A_S\oplus\Pi_{S^\perp}\check{K})).\tag{5.4.4}$$

Мы можем интерпретировать эти результаты так: A эквивалентно объединению $\bigcup_{k=0}^{d} A_k$ стационарных независимых ПБМ, причем A_0 — булева модель с выпуклыми гранулами, A_d п. н. пусто на $\mathbf{R}^d$, а для каждого $k=1, 2, \ldots, d-1$ ПБМ A_k представляет собой объединение цилиндров, основаниями которых служат $(d-k)$-мерные булевы модели с выпуклыми гранулами. Если СЗМ A_S в (5.4.4) сводятся к отдельным точкам, то A_k является k-мерной пуассоновской сетью плоскостей. Иными словами, пуассоновские сети и булевы модели суть два прототипа, из которых может быть построено любое стационарное ПБМ.

Теорема 5.4.2. *Для того чтобы СЗМ A было эквивалентно некоторой пуассоновской сети плоскостей, необходимо и достаточно, чтобы оно было устойчивым, стационарным и полумарковским.*

Доказательство. Необходимость вытекает из результатов § 3.5. Докажем достаточность. Пусть A — устойчивое (и, значит, безгранично делимое) стационарное полумарковское СЗМ. В частности, A является стационарным ПБМ, и поэтому выполняется (5.4.3). Возьмем $K=rB$ ($r \geqslant 0$, B — единичный шар). Для $k=0$ из формулы Штейнера получаем

$$\psi_0(rB)=\sum_{p=0}^{d}\binom{d}{p} r^p E\left(W_p^d(A_0)\right).$$

Для $0<k<d$ и $S \in \mathcal{S}_k$ имеем $A_S \oplus \Pi_{S^\perp} rB = A_S \oplus ((rB) \cap S^\perp)$, и применение формулы Штейнера в $S^\perp$ (отождествляемом с $\mathbf{R}^{d-k}$) дает

$$\mu_{d-k}(A_S \oplus \Pi_{S^\perp} rB)=\sum_{p=0}^{d-k}\binom{d-k}{p} r^p E\left(W_p^{d-k}(A_S)\right).$$

Иными словами, $\psi(rB)$ является многочленом относительно r:

$$\psi(rB)=\sum_{p=0}^{d} B_p r^p,$$

коэффициенты которого равны:

$$B_0=a_0 E(\mu_d(A_0))+\sum_{k=1}^{d-1}\int_{\mathcal{S}_k} E\left(W_p^{d-k}(A_S)\right) G_k(dS)+a_d,$$

$$B_p=\binom{d}{p} a_0 E\left(W_p^d(A_0)\right)+\sum_{k=1}^{d-p}\binom{d-k}{p}\int_{\mathcal{S}_k} E\left(W_p^{d-k}(A_S)\right) G_k(dS). \tag{5.4.5}$$

С другой стороны, A устойчиво, так что $\psi(rB)=r^{\alpha}\psi(B)$ для некоторого вещественного $\alpha \geqslant 0$, в силу теоремы 3.4.1. Если $\alpha=0$, то $\psi(rB)$ — константа, и A п. н. совпадает либо с $\varnothing$, либо с $\mathbf{R}^d$, т. е. представляет собой d-мерную пуассоновскую сеть. Если $\alpha>0$, то из (5.4.5) вытекает, что $\alpha=p$ для некоторого целого p, $0<p\leqslant d$. При $p' \neq p$ имеем $B_{p'}=0$, откуда

$$E\left(W_{p'}^{d}(A_0)\right)=0 \quad \text{и} \quad \int\limits_{\mathcal{S}_{d-p'}} E\left(W_{p'}^{d-p'}(A_S)\right) G_{d-p'}(dS)=0.$$

Если $p=d$, то A_0 — одноточечное множество, $a_d=0$, СЗМ A_S, $S \in \mathcal{S}_k$ $(k=1, 2, \ldots, d-1)$ пусты для почти всех $S \in \mathcal{S}_k$, и A является пуассоновским точечным процессом. Если $p<d$, то $a_0=a_d=0$, и A_S, $S \in \mathcal{S}_{p'}$, пусты при $p \neq p'$ и представляют собой отдельные точки при $p'=p$. Поэтому, в силу предложения 3.5.1, A есть $(d-p)$-мерная пуассоновская сеть плоскостей.

Следствие. *Стационарное ПБМ A является пуассоновской сетью плоскостей в том и только том случае, если $\psi(rB)=r^{\alpha}\psi(B)$ для некоторого вещественного $\alpha \geqslant 0$. В этом случае α есть некоторое целое число p, $0 \leqslant p \leqslant d$, и A представляет собой $(d-p)$-мерную пуассоновскую сеть плоскостей.*

Имея в виду приложения, мы займемся сейчас исследованием параметров, указанных в § 5.3, в предположении стационарности ПБМ.

ПБМ, индуцированные на прямых

Из результатов § 5.2 следует, что стационарные ПБМ, индуцированные на прямых в $\mathbf{R}^d$, полностью определяются заданием функционалов Q и C. Используя те же обозначения, что и в теореме 5.4.1, мы получаем для $q=Q(0)$ формулу

$$q=\exp\left[-a_0-\sum_{k=1}^{d-1}\int\limits_{\mathcal{S}_k} E\left(\mu_{d-k}(A_S)\right) G_k(dS)-a_d\right].$$

Для любого $h \in \mathbf{R}^d$, $h \neq 0$, пусть $u=h/|h| \in S_0$ — единичный вектор, соответствующий h, $r=|h|$ — длина вектора h и $s=\{\lambda u,\ \lambda \in \mathbf{R}\} \in \mathcal{S}_1$ — одномерное подпространство, порождаемое вектором h (или u). Тогда $Q(h)=q\exp(-|h|\theta(h/|h|))$, где $\theta \geqslant 0$ — некоторая симметричная функция на единичной сфере S_0, и эту функцию можно рассматривать как функцию $s \to \theta(s)$

на $\mathcal{S}_1$. Пусть $\bar{u}$ обозначает отрезок $\{\lambda u, 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\}$. Из теоремы 5.4.1 вытекает, что

$$\psi(r\bar{u}) = a_0 E(\mu_d(A_0 \oplus r\bar{u})) + \\ + \sum_{k=1}^{d-1} \int_{\mathcal{S}_k} E(\mu_{d-k}(A_S \oplus \Pi_{S^\perp} r\bar{u}))\, G_k(dS) + a_d.$$

Для $S \in \mathcal{S}_k$ пусть $v = \Pi_{S^\perp} u / |\Pi_{S^\perp} u|$ — единичный вектор, соответствующий $\Pi_{S^\perp}$, так что $r\Pi_{S^\perp} u = r|s, S^\perp|\bar{v}$, и $G_{d-k-1}^{A_S}$ — случайная поверхностная мера на $\mathcal{S}_{d-k-1}(S)$, отвечающая $A_S \subset S^\perp$. Тогда в силу (4.5.5)

$$\mu_{d-k}(A_S \oplus r\Pi_{S^\perp}\bar{u}) = \\ = \mu_{d-k}(A_S) + r|x, S^\perp| \int_{\mathcal{S}_{d-k-1}(S^\perp)} |\sigma, v^\perp|\, G_{d-k-1}^{A_S}(d\sigma).$$

Заметим также, что $|\sigma, v^\perp| = |\sigma^\perp \cap S^\perp, v|$, и поэтому $|s, S^\perp||\sigma, v^\perp| = |s, \sigma^\perp \cap S^\perp| = |s^\perp, \sigma \oplus S|$. Пусть теперь $G_{d-1}^{A_S}$ — образ меры $G_{d-k-1}^{A_S}$ при отображении $\sigma \to \sigma \oplus S$ из $\mathcal{S}_{d-k-1}(S^\perp)$ в $\mathcal{S}_{d-1}$. Тогда можно записать

$$\mu_{d-k}(A_S \oplus r\Pi_{S^\perp}\bar{u}) = \mu_{d-k}(A_S) + r \int_{\mathcal{S}_{d-1}} |s^\perp, \sigma|\, G_{d-1}^{A_S}(d\sigma).$$

Обозначим через $F_{d-1}^k(S; d\sigma) = E\left(G_{d-1}^{A_S}(d\sigma)\right)$ ожидаемую меру, соответствующую случайной мере $G_{d-1}^{A_S}$. После простых вычислений получаем

$$\psi(r\bar{u}) = -\log q + a_0 r \int_{\mathcal{S}_{d-1}} |s^\perp, \sigma|\, F_{d-1}^0(d\sigma) + \\ + r \sum_{k=1}^{d-1} \int_{\mathcal{S}_k} G_k(dS) \int_{\mathcal{S}_{d-1}} |s^\perp, \sigma|\, F_{d-1}^k(d\sigma).$$

Отсюда вытекает желаемое выражение для функции θ:

$$\theta(s) = \int_{\mathcal{S}_{d-1}} |s^\perp, \sigma|\, F_{d-1}(d\sigma), \tag{5.4.6}$$

где F_{d-1} — положительная мера на $\mathcal{S}_{d-1}$, определяемая соотношением

$$F_{d-1}(\cdot) = a_0 F_{d-1}^0(\cdot) + \sum_{k=1}^{d-1} \int_{\mathcal{S}_k} F_{d-1}^k(S; \cdot)\, G_k(dS).$$

Из этого представления вытекает (точно так же, как и в случае булевых моделей с выпуклыми гранулами), что функция $h \to Q(h)$ *положительно определена* на $\mathbf{R}^d$.

Что касается *ковариации* C, то для любого $h \in \mathbf{R}^d$ мы имеем $1-2p+C(h)=P(\{x \notin A\} \cap \{x+h \in A\})=\exp(-\psi(\{0, h\}))$, и несложные вычисления, уже проводившиеся нами для случая булевой модели, дают

$$\psi_S^k(\{0, h\})=E\left[\mu_{d-k}(A_S \cup (A_S \oplus \{\Pi_{S^\perp} h\}))\right]=$$
$$=2E(\mu_{d-k}(A_S))-g_S(h),$$

где $g_S(h)=E\left(\int\limits_{S^\perp} 1_{A_S}(x)\, 1_{A_S}(x+h)\, dx\right)$, и аналогично

$$\psi^0(\{0, h\})=a_0[2E(\mu_d(A_0))]-g_0(h),$$
$$g_0(h)=E\left(\int 1_{A_0}(x)\, 1_{A_0}(x+h)\, dx\right),$$

Поэтому

$$1-2p+C(h)=q\exp[-(g(0)-g(h))],$$
$$g(h)=a_0 g_0(h)+\sum_{k=0}^{d-1} \int\limits_{\mathscr{S}_k} g_S(h)\, G_k(dS).$$

Точно таким же образом, как и в случае булевой модели с выпуклыми гранулами, можно проверить, что функции C и Q обладают в точке $h=0$ одним и тем же касательным конусом тогда и только тогда, когда A_0 имеет п. н. непустую внутренность и для каждого $k=1, 2, \ldots, d-1$ множество A_S имеет п. н. непустую внутренность в $S^\perp$ для G_k-почти каждого $S \in \mathscr{S}_k$.

Плотности функционалов Минковского

Пусть B — единичный шар и $r \geqslant 0$. Возьмем $K=rB$ в (5.4.3). В соответствии с формулой Штейнера, для любого $S \in \mathscr{S}_k$

$$E(\mu_{d-k}(A_S \oplus r\Pi_{S^\perp} B))=\sum_{p=0}^{d-k} \binom{d-k}{p} r^p E(W_p^{d-k}(A_S)),$$

и поэтому

$$\psi(rB)=\sum_{p=0}^{d} B_p r^p,$$

где коэффициенты B_p уже выписаны в (5.4.5). Можно показать, что коэффициенты B_p связаны с плотностями функционалов

Минковского w_p так же, как и в случае булевой модели, т. е.

$$w_k = \frac{qB_k}{\binom{d}{k}} \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ d).$$

Для $k=d$ имеем $B_d = a_0 b_d$. Таким образом, показатель выпуклости ПБМ A равен $a_0 q$ и зависит только от булевой компоненты.

ПБМ, индуцированные на линейных многообразиях

Пусть K — штейнеровский компакт (так что $K=\check{K}$), а G_k^K, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ d-1$, — мера на $\mathcal{S}_k$, соответствующая K согласно теореме 4.5.2. Вычисляем $\psi(rK)$ по формуле (5.4.3). Из следствия 1 теоремы 4.5.2 вытекает, что для $S \in \mathcal{S}_k$

$$\mu_{d-k}(A_S \oplus r\Pi_{S^\perp} K) =$$
$$= \mu_{d-k}(A_S) + \sum_{p=1}^{d-k} r^p \int_{\mathcal{S}_p} |\sigma,\ S^\perp|\, \mu_{d-k-p}(\Pi_{S^\perp \cap \sigma^\perp} A_S)\, G_p^K(d\sigma),$$

$$\mu_d(A_0 \oplus rK) = \mu_d(A_0) + \sum_{p=1}^{d-1} r^p \int_{\mathcal{S}_p} \mu_{d-p}(\Pi_{\sigma^\perp} A_0)\, G_p^K(d\sigma) + r^d \mu_d(K).$$

Подставляя эти выражения в (5.4.3), можно получить $\psi(K)$ в явном виде, однако в этом сейчас нет необходимости. Предположим, что K содержится в подпространстве $S_j \in \mathcal{S}_j$ $(0<j<d)$, и возьмем $K = B \cap S_j$, т. е. единичный шар в S_j. Как мы уже видели,

$$G_p^{B\cap S_j} = \binom{j}{p} \frac{b_j}{b_{j-p}}\, \varpi_p^{S_j} \ (p \leqslant j),$$

где $\varpi_p^{S_j}$ — единственная вероятность на $\mathcal{S}_p(S_j)$, инвариантная относительно вращений. Сравнение с разложением $\psi(r(B \cap S_j)) = \sum_{p=0}^{j} B_p(S_j)\, r^p$ позволяет найти явные выражения для плотностей функционалов Минковского индуцированного ПБМ $A \cap S_j$. Мы выпишем здесь лишь формулу для *индуцированного показателя выпуклости* $(1/b_j)\, w_j(S_j)$ (предоставляя доказательство читателю):

$$\frac{1}{b_j} w_j(S_j) = qa_0(S_j) = qa_0 E\left(\mu_{d-j}\left(\Pi_{S_j^\perp} A_0\right)\right) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{d-j} \int_{\mathcal{S}_k} |S_j,\ S^\perp|\, E\left(\mu_{d-k-j}\left(\Pi_{S_j^\perp \cap S^\perp} A_S\right)\right) G_k(dS).$$

Изотропный случай

Если стационарное ПБМ A *изотропно*, то предыдущие результаты значительно упрощаются, поскольку в этом случае меры G_k в (5.4.3) инвариантны относительно вращений и для любого $S \in \mathscr{S}_k$ СЗМ A_S можно выбрать изотропным в $S^{\perp}$. Поэтому для любого $K \in C(\mathscr{K})$, в силу предложения 4.2.4,

$$\psi_0(K) = \frac{1}{b_d} \sum_{p=0}^{d} \binom{d}{p} E(W_p^d(A_0))\, W_{d-p}^d(K),$$

$$\psi_S(K) = \frac{1}{b_{d-k}} \sum_{p=0}^{d-k} \binom{d-k}{p} E(W_p^{d-k}(A_k))\, W_{d-k-p}^{d-k}(\Pi_{S^\perp}K)$$

(здесь A_k — п. н. выпуклое компактное СЗМ в $\mathbf{R}^{d-k}$, эквивалентное A_S при любом $S \in \mathscr{S}_k$). С другой стороны, мера G_k инвариантна относительно вращений, и, следовательно, $G_k = a_k \tilde{\omega}_k$ при надлежашим образом выбранной константе $a_k \geqslant 0$. Из (4.1.6) вытекает тогда, что

$$\int_{\mathscr{S}_k} W_{d-k-p}^{d-k}(\Pi_{S^\perp}K)\, \tilde{\omega}_k(dS) = \frac{b_{d-k}}{b_d} W_{d-p}^d(K).$$

Таким образом, в изотропном случае для любого $K \in C(\mathscr{K})$ выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \psi(K) &= \frac{1}{b_d} \sum_{p=0}^{d} \beta_p W_{d-p}^d(K), \\ \beta_p &= \sum_{k=0}^{d-p} a_k \binom{d-k}{p} E(W_p^{d-k}(A_k)). \end{aligned} \tag{5.4.7}$$

В частности, $\beta_d = a_0 b_d$, и $q(\beta_d/b_d)$ есть относительный показатель выпуклости (где $q = \exp(-\psi(\{0\})) = \exp(-\beta_0)$).

Используя (5.4.7) и следствие 6 теоремы 4.5.2, нетрудно вычислить соответствующие параметры и для индуцированного ПБМ, однако мы не будем здесь этого делать.

ГЛАВА 6

ПУАССОНОВСКИЕ ГИПЕРПЛОСКОСТИ И ПОЛИЭДРЫ

В этой главе полученные ранее результаты используются для более подробного изучения пуассоновских сетей гиперплоскостей и выпуклых полиэдров, порождаемых ими в $\mathbf{R}^d$. Многие результаты здесь принадлежат Майлзу; некоторые являются новыми.

Прежде всего мы покажем, что пуассоновская сеть гиперплоскостей полностью характеризуется связанным с ней штейнеровским компактом Λ, а сеть, индуцированная на p-мерном подпространстве S_p, характеризуется штейнеровским компактом $\Pi_{S_p}\Lambda$, т. е. проекцией Λ на S_p. Для характеризации (непуассоновских) сетей порядка 2, 3, ..., d, т. е. пересечений 2, 3, ..., d гиперплоскостей, принадлежащих исходной сети, могут быть использованы связанные с Λ положительные меры G_k^{Λ}. С сетью k-го порядка связана случайная мера $N_k(dx)$, для которой $N_k(K)$ есть $(d-k)$-мерный объем пересечения этой сети k-го порядка с данным компактным множеством K. Вычисляется соответствующая ожидаемая мера, а также (но только для изотропного случая) ковариационные меры.

Во втором параграфе определяются пуассоновские полиэдры. Показано, что они характеризуются свойством условной инвариантности, обобщающим хорошо известное характеристическое свойство экспоненциального распределения. Отмечается также очень важное различие между натуральным законом и объемно-взвешенным законом.

Далее мы вычисляем различные характеристики пуассоновских полиэдров: математические ожидания функционалов Минковского, гранулометрии относительно единичного шара, первые моменты объема, площади поверхности, площади проекции и т. д. Законы для объема, площади поверхности, числа граней и других параметров в явном виде не известны. Однако закон для объема V просто связан с условным математическим ожиданием (относительно V) площади поверхности. В изотропном случае имеется также связь между числом граней и нормой.

В заключение рассматривается частный случай изотропных пуассоновских многоугольников в $\mathbf{R}^2$.

6.1. СТАЦИОНАРНЫЕ ПУАССОНОВСКИЕ СЕТИ ГИПЕРПЛОСКОСТЕЙ

В этом параграфе A будет обозначать стационарную пуассоновскую сеть гиперплоскостей, т. е. (см. § 3.5) A — это БДМ, функционал ψ которого представим в виде

$$\psi(K) = \int_{\mathcal{S}_{d-1}} \mu_1(\Pi_{S^\perp}K)\,\lambda(dS) \quad (K \in \mathcal{K}) \tag{6.1.1}$$

для некоторой меры $\lambda \geqslant 0$ на $\mathcal{S}_{d-1}$ (μ_1 — мера Лебега на $\mathbf{R}$, а $\Pi_{S^\perp}K$ — проекция K на $S^\perp \in \mathcal{S}_1$).

Пусть G_1 — положительная мера на $\mathcal{S}_1$, являющаяся образом меры λ при отображении $S \to S^\perp$ из $\mathcal{S}_{d-1}$ на $\mathcal{S}_1$. Тогда (6.1.1) можно переписать в виде $\psi(K) = \int \mu_1(\Pi_S K)\, G_1(dS)$. С этой мерой G_1 связано *штейнеровское выпуклое множество* Λ, опорная функция которого $r_\Lambda \in \mathcal{R}_1$ определяется соотношением

$$r_\Lambda(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{S}_{d-1}} |u^\perp, S|\,\lambda(dS) = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{S}_1} |u, S'|\, G_1(dS') \tag{6.1.2}$$

(для любого $u \in S_0$, отождествляемого с соответствующим одномерным подпространством $u \in \mathcal{S}_1$).

Обратно, согласно теореме 4.5.1, мера λ будет определена, если задана опорная функция $r_\Lambda \in \mathcal{R}_1$. Другими словами, отображение $\lambda \to \Lambda$ осуществляет взаимно однозначное соответствие между пуассоновскими сетями гиперплоскостей и $\mathcal{R}_1$.

Такое геометрическое представление пуассоновской сети посредством соответствующего ему штейнеровского выпуклого множества Λ приводит к очень простой характеризации сетей, индуцированных на линейных многообразиях. Действительно, если u — единичный вектор, а $\bar{u} = \{\lambda u,\ 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\}$, то $r_\Lambda(u) = \frac{1}{2}\psi(\bar{u})$. Но для любого $S_p \in \mathcal{S}_p$ $(0 < p < d)$ функционал ψ_{S_p}, соответствующий сети, индуцированной на S_p, есть $\psi_{S_p}(K) = \psi(K)$, $K \in \mathcal{K}$, $K \subset S_p$. Поэтому, если $\Lambda(S_p)$ — штейнеровское множество, отвечающее индуцированной сети, а u — единичный вектор в S_p, то $r_{\Lambda(S_p)}(u) = r_\Lambda(u)$. Иначе говоря, *штейнеровское выпуклое множество, отвечающее индуцированной сети $A \cap S_p$, является проекцией Λ на S_p*, т. е. $\Lambda(S_p) = \Pi_{S_p}\Lambda$. Отсюда следует, что если какое-то свойство сети A явно выражается через Λ, то соответствующее свойство индуцированной сети $A \cap S_p$ можно получить без всяких выкладок, заменяя d на p и Λ на $\Pi_{S_p}(\Lambda)$.

С этой точки зрения заслуживает особого внимания изотропный случай, поскольку если A изотропно, то мера λ пропорциональна инвариантной мере $\bar{\omega}$ на $\mathcal{S}_{d-1}$, т. е. $\lambda = \lambda_d \bar{\omega}$ с константой $\lambda_d = \int \lambda(dS) = \int G_1(dS) = dW_{d-1}(\Lambda)/b_{d-1}$ (теорема 4.5.2, следствие 4), а Λ представляет собой *шар* радиуса a, задаваемого формулой

$$a = \frac{b_{d-1}}{db_d} \int \lambda(dS). \tag{6.1.3}$$

При этом индуцированная сеть $A \cap S_p$ характеризуется выпуклым множеством $\Lambda(S_p) = \Pi_{S_p}(\Lambda)$, т. е. *шаром* в S_p *того же* самого радиуса a. Иначе говоря, исходная сеть и все индуцированные ею сети полностью определяются заданием одного-единственного параметра a. По этой причине все результаты, которые мы получим для изотропного случая, будут выражаться через a и будут автоматически выполняться для индуцированной сети, если в них заменить d на p. Например, определяющую формулу (6.1.1) можно записать в виде

$$\psi(K) = a\left(\frac{2d}{b_{d-1}}\right) W_{d-1}(K) = \frac{2b}{b_{d-1}} N(K) \tag{6.1.4}$$

(здесь $N = dW_{d-1}$ — норма в $\mathbf{R}^d$). Индуцированной сети $A \cap S_p$ будет отвечать функционал

$$\psi_p\colon\ K \to (2a/b_{p-1}) N^p(K) = a(2_p/b_{p-1}) W^p_{p-1}(K),$$

где N^p — норма в $\mathbf{R}^p$. Если $K = B$ — единичный шар, то из (6.1.4) вытекает, что

$$\psi(B) = \left(\frac{2db_d}{b_{d-1}}\right) a. \tag{6.1.5}$$

В общем случае, т. е. когда A не является изотропным,

$$\psi(B) = \frac{2dW_{d-1}(\Lambda)}{b_{d-1}} = \frac{2N(\Lambda)}{b_{d-1}}. \tag{6.1.5$'$}$$

Плотности $(d-k)$-объемов

Всякое p-мерное линейное многообразие V_p можно отождествить с $\mathbf{R}^p$ и связать с ним меру $\mu_p^{V_p}$ на $\mathbf{R}^d$, определяемую соотношением

$$\int_{\mathbf{R}^d} f(x)\, \mu_p^{V_p}(dx) = \int_{V_p} f(x')\, \mu_p(dx') \quad \left[f \in C_{\mathscr{K}}(\mathbf{R}^d)\right]$$

(μ_p) — мера Лебега на $\mathbf{R}^p$). Обратно, V_p вполне определяется заданием меры $\mu_p^{V_p}$. Сеть A локально конечна, и ей можно сопоставить *случайную меру* ν_1, для которой

$$\int_{\mathbf{R}^d} f(x)\,\nu_1(dx) = \sum_i \int_{H_i} f(x')\,\mu_{d-1}(dx') \quad [f \in C_{\mathcal{K}}^{\cdot}(\mathbf{R}^d)],$$

где H_i — гиперплоскости, объединение которых есть A. В частности, для любого $K \in \mathcal{K}$ случайная величина $\nu_1(K) = \Sigma\mu_{d-1} \times \times (K \cap H_i)$ является $(d-1)$-мерным объемом $A \cap K$.

Более общим образом, для любого целого $k = 2, 3, \ldots, d$ мы можем рассмотреть пересечения $H_{i_1} \cap \ldots \cap H_{i_k}$ и сказать, что их объединение есть сеть k-го порядка A_k, соответствующая сети A (сама A будет при этом сетью 1-го порядка). Сеть k-го порядка также локально конечна, и ей можно поставить в соответствие случайную меру ν_k на $\mathbf{R}^d$, определяемую соотношением

$$\int f(x)\,\nu_k(dx) = \sum_{i_1 < i_2 \ldots < i_k} \int_{H_{i_1} \cap \ldots \cap H_{i_k}} f(x')\,\mu_{d-k}(dx') \quad [f \in C_{\mathcal{K}}(\mathbf{R}^d)].$$

Ясно, что сеть k-го порядка определена, если известна мера ν_k. Для любого $K \in \mathcal{K}$ случайная величина $\nu_k(K)$ представляет собой $(d-k)$-мерный объем множества $A_k \cap K$, а именно $\nu_k(K) = \Sigma\mu_{d-k}\left(K \cap H_{i_1} \cap \ldots \cap H_{i_k}\right)$.

Сеть k-го порядка является стационарным СЗМ. Однако при $k > 1$ она не будет пуассоновской сетью и даже не будет БДМ. В дальнейшем мы определим ожидаемую меру $E(\nu_k(dx))$. В силу стационарности эта мера инвариантна относительно сдвигов. Поэтому $E(\nu_k(dx)) = \nu_k\,dx$, где константа $\nu_k \geqslant 0$ называется *плотностью $(d-k)$-мерного объема* для A, и $E(\nu_k(K)) = \nu_k \mu_d(K)$, $K \in \mathcal{K}$.

Далее, стационарной случайной мере соответствует еще *ковариационная мера* C_k на $\mathbf{R}^d$, такая, что

$$\int g_K(h)\,C_k(dh) = E\,[\nu_k(K))^2]$$

для любого $K \in \mathcal{K}$ $[g_K(h) = \int 1_K(x)\,1_K(x+h)\,dx]$. В изотропном случае ковариационная мера C_k инвариантна относительно вращений и для нее можно вывести явное выражение.

Вычисление ν_k, $k = 1, 2, \ldots, d$

Чтобы получить выражение для ν_k, предположим сначала, что шар RB радиуса $R \geqslant 0$ пересекает ровно k гиперплоскостей, и вычислим соответствующее математическое ожидание

$(d-k)$-мерного объема $\mu_{d-k}(H_1 \cap \ldots \cap H_k \cap RB)$; отсюда уже легко будет вычислить ν_k.

Пусть $H_1, \ldots, H_k$ — гиперплоскости, пересекающие шар RB. Для любого $i = 1, 2, \ldots, k$ пусть $S_i \in \mathcal{S}_{d-1}$ — направление H_i, а R_i — радиус $(d-i)$-мерного шара $RB \cap H_1 \cap \ldots \cap H_i$ (если он не пуст). В силу (3.5.3), законом для S_1 служит вероятность $\lambda(dS_1)/\lambda_d \left(\lambda_d = \int \lambda(dS) = dW_{d-1}(\Lambda)/b_{d-1}\right)$ на $\mathcal{S}_{d-1}$, и для фиксированного $S_1 \in \mathcal{S}_{d-1}$ единственная точка пересечения $H_1 \cap S_1^{\perp}$ равномерно распределена на $RB \cap S_1^{\perp}$. Поэтому случайная величина R_1 эквивалентна $\rho_1 R$, где $\rho_1 = \sqrt{1-X^2}$, а X — случайная величина, равномерно распределенная на $[0, 1]$, причем ρ_1 и S_1 независимы.

Аналогично S_2 не зависит от S_1 и ρ_1 и имеет закон $\lambda(dS_2)/\lambda_d$. Если S_2, S_1 и ρ_1 фиксированы, то вероятность того, что H_2 пересекает $H_1 \cap RB$, равна $\rho_1 |S_2^{\perp}, S_1|$, и в этом случае $RB \cap H_1 \cap H_2$ имеет радиус $\rho_2 R_1 = \rho_1\rho_2 R$, где ρ_2 не зависит от ρ_1 и одинаково с ним распределено.

Продолжая эту процедуру, получаем, что если $S_1, S_2, \ldots, S_{k-1}$, $R_1 = \rho_1 R$, $R_2 = \rho_1\rho_2 R$, $\ldots$, $R_{k-1} = \rho_{k-1}R_{k-2} = \rho_1\rho_2 \ldots \rho_{k-1}R$ фиксированы, то направление S_k имеет закон $\lambda(dS_k)/\lambda_d$, и вероятность того, что H_k пересечется с $RB \cap H_1 \cap \ldots \cap H_{k-1}$, равна $\rho_1\rho_2 \ldots \rho_{k-1} |S_k^{\perp}, S_1 \cap \ldots \cap S_{k-1}|$, причем в этом случае шар $RB \cap \cap H_1 \cap \ldots \cap H_k$ имеет радиус $\rho_1\rho_2 \ldots \rho_k R$, где ρ_k не зависит от ρ_i, $i = 1, 2, \ldots, k-1$ и одинаково с ними распределено.

Отсюда вытекает, что *вероятность того, что $H_1 \cap \ldots \cap H_k$ пересечет шар RB, равна*

$$p_k = E\left(\rho_1^{k-1}\rho_2^{k-2} \ldots \rho_{k-1}\right) E\left(V\left(S_1^{\perp}, S_2^{\perp}, \ldots, S_k^{\perp}\right)\right),$$

где $V\left(S_1^{\perp}, S_2^{\perp}, \ldots, S_k^{\perp}\right)$ есть k-мерный объем параллелепипеда, построенного на k единичных векторах в $\mathbf{R}^d$, имеющих направления $S_1^{\perp}, \ldots, S_k^{\perp}$, а ρ_i, $i = 1, \ldots, k$, суть k независимых случайных величин, эквивалентных $\sqrt{1-X^2}$, где X равномерно распределено на $[0, 1]$. Хотя явное выражение для p_k нам в дальнейшем и не понадобится, его легко можно вывести. Прежде всего простые выкладки дают

$$E\left(\rho_1^{k-1}\rho_2^{k-2} \ldots \rho_{k-1}\right) = 2^{-k} b_k.$$

Для подсчета $E\left(V\left(S_1^{\perp}, S_2^{\perp}, \ldots, S_k^{\perp}\right)\right)$ используем меры $G_k = G_k^{\Lambda}$, соответствующие штейнеровскому выпуклому множеству Λ (теорема 4.5.2). Как мы уже видели, G_k представляет собой образ меры $(1/k!)\,V(S_1^{\perp}, \ldots, S_k^{\perp})\,G_1(dS_1^{\perp})\times \ldots \times G_1(dS_k^{\perp})$ при (п. в. определенном) отображении $(L_1, L_2, \ldots, L_k)\to L_1\oplus \ldots \oplus L_k$ из $(\mathscr{S}_1)^k$ в $\mathscr{S}_k$. Таким образом,

$$E\left(V\left(S_1^{\perp}, \ldots, S_k^{\perp}\right)\right)=\frac{k!}{(\lambda_d)^k}\int\limits_{\mathscr{S}_k} G_k(dS).$$

Согласно следствию 4 теоремы 4.5.2, интеграл $\int G_k(dS)$ весьма просто связан со значением функционала Минковского $W_{d-k}(\Lambda)$. Используя эту связь, находим

$$\begin{gathered}E\left(V\left(S_2^{\perp}, \ldots, S_k^{\perp}\right)\right)=\frac{k!\binom{d}{k}}{b_{d-k}}\,\frac{W_{d-k}(\Lambda)}{(\lambda_d)^k},\\ \lambda_d=\int\limits_{\mathscr{S}_{d-1}}\lambda(dS)=\frac{dW_{d-1}(\Lambda)}{b_{d-1}}.\end{gathered}\tag{6.1.6}$$

Поэтому вероятность p_k равна

$$p_k=\frac{2^{-k}d!}{(d-k)!}\,\frac{b_k}{b_{d-k}}\,\frac{W_{d-k}(\Lambda)}{(\lambda_d)^k}.$$

В изотропном случае полученные формулы принимают вид

$$E\left(V\left(S_1^{\perp}, \ldots, S_k^{\perp}\right)\right)=\frac{d!}{(d-k)!}\,\frac{b_d}{b_{d-k}}\left(\frac{b_{d-1}}{db_d}\right)^k \tag{6.1.6'}$$

и

$$p_k=\frac{2^{-k}d!}{(d-k)!}\,\frac{b_d b_k}{b_{d-k}}\left(\frac{b_{d-1}}{db_d}\right)^k.$$

Вычислим теперь математическое ожидание $(d-k)$-мерного объема $\mu_{d-k}(H_1\cap \ldots \cap H_k\cap RB)$. Этот объем равен $b_{d-k}R^{d-k}\times (\rho_1\rho_2 \ldots \rho_k)^{d-k}$ при условии, что $H_1\cap \ldots \cap H_k\cap RB\neq\varnothing$. Поэтому

$$E\left(\mu_{d-k}(H_1\cap \ldots \cap H_k\cap RB)\right)= b_{d-k}R^{d-k}E\left(\rho_1^{d-1}\rho_2^{d-2} \ldots \rho_k^{d-k}\right)E\left(V\left(S_1^{\perp}, S_2^{\perp}, \ldots, S_k^{\perp}\right)\right).$$

Несложные выкладки показывают, что $E\left(\rho_1^{d-1} \ldots \rho_k^{d-k}\right)= 2^{-k}b_d/b_{d-k}$. Используя (6.1.6), получаем

$$E\left(\mu_{d-k}(H_1\cap \ldots \cap H_k\cap RB)\right)=\frac{2^{-k}d!}{(d-k)!}\,\frac{b_d}{b_{d-k}}\,\frac{W_{d-k}}{(\lambda_d)^k}R^{d-k}. \tag{6.1.7}$$

В изотропном случае последняя формула принимает вид

$$E\left(\mu_{d-k}(H_1\cap \ldots \cap H_k\cap RB)\right)=\frac{2^{-k}d!}{(d-k)!}\,\frac{(b_d)^2}{b_{d-k}}\left(\frac{b_{d-1}}{db_d}\right)^k R^{d-k}. \tag{6.1.7'}$$

Если шар RB пересекает $n \geqslant k$ гиперплоскостей, то вероятность этого события равна $[(R\psi(B))^n/n!]\exp(-R\psi(B))$, и математическое ожидание $(d-k)$-мерного объема равно ранее найденному значению, умноженному на $\binom{n}{k}$. Используя (6.1.5′) и тот факт, что

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{x^n}{(n-k)!} \exp(-x) = x^k,$$

легко находим

$$E(\nu_k(RB)) = \binom{d}{k} \frac{b_d}{b_{d-k}} W_{d-k}(\Lambda) R^d.$$

Но очевидно, $E(\nu_k(RB)) = \nu_k b_d R^d$, так что *плотность* ν_k рассматриваемого $(d-k)$-мерного объема равна

$$\nu_k = \frac{\binom{d}{k}}{b_{d-k}} W_{d-k}(\Lambda) = \int_{\mathscr{S}_k} G_k(dS); \tag{6.1.8}$$

в частности, в изотропном случае

$$\nu_k = \binom{d}{k} \frac{b_d}{b_{d-k}} a^k. \tag{6.1.8′}$$

При $k = d$ соответствующая сеть порядка d образуется всеми точками пересечения d гиперплоскостей в A, называемыми *вершинами* сети A. Таким образом, *относительное число вершин*, т. е. математическое ожидание ν_d их числа на единицу объема, равно

$$\nu_d = W_0(\Lambda), \tag{6.1.9}$$

или, в изотропном случае,

$$\nu_d = b_d a^d. \tag{6.1.9′}$$

При $k < d$ также могут представлять интерес направления k-мерных многообразий в сети k-го порядка. При этом можно определить случайную меру $\nu_k(dx;\ dS)$ на $\mathbf{R}^d \times \mathscr{S}_k$, так что $\nu_k(K \times \mathscr{S})$ будет $(d-k)$-мерным объемом пересечения множества K с теми многообразиями в A_k, направления которых принадлежат $\mathscr{S} \subset \mathscr{S}_k$. Из предшествующих результатов легко вывести, что соответствующая ожидаемая мера равна $E(\nu_k(dx;\ dS)) = \nu_k dx \times G_k(dS) / \int G_k(dS)$. Иными словами, направления многообразий k-го порядка в A_k имеют закон распределения, пропорциональный мере G_k, соответствующей штейнеровскому выпуклому множеству Λ.

Ковариационные меры (изотропный случай)

В изотропном случае ковариационная мера C_k, соответствующая сети k-го порядка, инвариантна относительно вращений. Поэтому, согласно лемме 4.6.1, она полностью определяется заданием функции $R \to \int C_k(dh)\, g_R(h)$ $[g_R(h) = \int 1_{RB}(x) \times \times 1_{RB}(x+h)\, dx]$. По этой причине мы сначала вычислим $E[(\nu_k(RB))^2] = \int C_k(dh)\, g_R(h)$.

а) Предположим, что шар RB пересекают ровно n гиперплоскостей $H_1, \ldots, H_n$ $(n \geqslant k)$, и положим

$$X_{i_1, \ldots, i_k} = \mu_{d-k}\left(H_{i_1} \cap \ldots \cap H_{i_k} \cap RB\right).$$

Мы уже знаем (условное) математическое ожидание $X_{i_1, \ldots, i_k}$. Для фиксированного n

$$(\nu_k(RB))^2 = \sum_{0 < i_1 < \ldots < i_k \leqslant n}\ \sum_{0 < j_1 < \ldots \leqslant n} X_{i_1, \ldots, i_k} X_{j_1, \ldots, j_k},$$

и нам надо вычислить $E\left(X_{i_1, \ldots, i_k} X_{j_1, \ldots, j_k}\right)$ для всех возможных наборов $\{i_1, \ldots, i_k\}$ и $\{j_1, \ldots, j_k\}$ индексов из множества $\{1, 2, \ldots, n\}$. Пусть p — число совпадающих индексов в этих двух наборах, т. е. существует $2k - p$ гиперплоскостей $H_1, \ldots, H_p, H_{p+1}, \ldots, H_k, H'_{p+1}, \ldots, H'_k$, таких, что

$$X_{i_1, \ldots, i_k} = \mu_{d-k}(H_1 \cap \ldots \cap H_p \cap H_{p+1} \cap \ldots \cap H_k \cap RB),$$
$$X_{j_1, \ldots, j_k} = \mu_{d-k}(H_1 \cap \ldots \cap H_p \cap H'_{p+1} \cap \ldots \cap H'_k \cap RB).$$

Снова пусть $S_1, \ldots, S_k, S'_{p+1}, \ldots, S'_k$ — направления этих гиперплоскостей, а $\rho_1, \ldots, \rho_k, \rho'_{p+1}, \ldots, \rho'_k$ — независимые случайные величины, эквивалентные $\sqrt{1 - X^2}$, где X — случайная величина, равномерно распределенная на $[0, 1]$. Положим также

$$\sigma = S_1 \cap \ldots \cap S_p \in \mathcal{S}_{d-p} \quad (\text{п. н.}).$$

Дальнейшие выкладки аналогичны проделанным выше. Вероятность того, что пересечение $H_1 \cap \ldots \cap H_p \cap RB$ непусто, равна

$$\rho_1^{p-1} \rho_2^{p-2} \ldots \rho_{p-1} \left| S_2^{\perp}, S_1 \right| \times \ldots \times \left| S_p^{\perp}, S_1 \cap \ldots \cap S_{p-1} \right|.$$

При условии, что $H'_1 \cap \ldots \cap H_p \cap RB \neq \varnothing$, вероятность того, что непустыми будут пересечения $H_1 \cap \ldots \cap H_k \cap RB$ и

$H_1 \cap \ldots \cap H'_k \cap RB$, равна

$$(\rho_1\rho_2 \ldots \rho_p)^{2(k-p)} \rho'^{\,k-p-1}_{p+1} \ldots \rho'_{k-1}\rho^{k-p-1}_{p+1} \ldots \rho_{k-1} |\Pi_\sigma S^\perp_{p+1}| \times$$
$$\times |\Pi_\sigma S^\perp_{p+2},\ \sigma \cap S_{p+1}| \times \ldots \times |\Pi_\sigma S^\perp_k,\ \sigma \cap S_{p+1} \cap \ldots \cap S_{k-1}| \times$$
$$\times |\Pi_\sigma S'^\perp_{p+1}| \times |\Pi_\sigma S'^\perp_{p+2}, \sigma \cap S'_{p+1}| \times \ldots \times |\Pi_\sigma S'^\perp_k, \sigma \cap S'_{p+1} \cap \ldots \cap S'_{k-1}|.$$

Наконец, при условии, что все эти три пересечения непусты,

$$X_{i_1, \ldots, i_k} X_{j_1, \ldots, j_k} =$$
$$= (b_{d-k}R^{d-k})^2 (\rho_1\rho_2 \ldots \rho_p)^{2(d-k)} (\rho'_{p+1} \ldots \rho'_k)^{d-k} (\rho_{p+1} \ldots \rho_k)^{d-k}.$$

Таким образом, нам нужно вычислить математическое ожидание произведения

$$(b_{d-k}R^{d-k})^2 \rho_1^{2d-p-1}\rho_2^{2d-p-2} \ldots \rho_p^{2d-2p} (\rho_{p+1}\rho'_{p+1})^{d-p-1} \ldots (\rho_k\rho'_k)^{d-k} \times$$
$$\times |S_2^\perp,\ S_1| \times \ldots \times |S_p^\perp,\ S_1 \cap \ldots \cap S_{p-1}| \times |\Pi_\sigma S^\perp_{p+1}| \times$$
$$\times |\Pi_\sigma S'^\perp_{p+1}| \times \ldots \times |\Pi_\sigma S^\perp_k,\ \sigma \cap S_{p+1} \cap \ldots \cap S_{k-1}| \times$$
$$\times |\Pi_\sigma S'^\perp_k,\ \sigma \cap S'_{p+1} \cap \ldots \cap S'_{k-1}|.$$

Из результатов § 4.6 вытекает, что все случайные величины здесь независимы и записанное выше произведение эквивалентно

$$(b_{d-k}R^{d-k})^2 \rho_1^{2d-p-1} \ldots \rho_p^{2d-2p} (\rho_{p+1}\rho'_{p+1})^{d-p-1} \ldots (\rho_k\rho'_k)^{d-k} \times$$
$$\times \prod_{d-p+1}^{d} Y_j \times \prod_{d-k+1}^{d-p} Y'_j \times \prod_{d-k+1}^{d-p} Y''_j,$$

где Y_j, Y'_j и Y''_j — независимые случайные величины, одинаково распределенные в соответствии с (4.6.2).

Принимая во внимание, что $E(\rho^j) = b_{1+j}/2b_j$ и $E(Y_j) = (j/d)(b_{d-1}/b_d)(b_j/b_{j-1})$, получаем после некоторых вычислений, что

$$E(X_{i_1, \ldots, i_k} X_{j_1, \ldots, j_k}) = B(p,\ k) R^{2(d-k)},$$
$$B(p,\ k) = 2^{p-2k} \frac{d!\,(d-p)!\, b_{2d-p} b_d (b_{d-p})^3}{((d-k)!)^2\, b_{2d-2p} (b_{d-k})^2} \left(\frac{b_{d-1}}{db_d}\right)^{2k-p}.$$

b) Если шар RB пересекает n гиперплоскостей, то мы имеем $\binom{n}{k}$ определяемых ими k-мерных многообразий и ровно

$$\binom{n}{p}\binom{n-p}{k-p}\binom{n-k}{k-p} = n!/[((k-p)!)^2 p!\,(n-2k+p)!]$$

возможных пар

$$(H_1 \cap \ldots \cap H_p \cap H_{p+1} \cap \ldots \cap H_k,\ H_1 \cap \ldots \cap H_p \cap H'_{p+1} \cap \ldots \cap H'_k),$$

рассмотренного выше вида. Отсюда вытекает, что

$$E[(\nu_k(RB))^2] =$$
$$= \sum_{p=0}^{k} \sum_{n=2k-p}^{\infty} \frac{n!\, B(p,k)\, R^{2(d-k)}}{p!\,(n-2k+p)!\,((k-p)!)^2} \frac{(R\psi(B))^n}{n!} \exp(-R\psi(B)) =$$
$$= \sum_{p=0}^{k} \frac{B(p,k)}{p\,((k-p)!)^2} (\psi(B))^{2k-p} R^{2d-p}$$

и поэтому, в силу (6.1.5),

$$E[(\nu_k(RB))^2] =$$
$$= \sum_{p=0}^{k} \frac{d!\,(d-p)!}{d!\,((d-k)!\,(k-p)!)^2} \frac{b_{2d-p} b_d (b_{d-p})^3}{b_{2d-2p} (b_{d-k})^2} a^{2k-p} R^{2d-p}. \quad (6.1.10)$$

c) Применяя леммы 4.6.1 и 4.6.2 и проводя несложные вычисления, получаем из (6.1.10), что

$$C_k(dh) = \sum_{p=0}^{k} \frac{(d-p)\,(d-1)!\,(d-p)!}{p!\,((d-k)!\,(k-p)!)^2} \left(\frac{b_{d-p}}{b_{d-k}}\right)^2 a^{2k-p} \frac{dh}{|h|^p}, \quad (6.1.11)$$

при $k < d$, а при $k = d$

$$C_d'(dh) = \sum_{p=0}^{d-1} \binom{d-1}{p} (b_{d-p})^2 a^{2d-p} \frac{dh}{|h|^p} + b_d a^d \delta(dh), \quad (6.1.12)$$

где δ — мера Дирака. Сравнивая это с соотношениями (4.6.5) — (4.6.6), заключаем, что сети k-го порядка ($k \geqslant 2$) не являются пуассоновскими.

6.2. ПУАССОНОВСКИЕ ПОЛИЭДРЫ И УСЛОВНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ

Для того чтобы получить наиболее общий класс пуассоновских полиэдров, нам надо несколько расширить определение пуассоновских сетей, отправляясь от пуассоновского точечного процесса на произведении $S_0 \times \mathbf{R}_+$, где S_0 — единичная сфера, а не от произведения $\mathscr{F}_1 \times \mathbf{R}$, как это было выше. С каждой точкой $(u, r) \in S_0 \times \mathbf{R}_+$ мы свяжем гиперплоскость $H(u, r) = \{x\colon \langle u, x\rangle = r\}$ в $\mathbf{R}^d$. Отображение $H\colon (u, r) \to H(u, r)$ из $S_0 \times \mathbf{R}_+$ в $\mathscr{F}'$ непрерывно. Пусть $\lambda(dy)$ — положительная мера на единичной сфере S_0, dr — мера Лебега на $\mathbf{R}_+$, а $\mathscr{A} \subset \mathscr{F}'$ — образ при отображении H пуассоновского точечного процесса в $S_0 \times \mathbf{R}_+$, соответствующего мере $\lambda(dS) \otimes dr$. Мы будем называть $\mathscr{A}$ *пуассоновской сетью* (*в обобщенном смысле*). Пусть A — объединение гиперплоскостей $H \in \mathscr{A}$. Точка A является СЗМ. Действительно, число $n(K)$ гиперплоскостей из $\mathscr{A}$, пересекающих компактное множество $K \in \mathscr{K}$, т. е. число точек пуассоновского процесса на $S_0 \times \mathbf{R}_+$, принадлежащих $H^{-1}(\mathscr{F}_K)$, есть пуассоновская случайная величина с математическим ожиданием

$$\psi(K) = \int\limits_{H^{-1}(\mathscr{F}_K)} \lambda(du)\, dr. \tag{6.2.1}$$

Но, как нетрудно проверить, множество $H^{-1}(\mathscr{F}_K)$ компактно в $S_0 \times \mathbf{R}_+$, так что $\psi(K) < \infty$. Таким образом, сеть $\mathscr{A}$ локально конечна и A п. н. замкнуто в $\mathbf{R}^d$, т. е. представляет собой СЗМ.

Ясно, что СЗМ A является безгранично делимым и полумарковским, поскольку его можно рассматривать как объединение множеств пуассоновского процесса в $C(\mathscr{F}')$. Заметим, что ПБМ A стационарно тогда и только тогда, когда мера λ на S_0 симметрична.

Пусть $\mathscr{A}$ — такое семейство гиперплоскостей, что $A = \bigcup \mathscr{A}$ и x — какая-нибудь точка, не принадлежащая A. Далее, для каждого $H \in \mathscr{A}$ пусть $H(x)$ — открытое полупространство, содержащее x и имеющее границей H. Ясно, что

$$\Pi(x) = \bigcap \{H(x),\ H \in \mathscr{A}\}$$

есть открытый выпуклый полиэдр. Поэтому дополнительное к нему множество A^c будет п. н. объединением открытых выпуклых попарно не пересекающихся полиэдров в $\mathbf{R}^d$. Кроме того, имеем также $P(0 \in A^c) = 1$. Таким образом, один из этих полиэдров, скажем Π_0, п. н. содержит начало координат 0. Назовем его *пуассоновским полиэдром*. Ясно, что Π_0 представляет собой открытое случайное множество, п. н. выпуклое и содержащее 0. Его замыкание $\overline{\Pi}_0$ является п. н. выпуклым СЗМ, внутренность которого п. н. совпадает с самим Π_0. Для любого компактного множества $K \in \mathscr{K}$ мы имеем $K \subset \Pi_0$ (т. е. $\Pi_0 \in \mathscr{G}_K$, в обозначениях гл. 1) в том и только том случае, если выпуклая оболочка $C(\{0\} \cup K)$ и пуассоновская сеть A не пересекаются, т. е. $A \in \mathscr{F}^{C(\{0\} \cup K)}$. Вероятность этого события равна $Q(C(\{0\} \cup K))$.

Таким образом, вероятность P на $(\mathscr{G}, \sigma_g)$, соответствующая случайному открытому множеству Π_0, полностью определена, если для всех K, принадлежащих $C(\mathscr{K}_0)$ (т. е. компактных, выпуклых и содержащих 0), задан функционал $K \to P(\mathcal{G}_K)$ и этот функционал совпадает на $C(\mathcal{K}_0)$ с функционалом Q, соответствующим самой сети A. В более явном виде, если r_K — *опорная функция* множества $K \in C(\mathcal{K}_0)$, то множество $H^{-1}(\mathcal{F}_K)$ в $S_0 \times \mathbf{R}_+$ есть множество $\{(u, r): r \leqslant r_K(u)\}$ и из (6.2.1) вытекает, что

$$\left.\begin{aligned} P(\mathcal{G}_K) &= Q(K) = \exp(-\psi(K)), \\ \psi(K) &= \int_{S_0} r_K(u)\,\lambda(du) \end{aligned}\right\} \quad [K \in C_0(\mathcal{K})]. \quad (6.2.2)$$

Это соотношение, продолженное на всё пространство $\mathcal{K}$ равенством

$$Q(K) = Q(C(\{0\} \cup K)) \qquad (K \in K), \qquad (6.2.3)$$

можно использовать как *определение* пуассоновского полиэдра Π_0. В частности, существует взаимно однозначное соответствие между пуассоновскими полиэдрами и положительными мерами Радона на единичной сфере S_0. Если мера λ на S_0 *симметрична*, то соответствующий пуассоновский полиэдр можно связать с некоторой *стационарной* пуассоновской сетью A. Если λ пропорциональна (единственной) вероятности $\mathfrak{W}$ на S_0, инвариантной относительно вращений, то пуассоновский полиэдр называют *изотропным*. В этом случае само поле A необходимо является стационарным и изотропным.

Условная инвариантность

Как мы видели в § 4.4, отображение $K \to r_K$, где r_K — опорная функция множества $K \in C(\mathcal{K}_0)$, является гомеоморфизмом пространства $C(\mathcal{K}_0)$ на конус $\mathcal{R} \subset \boldsymbol{C}(S_0)$. Поэтому из (6.2.2) вытекает, что функционалы ψ и Q непрерывны на $C(\mathcal{K}_0)$. В силу (6.2.3) они будут даже непрерывными на всем пространстве $\mathcal{K}$. С другой стороны, соотношения $r_{K+K'} = r_K + r_{K'}$ и $r_{\alpha K} = \alpha r_K$ дают нам $\psi(K \oplus K') = \psi(K) + \psi(K')$ и $\psi(\alpha K) = \alpha\psi(K)$, $\alpha \geqslant 0$, для любых K и $K' \in C(\mathcal{K}_0)$. Ввиду (6.2.3) эти соотношения будут выполняться, и если K и K' — произвольные компактные множества, содержащие точку 0. Таким образом,

$$\left.\begin{aligned} Q(\alpha K) &= (Q(K))^{\alpha}, \\ Q(K \oplus K') &= Q(K)\,Q(K') \end{aligned}\right\} \quad (\alpha \geqslant 0,\ K,\ K' \in \mathcal{K}_0),$$

где Q: $K \to Q(K) = P(K \subset \Pi_0)$ — функционал, соответствующий согласно (6.2.2) и (6.2.3) пуассоновскому полиэдру Π_0.

Полугрупповое соотношение $Q(K \oplus K') = Q(K)\,Q(K')$ связано со свойством марковости и, как мы сейчас покажем, позволяет получить характеризацию пуассоновских полиэдров. Прежде всего заметим, что $K \subset \Pi_0$ эквивалентно $0 \in \Pi_0 \ominus \check{K}$, а $K \oplus K' \subset \Pi_0$ эквивалентно $K' \subset \Pi_0 \ominus \check{K}$. Поэтому указанное полугрупповое соотношение можно переписать в виде

$$P(K' \subset \Pi_0 \ominus \check{K}) = P(K' \subset \Pi_0)\, P(K \subset \Pi_0).$$

С другой стороны, из $K' \subset \Pi_0 \ominus \check{K}$ вытекает, что $K \subset \Pi_0$, поскольку $0 \in K'$, а $P(K \subset \Pi_0) = Q(K)$ никогда не обращается в нуль. Таким образом, наше полугрупповое соотношение можно выразить с помощью условных вероятностей, а именно

$$P(K' \subset \Pi_0 \ominus \check{K} \mid 0 \in \Pi_0 \ominus \check{K}) = P(K' \subset \Pi_0).$$

Другими словами, *при условии, что точка* 0 *принадлежит эрозии* $\Pi_0 \ominus \check{K}$ *полиэдра* Π_0 *множеством* $K \in \mathscr{K}_0$, *эта эрозия* $\Pi_0 \ominus \check{K}$ *является пуассоновским полиэдром, эквивалентным* Π_0. Мы будем выражать это свойство, говоря, что *пуассоновские полиэдры условно инвариантны относительно эрозий* компактными множествами $K \in \mathscr{K}_0$. Ниже мы проинтерпретируем эту условную инвариантность несколько иным образом, а именно с точки зрения натурального закона.

В действительности пуассоновские полиэдры *характеризуются* указанным свойством условной инвариантности. Точнее говоря, если положить $Q(K) = P(K \subset \Pi_0)$, то справедлив следующий результат.

Теорема 6.2.1. *Для того чтобы случайное открытое множество* Π_0, *п. н. содержащее точку* 0, *было пауссоновским полиэдром, необходимо и достаточно, чтобы* $Q(K \oplus K') = Q(K)\, Q(K')$ *для любых* $K, K' \in \mathscr{K}_0$.

Доказательство. Необходимость нами уже доказана, так что остается доказать достаточность. Пусть Π_0 — такое открытое случайное множество, что $P(0 \in \Pi_0) = 1$ и

$$Q(K \oplus K') = Q(K)\, Q(K') \quad (K, K' \in \mathscr{K}_0) \tag{6.2.4}$$

(где $Q(K) = P(K \subset \Pi_0)$). Ниже rB — это, как обычно, шар радиуса r с центром в точке 0.

a) $Q(rB) \uparrow 1$ при $r \downarrow 0$, поскольку функция Q всегда полунепрерывна снизу на $\mathscr{K}$, и $\lim rB = \{0\}$ в $\mathscr{K}$ при $r \downarrow 0$.

b) Функция Q *непрерывна* на $\mathscr{K}$.

Достаточно убедиться в ее непрерывности на $\mathscr{K}_0$, так как $Q(K) = Q(K \cup \{0\})$, а операция взятия объединения $\cup$ непрерывна. Пусть $\{K_n\} \subset \mathscr{K}_0$ — такая последовательность, для которой $\lim K_n = K$ в $\mathscr{K}_0$, и $\varepsilon > 0$. Тогда $K \subset K_n \oplus \varepsilon B$ и $K_n \subset K \oplus \varepsilon B$

для достаточно больших n. Из (6.2.4) вытекает поэтому, что

$$Q(K) \geqslant Q(\varepsilon B) \overline{\lim} Q(K_n), \quad \underline{\lim} Q(K_n) \geqslant Q(K) Q(\varepsilon B).$$

Учитывая а), находим, что $Q(K) = \lim Q(K_n)$, и, значит, Q непрерывна.

c) Пусть $K \in \mathscr{K}$ — компактное множество, а $C_0 = C(\{0\} \cup K)$. Тогда $Q(K) = Q(C_0)$.

Рассмотрим выпуклую оболочку $C = C(K)$ множества K. Достаточно доказать, что $Q(K) = Q(C)$, поскольку $0 \in \Pi_0$ п. н. Согласно предложению 1.5.7, существует такое $r > 0$, что $C \oplus \oplus rB \subset K \oplus rB \oplus \varepsilon B$. Поэтому $Q(K) Q(\varepsilon B) \leqslant Q(C)$ в силу (6.2.4). В соответствии с а) отсюда вытекает, что $Q(K) \leqslant Q(C)$ и, следовательно, $Q(K) = Q(C)$, ибо обратное включение очевидно.

d) Отображение Q непрерывно на $\mathscr{K}$, и поэтому из (6.2.4) следует, что

$$Q(\alpha K) = (Q(K))^{\alpha} \quad (\alpha \geqslant 0,\ K \subset \mathscr{K}).$$

Заметим, что Q не обращается на $\mathscr{K}$ в нуль. Действительно, допустим противное, т. е. что $Q(K_0) = 0$ для некоторого $K_0 \in \mathscr{K}$. Тогда для достаточно больших $\rho_0 > 0$ мы имели бы $K_0 \subset \rho_0 B$ и, значит, $Q(\rho_0 B) = (Q(B))^{\rho_0} = 0$, так что $Q(\rho B) = 0$ для любых $\rho > 0$, в противоречие с а). Итак, $Q(K) > 0$ для всех $K \in \mathscr{K}$, и функция $\psi = -\log Q$ непрерывна на $\mathscr{K}$.

e) Функция ψ непрерывна, возрастает и положительно линейна на $\mathscr{K}$ и (тем более) на $C(\mathscr{K}_0) = \mathscr{R}$. Из предложения 4.4.4 вытекает, что существует такая мера Радона $\lambda \geqslant 0$ на единичной сфере S_0, что

$$\psi(K) = \int_{S_0} r_K(u) \lambda(du) \quad [K \in C_0(\mathscr{K})].$$

Учитывая с) и определения (6.2.2) — (6.2.3), заключаем, что Π_0 — пауссоновский полиэдр, соответствующий мере λ.

Натуральный закон

Пусть теперь λ — положительная *симметричная* мера на S_0, а A — стационарная пуассоновская сеть гиперплоскостей, индуцированная отображением H из пуассоновского точечного процесса в $S_0 \times \mathbf{R}_+$, соответствующего произведению мер $\lambda(du) \otimes dr$. Тогда дополнительное множество A^c будет объединением открытых, выпуклых и попарно непересекающихся полиэдров Π_i, один из которых, скажем Π_0, п. н. содержит точку 0. Со статистической (и эвристической) точки зрения мы можем рассматривать семейство Π_i как „популяцию“, т. е. приписать один и тот же вес „каждому“ из этих отдельных полиэдров Π_i, и назвать соответствующий вероятностный закон *натуральным* законом пуассоновского полиэдра П[1]. Вообще говоря, П определяется таким образом с точностью до сдвига, и соответствующая вероятность задается на факторпространстве $\mathcal{G}/\tau$, где τ — отношение эквивалентности, порождаемое сдвигами, т. е. $G\tau G'$, если G' получается сдвигом множества G. В частности, условие $0 \in П$ здесь уже не нужно.

С другой стороны, каждому из отдельных полиэдров $П_i$ можно приписать вес, пропорциональный его объему $V(П_i)$, что приводит к „объемно-взвешенному" закону, который мы для краткости будем называть *объемным законом*. Определение пуассоновского полиэдра $П_0$, приведенное ранее, соответствует рассмотрению объемных законов, поскольку (грубо говоря) точка 0 чаще попадает в большой полиэдр, нежели в малый[2]. Более строгое рассмотрение вопроса, основанное на использовании одной эргодической теоремы, читатель может найти у Майлза (1964—1971). Майлз доказал, по существу, следующее. Пусть $F_0(dП)$ — вероятность для пуассоновского полиэдра $П_0$, определенного, как было указано выше, а $F(dП)$ — соответствующий натуральный закон. Тогда

$$F_0(dП) = \frac{V(П)}{E(V(П))} F(dП),$$

где V — объем.

Было бы интересно дать новую интерпретацию определенной выше условной инвариантности при помощи натурального закона. Чтобы сделать это, нам понадобится несколько предварительных результатов. Поскольку объем $V(П_0)$ играет в дальнейшем важную роль, мы всегда будем предполагать, что по-

[1] Приводимые здесь рассуждения можно пояснить следующим образом. Пусть X: $П \to X(П)$ — некоторая характеристика выпуклого полиэдра, т. е. вещественная функция, определенная на пространстве выпуклых множеств и инвариантная относительно сдвигов. (Такой характеристикой могут быть, например, число вершин полиэдра, радиус вписанной в полиэдр или описанной вокруг него сферы и т. п.) Если по имеющейся реализации стационарной пуассоновской сети A обычным образом строить гистрограмму распределения характеристики X, определяя $X(П_i)$ для каждого $П_i$ из области наблюдений, то построенная таким образом гистограмма будет соответствовать „натуральному" закону распределения характеристики X. С другой стороны, по тем же самым данным можно построить и другую гистограмму, в которой каждый полиэдр $П_i$, для которого $X = x_i$, засчитывается не один раз, как это делается при построении обычной гистограммы, а $c \cdot V(П_i)$ „раз" (здесь $c > 0$ — нормирующий множитель, а $V(П_i)$ — объем полиэдра $П_i$). Полученная при таком построении гистограмма будет соответствовать некоторому теоретическому закону распределения, который автор называет „объемным" законом распределения характеристики X. В дальнейшем всегда проводится четкое различие между двумя этими законами. — *Прим. перев.*

[2] Этот факт в случае пуассоновского потока на прямой известен как „парадокс времени ожидания". — *Прим. перев.*

лиэдр Π_0 *п. н. ограничен.* Как легко проверить, последнее имеет место тогда и только тогда, когда линейные многообразия в A не являются п. н. параллельными некоторой фиксированной линии, или, что то же самое, если подпространство в $\mathbf{R}^d$, порожденное носителем меры λ на S_0, совпадает с самим $\mathbf{R}^d$. Еще одно необходимое и достаточное условие п. н.-ограниченности Π_0 состоит в том, что $W_0(\Lambda) > 0$, где Λ — штейнеровское выпуклое множество, соответствующее сети A. В силу (6.1.9), это условие эквивалентно также тому, что $\nu_d > 0$.

Для характеризации открытых множеств с точностью до сдвига мы будем использовать факторпространство $\mathcal{G}/\tau$, а в случае пространства ограниченных открытых множеств $\mathcal{G}_k \subset \mathcal{G}$ — также факторпространство $\mathcal{G}_k/\tau \subset \mathcal{G}/\tau$.

Если для всякого ограниченного множества G обозначить через $c(G)$ центр описанного вокруг него шара, то отображение $G \to c(G)$ из $\mathcal{G}_k$ в $\mathbf{R}^d$, как нетрудно проверить, будет измеримым, а потому измеримым будет и отображение u пространство $\mathcal{G}_k$ в себя, определяемое соотношением

$$u(G) = G \oplus \{-c(G)\}.$$

Ясно, что u инвариантно относительно сдвигов и для каждого $B \in u(\mathcal{G}_k)$ прообраз $u^{-1}(B)$ есть класс эквивалентности множества по отношению τ. Другими словами, мы можем отождествить пространство $\mathcal{G}_k/\tau$ с $u(\mathcal{G}_k)$ и снабдить его соответствующей σ-алгеброй. Если P — вероятность на $\mathcal{G}$, сосредоточенная на $\mathcal{G}_k$ (т. е. отвечающее ей случайное открытое множество Γ п. н. ограничено), а F — вероятность на $u(\mathcal{G}_k)$, являющаяся образом P при отображении u, то F можно рассматривать также как вероятность на $\mathcal{G}/\tau$, сосредоточенную на $\mathcal{G}_k/\tau$, т. е. F есть закон распределения случайного открытого множества Γ с точностью до сдвига. Ясно, что для возможности такого отождествления предположение о п. н.-ограниченности Γ существенно.

Принимая во внимание измеримость u, получаем, что для F-почти всех $B \in u(\mathcal{G}_k)$ существует условное случайное открытое множество Γ, удовлетворяющее условию $u(\Gamma) = B$. Это случайное открытое множество мы будем обозначать через $\Gamma_u(B)$. Из предложения 2.3.2 вытекает, что $\Gamma_u(B)$ п. н. является сдвигом B_x множества B. Другими словами, $\Gamma_u(B) = B_x$ характеризуется законом распределения $\mathfrak{V}_B(dx)$ случайного вектора сдвига $x \in \mathbf{R}^d$. Если $\Gamma = \Pi_0$ — пуассоновский полиэдр, то при условии $u(\Pi_0) = B$, как мы сейчас увидим, Π_0 эквивалентен B_x, где x равномерно распределено на $\check{B} = \{y, \ -y \in B\}$. Это означает, что при фиксированном B положение начала координат 0 можно считать равномерно распределенным внутри Π_0. Такая интерпретация аналогична результатам § 2.7, относящимся к линейной гранулометрии. В приводимом ниже предложении предположение п. н.-выпуклости Γ, возможно, и не является необходимым, однако оно упрощает доказательство.

Предложение 6.2.1. *Пусть Γ — случайное открытое множество, п. н. выпуклое и ограниченное и п. н. содержащее начало координат 0. Пусть Q — функционал, определяемый на $\mathscr{K}$ соотношением $Q(K)=P(K\subset\Gamma)$. Тогда следующие три условия эквивалентны:*

1) *$Q(K)=Q(K_{-h})$ для любых $K\in\mathscr{K}_0$ и $h\in K$.*

2) *Функционал Q представим в виде*

$$Q(K)=\int\frac{V((\check{B}\ominus K)\cap\check{B})}{V(B)}F(dB)\quad(K\in\mathscr{K}),\tag{a}$$

где F — единственная вероятность на $\mathscr{G}/\tau$, сосредоточенная на классе выпуклых и ограниченных открытых множеств. В частности, если $K\in\mathscr{K}_0$, то

$$Q(K)=\int\frac{V(\check{B}\ominus K)}{V(B)}F(dB)\quad(K\in\mathscr{K}_0).\tag{a'}$$

3) *При условии $u(\Gamma)=B$ множество Γ эквивалентно сдвинутому множеству B_x, где x равномерно распределено на $\check{B}$.*

Доказательство. Если x равномерно распределено на $\check{B}\in u(\mathscr{G}_K)$, то для любого $K\in\mathscr{K}$ имеем $P(K\subset B_x)=P(x\in\check{B}\ominus K)=V((\check{B}\ominus K)\cap\check{B})/V(B)$. Поэтому, если выполняется условие 3) и F — вероятность на $u(\mathscr{G}_K)$, представляющая собой образ P при отображении u, то справедливо соотношение (a) и выполнено условие 2). Если 0 и h принадлежат $K\in\mathscr{K}$, то $K\in\mathscr{K}_0$ и $K_{-h}\in\mathscr{K}_0$. Отсюда в силу (a') вытекает, что из условия 2) следует равенство $Q(K)=Q(K_{-h})$, т. е. условие 1).

Остается показать, что из условия 1) вытекает условие 3). Поскольку $Q(\{0\})=1$, то существуют такие компактные окрестности K точки 0, для которых $Q(K)\neq 0$. Пусть $K\in\mathscr{K}_0$ таково, что $Q(K)\neq 0$ и $h\in K$, так что $Q(K)=Q(K_{-h})$. Для любого $K'\in\mathscr{K}$ мы имеем $K\cup K'\in\mathscr{K}_0$ и $h\in K\cup K'$. Отсюда вытекает, что $Q(K_{-h}\cup K'_{-h})=Q(K\cup K')$ и

$$P(K'\subset\Gamma\mid K\subset\Gamma)=\frac{Q(K\cup K')}{Q(K)}=\frac{Q(K_{-h}\cup K'_{-h})}{Q(K_{-h})}=$$

$$=P(K'\subset\Gamma_h\mid K\subset\Gamma_h).$$

Другими словами, случайное открытое множество Γ при условии $K\subset\Gamma$ эквивалентно сдвинутому множеству $\Gamma_h=\Gamma\oplus\{h\}$, взятому при условии $K\subset\Gamma_h$.

Пусть теперь u — отображение $G \to u(G) \oplus \{-c(G)\}$, а F — вероятность на пространстве $u(\mathscr{G})$, отождествляемом с $\mathscr{G}/\tau$ (это отождествление законно в силу п. н.-ограниченности Γ), являющаяся образом P при отображении u. Вероятность F сосредоточена на классе выпуклых и ограниченных открытых множеств. Случайное открытое множество $\Gamma_u(B)$ (т. е. Γ, взятое при условии $u(\Gamma) = B$) определено для F-почти всех $B \in \mathscr{G}/\tau$. Из предложения 2.3.2 вытекает, что $\Gamma_u(B)$ п. н. выпукло и ограничено и п. н. содержит точку 0, и поскольку u инвариантно относительно сдвига, $\Gamma_u(B)$ при условии $K_0 \subset \Gamma_u(B)$ эквивалентно $\Gamma_u(B) \oplus \{h\}$ при условии $K_0 \subset \Gamma_u(B) \oplus \{h\}$ для любых $K_0 \in \mathscr{K}_0$ и $h \in K_0$. Пусть Q_B — функционал, соответствующий $\Gamma_u(B)$. Мы имеем $Q_B(\{0\}) = 1$ и, значит, $Q(\{0, h\}) > 0$ для достаточно малых $|h|$. Беря $K_0 = \{0, h\}$, мы получаем для любого $K \in \mathscr{K}_0$, такого, что $h \in K$,

$$\frac{Q_B(K)}{Q_B(\{0, h\})} = \frac{Q_B(K_{-h})}{Q_B(\{0, -h\})},$$

т. е. $Q_B(K_{-h}) = f_B(h) Q_B(K)$, где функция f_B определена на некоторой окрестности точки 0 равенством $f_B(h) = Q_B(\{0, -h\})/Q_B \times \times (\{0, h\})$.

Покажем, что $f_B = 1$. Возьмем такие $h, h' \in K$, что $h + h' \in \in K$ ($K \in \mathscr{K}_0$). Имеем $Q_B(K_{-h-h'}) = f_B(h + h') Q(K)$ и $Q_B(K_{-h-h'}) = = f_B(h) Q_B(K_{-h'}) = f_B(h) f_B(h') Q_B(K)$. Отсюда $f_B(h + h') = f_B(h) \times \times f_B(h')$. Из этого соотношения и из измеримости f_B вытекает, что $f_B(h) = \exp(\langle b(B), h\rangle)$ для некоторого вектора $b(B) \in \mathbf{R}^d$. (Здесь $\langle\ ,\ \rangle$ — скалярное произведение.) Но для любой компактной окрестности K точки 0 и любого $h \in K$ справедливо равенство $Q(K) = Q(K_{-h})$, т. е.

$$Q(K) = \int \exp(-\langle b(B), h\rangle) Q_B(K) F(dB).$$

Это соотношение выполняется для любого h, принадлежащего данной компактной окрестности K точки 0. Ввиду свойств преобразования Лапласа отсюда следует, что $b(B) = 0$ почти всюду относительно меры $Q_B(K) F(dB)$, т. е. $\int (b(B))^2 Q_B(K) F \times \times (dB) = 0$. Выбирая такую последовательность $\{K_n\}$ компактных окрестностей точки 0, что $K_n \downarrow 0$, мы получаем $Q_B(K_n) \uparrow \uparrow Q_B(\{0\}) = 1$ и $\int (b(B))^2 F(dB) = 0$ в силу монотонной непрерывности. Следовательно, (п. н.) $b(B) = 0$, $f_B = 1$ и

$$Q_B(K_{-h}) = Q_B(K) \quad (K \in \mathscr{K}_0,\ h \in K). \tag{b}$$

С другой стороны, $\Gamma_u(B)$ эквивалентно сдвигу B_x множества B. Пусть $\mathfrak{G}_B(dx)$ — вероятность случайного вектора сдвига $x \in \mathbf{R}^d$.

Поскольку $0 \in B_x$ п. н., т. е. $x \in \check{B}$ п. н., то ϖ_B сосредоточена на $\check{B}$. Далее, для любых $K \in \mathscr{K}_0$ и $h \in K$ множество B_x при условии $K \subset B_x$ эквивалентно множеству B_{x+h} при условии $K \subset B_{x+h}$. Поэтому

$$1_{\check{B} \ominus K}(x)\, \varpi_B(dx)/Q_B(K) = 1_{\check{B} \ominus K}(x)\, \varpi_B(dx-h)/Q_B(K_{-h}),$$

т. е., в силу (b),

$$1_{\check{B} \ominus K}(x)\, \varpi_B(dx-h) = 1_{\check{B} \ominus K}(x)\, \varpi_B(dx). \qquad \text{(c)}$$

Это соотношение выполняется для любой компактной окрестности K точки 0 и любого $h \in K$. Кроме того, B выпукло и, значит, $\check{B} \ominus K$ выпукло. Отсюда вытекает, что мера $1_{\check{B} \ominus K}\varpi_B$ пропорциональна сужению меры Лебега λ на открытое множество $\check{B} \ominus K$, т. е.

$$1_{\check{B} \ominus K}\varpi_B = a(K)\, 1_{\check{B} \ominus K}\lambda.$$

Но коэффициент $a(K)$ не зависит от K. Действительно, если $0 \in K' \subset K$, то $\check{B} \ominus \check{K} \supset \check{B} \ominus K$ и поэтому $a(K) = a(K')$. Отсюда следует, что для любого $K'' \in \mathscr{K}_0$ мы имеем $a(K) = a(K \cap K'') = a(K'') = a$. Наконец, если $\{K_n\}$ — такая последовательность компактных окрестностей точки 0, что $K_n \downarrow \{0\}$, то $1_{\check{B} \ominus K_n} \uparrow 1_{\check{B}}$, так что из равенства $1_{\check{B} \ominus K_n}\varpi_B = a 1_{\check{B} \ominus K_n}\lambda$ следует, что $\varpi_B = 1_{\check{B}}\lambda$. Отсюда вытекает, что $a = 1/V(\check{B}) = 1/V(B)$, поскольку ϖ_B — вероятность, а x равномерно распределено на B. Для завершения доказательства остается заметить, что вероятность F в представлении (a) является законом распределения $u(\Gamma)$ и потому единственна.

Вернемся теперь к пуассоновскому полиэдру Π_0 и дадим интерпретацию условной независимости. Пусть F_0 — закон распределения $u(\Pi_0)$, так что, согласно (a),

$$Q(K) = \int \frac{V(\check{B} \ominus K)}{V(B)} F_0(dB) \qquad (K \in \mathscr{K}_0).$$

Если $K, K' \in \mathscr{K}_0$, то $Q(K') = Q(K \oplus K')/Q(K)$ в силу условной инвариантности, и поэтому

$$Q(K') = \int \frac{V((\check{B} \ominus K) \ominus K')}{V(\check{B} \ominus K)} \frac{V(\check{B} \ominus K)}{Q(K)\, V(B)} F_0(dB).$$

Учитывая единственность F_0, получаем, что образ меры $(V(\check{B} \ominus K)/Q(K)\, V(B))\, F_0(dB)$ при отображении $B \to B \ominus \check{K}$ есть сама мера $F_0(dB)$. Иными словами, для любой измеримой функции $\varphi \geqslant 0$, инвариантной относительно сдвигов на $\mathcal{G}$, мы имеем

$$\int \varphi(B \ominus \check{K}) \frac{V(\check{B} \ominus K)}{V(B)} F_0(dB) = Q(K) \int \varphi(B) F_0(dB). \quad (6.2.5)$$

Беря $\varphi(B) = 1_{\{B \neq \varnothing\}}/V(B)$, находим, что

$$\int\limits_{\{B \ominus \check{K} \neq \varnothing\}} \frac{1}{V(B)} F_0(dB) = Q(K) \int \frac{1}{V(B)} F_0(dB),$$

откуда видно, что $\int (1/V(B)) F_0(dB) < \infty$. Поэтому можно определить вероятность F на $\mathcal{G}/\tau$, полагая

$$F(dB) = \left[\int \left(\frac{1}{V(B)} F_0(dB)\right]^{-1} \frac{1}{V(B)} F_0(dB).$$

Ясно, что F является *натуральным законом* распределения пуассоновского полиэдра П. Заменяя $\varphi(B)$ в соотношении (6.2.5) на $1_{\{B \neq \varnothing\}}\varphi(B)/V(B)$, мы можем переписать это соотношение с использованием натурального закона F:

$$\int\limits_{\{B \ominus \check{K} \neq \varnothing\}} \varphi(B \ominus \check{K}) F(dB) = Q(K) \int \varphi(B) F(dB).$$

Здесь $B = u(\Pi)$ — класс в $\mathcal{G}/\tau$, соответствующий пуассоновскому полиэдру П. Беря $\varphi = 1$, мы видим, что вероятность того, что эрозия $\Pi \ominus \check{K}$ непуста, равна $Q(K)$, т. е.

$$P(\Pi \ominus \check{K} \neq \varnothing) = Q(K).$$

Поэтому мы можем так переписать (6.2.5) с использованием условных математических ожиданий:

$$E(\varphi(\check{B} \ominus K) \mid B \ominus \check{K} \neq \varnothing) = E(\varphi(B)).$$

Таким образом, интерпретация условной инвариантности при помощи натурального закона такова: *при условии* $\Pi \ominus \check{K} \neq \varnothing$ *эрозия* $\Pi \ominus \check{K}$ *эквивалентна самому* П.

Если X: $\Pi \to X(\Pi)$ — некоторая характеристика пуассоновского (в смысле натурального закона) полиэдра (т. е. случайная величина, определенная на пространстве выпуклых множеств и инвариантная относительно сдвигов), удовлетворяющая условию $X(\varnothing) = 0$, то в силу (6.2.5) мы имеем

$$E(X(\Pi \ominus \check{K})) = Q(K) E(X(\Pi)). \quad (6.2.6)$$

Это соотношение оказывается исключительно полезным в приложениях.

6.3. ПРИЛОЖЕНИЯ

В этом параграфе мы рассматриваем только пуассоновские полиэдры, соответствующие *стационарной* пуассоновской сети A, так что мера λ в (6.2.2) всегда будет симметричной на единичной сфере S_0. Кроме того, будет предполагаться, что пуассоновские полиэдры п. н. ограничены, т. е., как мы уже видели, подпространство, порожденное носителем меры λ на S_0, совпадает с $\mathbf{R}^d$.

Математические ожидания функционалов Минковского $W_k(\Pi)$

Для вычисления математического ожидания $W_k(\Pi)$ (соответствующего натуральному закону) возьмем гиперплоскости H_j сети A, и пусть K_i — замыкания выпуклых полиэдров, ими определяемых. (Сеть A локально конечна, так что с индексацией никаких проблем не возникает). Если $x_i = \Pi_{K_i} x_i$ — проекция на K_i точки $x \in \mathbf{R}^d$, не принадлежащей K_i, то x_i будет также проекцией точки x на (п. н. единственное) линейное многообразие, принадлежащее одной из сетей порядка 1, 2, ..., d, соответствующих A. Обратно, если $V = H_{j_1} \cap \ldots \cap H_{j_k}$ — линейное многообразие из сети k-го порядка, то $\Pi_V x$ является проекцией x на единственный пуассоновский полиэдр K_i. Принимая во внимание стационарность, получаем отсюда, что для всех $x \in \mathbf{R}^d$ (за исключением, быть может, множества лебеговой меры нуль) множества $\{\Pi_{K_i} x;\ K_i \not\ni x\}$ и $\{\Pi_{H_j} x\} \cup \cup \{\Pi_{H_{j_1} \cap H_{j_2}} x\} \cup \ldots$ совпадают друг с другом. Таким образом, для любых $\varphi \in C_{\mathcal{K}}(\mathbf{R}^d)$ и $r \geqslant 0$

$$\sum_i \int_{K_i \oplus rB} \varphi(\Pi_{K_i} x)\, dx = \sum_j \int_{H_j \oplus rB} \varphi(\Pi_{H_j} x)\, dx + \\ + \sum_{j_1 < j_2} \int_{(H_{j_1} \cap H_{j_2}) \oplus rB} \varphi(\Pi_{H_{j_1} \cap H_{j_2}} x)\, dx + \ldots .$$

Другими словами, для каждого $k = 0, 1, \ldots, d$ случайные меры Минковского, соответствующие пуассоновским полиэдрам K_i и полям порядков 1, 2, ..., d, связаны между собой соотношением

$$\sum_i W_k^{K_i} = \sum_j W_k^{H_j} + \sum_{j_1 < j_2} W_k^{H_{j_1} \cap H_{j_2}} + \ldots . \tag{6.3.1}$$

С другой стороны, если V — некоторое $(d-k)$-мерное линейное многообразие, то, как показывают несложные вычисления, его меры Минковского $W^V_{k'}=0$ для $k'\neq k$, а $W^V_k = \left(b_k/\binom{d}{k}\right)\mu^V_{d-k}$. Поэтому, переходя в (6.3.1) к математическим ожиданиям, получаем

$$E\left(\sum_i W_k^{K_i}(dx)\right)=\frac{b_k}{\binom{d}{k}}\nu_k\,dx,$$

и в силу (6.1.8)

$$E\left(\sum_i W_k^{K_i}(dx)\right)=\frac{b_k}{b_{d-k}}W_{d-k}(\Lambda)\,dx.$$

В частности, если rB — шар радиуса $r\geqslant 0$, то

$$E\left(\frac{\sum_i W_k^{K_i}(rB)}{b_d r^d}\right)=\frac{b_k}{b_{d-k}}W_{d-k}(\Lambda).$$

Используя одну эргодическую теорему (см. Майлз, 1969), можно показать, что при $r\uparrow\infty$ случайные величины $(1/b_d)\sum_i W_k^{K_i}(rB)/(b_d r^d)$ п. н. сходятся к $\nu_d=W_0(\Lambda)$, а $\sum_i W_k^{K_i}\times$ $\times(rB)/(b_d r^d)$ п. н. сходятся к $\nu_d E(W_k(\Pi))$, где Π — пуассоновский полиэдр, рассматриваемый с точки зрения натурального закона распределения. Отсюда заключаем, что

$$E(W_k)(\Pi))=\frac{b_k}{b_{d-k}}\frac{W_{d-k}(\Lambda)}{\nu_d}=\frac{b_k}{b_{d-k}}\frac{W_{d-k}(\Lambda)}{W_0(\Lambda)}. \qquad (6.3.2)$$

В частности, в изотропном случае штейнеровское выпуклое множество Λ является шаром радиуса a и

$$E(W_k(\Pi))=\frac{b_k}{b_{d-k}}a^{k-d}. \qquad (6.3.2')$$

Гранулометрия относительно единичного шара

Гранулометрия случайного множества A^c относительно единичного шара B представляет собой, как это было определено в § 1.5 и 2.7, функцию $r\to G_B(r)$, для которой

$$1-G_B(r)=P(\{x\in(A^c)_{rB}\}) \qquad (x\in\mathbf{R}^d),$$

где $(A^c)_{rB}$ — заполнение множества A^c шаром rB. Эта функция не зависит от выбора точки $x\in\mathbf{R}^d$ ввиду стационарности A. С другой стороны, используя эргодическую теорему, можно показать, что функция G_B и натуральный закон распределения пуассоновского полиэдра Π удовлетворяют соотношению

$$1-G_B(r)=\frac{E(W_0(\Pi_{rB}))}{E(W_0(\Pi))}.$$

Из (6.3.2) нам уже известно, что $E(W_0(\Pi)) = 1/\nu_d$, так что остается вычислить $E(W_0(\Pi_{rB}))$, где $\Pi_{rB} = (\Pi \ominus rB) \oplus rB$. В силу условной инвариантности, множество $\Pi \ominus rB$, если оно непусто, имеет тот же закон распределения, что и Π. Из соотношения $P(\Pi \ominus rB \neq \varnothing) = Q(rB) = \exp(-r\psi(B))$ получаем, что

$$1 - G_B(r) = \frac{E(W_0(\Pi \oplus rB))}{E(W_0(\Pi))} \exp(-r\psi(B)).$$

Применяя формулу Штейнера, а также соотношения (6.3.2) и (6.1.5′), приходим к формуле

$$1 - G_B(r) = \left[\sum_{k=0}^{d} \binom{d}{k} \frac{b_k}{b_{d-k}} W_{d-k}(\Lambda) r^k\right] \exp\left(-2r\left(\frac{d}{b_{d-1}}\right) W_{d-1}(\Lambda)\right). \tag{6.3.3}$$

В изотропном случае эта формула принимает вид

$$1 - G_B(r) = b_d \left(\sum_{k=0}^{d} \binom{d}{k} \frac{b_k}{b_{d-k}} a^k r^k\right) \exp\left(-2\left(\frac{db_d}{b_{d-1}}\right) ar\right). \tag{6.3.3′}$$

Справа стоит экспоненциальный многочлен, степень которого равна размерности нашего эвклидова пространства. При $d = 1$ получаем гамма-распределение с плотностью $\theta^2 r \exp(-\theta r)$ $[r \geqslant 0$, $\theta = 2W_0(\Lambda)$; в изотропном случае $\theta = 4a]$. Заметим, что в $\mathbf{R}^1$ шар rB представляет собой интервал длины $2r$, так что линейная гранулометрия имеет плотность $\beta^2 r \exp(-\beta r)$, $\beta = W_0(\Lambda)$ (в изотропном случае $\beta = 2a$). Этот закон, очевидно, отвечает взвешиванию с учетом длин. Соответствующий натуральный закон является экспоненциальным с плотностью $\beta \exp(-\beta r)$.

Связь между законами распределения объема V и площади поверхности S

Пусть $V = V(\Pi)$ — объем пуассоновского полиэдра Π (рассматриваемого с точки зрения натурального закона распределения), а $V(r) = V(\Pi \ominus rB)$ — объем эрозии $\Pi \ominus rB$. Мы имеем $Q(rB) = \exp(-\alpha r)$, $\alpha = \psi(B) = (2d/b_{d-1}) W_{d-1}(\Lambda)$. Поэтому из условной инвариантности и соотношения (6.2.6) вытекает, что для любой измеримой функции φ на $\mathbf{R}_+$

$$E[\varphi(V(r))] = E(\varphi(V)) \exp(-\alpha r).$$

Если мы положим $\varphi(x) = \exp(-\mu x) - 1$, $\mu \geqslant 0$, то увидим, что преобразования Лапласа $\Phi(\mu) = E(\exp(-\mu V))$ и $\Phi_r(\mu) = E(\exp(-\mu V(r))$ связаны между собой соотношением

$$\Phi_r(\mu) = 1 - \exp(-\alpha r) + \Phi(\mu) \exp(-\alpha r).$$

С другой стороны, $V(r)$ п. н. обладает производной справа $V'(r)$, причем $V'(0) = -S$, так как полиэдр П п. н. выпукл ($S = dW_1(\Pi)$ — площадь поверхности полиэдра П), так что из предыдущего соотношения вытекает равенство

$$E(S\exp(-\mu V)) = \frac{\alpha(1 - \Phi(\mu))}{\mu}. \tag{6.3.4}$$

Пусть теперь $h(V) = E(S\,|\,V)$ — *условное математическое ожидание S при заданном V*, а $F(dV)$ — закон распределения случайного объема $V(\Pi)$. Левая часть (6.3.4) является преобразованием Лапласа меры $h(V)F(dV)$, а правая — преобразованием Лапласа функции $\alpha(1 - F(V))$. Отсюда мы заключаем, что закон $F(dV)$ имеет *плотность* $f(V)$, для которой

$$f(V)h(V) = \alpha(1 - F(V)). \tag{6.3.5}$$

В качестве немедленного следствия получаем выражение закона F через условное математическое ожидание h:

$$1 - F(V) = \exp\left(-\alpha\int_0^V \frac{dx}{h(x)}\right)$$

$$[h(V) = E(S\,|\,V),\ \alpha = \psi(B) = (2d/b_{d-1})W_{d-1}(\Lambda)].$$

Связь между $\psi(\Pi_0)$ и числом $(d-1)$-мерных граней

Мы не в состоянии вывести явное выражение для распределения числа N $(d-1)$-мерных граней пуассоновского полиэдра $\overline{\Pi}_0$ (рассматриваемого с точки зрения объемного закона), однако, мы увидим, законы N и $\psi(\Pi_0)$ тесно связаны между собой. Заметим, что $\psi(\overline{\Pi}_0)$ есть значение функционала ψ на самом $\overline{\Pi}_0 \in \mathcal{K}$. В изотропном случае $\psi(\Pi_0)$ пропорционально $W_{d-1}(\Pi_0)$ и, в частности, при $d = 2$ пропорционально *периметру* пуассоновского многоугольника, как это следует из (6.1.4).

Пусть N — число $(d-1)$-мерных граней $\overline{\Pi}_0$, а $P_n = P(\{N = n\})$ (для объемного закона). Значение P_n не изменится, если ψ заменить на $(1+\lambda)\psi$ $(\lambda \geqslant 0)$. Но пуассоновская сеть, соответствующая функционалу $(1+\lambda)\psi$, эквивалентна объединению двух независимых пуассоновских сетей с функционалами ψ и $\lambda\psi$ соответственно, и вероятность того, что полиэдр Π_0 (определяемый сетью с фунционалом $(1+\lambda)\psi$) будет иметь ровно n граней, каждая из которых принадлежит ψ-сети, равна $P_n/(1+\lambda)^n$. Эту вероятность можно вычислить и другим путем, рассматривая события: (1) полиэдр Π_0, определяемый ψ-сетью, имеет ровно n граней (вероятность его P_n) и (2) этот полиэдр Π_0 не пересекается с $\lambda\psi$-сетью (вероятность его $E_0[\exp(-\lambda\psi(\Pi_0))\mid n]$). Отсюда вытекает, что

$$E_0[\exp(-\lambda\psi(\Pi_0))\mid N]=\frac{1}{(1+\lambda)^N}. \tag{6.3.6}$$

(Индекс 0 в E_0 указывает, что математическое ожидание берется относительно объемного закона.) Иными словами, условное распределение $\psi(\Pi_0)$ при условии $N=n$ является *гамма-распределением* с плотностью

$$\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\exp(-x).$$

Далее, из соотношения

$$E_0[\exp(-\lambda\psi(\Pi_0))]=\sum_{n=d+1}^{\infty}\frac{p_n}{(1+\lambda)^n} \tag{6.3.6'}$$

видно, что распределения $\psi(\Pi_0)$ и N могут быть выведены одно из другого.

Если характеристика X такова, что $X(\lambda\Pi_0)=X(\Pi_0)$, $\lambda\geqslant 0$, то по тем же самым соображениям $E_0[\exp(-\lambda\psi(\Pi_0))\mid N, X]=1/(1+\lambda)^N$, так что при фиксированном N случайная величина $\psi(\Pi_0)$ не зависит ни от какой безразмерной характеристики $X(\Pi_0)$.

Первые моменты объема $\mathscr{V}$

Мы предположим теперь, что пуассоновская сеть A *изотропна*, и обозначим ее параметр буквой a (т. е. штейнеровским выпуклым множеством Λ, соответствующим A, является шар aB). Для вычисления первых моментов объема $V=W_0(\Pi_0)$, площади поверхности $S=dW_1(\Pi_0)$ и площади проекции V' полиэдра Π_0 на заданную гиперплоскость мы используем функцию g, определяемую соотношением

$$g(h)=E\left(\int_{\mathbb{R}^d}1_{\Pi_0}(x)\,1_{\Pi_0}(x+h)\,dx\right)=\int_{\mathbb{R}^d}Q(\{x,\ x+h\})\,dx.$$

Заметим, что в силу (6.2.3) $Q(\{x,\ x+h\})=\exp(-\psi(C))$, где C — треугольник $(0, x, x+h)$, а в силу (6.1.4) $\psi(C)=a(|x|+|h|+|x+h|)$, т. е.

$$Q(\{x,\ x+h\})=\exp(-a(|x|+|h|+|x+h|)) \tag{6.3.7}$$

и

$$g(h)=\exp(-a|h|)\int\exp(-a|x|)\exp(-a|x+h|)\,dx.$$

Этот интеграл представляет собой свертку экспоненциальной функции $x\to\exp(-a|x|)$ с самой собой, и его можно вычислить при помощи преобразования Фурье. А именно, преобразованием Фурье функции $x \to \exp(-a|x|)$ служит функция

$$u \to 2^d a^{-d} \pi^{(d-1)/2} \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)\left(1+\frac{4\pi^2|u|^2}{a^2}\right)^{(d+1)/2},$$

так что свертка $\exp(-a|\cdot|) * \exp(-a|\cdot|)$ имеет преобразование Фурье

$$\left(\frac{2}{a}\right)^{2d} \frac{\pi^{d-1}(\Gamma(d-1)/2)^2}{(1+4\pi^2|u|^2/a^2)^{d+1}}.$$

Обратное преобразование приводит к явному выражению для этой свертки, содержащему функцию Бесселя $K_{1+d/2}$. Если мы положим $r=|h|$ и будем писать $g(r)$ вместо $g(h)$, то найдем после некоторых вычислений, что

$$g(r)=\frac{2^{d/2}\pi^{d/2-1}}{a^d d!}\left(\frac{\Gamma(d+1)}{2}\right)^2 \exp(-ar)\cdot(ar)^{1+d/2} K_{1+d/2}(ar). \quad (6.3.8)$$

Остается воспользоваться соотношениями $g(0)=E_0(V)$ и $\int_{\mathbb{R}^d} g(h)\,dh = E_0(V^2)$. По поводу вычисления интеграла

$$I=\int_{\mathbb{R}^d} g(h)\,dh = \iint \exp(-a|x|-a|h|-a|x+h|)\,dx\,dh$$

заметим, что он является значением в точке 0 свертки $f*f*f$ (где f — функция $x \to f(x)=\exp(-a|x|)$) и может быть вычислен с помощью преобразования Фурье. Окончательно мы получаем, что первые два момента объема V (относительно объемного закона) таковы:

$$E_0(V)=2^{-d} b_d d!\, a^{-d},$$
$$E_0(V^2)=2^{2d}\pi^{d-3/2}\frac{\Gamma(d+3/2)\,[\Gamma((d+1)/2)]^3}{\Gamma(3(d+1)/2)} a^{-2d}. \quad (6.3.9)$$

Индекс 0 в E_0 напоминает, что E_0 — это математическое ожидание относительно объемного закона. Согласно эргодической теореме, это E_0 таково, что $E_0(V^k)=E(V^{k+1})/E(V)$, где E — математическое ожидание относительно натурального закона. Но из (6.3.2′) нам уже известно, что $E(V)=E(W_0)=1/(b_d a^d)$. Таким образом, формулы (6.3.9) дают *первые три момента* натурального закона распределения объема V:

$$E(V)=\frac{1}{b_d a^d},$$
$$E(V^2)=2^{-d} d!\, a^{-2d},$$
$$E(V^3)=2^{2d}\pi^{(d-3)/2}\frac{\Gamma(1+d/2)\,\Gamma(d+3/2)\,[\Gamma((d+1)/2)]^3}{\Gamma(3(d+1)/2)} a^{-3d}.$$

В частности, в эвклидовом пространстве $\mathbf{R}^2$

$$E(V)=\frac{1}{\pi a^2},\quad E(V^2)=\frac{1}{2a^4},\quad E(V^3)=\frac{4\pi}{7a^6},$$

а в $\mathbf{R}^3$

$$E(V)=\frac{3}{4\pi a^3},\quad E(V^2)=\frac{3}{4a^6},\quad E(V^3)=\frac{21\pi}{8a^9}.$$

Первые моменты площади проекции V'

Пусть теперь $V'=V'(\Pi)$ будет $(d-1)$-мерным объемом площади проекции пуассоновского полиэдра Π на заданную гиперплоскость в $\mathbf{R}^d$. (Здесь мы придерживаемся натурального закона.) Вычислим первые два момента V'.

С точки зрения натурального закона функция g в (6.3.8) есть

$$g(r)=\frac{E(VV(r))}{E(V)},$$

где $V(r)=V(\Pi\cap\Pi_r)$ — объем пересечения $\Pi\cap\Pi_r$ полиэдра Π с его сдвигом Π_r в направлении $u_0\in S_0$ на расстояние $r\geqslant 0$. Полиэдр Π выпукл, так что $\Pi\cap\Pi_r$ является также эрозией полиэдра Π множеством $\{\lambda u_0,\ 0\leqslant\lambda\leqslant r\}$. Пусть теперь $\rho\geqslant 0$ — вещественное положительное число, а $\Pi_{\rho+r}$ — сдвиг Π на $(\rho+r)u_0$. В силу соотношения (6.2.6) и условной инвариантности,

$$E(V(r)V(r+\rho))=E(VV(\rho))\exp(-2ar)=E(V)g(\rho)\exp(-2ar). \tag{6.3.10}$$

С другой стороны, $V(r)$ имеет в точке $r=0$ производную справа, которая равна $V'(0)=-V'$. Дифференцируя (6.3.10) один раз по r и один раз по ρ и полагая $r=\rho=0$, получаем

$$E((V')^2)+E(VV''(0))=-2aE(VV'(0)). \tag{6.3.11}$$

Использование разложения функции Бесселя $K_{1+d/2}$ в (6.3.8) дает

$$E(VV(r))=E(V^2)\left(1-ar+\frac{d-1}{2d}a^2r^2-\dots\right)$$

$(d>1)$. Кроме того, мы уже вычислили $E(V^2)=d!\,2^{-d}a^{-2d}$. Таким образом,

$$E(VV'(0))=-aE(V^2)=-2^{-d}a^{1-2d}d!,$$

$$E(VV''(0))=\frac{d-1}{d}a^2E(V^2)=(d-1)((d-1)!)\,2^{-d}a^{2-2d}.$$

Подставляя эти выражения в (6.3.11), получаем

$$E(V'^2)=\frac{d+1}{d}a^2E(V^2)=(d+1)(d-1)!\,2^{-d}a^{2-2d}. \tag{6.3.12}$$

Аналогичным образом из условной инвариантности и соотношения (6.2.6) вытекает, что $E(V(r)) = E(V)\exp(-2ar)$, так что

$$E(V') = 2aE(V) = \frac{2}{b_d} a^{1-d}.$$

Итак, мы вычислили первые два момента площади проекции V' (рассматриваемые с точки зрения натурального закона). В случае $d=2$

$$E(V') = \frac{2}{\pi a}, \quad E(V'^2) = \frac{3}{4a^2}, \quad E(VV') = \frac{1}{2a^3},$$

а в случае $d=3$

$$E(V') = \frac{3}{2\pi a^2}, \quad E(V'^2) = \frac{1}{a^4}, \quad E(VV') = \frac{3}{4a^6}.$$

Первые моменты площади поверхности S

Пусть S_d — площадь поверхности изотропного пуассоновского полиэдра в $\mathbf{R}^d$, т. е. $(d-1)$-мерный объем его границы. Согласно (4.1.6), эта площадь S_d связана с площадью $V'(u)$ проекции на гиперплоскость $u^\perp$, $u \in S_0$, соотношением

$$S_d = \frac{db_d}{b_{d-1}} \int V'(u)\,\varpi(du). \qquad (6.3.13)$$

Поэтому математическое ожидание S_d относительно натурального закона равно

$$E(S_d) = \frac{db_d}{b_{d-1}} E(V') = \frac{2d}{b_{d-1}} a^{1-d},$$

а относительно объемного

$$E_0(S_d) = \frac{db_d}{b_{d-1}} E_0(V') = \frac{db_d}{b_{d-1}} \frac{E(VV')}{E(V)} = d2^{-d}d! \left(\frac{(b_d)^2}{b_{d-1}}\right) a^{1-d}.$$

Но $E_0(S_d)$ и $E(S_d^2)$ связаны друг с другом, как видно из следующих эвристических соображений. При условии что некоторая гиперплоскость поля A содержит точку 0, два полиэдра Π_1 и Π_2, границы которых содержат 0, имеют один и тот же вероятностный закон, получающийся взвешиванием натурального закона при помощи случайной величины S_d. Поэтому, если S_1 и S_2 — площади поверхностей Π_1 и Π_2, то $E(S_1) = E(S_2) = E(S_d^2)/E(S_d)$. С другой стороны, если гиперплоскость, содержащую точку 0, удалить, то останется полиэдр $\Pi_0 = \Pi_1 \cup \Pi_2$, закон распределения которого является объемным законом. Площадь поверхности S_0 этого полиэдра равна $S_0 = S_1 + S_2 - 2F$, где F обозначает $(d-1)$-мерный объем пересечения $\Pi_1 \cap \Pi_2$. Но $\Pi_1 \cap \Pi_2$ — произвольный полиэдр для индуцированного в $\mathbf{R}^{d-1}$ поля (рассматриваемый с точки зрения объемного закона). Поэтому $E(F)=E_0(V_{d-1})$. Окончательно

$$E_0(S_d)=E(S_0)=E(S_1)+E(S_2)-2E(F)=\frac{2E(S_d^2)}{E(S_d)}-2E_0(V_{d-1}).$$

Учитывая предыдущие результаты, получаем

$$\begin{aligned} E(S_d) &= \frac{2d}{b_{d-1}}a^{1-d}, \\ E(S_d^2) &= 2^{2-d}d!\left(1+\left(\frac{db_d}{2b_{d-1}}\right)^2\right)a^{2-2d}. \end{aligned} \tag{6.3.14}$$

В частности, при $d=3$ площадь поверхности пуассоновского полиэдра имеет первые два момента

$$E(S)=\frac{6}{\pi a^2},\quad E(S^2)=\frac{15}{a^4}.$$

При $d=2$ первые моменты параметра пуассоновского многоугольника равны

$$E(S)=\frac{2}{a},\quad E(S^2)=\frac{\pi^2/2+2}{a^2}.$$

Изотропные пуассоновские многоугольники

В случае $d=2$ можно найти закон распределения площади проекции, т. е. *ширины* изотропного пуассоновского многоугольника (рассматриваемой с точки зрения натурального закона). (Напомним, что ширина — это расстояние между двумя опорными параллельными прямыми.) Этот закон абсолютно непрерывен и имеет плотность

$$f(x)=\frac{4a}{\pi}(2ax)K_{-1}(2ax)\quad(x\geqslant 0), \tag{6.3.15}$$

где K_{-1} — модифицированная функция Бесселя второго порядка, а его момент n-го порядка ($n\geqslant 0$, не обязательно целое) равен

$$m_n=\frac{\Gamma(n+2)}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma((1+n)/2)}{\Gamma(1+n/2)}(2a)^{-n}.$$

Доказательство. Прежде всего укажем явную процедуру, позволяющую построить (натуральный) пуассоновский многоугольник П. Пусть A — изотропная сеть прямых. Предположим, что точка 0 является вершиной сети A (т. е. пересечением двух прямых из A). Если эвклидова плоскость имеет координатные оси x и y, то один (и п. н. только один) из четырех многоугольников, имеющих 0 в качестве вершины, содержится в полуплоскости $x\geqslant 0$. Используя эргодическую теорему, можно показать, что этот многоугольник эквивалентен многоугольнику П с натуральным законом распределения. Интуитивно это можно объяснить тем, что пуассоновская сеть порождает в среднем одинаковое число вершин и многоугольников. Пусть β_0 и β_1 $(-\pi/2 \leqslant \beta_0 \leqslant \beta_1 \leqslant \pi/2)$ — углы, образуемые с осью x двумя сторонами многоугольника, содержащими точку 0. Нетрудно увидеть, что распределение этой пары случайных величин имеет плотность

$$g(\beta_0, \beta_1) = \frac{1}{\pi} \sin(\beta_1 - \beta_0) \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leqslant \beta_0 \leqslant \beta_1 \leqslant \frac{\pi}{2}\right).$$

Пусть теперь M — (п. н. единственная) вершина многоугольника П, координаты которой (x_0, y_0) таковы, что П содержится в полуплоскости $x \leqslant x_0$. Ясно, что x_0 является шириной нашего многоугольника[1] (в направлении оси y). Чтобы получить распределение x_0, рассмотрим событие $\{x_0 \geqslant r\}$, эквивалентное событию {прямая $x = r$ пересекает П}. Сначала предположим, что β_0 и β_1 фиксированы. Тогда событие $\{x_0 \geqslant r\}$ будет иметь место, если происходит одно из двух следующих (непересекающихся) событий:

1. Точка $M_1 = (r, r \operatorname{tg} \beta_1)$ принадлежит П. Вероятность этого события равна $\exp(-2ar/\cos\beta_1)$.

2. На прямой $x = r$ найдется точка $M = (r, y)$, $r \operatorname{tg} \beta_0 \leqslant y < r \operatorname{tg} \beta_1$, $M \in \Pi$, такая, что $(r, y+\varepsilon) \notin \Pi$ для любых $\varepsilon > 0$. Соответствующая вероятность равна

$$ar \int_{\beta_0}^{\beta_1} \exp\left(\frac{-2ar}{\cos\alpha}\right)(1 + \sin\alpha)\frac{d\alpha}{\cos^2\alpha}.$$

Действительно, $P((r, y) \in \Pi$ и $(r, y+\varepsilon) \notin \Pi) = P((r, y) \in \Pi) - P((r, y) \in \Pi$ и $(r, y+\varepsilon) \in \Pi) = \exp(-2ar) - \exp[a(\sqrt{r^2+y^2} + \sqrt{r^2+(y+\varepsilon)^2} + \varepsilon)]$, откуда после несложных выкладок и получается указанное выражение. Используя его, приходим к соотношению

$$P(x_0 \geqslant r) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \exp\left(\frac{-2ar}{\cos\beta_1}\right) d\beta_1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(\beta_1 - \beta_0)\, d\beta +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\beta_1 \int_{-\pi/2}^{\beta_1} \sin(\beta_1 - \beta_0)\, d\beta_1 \int_{\beta_0}^{\beta_1} \exp\left(\frac{-2ar}{\cos\alpha}\right)(1 + \sin\alpha)\frac{d\alpha}{\cos^2\alpha}.$$

[1] Речь идет о том самом четырехугольнике с вершиной в 0, который содержится в полуплоскости $x \geqslant 0$. — *Прим. ред.*

Производя элементарные вычисления, получаем

$$P(x_0 \geqslant r) = \frac{4ar}{\pi} \int_0^{\pi/2} \exp\left(\frac{-2ar}{\cos\alpha}\right) \frac{d\alpha}{\cos\alpha} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \exp\left(\frac{-2ar}{\cos\alpha}\right) d\alpha.$$

Дифференцируя по r, найдем плотность $f(x)$ искомой ширины:

$$f(x) = \frac{8a^2x}{\pi} \int_0^{\pi/2} \exp\left(\frac{-ax}{\cos\alpha}\right) \frac{d\alpha}{\cos^2\alpha}.$$

Это выражение совпадает с (6.3.15).

Рассмотрим теперь *распределение числа N сторон пуассоновского многоугольника* Π_0 (с точки зрения объемного закона). Обозначим *периметр* Π_0 через S. В силу (6.1.4), $\psi(\Pi_0) = aS$; отсюда следует, согласно (6.3.6′), что $aE_0(S) = \sum nP_n$. Но мы уже вычислили $E_0(S) = \pi^2/(2a)$, так что

$$E_0(N) = \frac{\pi^2}{2}.$$

Теперь, чтобы перейти к натуральному закону, положим $p_n = P(N(\Pi) = n)$ и $Z = V/S^2$. Поскольку Z — безразмерная характеристика, то $Z(\Pi_0)$ и $S(\Pi_0)$ независимы при фиксированном N. Пусть $f_n(z)$ и $g_n(z, S)$ обозначают условные плотности случайных величин $Z(\Pi_0)$ и $(Z(\Pi), S(\Pi))$ при условии $N = n$. Из соотношения $F_0(d\Pi) = [V(\Pi)/E(V(\Pi))] \times F(d\Pi)$ вытекает, что

$$r_n = P_n \frac{E(V)}{E(V \mid n)} = P_n\, E(V)\, E_0\left(\frac{1}{V} \,\middle|\, n\right),$$

$$g_n(z, S) = E(V \mid n) \frac{1}{zS^2} f_n(z)\, a^n S^{n-1} \frac{\exp(-aS)}{n!}.$$

Таким образом, при условии $N = n$ случайные величины Z и S независимы относительно натурального закона, и закон распределения S является гамма-распределением с плотностью $(a(aS)^{n-3}/(n-3)!)\exp(-aS)$. Поэтому

$$E(S(\Pi)) = \frac{1}{a} \sum (n-2)\, p_n,$$

$$E[(S(\Pi))^2] = \frac{1}{a^2} \sum (n-1)(n-2)\, p_n.$$

Но мы знаем уже, что $E(S) = 2/a$ и $E(S^2) = (\pi^2/2 + 2)/a^2$. Значит, первые два момента числа сторон пуассоновского многоугольника (относительно натурального закона) равны

$$E(N) = 4, \quad E(N^2) = \frac{\pi^2}{2} + 12.$$

ГЛАВА 7

ГРАНУЛОМЕТРИИ

С точки зрения математической строгости обычно используемые понятия распределения размера, как правило, определены некорректно и не всегда находятся в соответствии с точными геометрическими свойствами изучаемых объектов. В этой главе мы вводим более общее понятие гранулометрического отображения, или попросту гранулометрии. Это — отображение, значениями которого являются множества и которое удовлетворяет системе аксиом, выбранной таким образом, чтобы было обеспечено точное обобщение физического смысла понятия распределения размера. В качестве частного случая у нас будут использоваться гранулометрии $A \to A_{\lambda K}$ множества A по отношению к компактному выпуклому множеству K, определенные в гл. 1 и 2.

Определение и чисто алгебраические свойства гранулометрий сами по себе особой сложности не представляют. Однако использование этого понятия применительно к случайным замкнутым множествам и их дополнениям возможно лишь при условии установления факта измеримости. Поэтому наиболее удобными для исследования оказываются полунепрерывные сверху на $\mathcal{F}$ и полунепрерывные снизу на $\mathcal{G}$ гранулометрии.

Далее, в практических ситуациях исследование замкнутых множеств может производиться только на основании их локальных свойств. Этот факт оправдывает введение определения 7.1.1 (компактных заполнений) и определения 7.2.3 (полунепрерывных сверху и компактных гранулометрий). Однако эти компактные отображения охарактеризовать уже не столь просто, и по этой причине мы сначала рассматриваем наиболее простой (и практически единственно важный для приложений) случай, а именно случай заполнений, согласованных со сдвигами, и эвклидовых гранулометрий (§ 7.1 и 7.2). В следующем, третьем параграфе мы приступаем к вероятностным рассмотрениям.

Последние два параграфа посвящены изучению топологических свойств заполнений и гранулометрий в произвольном ЛКС-пространстве, и читатель, интересующийся только эвклидовым случаем, может пропустить их.

7.1. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ ЗАПОЛНЕНИЯ И ПОПОЛНЕНИЯ

Пусть E — некоторое ЛКС-пространство, $\mathcal{P}=\mathcal{P}(E)$ — класс всех его подмножеств, $\mathcal{A}\subset\mathcal{P}$ и ψ — некоторое отображение из $\mathcal{A}$ в $\mathcal{P}$. Отображение ψ называется *возрастающим*, если из A, $B\in\mathcal{A}$ и $A\subset B$ вытекает, что $\psi(A)\subset\psi(B)$; *экстенсивным* (соотв. *антиэкстенсивным*), если $A\subset\psi(A)$ (соотв. $\psi(A)\subset A$) для любого $A\in\mathcal{A}$; *идемпотентным*, если образ $\psi(\mathcal{A})$ содержится в $\mathcal{A}$ и $\psi=\psi\circ\psi$. Мы будем называть отображение ψ *пополнением* (соотв. *заполнением*[1]), если оно возрастает, экстенсивно (соотв. антиэкстенсивно) и идемпотентно. Понятие гранулометрии тесно связано с этими классическими алгебраическими определениями.

Пусть $\mathcal{A}^*=\{A : A^c\in\mathcal{A}\}$ — класс множеств, дополнительных к множествам $A\in\mathcal{A}$. *Двойственное отображение* ψ^*: $\mathcal{A}^*\to\mathcal{P}$ определяется соотношением $\psi^*(A)=\complement\psi(A^c)$, $A\in\mathcal{A}^*$. Таким образом, $\psi^*=\complement\circ\psi\circ\complement$. Поэтому ψ^* возрастает тогда и только тогда, когда возрастает ψ. Оно является пополнением тогда и только тогда, когда ψ представляет собой заполнение, и обратно. Очевидно, что $\psi^{**}=\psi$.

Продолжения возрастающего отображения

Если $\mathcal{A}\subset\mathcal{P}$, то всякое возрастающее отображение ψ: $\mathcal{A}\to\mathcal{P}$ допускает *наименьшее* $\underset{\sim}{\psi}$ *и наибольшее* $\tilde{\psi}$ *продолжения* на $\mathcal{P}$, а именно

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{\psi}(B)&=\bigcup\{\psi(A);\quad A\in\mathcal{A},\ A\subset B\},\\ \tilde{\psi}(B)&=\bigcap\{\psi(A);\quad A\in\mathcal{A},\ A\supset B\}\end{aligned}\qquad (B\in\mathcal{P}).\qquad (7.1.1)$$

Объединение (соотв. пересечение) пустого семейства равно $\varnothing$ (соотв. E), поэтому $\underset{\sim}{\psi}(B)=\varnothing$, если не существует таких $A\in\mathcal{A}$, для которых $A\subset B$, и $\tilde{\psi}(B)=E$, если не существует таких $A\in\mathcal{A}$, для которых $A\supset B$. Двойственные отображения удовлетворяют, очевидно, соотношениям

$$(\underset{\sim}{\psi})^*=(\tilde{\psi}^*),\qquad (\tilde{\psi})^*=(\underset{\sim}{\psi}^*).$$

Если ψ — заполнение на $\mathcal{A}$, то его наименьшее продолжение $\underset{\sim}{\psi}$ на $\mathcal{P}$ также является заполнением.

Доказательство. Ясно, что $\underset{\sim}{\psi}$ — возрастающее и антиэкстенсивное отображение. Остается доказать, что оно идемпотентно.

[1] В оригинале соответственно closing и opening. — *Прим. перев*

Для любого $B \in \mathcal{P}$ имеем

$$\underset{\sim}{\psi}\underset{\sim}{\psi}(B) = \underset{\sim}{\psi}(\bigcup \{\psi(A)\colon A \in \mathcal{A},\ A \subset B\})$$

и, значит,

$$\underset{\sim}{\psi}\underset{\sim}{\psi}(B) \supset \bigcup \{\underset{\sim}{\psi}\psi(A),\ A \in \mathcal{A},\ A \subset B\} = \\ = \bigcup \{\psi(A);\ A \in \mathcal{A},\ A \subset B\} = \underset{\sim}{\psi}(B),$$

поскольку $\underset{\sim}{\psi}$ возрастает и служит продолжением идемпотентного отображения ψ. Но $\underset{\sim}{\psi}$ антиэкстенсивно, и поэтому $\underset{\sim}{\psi}\underset{\sim}{\psi}(B) = \underset{\sim}{\psi}(B)$.

Обозначим через $\mathcal{B}$ класс множеств $B \in \mathcal{A}$, *инвариантных относительно операции заполнения*, т. е. $\mathcal{B} = \{B\colon B \in \mathcal{A},\ \psi(B) = B\}$. Тогда сужение ψ на $\mathcal{B}$ представляет собой тождественное отображение на $\mathcal{B}$. Обратно, ψ *является наименьшим продолжением на $\mathcal{A}$ тождественного отображения* на $\mathcal{B}$. Действительно, из $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$ и $B \subset A$ вытекает, что $B = \psi(B) \subset \psi(A)$ и потому $\psi(A) \supset \bigcup \{B;\ B \in \mathcal{B},\ B \subset A\}$. С другой стороны, $\psi(A) \in \mathcal{B}$, поскольку ψ идемпотентно, и $\psi(A) \subset A$, так что $\psi(A) = \bigcup \{B;\ B \in \mathcal{B},\ B \subset A\}$. Отсюда и следует, что $\underset{\sim}{\psi}$ есть наименьшее продолжение на $\mathcal{P}$ тождественного преобразования на $\mathcal{B}$, т. е. $\underset{\sim}{\psi}(D) = \bigcup \{B,\ B \in \mathcal{B},\ B \subset D\}$ для любого $D \in \mathcal{P}$. Таким образом, класс $\underset{\sim}{\mathcal{B}}$ множеств, инвариантных относительно $\underset{\sim}{\psi}$, совпадает с замкнутым относительно взятия бесконечных объединений классом множеств из $\mathcal{B}$ (отсюда вытекает, что $\varnothing \in \mathcal{B}$).

По двойственности аналогичные результаты справедливы и для случая, когда ψ — пополнение, а не заполнение, и мы можем записать следующее

Предложение 7.1.1. *Пусть ψ — заполнение (соотв. пополнение) на $\mathcal{P}$, а $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}$ — класс инвариантных относительно ψ множеств. Тогда класс $\mathcal{B}$ замкнут относительно взятия бесконечных объединений (соотв. пересечений) и $\varnothing \in \mathcal{B}$ (соотв. $E \in \mathcal{B}$). Далее, ψ есть наименьшее (соотв. наибольшее) продолжение на $\mathcal{P}$ тождественного отображения на $\mathcal{B}$.*

Обратно, если $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{P}$ — некоторый класс подмножеств в E, то наименьшее (соотв. наибольшее) продолжение на $\mathcal{P}$ тождественного отображения на $\mathcal{B}_0$ является заполнением (соотв. пополнением) ψ, а класс $\mathcal{B}$ множеств, инвариантных относительно ψ, совпадает с замкнутым относительно $\bigcup$ (соотв. $\bigcap$) классом, порождаемым $\mathcal{B}_0$. В частности, $\varnothing \in \mathcal{B}$ (соотв. $E \in \mathcal{B}$).

Если ψ — заполнение (или пополнение) на $\mathcal{P}$, то его сужение на заданный класс $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}$ остается заполнением (пополнением) на $\mathscr{A}$ только в том случае, если класс $\mathscr{A}$ замкнут относительно ψ, т. е. если из $A \in \mathscr{A}$ вытекает, что и $\psi(A) \in \mathscr{A}$. В связи с этим возникает вопрос, при каких условиях замкнуты относительно ψ обычно используемые пространства $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ и $\mathscr{K}$.

Предложение 7.1.2. *Пусть ψ — заполнение на $\mathscr{P}$, а $\mathscr{B}$ — класс инвариантных относительно ψ множеств.*

a) $\mathscr{F}$ замкнуто относительно ψ тогда и только тогда, когда класс $\mathscr{B}$ замкнут относительно замыкания, т. е. $B \in \mathscr{B}$ влечет $\bar{B} \in \mathscr{B}$.

b) $\mathscr{K}$ замкнуто относительно ψ тогда и только тогда, когда $\bar{B} \in \mathscr{B}$ для любого относительно компактного ψ-инвариантного множества $B \in \mathscr{B}$.

c) $\mathscr{G}$ замкнуто относительно ψ тогда и только тогда, когда всякое множество $B \in \mathscr{B}$ обладает фундаментальной системой открытых окрестностей, принадлежащих $\mathscr{B}$.

Доказательство. Для любого $B \in \mathscr{B}$ имеем $B = \psi(B) \subset \bar{B}$, поэтому $B \subset \psi(\bar{B})$. Отсюда вытекает, что если $\mathscr{F}$ замкнуто относительно ψ, то $\bar{B} \subset \psi(\bar{B})$ (поскольку $\psi(\bar{B}) \in \mathscr{F}$). Следовательно, $\bar{B} = \psi(\bar{B}) \in \mathscr{B}$. Обратно, для любого $F \in \mathscr{F}$ мы имеем $\psi(F) \subset \overline{\psi(F)} \subset F$. Если класс $\mathscr{B}$ замкнут относительно замыкания, то $\overline{\psi(F)} \in \mathscr{B}$ (ибо $\psi(F) \in \mathscr{B}$) и поэтому из $\overline{\psi(F)} \subset F$ вытекает, что $\overline{\psi(F)} \subset \psi(F)$, т. е. $\psi(F) = \overline{\psi(F)}$. Таким образом, утверждение a) доказано; утверждение b) является его следствием.

Пусть $B \in \mathscr{B}$ и $G \in \mathscr{G}$ таковы, что $B \subset G$ и потому $B \in \psi(G) \subset G$. Если $\mathscr{G}$ замкнуто относительно ψ, то $\psi(G) \in \mathscr{G}$ — открытая окрестность B, содержащаяся в G. Следовательно, B обладает фундаментальной системой открытых окрестностей, содержащихся в $\mathscr{B}$. Обратно, если любое $B \in \mathscr{B}$ обладает фундаментальной системой окрестностей из $\mathscr{B} \cap \mathscr{G}$, то для всякого $G \in \mathscr{G}$ найдется такое $B \in \mathscr{B} \cap \mathscr{G}$, что $\psi(G) \subset B \subset G$. Отсюда вытекает, что $\psi(G) = B$, и $\psi(G) \in \mathscr{G}$.

Следствие. *Пусть ψ' — пополнение на $\mathscr{P}$, а $\mathscr{B}'$ — класс инвариантных относительно ψ' множеств.*

a) $\mathscr{G}$ замкнуто относительно ψ' тогда и только тогда, когда $\mathscr{B}'$ замкнуто относительно взятия внутренности $B \to \mathring{B}$.

b) $\mathscr{K}$ замкнуто относительно ψ' тогда и только тогда, когда для любых $B \in \mathscr{B}$ и $K \in \mathscr{K}$, таких, что $K \subset B$, существует такое $B' \in \mathscr{K} \cap \mathscr{B}'$, что $K \subset B' \subset B$.

c) $\mathcal{F}$ *замкнуто относительно* ψ' *тогда и только тогда, когда для любых* $B \in \mathcal{B}'$ *и* $F \in \mathcal{F}$, *таких, что* $B \supset F$, *существует такое* $B' \in \mathcal{F} \cap \mathcal{B}'$, *что* $F \subset B' \subset B$.

Определение 7.1.1. *Будем называть заполнение* ψ *на* $\mathcal{P}$ *компактным, если выполняются следующие условия:*

a) $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ *и* $\mathcal{K}$ *замкнуты относительно* ψ;

b) ψ *полунепрерывно сверху на* $\mathcal{F}$, *полунепрерывно сверху на* $\mathcal{K}$ *и полунепрерывно снизу на* $\mathcal{G}$.

c) ψ *является наименьшим продолжением своего сужения на* $\mathcal{K}$.

Из этого определения вытекает, что $\psi(A) = \bigcup \{\psi(K),\ K \subset A,\ K \in \mathcal{K}\}$ для любого $A \in \mathcal{P}$. Полная характеризация компактных заполнений будет дана в предложении 7.4.10. Предварительно мы рассмотрим простейший (и наиболее важный) частный случай — случай заполнений, согласованных со сдвигами, на эвклидовом пространстве $\mathbf{R}^d$.

τ-заполнения и τ-пополнения в $\mathbf{R}^d$

Для всякого класса $\mathcal{A}$ множеств в $\mathbf{R}^d$, замкнутого относительно сдвигов, будем называть отображение ψ из $\mathcal{A}$ в $\mathcal{P}$ *согласованным со сдвигами* или для краткости *τ-отображением*[1], если $\psi(A \oplus \{h\}) = \psi(A) \oplus \{h\}$ при любых $A \in \mathcal{A}$ и $h \in \mathbf{R}^d$. Аналогично пополнение (заполнение) на $\mathbf{R}^d$ называется *τ-пополнением* (*τ-заполнением*), если оно согласовано со сдвигами. Очевидно, что пополнение (или заполнение) представляет собой τ-отображение тогда и только тогда, когда класс $\mathcal{B}$ его инвариантных множеств замкнут относительно сдвигов.

Пусть ψ — некоторое τ-отображение на $\mathbf{R}^d$, а $\mathcal{B}$ — класс ψ-инвариантных множеств, замкнутый относительно сдвигов. Подкласс $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$ называется *базисом* $\mathcal{B}$, если порождаемый $\mathcal{B}_0$ класс, замкнутый относительно сдвигов и бесконечных объединений, совпадает с $\mathcal{B}$. При этом для любого $A \in \mathcal{P}$

$$\psi(A) = \bigcup \{B \oplus \{x\};\ x \in \mathbf{R}^d,\ B \in \mathcal{B}_0,\ B \oplus \{x\} \subset A\}.$$

Но заполнение A_B множества A множеством B равно

$$A_B = (A \ominus \check{B}) \oplus B = \bigcup \{B \oplus \{x\},\ x \in \mathbf{R}^d,\ B \oplus \{x\} \subset A\}.$$

Отсюда следует, что

$$\psi(A) = \bigcup \{A_B,\ B \in \mathcal{B}_0\}.$$

[1] τ — от translation. — *Прим. перев.*

Аналогично отображение ψ^* двойственное к ψ, допускает представление $\psi^*(A) = \bigcap \{A^B, B \in \mathscr{B}_0\}$, где $A^B = (A \oplus \check{B}) \ominus B$ — пополнение множества A множеством B. Итак, справедливо

Предложение 7.1.3. *Отображение ψ: $\mathscr{P}(\mathbf{R}^d) \to \mathscr{P}(\mathbf{R}^d)$ является τ-заполнением в том и только том случае, когда оно допускает представление $\psi(A) = \bigcup \{A_B;\ B \in \mathscr{B}_0\}$ для некоторого класса $\mathscr{B}_0 \subset \mathscr{P}$. В этом случае $\mathscr{B}_0$ образует базис класса ψ-инвариантных множеств и двойственное τ-пополнение ψ^* представимо в виде $\psi^*(A) = \bigcap \{A^B, B \in \mathscr{B}_0\}$.*

В частности, если $\mathscr{B}_0 = \{B\}$ состоит из одного-единственного множества B, то ψ: $A \to A_B$ есть операция заполнения посредством B. При этом ψ компактно в смысле определения 7.1.1 тогда и только тогда, когда компактно B. Выясним теперь в общей ситуации те условия, при которых заданное τ-заполнение будет компактным.

Предложение 7.1.4. *Пусть ψ — некоторое τ-заполнение. Пространство $\mathscr{F}$ замкнуто относительно ψ и ψ полунепрерывно сверху на $\mathscr{F}$ тогда и только тогда, когда существует класс $\mathscr{B}_0 \subseteq \mathscr{F}$, замкнутый в $\mathscr{F}$, содержащийся в $\mathscr{F}_{\{0\}}$ (т. е. $B \in \mathscr{B}_0 \Rightarrow 0 \in B$) и такой, что*

a) $x \in B$ *и* $B \in \mathscr{B}_0 \Rightarrow B \oplus \{-x\} \in \mathscr{B}_0$.

b) $\psi(F) = \bigcup \{F_B,\ B \in \mathscr{B}_0\}$ *для любого* $F \in \mathscr{F}$.

Доказательство. Если $\mathscr{F}$ замкнуто относительно ψ, то класс $\mathscr{B}$ ψ-инвариантных множеств замкнут относительно взятия замыкания (предложение 7.1.2). Положим $\mathscr{B}' = \mathscr{B} \cap \mathscr{F}$, так что $\psi(F) = \bigcup \{B', B' \in \mathscr{B}', B' \subset \mathscr{F}\}$ для любого $F \in \mathscr{F}$. Если ψ полунепрерывно сверху, то класс $\mathscr{B}'$ замкнут в $\mathscr{F}$, поскольку из $\{B'_n\} \subset B'$ и $B = \lim B'$ в $\mathscr{F}$ вытекает, что $B = \lim \psi(B'_n) \subset \psi(B)$ и, значит, $B = \psi(B) \in \mathscr{B}'$. Предъявляемым требованиям удовлетворяет класс $\mathscr{B}_0 = \mathscr{B}' \cap \mathscr{F}_{\{0\}}$.

Обратно, пусть $\mathscr{B}_0$ — некоторый класс, удовлетворяющий этим требованиям, и пусть $F \in \mathscr{F}$. Докажем, что $\psi(F) \in \mathscr{F}$. Если последовательность $\{x_n\} \subset \psi(F)$ сходится к $x \in \mathbf{R}^d$, то для любого целого n найдутся такие $B_n \in \mathscr{B}_0$ и $y_n \in \mathbf{R}^d$, что $x_n \in B_n \oplus \{y_n\} \subset F$. Но из условия a) вытекает, что $B'_n \in B_n \oplus \{y_n - x_n\} \in \mathscr{B}$, и поэтому $0 \in B'_n \subset F \oplus \{-x_n\}$. Если B — предельная точка последовательности $\{B'_n\}$ в $\mathscr{F}$, то $B \in \mathscr{B}_0$, поскольку класс $\mathscr{B}_0$ замкнут в $\mathscr{F}$, и $0 \in B \subset F \oplus \{-x\}$, т. е. $x \in F_B \subset \psi(F)$. Следовательно, множество $\psi(F)$ замкнуто. Пусть теперь $\{F_n\} \subset \mathscr{F}$ — такая последовательность, что $\lim F_n = F$ в $\mathscr{F}$, а $\{F_{n_k}\}$ — некоторая ее подпоследовательность. Если последовательность $n_k \to x_{n_k} \in \psi(F_{n_k})$ сходится к x в $\mathbf{R}^d$, то для любого k найдется такое $B_{n_k} \in \mathcal{B}_0$, что $0 \in B_{n_k} \subset F_{n_k} \oplus \{-x_{n_k}\}$. Отсюда вытекает, что если $B \in \mathcal{B}_0$ — предельная точка последовательности $\{B_{n_k}\}$, то $0 \in B \in F \oplus \{-x\}$. Поэтому $x \in F_B \subset \subset \psi(F)$, и ψ полунепрерывно сверху.

Если τ-заполнение ψ полунепрерывно сверху на $\mathcal{F}$, то его сужение на $\mathcal{K}$ полунепрерывно сверху на $\mathcal{K}$. Действительно, из $\psi(K) \subset K$, $K \in \mathcal{K}$, вытекает, что $\mathcal{K}$ замкнуто относительно ψ. Отображение ψ полунепрерывно сверху относительно миопической топологии на $\mathcal{K}$, поскольку из $K_n \downarrow K$ в $\mathcal{K}$ следует, что множества $\psi(K_n) \subset K_n$ содержатся в некотором фиксированном компактном множестве, так что $\psi(K) = \lim \psi(K_n)$ и в миопической топологии.

Пусть теперь ψ — некоторое τ-заполнение, полунепрерывное сверху на $\mathcal{F}$. Представляет интерес выяснить, при каких условиях ψ является наименьшим продолжением на $\mathcal{F}$ своего сужения на $\mathcal{K}$. Прежде всего заметим, что замкнутый в $\mathcal{F}$ класс $\mathcal{B}_0$, связанный с ψ согласно предложению 7.1.4, обладает *минимальными элементами*. Точнее говоря, для любого $B \in \mathcal{B}_0$ существует такое $M \in \mathcal{B}_0$, что $0 \in M \subset B$ и $F \notin \mathcal{B}_0$, каково бы ни было множество $F \in \mathcal{F}$, содержащее 0 и строго содержащееся в M. (Это непосредственно вытекает из теоремы Цорна.) Класс $\mathcal{M}_0$ минимальных элементов в $\mathcal{B}_0$, очевидно, образует базис класса ψ-инвариантных замкнутых множеств, так что $\psi(F) = \bigcup \{F_M, M \in \mathcal{M}_0\}$ для любого $F \in \mathcal{F}$, или $\psi(F) = = \bigcup \{M, M \in \mathcal{M}, M \subset F\}$, где $\mathcal{M}$ — замкнутый относительно сдвигов класс множеств, порожденный $\mathcal{M}_0$. Отсюда вытекает, что $\psi(F) = \bigcup \{\psi(K), K \in \mathcal{K}, K \subset F\}$ для любого $F \in \mathcal{F}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{M} \subset \mathcal{K}$ (или, что то же самое, когда минимальные элементы $M \in \mathcal{M}_0$ компактны).

Пусть ψ' — наименьшее продолжение на $\mathcal{F}$ сужения ψ на $\mathcal{K}$, так что $\psi' = \psi$ на $\mathcal{F}$, если $\mathcal{M} \subset \mathcal{K}$, и ψ' полунепрерывно сверху на $\mathcal{F}$. Тогда сужение ψ' на $\mathcal{G}$ полунепрерывно снизу. Действительно, из $G \in \mathcal{G}$ и $M \in \mathcal{M}$ вытекает, что $G_M \in \mathcal{G}$ и

$$\psi'(G) = \bigcup \{G_M, M \in \mathcal{M}\} \in \mathcal{G}.$$

Далее, из $G_n \uparrow G$ в $\mathcal{G}$ вытекает, что

$$\bigcup \psi'(G_n) = \bigcup \{(G_n \ominus \check{M}) \oplus M, n > 0, M \in \mathcal{M}\} = \\ = \bigcup \{G_M, M \in \mathcal{M}\} = \psi'(G),$$

поскольку отображение $G \to G_M$ полунепрерывно снизу на $\mathcal{G}$ для любого компактного множества M. Следовательно, ψ' полунепрерывно снизу на $\mathcal{G}$. Итак, справедливо

Предложение 7.1.5. *Для компактности (в смысле определения 7.1.1) τ-заполнения ψ необходимо и достаточно, чтобы суще-*

ствовал такой замкнутый в $\mathcal{F}$ класс $\mathcal{B}_0$, содержащийся в $\mathcal{F}_{\{0\}}$, что

a) $B \in \mathcal{B}_0,\ x \in B \Rightarrow \mathcal{B} \oplus \{-x\} \in \mathcal{B}_0$;

b) *класс $\mathcal{M}_0$ минимальных элементов из $\mathcal{B}_0$ содержится в $\mathcal{K}$;*

c) $\psi(A) = \bigcup \{A_M,\ M \in \mathcal{M}_0\}$ *для любого $A \in \mathcal{P}$.*

Пример. Пусть K — компактное множество, в $\mathcal{B}_0$ — класс его сдвигов, содержащих 0. Класс $\mathcal{B}_0$ удовлетворяет условиям предложения 7.1.5, и $\mathcal{M}_0 = \mathcal{B}_0$, так что заполнение $A \to A_K$ компактно.

Более общим образом, пусть класс $\mathcal{V} \subset \mathcal{K}$ *компактен* к $\mathcal{K}$, а $\mathcal{B}_0$ — класс таких сдвигов K элементов из $\mathcal{V}$, что $0 \in K$. Очевидно, что класс $\mathcal{B}_0$ компактен в $\mathcal{K}$, а значит замкнут в $\mathcal{F}$, и содержится в $\mathcal{F}_{\{0\}}$ и что его минимальные элементы компактны; кроме того, выполняются условия а) и с). Таким образом, $A \to \bigcup \{A_K,\ K \in \mathcal{V}\}$ является компактным τ-заполнением.

7.2. ГРАНУЛОМЕТРИИ

Имея в виду подбор подходящих аксиом для гранулометрического отображения (или, короче, гранулометрии), проанализируем сначала, что происходит на практике при просеивании материалов. Нам заданы сита, размеры ячеек которых характеризуются некоторым параметром $\lambda > 0$. В результате применения сита λ к (материалу, идеализацией которого служит множество) A, мы получаем *остаток*, представляющий собой некоторое подмножество $\psi_\lambda(A) \subset A$. Если B — какое-нибудь другое „просеиваемое“ множество, содержащее A, то остаток от B при том же размере ячеек λ больше, чем остаток от A, т. е. из $A \subset B$ вытекает, что $\psi_\lambda(A) \subset \psi_\lambda(B)$. Если есть два сита с размерами ячеек λ и μ соответственно, причем $\lambda \geqslant \mu$, то остаток от просеивания через сито μ будет большим, чем остаток от просеивания через сито λ, т. е. $\psi_\lambda(A) \subset \psi_\mu(A)$. Далее, просеивая остаток, полученный после сита μ, через сито λ с более крупными ячейками, мы получим в результате $\psi_\lambda(A)$, а просеивание $\psi_\lambda(A)$ через сито μ снова дает тот же остаток $\psi_\lambda(A)$. Таким образом, из $\lambda \geqslant \mu$ вытекает, что $\psi_\lambda \circ \psi_\mu = \psi_\mu \circ \psi_\lambda = \psi_\lambda$. Это приводит к следующему определению.

Определение 7.2.1. *Пусть E — некоторое множество и $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$. Гранулометрией на $\mathcal{A}$ называется всякое однопараметрическое семейство ψ_λ, $\lambda > 0$, отображений класса $\mathcal{A}$ в себя, удовлетворяющее следующим условиям:*

1) $\psi_\lambda(A) \subset A$ *для любых* $\lambda > 0$ *и* $A \in \mathcal{A}$;

2) $A,\ B \in \mathcal{A},\ A \subset B \Rightarrow \psi_\lambda(A) \subset \psi_\lambda(B)$ $(\lambda > 0)$;

3) $\lambda \geqslant \mu > 0 \Rightarrow \psi_\lambda(A) \subset \psi_\mu(A)$ $(A \in \mathscr{A})$;

4) $\psi_\lambda \circ \psi_\mu = \psi_\mu \circ \psi_\lambda = \psi_{\sup(\lambda,\,\mu)}$ $(\lambda,\ \mu > 0)$.

Можно дополнить определение гранулометрии ψ_λ, $\lambda > 0$, полагая $\psi_0(A) = A$, $A \in \mathscr{A}$, для $\lambda = 0$. Отметим, что условие 3) излишне, поскольку оно вытекает из остальных трех условий. С другой стороны, из условия 4) при $\lambda = \mu$ следует, что отображение ψ_λ идемпотентно, так что для любого $\lambda > 0$ отображение ψ_λ является заполнением на $\mathscr{A}$. Если $\mathscr{B}_\lambda \subset \mathscr{A}$ — семейство множеств $B \in \mathscr{A}$, инвариантных относительно ψ_λ, то $\lambda \geqslant \mu$ влечет $\mathscr{B}_\lambda \subset \mathscr{B}_\mu$, поскольку $\psi_\mu \circ \psi_\lambda = \psi_\lambda$ в силу условия 4). Верно также и обратное. А именно, справедливо

***Предложение** 7.2.1. Пусть E — некоторое множество, $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(E)$ и ψ_λ, $\lambda > 0$ — однопараметрическое семейство отображений из $\mathscr{A}$ в $\mathscr{P}$. Для того чтобы ψ_λ, $\lambda > 0$, было гранулометрией на $\mathscr{A}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия:*

a) *для любого $\lambda > 0$ отображение ψ_λ представляет собой заполнение на $\mathscr{A}$;*

b) $\lambda \geqslant \mu > 0 \Rightarrow \mathscr{B}_\lambda \subset \mathscr{B}_\mu$ *(где $\mathscr{B}_\lambda$ обозначает класс ψ_λ-инвариантных множеств из $\mathscr{A}$).*

Доказательство. Необходимость только что была установлена. Докажем достаточность. Пусть справедливы указанные два условия. Условия 1) — 3) определения 7.2.1, очевидно, выполняются. Для любого $A \in \mathscr{A}$ при $\lambda \geqslant \mu$ из $\psi_\lambda(A) \in \mathscr{B}_\lambda \subset \mathscr{B}_\mu$ вытекает, что $\psi_\mu\psi_\lambda(A) = \psi_\lambda(A)$, т. е. $\psi_\mu \circ \psi_\lambda = \psi_\lambda$. Отсюда следует, что

$$\psi_\lambda = \psi_\lambda \circ \psi_\mu \circ \psi_\lambda \subset \psi_\lambda \circ \psi_\mu \subset \psi_\lambda,$$

поскольку ψ_λ — возрастающее и идемпотентное отображение. Таким образом, $\psi_\lambda = \psi_\lambda \circ \psi_\mu$, т. е. выполнено и условие 4).

***Следствие.** Всякая гранулометрия на $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(E)$ допускает продолжение до гранулометрии на $\mathscr{P}(E)$.*

Доказательство. Если ψ'_λ — наименьшее продолжение ψ_λ на $\mathscr{P}$, то ψ'_λ является заполнением и семейство $\mathscr{B}'_\lambda$ инвариантных относительно ψ'_λ множеств образует замкнутый относительно бесконечных объединений класс, порождаемый семейством $\mathscr{B}_\lambda$. Поэтому семейство $\mathscr{B}'_\lambda$, $\lambda > 0$, удовлетворяет условию b).

Регуляризация гранулометрии

Пусть $\psi(\lambda)$, $\lambda > 0$, некоторая гранулометрия, относительно которой мы всегда будем предполагать, что она определена на самом $\mathcal{P}(E)$ (в соответствии со следствием предложения 7.2.1). Для каждого $\lambda > 0$ пусть $\mathcal{B}_\lambda$ — класс ψ_λ-инвариантных множеств, так что $\mathcal{B}_\lambda \subset \mathcal{B}_\mu$ при $\lambda \geqslant \mu$. Для любого $\lambda > 0$ положим

$$\hat{\mathcal{B}}_\lambda = \bigcup_{\mu > \lambda} \mathcal{B}_\mu; \quad \check{\mathcal{B}}_\lambda = \bigcap_{\mu < \lambda} \mathcal{B}_\mu. \tag{7.2.1}$$

Очевидно, что $\hat{\mathcal{B}}_\lambda \subset \mathcal{B}_\lambda \subset \check{\mathcal{B}}_\lambda$ и для любого $\varepsilon > 0$

$$\hat{\mathcal{B}}_\lambda \supset \mathcal{B}_{\lambda+\varepsilon}; \quad \mathcal{B}_\lambda \supset \check{\mathcal{B}}_{\lambda+\varepsilon}.$$

Отображения $\lambda \to \check{\mathcal{B}}_\lambda$ и $\lambda \to \hat{\mathcal{B}}_\lambda$ убывающие. Если $\check{\psi}_\lambda$ (соотв. $\hat{\psi}_\lambda$) обозначает наименьшее продолжение на $\mathcal{P}$ тождественного отображения на $\check{\mathcal{B}}_\lambda$ (соотв. на $\hat{\mathcal{B}}_\lambda$), то семейство $\check{\psi}_\lambda$ (соотв. $\hat{\psi}_\lambda$), $\lambda > 0$, также будет гранулометрией на $\mathcal{P}$; оно называется *регуляризацией сверху* (соотв. *снизу*) *гранулометрии* ψ_λ, $\lambda > 0$.

Из сказанного выше вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\psi_{\lambda+\varepsilon} \subset \hat{\psi}_\lambda \subset \psi_\lambda \subset \check{\psi}_\lambda \subset \psi_{\lambda-\varepsilon}. \tag{7.2.2}$$

Гранулометрия ψ_λ, $\lambda > 0$, называется *регулярной сверху* (соотв. *регулярной снизу*), если $\psi_\lambda = \check{\psi}_\lambda$ (соот. $\psi_\lambda = \hat{\psi}_\lambda$). Нетрудно проверить, что регуляризация сверху (снизу) заданной гранулометрии действительно регулярна сверху (снизу).

Если ψ_λ, $\lambda > 0$, — гранулометрия на $\mathcal{P}(E)$, то для любого $A \subset E$

$$\hat{\psi}_\lambda(A) = \bigcup_{\mu > \lambda} \cup \{B;\ B \in \mathcal{B}_\mu,\ B \subset A\},$$

т. е.

$$\hat{\psi}_\lambda(A) = \cup \{\psi_\mu(A),\ \mu > \lambda\}. \tag{7.2.3}$$

Напротив, соотношение $\check{\psi}_\lambda(A) = \cap \{\psi_\mu(A),\ \mu < \lambda\}$, вообще говоря, *не* выполняется.

Критические элементы гранулометрии

Пусть E — некоторое множество, а ψ_λ, $\lambda > 0$, — гранулометрия на $\mathcal{P}(E)$. Множество $M \in \mathcal{P}$ называется *критическим* при $\lambda = \lambda_0 > 0$ для гранулометрии ψ_λ, если

$$M \in \check{\mathcal{B}}_{\lambda_0}, \quad \hat{\psi}_{\lambda_0}(M) = \varnothing, \quad M \neq \varnothing, \tag{7.2.4}$$

или, что то же самое, $\psi_\lambda(M) = \varnothing$ при $\lambda > \lambda_0$ и $\psi_\lambda(M) = M$ при $\lambda < \lambda_0$. Множество M называется *критическим в сильном смысле* при $\lambda=\lambda_0$, если $M\in\mathscr{B}_{\lambda_0}$, $\hat{\psi}_{\lambda_0}(M)=\varnothing$ и $M\neq\varnothing$. Очевидно, что всякое M, критическое в сильном смысле при $\lambda=\lambda_0$, является и (просто) критическим при $\lambda=\lambda_0$, однако обратное неверно (например, гранулометрии, регулярные снизу, никогда не имеют критических в сильном смысле элементов, но могут иметь критические элементы). Тем не менее, если гранулометрия ψ_λ регулярна сверху, то любой критический элемент будет критическим в сильном смысле, поскольку $\psi_\lambda=\check{\psi}_\lambda$.

Для выяснения вопроса о существовании критических элементов предположим, что $A\in\mathscr{P}$ — произвольное непустое множество, и положим

$$\lambda_A=\inf\{\lambda\colon\ \psi_\lambda(A)=\varnothing\}$$

(где $\lambda_A=+\infty$, если $\psi_\lambda(A)\neq\varnothing$ для любого $\lambda>0$). Иначе говоря, λ_A определяется условиями: $\psi_\lambda(A)=\varnothing$ при $\lambda>\lambda_A$, $\psi_\lambda(A)\neq\varnothing$ при $\lambda<\lambda_A$ или, что то же самое, условиями

$$\hat{\psi}_{\lambda_A}(A)=\varnothing,\quad \psi_\lambda(A)\neq\varnothing\quad \text{для } \lambda<\lambda_A.$$

Если в семействе $\psi_\lambda(A)$, $\lambda>0$, имеется критический в сильном смысле элемент M, то необходимо $M=\psi_{\lambda_A}(A)$. Обратно, элемент $\psi_{\lambda_A}(A)$ критичен в сильном смысле тогда и только тогда, когда он непуст, Действительно, если $\lambda>\lambda_A$, то множество $\psi_\lambda(A)$ пусто и потому некритично. Если $\lambda<\lambda_A$, то существует такое μ, что $\lambda<\mu<\lambda_A$ и $\psi_\mu(A)$ непусто. Следовательно, $\psi_\lambda(A)$ некритично. Наконец, если $\psi_{\lambda_A}(A)$ непусто, то оно удовлетворяет условию определения и является критическим в сильном смысле.

Аналогично единственно возможный критический элемент в семействе $\check{\psi}_\lambda(A)$, $\lambda>0$, это $\check{\psi}_{\lambda_A}(A)$, и он действительно будет критическим при $\lambda=\lambda_A$ тогда и только тогда, когда он непуст. Таким образом, критическими элементами гранулометрии ψ_λ, $\lambda>0$, служат множества $\check{\psi}_{\lambda_A}(A)\neq\varnothing$, $A\in\mathscr{P}$.

Пример. Пусть E — эвклидово пространство $\mathbf{R}^d$, B — единичный (замкнутый) шар в $\mathbf{R}^d$ и $\psi_\lambda(A)=A_{\lambda B}$, $A\in\mathscr{P}$. Тогда $\mathscr{B}_\lambda=\check{\mathscr{B}}_\lambda=\{A\oplus\lambda B,\ A\in\mathscr{P}\}$, т. е. гранулометрия ψ_λ регулярна сверху. Если A — открытый шар радиуса λ_0, то $\lambda_A=\lambda_0$, но $\psi_{\lambda_0}(A)=\varnothing$, так что A не является критическим элементом. Напротив, если A — замкнутый шар радиуса λ_0, то $\check{\psi}_{\lambda_0}(A)=A$, так что A — критический элемент при $\lambda=\lambda_0$.

Эвклидовы гранулометрии

Мы предположим теперь, что E — это эвклидово пространство $\mathbf{R}^d$. Обычные гранулометрии в $\mathcal{P}(\mathbf{R}^d)$ *согласованы со сдвигами* в том смысле, что остаток сдвига A_x множества $A \in \mathcal{P}$ совпадает с соответствующим сдвигом остатка A, т. е. $\psi_\lambda(A_x) = \psi_\lambda(A) \oplus \{x\}$, $\lambda > 0$, $x \in \mathbf{R}^d$, $A \in \mathcal{P}$. Кроме того, на практике семейство сит гомотетично, так что при подходящем выборе параметра λ, $\psi_\lambda(\lambda A) = \lambda\psi_1(A)$. Это приводит нас к следующему определению.

Определение 7.2.2. *Пусть $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathbf{R}^d)$ — замкнутый относительно сдвигов и положительных гомотетий класс подмножеств в $\mathbf{R}^d$, а ψ_λ, $\lambda > 0$, — гранулометрия на $\mathcal{A}$. Будем называть ψ_λ эвклидовой гранулометрией, если выполняются следующие условия:*

5) для любого $\lambda > 0$ отображение ψ_λ является τ-заполнением;

6) для любых $\lambda > 0$ и $A \in \mathcal{A}$ справедливо равенство $\psi_\lambda(A) = \lambda\psi_1(A/\lambda)$.

Пусть, как обычно, $\mathcal{B}_\lambda$ обозначает класс ψ_λ-инвариантных множеств из $\mathcal{A}$. Очевидно, что условие 5) эквивалентно следующему: для любого $\lambda > 0$ класс $\mathcal{B}_\lambda$ инвариантен относительно сдвигов, а условие 6) эквивалентно тому, что $\mathcal{B}_\lambda = \lambda\mathcal{B}_1$ (т. е. $A \in \mathcal{B}_\lambda$ тогда и только тогда, когда $A/\lambda \in \mathcal{B}_1$). Семейство $\mathcal{B}_1$ не может быть произвольным, поскольку из $\lambda \geqslant \mu$ вытекает, что $\lambda\mathcal{B}_1 \subset \mu\mathcal{B}_1$, т. е. $\mathcal{B}_1$ замкнуто относительно гомотетий с коэффициентом $\geqslant 1$. Обратно, если класс $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}$ замкнут относительно сдвигов, бесконечных объединений и гомотетий с коэффициентом $\geqslant 1$, то $\mathcal{B}_\lambda = \lambda\mathcal{B}$, $\lambda > 0$, будет инвариантным семейством, соответствующим эвклидовой гранулометрии на $\mathcal{P}(\mathbf{R}^d)$.

Пусть $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}$ — произвольный класс множеств, замкнутый относительно сдвигов, бесконечных объединений и гомотетий с коэффициентом $\geqslant 1$. Тогда класс $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$ называется *образующей* для $\mathcal{B}$, если порождаемый им класс, замкнутый относительно бесконечных объединений, сдвигов и гомотетий с коэффициентом $\geqslant 1$, совпадает с $\mathcal{B}$. В этом случае мы будем говорить, что $\mathcal{B}_0$ есть *образующая эвклидовой гранулометрии* ψ_λ: $A \to \bigcup \{A_{\lambda B}, B \in \mathcal{B}\}$, соответствующей $\mathcal{B}$. Из соотношения $A_{\lambda B} = \bigcup \{A_{\lambda' B'}, \lambda' \geqslant \lambda, B' \in \mathcal{B}_0\}$ вытекает, что

$$\psi_\lambda(A) = \bigcup \{A_{\lambda' B'}, \lambda' \geqslant \lambda, B \in \mathcal{B}_0\} \quad (A \in \mathcal{P}).$$

Обратно, для любого $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{P}$ эта формула определяет эвклидову гранулометрию на $\mathcal{P}$. Итак, справедливо

Предложение 7.2.2. *Семейство ψ_λ, $\lambda > 0$, отображений класса $\mathscr{P}(\mathbf{R}^d)$ в себя является эвклидовой гранулометрией в том и только том случае, когда существует такой класс $\mathscr{B}_0 \subset \mathscr{P}$, что*

$$\psi_\lambda(A) = \bigcup_{B \in \mathscr{B}_0} \bigcup_{\mu \geqslant \lambda} A_{\mu B}.$$

В этом случае $\mathscr{B}_0$ есть образующая эвклидовой гранулометрии ψ_λ. Далее, если $\mathscr{B}_\lambda$ — семейство ψ_λ-инвариантных множеств, а $\mathscr{B}$ — порожденный классом $\mathscr{B}_0$ класс, замкнутый относительно сдвигов, бесконечных объединений и гомотетий с коэффициентом $\geqslant 1$, то $\mathscr{B}_\lambda = \lambda\mathscr{B}$ для любого $\lambda > 0$.

Пример. Если $\mathscr{B}_0 = \{B\}$ сводится к одному-единственному элементу B (не обязательно выпуклому), то отображения ψ_λ, определяемые соотношением

$$\psi_\lambda(A) = \bigcup_{\mu \geqslant \lambda} A_{\mu B} \quad (\lambda > 0,\ A \in \mathscr{P}),$$

образуют эвклидову гранулометрию, которая называется *гранулометрией относительно множества B*. Если B выпукло, то из $\mu \geqslant \lambda$ вытекает $A_{\mu B} \subset A_{\lambda B}$ и $\psi_\lambda(A) = A_{\lambda B}$, так что это определение согласуется с определением, данным в гл. 1. Если B компактно, то, как показывает следующее предложение, верно и обратное, т. е. $\psi_\lambda(A) = A_{\lambda B}$ тогда и только тогда, когда компактное множество B выпукло.

Предложение 7.2.3. *Пусть B — компактное множество в $\mathbf{R}^d$. Тогда гомотетичное ему множество λB заполнимо относительно B (т. е. $(\lambda B)_B = \lambda B$) при любом $\lambda \geqslant 1$ в том и только том случае, если множество B выпукло.*

Доказательство. Если $B \in C(\mathscr{K})$, то очевидным образом $(\lambda B)_B = \lambda B$ для любого $\lambda \geqslant 1$. Обратно, пусть B — компактное множество и для любого $\alpha > 0$ множество D_α таково, что

$$(1+\alpha) B = B \oplus \alpha D_\alpha. \tag{a}$$

Заменяя, если надо, αD_α на $((1+\alpha) B) \ominus \check{B}$, мы можем считать, что $D_\alpha \in \mathscr{K}$. Из (a) вытекает, что

$$(1+\alpha) C(B) = C(B) \oplus \alpha C(D_\alpha), \tag{a$'$}$$

где C обозначает взятие выпуклой оболочки. Но $(1+\alpha) C(B) = C(B) \oplus \alpha C(B)$, поскольку эти множества выпуклы, и на основании предложения 1.5.3 мы заключаем, что

$$C(D_\alpha) = C(B). \tag{b}$$

Таким образом,

$$D_\alpha \subset C(B). \tag{b$'$}$$

С другой стороны, из (a) следует, что для любого $n > 0$

$$B = ((1+\alpha)^{-n} B) \oplus \left(\bigoplus_{k=1}^{n} \frac{\alpha}{(1+\alpha)^k} D_\alpha \right), \tag{c}$$

и из (b′) мы получаем, что

$$\bigoplus_{k=1}^{n} \frac{\alpha}{(1+\alpha)^k} D_\alpha \subset \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha}{(1+\alpha)^k} \right) C(D_\alpha) \subset C(B),$$

так что ряд Минковского $\bigoplus_{k=1}^{\infty} \alpha (1+\alpha)^{-k} D_\alpha$, очевидно сходящийся в $\mathcal{F}$, сходится также и в $\mathcal{K}$. Но сложение по Минковскому $\oplus$ непрерывно на $\mathcal{K}$, и поэтому из (c) вытекает, что

$$B = \frac{\alpha}{1+\alpha} \bigoplus_{k=0}^{\infty} (1+\alpha)^{-k} D_\alpha. \tag{d}$$

Пусть $N > 0$ — целое число. Положим

$$B_i(\alpha) = \frac{\alpha}{1+\alpha} \bigoplus_{k=0}^{\infty} (1+\alpha)^{-i-kN} D_\alpha \qquad (i = 0, 1, \ldots, N-1),$$

так что

$$\begin{gathered} B = B_0(\alpha) \oplus B_1(\alpha) \oplus \ldots \oplus B_{N-1}(\alpha), \\ B_i(\alpha) = (1+\alpha)^{-i} B_0(\alpha). \end{gathered} \tag{e}$$

В силу (b′) существует такая последовательность $\{\alpha_n\}$, что $\alpha_n \downarrow 0$, $\lim D_{\alpha_n} = D_0$ в $\mathcal{K}$ и $\lim B_0(\alpha_n) = B_0$ в $\mathcal{K}$. Тогда из (e) вытекает, что $\lim B_i(\alpha_n) = B_0$, $i = 0, 1, \ldots, N-1$, и $B = (B_0)^{\oplus N}$. Иными словами, B безгранично делимо относительно суммирования по Минковскому и, значит, выпукло (теорема 1.5.1).

Следствие. *Пусть B — компактное множество в $\mathbf{R}^d$. Для того чтобы гранулометрия ψ_λ относительно B имела вид $\psi_\lambda(A) = A_{\lambda B}$, $A \in \mathcal{P}$, необходимо и достаточно, чтобы B было выпукло.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Если $\psi_\lambda(A) = A_{\lambda B}$ для любых $A \in \mathcal{P}$ и $\lambda > 0$, то $\varphi_1(\lambda B) = (\lambda B)_B = \lambda B$ при $\lambda \geqslant 1$, а тогда B выпукло в силу доказанного предложения.

Полунепрерывные сверху компактные эвклидовы гранулометрии

Определение 7.2.3. *Эвклидова гранулометрия ψ_λ, $\lambda > 0$, на $\mathcal{P}(\mathbf{R}^d)$ называется полунепрерывной сверху на $\mathcal{K}$ (соотв. на $\mathcal{F}$), если $(\lambda, A) \to \psi_\lambda(A)$ есть полунепрерывное сверху отображение* *из* $\mathbf{R}_+ \times \mathscr{K}$ *(соотв.* $\mathbf{R}_+ \times \mathscr{F}$*) в* $\mathscr{K}$ *(соотв. в* $\mathscr{F}$*). Аналогично* ψ_λ *называется компактной, если для любого* $\lambda > 0$ *заполнение* ψ_λ *компактно (в смысле определения* 7.1.1).

Наша задача сейчас состоит в том, чтобы дать характеризацию полунепрерывных сверху компактных эвклидовых гранулометрий. Очевидно, что эвклидова гранулометрия компактна, если заполнение ψ_{λ_0} компактно для некоторого $\lambda = \lambda_0$, например для $\lambda = 1$; соответствующий критерий дан в предложении 7.1.5. Что касается критерия полунепрерывности сверху, то имеет место

Предложение 7.2.4. *Пусть* ψ_λ, $\lambda > 0$, *— эвклидова гранулометрия на* $\mathscr{P}(\mathbf{R}^d)$, *и для каждого* $\lambda > 0$ *пусть* $\mathscr{B}_\lambda = \lambda\mathscr{B}$ *— семейство* ψ_λ*-инвариантных множеств. Тогда следующие три условия равносильны:*

a) *гранулометрия* ψ_λ *полунепрерывна сверху на* $\mathscr{F}$ *(в смысле опрgделения* 7.2.3);

b) *для любого* $\lambda > 0$ *отображение* ψ_λ *является полунепрерывным сверху заполнением на* $\mathscr{F}$;

c) *семейство* $\mathscr{B}$ *замкнуто относительно топологического замыкания, а* $\mathscr{B} \cap \mathscr{F}$ *замкнуто в* $\mathscr{F}$.

Доказательство. Из условия a) очевидным образом вытекает b). Условия b) и c) эквивалентны в силу предложений 7.1.2 и 7.1.4. Пусть выполняется b), и пусть $\{\lambda_n A_n\} \subset \mathbf{R}_+ \times \mathscr{F}$ — такая последовательность, для которой $\lim(\lambda_n, A_n) = (\lambda, A)$. Из соотношения

$$\overline{\lim}\, \psi_{\lambda_n}(A_n) = \overline{\lim}\, \lambda_n \psi_1(A_n/\lambda_n) \subset \lambda\psi_1(A/\lambda) = \psi_\lambda(A)$$

вытекает, что выполняется условие a).

Следствие. *Пусть* ψ_λ, $\lambda > 0$, *— полунепрерывная на* $\mathscr{F}$ *эвклидова гранулометрия, отличная от тождественного отображения. Тогда никакое* ψ_λ*-инвариантное множество не имеет изолированных точек.*

Доказательство. Пусть $B' \in \mathscr{B}$ — инвариантное относительно ψ_1 замкнутое множество [1] и $x \in B'$. Поскольку класс $\mathscr{B}$ инвариантен относительно сдвигов, то можно считать, что $x = 0$. Допустим, что 0 — изолированная точка B'. Тогда найдется открытый шар εB с центром в 0 и радиусом $\varepsilon > 0$, не пересекающийся с $B' \setminus \{0\}$. Если $\lambda \uparrow \infty$, то $\lim \lambda\varepsilon B = \mathbf{R}^d$ в $\mathscr{G}$ и $\lim \lambda(B' \setminus \{0\}) = \varnothing$ в $\mathscr{F}$, так что $\lim \lambda B' = \{0\}$ в $\mathscr{F}$. Отсюда вытекает, что $\{0\} \in \mathscr{B}$, поскольку класс $\mathscr{B}$ (в силу предложе-

[1] Для эвклидовой гранулометрии $\psi_\lambda(B') = \lambda\psi_1(B')$. — *Прим. ред.*

ния 7.2.4) замкнут. Но из включения $\{0\} \in \mathscr{B}$ вытекает, что $\mathscr{B} = \mathscr{P}(E)$, так как класс $\mathscr{B}$ замкнут относительно объединений и сдвигов, и, таким образом, $\psi_\lambda(A) = A$ для любого $A \in \mathscr{P}$.

Пример 1. Гранулометрия относительно множества $B = \{x_0, y_0\}$, состоящего из двух различных элементов x_0 и y_0, является гранулометрией на $\mathscr{F}$, поскольку она отображает $\mathscr{F}$ в себя. Однако, по доказанному следствию, она не будет полунепрерывной снизу.

Пример 2. Гранулометрия относительно единичного круга C на $\mathscr{P}(\mathbf{R}^2)$ соответствует замкнутому относительно сдвигов и бесконечных объединений классу, порождаемому семейством $\{\lambda C, \lambda \geqslant 1\}$. Прямые линии принадлежат замыканию $\overline{\mathscr{B}}$ класса $\mathscr{B}$ в $\mathscr{F}$, но не самому $\mathscr{B}$. Поэтому эта гранулометрия не компактна.

Пример 3. Пусть $\mathscr{V}$ — *компактное* подмножество из $C(\mathscr{K})$, т. е. $\mathscr{V}$ замкнуто относительно миопической топологии и компактные выпуклые множества $B \in \mathscr{V}$ содержатся в некотором фиксированном компактном множестве. Пусть $\mathscr{B}$ — порожденный $\mathscr{V}$ класс, замкнутый относительно сдвигов, объединений и гомотетий с коэффициентом $\geqslant 1$. Отвечающая $\mathscr{B}$ эвклидова гранулометрия ψ_λ (называемая *гранулометрией относительно семейства* $\mathscr{V}$) *полунепрерывна сверху и компактна*, и

$$\psi_\lambda(A) = \bigcup \{A_{\lambda B},\ B \in \mathscr{V}\} \quad (A \in \mathscr{P}).$$

В частности, если $\mathscr{V} \subset C(\mathscr{K})$ *конечно*, то гранулометрия относительно $\mathscr{V}$ компактна и полунепрерывна сверху (это — простое следствие предложений 7.1.5 и 7.2.4).

Предложение 7.2.5. *Пусть* ψ_λ — *полунепрерывная сверху гранулометрия на* $\mathscr{K}$ *(или* $\mathscr{F}$*), и для каждого* $K \in \mathscr{K}$ *пусть* $\lambda_K = \inf\{\lambda,\ \psi_\lambda(K) = \varnothing\}$. *Тогда критическими компактными элементами являются* $\psi_{\lambda_K}(K)$, $K \in \mathscr{K}$, $\lambda_K \neq 0$, $\lambda_K \neq \infty$.

Доказательство. Для любого $\lambda > 0$ из полунепрерывности сверху вытекает, что $\psi_\mu(K) \downarrow \psi_\lambda(K)$ при $\mu \uparrow \lambda$ и, значит, $\psi_\lambda(K) = \bigcap \{\psi_\mu(K),\ \mu < \lambda\}$. Отсюда следует, что если $\lambda_K > 0$, то $\psi_{\lambda_K}(K) = \bigcap \{\psi_\lambda(K),\ \lambda < \lambda_K\}$. Но $\psi_{\lambda_K}(K)$ компактно, и если бы $\psi_{\lambda_K}(K) = \varnothing$, то тогда бы $\psi_\lambda(K) = \varnothing$ для $\lambda < \lambda_K$, а это невозможно по определению λ_K. Поэтому $\psi_{\lambda_K}(K) \neq \varnothing$, и $\psi_{\lambda_K}(K)$ — критический элемент. Обратно, любой критический компактный элемент удовлетворяет соотношению $K = \psi_{\lambda_K}(K)$.

Другие примеры

1. В тех же обозначениях пусть $\mathscr{B}_\lambda$ — класс измеримых множеств в $\mathbf{R}^d$, мера Лебега которых $\geqslant \lambda$. Тогда любое измеримое множество A лебеговой меры λ_0 является критическим при $\lambda = \lambda_0$, поскольку $\psi_\lambda(A) = \varnothing$, если $\operatorname{mes} A < \lambda$ и $\psi_\lambda(A) = A$ в противном случае.

2. Пусть $\mathscr{B}_0$ — класс *связных* измеримых множеств, мера Лебега которых $\geqslant 1$, а ψ_λ — порожденная этим классом эвклидова гранулометрия, т. е. $\psi_\lambda(A)$ есть объединение связных компонент A, имеющих лебегову меру $\geqslant \lambda$. Всякое связное измеримое множество будет здесь критическим.

3. Если B — выпуклое множество, а $\mathscr{B}_0$ — семейство связных множеств, не содержащихся ни в каких сдвигах B, то порожденная семейством $\mathscr{B}_0$ эвклидова гранулометрия[1] соответствует обычному понятию „просеивания".

7.3. ГРАНУЛОМЕТРИЯ СЗМ И ЕГО ДОПОЛНЕНИЯ

Пусть E — некоторое ЛКС-пространство, A — СЗМ, определяемое вероятностью P на $(\mathscr{F}, \sigma_f)$, а ψ_λ, $\lambda > 0$, — полунепрерывная сверху на $\mathscr{F}$ гранулометрия (определение 7.2.3). Тогда для каждого $\lambda > 0$ отображение $A \to \psi_\lambda(A)$ пространства $\mathscr{F}$ в себя измеримо и $\psi_\lambda(A)$ есть СЗМ. Точнее говоря, отображение $(\lambda, A) \to \psi_\lambda(A)$ полунепрерывно сверху на $\mathbf{R}_+ \times \mathscr{F}$ и поэтому измеримо. Отсюда следует, что отображение k из $E \times \mathbf{R}_+ \times \mathscr{F}$ в $\{0, 1\}$, определяемое соотношениями $k(x, \lambda, A) = 1$ при $x \in \psi_\lambda(A)$ и $k(x, \lambda, A) = 0$ при $x \notin \psi_\lambda(A)$, измеримо, поскольку множество $k^{-1}(1) = \{(x, \lambda, A) : x \in \psi_\lambda(A)\}$ замкнуто, в чем нетрудно убедиться, используя полунепрерывность сверху. Полагая для любого $x \in \mathbf{R}^d$

$$\Lambda(x) = \sup\{\lambda\colon\ k(x, \lambda, A) = 1\} = \sup\{\lambda\colon\ x \in \psi_\lambda(A)\},$$

получаем отсюда, что семейство $\Lambda(x)$, $x \in \mathbf{R}^d$, представляет собой измеримую случайную функцию. Пусть $F_x(\cdot)$ обозначает функцию распределения случайной величины $\Lambda(x)$ при заданном $x \in \mathbf{R}^d$.

$$F_x(\lambda) = P(\Lambda(x) < \lambda) = P(x \notin \psi_\lambda(A)). \tag{7.3.1}$$

---

[1] Относительно B. — *Прим. ред.*

Доказательство. Из неравенства $\Lambda(x) < \lambda$ следует, что $x \notin \psi_\lambda(A)$; более точно,

$$\{\Lambda(x) < \lambda\} = \bigcup_{\varepsilon>0} \{x \notin \psi_{\lambda-\varepsilon}(A)\}, \text{ или } \{\Lambda(x) \geqslant \lambda\} = \left\{x \in \bigcap_{\varepsilon>0} \psi_{\lambda-\varepsilon}(A)\right\}.$$

Последнее событие п. н. эквивалентно событию $\{x \in \psi_\lambda(A)\}$ в силу полунепрерывности сверху гранулометрии ψ_λ. Отсюда получаем (7.3.1).

Определенная на $\mathbf{R}_+$ функция $\lambda \to 1 - F_x(\lambda)$ называется *распределением размера* СЗМ A в точке x по отношению к гранулометрии ψ_λ. Подытожим наши результаты.

Предложение 7.3.1. *Пусть E — ЛКС-пространство, $\psi(\lambda)$, $\lambda > 0$, — полунепрерывная сверху гранулометрия на $\mathcal{F}(E)$, а A — некоторое СЗМ. Тогда $\psi_\lambda(A)$ является измеримым на $\mathbf{R}_+ \times \mathcal{F}$ СЗМ. Далее, $\Lambda(x) = \sup\{\lambda\colon x \in \psi_\lambda(A)\}$, $x \in E$, представляет собой измеримую случайную функцию и $\{\Lambda(x) \geqslant \lambda\} = \{x \in \psi_\lambda(A)\}$ для любого $x \in E$. При каждом $x \in E$ распределение размера A по отношению к гранулометрии ψ_λ есть функция $\lambda \to 1 - F_x(\lambda)$, определяемая соотношением*

$$1 - F_x(\lambda) = P(\Lambda(x) \geqslant \lambda) = P(x \in \psi_\lambda(A)) \quad (\lambda > 0).$$

Замечание. Реализации случайной функции $x \to \Lambda(x)$ полунепрерывны сверху на E.

Доказательство. Пусть $\{x_n\} \subset E$ — последовательность, для которой $\lim x_n = x$, λ_0 — предельная точка последовательности $\{\Lambda(x_n)\}$ (в компактификации $\mathbf{R}_+$), а $k \to \{n_k\}$ — последовательность, такая, что $\lambda_{n_k} < \Lambda(x_{n_k})$ при любом k, $\lim \Lambda(x_{n_k}) = \lambda_0$ и $\lim \lambda_{n_k} = \lambda_0$. Для фиксированного $A \in \mathcal{F}$ функция $\lambda \to \psi_\lambda(A)$ полунепрерывна сверху. Отсюда следует, что $x \in \overline{\lim}\, \psi_{\lambda_{n_k}}(A) \subset \psi_{\lambda_0}(A)$, т. е. $\Lambda(x) \geqslant \lambda_0$. Таким образом, функция Λ п. н. полунепрерывна сверху на E.

Распределение размера пор

Если СЗМ A представляет твердые компоненты (*гранулы*) некоторой пористой среды, то, очевидно, дополнительное к нему множество A^c (являющееся случайным *открытым* множеством) представляет *поры* среды. Располагая понятием распределения размера гранул A относительно заданной полунепрерывной сверху гранулометрии, мы можем теперь определить и распределение размера пор, применяя *ту же самую* гранулометрию к случайному открытому множеству A^c, но только для случая эвклидовой гранулометрии.

Пусть $E = \mathbf{R}^d$ — эвклидово пространство, ψ_λ, $\lambda > 0$, — эвклидова полунепрерывная сверху гранулометрия на $\mathcal{K}(\mathbf{R}^d)$, а $\mathcal{B} \subset \mathcal{K}$ — семейство ψ_1-инвариантных компактных множеств. Для каждого $E \in \mathcal{G}$ и $\lambda > 0$ положим

$$\psi'_\lambda(G) = \bigcup \{\psi_\lambda(K),\ K \in \mathcal{K},\ K \subset G\}.$$

Тогда, как нетрудно проверить, ψ'_λ для каждого $\lambda > 0$ будет полунепрерывным снизу τ-заполнением на $\mathcal{G}$, а семейство ψ'_λ, $\lambda > 0$, — эвклидовой гранулометрией на $\mathcal{G}$. Эта гранулометрия полунепрерывна снизу на $\mathcal{G}$, т. е. отображение $(\lambda, G) \to \psi'_\lambda(G)$ является полунепрерывным снизу отображением из $\mathbf{R}_+ \times \mathcal{G}$ в $\mathcal{G}$.

Доказательство. Пусть λ — некоторое число > 0, а $K \in \mathcal{K}$ и $G \in \mathcal{G}$ таковы, что $K \subset \psi'_\lambda(G)$. Нам надо показать, что найдутся такие $\lambda_0 > \lambda$ и $K_0 \in \mathcal{K}$, что $K_0 \subset G$ и при $\mu < \lambda_0$, $G' \supset K_0$, $G' \in \mathcal{G}$ справедливо включение $K \subset \psi'_\mu(G)$. Поскольку $K \subset \subset \psi'_\lambda(G) \in \mathcal{G}$, найдутся такое ψ_λ-инвариантное множество $B \in \lambda\mathcal{B}$ и такое $\varepsilon > 0$, что для замкнутого шара B_ε радиуса ε

$$K \subset K \oplus B_\varepsilon \subset B \subset B \oplus B_\varepsilon \subset G.$$

Но гомотетии непрерывны на $\mathcal{K}$, поэтому можно найти такое $\alpha > 1$, что $(1/\alpha)K \subset K \oplus B_\varepsilon$ и $\alpha B \subset B \oplus B_\varepsilon$. Таким образом,

$$K \subset \alpha B \subset B \oplus B_\varepsilon \subset G.$$

Множество αB является $\psi_{\alpha\lambda}$-инвариантным (так как ψ_λ — эвклидова гранулометрия), следовательно, $K \subset \alpha B \subset \psi'_{\alpha\lambda}(G')$ для любого открытого множества $G' \supset B \oplus B_\varepsilon$. Другими словами, при $G' \supset B \oplus B_\varepsilon$ и $\mu \leqslant \alpha\lambda$ выполняется включение $K \subset \psi'_\mu(G')$. Таким образом, отображение $(\lambda, G) \to \psi'_\lambda(G)$ полунепрерывно снизу на $\mathcal{G}$, и мы можем записать

Предложение 7.3.2. *Пусть ψ_λ, $\lambda > 0$, — полунепрерывная сверху эвклидова гранулометрия на $\mathcal{K}(\mathbf{R}^d)$ и*

$$\psi'_\lambda(G) = \bigcup \{\psi_\lambda(K),\ K \subset G,\ K \in \mathcal{K}\} \quad (G \in \mathcal{G},\ \lambda > 0).$$

Тогда ψ'_λ, $\lambda > 0$, есть полунепрерывная снизу эвклидова гранулометрия на $\mathcal{G}$ (т. е. отображение $(\lambda, G) \to \psi'_\lambda(G)$ полунепрерывно снизу на $\mathbf{R}_+ \times \mathcal{G}$).

Если гранулометрия ψ_λ, $\lambda > 0$, компактна, откуда вытекает, что для каждого λ отображение ψ_λ служит наименьшим продолжением своего сужения на $\mathscr{K}$, то мы находим

$$\psi'_\lambda(G)=\bigcup\{\psi_\lambda(K),\ K\subset G,\ K\in\mathscr{K}\}=\psi_\lambda(G),$$

так что $\psi_\lambda=\psi'_\lambda$, $\lambda>0$, есть полунепрерывная снизу эвклидова гранулометрия на $\mathscr{G}$. Применяя эту гранулометрию к случайному открытому множеству A^c — дополнению к заданному СЗМ A, мы и получим желаемое определение распределения размера пор.

Предложение 7.3.3. *Пусть ψ_λ, $\lambda>0$, — полунепрерывная сверху и компактная эвклидова гранулометрия, A — СЗМ, а P — его вероятность. Тогда $\psi_\lambda(A^c)$ для любого $\lambda>0$ является измеримым случайным открытым множеством и для любой меры $\mu\geqslant 0$ на $\mathbf{R}^d$*

$$E[\mu(\psi_\lambda(A^c))]=\int\mu(dx)\,P(x\in\psi_\lambda(A^c)).$$

Далее, $x\to\Lambda'(x)=\sup\{\lambda\colon x\in\psi_\lambda(A^c)\}$ есть измеримая случайная функция, и $\{\Lambda'(x)\leqslant\lambda\}=\{x\notin\psi_\lambda(A^c)\}$. Для любого $x\in\mathbf{R}^d$ функция $\lambda\to 1-F'_x(\lambda)$, определенная соотношением

$$1-F'_x(\lambda)=P(\Lambda'(x)>\lambda)=P(x\in\psi_\lambda(A^c)),$$

называется распределением размера пор СЗМ A в точке x относительно гранулометрии ψ_λ.

Доказательство. Как мы только что видели, отображение $(\lambda, G)\to\psi_\lambda(G)$ из $\mathbf{R}_+\times\mathscr{G}$ в $\mathscr{G}$ полунепрерывно снизу, так что $\psi_\lambda(A^c)$ есть измеримое случайное открытое множество для любого данного $\lambda>0$. Из представления $\psi_\lambda(G)=\bigcup\{\psi_\mu(G,\ \mu>\lambda\}$, $G\in\mathscr{G}$ следует, что $\psi_\lambda(G)=\lim\psi_\mu(G)$ в $\mathscr{G}$ при $\mu\downarrow\lambda$. В частности, при $\mu\downarrow\Lambda'(x)$ мы имеем $\psi_\mu(A^c)\uparrow\psi_{\Lambda'(x)}(A^c)$, и, следовательно, $x\notin\psi_{\Lambda'(x)}(A^c)$, поскольку $x\notin\psi_\mu(A^c)$ для любого $\mu>\Lambda'(x)$. Отсюда вытекает, что $\Lambda'(x)\leqslant\lambda$ тогда и только тогда, когда $x\notin\psi_\lambda(A^c)$. Поэтому $x\to\Lambda'(x)$ представляет собой случайную функцию [1]; в измеримости ее нетрудно убедиться обычным образом.

Замечание. Реализации случайных функций $\Lambda'(x)$ полунепрерывны сверху на $\mathbf{R}^d$ (ср. с аналогичным утверждением о полунепрерывности сверху $\Lambda(x)$).

[1] То есть $\Lambda'(x)$ при фиксированном x является случайной величиной. — *Прим. ред.*

7.4. ЗАПОЛНЕНИЯ И ГРАНУЛОМЕТРИИ (ОБЩИЙ СЛУЧАЙ)

Тщательное исследование в предыдущих параграфах τ-заполнений и эвклидовых гранулометрий на эвклидовом пространстве $\mathbf{R}^d$ связано с тем, что только они и используются в приложениях. Сейчас мы вернемся к общему случаю заполнений и гранулометрий, определенных на произвольном ЛКС-пространстве E.

Сначала мы рассмотрим заполнения и пополнения на E. В предложении 7.1.2 приведены условия, которым должно удовлетворять семейство $\mathcal{B}$ ψ-инвариантных множеств, для того чтобы пространства $\mathcal{F}$, $\mathcal{P}$ или $\mathcal{K}$ были замкнуты относительно ψ. Более общим образом, если класс $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}$ замкнут относительно ψ, то мы будем для краткости говорить, что ψ является заполнением или пополнением на $\mathcal{A}$, даже если ψ в действительности определено на всём $\mathcal{P}$. Кроме того, если ψ определено только на $\mathcal{A}$, его всегда можно продолжить на $\mathcal{P}$ (см. § 7.1). Всюду в дальнейшем утверждения типа „ψ является полунепрерывным сверху заполнением на $\mathcal{F}$“ автоматически означают, что $\mathcal{F}$ замкнуто относительно ψ.

Полунепрерывные сверху пополнения и пополнения на $\mathcal{F}$ или $\mathcal{K}$

Начнем с характеризации полунепрерывных сверху заполнений.

Предложение 7.4.1. *Пусть ψ — заполнение на $\mathcal{P}$, а $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}$ — семейство ψ-инвариантных множеств. Для того чтобы ψ было полунепрерывным сверху заполнением на $\mathcal{K}$ (соотв. на $\mathcal{F}$), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия:*

a) *для любого относительно компактного множества $B \in \mathcal{B}$ (соотв. для любого $B \in \mathcal{B}$) $\bar{B} \in \mathcal{B}$;*

b) *$\mathcal{B} \cap \mathcal{K}$ замкнуто в $\mathcal{K}$ (соотв. $\mathcal{B} \cap \mathcal{F}$ замкнуто в $\mathcal{F}$).*

Доказательство. Мы приведем здесь доказательство для случая пространства $\mathcal{K}$. Согласно предложению 7.1.2, ψ является заполнением на $\mathcal{K}$ тогда и только тогда, когда выполняется условие a). Поэтому нам надо доказать, что заполнение ψ на $\mathcal{K}$ полунепрерывно сверху тогда и только тогда, когда $\mathcal{B} \cap \mathcal{K}$ замкнуто в миопической топологии.

Пусть $\{A_n\} \subset \mathcal{K} \cap \mathcal{B}$—такая последовательность, что $\lim A_n = A$ в $\mathcal{K}$. Если ψ полунепрерывно сверху, то $A = \lim A_n = \lim \psi(A_n) \subset \subset \psi(A)$ и, значит, $A = \psi(A)$, поскольку ψ антиэкстенсивно.

Поэтому $\mathcal{K}\cap\mathcal{B}$ замкнуто в $\mathcal{K}$. Обратно, пусть последовательность $\{\mathcal{K}_n\}\subset\mathcal{K}$ такова, что $\lim K_n=K$ в $\mathcal{K}$, $\{K_{n_k}\}$ — какая-нибудь ее подпоследовательность, и точки $x_{n_k}\in\psi(K_{n_k})$ таковы, что $\lim x_{n_k}=x$ в E. Для любого k $x_{n_k}\in\psi(K_{n_k})\subset K_{n_k}$ и $\psi(K_{n_k})\in\mathcal{B}\cap\mathcal{K}$. Множества K_n и (тем более) $\psi(K_{n_k})$ содержатся в некотором фиксированном компактном множестве, так что последовательность $\{\psi(K_{n_k})\}$ обладает предельным значением $B\in\mathcal{K}$. Отсюда вытекает, что если $\mathcal{B}\cap\mathcal{K}$ замкнуто, то $B\in\mathcal{B}\cap\mathcal{K}$ и $x\in B\subset K$. Таким образом, $x\in\psi(K)$, $\overline{\lim}\,\psi(K_n)\subset\subset\psi(K)$ и ψ полунепрерывно сверху.

Следствие 1. *Пусть $\mathcal{B}_0$ — замкнутое подмножество пространства $\mathcal{K}$ (соотв. $\mathcal{F}$). Если $\mathcal{B}_0$ замкнуто относительно конечных объединений, то наименьшее продолжение ψ тождественного отображения на $\mathcal{B}_0$ является полунепрерывным сверху заполнением на $\mathcal{K}$ (соотв. на $\mathcal{F}$).*

Доказательство. Всякое семейство $\{B_i,\ i\in I\}\subset\mathcal{B}_0$, объединение которого относительно компактно, удовлетворяет соотношению $\overline{\bigcup\{B_i,\ i\in I\}}\in\mathcal{B}_0$, так как $\mathcal{B}_0$ замкнуто в $\mathcal{K}$ и замкнуто относительно конечных объединений. Поэтому условия а) и в) удовлетворяются.

Следствие 2. *Заполнение ψ на $\mathcal{G}$ полунепрерывно снизу тогда и только тогда, когда семейство $\mathcal{B}\cap\mathcal{G}$ открытых ψ-инвариантных множеств замкнуто в $\mathcal{G}$.*

Предложение 7.4.2. *Пусть ψ — заполнение на $\mathcal{K}$, а $\mathcal{B}_0=\mathcal{B}\cap\mathcal{K}$ — семейство компактных ψ-инвариантных множеств. Для полунепрерывности сверху отображения ψ необходимо и достаточно, чтобы любое $B\in\mathcal{B}_0$ обладало фундаментальной системой окрестностей, содержащихся в $\mathcal{B}_0$.*

Доказательство. Если $\mathcal{B}_0$ удовлетворяет указанному условию, то для любых $K\in\mathcal{K}$ и $G\in\mathcal{G}$, таких, что $\psi(K)\subset G$, существуют такие $G_0\in\mathcal{G}$, $B_0\in\mathcal{B}_0$, что $\psi(K)\subset G_0\subset B_0\subset G$. Отметим также, что $K\subset G_0$, ибо ψ экстенсивно. Тогда для любого $K'\in\mathcal{K}$ из $K'\subset G_0$ вытекает $K'\subset B_0$ и, значит, $\psi(K')\subset B_0\subset G$. Поэтому по определению ψ полунепрерывно сверху.

Обратно, пусть ψ полунепрерывно на $\mathcal{K}$, $G\in\mathcal{G}$ и $B\in\mathcal{B}_0$ таково, что $B\subset G$, т. е. $B=\psi(B)\subset G$. Тогда существует такое $G'\in\mathcal{G}$, $G'\supset B$, что $\psi(K')=G$ для любого компактного $K'\subset G'$. С другой стороны, компактное множество B содержится в $G'\in\mathcal{G}$, и мы можем найти такие $G_0\in\mathcal{G}$ и $K_0\in\mathcal{K}$, что $B\subset G_0\subset K_0\subset C'$ Но из $K_0\subset G'$ вытекает $\psi(K_0)\subset G$, и поэтому $B\subset G_0\subset\psi(K_0)\subset G$. Этим доказательство и завершается, поскольку $\psi(K_0)\in\mathcal{B}_0$.

Полунепрерывные сверху пополнения на $\mathcal{F}$ характеризуются следующим образом.

Предложение 7.4.3. *Пусть ψ — заполнение на $\mathcal{G}$, $\mathcal{B}$ — семейство ψ-инвариантных множеств, а $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B} \cap \mathcal{G}$. Для того чтобы ψ было полунепрерывно снизу на $\mathcal{G}$, необходимо и достаточно, чтобы для любых двух множеств $B \in \mathcal{B}_0$ и $K \in \mathcal{K}$, таких, что $K \subset B$, существовало такое относительно компактное множество $B_0 \in \mathcal{B}_0$, что $K \subset B_0 \subset \overline{B}_0 \subset B$.*

Доказательство. Пусть ψ полунепрерывно снизу, $K \in \mathcal{K}$ и $\mathcal{K} \subset B \in \mathcal{B}_0$. Тогда $K \subset \psi(B)$, и найдется такое $K_0 \in \mathcal{K}$, $K_0 \subset B = \psi(B)$, что $\psi(G) \supset K$ для любого открытого множества $G \supset K_0$. Но $B \in \mathcal{G}$, и мы можем найти такое относительно компактное множество $G_0 \in \mathcal{G}$, для которого $K_0 \subset G_0 \subset \overline{G}_0 \subset B$. Отсюда вытекает, что $K \subset \psi(G_0) \subset \overline{G}_0 \subset B$, и указанное условие выполняется для множества $\psi(G_0) \in \mathcal{B}_0$.

Обратно, если это условие выполнено и $G \in \mathcal{G}$, $K \in \mathcal{K}$, $K \subset \psi(G)$, то существует такое $B_0 \in \mathcal{B}_0$, что $\overline{B}_0 \in \mathcal{K}$ и $K \subset B_0 \subset \overline{B}_0 \subset \psi(G) \subset G$. Поэтому из $G' \in \mathcal{G}$ и $G' \supset \overline{B}_0$ вытекает, что $\psi(G') \supset \psi(B_0) = B_0 \supset K$, так что ψ полунепрерывно снизу.

Наименьшая полунепрерывная сверху верхняя грань заполнения или пополнения на $\mathcal{K}$

Если ψ — заполнение на $\mathcal{K}$, то, согласно предложению 7.4.1, существует наименьшее полунепрерывное сверху заполнение ψ' на $\mathcal{K}$, такое, что $\psi' \subset \psi$, т. е. ψ' является наименьшим продолжением на $\mathcal{K}$ тождественного отображения на замыкании $\overline{\mathcal{B} \cap \mathcal{K}}$ множества $\mathcal{B} \cap \mathcal{K}$ в $\mathcal{K}$.

Предложение 7.4.4. *Пусть ψ — заполнение на $\mathcal{K}$, а $\mathcal{B}_0$ — семейство компактных ψ-инвариантных множеств. Положим $\psi_g(G) = \bigcup \{\psi(K), K \in \mathcal{K}, K \subset G\}$ для любого $G \in \mathcal{G}$ и $\psi_k(K) = \bigcap \{\psi_g(G), G \in \mathcal{G}, G \supset K\}$ для любого $K \in \mathcal{K}$. Тогда ψ_g будет заполнением на $\mathcal{G}$ в том и только в том случае, если $\mathcal{B}_0$ содержит в себе фундаментальную систему окрестностей каждого $B \in \mathcal{B}_0$. В этом случае ψ_g будет полунепрерывным снизу заполнением на $\mathcal{G}$, а ψ_k — полунепрерывным сверху заполнением на $\mathcal{K}$. Далее, ψ_k есть наименьшая полунепрерывная сверху верхняя грань ψ на $\mathcal{K}$ и $\psi_g(G) = \bigcup \{\psi_k(K), K \in \mathcal{K}, K \subset G\}$, для любого $G \in \mathcal{G}$.*

Доказательство. Отображение ψ_g представляет собой сужение на $\mathcal{G}$ наименьшего продолжения сужения ψ на $\mathcal{K}$, и ψ есть заполнение на $\mathcal{P}$. Согласно утверждению с) предложения 7.1.2,

ψ_g является заполнением на $\mathscr{G}$ тогда и только тогда, когда $\mathscr{B}_0$ удовлетворяет указанному в формулировке предложения условию. Предположим, что это условие выполнено, и покажем, что ψ_g полунепрерывно снизу, используя для этой цели критерий предложения 7.4.3. Пусть $B \in \mathscr{G}$ — некоторое ψ_g-инвариантное множество, т. е. $B = \bigcup \{B_i,\ i \in I\}$ для некоторого семейства $\{B_i,\ i \in I\} \subset \mathscr{B}_0$. Для каждого $i \in I$ существуют такие $G_i \in \mathscr{G}$ и $B'_i \in \mathscr{B}_0$, что $B_i \subset G_i \subset B'_i \subset B$. Отсюда вытекает, что если $K \in \mathscr{K}$, $K \subset B$, то

$$K \subset \bigcup B_i \subset \bigcup G_i \subset \bigcup B'_i \subset B.$$

Для каждого $i \in I$ имеем $B_i \subset \psi_g(G_i)$ и поэтому $K \subset \bigcup \psi_g(G_i)$. Отсюда следует существование конечного набора индексов $i_1, \ldots, i_n \in I$, для которого

$$K \subset \bigcup_{k=1}^{n} \psi_g(G_{i_k}) \subset \overline{\bigcup \psi_g(G_{i_k})} \subset \bigcup_{i \in I} B'_i \subset B.$$

Открытое инвариантное множество $B_0 = \bigcup_{k=1}^{n} \psi_g(G_{i_k})$ удовлетворяет критерию предложения 7.4.3. Следовательно, ψ_g полунепрерывно снизу.

Покажем теперь, что $\psi_k(K) \in \mathscr{K}$ для любого $K \in \mathscr{K}$. Если $G \supset K$ открыто, то можно найти такое относительно компактное множество $G' \in \mathscr{G}$, что $G \supset \overline{G'} \supset G' \supset K$. Отсюда следует, что $\psi_g(G) \supset \psi(\overline{G'}) \supset \psi_k(K)$ и, значит, множество

$$\psi_k(K) = \bigcap \{\psi(\overline{G'}),\ G' \in \mathscr{G},\ G' \supset K\}$$

компактно.

Далее, ψ_k полунепрерывно сверху на $\mathscr{K}$. Действительно, если $\psi_k(K) = \bigcap \{\psi(\overline{G'}),\ G' \in \mathscr{G},\ \overline{G'} \in \mathscr{K},\ G' \supset K\}$ не пересекается с $F \in \mathscr{F}$, то в силу „свойства конечного пересечения" (для $\mathscr{K}$) существует такое относительно компактное множество $G' \in \mathscr{G}$, $G' \supset K$, для которого $\psi(\overline{G'})$ и (тем более) $\psi_g(G')$ не пересекаются с F. Тогда $\psi_k(K') \cap F = \varnothing$ для любого компактного $K' \subset G'$, так что ψ_k полунепрерывно сверху.

Очевидно, что отображение ψ_k возрастает, антиэкстенсивно и $\psi_k \supset \psi$ на $\mathscr{K}$. Покажем, что оно идемпотентно на $\mathscr{K}$ и является, таким образом, полунепрерывным сверху заполнением на $\mathscr{K}$. Если $K \in \mathscr{K}$, то $\psi_k\psi_k(K) = \bigcap \{\psi_g(G),\ G \supset \psi_k(K),\ G \in \mathscr{G}\}$. Но $G \supset \psi_k(K)$ влечет $\psi_g(G) \supset \psi_k(K)$, так как ψ_k полунепрерывно сверху. Поэтому мы можем найти такое открытое множество $G' \supset K$, что $\psi_k(K') \subset G'$ для любого компактного $K' \subset G'$. Тем более $\psi_g(G') \subset G$ (ибо $\psi_k \supset \psi$ на $\mathscr{K}$). Отсюда вытекает, что $\psi_g(G') \subset \psi_g(G)$, поскольку ψ_g — заполнение. Но из $G' \supset K$ вытекает (по определению), что $\psi_k(K) \subset \psi_g(G')$, и поэтому $\psi_k(K) \subset \subset \psi_g(G)$. Мы можем записать

$$\psi_k \psi_k(K) = \bigcap \{\psi_g(G),\ G \in \mathscr{G},\ \psi_g(G) \supset \psi_k(K)\} \supset \psi_k(K),$$

и, значит, $\psi_k \psi_k(K) = \psi_k(K)$ (в силу антиэкстенсивности ψ_k), т. е. ψ_k идемпотентно.

Ясно, далее, что $\psi_k \supset \psi$ на $\mathscr{K}$. Если ψ полунепрерывно сверху, то это включение становится равенством. Действительно, можно взять такие $K \in \mathscr{K}$ и $G \in \mathscr{G}$, что $\psi(K) \subset G$. Если ψ полунепрерывно сверху, то найдется такое открытое множество $G' \supset K$, что $\psi(K') \subset G$ для любого компактного $K' \subset G'$, и потому $\psi_g(G') \subset G$ и $\psi_k(K) \subset G$. Отсюда следует, что $\psi_k(K) = \bigcap \{G,\ G \in \mathscr{G},\ G \supset \psi(K)\} \subset \psi(K)$, и мы приходим к утверждаемому равенству. Если ψ не является полунепрерывным сверху на $\mathscr{K}$, то любая полунепрерывная сверху верхняя грань $\psi' \supset \psi$ на $\mathscr{K}$ будет такова, что $\psi_k \subset \psi'_k = \psi'$. Поэтому ψ_k есть наименьшая полунепрерывная сверху верхняя грань отображения ψ на $\mathscr{K}$. Наконец, из того, что $\psi(K) \subset \psi_k(K) \subset \psi_g(G)$ для любого $G \in \mathscr{G}$, $G \supset K$, вытекает наше последнее утверждение.

Предложение 7.4.5. *Пусть ψ — заполнение на $\mathscr{G}$, а $\mathscr{B}_0$ — семейство открытых ψ-инвариантных множеств. Положим $\psi_k(K) = \bigcap \{\psi(G),\ G \in \mathscr{G},\ G \supset K\}$ для любого $K \in \mathscr{K}$ и $\psi_g(G) = \bigcup \{\psi_k(K),\ K \in \mathscr{K},\ K \subset G\}$ для любого $G \in \mathscr{G}$. Тогда $\mathscr{K}$ будет замкнуто относительно ψ_k в том и только том случае, если $\mathscr{B}_0$ содержит в себе фундаментальную систему окрестностей $\overline{B}$ для любого относительно компактного множества $B \in \mathscr{B}_0$. В этом случае ψ_k будет полунепрерывным сверху заполнением на $\mathscr{K}$, а ψ_g — полунепрерывным снизу заплнением на $\mathscr{G}$. Далее, ψ_g есть наибольшая полунепрерывная снизу нижняя грань ψ на $\mathscr{G}$, и $\psi = \psi_g$ тогда и только тогда, когда ψ полунепрерывно снизу на $\mathscr{G}$.*

Доказательство. Предположим, что $\mathscr{K}$ замкнуто относительно ψ_k, и пусть $B \in \mathscr{B}_0$ — относительно компактное множество, $G \in \mathscr{G}$ и $\overline{B} \subset G$. Поскольку $B \subset \overline{B}$, то $B \subset \psi_k(\overline{B}) \subset \overline{B}$, так что $\overline{B} = \psi_k(\overline{B})$ в силу компактности $\psi_k(\overline{B})$. Из включения $\overline{B} \subset G$ вытекает, что $\overline{B} = \psi_k(\overline{B}) \subset \psi(G) \subset G$ и $\psi(G) \in \mathscr{B}_0$. Следовательно, $\mathscr{B}_0$ содержит фундаментальную систему окрестностей множества $\overline{B}$.

Обратно, пусть выполняется это условие, и пусть K — некоторое компактное множество. Если $x \notin \psi_k(K)$, то найдется такое открытое множество $G \supset K$, что $x \notin \psi(G)$. Тогда для любого относительно компактного открытого множества G', удовлетворяющего условию $K \subset G' \subset \overline{G'} \subset G$, мы имеем $x \notin \overline{\psi(G')}$. Действительно, если $x \in \overline{\psi(G')}$, то существует такое $B \in \mathscr{B}_0$, что $x \in \overline{\psi(G')} \subset B \subset G$ (в силу предположенного свойства семейства $\mathscr{B}_0$), и таким образом, $x \in \psi(B) \subset \psi(G)$, что невозможно. Мы заключаем отсюда, что

$$x \notin \bigcap \{\overline{\psi(G')},\ G' \supset K,\ G' \in \mathscr{G}\}.$$

Поэтому множество $\psi_k(K) = \bigcap \{\overline{\psi(G')}, G' \supset K, G' \in \mathscr{G}\}$ компактно.

Ясно, что ψ_k возрастает и антиэкстенсивно на $\mathscr{K}$. Для любого $K \in \mathscr{K}$ имеем $\psi_k\psi_k(K) = \bigcap \{\psi(G), G \in \mathscr{G}, G \supset \psi_k(K)\}$. Но $G \supset \psi_k(K)$ влечет $\psi(G) \supset \psi_k(K)$. Действительно, из предыдущей части доказательства следует, что $\psi_k(K) = \bigcap \{\overline{\psi(G')}, G' \in \mathscr{G}, G' \supset K\}$, и, значит, существует такое $G' \in \mathscr{G}$, что $\overline{G'} \in \mathscr{K}$, $G' \supset K$ и $\overline{\psi(G')} \subset G$. Отсюда вытекает, что $\psi(G') \subset \psi(G)$ и $\psi_k(K) \subset \psi(G)$. Мы заключаем поэтому, что $\psi_k\psi_k(K) \supset \psi_k(K)$, и, следовательно, ψ_k идемпотентно, а значит, является полунепрерывным снизу заполнением на $\mathscr{K}$. Доказательство можно завершить тем же способом, что и в предложении 7.4.4.

Что касается пополнений, то мы приведем здесь только формулировки теорем, поскольку соответствующие доказательства вполне аналогичны проведенным выше.

Предложение 7.4.6. *Пусть ψ — пополнение на $\mathscr{K}$, а $\mathscr{B}_0$ — семейство компактных ψ-инвариантных множеств. Для того чтобы $\mathscr{G}$ было замкнуто относительно ψ_g, необходимо и достаточно, чтобы для любых $K \in \mathscr{K}$, $G \in \mathscr{G}$ и $B \in \mathscr{B}_0$, удовлетворяющих условию $K \subset G \subset B$, существовали такие $B' \in \mathscr{B}_0$ и $G' \in \mathscr{G}$, что $K \subset B' \subset G' \subset B$. В этом случае ψ_g является полунепрерывным снизу пополнением на $\mathscr{G}$, а ψ_k — полунепрерывным сверху пополнением на $\mathscr{K}$. Далее, ψ_k есть наименьшая полунепрерывная сверху верхняя грань ψ на $\mathscr{K}$, и $\psi = \psi_k$ тогда и только тогда, когда ψ полунепрерывно сверху на $\mathscr{K}$.*

Предложение 7.4.7. *Пусть ψ — пополнение на $\mathscr{G}$, а $\mathscr{B}_0$ — семейство открытых ψ-инвариантных множеств. Для того чтобы $\mathscr{K}$ было замкнуто относительно ψ_k, необходимо и достаточно, чтобы для любых $G \in \mathscr{G}$, $K \in \mathscr{K}$ и $B \in \mathscr{B}_0$, удовлетворяющих условию $G \subset K \subset B$, существовали такие $B' \in \mathscr{B}_0$ и $K' \in \mathscr{K}$, что $G \subset B' \subset K' \subset B$. В этом случае ψ_k является полунепрерывным сверху пополнением на $\mathscr{K}$, а ψ_g — полунепрерывным снизу пополнением на $\mathscr{G}$. Далее, ψ есть наибольшая полунепрерывная снизу нижняя* *грань ψ на $\mathscr{G}$, и $\psi=\psi_g$ тогда и только тогда, когда ψ полунепрерывно снизу на $\mathscr{G}$.*

В этих утверждениях ψ_g и ψ_k определяются точно таким же образом, как и в предложениях 7.4.4 и 7.4.5.

Компактные заполнения

Заполнение ψ на $\mathscr{P}$ называется *компактным*, если выполнены следующие два условия:

a) ψ совпадает с наименьшим продолжением своего сужения на $\mathscr{K}$;

b) ψ является заполнением, полунепрерывным сверху на $\mathscr{K}$, полунепрерывным сверху на $\mathscr{F}$ и полунепрерывным снизу на $\mathscr{G}$.

Для характеризации компактных заполнений нам понадобятся некоторые предварительные результаты.

Предложение 7.4.8. *Пусть ψ — заполнение на $\mathscr{K}$, а $\mathscr{B}_0$ — семейство ψ-инвариантных компактных множеств. Тогда существует наименьшее заполнение ψ' на $\mathscr{F}$, такое, что $\psi'=\psi$ на $\mathscr{K}$, и семейство $\mathscr{B}'_0$ ψ-инвариантных замкнутых множеств порождается из $\mathscr{B}_0$ при помощи операции взятия замкнутых (бесконечных) объединений*[1].

Доказательство. Пусть $\mathscr{B}$ — семейство ψ-инвариантных множеств, так что $\mathscr{B}_0=\mathscr{B}\cap\mathscr{K}$. В силу предложения 7.1.2, из $B\in\mathscr{B}$, $\bar{B}\in\mathscr{K}$ вытекает, что $\bar{B}\in\mathscr{B}_0$. Если ψ' — такое заполнение на $\mathscr{F}$, что $\psi=\psi'$ на $\mathscr{K}$, то семейство $\mathscr{B}'$ ψ'-инвариантных множеств содержит $\mathscr{B}_0$, и поэтому $\mathscr{B}'\supset\mathscr{B}'_0$, где $\mathscr{B}'_0$ — класс, порождаемый из $\mathscr{B}_0$ при помощи операции взятия замкнутых бесконечных объединений. Пусть ψ'_0 — наименьшее продолжение тождественного отображения на $\mathscr{B}'_0$. Ввиду предложения 7.1.2, ψ'_0 — заполнение на $\mathscr{F}$, и $\psi'_0\supset\psi$ на $\mathscr{K}$. В действительности $\psi'_0=\psi$ на $\mathscr{K}$, поскольку если $K\in\mathscr{K}$, то $\psi'_0(K)=\overline{\bigcup\{B, B\in\mathscr{B}_0, B\subset K\}}=\overline{\psi(K)}=$ $=\psi(K)$.

Отметим, что это наименьшее продолжение ψ на $\mathscr{F}$, вообще говоря, не является полунепрерывным сверху.

Предложение 7.4.9. *Пусть ψ — заполнение на $\mathscr{K}$, а $\mathscr{B}_0$ — семейство компактных ψ-инвариантных множеств. Для того чтобы ψ могло быть продолжено до полунепрерывного сверху заполнения на $\mathscr{F}$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathscr{B}_0$ было замкнуто в относительной $\mathscr{F}$-топологии на $\mathscr{K}$. В этом случае ψ полунепрерывно*

[1] Здесь замкнутое объединение — это замыкание объединения. — *Прим. перев.*

сверху на $\mathscr{K}$, и если ψ' — наименьшее продолжение ψ до полунепрерывного сверху заполнения на $\mathscr{F}$, то семейство $\mathscr{B}'_0$ замкнутых ψ'-инвариантных множеств совпадает с замыканием $\overline{\mathscr{B}}_0$ семейства $\mathscr{B}_0 \subset \mathscr{F}$.

Доказательство. Пусть ψ_1 — продолжение ψ до полунепрерывного сверху заполнения на $\mathscr{F}$, а $\mathscr{B}_1$ — семейство ψ_1-инвариантных замкнутых множеств. Семейство $\mathscr{B}_1$ замкнуто в $\mathscr{F}$ (предложение 7.4.2), и $\mathscr{B}_0 = \mathscr{B}_1 \cap \mathscr{K}$, поскольку ψ_1 — продолжение ψ. Поэтому $\mathscr{B}_0$ замкнуто в относительной $\mathscr{F}$-топологии на $\mathscr{K}$. Отсюда следует, что $\mathscr{B}_0$ замкнуто также и в миопической топологии, а само ψ полунепрерывно сверху на $\mathscr{K}$.

Обратно, предположим, что $\mathscr{B}_0$ замкнуто в относительной $\mathscr{F}$-топологии на $\mathscr{K}$, и положим $\mathscr{B}'_0 = \overline{\mathscr{B}}_0$ (замыкание $\mathscr{B}_0$ в $\mathscr{F}$). Тогда $\mathscr{B}_0 = \mathscr{B}'_0 \cap \mathscr{K}$, и наименьшее продолжение ψ' тождественного отображения на $\mathscr{B}'_0$ является продолжением ψ до полунепрерывного сверху заполнения на $\mathscr{F}$. Далее, если $\mathscr{B}_1$ замкнуто в $\mathscr{F}$ и $\mathscr{B}_0 = \mathscr{B}_1 \cap \mathscr{K}$, то, очевидно, $\mathscr{B}_1 \supset \mathscr{B}'_0$ и, следовательно, ψ' — наименьшее продолжение ψ до полунепрерывного сверху заполнения на $\mathscr{F}$.

Следствие. *Пусть ψ — полунепрерывное сверху заполнение на $\mathscr{F}$, а $\mathscr{B}'_0$ — семейство ψ-инвариантных замкнутых множеств. Для того чтобы ψ было наименьшим полунепрерывным сверху продолжением на $\mathscr{F}$ своего сужения на $\mathscr{K}$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathscr{B}'_0 = \overline{\mathscr{B}'_0 \cap \mathscr{K}}$, т. е. чтобы любое замкнутое ψ-инвариантное множество являлось пределом в $\mathscr{F}$ компактных ψ-инвариантных множеств.*

Теперь мы в состоянии получить характеризацию компактных заполнений.

Предложение 7.4.10. *Для компактности заполнения ψ необходимо и достаточно, чтобы оно допускало представление $\psi(A) = \bigcup \{B;\ B \subset A,\ B \in \mathscr{B}_0\}$, $A \in \mathscr{P}$, для некоторого семейства $\mathscr{B}_0 \subset \mathscr{K}$, замкнутого относительно взятия конечных объединений и удовлетворяющего следующим условиям:*

a) *$\mathscr{B}_0$ замкнуто в $\mathscr{K} \cap \mathscr{F}$ в относительной $\mathscr{F}$-топологии;*

b) *$\mathscr{B}_0$ содержит фундаментальную систему окрестностей каждого $B \in \mathscr{B}_0$;*

c) *минимальные элементы замыкания $\overline{\mathscr{B}}_0$ множества $\mathscr{B}_0$ в $\mathscr{F}$ компактны.*

Доказательство. Необходимость вытекает из предложений 7.4.4 и 7.4.9. Докажем достаточность. Предположим, что класс $\mathscr{B}_0 \subset \mathscr{K}$ удовлетворяет условиям a) — c) и ψ — наименьшее продолжение тождественного отображения на $\mathscr{B}_0$. Пусть $\mathscr{B}$ — семейство ψ-инвариантных множеств, т. е. порожденный $\mathscr{B}_0$ класс, замкнутый относительно $\bigcup$. Если $B \in \mathscr{B}$, т. е. $B = \bigcup \{B_i, i \in I\}$ для некоторого семейства $\{B_i, i \in I\} \subset \mathscr{B}_0$, и $\overline{B} \in \mathscr{K}$, то $\overline{B} \in \mathscr{B}_0$ (условие а)). Поэтому $\mathscr{K}$ замкнуто относительно ψ (предложение 7.1.2). Пусть $\mathscr{B}'$ — семейство замкнутых ψ-инвариантных множеств. Ясно, что $\mathscr{B}' \subset \overline{\mathscr{B}}_0$. Обратно, из условий а) и с) вытекает, что $\overline{\mathscr{B}}_0 \subset \mathscr{B}'$ и, значит, $\mathscr{B}' = \overline{\mathscr{B}_0}$. Отсюда следует, что если $B \in \mathscr{B}$, то $\overline{B} \in \mathscr{B}_0$, а потому $\overline{B} \in \mathscr{B}$, так что ψ полунепрерывно сверху на $\mathscr{F}$. Наконец, ψ полунепрерывно снизу на $\mathscr{G}$ согласно предложению 7.4.4.

Полунепрерывные сверху и компактные гранулометрии

Напомним, что гранулометрия ψ_λ, $\lambda > 0$, называется полунепрерывной сверху на $\mathscr{F}$, если $(\lambda, F) \to \psi_\lambda(F)$ является полунепрерывным сверху отображением из $\mathbf{R}_+ \times \mathscr{F}$ в $\mathscr{F}$, и компактной, если для любого $\lambda > 0$ заполнение ψ_λ компактно. Если гранулометрия ψ_λ полунепрерывна сверху и компактна, а A — некоторое СЗМ, то СЗМ $\psi_\lambda(A)$ и случайное открытое множество $\psi_\lambda(A^c)$ обладают теми же свойствами, что и в случае эвклидовой полунепрерывной сверху и компактной гранулометрии (см. § 7.3). Характеризация компактных гранулометрий дана в предложении 7.4.10, а сейчас мы выясним условия, при которых гранулометрия полунепрерывна сверху. Заметим, что если гранулометрия ψ_λ, $\lambda > 0$, полунепрерывна на $\mathscr{F}$, то $F \to \psi_\lambda(F)$ будет полунепрерывным сверху заполнением на $\mathscr{F}$ для каждого $\lambda > 0$. Поэтому семейство $\mathscr{B}_\lambda$ ψ_λ-инвариантных множеств замкнуто относительно топологического замыкания, и $\mathscr{B}_\lambda \cap \mathscr{F}$ замкнуто в $\mathscr{F}$ (предложение 7.4.1). Всюду в дальнейшем мы предполагаем, что отображение $F \to \psi_\lambda(F)$ полунепрерывно сверху на $\mathscr{F}$ для каждого $\lambda > 0$, и пишем $\mathscr{B}_\lambda$ вместо $\mathscr{B}_\lambda \cap \mathscr{F}$.

Предложение 7.4.11. *Пусть ψ_λ — такая гранулометрия на $\mathscr{K}$ (соотв. на $\mathscr{F}$), что для любого $\lambda > 0$ отображение ψ_λ является полунепрерывным сверху заполнением на $\mathscr{K}$ (соотв. на $\mathscr{F}$). Тогда сужение на $\mathscr{K}$ (соотв. на $\mathscr{F}$) регуляризации сверху $\check{\psi}_\lambda$ также полунепрерывно сверху на $\mathscr{K}$ (соотв. на $\mathscr{F}$). Кроме того, для любых $A \in \mathscr{K}$ ($A \in \mathscr{F}$) и $\lambda_0 > 0$*

$$\check{\psi}_{\lambda_0}(A) = \bigcap_{\mu < \lambda_0} \check{\psi}_\mu(A) = \bigcap_{\mu < \lambda_0} \psi_\mu(A).$$

Доказательство. Пусть ψ_λ — некоторая гранулометрия на $\mathscr{K}$ и $\mathscr{B}_\lambda$ для каждого $\lambda > 0$ — семейство ψ_λ-инвариантных компактных множеств, представляющее собой замкнутое подмножество пространства $\mathscr{K}$. Для заданных $\lambda_0 > 0$ и $A \in \mathscr{K}$ положим

$$A_{\lambda_0} = \bigcap_{\lambda < \lambda_0} \psi_\lambda(A),$$

так что, в силу (7.2.2), $A_{\lambda_0} \supset \check{\psi}_{\lambda_0}(A)$. С целью доказательства обратного включения покажем сначала, что $A_{\lambda_0} \in \check{\mathscr{B}}_{\lambda_0}$, т. е. $A_{\lambda_0} \in \mathscr{B}_\mu$ для любого $\mu < \lambda_0$ (ибо A_{λ_0} компактно). Если $\lambda \uparrow \lambda_0$, то $\lim \psi_\lambda(A) = A_{\lambda_0}$ в $\mathscr{K}$ и $\overline{\lim}\, \psi_\mu \psi_\lambda(A) \subset \psi_\mu(A_{\lambda_0})$ для любого заданного $\mu < \lambda_0$ (поскольку ψ_μ полунепрерывно сверху). Но при $\mu < \lambda < \lambda_0$ мы имеем $\psi_\mu \psi_\lambda(A) = \psi_\lambda(A)$, и поэтому $A_{\lambda_0} = \lim \psi_\lambda(A) \subset \subset \psi_\mu(A_{\lambda_0})$, т. е. $A_{\lambda_0} = \psi_\mu(A_{\lambda_0})$, поскольку ψ_μ — заполнение. Таким образом, $A_{\lambda_0} \in \mathscr{B}_\mu$ для любого $\mu < \lambda_0$, т. е. $A_{\lambda_0} \in \check{\mathscr{B}}_{\lambda_0}$ и, значит, $A_{\lambda_0} = \check{\psi}_{\lambda_0}(A_{\lambda_0})$.

Далее, $A_{\lambda_0} \subset A$ дает нам $A_{\lambda_0} = \psi_{\lambda_0}(A_{\lambda_0}) \subset \psi_{\lambda_0}(A) \subset A_{\lambda_0}$ и, следовательно, $A_{\lambda_0} = \check{\psi}_{\lambda_0}(A)$. Отсюда получаем, что $\check{\psi}_{\lambda_0}$ является заполнением на $\mathscr{K}$. Компактными $\check{\psi}_{\lambda_0}$-инвариантными множествами будут множества $A_{\lambda_0} = \check{\psi}_{\lambda_0}(A)$, $A \in \mathscr{K}$, т. е элементы $\bigcap \{\mathscr{B}_\lambda, \lambda < \lambda_0\}$. Но это семейство замкнуто в $\mathscr{K}$, так как $\mathscr{B}_\lambda$ замкнуто. Поэтому из предложения 7.4.1 вытекает, что $\check{\psi}_{\lambda_0}$ полунепрерывно сверху.

Предложение 7.4.12. *Пусть ψ_λ, $\lambda > 0$, — такая гранулометрия на $\mathscr{K}$ (соотв. на $\mathscr{F}$), что для любого $\lambda > 0$ отображение ψ_λ полунепрерывно сверху. Тогда следующие четыре условия эквивалентны:*

1) *Гранулометрия ψ_λ, $\lambda > 0$, полунепрерывна сверху на $\mathscr{K}$ (соотв. на $\mathscr{F}$).*

2) *Для любого $A \in \mathscr{K}$ (соотв. $A \in \mathscr{F}$) отображение $\lambda \to \psi_\lambda(A)$ полунепрерывно сверху на $\mathbf{R}_+$.*

3) *Для любых $\lambda > 0$ и $A \in \mathscr{K}$ (соотв. $A \in \mathscr{F}$) имеет место соотношение $\psi_\lambda(A) = \bigcap_{\mu < \lambda} \psi_\mu(A)$.*

4) *Гранулометрия ψ_λ, $\lambda > 0$, регулярна сверху.*

Доказательство. Из условия 1) очевидным образом следует 2). Если $\lambda \uparrow \lambda_0$, то $\lim \psi_\lambda(A) = A_{\lambda_0} = \bigcap_{\lambda < \lambda_0} \psi_\lambda(A)$ в $\mathscr{K}$, и поэтому, если выполнено условие 2), то $A_{\lambda_0} \subset \psi_{\lambda_0}(A)$, т. е. $A_{\lambda_0} = \psi_{\lambda_0}(A)$ (ибо обратное включение выполняется всегда). Таким образом, из условия 2) вытекает условие 3). Если верно условие 3), то из $A_\lambda \supset \check{\psi}_\lambda(A) \supset \psi_\lambda(A)$ следует, что $A_\lambda = \check{\psi}_\lambda = \psi_\lambda(A)$, и, значит, выполняется условие 4).

Из предложения 7.4.11 вытекает, что условие 4) влечет за собой условие 3). Пусть $\{\lambda_n\}$ — такая последовательность, что

$\lim \lambda_n \to \lambda_0$, и $\mu < \lambda_0$. Для достаточно больших n мы имеем $\mu < \lambda_n$ и, следовательно, $\psi_\mu(A) \supset \psi_{\lambda_n}(A)$ для любого $A \in \mathscr{K}$. Поэтому $\overline{\lim}\, \psi_{\lambda_n}(A) \subset \psi_\mu(A)$ и, значит,

$$\overline{\lim}\, \psi_{\lambda_n}(A) \subset \bigcap_{\mu < \lambda_0} \psi_\mu(A).$$

Отсюда вытекает, что условие 3) влечет условие 2). Далее, если последовательность $\{A_n\} \subset \mathscr{K}$ такова, что $\lim A_n = A$, то $\psi_\mu(\psi_{\lambda_n}(A_n)) = \psi_{\lambda_n}(A_n)$. Пусть верно условие 2). Тогда отображение ψ_μ полунепрерывно сверху. Для любой последовательности $k \to n_k$, для которой $\lim \psi_{\lambda_{n_k}}(A_{n_k}) = A_0$ в $\mathscr{K}$, получаем отсюда $A_0 = \lim \psi_{\lambda_{n_k}}\left(A_{n_k}\right) \subset \psi_\mu(A_0) \subset A_0$. Поэтому $A_0 = \psi_\mu(A_0)$ для любого $\mu < \lambda_0$. С другой стороны, гранулометрия ψ_λ регулярна сверху (поскольку условие 2) влечет условие 3)), и, таким образом, $A_0 = \psi_{\lambda_0}(A_0) \in \mathscr{B}_{\lambda_0}$. Но из $\psi_{\lambda_n}(A_n) \subset A_n$ следует, что $A_0 \subset A$ и $A_0 = \psi_{\lambda_0}(A_0) \subset \psi_{\lambda_0}(A)$. Отсюда вытекает, что $\overline{\lim}\, \psi_{\lambda_n}(A_n) \subset \subset \psi_{\lambda_0}(A)$, т. е. выполнение условия 2) влечет за собой условие 1).

7.5. ПОЛУНЕПРЕРЫВНЫЕ СНИЗУ ЗАПОЛНЕНИЯ И ПОПОЛНЕНИЯ НА $\mathscr{K}$ И $\mathscr{F}$

Полунепрерывные снизу отображения пространств $\mathscr{F}$ или $\mathscr{K}$ в себя в приложениях менее полезны, чем полунепрерывные сверху отображения. Тем не менее стоит хотя бы охарактеризовать полунепрерывные снизу заполнения и пополнения.

Предложение 7.5.1. *Пополнение ψ на $\mathscr{F}$ (соотв. на $\mathscr{K}$) полунепрерывно снизу тогда и только тогда, когда семейство $\mathscr{B}$ ψ-инвариантных замкнутых (соотв. компактных) множеств замкнуто в $\mathscr{F}$ (соотв. в $\mathscr{K}$).*

Доказательство. Пусть ψ полунепрерывно снизу на $\mathscr{F}$, $\{F_n\} \subset \mathscr{B}$ и $\lim F_n = F$ в $\mathscr{F}$. Тогда $\psi(F) \subset \lim \psi(F_n) = \lim F_n = F$, и поэтому $\psi(F) = F$, так как ψ экстенсивно. Отсюда вытекает замкнутость $\mathscr{B}$.

Обратно, пусть $\mathscr{B}$ замкнуто в $\mathscr{F}$, и пусть $\{F_n\} \subset \mathscr{F}$ — такая последовательность, что $\lim F_n = F$ в $\mathscr{F}$, и $k \to n_k$ — такая ее подпоследовательность, для которой $\psi(F_{n_k}) = F_0$ в $\mathscr{F}$. Тогда из $F_{n_k} \subset \psi(F_{n_k})$ вытекает, что $F \subset F_0$. Но $F_0 \in \mathscr{B}$, ибо $\mathscr{B}$ замкнуто. Отсюда следует, что $\psi(F) \subset F_0$ и $\psi(F) \subset \underline{\lim}\, \psi(F_n)$. Таким образом, ψ полунепрерывно снизу.

Замечание. В силу предложений 7.5.1 и 7.4.2, пополнение ψ на $\mathscr{K}$ ***непрерывно*** тогда и только тогда, когда $\mathscr{B}$ замкнуто в $\mathcal{K}$ и содержит фундаментальную систему окрестностей каждого $B \in \mathcal{B}$. Например, если $E = \mathbf{R}^d$ — эвклидово пространство, то взятие *выпуклой оболочки* C есть непрерывное пополнение на $\mathcal{K}(\mathbf{R}^d)$.

Лемма 7.5.1. *Обозначим через $\mathcal{S}$ семейство всех конечных подмножеств ЛКС-пространства E. Всякое возрастающее полунепрерывное снизу отображение ψ из $\mathcal{K}$ в $\mathcal{F}$ допускает единственное полунепрерывное снизу продолжение до отображения ψ' пространства $\mathcal{F}$ в себя, и*

$$\psi'(F) = \overline{\bigcup \{\psi(B),\ B \in \mathcal{S},\ B \subset F\}} \qquad (F \in \mathcal{F}).$$

Доказательство. Если продолжение ψ' существует, то оно допускает указанное представление. Действительно, фильтрующееся возрастающее семейство $\{B,\ B \in \mathcal{S},\ B \subset F\}$ сходится к F в $\mathcal{F}$, и, значит, $\psi'(F) \subset \underline{\lim}\, \psi(B)$. Но из включения $\psi'(F) \supset \psi(B)$ для любого $B \subset F$ вытекает, что $\psi'(F) \supset \overline{\lim}\, \psi(B)$, так что $\psi'(F) = \lim \psi(B)$.

Обратно, пусть ψ — полунепрерывное снизу отображение из $\mathcal{K}$ в $\mathcal{F}$. Отображение ψ': $\mathcal{F} \to \mathcal{F}$, определяемое формулой, приведенной в формулировке леммы, является продолжением отображения ψ, как следует из первой части доказательства (с заменой $F \in \mathcal{F}$ на $K \in \mathcal{K}$). Пусть $\{F_n\} \subset \mathcal{F}$ — такая последовательность, что $\lim F_n = F$ в $\mathcal{F}$, и

$$x \in \bigcup \{\psi(B),\ B \in \mathcal{S},\ B \subset F\}.$$

Тогда существует такое конечное семейство $B \in \mathcal{S}$, что $B \subset F$, $x \in \psi(B)$, скажем $B = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$. Для каждого $i = 1, 2, \ldots, k$ можно найти последовательность $n \to y_n^i \in F_n$, для которой $\lim y_n^i = x_i$. Положим $B_n = \{x_n^i,\ i = 1, \ldots, k\}$, так что $B_n \subset F_n$ и $\lim B_n = B$ в $\mathcal{F}$. Поскольку ψ полунепрерывно снизу, то $\psi(B) \subset \underline{\lim}\, \psi(B_n) \subset \underline{\lim}\, \psi'(F_n)$ и, таким образом, $x \in \underline{\lim}\, \psi'(F_n)$. Поэтому

$$\bigcup \{\psi(B),\ B \in \mathcal{S},\ B \subset F\} \subset \underline{\lim}\, \psi'(F_n).$$

Отсюда вытекает, что $\psi'(F) \subset \underline{\lim}\, \psi'(F_n)$, ибо $\underline{\lim}\, \psi'(F_n)$ — замкнутое множество, и, следовательно, ψ' полунепрерывно снизу.

Предложение 7.5.2. *Заполнение ψ на $\mathcal{K}$ (соотв. на $\mathcal{F}$) полунепрерывно снизу тогда и только тогда, когда семейство $\mathcal{B}$ компактных (соотв. замкнутых) ψ-инвариантных множеств порождается при помощи операции взятия замкнутых бесконечных объединений из некоторого семейства $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{S}$ конечных множеств, удовлетворяющего условию: для каждого $B_0 = \{x_1, \ldots, x_k\} \in \mathcal{B}_0$*

существуют такие $G_i \in \mathscr{G}$, $i = 1, \ldots, k$, что $x_i \in G_i$ и $\{y_1, \ldots, y_k\} \in \mathscr{B}_0$, если $y_i \in G_i$, $i = 1, \ldots, k$.

Доказательство. Для любого конечного множества $B \in \mathscr{Y}$ имеем $\psi(B) \in \mathscr{Y}$. Поэтому, если ψ полунепрерывно снизу на $\mathscr{K}$ (или на $\mathscr{F}$), то, как следует из леммы 7.5.1, семейство $\mathscr{B}$ порождается семейством $\mathscr{B}_0 = \mathscr{B} \cap \mathscr{Y}$. Пусть $B_0 = \{x_1, \ldots, x_k\}$ — множество из $\mathscr{B}_0$ и $G'_i \in \mathscr{G}$, $i = 1, \ldots, k$, — попарно непересекающиеся открытые окрестности точек x_i. Поскольку $B_0 = \psi(B_0)$ пересекается с каждым G'_i, то существует конечное число n открытых множеств G_j, $j = 1, \ldots, n$, таких, что если $B_0 \cap G_j \neq \varnothing$ и $A \cap G_j \neq \varnothing$, то $\psi(A) \cap G'_i \neq \varnothing$ $(A \in \mathscr{K}$, $j = 1, \ldots, n$, $i = 1, \ldots, k)$. В этом последнем случае $\psi(A)$ и (тем более) само A содержат по крайней мере k различных точек и, таким образом, $n \geqslant k$. С другой стороны, B_0 содержит k точек и пересекается с каждым из множеств G_j (которые можно всегда считать попарно непересекающимися), так что $n \leqslant k$ и, следовательно, $n = k$. Множества G_j, $j = 1, 2, \ldots, k$, можно упорядочить таким образом, чтобы $x_i \in G_i$. Для любого $A = \{y_1, \ldots \ldots, y_k\}$, такого, что $y_i \in G_i$, $i = 1, \ldots, k$, имеем $\psi(A) \cap G'_i \neq \varnothing$ для каждого $i = 1, \ldots, k$, причем $\psi(A)$ содержит по крайней мере k различных точек. Поскольку $\psi(A) \subset A$, то мы заключаем, что $A = \psi(A) \in \mathscr{B}$, и необходимость указанного в формулировке предложения условия доказана.

Обратно, предположим, что это условие выполнено. Для любого $K \in \mathscr{K}$ имеем

$$\psi(K) = \overline{\bigcup \{B,\ B \subset K,\ B \in \mathscr{B}_0\}}.$$

Пусть $\{K_n\} \subset \mathscr{K}$ — последовательность, для которой $\lim K_n = K$ в $\mathscr{K}$, и $x \in \psi(K)$ таково, что $x \in B_0$ для некоторого множества $B_0 = \{x_1, \ldots, x_k\} \in \mathscr{B}_0$. Существуют такие последовательности $n \to y^i_n \in K_n$, что $\lim y^i_n = x_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$. По предположению $B_n = \{y^1_n, \ldots, y^k_n\} \in \mathscr{B}_0$ для достаточно больших n, $B_n \subset K_n$, и существуют такие $x_n \in B_n \subset K_n$, что $x = \lim x_n$. Отсюда следует, что $x_n \in \psi(K_n)$, так как $B_n \in \mathscr{B}_0$, и $x = \lim x_n$ влечет за собой $x \in \underline{\lim}\, \psi(K_n)$. Поэтому множество $\bigcup \{B,\ B \subset K,\ B \in \mathscr{B}_0\}$ содержится в замкнутом множестве $\underline{\lim}\, \psi(K_n)$, откуда вытекает, что $\psi(K) \subset \underline{\lim}\, \psi(K_n)$ и, таким образом, ψ полунепрерывно снизу.

Следствие. *Если пространство E связно, то единственными непрерывными на $\mathscr{K}$ или $\mathscr{F}$ заполнениями являются тождественное отображение и тривиальное отображение $A \to \varnothing$.*

Доказательство. Если ψ — (нетривиальное) заполнение на $\mathcal{F}$, то его сужение на $\mathcal{K}$ будет заполнением на $\mathcal{K}$ (в силу антиэкстенсивности ψ), непрерывным в миопической топологии, если ψ непрерывно на $\mathcal{F}$. Таким образом, достаточно доказать утверждение, касающееся пространства $\mathcal{K}$, поскольку $\mathcal{K}$ плотно в $\mathcal{F}$.

Семейство $\mathcal{B}$ компактных ψ-инвариантных множеств замкнута в $\mathcal{K}$ (предложение 7.4.1) и порождается семейством $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{I}$, удовлетворяющим условию предложения 7.5.2. Пусть $B = \{x_1, \ldots, x_k\}$ — множество из $\mathcal{B}_0$. Согласно предложению 7.5.2, существует такое $G \in \mathcal{G}$, что $x_k \in G$ и $\{x_1, \ldots, x_{k-1}, y\} \in \mathcal{B}_0$ для любого $y \in G$. Пусть G_k — наибольшее открытое множество, обладающее этим свойством (т. е. объединение всех таких $G \in \mathcal{G}$), и $z \in \partial G_k$. Тогда $\{x_1, \ldots, x_{k-1}, z\} \in \mathcal{B} \cap \mathcal{I} = \mathcal{B}_0$, так как $\mathcal{B}$ замкнуто, и $\{x_1, \ldots, x_{k-1}, z\} = \lim \{x_1, \ldots, x_{k-1}, z_n\}$ для некоторой последовательности $\{z_n\} \subset G_k$. Другими словами, существует такая открытая окрестность G' точки z, что $\{x_1, \ldots, x_{k-1}, y\} \in \mathcal{B}_0$ для любого $y \in G'$. Но $G' \subset G_k$, ибо G_k максимально, а это противоречит тому, что $z \in \partial G_k$. Значит, G_k не имеет граничных точек. Поэтому $G_k = E$, поскольку E связно. Выбирая $y = x_{k-1} \in G_k$, мы заключаем, что $\{x_1, \ldots, x_{k-1}\} \in \mathcal{B}_0$. Используя рекуррентную процедуру, мы получаем подобным же образом, что $\{x_1\} \in \mathcal{B}_0$ и что максимальное открытое множество G_1, для которого $y \in G_1 \Rightarrow \{y\} \in \mathcal{B}_0$, не имеет граничных точек. Следовательно, $G_1 = E$, и множество $\{x\}$ ψ-инвариантно для любого $x \in E$. Таким образом, ψ является тождественным отображением на $\mathcal{K}$, и единственно возможным непрерывным продолжением его на $\mathcal{F}$ служит тождественное отображение на $\mathcal{F}$.

В случае когда $E = \mathbf{R}^d$ — эвклидово пространство, а семейство $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}$ замкнуто относительно сложения по Минковскому $\oplus$, мы будем говорить, что отображение ψ: $\mathcal{A} \to \mathcal{P}$ *согласовано со сложением по Минковскому*, если $\psi(A \oplus A') = \psi(A) \oplus \psi(A')$. Для краткости будем такие ψ называть $\oplus$*-отображениями.*

Предложение 7.5.3. *Единственными $\oplus$-заполнениями на $\mathcal{K}(\mathbf{R}^d)$ являются тождественное и тривиальное ($A \to \varnothing$) отображения.*

Доказательство. Пусть ψ — заполнение на $\mathcal{K}$ и $\psi(K \oplus K') = \psi(K) \oplus \psi(K')$ для всех $K, K' \in \mathcal{K}$. В частности, $\psi(\{0\}) = \psi(\{0\}) \oplus \psi(\{0\})$ и, значит, $\psi(\{0\}) = \{0\}$ или $\varnothing$, в силу компактности $\psi(\{0\})$. Если $\psi(\{0\}) = \varnothing$, то $\psi(K \oplus \{0\}) = \psi(K) \oplus \varnothing = \varnothing$ для любого $K \in \mathcal{K}$[1]. Предположим, что $\psi(\{0\}) = \{0\}$. Тогда

[1] По определению $A \oplus \varnothing = \varnothing$ (см. § 1.5). — *Прим. ред.*

для любого $x \in \mathbf{R}^d$ имеем $\psi(\{x\}) \oplus \psi(\{-x\}) \stackrel{\bullet}{=} \psi(\{x\} \oplus \{-x\}) = \{0\}$. Следовательно, $\psi(\{x\})$ непусто и состоит из одного-единственного элемента. Поэтому из включения[1] $\psi(\{x\}) \subset \{x\}$ вытекает, что $\psi(\{x\}) = \{x\}$. Таким образом, ψ — тождественное отображение.

Предложение 7.5.4. *Всякое $\oplus$-пополнение ψ на $\mathcal{K}(\mathbf{R}^d)$ непрерывно и согласовано со сдвигами. Его сужение на $C(\mathcal{K})$ согласовано с неотрицательными гомотетиями, $\psi(A)$ выпукло для любого $A \in C(\mathcal{K})$ и $\psi(\{x\}) = x$ для любого $x \in \mathbf{R}^d$. Пополнение ψ на $\mathcal{K}(\mathbf{R}^d)$ является $\oplus$-пополнением тогда и только тогда, когда семейство компактных ψ-инвариантных множеств замкнуто относительно сдвигов, сложения по Минковскому и взятия бесконечных пересечений.*

Доказательство. Пусть ψ — некоторое $\oplus$-пополнение на $\mathcal{K}$.

a) $\psi(\{x\}) = \{x\}$ для любого $x \in \mathbf{R}^d$, и ψ есть τ-отображение.

Действительно, из равенства $\{0\} = \{0\} \oplus \{0\}$ вытекает, что $\psi(\{0\}) = \psi(\{0\}) \oplus \psi(\{0\}) \in \mathcal{K}$, и поэтому $\psi(\{0\}) = \{0\}$ (так как $0 \in \psi(\{0\})$). Отсюда следует, что $\{0\} = \psi(\{x\}) \oplus \psi(\{-x\})$, и $\psi(\{x\}) \supset \{x\}$ состоит из одного-единственного элемента. Таким образом, $\psi(\{x\}) = \{x\}$ для любого $x \in \mathbf{R}^d$. Отсюда вытекает, что $\psi(K \oplus \{x\}) = \{x\} \oplus \psi(K)$ для всякого $K \in \mathcal{K}$, так что ψ представляет собой τ-пополнение.

b) $\psi(A)$ выпукло для любого $A \in C(\mathcal{K})$, и $\psi(rA) = r\psi(A)$ для рациональных $r \geqslant 0$.

Действительно, если $A \in C(\mathcal{K})$, то $A = (1/n)A^{\oplus n}$ и $\psi(A) = \psi(A/n)^{\oplus n}$. Поэтому $\psi(A)$ безгранично делимо относительно $\oplus$ и, значит, $\psi(A) \in C(\mathcal{K})$ (теорема 1.5.1). Тогда из соотношения $\psi(A) = \psi(A/n)^{\oplus n} = n\psi(A/n)$ вытекает, что $\psi(rA) = r\psi(A)$ для любого рационального $r \geqslant 0$.

c) ψ непрерывно на $\mathcal{K}$.

Действительно, пусть B — единичный шар. Из утверждения b) следует, что $\psi((1/n)B) = (1/n)\psi(B)$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует такое N_ε, что при $n \geqslant N_\varepsilon$ справедливо включение $\psi((1/n)B) \subset \varepsilon B$. Пусть $\{A_n\} \subset \mathcal{K}$ — последовательность, сходящаяся в $\mathcal{K}$ к A. Для достаточно больших n имеем $A_n \subset A \oplus (1/N_\varepsilon)B$ и $A \subset A_n \oplus (1/N_\varepsilon)B$, откуда

$$\psi(A_n) \subset \psi(A) \oplus \psi\left(\frac{1}{N_\varepsilon}B\right) \subset \psi(A) \oplus \varepsilon B,$$

$$\psi(A) \subset \psi(A_n) \oplus \psi\left(\frac{1}{N_\varepsilon}B\right) \subset \psi(A_n) \oplus \varepsilon B.$$

Следовательно, $\psi(A) = \lim \psi(A_n)$ и ψ непрерывно.

---

[1] Справедливого в силу антиэкстенсивности ψ. — *Прим. ред.*

d) Для любых $\lambda > 0$ и $A \in C(\mathcal{K})$ выполняется равенство $\psi(\lambda A) = \lambda\psi(A)$.

Это — непосредственное следствие утверждений b) и c).

e) Если ψ является $\oplus$-пополнением, а значит и τ-пополнением, то семейство $\mathcal{B}$ компактных инвариантных множеств замкнуто относительно сдвигов, сложения по Минковскому и взятия пересечений. Обратно, пусть семейство $\mathcal{B} \subset \mathcal{K}$ замкнуто относительно $\oplus$, $\cap$ и сдвигов. Наибольшее продолжение на $\mathcal{K}$ тождественного отображения на $\mathcal{B}$ есть пополнение на $\mathcal{K}$, определяемое соотношением

$$\psi(K) = \bigcap \{B,\ B \in \mathcal{B},\ B \supset K\} \quad (K \in \mathcal{K}).$$

Следовательно, ψ представляет собой τ-пополнение (ибо $\mathcal{B}$ замкнуто относительно сдвигов). Отсюда вытекает, что для любых K и $K' \in \mathcal{K}$

$$\psi(K \oplus K') = \psi\Big(\bigcup_{x \in K'} (K \oplus \{x\})\Big) \supset \bigcup_{x \in K'} \psi(K \oplus \{x\}) =$$

$$= \bigcup_{x \in K'} \psi(K) \oplus \{x\} = K' \oplus \psi(K).$$

Это в свою очередь приводит к соотношению

$$\psi\psi(K \oplus K') = \psi(K \oplus K') \supset \psi(K' \oplus \psi(K)) \supset \psi(K') \oplus \psi(K),$$

в силу идемпотентности и возрастания ψ, и, таким образом,

$$\psi(K \oplus K') \supset \psi(K) \oplus \psi(K').$$

С другой стороны, из $\psi(K) \supset K$ и $\psi(K') \supset K'$ следует, что $\psi(K) \oplus \psi(K') \supset K \oplus K'$. Но $\psi(K) \oplus \psi(K') \in \mathcal{B}$, поскольку $\mathcal{B}$ замкнуто относительно $\oplus$, и, значит, $\psi(K) \oplus \psi(K') \supset \psi(K \oplus K')$. Поэтому $\psi(K \oplus K') = \psi(K) \oplus \psi(K')$.

ГЛАВА 8

ВОЗРАСТАЮЩИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Эта глава, равно как и следующая за ней последняя глава книги посвящены специальным вопросам и могут быть опущены читателем, интересующимся только приложениями.

В данной главе рассматриваются возрастающие отображения, т. е. такие отображения ψ: $\mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E')$, для которых из $A \subset B$ вытекает $\psi(A) \subset \psi(B)$, и цель ее состоит в обобщении на случай произвольных возрастающих отображений некоторых свойств, с которыми мы сталкивались при изучении заполнений и пополнений.

Точно также как и в гл. 7, и по тем же самым причинам, мы разбираем сначала „эвклидов" случай, т. е. случай возрастающих отображений $\mathbf{R}^d$ (§ 8.1), а затем уже в дальнейших двух параграфах исследуем более сложный общий случай.

В этой главе слово „отображение" всегда означает „возрастающее отображение", если только явно не оговорено противное. Аналогично мы будем говорить „τ-отображение" вместо „возрастающее отображение, согласованное со сдвигами".

8.1. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА (ВОЗРАСТАЮЩИХ) τ-ОТОБРАЖЕНИЙ

В настоящем параграфе $E = \mathbf{R}^d$ — эвклидово пространство, и мы рассматриваем здесь только τ-отображения ψ, определенные на классе $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}$, замкнутом относительно сдвигов. Другими словами, если, как обычно, A_x обозначает $A \oplus \{x\}$, то

$$\psi(A_x) = (\psi(A))_x \quad (A \in \mathcal{A}).$$

Аналогичным образом для всякого $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}$ будем обозначать через $\mathcal{B}_x$ семейство сдвинутых множеств B_x, $B \in \mathcal{B}$, где x — заданный вектор из $\mathbf{R}^d$.

Если ψ: $\mathcal{A} \to \mathcal{P}$ — некоторое τ-отображение (не обязательно возрастающее), то семейство

$$\mathcal{V} = \{A,\ A \in \mathcal{A},\ 0 \in \psi(A)\}$$

называют его *ядром*. Ясно, что включение $x \in \psi(A)$ равносильно включению $A \in \mathcal{V}_x$, поскольку ψ является τ-отображением.

Обратно, если $\mathscr{V} \subset \mathscr{A}$ — произвольное семейство, то отображение ψ, определяемое соотношением

$$\psi(A) = \{x,\ x \in \mathbf{R}^d,\ A \in \mathscr{V}_x\} \quad (A \in \mathscr{A}),$$

представляет собой τ-отображение, ядром которого служит $\mathscr{V}$, так что существует взаимно однозначное соответствие между $\mathscr{P}(\mathscr{A})$ и пространством τ-отображений на $\mathscr{A}$.

Пример 1. Для заданного $B \in \mathscr{P}$ *дилатация* $A \to A \oplus \check{B}$ есть τ-отображение на $\mathscr{P}$ с ядром

$$\mathscr{V}_B = \{A,\ A \in \mathscr{P},\ A \cap B \neq \varnothing\}. \tag{8.1.1}$$

Пример 2. *Эрозия* $A \to A \ominus \check{B}$ имеет ядро

$$\mathscr{W}_B = \{A,\ A \in \mathscr{P},\ A \supset B\}. \tag{8.1.2}$$

Пример 3. *Заполнение* посредством B, т. е. отображение $A \to A_B = (A \ominus \check{B}) \oplus B$ имеет ядро

$$\mathscr{V} = \bigcup_{y \in \check{B}} \mathscr{W}_{B_y}. \tag{8.1.3}$$

Пример. 4. *Пополнение* посредством B, т. е. отображение $A \to A^B = (A \oplus \check{B}) \ominus B$, имеет ядро

$$\mathscr{V} = \bigcap_{y \in \check{B}} \mathscr{V}_{B_y}. \tag{8.1.4}$$

Пример 5. Тождественное отображение на $\mathscr{P}$ имеет ядро

$$\mathscr{P}_0 = \{A,\ A \in \mathscr{P},\ 0 \in A\}.$$

Для любого $x \in \mathbf{R}^d$ ядром *сдвига* $A \to A_x$ служит $\mathscr{P}_x = \{A,\ A \in \mathscr{P},\ x \in A\}$.

Напомним, что семейство $\mathscr{V} \subset \mathscr{P}$ называется *фильтром*, если: (1) $\varnothing \notin \mathscr{V}$, (2) $\mathscr{V}$ замкнуто относительно взятия конечных пересечений, (3) $\mathscr{V}$ обладает свойством $\bigcup$-*наследования* (или, короче, является $\bigcup$-*наследственным*), т. е. $B \in \mathscr{V}$, $B \subset A \Rightarrow A \in \mathscr{V}$. Фильтр $\mathscr{V}$ называют *ультрафильтром*, если для любого фильтра $\mathscr{V}'$, такого, что $\mathscr{V}' \supset \mathscr{V}$, выполняется равенство $\mathscr{V}' = \mathscr{V}$. Фильтр $\mathscr{V}$ представляет собой ультрафильтр тогда и только тогда, когда для каждого $A \in \mathscr{P}$ либо $A \in \mathscr{V}$, либо $A^c \in \mathscr{V}$ (см., например, Бурбаки, 1965a). Ядро $\mathscr{P}_x$ всякого сдвига есть ультрафильтр.

Замечание. Поскольку в $\mathscr{P}(\mathbf{R}^d)$ единственные инвариантные относительно сдвигов элементы — это $\varnothing$ и $\mathbf{R}^d$, то для любого τ-отображения ψ значения $\psi(\varnothing)$ и $\psi(\mathbf{R}^d)$ равны либо $\varnothing$, либо $\mathbf{R}^d$. Очевидно, $\psi(\varnothing) = \varnothing$ тогда и только тогда, когда $\varnothing \notin \mathscr{V}$, а $\psi(\mathbf{R}^d) = \varnothing$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{R}^d \notin \mathscr{V}$. Далее мы рассматриваем только нетривиальные τ-отображения, так что $\psi(\varnothing)=\varnothing$ и $\psi(\mathbf{R}^d)=\mathbf{R}^d$, а значит,

$$\varnothing \notin \mathscr{V}, \quad \mathbf{R}^d \in \mathscr{V}.$$

Приведем несколько элементарных результатов. Условия экстенсивности и антиэкстенсивности отображения ψ таковы:

$$\left.\begin{array}{l}\mathscr{P}_0 \subset \mathscr{V} \Leftrightarrow A \subset \psi(A),\\ \mathscr{P}_0 \supset \mathscr{V} \Leftrightarrow A \supset \psi(A)\end{array}\right\} \quad (A \in \mathscr{P}). \tag{8.1.5}$$

Более общим образом, если ψ и ψ' — два (не обязательно возрастающих) отображения, то

$$\mathscr{V} \subset \mathscr{V}' \Leftrightarrow \psi \subset \psi'. \tag{8.1.6}$$

Если ψ_i, $i \in I$, — некоторое семейство τ-отображений и $\mathscr{V}_i$ — ядро ψ_i, то ядрами $\bigcap \psi_i$ и $\bigcup \psi_i$ будут $\bigcap \mathscr{V}_i$ и $\bigcup \mathscr{V}_i$ соответственно.

Отметим также, что τ-отображение является возрастающим тогда и только тогда, когда его ядро $\mathscr{V}$ обладает свойством $\bigcup$-наследования, т. е. из $B \in \mathscr{V}$ и $A \supset B$ вытекает, что $A \in \mathscr{V}$. В обозначениях (8.1.2),

$$\psi \text{ возрастает} \Leftrightarrow \mathscr{V} = \bigcup_{B \in \mathscr{V}} \mathscr{W}_B. \tag{8.1.7}$$

Сравнивая (8.1.2) и (8.1.7), мы заключаем, что *всякое возрастающее τ-отображение допускает представление*

$$\psi(A) = \bigcup_{B \in \mathscr{V}} (A \ominus \check{B}),$$

т. е. $\psi(A)$ есть объединение эрозий множества A множествами $B \in \mathscr{V}$.

Что касается операций $\bigcap$ и $\bigcup$, то справедливы следующие утверждения:

$$\left.\begin{array}{ll}\mathscr{V} \text{ замкнуто относительно взятия конечных объединений} & \Leftrightarrow \psi(A) \cap \psi(B) \subset \psi(A \cup B),\\ \mathscr{V} \text{ замкнуто относительно взятия конечных пересечений} & \Leftrightarrow \psi(A \cap B) \supset \psi(A) \cap \psi(B).\end{array}\right. \tag{8.1.8}$$

С другой стороны, ψ является возрастающим тогда и только тогда, когда $\psi(A \cap B) \subset \psi(A) \cap \psi(B)$. Таким образом, из (8.1.7) и (8.1.8) вытекает, что

$$\psi(A \cap B) = \psi(A) \cap \psi(B) \Leftrightarrow \mathscr{V} \text{ — фильтр}. \tag{8.1.9}$$

Иными словами, для того чтобы нетривиальное τ-отображение было возрастающим и согласованным с $\bigcap$, необходимо и достаточно, чтобы его ядро было фильтром.

Предложение 8.1.1. *Пусть ψ — нетривиальное τ-отображение на $\mathscr{P}(\mathbf{R}^d)$. Если ψ экстенсивно и согласовано с $\bigcap$, то оно совпадает с тождественным отображением.*

Доказательство. В силу (8.1.9) ядро $\mathscr{V}$ отображения ψ есть фильтр, причем $\mathscr{V} \supset \mathscr{P}_0$ согласно (8.1.5). Отсюда вытекает, что $\mathscr{V} = \mathscr{P}_0$, поскольку $\mathscr{P}_0$ — ультрафильтр.

Из соображений двойственности, если ψ имеет своим ядром $\mathscr{V}$, то ядро́м ψ^* служит

$$\mathscr{V}^* = \{A,\ A \subset \mathscr{P},\ A^c \notin \mathscr{V}\}. \tag{8.1.10}$$

Далее, ψ^* возрастает тогда и только тогда, когда возрастает ψ; $\mathscr{V}^*$ замкнуто относительно $\bigcap$ тогда и только тогда, когда $\complement\mathscr{V}$ замкнуто относительно $\bigcup$. Таким образом,

$$\complement\mathscr{V} \text{ замкнуто относительно } \bigcup \Longleftrightarrow \psi(A \cup B) \supset \psi(A) \cup \psi(B), \tag{8.1.11}$$

и в силу (8.1.9)

$$\psi(A \cup B) = \psi(A) \cup \psi(B) \Longleftrightarrow \mathscr{V} \text{ — антифильтр.} \tag{8.1.12}$$

($\mathscr{V}$ называется *антифильтром*, если $\mathscr{V}^*$ представляет собой фильтр, т. е. если (1) $\mathbf{R}^d \in \mathscr{V}$, (2) $\mathscr{V}$ обладает свойством $\bigcup$-наследования, (3) $\complement\mathscr{V}$ замкнуто относительно $\bigcup$.)

Заметим, что семейство $\mathscr{V}$ является ультрафильтром тогда и только тогда, когда оно одновременно и фильтр и антифильтр. (Напомним, что ультрафильтры характеризуются условием: для любого $A \in \mathscr{P}$ либо $A \in \mathscr{V}$, либо $A^c \in \mathscr{V}$.) Отсюда следует, что τ-отображение ψ на $\mathscr{P}$ согласовано с $\bigcup$ и $\bigcap$ в том и только том случае, если его ядро — ультрафильтр. Для любого $x \in \mathbf{R}^d$ ядро $\mathscr{P}_x$ представляет собой ультрафильтр, и соответствующий сдвиг согласован с $\bigcup$ и $\bigcap$. Хотя теорема Цорна гарантирует, что существует много других ультрафильтров, все же единственные ультрафильтры, которые мы в состоянии эффективно строить, — это как раз ультрафильтры $\mathscr{P}_x$, $x \in \mathbf{R}^d$. Таким образом, единственными τ-отображениями, согласованными с $\bigcup$ и $\bigcap$ допускающими „эффективное построение„, являются сдвиги (хотя теоретически существует и много других „неконструктивных„ отображений).

По двойственности из предложения 8.1.1 получаем

Предложение 8.1.2. *Если нетривиальное τ-отображение ψ антиэкстенсивно и согласовано с $\bigcup$, то оно совпадает с тождественным отображением.*

Следствие. *Тождественное отображение — единственное нетривиальное τ-заполнение, согласованное с $\bigcup$, и единственное нетривиальное τ-пополнение, согласованное с $\bigcap$ (на $\mathscr{P}(\mathbf{R}^d)$).*

Если ψ — (возрастающее) τ-отображение, то его ядро $\mathscr{V}$ и ядро $\mathscr{V}^*$ двойственного ему отображения ψ^* удовлетворяют соотношениям (8.1.10) и (8.1.7), так что

$$\begin{aligned} \mathscr{V}^* &= \bigcap_{B \in \mathscr{V}} \mathscr{V}_B, \\ \mathscr{V} &= \bigcap_{B \in \mathscr{V}^*} \mathscr{V}_B. \end{aligned} \tag{8.1.13}$$

Используя (8.1.7), (8.1.13) и (8.1.1), приходим к следующему результату.

Предложение 8.1.3. *Всякое (возрастающее) τ-отображение ψ на $\mathscr{P}(\mathbf{R}^d)$ является объединением эрозий, а также пересечением дилатаций. Точнее говоря, если $\mathscr{V}$ и $\mathscr{V}^*$ — ядра отображений ψ и ψ^* соответственно, то для любого $A \in \mathscr{P}$*

$$\psi(A) = \bigcup_{B \in \mathscr{V}} (A \ominus \check{B}) = \bigcap_{B \in \mathscr{V}^*} (A \oplus \check{B}).$$

Если теперь τ-отображение ψ определено только на некотором семействе $A \subset \mathscr{P}$ (замкнутом относительно сдвигов), так что его ядро $\mathscr{V} \subset \mathscr{A}$, то пусть $\underset{\sim}{\psi}$ — наименьшее, а $\tilde{\psi}$ — наибольшее продолжения ψ на $\mathscr{P}$. Тогда ядра $\underset{\sim}{\mathscr{V}}$ и $\tilde{\mathscr{V}}$ отображений $\underset{\sim}{\psi}$ и $\tilde{\psi}$ соответственно имеют вид

$$\underset{\sim}{\mathscr{V}} = \bigcup_{A \in \mathscr{V}} \mathscr{W}_A, \quad \tilde{\mathscr{V}} = \bigcap_{A \in \mathscr{V}^*} \mathscr{V}_A, \tag{8.1.14}$$

и по двойственности

$$(\underset{\sim}{\mathscr{V}})^* = (\tilde{\mathscr{V}}^*), \quad (\tilde{\mathscr{V}})^* = (\underset{\sim}{\mathscr{V}}^*).$$

В дальнейшем нам будет очень полезен следующий результат.

Предложение 8.1.4. *Пусть семейства $\mathscr{A}, \mathscr{B} \subset \mathscr{P}(\mathbf{R}^d)$ замкнуты относительно сдвигов, ψ — (возрастающее) τ-отображение на $\mathscr{A}$, $\mathscr{V} \subset \mathscr{A}$ — его ядро, ψ_b — сужение на $\mathscr{B}$ наименьшего продолжения $\underset{\sim}{\psi}$ отображения ψ на $\mathscr{P}$, а ψ_a — сужение на $\mathscr{A}$ наибольшего продолжения $\tilde{\psi}_b$ отображения ψ_b на $\mathscr{P}$. Тогда следующие три условия эквивалентны:*

1) $\psi = \psi_a$ *на* $\mathscr{A}$.

2) *Для любых $A \in \mathscr{A}$ и $x \notin \psi(A)$ существует такое $B \in \mathscr{B}$, что $B \supset A$ и $x \notin \psi(A')$, каково бы ни было $A' \in \mathscr{A}$, содержащееся в B.*

3) *Для любого $A \in \mathscr{A} \cap \complement\mathscr{V}$ существует такое $B \in \mathscr{B}$, что $B \supset A$ и $A' \notin \mathscr{V}$, каково бы ни было $A' \notin \mathscr{A}$, содержащееся в B.*

Доказательство. Соотношение $\psi_a \supset \psi$ выполняется всегда. Действительно, $\bar{\psi}_b$ является наибольшим продолжением ψ_b и потому $\bar{\psi}_b \supset \psi$. Отсюда вытекает, что сужения ψ_a и ψ на $\mathscr{A}$ отображений $\bar{\bar{\psi}}_b$ и ψ соответственно должны удовлетворять аналогичному включению $\psi_a \supset \psi$. Таким образом, условие 1) равносильно условию $\psi_a \subset \psi$. Непосредственно из определений вытекает, что для любого $A \in \mathscr{A}$

$$\psi_a(A) = \bigcap \{\psi_b(B),\ B \supset A,\ B \in \mathscr{B}\}.$$

Таким образом, соотношение $\psi_a(A) \subset \psi(A)$ эквивалентно импликации ($x \in \psi_b(B)$ для всякого $B \in \mathscr{B}$, такого, что $B \supset A) \Rightarrow x \in \in \psi(A)$. Эта импликация эквивалентна следующему утверждению: для любого $x \notin \psi(A)$ найдется такое $B \in \mathscr{B}$, что $B \supset A$ и $x \notin \psi_b(B)$. Отсюда вытекает эквивалентность условий 1) и 2). Третье условие является простой переформулировкой условия 2) в терминах ядер.

Замечание. Эвклидова структура пространства $\mathbf{R}^d$ никак не использовалась при доказательстве эквивалентности условий 1) и 2), так что эта эквивалентность сохраняется, и когда E является произвольным множеством.

Если E — ЛКС-пространство, то наибольший интерес представляет случай, когда $\mathscr{A} = \mathscr{K}(E)$, а $\mathscr{B} = \mathscr{G}(E)$. Для возрастающего отображения ψ: $\mathscr{K} \to \mathscr{P}$ мы имеем $\psi_g(G) = \bigcup \{\psi(K),\ K \subset G,\ K \in \mathscr{K}\}$ при любом $G \in \mathscr{G}$ и $\psi_k(K) = \bigcap \{\psi_g(G),\ G \supset K,\ G \in \mathscr{G}\}$ при любом $K \in \mathscr{K}$. Поэтому, для того чтобы $\psi = \psi_k$ на $\mathscr{K}$, необходимо и достаточно, чтобы для всякого $x \notin \psi(K)$ существовало такое $G \in \mathscr{G}$, что $G \supset K$ и $x \notin \psi(K')$, каково бы ни было компактное множество $K' \subset G$. В частности *это условие выполняется, если ψ — полунепрерывное сверху отображение из $\mathscr{K}$ в $\mathscr{K}$ или $\mathscr{F}$.*

8.2. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА τ-ОТОБРАЖЕНИЙ

Прежде всего мы исследуем (возрастающие) τ-отображения, полунепрерывные на $\mathscr{K}$ или на $\mathscr{F}$.

***Предложение** 8.2.1. Для того чтобы τ-отображение ψ из $\mathscr{K}$ (соотв. из $\mathscr{F}$) в $\mathscr{P}(\mathbf{R}^d)$ было полунепрерывным отображением из $\mathscr{K}$ (соотв. из $\mathscr{F}$) в $\mathscr{F}$, необходимо и достаточно, чтобы его ядро $\mathscr{V}$ было замкнуто в $\mathscr{K}$ (соотв. в $\mathscr{F}$). Для того чтобы τ-отображение ψ': $\mathscr{G} \to \mathscr{P}$ было полунепрерывным снизу отображением пространства $\mathscr{G}$ в себя, необходимо и достаточно, чтобы его ядро $\mathscr{V}'$ было открыто в $\mathscr{G}$.*

Доказательство. Если $\mathscr{V}$ замкнуто, то ψ отображает пространство $\mathscr{K}$ (соотв. $\mathscr{F}$) в $\mathscr{F}$. Действительно, включение $x_n \in \in \psi(A)$ эквивалентно включению $A_{-x_n} \in \mathscr{V}$, и если $\lim x_n = x$, то $\lim A_{-x_n} = A_{-x}$ в $\mathscr{K}$ (соотв. в $\mathscr{F}$), а значит, $A_{-x} \in \mathscr{V}$, т. е. $x \in \psi(A)$. Следовательно, $\psi(A) \in \mathscr{F}$. Далее, для любого $K \in \mathscr{K}$

$$\psi^{-1}(\mathscr{F}_K) = \{A,\ \psi(A) \cap K \neq \varnothing\} = \bigcup_{x \in K} \mathscr{V}_x.$$

Докажем теперь, что $\psi^{-1}(\mathscr{F}_K)$ замкнуто (т. е. что ψ полунепрерывно сверху). Пусть $\{B_n\} \subset \mathscr{V}$, $\{x_n\} \subset K$ и $n \to A_n = B_n \oplus \oplus \{x_n\}$ — такие последовательности, что $\lim A_n = A$ в $\mathscr{K}$ (соотв. в $\mathscr{F}$). Тогда найдется такая подпоследовательность $k \to n_k$, что $\lim x_{n_k} = x \in K$ (поскольку K компактно) и $\lim B_{n_k} = B \in \mathscr{V}$ в $\mathscr{K}$ (соотв. в $\mathscr{F}$). (В случае пространства $\mathscr{K}$ множества $B_n = A_n \oplus \oplus \{-x_n\}$ содержатся в фиксированном компактном множестве, так как $\lim A_n = A$ в $\mathscr{K}$, так что у последовательности $\{B_n\}$ действительно существуют предельные точки.) Из равенства $A_{n_k} = B_{n_k} \oplus \{x_{n_k}\}$ вытекает, что $A = B \oplus \{x\}$, поскольку сложение по Минковскому непрерывно на $\mathscr{K} \times \mathscr{K}$ (соотв. на $\mathscr{F} \times \mathscr{K}$), и $A \in \mathscr{V}_x \subset \psi^{-1}(\mathscr{F}_K)$. Таким образом, ψ полунепрерывно сверху.

Обратно, пусть ψ — полунепрерывное сверху отображение из $\mathscr{K}$ или $\mathscr{F}$ в $\mathscr{F}$. Тогда $\psi^{-1}(\mathscr{F}_K)$ замкнуто для любого $K \in \mathscr{K}$. В частности, при $K = \{0\}$ получаем, что замкнуто $\psi^{-1}(\mathscr{F}_{\{0\}}) = \mathscr{V}$. Этим доказано первое утверждение, а второе справедливо по двойственности.

Пусть ψ — некоторое τ-отображение из $\mathscr{K}$ в $\mathscr{P}$, а $\mathscr{V} \subset \mathscr{K}$ — его ядро. Положим

$$\psi_g(G) = \bigcup \{\psi(K),\ K \in \mathscr{K},\ K \subset G\} \qquad (G \in \mathscr{G}),$$
$$\psi_k(K) = \bigcap \{\psi_g(G),\ G \in \mathscr{G},\ G \supset K\} \qquad (K \in \mathscr{K}).$$

Наряду с ψ_g можно рассмотреть двойственное отображение $\psi_f = \psi_g^*$: $\mathscr{F} \to \mathscr{P}$. Если $\mathscr{V}_g$, $\mathscr{V}_f$ и $\mathscr{V}_k$ обозначают соответственно ядра отображений ψ_g, ψ_f и ψ_k, то

$$\mathscr{V}_g = \bigcup_{K \in \mathscr{V}} \mathscr{G}_K, \quad \mathscr{V}_f = \bigcap_{K \in \mathscr{V}} \mathscr{F}_K, \quad \mathscr{V}_k = \bigcap_{F \in \mathscr{V}_f} \mathscr{K}_F,$$

откуда видно, что $\mathscr{V}_g$ открыто в $\mathscr{P}$, $\mathscr{V}_f$ замкнуто в $\mathscr{F}$, а $\mathscr{V}_k$ замкнуто в $\mathscr{K}$. Из предложения 8.2.1 следует поэтому, что ψ_g есть полунепрерывное снизу отображение пространства $\mathscr{G}$ в себя, ψ_f — полунепрерывное сверху отображение пространства $\mathscr{F}$ в себя, и ψ_k — полунепрерывное сверху отображение пространства $\mathscr{K}$ в $\mathscr{F}$.

Далее, $\psi_k \supset \psi$ на $\mathscr{K}$ и, как следует из предложения 8.1.4, $\psi_k = \psi$ тогда и только тогда, когда для любого $K \notin \mathscr{V}$ найдется такое $G \in \mathscr{G}$, что $G \supset K$ и $K' \notin \mathscr{V}$, каково бы ни было компактное множество $K' \subset G$. Иначе говоря, $\psi_k = \psi$ тогда и только тогда, когда $\mathscr{V}$ замкнуто в $\mathscr{K}$. Используя предложение 8.2.1, мы заключаем, что $\psi = \psi_k$ тогда и только тогда, когда ψ является полунепрерывным сверху отображением из $\mathscr{K}$ в $\mathscr{F}$. Отсюда следует, что если ψ' — такое полунепрерывное сверху отображение из $\mathscr{K}$ в $\mathscr{F}$, что $\psi' \supset \psi$, то $\psi' = \psi'_k \supset \psi_k$, так что ψ_k — наименьшее полунепрерывное сверху отображение $\mathscr{K} \to \mathscr{F}$, для которого $\psi_k \supset \psi$. Следовательно, в силу того же предложения 8.2.1, $\mathscr{V}_k$ есть замыкание $\mathscr{V}$ в $\mathscr{K}$, т. е. $\mathscr{V}_k = \overline{\mathscr{V}}$. Нетрудно убедиться в том, что $\bigcap \{\mathscr{F}_K, K \in \mathscr{V}\} = \bigcap \{\mathscr{F}_K, K \in \overline{\mathscr{V}}\}$, поскольку каждое $K \in \overline{\mathscr{V}}$ является пределом в $\mathscr{K}$ некоторой последовательности $\{K_n\} \subset \mathscr{V}$, так что $\mathscr{V}_f = \bigcap \{\mathscr{F}_k, K \in \mathscr{V}_k\}$.

Аналогичные результаты получаются, если исходить из τ-отображения $\mathscr{F} \to \mathscr{P}$, и мы можем зафиксировать

Предложение 8.2.2. *Пусть ψ: $\mathscr{K} \to \mathscr{P}$ — некоторое τ-отображение с ядром $\mathscr{V} \subset \mathscr{K}$, а ψ_f: $\mathscr{F} \to \mathscr{P}$ и ψ_k: $\mathscr{K} \to \mathscr{P}$ суть τ-отображения с ядрами $\mathscr{V}_f = \bigcap \{\mathscr{F}_K, K \in \mathscr{V}\}$ и $\mathscr{V}_k = \bigcap \{\mathscr{K}_F, F \in \mathscr{V}_f\}$ соответственно. Тогда ψ_f и ψ_k представляют собой полунепрерывные сверху отображения (из $\mathscr{F}$ и $\mathscr{K}$ соответственно в $\mathscr{F}$). Далее, $\mathscr{V}_k = \overline{\mathscr{V}}$ — замыканию $\mathscr{V}$ в $\mathscr{K}$, а ψ_k есть наименьшая верхняя грань для ψ среди полунепрерывных сверху отображений из $\mathscr{K}$ в $\mathscr{F}$, так что $\psi = \psi_k$ в том и только том случае, когда ψ является полунепрерывным сверху отображением из $\mathscr{K}$ в $\mathscr{F}$. Наконец*[1],

$$\mathscr{V}_k = \bigcap \{\mathscr{K}_F, F \in \mathscr{V}_f\}, \quad \mathscr{V}_f = \bigcap \{\mathscr{F}_K, K \in \mathscr{V}_k\}. \tag{8.2.1}$$

Пусть теперь ψ': $\mathscr{F} \to \mathscr{P}$ — некоторое τ-отображение с ядром $\mathscr{V}' \subset \mathscr{F}$, а ψ'_k: $\mathscr{K} \to \mathscr{P}$ и ψ'_f: $\mathscr{F} \to \mathscr{P}$ суть τ-отображения с ядрами $\mathscr{V}'_k = \bigcap \{\mathscr{K}_F, F \in \mathscr{V}'\}$ и $\mathscr{V}'_f = \bigcap \{\mathscr{F}_K, K \in \mathscr{V}'_k\}$ соответственно. Тогда ψ'_k и ψ'_f представляют собой полунепрерывные сверху отображения (из $\mathscr{K}$ и $\mathscr{F}$ соответственно в $\mathscr{F}$), $\mathscr{V}'_f$ является замыканием ядра $\mathscr{V}' \subset \mathscr{F}$, а ψ'_f — наименьшей верхней гранью отображения ψ' среди полунепрерывных сверху отображений из $\mathscr{F}$ в $\mathscr{F}$. Кроме того, для $\mathscr{V}'_k$ и $\mathscr{V}'_f$ выполняются соотношения, аналогичные соотношениям (8.2.1) для $\mathscr{V}_k$ и $\mathscr{V}_f$.

[1] Первая из приводимых ниже формул верна по построению. — *Прим. перев.*

Следствие. *Для того чтобы τ-отображение* ψ: $\mathcal{K} \to \mathcal{P}$ *(соотв.* $\mathcal{F} \to \mathcal{P}$*) было полунепрерывным сверху отображением из* $\mathcal{K}$ *(соотв.* $\mathcal{F}$*) в* $\mathcal{F}$*, необходимо и достаточно, чтобы оно допускало представление* $\psi(K) = \bigcap \{K \oplus \check{F},\ F \in \mathcal{B}\}$ *для некоторого семейства* $\mathcal{B}$*, замкнутого в* $\mathcal{F}$ *(соотв. представление* $\psi(F) = \bigcap \{F \oplus \check{K},\ K \in \mathcal{B}'\}$ *для некоторого семейства* $\mathcal{B}'$*, замкнутого в* $\mathcal{K}$*).*

Продолжение полунепрерывных сверху на $\mathcal{K}$ отображений

Произвольное полунепрерывное сверху τ-отображение ψ: $\mathcal{K} \to \mathcal{F}$, вообще говоря, нельзя продолжить до полунепрерывного сверху отображения пространства $\mathcal{F}$ в себя.

Предложение 8.2.3. *Пусть* ψ: $\mathcal{K} \to \mathcal{F}$ *— полунепрерывное сверху τ-отображение,* $\mathcal{V} \subset \mathcal{K}$ *— его ядро,* $\mathcal{V}'_f = \overline{\mathcal{V}}$ *— замыкание* $\mathcal{V}$ *в* $\mathcal{F}$*, а* ψ'_f: $\mathcal{F} \to \mathcal{F}$ *— полунепрерывное сверху отображение с ядром* $\mathcal{V}'_f$*. Для того чтобы* ψ *могло быть продолжено до полунепрерывного сверху отображения пространства* $\mathcal{F}$ *в себя, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось любое из следующих эквивалентных условий:*

1) $\mathcal{V} = \mathcal{V}'_f \cap \mathcal{K}$.

2) ψ *полунепрерывно сверху на* $\mathcal{K} \cap \mathcal{F}$ *в относительной* $\mathcal{F}$*-топологии.*

В случае если какое-нибудь из этих эквивалентных условий выполняется, ψ'_f *является наименьшим продолжением* ψ *до полунепрерывного сверху отображения.*

Доказательство. Если ψ': $\mathcal{F} \to \mathcal{F}$ — полунепрерывное сверху продолжение отображения ψ, то его ядро $\mathcal{V}'$ замкнуто в $\mathcal{F}$ (предложение 8.2.1) и $\mathcal{V} = \mathcal{V}' \cap \mathcal{K}$. Следовательно, $\mathcal{V} \subset \mathcal{V}'_f = \overline{\mathcal{V}} \subset \mathcal{V}'$ и (тем более) $\mathcal{V} = \mathcal{V}'_f \cap \mathcal{K}$. Поэтому ψ'_f — наименьшее полунепрерывное сверху продолжение ψ. Обратно, ψ'_f есть полунепрерывное сверху отображение, так как $\mathcal{V}'_f$ замкнуто (предложение 8.2.1). Оно будет продолжением ψ тогда и только тогда, когда $\mathcal{V} = \mathcal{V}'_f \cap \mathcal{K}$. Таким образом, ψ допускает полунепрерывное сверху продолжение тогда и только тогда, когда выполнено условие 1).

С другой стороны, условие $\mathcal{V} = \overline{\mathcal{V}} \cap \mathcal{K}$ означает, что для любой последовательности $\{\mathcal{K}_n\} \subset \mathcal{K} \cap \mathcal{F}$, такой, что $\lim K_n = K \in \mathcal{K} \cap \mathcal{F}$ в $\mathcal{F}$, мы имеем $K_n \in \mathcal{V}$, т. е. из $0 \in \psi(K_n)$ вытекает, что $0 \in \psi(K)$. Но ψ является τ-отображением, так что это условие эквивалентно тому, что $\overline{\lim}\, \psi(K_n) \subset \psi(K)$, т. е. ψ

полунепрерывно сверху в относительной $\mathcal{F}$-топологии. Следовательно, условия 1) и 2) эквивалентны.

Если условия предложения 8.2.3 не выполнены, то ψ'_f будет наименьшим полунепрерывным сверху отображением пространства $\mathcal{F}$ в себя, для которого $\psi'_f \supset \psi$ на $\mathcal{K}$. В принципе ψ'_f может быть и тривиальным отображением $F \to \mathbf{R}^d$ с ядром $\mathcal{V}'_f = \mathcal{F}$. Таким образом, для того чтобы ψ'_f было нетривиальным отображением, необходимо и достаточно, чтобы $\mathcal{V}$ не было плотно в $\mathcal{F}$, или, что то же самое, $\varnothing \notin \overline{\mathcal{V}}$. Окрестностями пустого множества $\varnothing$ в $\mathcal{F}$ служат множества $\mathcal{F}^K$, $K \in \mathcal{K}$, так что $\varnothing \notin \overline{\mathcal{V}}$ тогда и только тогда, когда существует $K_0 \in \mathcal{K}$, такое, что $\mathcal{V} \subset \mathcal{F}_{K_0}$, т. е. такое, что $\psi(K) \subset K \oplus \mathcal{K}_0$ для любого $K \in \mathcal{K}$. Итак, мы получили

Следствие. *Продолжение ψ'_f является наименьшим полунепрерывным сверху отображением пространства $\mathcal{F}$ в себя, для которого $\psi'_f \supset \psi$ на $\mathcal{K}$, причем ψ'_f нетривиально тогда и только тогда, когда ψ ограничено, т. е. когда существует такое фиксированное компактное множество K_0, что $\psi(K) \subset K \oplus K_0$ для любых $K \in \mathcal{K}$.*

Формулы (8.2.1) устанавливают взаимно однозначное соответствие между полунепрерывными сверху отображениями на $\mathcal{K}$ и $\mathcal{F}$. В этой связи отметим следующие результаты.

Предложение 8.2.4. *Пусть ψ_k — полунепрерывное сверху отображение из $\mathcal{K}$ в $\mathcal{F}$, ядро которого удовлетворяет условию $\mathcal{V}_k = \overline{\mathcal{V}}_k \cap \mathcal{K}$, и пусть ψ'_f — его наименьшее полунепрерывное продолжение на $\mathcal{F}$ с ядром $\mathcal{V}'_f = \overline{\mathcal{V}}_k$ и*

$$\mathcal{V}'_k = \bigcap_{F \in \mathcal{V}'_f} \mathcal{K}_F, \quad \mathcal{V}_f = \bigcap_{K \in \mathcal{V}_k} \mathcal{F}_k.$$

Тогда $\mathcal{V}'_k = \mathcal{V}_f \cap \mathcal{K}$ и $\mathcal{V}_f = \overline{\mathcal{V}'_k}$, так что ψ_f — наименьшее полунепрерывное сверху продолжение ψ'_k на $\mathcal{F}$. Кроме того,

$$\mathcal{V}_k = \bigcap_{F \in \mathcal{V}_f} \mathcal{K}_F, \quad \mathcal{V}'_f = \bigcap_{K \in \mathcal{V}'_k} \mathcal{F}_K.$$

Доказательство. Пусть $K \in \mathcal{V}_f \cap \mathcal{K}$, $F \in \mathcal{V}'_f = \overline{\mathcal{V}}_k$ и последовательность $\{K_n\} \subset \mathcal{V}_k \subset \mathcal{K}$ такова, что $F = \lim K_n$ в $\mathcal{F}$. Тогда для любого $n > 0$ имеем $K_n \cap K \neq \varnothing$, откуда $F \cap K \neq \varnothing$, т. е. $K \in \mathcal{V}'_k$. Таким образом, $\mathcal{V}_f \cap \mathcal{K} \subset \mathcal{V}'_k$. Обратное включение очевидно, так что $\mathcal{V}'_k = \mathcal{V}_f \cap \mathcal{K}$.

Аналогично из $\mathscr{V}_f \supset \overline{\mathscr{V}'_k}$ вытекает, что $\mathscr{V}_f \supset \overline{\mathscr{V}'_k}$. Обратно, пусть $F \notin \overline{\mathscr{V}'_k}$ — некоторое замкнутое множество. Существует открытая окрестность $\mathscr{F}^{K_0}_{G_1, \ldots, G_n}$ $(K_0 \in \mathscr{K},\ G_i \in \mathscr{G})$ множества F, не пересекающаяся с $\mathscr{V}'_k$. Но $K \in \mathscr{V}'_k$, и из $K' \supset K$, $K' \in \mathscr{K}$ вытекает, что $K' \in \mathscr{V}'_k$, так что $\mathscr{F}^{K_0} \ni F$ также не пересекается с $\mathscr{V}'_k$. Таким образом, $K_0 \cap F = \varnothing$ и $K_0 \cap K \neq \varnothing$ для любого $K \in \mathscr{V}'_k$. Отсюда следует, что $K_0 \in \bigcap \{\mathscr{F}_K,\ K \in \mathscr{V}'_k\} = \mathscr{V}'_f$ (формула (8.2.1)), т. е. $K_0 \in \mathscr{V}'_f \cap \mathscr{K} = \mathscr{V}_k$. Итак, из $F \notin \mathscr{V}'_k$ вытекает, что $F \notin \bigcap \{\mathscr{F}_{K_0}, K_0 \in \mathscr{V}_k\} = \mathscr{V}_f$, т. е. $\mathscr{V}_f \subset \overline{\mathscr{V}'_k}$ и потому $\mathscr{V}_f = \overline{\mathscr{V}'_k}$.

Более общим образом, справедливо

Предложение 8.2.5. *Пусть ψ: $\mathscr{K} \to \mathscr{F}$ — некоторое τ-отображение с ядром $\mathscr{V}$, и пусть ψ_f есть τ-отображение, определяемое ядром $\mathscr{V}_f = \bigcap \{\mathscr{F}_K, K \in \mathscr{V}\}$, ψ'_k — сужение ψ_f на $\mathscr{K}$, имеющее ядро $\mathscr{V}'_k = \mathscr{V}_f \cap \mathscr{K}$, а ψ'_f: $\mathscr{F} \to \mathscr{F}$ — отображение, соответствующее ядру $\mathscr{V}'_f = \bigcap \{\mathscr{F}_K, K \in \mathscr{V}'_k\}$. Тогда $\mathscr{V}'_f$ является замыканием $\mathscr{V}$ в $\mathscr{F}$, а ψ'_f — наименьшим полунепрерывным сверху τ-отображением на $\mathscr{F}$, для которого $\psi'_f \supset \psi$ на $\mathscr{K}$.*

Доказательство. Если $K \in \mathscr{V}$, то K имеет непустые пересечения со всеми $F \in \mathscr{V}_f$, т. е. $K \in \mathscr{V}'_f$ и $\mathscr{V} \subset \mathscr{V}'_f$. Далее, $\mathscr{V}'_f$ замкнуто в $\mathscr{F}$ как пересечение множеств $\mathscr{F}_K$, $K \in \mathscr{V}'_k$, и, таким образом, $\overline{\mathscr{V}} \subset \mathscr{V}'_f$. Если F — некоторое замкнутое множество, не принадлежащее $\overline{\mathscr{V}}$, то существует такое $K_0 \in \mathscr{K}$, что $F \in \mathscr{F}^{K_0}$, т. е. $K_0 \in \mathscr{K}^F$, и $\mathscr{V} \cap \mathscr{F}^{K_0} = \varnothing$, т. е. $\mathscr{V} \subset \mathscr{F}_{K_0}$. Но $\mathscr{V} \subset \mathscr{F}_{K_0}$ эквивалентно тому, что $K_0 \in \mathscr{V}_f \cap \mathscr{K}$, и из $F \cap K_0 = \varnothing$ вытекает, что $F \notin \mathscr{V}'_f$. Таким образом, $\overline{\mathscr{V}} \supset \mathscr{V}'_f$ и, следовательно, $\overline{\mathscr{V}} = \mathscr{V}'_f$.

τ-отображения, согласованные с $\bigcup$ или $\bigcap$

В случае когда $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}$ замкнуто относительно $\bigcup$ (соотв. относительно $\bigcap$), отображение ψ: $\mathscr{A} \to \mathscr{P}$ называется *согласованным с* $\bigcup$ (соотв. с $\bigcap$) или, короче, $\bigcup$-*отображением* (соотв. $\bigcap$-*отображением*), если $\psi(A \cup A') = \psi(A) \cup \psi(A')$ (соотв. $\psi(A \cap A') = \psi(A) \cap \psi(A')$) для любых A, $A \in \mathscr{A}$.

Предложение 8.2.6. *Пусть ψ — полунепрерывное сверху τ-отображение из $\mathscr{K}$ (соотв. из $\mathscr{F}$) в $\mathscr{F}$. Тогда, для того чтобы ψ было $\bigcap$-отображением, необходимо и достаточно, чтобы нашлось такое $F_0 \in \mathscr{F}$, что $\psi(A) = A \ominus \check{F}_0$ для любого $A \in \mathscr{K}$ (соотв. $A \in \mathscr{F}$).*

Доказательство. Из предложения 8.2.1 и соотношения (8.1.9) следует, что τ-отображение ψ: $\mathscr{K} \to \mathscr{F}$ (соотв. $\mathscr{F} \to \mathscr{F}$) полунепрерывно сверху и согласовано с $\bigcap$ тогда и только тогда, когда его ядро $\mathscr{V}$ является замкнутым фильтром в $\mathscr{K}$ (соотв. в $\mathscr{F}$). Таким образом, множество $F_0 = \bigcap \{A, A \in \mathscr{V}\}$ принадлежит $\mathscr{V}$, поскольку $\mathscr{V}$ замкнуто в $\mathscr{K}$ (соотв. в $\mathscr{F}$) и замкнуто относительно $\bigcap$, так что $\mathscr{V} \subset \mathscr{W}_{F_0}$. С другой стороны, из $A \in \mathscr{V}$ и $B \in \mathscr{W}_A \cap \mathscr{K}$ (соотв. $B \in \mathscr{W}_A \cap \mathscr{F}$) вытекает, что $B \in \mathscr{V}$, так что $\mathscr{W}_{F_0} \cap \mathscr{K} \subset \mathscr{V}$ (соотв. $\mathscr{W}_{F_0} \cap \mathscr{F} \subset \mathscr{V}$). Отсюда следует, что $\mathscr{V} = \mathscr{W}_{F_0} \cap \mathscr{K}$ (соотв. $\mathscr{W}_{F_0} \cap \mathscr{F}$), т. е. $\psi(A) = A \ominus \check{F}_0$ для любого $A \in \mathscr{K}$ (соотв. $A \in \mathscr{F}$). Обратное утверждение очевидно.

Следующая лемма будет нам полезна для характеризации $\bigcup$-отображений.

Лемма 8.2.1. *Пусть E — ЛКС-пространство G_1, $G_2 \in \mathscr{G}(E)$, $K \in \mathscr{K}(E)$. Тогда для выполнения соотношения $K \subset G_1 \cup G_2$ необходимо и достаточно, чтобы существовали такие K_1, $K_2 \in \mathscr{K}$, что $K_1 \subset G_1$, $K_2 \subset G_2$ и $K = K_1 \cup K_2$.*

Доказательство. Достаточность очевидна. Обратно, пусть $\{B_n\}$ и $\{B'_n\}$ — такие две последовательности в $\mathscr{G}$, что для любого n имеют место соотношения $\overline{B}_n \in \mathscr{K}$, $\overline{B'_n} \in \mathscr{K}$, $\overline{B}_n \subset B_{n+1}$, $\overline{B'_n} \subset B'_{n+1}$ и $B_n \uparrow G_1$, $B'_n \uparrow G_2$. Тогда из $K \subset G_1 \cup G_2$ вытекает, что $K \subset \overline{B}_{n_0} \cup \cup \overline{B'_{n_0}}$ для некоторого целого n_0, и условия леммы выполняются для $K_1 = K \cap \overline{B}_{n_0}$ и $K_2 = K \cap \overline{B'_{n_0}}$.

Лемма 8.2.2. *Пусть E —* ЛКС-пространство, *K_1, $K_2 \in \mathscr{K}(E)$ и $G \in \mathscr{G}(E)$. Тогда $G \supset K_1 \cap K_2$ в том и только том случае, если существуют такие G_1, $G_2 \in \mathscr{G}$, что $G_1 \subset K_1$, $G_2 \supset K_2$ и $G = G_1 \cap G_2$.*

Доказательство. Достаточность указанного условия очевидна. Обратно, пусть $\{B_n\} \subset \mathscr{G}$ и $\{B'_n\} \subset \mathscr{G}$ — две последовательности, такие, что $\overline{B}_n \in \mathscr{K}$, $\overline{B'_n} \in \mathscr{K}$, $B_n \supset \overline{B_{n+1}}$, $B'_n \supset \overline{B'_{n+1}}$ для любого n и $B_n \downarrow K_1$, $B'_n \downarrow K_2$. Тогда $G^c \cap \left(\bigcap_n (\overline{B}_n \cap \overline{B'_n})\right) = \varnothing$, и, значит, существует такое целое n_0, что $G \supset \overline{B}_{n_0} \cap \overline{B'_{n_0}}$. Условия леммы выполняются для множеств $G_1 = G \cup B_{n_0}$ и $G_2 = G \cap B'_{n_0}$.

Напомним, что $\mathscr{V} \subset \mathscr{K}(E)$ называется *антифильтром* в $\mathscr{K}$, если (1) $\mathscr{V}$ непусто, (2) $\complement\mathscr{V}$ замкнуто относительно $\bigcup$ и (3) $\mathscr{V}$ $\bigcup$-*наследственно* в $\mathscr{K}$, т. е. из $V \in \mathscr{V}$, $V' \supset V$ и $V' \in \mathscr{K}$ вытекает, что $V' \in \mathscr{V}$.

***Лемма* 8.2.3.** *Пусть E — ЛКС-пространство, а $\mathscr{V} \subset \mathscr{K}(E)$ таково, что $\varnothing \notin \mathscr{V}$. Тогда $\mathscr{V}$ является замкнутым антифильтром в $\mathscr{K}$ в том и только том случае, если $\mathscr{V} = \mathscr{K}_{F_0}$, где F_0 — некоторое непустое замкнутое множество.*

Доказательство. Достаточность приведенного очевидна. Обратно, пусть $\mathscr{V}$ — замкнутый антифильтр в $\mathscr{K}$, такой, что $\varnothing \notin \mathscr{V}$ (т. е. $\mathscr{V} \neq \mathscr{K}$), и $K \in \mathscr{K} \cap \complement\mathscr{V}$. Тогда K обладает открытой окрестностью, не пересекающейся с $\mathscr{V}$, и можно предположить, что эта окрестность имеет вид $\mathscr{K}^F$ для некоторого $F \in \mathscr{F}$ (в силу $\bigcup$-наследственности $\mathscr{V}$), т. е. $K \in \mathscr{K}^F$ и $\mathscr{V} \subset \mathscr{K}_F$. Пусть $\mathscr{V}_f$ — семейство таких замкнутых множеств F, для которых $\mathscr{V} \subset \mathscr{K}_F$, т. е. $\mathscr{V}_f = \bigcap \{\mathscr{F}_K, K \in \mathscr{V}\}$ и, следовательно, $\mathscr{V} = \bigcap \{\mathscr{K}_F, F \in \mathscr{V}_f\}$. Семейство $\mathscr{V}_f$ замкнуто в $\mathscr{F}$ как пересечение замкнутых множеств $\mathscr{F}_K$.

Чтобы доказать замкнутость $\mathscr{V}_f$ относительно $\bigcap$, возьмем F_1, $F_2 \in \mathscr{V}_f$ и $G_1 = F_1^c$, $G_2 = F_2^c$. Пусть $K \in \mathscr{V}$. Тогда $K \not\subset G_1$, $K \not\subset G_2$. Допустим, что $K \subset G_1 \cup G_2$. Согласно лемме 8.2.1, найдутся такие K_1, $K_2 \in \mathscr{K}$, что $K_1 \subset G_1$, $K_2 \subset G_2$ и $K = K_1 \cup K_2$. Одно из этих двух компактных множеств, для определенности пусть это будет K_1, принадлежит $\mathscr{V}$ (поскольку $\complement\mathscr{V}$ замкнуто относительно $\bigcup$, так что из $K_1 \notin \mathscr{V}$, $K_2 \notin \mathscr{V}$ вытекало бы, что $K = K_1 \cup K_2 \notin \mathscr{V}$). Отсюда следует, что $K_1 \in \mathscr{K}_{F_1}$, но это невозможно, так как $K_1 \subset G_1 = F_1^c$. Поэтому $K \not\subset G_1 \cup G_2$, так что $F_1 \cap F_2 \in \mathscr{V}_f$.

Поскольку класс $\mathscr{V}_f$ замкнут относительно $\bigcap$ и замкнут в $\mathscr{F}$, то $F_0 = \bigcap \{F, F \in \mathscr{V}_f\}$ принадлежит $\mathscr{V}_f$. Если бы $F_0 = \varnothing$, то мы имели бы $\mathscr{V} = \varnothing$. Таким образом, $F_0 \neq \varnothing$, и соотношение $F \in \mathscr{V}_f$ эквивалентно $F \supset F_0$. Следовательно, $\mathscr{V} = \mathscr{K}_{F_0}$.

***Лемма* 8.2.4.** *Пусть E — ЛКС-пространство, а $\mathscr{V} \subset \mathscr{F}(E)$ таково, что $\varnothing \notin \mathscr{V}$. Тогда $\mathscr{V}$ является замкнутым антифильтром в $\mathscr{F}$ в том и только том случае, если $\mathscr{V} = \mathscr{F}_{K_0}$, где K_0 — непустое компактное множество. Аналогично, непустое семейство $\mathscr{W} \subset \mathscr{G}(E)$ является открытым фильтром в $\mathscr{G}(E)$ в том и только том случае, если $\mathscr{W} = \mathscr{G}_{K_0}$, где K_0 — непустое компактное множество.*

Доказательство. Сформулированные два утверждения равносильны как двойственные друг другу. Докажем, например, первое из них. Достаточность указанного условия очевидна. Обратно, пусть $\mathscr{V}$ — некоторый замкнутый антифильтр в $\mathscr{F}$ и $\varnothing \notin \mathscr{V}$. Для любого $F \in \mathscr{F}$, такого, что $F \notin \mathscr{V}$, найдется такое $K \in \mathscr{K}$, что $F \in \mathscr{F}^K$ и $\mathscr{V} \subset \mathscr{F}_K$, поскольку $\mathscr{V}$ замкнуто и $\bigcup$-наследственно. Пусть $\mathscr{V}_k \subset \mathscr{K}$ — семейство компактных множеств K, для которых $\mathscr{V} \subset \mathscr{F}_K$, т. е. $\mathscr{V}_k = \bigcap \{\mathscr{K}_F, F \in \mathscr{V}\}$, так что $\mathscr{V} = \bigcap \{\mathscr{F}_K, K \in \mathscr{V}_k\}$. Семейство $\mathscr{V}_k$ замкнуто в $\mathscr{K}$.

Для доказательства замкнутости $\mathscr{V}_k$ относительно $\bigcap$ возьмем K_1, $K \in \mathscr{V}_k$, $F \in \mathscr{V}$ и $G = F^c$, так что $K_1 \not\subset G$, $K_2 \not\subset G$. Допустим, что $K_1 \cap K_2 \subset G$. Тогда по лемме 8.2.2 найдутся такие G_1, $G_2 \in \mathscr{G}$, что $K_1 \subset G_1$, $K_2 \subset G_2$, $G = G_1 \cap G_2$. Отсюда вытекает, что, скажем, G_1^c принадлежит $\mathscr{V}$, ибо $\complement\mathscr{V}$ замкнуто относительно $\bigcup$ и $G^c \in \mathscr{V}$. Однако из соотношений $G_1^c \in \mathscr{V}$ и $K_1 \cap G_1^c = \varnothing$ следует, что $K_1 \notin \mathscr{V}_k$. Мы пришли к противоречию. Таким образом, $K_1 \cap K_2 \not\subset G$, и $\mathscr{V}_k$ замкнуто относительно $\bigcap$.

Поскольку семейство $\mathscr{V}_k$ замкнуто относительно $\bigcap$ и замкнуто в $\mathscr{F}$, оно содержит пересечение всех своих множеств $K_0 = \bigcap \{K, K \in \mathscr{V}_k\}$, так что $\mathscr{V} = \mathscr{F}_{K_0}$.

Предложение 8.2.7. *Полунепрерывное сверху τ-отображение ψ: $\mathscr{K} \to \mathscr{F}$ (соотв. $\mathscr{F} \to \mathscr{F}$) является $\bigcup$-отображением в том и только том случае, если существует такое фиксированное $F_0 \in \mathscr{F}$ (соотв. $K_0 \in \mathscr{K}$),* что $\psi(K) = K \oplus \check{F}_0$ *для любого $K \in \mathscr{K}$ (соотв. $\psi(F) = F \oplus \check{K}_0$ для любого $F \in \mathscr{F}$), и в этом случае ψ непрерывно.*

Доказательство. Из соотношения (8.1.12) и предложения 8.2.1 следует, что ψ есть полунепрерывное сверху $\bigcap$-отображение тогда и только тогда, когда его ядро $\mathscr{V}$ — замкнутый антифильтр в $\mathscr{K}$ (соотв. в $\mathscr{F}$). Наш результат непосредственно вытекает поэтому из лемм 8.2.3 и 8.2.4.

8.3. ТОПОЛОГИЧЕСКОЕ ДОБАВЛЕНИЕ

Как мы видели, существует биективное соответствие между полунепрерывными сверху возрастающими τ-отображениями на $\mathscr{K}(\mathbf{R}^d)$ или $\mathscr{F}(\mathbf{R}^d)$ и $\bigcup$-наследственными семействами $\mathscr{V}$, замкнутыми в $\mathscr{K}$ или в $\mathscr{F}$. Наделяя множества этих семейств относительными $\mathscr{F}(\mathscr{K})$- или $\mathscr{F}(\mathscr{F})$-топологиями и отождествляя их с соответствующими пространствами τ-отображений, можно развивать функциональный анализ для таких полунепрерывных сверху отображений.

Более общим образом, для произвольного ЛКС-пространства E пусть $\mathscr{F}_u(\mathscr{K}) \subset \mathscr{F}(\mathscr{K})$ обозначает *множество $\bigcup$-наследственных семейств $\mathscr{V} \subset \mathscr{K}(E)$, замкнутых в $\mathscr{K}$, а $\mathscr{F}_u(\mathscr{F}) \subset \mathscr{F}(\mathscr{F})$ — множество $\bigcup$-наследственных семейств $\mathscr{V}' \subset \mathscr{F}(E)$, замкнутых в $\mathscr{F}$.* Заметим, что пустое семейство $\mathscr{V} = \varnothing$ принадлежит как $\mathscr{F}_u(\mathscr{K})$, так и $\mathscr{F}_u(\mathscr{F})$.

Предложение 8.3.1. *Существует взаимно однозначное отображение* $\mathscr{V} \to \mathscr{V}'$ из $\mathscr{F}_u(\mathscr{K})$ *в* $\mathscr{F}_u(\mathscr{F})$, *определяемое взаимно обратными формулами*

$$\mathscr{V} = \bigcap_{F \in \mathscr{V}'} \mathscr{K}_F, \qquad \mathscr{V}' = \bigcap_{K \in \mathscr{V}} \mathscr{F}_K.$$

В частности, $\mathscr{V} = \varnothing$ *тогда и только тогда, когда* $\mathscr{V}' = \mathscr{F}$, *а* $\mathscr{V}' = \varnothing$ *тогда и только тогда, когда* $\mathscr{V} = \mathscr{K}$. *Более общо, для любого* $\mathscr{V}_0 \subset \mathscr{K}(E)$ *(соотв.* $\mathscr{V}'_0 \subset \mathscr{F}(E)$*) положим* $\mathscr{V}' = \bigcap \{\mathscr{F}_K, K \in \mathscr{V}_0\}$, $\mathscr{V} = \bigcap \{\mathscr{K}_F, F \in \mathscr{V}'\}$ *(соотв.* $\mathscr{V} = \bigcap \{\mathscr{K}_F, F \in \mathscr{V}'_0\}$, $\mathscr{V}' = \bigcap \{\mathscr{F}_K, K \in \mathscr{V}\}$*). Тогда* $\mathscr{V}$ *(соотв.* $\mathscr{V}'$*) является замыканием в* $\mathscr{K}$ *(соотв. в* $\mathscr{F}$*)* $\bigcup$*-наследственного семейства, порожденного в* $\mathscr{K}$ *семейством* $\mathscr{V}_0$ *(соотв. в* $\mathscr{F}$ *семейством* $\mathscr{V}'_0$*).*

Доказательство. Докажем только утверждение, касающееся $\mathscr{V}_0 \subset \mathscr{K}(E)$. Семейство $\mathscr{V}$ замкнуто в $\mathscr{F}$ и $\bigcup$-наследственно. Если через $\mathscr{V}_1$ обозначить $\bigcup$-наследственное семейство, порожденное семейством $\mathscr{V}_0$ в $\mathscr{K}$, то $\mathscr{V}_1 \subset \mathscr{V}$. Действительно, пусть $K \in \mathscr{V}_0$. Тогда K пересекается со всеми $F \in \mathscr{V}'$ и, значит, $K \in \mathscr{V}$. Поэтому $\mathscr{V}_0 \subset \mathscr{V}$ и, следовательно, $\mathscr{V}_1 \subset \mathscr{V}$, в силу $\bigcup$-наследственности $\mathscr{V}$. Отсюда вытекает, что $\overline{\mathscr{V}_1} \subset \mathscr{V}$.

Обратно, если $K \in \mathscr{K}$ и $K \notin \overline{\mathscr{V}_1}$, то существует такое замкнутое множество $F \in \mathscr{F}$, что $\mathscr{K}^F$ есть окрестность множества K, не пересекающаяся с $\bigcup$-наследственным семейством $\mathscr{V}_1$, т. е. $F \cap K = \varnothing$ и $\mathscr{V}_0 \subset \mathscr{V}_1 \subset \mathscr{K}_F$. Отсюда следует, что $F \in \mathscr{V}'$, поскольку F пересекается со всеми $K' \in \mathscr{V}_0$. Тогда $K \notin \mathscr{V}$ следует из $K \notin \mathscr{K}_F$. Поэтому $\overline{\mathscr{V}_1} \supset \mathscr{V}$, и $\mathscr{V} = \overline{\mathscr{V}_1}$.

Если рассмотреть отображение $\mathscr{V} \to \mathscr{V}'$ с топологической точки зрения, то оказывается, что в действительности оно представляет собой *гомеоморфизм*. Чтобы убедиться в этом, докажем сначала несколько предварительных результатов.

Предложение 8.3.2. *Пространства* $\mathscr{F}_u(\mathscr{F})$ *и* $\mathscr{F}_u(\mathscr{K})$ *компактны Далее,* $\mathscr{K}$ *есть изолированная точка в* $\mathscr{F}_u(\mathscr{K})$, *а пустое семейство* $\varnothing$ *— изолированная точка в* $\mathscr{F}_u(\mathscr{F})$. *В отличие от этого* $\varnothing$ *и* $\mathscr{F}$ *являются изолированными точками в* $\mathscr{F}_u(\mathscr{K})$ *и* $\mathscr{F}_u(\mathscr{F})$ *соответственно тогда и только тогда, когда ЛКС-пространство* E *компактно.*

Доказательство. Докажем, например, что $\mathscr{F}_u(\mathscr{K})$ — замкнутое подпространство компактного пространства $\mathscr{F}(\mathscr{K})$. Пусть $\{\mathscr{V}_n\} \subset \mathscr{F}_u(\mathscr{K})$ — такая последовательность, что $\lim \mathscr{V}_n = \mathscr{V}$ в $\mathscr{F}(\mathscr{K})$. Если $\varnothing \in \mathscr{V}$, то найдется такая последовательность $n \to K_n \in \mathscr{V}_n$, что $\varnothing = \lim K_n$ в миопической топологии. Отсюда вытекает, что для n достаточно больших $K_n = \varnothing$, т. е. $\mathscr{V}_n = \mathscr{K}$, в силу $\bigcup$-наследственности $\mathscr{V}_n$. Поэтому $\mathscr{V}=\mathscr{K}\in\mathscr{F}_u(\mathscr{K})$, и $\mathscr{K}$ — изолированная точка в $\mathscr{F}_u(\mathscr{K})$.

Предположим теперь, что $\varnothing\notin\mathscr{V}$, и докажем, что $\mathscr{V}$ $\bigcup$-наследственно. Пусть $K\in\mathscr{V}$ и $K'\in\mathscr{K}$, $K'\supset K$. Найдется такая последовательность $n\to K_n\in\mathscr{V}_n$, что $K=\lim K_n$ в $\mathscr{K}$. Отсюда вытекает, что $\lim K'\cup K_n=K'\cup K=K'$, так как $\bigcup$ непрерывно на $\mathscr{K}\times\mathscr{K}$. Но $K'\cup K_n\in\mathscr{V}_n$, поскольку $\mathscr{V}_n$ $\bigcup$-наследственно, и, таким образом, $K'\in\mathscr{V}$. Значит, $\mathscr{V}\in\mathscr{F}_u(\mathscr{K})$, и $\mathscr{F}_u(K)$ компактно.

Из предложения 1.2.1 следует, что $\varnothing$ будет изолированной точкой в $\mathscr{F}(\mathscr{K})$ тогда и только тогда, когда $\mathscr{K}$ компактно, т. е. тогда и только тогда, когда компактно само E. Если E не компактно, то существует последовательность $\{A_n\}\subset\mathscr{K}$, не имеющая предельных точек, так что не существует никакой ее подпоследовательности $k\to K_{n_k}\supset A_{n_k}$, сходящейся в $\mathscr{K}$. Отсюда вытекает, что $\lim\mathscr{F}_{A_n}=\varnothing$ в $\mathscr{F}_u(\mathscr{K})$. Поэтому $\varnothing$ является изолированной точкой в $\mathscr{F}_u(\mathscr{K})$ в том и только том случае, если E компактно. Доказательство утверждений относительно $\mathscr{F}_u(\mathscr{F})$ совершенно аналогично.

Построение базиса топологий в пространствах $\mathscr{F}_u(\mathscr{F})$ и $\mathscr{F}_u(\mathscr{K})$ мы начнем со следующей леммы.

Лемма 8.3.1. *Пусть E — ЛКС-пространство, $\mathscr{B}\subset\mathscr{G}$ — какой-нибудь базис его топологии, а $\boldsymbol{C}\subset\mathscr{K}$ — некоторое замкнутое относительно взятия конечных пересечений семейство, такое, что порождаемый им класс, замкнутый относительно взятия конечных объединений и бесконечных пересечений, совпадает с $\mathscr{K}(E)$. Тогда топология пространства $\mathscr{F}(E)$ порождается двумя семействами $\mathscr{F}_B$, $B\in\mathscr{B}$, и $\mathscr{F}^C$, $C\in\boldsymbol{C}$.*

Доказательство. Топология в $\mathscr{F}(E)$ порождается открытыми множествами $\mathscr{F}_G$, $G\in\mathscr{G}$, „полунепрерывного снизу типа" и открытыми множествами $\mathscr{F}^K$, $K\in\mathscr{K}$, „полунепрерывного сверху типа"[1]. Любое $G\in\mathscr{G}$ имеет вид $G=\bigcup B_i$ для некоторого семейства $\{B_i, i\in I\}\subset\mathscr{B}$, так что $\mathscr{F}_G=\mathscr{F}_{\bigcup B_i}=\bigcup\mathscr{F}_{B_i}$. Поэтому $\{\mathscr{F}_B, B\in\mathscr{B}\}$ является базисом для открытых множеств полунепрерывного снизу типа.

Пусть $\boldsymbol{C}'$ — порожденный семейством $\boldsymbol{C}$ класс, замкнутый относительно взятия конечных объединений и конечных пересечений. Всякое $K\in\mathscr{K}$ имеет вид $K=\bigcap C_i'$ для некоторого семейства $\{C_i', i\in I\}\subset\boldsymbol{C}'$. Если $F\in\mathscr{F}^K$, т. е. $\bigcap(C_i'\cap F)=\varnothing$, то найдется конечное число индексов $i_1, \ldots, i_k\in I$, таких, что

[1] Используемая здесь терминология связана с определением 1.2.2. — *Прим. перев.*

$F \cap C'_{i_1} \cap \ldots \cap C'_{i_k} = \varnothing$. Но $C' = C'_{i_1} \cap \ldots \cap C'_{i_k} \in \boldsymbol{C}'$ и $C' \supset K$, так что $F \in \mathcal{F}^{C'} \subset \mathcal{F}^{K}$. Следовательно, найдутся такие $C_1, \ldots, C_n \in \boldsymbol{C}$, что $C' = C_1 \cup \ldots \cup C_n$ (поскольку $C' \in \boldsymbol{C}'$) и $F \in \mathcal{F}^{C'} = \mathcal{F}^{C_1} \cap \ldots \cap \mathcal{F}^{C_n} \subset \mathcal{F}^{K}$. Отсюда вытекает, что открытые множества полунепрерывного сверху типа порождаются семейством $\{\mathcal{F}^{C},\ C \in \boldsymbol{C}\}$.

Пример. Применим лемму 8.3.1 к пространствам $E = \mathcal{F}$ и $E = \mathcal{K}$. Для краткости пусть $\mathcal{A}$ обозначает $\mathcal{F}$ или $\mathcal{K}$, и пусть $\mathcal{A}' = \mathcal{K}$, если $\mathcal{A} = \mathcal{F}$, и $\mathcal{A}' = \mathcal{F}$, если $\mathcal{A} = \mathcal{K}$. Как обычно, $\mathcal{A}^{B}_{G_1, \ldots, G_k}$ — это семейство $\{A, A \in \mathcal{A}, A \cap G_i \neq \varnothing, i = 1, 2, \ldots, k, A \cap B = \varnothing\}$. Тогда классы

$$\mathcal{B} = \{\mathcal{A}^{A'}_{G_1, \ldots, G_k},\ A' \in \mathcal{A}',\ k \geqslant 0,\ G_1, \ldots, G_k \in \mathcal{G}\}$$

и

$$\boldsymbol{C} = \left\{ \mathcal{A}^{A^c}_{A'_1, \ldots, A'_k},\ A \in \mathcal{A},\ k \geqslant 0,\ A'_1, \ldots, A'_k \in \mathcal{A}' \right\}$$

удовлетворяют условиям леммы для $\mathcal{A} = \mathcal{F}$ или $\mathcal{K}$. Поэтому открытые множества полунепрерывного снизу типа на $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ порождаются семейством $\{\mathcal{F}_\Gamma,\ \Gamma \in \mathcal{B}\}$, а полунепрерывного сверху типа — семейством $\{\mathcal{F}^{\chi},\ \chi \in \boldsymbol{C}\}$. Заметим, что Γ и χ обозначают семейства подмножеств из E.

Предложение 8.3.3. *Если $\mathcal{A} = \mathcal{K}$ (соотв. $\mathcal{A} = \mathcal{F}$) и $\mathcal{A}' = \mathcal{F}$ (соотв. $\mathcal{A}' = \mathcal{K}$), то открытые множества полунепрерывного сверху типа на $\mathcal{F}_u(\mathcal{A})$ порождаются семейством $\{\mathcal{V},\ \mathcal{V} \subset \mathcal{A}_{A^c}\}$, $A \in \mathcal{A}$, а полунепрерывного снизу типа — семейством $\{\mathcal{V}, \mathcal{V} \cap \mathcal{A}^{A'} \neq \varnothing\}$, $A' \in \mathcal{A}'$.*

Доказательство. В обозначениях приведенного выше примера, если $\chi = \mathcal{A}^{A^c}_{A'_1, \ldots, A'_k} \in \boldsymbol{C}$, то $\mathcal{V} \in \mathcal{F}^{\chi}$, т. е. $\mathcal{V} \cap \chi = \varnothing$, тогда и только тогда, когда для любого $V \in \mathcal{V}$ либо $V \cap A^c \neq \varnothing$, либо $V \cap A'_i = \varnothing$ для какого-нибудь индекса $i \in [1, 2, \ldots, k]$. В случае когда семейство $\mathcal{V}$ $\cup$-наследственно, это эквивалентно тому, что $V \cap A^c \neq \varnothing$, каково бы ни было $V \in \mathcal{V}$, т. е. $\mathcal{V} \cap \mathcal{A}^{A^c} = \varnothing$, или $\mathcal{V} \subset \mathcal{A}_{A^c}$. Если $\Gamma = \mathcal{A}^{A'}_{G_1, \ldots, G_k} \in \mathcal{B}$, то $\mathcal{V} \in \mathcal{F}_\Gamma$, т. е. $\mathcal{V} \cap \mathcal{A}^{A'}_{G_1, \ldots, G_k} \neq \varnothing$, тогда и только тогда, когда существует такое $V \in \mathcal{V}$, что $V \cap A' = \varnothing$, $V \cap G_i \neq \varnothing$, $i = 1, 2, \ldots, k$. В случае когда семейство $\mathcal{V}$ $\cup$-наследственно, это эквивалентно существованию такого $V \in \mathcal{V}$, что $V \cap A' = \varnothing$, т. е. тому, что $\mathcal{V} \cap \mathcal{A}^{A'} \neq \varnothing$.

Предложение 8.3.4. *В тех же обозначениях, отображение $\mathscr{V}\to\mathscr{V}'=\bigcap\{\mathscr{A}'_A,\ A\in\mathscr{V}\}$ является гомеоморфизмом $\mathscr{F}_u(\mathscr{A})$ на $\mathscr{F}_u(\mathscr{A}')$ и справедлива обратная формула $\mathscr{V}=\bigcap\{\mathscr{A}_{A'},\ A'\in\mathscr{V}'\}$. Далее, при этом отображении образ любого открытого множества полунепрерывного снизу (соотв. сверху) типа в $\mathscr{F}_u(\mathscr{A})$ представляет собой открытое множество полунепрерывного сверху (соотв. снизу) типа в $\mathscr{F}_u(\mathscr{A}')$, и обратно.*

Доказательство. Из предложения 8.3.1 нам известно, что $\mathscr{V}\to\mathscr{V}'$ есть взаимно однозначное отображение $\mathscr{F}_u(\mathscr{A})$ на $\mathscr{F}_u(\mathscr{A}')$ и что верна указанная обратная формула. С другой стороны, если $\mathscr{V}\in\mathscr{F}_u(\mathscr{A})$ и $A\in\mathscr{A}$, то $\mathscr{V}\not\subset\mathscr{A}_{A^c}$ тогда и только тогда, когда найдется такое $V\in\mathscr{V}$, что $V\subset A$, т. е. тогда и только тогда, когда $A\in\mathscr{V}$, в силу $\bigcup$-наследственности $\mathscr{V}$. Но соотношение $A\in\mathscr{V}=\bigcap\{\mathscr{A}_{A'},\ A'\in\mathscr{V}'\}$ эквивалентно соотношению $\mathscr{V}'\cap\mathscr{A}'^A=\varnothing$. Таким образом,

$$\begin{aligned}\mathscr{V}\subset\mathscr{A}_{A^c}&\Leftrightarrow\mathscr{V}'\cap\mathscr{A}'^A\neq\varnothing,\\ \mathscr{V}'\subset\mathscr{A}'_{A'^c}&\Leftrightarrow\mathscr{V}\cap\mathscr{A}^{A'}\neq\varnothing.\end{aligned}\tag{8.3.1}$$

Этим доказательство и заканчивается, если учесть результат предложения 8.3.2.

8.4. ОБРАТНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

В предыдущих параграфах мы исследовали возрастающие отображения множества $\mathscr{P}(E)$ (или какого-нибудь его подмножества) в себя. Более общим образом, пусть E и E' — два ЛКС-пространства (уже не обязательно совпадающие), $\mathscr{A}\subset\mathscr{P}(E)$ и ψ — возрастающее отображение из $\mathscr{A}$ в $\mathscr{P}(E')$, т. е. если A, $B\in\mathscr{A}$ и $A\subset B$ в E, то $\psi(A)\subset\psi(B)$ в E'. Для любого $x\in E'$ положим

$$\mathscr{V}(x)=\psi^{-1}(\mathscr{P}_x(E'))=\{A,\ A\in\mathscr{A},\ x\in\psi(A)\}.\tag{8.4.1}$$

Отображение $x\to\mathscr{V}(x)$ из E' в $\mathscr{P}(\mathscr{P}(E))$ будем называть *обратным* для отображения ψ. Для любого $x\in E'$ семейство $\mathscr{V}(x)$ $\bigcup$-наследственно в $\mathscr{A}$. Обратно, если $\mathscr{V}$ — некоторое отображение из E' в пространство $\mathscr{P}_u(\mathscr{A})$ всех $\bigcup$-наследственных семейств в $\mathscr{A}$, то $\mathscr{V}$ является обратным для отображения ψ: $A\to\psi(A)=\{x,\ A\in\mathscr{V}(x)\}$.

В последующем в роли пространства $\mathscr{A}\subset\mathscr{P}(E)$ всегда будет выступать либо $\mathscr{A}=\mathscr{F}(E)$, либо $\mathscr{A}=\mathscr{K}(E)$. В случае $\mathscr{A}=\mathscr{K}$ мы положим $\mathscr{B}=\mathscr{G}$ и $\mathscr{A}'=\mathscr{F}$, а в случае $\mathscr{A}=\mathscr{F}$ положим $\mathscr{A}'=\mathscr{K}$ и $\mathscr{B}=\{K^c,\ K\in\mathscr{K}\}$, т. е. в обоих случаях $\mathscr{B}=\{A'^c,\ A'\in\mathscr{A}'\}$. Пространство $\mathscr{B}$ всегда будет наделяться топологией, индуцированной из $\mathscr{A}'$ отображением $A'\to A'^c$. Мы будем также использовать обозначения предложения 8.1.4, т. е. если ψ — возрастающее отображение из $\mathscr{A}$ в $\mathscr{P}(E')$, то ψ_b — это его наименьшее продолжение на $\mathscr{B}$, а ψ_a — его наибольшее продолжение на $\mathscr{A}$. В явном виде:

$$\begin{aligned} &\psi_b(B) = \bigcup \{\psi(A),\ A \in \mathscr{A},\ A \subset B\} \qquad (B \in \mathscr{B}), \\ &\psi_a(A) = \bigcap \{\psi(B),\ B \in \mathscr{B},\ B \supset A\} \qquad (A \in \mathscr{A}). \end{aligned} \tag{8.4.2}$$

Используя введенную систему записи, можно формулировать одновременно аналогичные результаты относительно пространств $\mathscr{F}(E)$ и $\mathscr{K}(E)$.

Прежде всего выясним, при каком условии $\psi = \psi_a$ на $\mathscr{A}$. Из (8.4.2) следует, что $\psi = \psi_a$ тогда и только тогда, когда для любых $A \in \mathscr{A}$ и $x \notin \psi(A)$ найдется такое $B \in \mathscr{B}$, что $B \supset A$ и $x \notin \psi(A')$, каково бы ни было $A' \in \mathscr{A}$, $A' \subset B$ (см. предложение 8.1.4). Это эквивалентно тому, что из $A \notin \mathscr{V}(x)$ вытекает существование такого $B \in \mathscr{B}$, что $B \supset A$ и $\mathscr{V}(x) \subset \mathscr{A}_{B^c}$. Но $B^c \in \mathscr{A}'$ (по определению $\mathscr{B}$), и, таким образом, $\mathscr{A}_{B^c}$ — открытая окрестность A, не пересекающаяся с $\mathscr{V}(x)$. Поэтому $\mathscr{V}(x)$ замкнуто, т. е. $\mathscr{V}(x) \in \mathscr{F}_u(\mathscr{A})$. Обратно, если $\mathscr{V}(x)$ замкнуто и $\bigcup$-наследственно для любого $x \in E'$, то $\complement\mathscr{V}(x)$ будет $\bigcap$-наследственным и для любого $A \notin \mathscr{V}(x)$ найдется такое $B \in \mathscr{B}$, что $\mathscr{A}^{B^c}$ — открытая окрестность A, не пересекающаяся с $\mathscr{V}(x)$. Следовательно, $\psi = \psi_a$. Более точно, справедливо

Предложение 8.4.1. *Пусть ψ — возрастающее отображение из $\mathscr{A}$ в $\mathscr{P}(E')$, а отображение $\mathscr{V}$: $E' \to \mathscr{P}(\mathscr{A})$ определяется соотношением $\mathscr{V}(x) = \{A,\ x \in \psi(A)\}$. Тогда, для того чтобы $\psi = \psi_a$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathscr{V}$ отображало E' в $\mathscr{F}_u(\mathscr{A})$. Кроме того, следующие четыре условия эквивалентны:*

1) *ψ — полунепрерывное сверху отображение из $\mathscr{A}$ в $\mathscr{F}(E')$.*
2) *$\mathscr{V}$ — полунепрерывное сверху отображение из E' в $\mathscr{F}_u(\mathscr{A})$.*
3) *Для любых $A \in \mathscr{A}$ и $x \in E'$ множества $\psi(A)$ и $\mathscr{V}(x)$ замкнуты.*
4) *ψ отображает $\mathscr{A}$ в $\mathscr{F}(E')$ и $\psi = \psi_a$.* |

Доказательство. Мы только что доказали, что $\psi = \psi_a$ тогда и только тогда, когда $\mathscr{V}(E') \subset \mathscr{F}_u(\mathscr{A})$. В случае когда это так, $\psi(A)$ замкнуто для любого $A \in \mathscr{A}$, если и только если из $A \in \mathscr{V}(x_n)$ и $\lim x_n = x$ в E' вытекает, что $A \in \mathscr{V}(x)$, т. е. из $\mathscr{V}(x_n) \not\subset \mathscr{A}_{A^c}$ и $x = \lim x_n$ вытекает, что $\mathscr{V}(x) \not\subset \mathscr{A}_{A^c}$. В силу предложения 8.3.2, последнее условие в свою очередь выполняется тогда и только тогда, когда $\mathscr{V}$ — полунепрерывное сверху отображение из E' в $\mathscr{F}_u(\mathscr{A})$. Тем самым установлена эквивалентность условий 2) и 4).

Если ψ — полунепрерывное сверху отображение из $\mathscr{A}$ в $\mathscr{F}(E')$, то $\psi = \psi_a$ (доказательство этого факта в точности такое же, как и доказательство утверждения 8.1.4), так что из условия 1) вытекает условие 4). Далее, если выполнено условие 2), то ψ отображает $\mathscr{A}$ в $\mathscr{F}(E')$ (поскольку условия 2) и 4) эквивалентны). Пусть $K' \in \mathscr{K}(E')$ — некоторое компактное множество, $\psi^{-1}(\mathscr{F}_{K'}) = \bigcup \{\mathscr{V}(x),\ x \in K'\}$ и $n \to A_n \in \psi^{-1}(\mathscr{F}_{K'})$ — такая последовательность, что $\lim A_n = A$ в $\mathscr{A}$. Для любого n найдется такое $x_n \in K'$, что $A_n \in \mathscr{V}(x_n)$. Если $x_0 \in K'$ — предельная точка последовательности $\{x_n\}$, то $A \in \mathscr{V}(x_0)$, поскольку $\mathscr{V}$ полунепрерывно сверху. Отсюда следует, что $A \in \psi^{-1}(\mathscr{F}_{K'})$ и $\psi^{-1}(\mathscr{F}_{K'})$ замкнуто. Поэтому ψ полунепрерывно сверху, и условие 1) эквивалентно условию 2). Эквивалентность условий 3) и 4) очевидна.

Предложение 8.4.2. *Отображение $\mathscr{V}$ является полунепрерывным снизу отображением из E' в $\mathscr{F}_u(\mathscr{A})$ тогда и только тогда, когда $\psi = \psi_a$ и ψ_b отображает $\mathscr{B}$ в $\mathscr{G}(E')$.*

Доказательство. Из предложения 8.4.1 вытекает, что равенство $\psi = \psi_a$ эквивалентно включению $\mathscr{V}(E') \subset \mathscr{F}_u(\mathscr{A})$. Предположим, что это условие выполнено. Тогда $\mathscr{V}$ будет полунепрерывно снизу в том и только том случае, если для любого $A' \in \mathscr{A}'$ множество $\{x\colon \mathscr{V}(x) \cap \mathscr{A}^{A'} \neq \varnothing\} = \bigcup \{\psi(A),\ A \in \mathscr{A},\ A \cap A' = \varnothing\}$ открыто в E' (предложение 8.3.2). Но $A \cap A' = \varnothing$ эквивалентно $A \subset A'^c$, а $A'^c \in \mathscr{B}$. Таким образом, ψ будет полунепрерывным снизу тогда и только тогда, когда для любого $B \in \mathscr{B}$ множество $\bigcup \{\psi(A),\ A \in \mathscr{A},\ A \subset B\} = \psi_b(B)$ открыто в E'.

Следствие. *Для того чтобы ψ было полунепрерывным сверху отображением из $\mathscr{A}$ в $\mathscr{F}(E')$ и ψ_b отображало $\mathscr{B}$ в $\mathscr{G}(E')$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathscr{V}$ было непрерывно.*

Пример. Если $E = \mathbf{R}^d$ и ψ является τ-отображением из $\mathscr{A}$ в $\mathscr{P}(E)$, то $\mathscr{V}(x) = \mathscr{V}_x$ представляет собой сдвиг его ядра. Если это ядро замкнуто в $\mathscr{A}$, то отображение $\mathscr{V}$ непрерывно, так что ψ полунепрерывно сверху и ψ_b отображает $\mathscr{B}$ в $\mathscr{G}(E')$.

Относительно гомеоморфизма $\mathscr{V} \to \mathscr{V}'$ (предложение 8.3.4) справедлив следующий результат.

Предложение 8.4.3. *Пусть ψ — такое отображение из $\mathscr{A}$ в $\mathscr{P}(E')$, что $\psi = \psi_a$, а $\mathscr{V}\colon E' \to \mathscr{F}_u(\mathscr{A})$ — обратное ему отображение. Пусть, далее, отображение $\mathscr{V}'\colon E' \to \mathscr{F}_u(\mathscr{A})$ определяется соотношением $\mathscr{V}'(x) = \bigcap \{\mathscr{A}'_A,\ A \in \mathscr{V}(x)\}$, $x \in E'$, а отображение $\psi'\colon \mathscr{A}' \to \mathscr{P}(E')$ — соотношением $\psi'(A') = \{x,\ A' \in \mathscr{V}'(x)\}$, $A' \in \mathscr{A}'$. Тогда $\psi' = \psi'_a$, на $\mathscr{A}'$. Далее, следующие четыре условия эквивалентны:*

1) $\mathscr{V}$ — *полунепрерывное сверху (соотв. снизу) отображение из* E' *в* $\mathscr{F}_u(\mathscr{A})$.

2) $\mathscr{V}'$ — *полунепрерывное снизу (соотв. сверху) отображение из* E' *в* $\mathscr{F}_u(\mathscr{A}')$.

3) ψ *(соотв.* ψ'*) — полунепрерывное сверху отображение из* $\mathscr{A}$ *(соотв.* $\mathscr{A}'$*) в* $\mathscr{F}(E')$.

4) $\psi'_{b'}$ *(соотв.* ψ_b*) отображает* $\mathscr{B}'$ *(соотв.* $\mathscr{B}$*) в* $\mathscr{G}(E')$.

Эквивалентны между собой также следующие пять условий:

a) ψ *и* ψ' *полунепрерывны сверху.*

b) $\mathscr{V}$ *непрерывно.*

c) $\mathscr{V}'$ *непрерывно.*

d) ψ *полунепрерывно сверху, и* ψ_b *отображает* $\mathscr{B}$ *в* $\mathscr{G}(E')$.

e) ψ' *полунепрерывно сверху, и* ψ'_b *отображает* $\mathscr{B}'$ *в* $\mathscr{G}(E')$.

Доказательство. Для любого $x \in E'$ семейство $\mathscr{V}'(x)$ замкнуто в $\mathscr{A}$ (предложение 8.3.1) и потому $\psi' = \psi'_{a'}$ (предложение 8.4.1). Из предложения 8.3.3 вытекает, что $\mathscr{V}$ полунепрерывно сверху (соотв. снизу) тогда и только тогда, когда $\mathscr{V}'$ полунепрерывно снизу (соотв. сверху), так что условия 1) и 2) эквивалентны. Из предложения 8.4.2 следует теперь, что ψ_b отображает $\mathscr{B}$ в $\mathscr{G}(E')$ тогда и только тогда, когда ψ' полунепрерывно сверху, а ψ'_b отображает $\mathscr{B}'$ в $\mathscr{G}(E')$ тогда и только тогда, когда ψ полунепрерывно сверху. Итак, все условия 1) — 4) эквивалентны.

Аналогичным образом отображения ψ и ψ' оба полунепрерывны сверху в том и только том случае, если ψ полунепрерывно сверху и ψ_b отображает $\mathscr{B}$ в $\mathscr{G}(E')$, или же в том и только том случае, если $\mathscr{V}$ непрерывно. Следовательно, условия a) — e) эквивалентны.

ГЛАВА 9

ИНТЕГРАЛЫ И МЕРЫ СО ЗНАЧЕНИЯМИ В $\mathscr{K}_0$

Как мы видели в гл. I, для заданного $K \in C(\mathscr{K}(\mathbf{R}^d))$ семейство $\{\lambda K, \lambda \geqslant 0\}$ его гомотетических образов удовлетворяет полугрупповому соотношению $\lambda K \oplus \mu K = (\lambda + \mu) K$ и из $\lambda \geqslant \mu \geqslant 0$ вытекает, что $\lambda K \geqslant \mu K$, где $\geqslant$ — отношение предпорядка на $\mathscr{K}$, определяемое условием: $A \geqslant B$, если A открыто по отношению к B.

Более общим образом, было бы интересно охарактеризовать однопараметрические семейства $\{K(\lambda)\} \subset \mathscr{K}$, для которых $K(\lambda) \geqslant K(\mu)$ при $\lambda \geqslant \mu$. Описываемый в § 9.1 интеграл Римана — Минковского дает нам первый простой пример такого семейства. Что довольно любопытно, этот интеграл с необходимостью принимает значения в $C(\mathscr{K})$. Другим примером служит интеграл Стилтьеса — Минковского, уже не обязательно принимающий значения в $C(\mathscr{K})$.

В § 9.2 и 9.3 дается простая перефразировка классической теории интегрирования с использованием обычной двойственности между „множественным" и „функциональным" подходами. При первом из этих подходов, когда исходят из мер, с каждой $\mathscr{K}_0$-значной мерой можно естественным образом связать возрастающий функционал, который оказывается полуаддитивным, т. е. $I(f + f') = I(f) \oplus I(f')$, если множества $\{f > 0\}$ и $\{f' > 0\}$ не пересекаются, причем этот функционал (строго) аддитивен тогда и только тогда, когда эта мера принимает значения в $C(\mathscr{K}_0)$. Обратно, при функциональном подходе любому $\mathscr{K}_0$-значному полуаддитивному выпуклому возрастающему функционалу можно поставить в соответствие $\mathscr{K}_0$-значную меру, причем эта мера принимает значения в $C(\mathscr{K}_0)$ в том и только том случае, если этот функционал строго аддитивен.

Меры со значениями в $C(\mathscr{K}_0)$ хорошо изучены, поскольку их можно выразить с помощью обычных интегралов от опорных функций (см., например, Рокафеллар, 1968, 1970, и Валадье, 1970), и мы не будем заниматься здесь их исследованием.

9.1. ИНТЕГРАЛ РИМАНА — МИНКОВСКОГО

Пусть $\{A(\lambda), \lambda \in \mathbf{R}\}$ — однопараметрическое семейство непустых компактных множеств в эвклидовом пространстве $\mathbf{R}^d$. Наша задача состоит в определении *интеграла Римана — Минковского* (или, короче, *РМ-интеграла*) $\int_a^b A(\lambda)\,d\lambda$ в пространстве $\mathcal{K}'(\mathbf{R}^d)$, снабженном миопической топологией и операцией сложения по Минковскому $\oplus$. Если параметр λ изменить надлежащим образом, задача сводится к определению РМ-интеграла

$$I = \int_0^1 A(\lambda)\,d\lambda \in \mathcal{K}'(\mathbf{R}^d).$$

Мы будем существенно опираться на предположение, что отображение $\lambda \to A(\lambda)$ *непрерывно*. Поэтому образ отрезка $[0, 1]$ при отображении A компактен в $\mathcal{K}'$, так что для любого $\lambda \in [0, 1]$ множество $A(\lambda)$ содержится в некотором фиксированном компактном множестве $K_0 \in \mathcal{K}'$. Далее, отображение A равномерно непрерывно на $[0, 1]$, так что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\eta(\varepsilon)$, что

$$|\lambda - \lambda'| \leqslant \eta(\varepsilon), \quad \lambda, \lambda' \in [0, 1] \Rightarrow \rho(A(\lambda), A(\lambda')) \leqslant \varepsilon. \tag{9.1.1}$$

Здесь ρ — метрика Хаусдорфа на $\mathcal{K}'$.

Пусть $s = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, $x_n = 0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n = 1$, — некоторое *разбиение* интервала $[0, 1]$. Положим $|s| = \sup|x_i - x_{i-1}|$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Каждому набору $X = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ точек $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, сопоставим компактное множество

$$I_s(X) = \bigoplus_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\,A(\xi_i) \tag{9.1.2}$$

и обозначим через $\mathcal{I}_s$ семейство $\{I_s(X)\}$ для всех возможных наборов X.

a) *$\mathcal{I}_s$ компактно в $\mathcal{K}'$.* Действительно, для любого X множество $I_s(X)$ содержится в фиксированном компактном множестве $C(K_0)$, так что остается только доказать, что $\mathcal{I}_s$ замкнуто в $\mathcal{K}'$. Пусть $k \to X_k = (\xi_1(k), \ldots, \xi_n(k))$ — такая последовательность возможных наборов X, что последовательность $k \to B_k = I_s(X_k)$ сходится к B в $\mathcal{K}'$. Каждая из точек $\xi_i(k)$ принадлежит своему компактному интервалу, так что можно найти такую подпоследовательность $j \to k_j$, что $\lim X_{k_j} = X_0 = (\xi_1^0, \ldots, \xi_n^0)$ и X_0 будет допустимым набором. В силу непрерывности сложения по Минковскому, $\lim B_{k_j} = I_s(X_0)$. Таким образом, $B = I_s(X_0) \in \mathcal{I}_s$ и, следовательно, $\mathcal{I}_s$ компактно в $\mathcal{K}'$.

b) *При $|s| \leqslant \eta(\varepsilon)$ диаметр множества $\mathcal{I}_s$ не превосходит ε.* Действительно, если $|s| \leqslant \eta(\varepsilon)$ и X_1, X_2 — два допустимых выбора X, то, как следует из (9.1.1), для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$

$$A(\xi_i^1) \subset A(\xi_i^2) \oplus \varepsilon B, \quad A(\xi_i^2) \subset A(\xi_i^1) \oplus \varepsilon B,$$

где B — единичный шар. Отсюда вытекает, что

$$I_s(X_1) = \bigoplus_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) A(\xi_i^1) \subset$$

$$\subset \varepsilon B \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) A(\xi_i^2) \right) = I_s(X_2) \oplus \varepsilon B$$

и

$$I_s(X_2) \subset I_s(X_1) \oplus \varepsilon B,$$

так что $\rho(I_s(X_1), I_s(X_2)) \leqslant \varepsilon$.

Обозначим теперь через S множество всех разбиений отрезка $[0, 1]$ и рассмотрим на этом множестве отношение $\vdash$, определяемое следующим образом: $s_1 \vdash s_2$, если разбиение s_1 мельче разбиения s_2 (т. е. если s_1 — подразбиение разбиения s_2). Множество S является фильтрующимся по отношению $\vdash$ (т. е. для любых $s, s' \in S$ существует такое $s'' \in S$, что $s'' \vdash s$ и $s'' \vdash s'$).

c) *Фильтрующееся семейство* $\{\mathscr{I}_s, s \in S\}$ *сходится в* $\mathscr{K}(\mathscr{H}')$. Действительно, для любого $s \in S$ и любого допустимого X имеем $I_s(X) \subset C(K_0)$, т. е. семейство $\{\mathscr{I}_s, s \in S\}$ содержится в фиксированном компактном множестве $\mathscr{K}^{(C(K_0))^c}$ из $\mathscr{K}(\mathscr{K})$. Поэтому достаточно показать, что это семейство удовлетворяет критерию Коши для метрики Хаусдорфа δ в $\mathscr{K}(\mathscr{K}')$. Пусть $s, s' \in S$ таковы, что $s \vdash s'$, а X и X' — два допустимых выбора вектора X, соответствующие разбиениям s и s'. Если $|s'| \leqslant \eta(\varepsilon)$ (а значит, и подавно $|s| \leqslant \eta(\varepsilon)$), то как и в пункте b), мы находим, что

$$I_s(X) \subset I_{s'}(X') \oplus \varepsilon B, \quad I_{s'}(X') \subset I_s(X) \oplus \varepsilon B,$$

т. е. $\rho(I_s(X), I_{s'}(X')) \leqslant \varepsilon$ в $\mathscr{K}'$ и, таким образом, $\delta(\mathscr{I}_s, \mathscr{I}_{s'}) \leqslant \varepsilon$ в $\mathscr{K}(\mathscr{K}')$.

Пусть теперь $s_0 \in S$ таково, что $|s_0| \leqslant \varepsilon$, и пусть s и s' — два произвольных разбиения, более мелких, чем s_0. Тогда $\delta(\mathscr{I}_s, \mathscr{I}_{s'}) \leqslant \leqslant \delta(\mathscr{I}_{s_0}, \mathscr{I}_{s'}) \leqslant 2\varepsilon$, и критерий Коши выполняется. Поэтому найдется такое $\mathscr{I} \in \mathscr{K}(\mathscr{K}')$, что $\lim \{\mathscr{I}_s, s \in S\} = \mathscr{I}$.

d) $\mathscr{I} = \{I\}$ *для некоторого единственного множества* $I \in \mathscr{K}'$; мы будем обозначать его $I = \int_0^1 A(\lambda)\, d\lambda$. Это — немедленное следствие утверждения пункта b) и непрерывности диаметра в миопической топологии: диаметр $\mathscr{I}$ равен нулю, и, значит, $\mathscr{I} = \{I\}$ для некоторого единственного $I \in \mathscr{K}'$.

e) *Если для каждого* $s \in S$ *произвольно выбрать допустимый вектор* X_s, *то фильтрующееся семейство* $\{I_s(X_s), s \in S\}$ *сходится к* I *в* $\mathscr{K}'$. Действительно, это семейство содержится в фиксированном компактном множестве $C(K_0)$ и потому имеет предельную точку $J \in \mathscr{K}'$. Но из соотношений $I_s(X_s) \in \mathscr{I}_s$ и

$\lim \mathscr{I}_s = \{I\}$ в $\mathscr{K}(\mathscr{K}')$ вытекает, что $J \in \mathscr{I}$, т. е. $J = I$. Таким образом, $\lim I_s(X_s) = I$ в $\mathscr{K}'$.

Из результата пункта е) следует, в частности, что

$$I = \int_0^1 A(\lambda)\, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \bigoplus_{k=1}^{n} \frac{1}{n} A(k/n). \tag{9.1.3}$$

Более общим образом, РМ-интеграл на произвольном ограниченном интервале равен

$$\int_a^b A(\lambda)\, d\lambda = \lim_{|s|\to 0} \bigoplus_i (x_i - x_{i-1}) A(\xi_i),$$

где s — разбиение $a = x_0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n = b$ и $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$. Отсюда следует, что

$$\left(\int_a^b A(\lambda)\, d\lambda\right) \oplus \left(\int_b^c A(\lambda)\, d\lambda\right) = \int_a^c A(\lambda)\, d\lambda \quad (a \leqslant b \leqslant c)$$

и что, если $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ — два непрерывных семейства,

$$\int_a^b (A(\lambda) \oplus B(\lambda))\, d\lambda = \left(\int_a^b A(\lambda)\, d\lambda\right) \oplus \left(\int_a^b B(\lambda)\, d\lambda\right). \tag{9.1.4}$$

Выпуклость интеграла Римана — Минковского

Докажем, что РМ-интеграл всегда является выпуклым компактным множеством. Для этого нам понадобится следующая

Лемма 9.1.1. *Если $A(\lambda) = A \in \mathscr{K}'$ не зависит от λ, то $\int_a^b A(\lambda)\, d\lambda = (b-a)\, C(A)$, $a \leqslant b$. В частности, для любого $A \in \mathscr{K}'$ и любого непрерывного семейства $\{B(\lambda)\} \subset \mathscr{K}'$*

$$\int_a^b (A \oplus B(\lambda))\, d\lambda = (b-a)\, C(A) \oplus \int_a^b B(\lambda)\, d\lambda \quad (a \leqslant b). \tag{9.1.5}$$

Доказательство. Первое утверждение вытекает из (9.1.3) и предложения 1.5.5, а формула (9.1.5) — из (9.1.4).

Теорема 9.1.1. *Интеграл Римана — Минковского принимает значения в $C(\mathscr{K}')$. Точнее, для любого непрерывного семейства $\{A(\lambda)\} \subset \mathscr{K}'$*

$$\int_a^b A(\lambda)\, d\lambda = \int_a^b C(A(\lambda))\, d\lambda \in C(\mathscr{K}') \quad (a \leqslant b).$$

Доказательство. Поскольку параметр λ всегда можно надлежащим образом изменить, достаточно доказать, что РМ-интеграл $I=\int_0^1 A(\lambda)\,d\lambda$ равен $I=\int_0^1 C(A(\lambda))\,d\lambda$, — отсюда сразу следует, что $I\in C(\mathscr{K}')$, ибо $C(\mathscr{K}')$ замкнуто в $\mathscr{K}'$.

Для целых $n\geqslant 0$ и $0<k\leqslant n$ положим

$$J_k(n)=\int_{(k-1)/n}^{k/n} A(\lambda)\,d\lambda,$$

так что $I=\bigoplus_{k=1}^{n} J_k(n)$. Для заданного $\varepsilon\geqslant 0$ пусть $\eta(\varepsilon)\geqslant 0$ таково, что выполняется (9.1.1). Тогда при $(1/n)\leqslant\eta(\varepsilon)$ и $(k-1)/n\leqslant\lambda\leqslant k/n$ мы имеем $A(\lambda)\subset A(k/n)\oplus\varepsilon B$ и $A(k/n)\subset A(\lambda)\oplus\varepsilon B$. С другой стороны, РМ-интеграл возрастает относительно $\subset$, и из леммы 9.1.1 следует, что

$$J_k(n)\subset\frac{1}{n}C\left(A\left(\frac{k}{n}\right)\right)\oplus\frac{1}{n}\varepsilon B=\frac{1}{n}\left[\varepsilon B\oplus C\left(A\left(\frac{k}{n}\right)\right)\right],$$

$$\frac{1}{n}C\left(A\left(\frac{k}{n}\right)\right)\subset\frac{1}{n}(\varepsilon B\oplus J_k(n)).$$

Суммируя по Минковскому эти соотношения, находим

$$I=\bigoplus_{k=1}^{n} J_k(n)\subset\varepsilon B\oplus\left[\bigoplus_{k=1}^{n}\frac{1}{n}C\left(A\left(\frac{k}{n}\right)\right)\right],$$

$$\bigoplus_{k=1}^{n}\frac{1}{n}C\left(A\left(\frac{k}{n}\right)\right)\subset I\oplus\varepsilon B.$$

При $n\uparrow\infty$ получаем, в силу (9.1.3),

$$I\subset\varepsilon B\oplus\int_0^1 C(A(\lambda))\,d\lambda,$$

$$\int_0^1 C(A(\lambda))\,d\lambda\subset I\oplus\varepsilon B.$$

Следовательно,

$$I=\int_0^1 C(A(\lambda))\,d\lambda.$$

Интеграл Стилтьеса — Минковского

Пусть F — неубывающая функция на $\mathbf{R}$, а $\{A(\lambda),\ \lambda\in\mathbf{R}\}\subset\mathscr{K}'$ — непрерывное однопараметрическое семейство в $\mathscr{K}'$. Заменяя в определении РМ-интеграла x_i-x_{i-1} на $F(x_i)-F(x_{i-1})$, можно показать, что предел

$$\int_a^b A(\lambda)\,dF(\lambda) = \lim_{|s|\to 0} \bigoplus_{i=1}^{n} (F(x_i) - F(x_{i-1}))\,A(\xi_i)$$

также существует. Это — *интеграл Стилтьеса — Минковского* (или, короче, *СМ-интеграл*). Однако в этом случае лемма 9.1.1 уже не имеет силы и теорема 9.1.1 неверна: СМ-интеграл не обязательно принимает значения в $C(\mathcal{K}')$.

Функция $\lambda \to B(\lambda) = \int_0^\lambda A(\mu)\,dF(\mu)$ возрастает относительно предпорядка $\geqslant$ на $\mathcal{K}'$ ($K \geqslant K'$, если K заполнимо посредством K', т. е. $K = K' \oplus K''$ для некоторого $K'' \in \mathcal{K}'$), поскольку

$$B(\lambda) = B(\mu) \oplus \int_\mu^\lambda A(x)\,dF(x) \quad (\lambda \geqslant \mu).$$

Другими словами, в действительности существуют такие семейства в $\mathcal{K}'$, которые возрастают относительно $\geqslant$ и область значений которых не содержится в $C(\mathcal{K}')$. Однако мы не будем здесь развивать далее эту точку зрения, а посвятим последние два параграфа простой переформулировке классической теории интегрирования.

9.2. СЛУЧАЙНЫЕ МЕРЫ СО ЗНАЧЕНИЯМИ В $\mathcal{K}_0(\mathbf{R}^d)$

Всюду ниже E — это произвольное ЛКС-пространство, а $\mathcal{K}_0(\mathbf{R}^d) = \mathcal{K}_0$ — пространство компактных множеств в $\mathbf{R}^d$, содержащих начало координат 0. Имея в виду определить меры Радона на E со значениями в $\mathcal{K}_0$, исследуем сначала соответствующие функциональные пространства.

Пространства Φ_k, Φ_g и $C^+_{\mathcal{K}}$

Пусть $\mathbf{R}_+$ — положительная полупрямая, $\mathbf{R}_+ = (0, \infty)$, а $\overline{\mathbf{R}_+} = [0, \infty]$ — ее компактификация. Всякая функция f: $E \to \mathbf{R}_+$ характеризуется своим *наибольшим подграфиком*

$$\check{\Gamma}_f = \{(x, r),\ x \in E,\ r \in \mathbf{R}_+,\ r \leqslant f(x)\},$$

представляющим собой подмножество произведения $E \times \mathbf{R}_+$. Далее, функции на E со значениями в $\mathbf{R}_+$ или $\overline{\mathbf{R}_+}$ можно характеризовать их *наименьшим подграфиком*

$$\hat{\Gamma}_f = \{(x, r),\ x \in E,\ r \in \mathbf{R}_+,\ r < f(x)\},$$

также представляющим собой подмножество пространства $E \times \mathbf{R}_+$.

Предложение 9.2.1. *Функция $f\colon E \to \mathbf{R}_+$ полунепрерывна сверху (соотв. функция $f\colon E \to \mathbf{R}_+$ или $E \to \overline{\mathbf{R}_+}$ полунепрерывна снизу) тогда и только тогда, когда ее подграфик $\check{\Gamma}_f$ (соотв. $\hat{\Gamma}_f$) замкнут (открыт) в $E \times \mathbf{R}_+$.*

Доказательство. Пусть f — полунепрерывная сверху функция, а $n \to (x_n, r_n) \in \check{\Gamma}_f$ — такая последовательность, что $\lim (x_n, r_n) = (x, r)$ в $E \times \mathbf{R}_+$. Для каждого n мы имеем $r_n \leqslant f(x_n)$ (поскольку $(x_n, r_n) \in \check{\Gamma}_f$), так что $r \leqslant \overline{\lim}\, f(x_n) \leqslant f(x)$, т. е. $(x, r) \in \check{\Gamma}_f$. Поэтому подграфик $\check{\Gamma}_f$ замкнут. Обратно, пусть он замкнут, и пусть $\{x_n\}$ — такая последовательность, что $\lim x_n = x$ в E. Для каждого n имеем $(x_n, f(x_n)) \in \check{\Gamma}_f$ и, значит, $(x, \overline{\lim}\, f(x_n)) \in \check{\Gamma}_f$, т. е. $\overline{\lim}\, f(x_n) \leqslant f(x)$. Поэтому f полунепрерывна сверху. Доказательство утверждения относительно полунепрерывности снизу аналогично.

Мы будем обозначать *пространство полунепрерывных снизу функций* $f\colon E \to \overline{\mathbf{R}_+}$ через Φ_g. Из предложения 9.2.1 следует, что Φ_g можно отождествлять с некоторым подпространством пространства $\mathcal{G}(E \times \mathbf{R}_+)$, а именно с множеством $\{\hat{\Gamma}_f,\ f \in \Phi_g\}$ открытых наименьших подграфиков. Пространство Φ_g всегда будет наделяться соответствующей относительной топологией. Открытое множество $\Gamma \in \mathcal{G}(E \times \mathbf{R}_+)$ тогда и только тогда является наименьшим подграфиком некоторой функции $f \in \Phi_g$, когда из $(x, r) \in \Gamma$ и $0 \leqslant r' \leqslant r$ вытекает, что $(x, r') \in \Gamma$. При выполнении этого условия соответствующая функция равна $f(x) = \sup \{r, (x, r) \in \Gamma\}$ для всех таких $x \in E$, для которых множество $\Gamma \cap (\{x\} \times \mathbf{R}_+)$ непусто (и $f(x) = 0$ для остальных $x \in E$). Далее, нетрудно убедиться в том, что множество открытых наименьших подграфиков замкнуто в компактном пространстве $\mathcal{G}(E \times \mathbf{R}_+)$, так что пространство Φ_g *компактно*.

Если f — полунепрерывная сверху положительная функция, то ее наибольший подграфик $\check{\Gamma}_f \in \mathcal{F}(E \times \mathbf{R}_+)$ всегда содержит множество $E_0 = E \times \{0\}$. Обозначим через Γ'_f наименьшее $F \in \mathcal{F}(E \times \mathbf{R}_+)$, для которого $\check{\Gamma}_f = F \cup E_0$. Иначе говоря, Γ'_f представляет собой замыкание в $E \times \mathbf{R}_+$ множества $\check{\Gamma}_f \setminus E_0$, или еще $\Gamma'_f = \check{\Gamma}_f \cap (\operatorname{supp} f \times \mathbf{R}_+)$, где $\operatorname{supp} f$ есть замыкание в E множества $\{x, f(x) > 0\}$.

Будем обозначать через Φ_k *множество полунепрерывных сверху положительных функций на E с компактным носителем*, т. е. $f \in \Phi_k$ тогда и только тогда, когда $\check{\Gamma}_f \in \mathscr{F}(E \times \mathbf{R}_+)$ и $\Gamma_f' \in \mathscr{K}(E \times \mathbf{R}_+)$. Мы будем отождествлять Φ_k с соответствующим подмножеством пространства $\mathscr{F}(E \times \mathbf{R}_+)$, но при этом наделять его более тонкой топологией, нежели относительная $\mathscr{F}$-топология, так что Φ_k *не* будет (топологическим) подпространством пространства $\mathscr{F}(E \times \mathbf{R}_+)$. Эта Φ_k-топология порождается двумя семействами: (1) семейством $\{f, \Gamma_f' \subset G\}$, $G \in \mathscr{G}(E \times \mathbf{R}_+)$ (открытых множеств полунепрерывного сверху типа в Φ_k) и (2) семейством $\{f, \Gamma_f \cap G \neq \varnothing\}$, $G \in \mathscr{G}(E \times \mathbf{R}_+)$ (открытых множеств полунепрерывного снизу типа в Φ_k). Наделенное такой топологией пространство Φ_k является ЛКС-пространством и во многом аналогично пространству $\mathscr{K}$, наделенному миопической топологией.

Если $\chi \in \Phi_k$ и $\gamma \in \Phi_g$, то мы будем писать $\chi \subset \gamma$ (или $\gamma \supset \chi$), если $\hat{\Gamma}_\chi' \subset \hat{\Gamma}_\gamma$, т. е. $\chi(x) < \gamma(x)$ (строго!) для всякого x, принадлежащего носителю $\overline{\{\gamma > 0\}}$ функции γ. Для произвольных функций f и g на E мы будем писать $f \leqslant g$, если $f(x) \leqslant g(x)$ для всех $x \in E$.

Нетрудно убедиться в том, что Φ_k-топология порождается

1) семейством $\{\chi, \chi \subset \gamma\}$, $\gamma \in \Phi_g$ (открытые множества полунепрерывного сверху типа) и

2) семейством $\{\chi, \chi \nleqslant \chi_0\}$, $\chi_0 \in \Phi_k$ (открытые множества полунепрерывного снизу типа).

Аналогично Φ_g-топология порождается

1) семейством $\{\gamma, \gamma \supset \chi\}$, $\chi \in \Phi_k$ (открытые множества полунепрерывного снизу типа) и

2) семейством $\{\gamma, \gamma \ngeqslant \gamma_0\}$, $\gamma_0 \in \Phi_g$ (открытые множества полунепрерывного сверху типа).

Наконец, через $C_{\mathscr{K}}^+$ мы обозначаем *пространство непрерывных положительных функций на E с компактным носителем*, наделенное своей обычной топологией. Функция φ принадлежит $C_{\mathscr{K}}^+$ в том и только том случае, когда $\varphi \in \Phi_k \cap \Phi_g$, однако топология пространства $C_{\mathscr{K}}^+$ грубее топологии, порожденной относительными топологиями пространств Φ_k и Φ_g.

Для любых $\varphi \in C_{\mathscr{K}}^+$, $\chi \in \Phi_k$ и $\gamma \in \Phi_g$ мы будем писать $\chi \subset \varphi$, если $\Gamma_\chi' \subset \hat{\Gamma}_\varphi$, и $\varphi \subset \gamma$, если $\Gamma_\varphi' \subset \hat{\Gamma}_\gamma$. Как легко проверить, Φ_k-топология порождается также семействами

$$\{\chi, \chi \subset \varphi\}, \ \varphi \in C_{\mathscr{K}}^+, \ \text{и} \ \{\chi, \chi \nleqslant \varphi\}, \ \varphi \in C_{\mathscr{K}}^+.$$

Аналогично Φ_g-топология порождается семействами

$$\{\gamma, \gamma \supset \varphi\}, \ \varphi \in C_{\mathscr{K}}^+, \ \text{и} \ \{\gamma, \gamma \ngeqslant \varphi\}, \ \varphi \in C_{\mathscr{K}}^+.$$

Ниже нам понадобятся следующие результаты о монотонной сходимости последовательностей функций:

$$\{f_n\}\subset\Phi_g,\ f_n\uparrow f\Rightarrow f\in\Phi_g \text{ и } f=\lim f_n \text{ в } \Phi_g;$$
$$\{f_n\}\subset\Phi_g,\ f_n\downarrow f \text{ и } f\in\Phi_g\Rightarrow f=\lim f_n \text{ в } \Phi_g;$$
$$\{f_n\}\subset\Phi_k,\ f_n\uparrow f \text{ и } f\in\Phi_k\Rightarrow f=\lim f_n \text{ в } \Phi_k;$$
$$\{f_n\}\subset\Phi_k,\ f_n\downarrow f\Rightarrow f\in\Phi_k \text{ и } f=\lim f_n \text{ в } \Phi_k.$$

Операция *сложения* $(f, f')\to f+f'$ полунепрерывна сверху как отображение из $\Phi_k\times\Phi_k$ в Φ_k, полунепрерывна снизу как отображение из $\Phi_g\times\Phi_g$ в Φ_g и непрерывна как отображение из $C_{\mathcal{K}}^+\times C_{\mathcal{K}}^+$ в $C_{\mathcal{K}}^+$.

Псевдоинтегралы со значениями в $\mathcal{K}_0(\mathbf{R}^d)$

Пусть I — отображение из $C_{\mathcal{K}}^+(E)$ в $\mathcal{K}_0(\mathbf{R}^d)$. Мы будем называть I *положительно однородным*, если $I(\lambda\varphi)=\lambda I(\varphi)$, $\lambda\geqslant 0$, $\varphi\in C_{\mathcal{K}}^+$; *возрастающим*, если из $\varphi\leqslant\varphi'$ в $C_{\mathcal{K}}^+$ вытекает, что $I(\varphi)\subset I(\varphi')$; *субаддитивным*, если $I(\varphi+\varphi')\subset I(\varphi)\oplus I(\varphi')$; *супераддитивным*, если $I(\varphi+\varphi')\supset I(\varphi)\oplus I(\varphi')$; и *аддитивным*, если $I(\varphi+\varphi')=I(\varphi)+I(\varphi')$ $(\varphi, \varphi'\in C_{\mathcal{K}}^+)$.

Далее, будем говорить, что I *выпукло* (соотв. *вогнуто*), если оно положительно однородно и субаддитивно (соотв. супераддитивно). Наконец, будем называть I *положительно линейным* отображением или *C-интегралом*, если оно одновременно и выпукло, и вогнуто, т. е. положительно однородно и аддитивно.

С каждым отображением I: $C_{\mathcal{K}}^+\to\mathcal{K}_0(\mathbf{R}^d)$ мы свяжем отображение CI: $C_{\mathcal{K}}^+\to C(\mathcal{K}_0)$, определяемое соотношением $CI(\varphi)=C(I(\varphi))$; т. е. $CI(\varphi)$ — это *выпуклая оболочка* множества $I(\varphi)$. Скажем, что I является *псевдоинтегралом*, если (1) *I — выпуклое возрастающее* отображение и (2) *его выпуклая оболочка CI есть C-интеграл*. Очевидно, что всякий C-интеграл — псевдоинтеграл.

Предложение 9.2.2. *Если отображение I возрастает и выпукло (в частности, если оно представляет собой псевдоинтеграл), то оно непрерывно. Если I вогнуто (в частности, если I есть C-интеграл), то оно принимает значения в $C(\mathcal{K}_0)$.*

Доказательство. Пусть $\{\varphi_n\}\subset C_{\mathcal{K}}^+$ — сходящаяся последовательность с пределом $\lim\varphi_n=\varphi$ в $C_{\mathcal{K}}^+$. Тогда найдутся такое $K_0\in\mathcal{K}(E)$, что $\operatorname{supp}\varphi_n\subset K_0$ для всех n, и такое $\varphi_0\in C_{\mathcal{K}}^+$, что $\varphi_0(x)=1$ для всех $x\in K_0$. Отсюда вытекает, что для любого $\varepsilon>0$ при всех достаточно больших n будут выполняться неравенства $\varphi\leqslant\varphi_n+\varepsilon\varphi_0$, $\varphi_n\leqslant\varphi+\varepsilon\varphi_0$. Отсюда следует, что если отображение I — возрастающее и выпуклое, то $I(\varphi) \subset I(\varphi_n) \oplus \oplus \varepsilon I(\varphi_0)$ и $I(\varphi_n) \subset I(\varphi) \oplus \varepsilon I(\varphi_0)$. Поэтому $\lim I(\varphi_n) = I(\varphi)$ в $\mathscr{K}_0$, и I непрерывно.

Всякое $\varphi \in C_{\mathscr{K}}^+$ можно записать в виде $\varphi = (1/n)\sum_{i=1}^{n}\varphi_i$, $\varphi_i = \varphi$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Отсюда вытекает, что если I вогнуто, то $I(\varphi) \supset \supset (1/n)(I(\varphi))^{\oplus n}$. Следовательно, $I(\varphi) \supset CI(\varphi)$ (предложения 1.5.5) и, таким образом, $I = CI$, т. е. I принимает значения в $C(\mathscr{K}_0)$.

Продолжение псевдоинтеграла на Φ_g

Хотя некоторые из приводимых ниже результатов остаются справедливыми и в том случае, когда от I требуются только возрастание и выпуклость, мы будем все же всюду в дальнейшем предполагать, что I является *псевдоинтегралом*.

Наш первый шаг будет состоять в продолжении I на пространство Φ_g. Обозначим через $\overline{\mathscr{K}_0}$ компактификацию пространства $\mathscr{K}_0$, т. е. $\overline{\mathscr{K}_0} = \mathscr{K}_0 \cup \{\omega\}$, где ω — *бесконечно удаленная точка*. Для любого $K \in \overline{\mathscr{K}_0}$ по определению полагается $K \cup \omega = = \omega$ и $K \oplus \omega = \omega$. Очевидно, что отображение $I'\colon \Phi_g \to \overline{\mathscr{K}_0}$, определяемое соотношением

$$I'(\gamma) = \lim\{I(\varphi),\ \varphi \in C_{\mathscr{K}}^+,\ \varphi \leqslant \gamma\}, \tag{9.2.1}$$

является продолжением I. В (9.2.1) символ lim обозначает предел в $\overline{\mathscr{K}_0}$ возрастающего фильтрующегося семейства $I(\varphi)$, $\varphi \leqslant \gamma$. Если замкнутое множество

$$F = \overline{\bigcup\{I(\varphi),\ \varphi \in C_{\mathscr{K}}^+, \varphi \leqslant \gamma\}}$$

компактно, то $I'(\gamma) = F$; в противном случае $I'(\gamma) = \omega$. Для любых $\varphi \in C_{\mathscr{K}}^+$ и $\varepsilon > 0$ найдется такая функция $\varphi_\varepsilon \in C_{\mathscr{K}}^+$, что $\varphi_\varepsilon \subset \varphi$ и $I(\varphi) \subset I(\varphi_\varepsilon) \oplus \varepsilon B$ (B — единичный шар в $\mathbf{R}^d$), поскольку I непрерывно на $C_{\mathscr{K}}^+$. Таким образом, определение (9.2.1) эквивалентно следующему:

$$I'(\gamma) = \lim\{I(\varphi),\ \varphi \in C_{\mathscr{K}}^+,\ \varphi \Subset \gamma\}. \tag{9.2.1$'$}$$

Предложение 9.2.3. *Отображение I' возрастает, выпукло и полунепрерывно снизу на Φ_g. Кроме того, если $\gamma_n \uparrow \gamma$ в Φ_g, то $I'(\gamma_n) \uparrow I(\gamma)$ и $I'(\gamma) = \lim I'(\gamma_n)$ в $\overline{\mathscr{K}_0}$.*

Доказательство. В силу (9.2.1), I' — возрастающее отображение. Если G — открытое множество в $\mathbf{R}^d$, то $I'(\gamma) \cap G \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда $I(\varphi) \neq \varnothing$ для некоторой функции $\varphi \in C^+_{\mathscr{X}}$, такой, что $\varphi \subset \gamma$, и $\{\gamma: \gamma \supset \varphi\}$ открыто в Φ_g. Таким образом, $\{\gamma, I'(\gamma) \cap G = \varnothing\}$ открыто в Φ_g, и I' полунепрерывно снизу. В пространстве Φ_g из $\gamma_n \uparrow \gamma$ вытекает, что $\gamma = \lim \gamma_n$, и поэтому $I(\gamma) \subset \underline{\lim}\, I'(\gamma_n)$, так как I' полунепрерывно снизу. С другой стороны, $\overline{\lim}\, I'(\gamma_n) \subset I(\gamma)$, поскольку I' возрастает. Значит, $I'(\gamma) = \lim I'(\gamma_n)$.

Далее, пусть γ, $\gamma' \in \Phi_g$ и λ, $\mu \geqslant 0$. Выберем такие две последовательности $\{\varphi_n\}$ и $\{\varphi'_n\}$ в $C^+_{\mathscr{X}}$, что $\varphi_n \uparrow \gamma$ и $\varphi'_n \uparrow \gamma'$. Тогда $I'(\lambda\gamma + \mu\gamma') = \lim I(\lambda\varphi_n + \mu\varphi'_n) \subset \lim(\lambda I(\varphi_n) \oplus \mu I(\varphi'_n)) = \lambda I'(\gamma) \oplus \mu I'(\gamma')$, ибо $(\lambda\varphi_n + \mu\varphi'_n) \uparrow (\lambda\gamma + \mu\gamma')$ в Φ_g, а I выпукло на $C^+_{\mathscr{X}}$. Таким образом, I' выпукло.

Следствие. *Отображение CI' положительно линейно на Φ_g. Если I является C-интегралом, то I' положительно линейно на Φ_g.*

Продолжение на Φ_k

Для любой положительной функции f на E положим

$$I'(f) = \lim\{I'(\gamma),\ \gamma \in \Phi_g,\ \gamma \geqslant f\}, \tag{9.2.2}$$

т. е $I'(f)$ — это предел в $\overline{\mathscr{K}}_0$ убывающего фильтрующегося семейства $I'(\gamma)$, $\gamma \geqslant f$. Если для любого $K \in \overline{\mathscr{K}}_0$ положить по определению $K \cap \omega = K$, то (9.2.2) эквивалентно соотношению

$$I'(f) = \bigcap\{I'(\gamma),\ \gamma \in \Phi_g,\ \gamma \geqslant f\}.$$

Всякая функция $\chi \in \Phi_k$ доминируется некоторой функцией $\varphi \in C^+_{\mathscr{X}}$, так что $I'(\chi) \in \mathscr{K}_0$. Далее,

$$I'(\chi) = \bigcap\{I'(\gamma),\ \gamma \in \Phi_g,\ \gamma \supset \chi\}(\chi \in \Phi_k). \tag{9.2.2$'$}$$

Доказательство соотношения (9.2.2$'$). Для $\chi \in \Phi_k$ положим $J(\chi) = \bigcap\{I'(\gamma),\ \gamma \in \Phi_g,\ \gamma \supset \chi\}$. Ясно, что $J(\chi) \supset I'(\chi)$. Докажем обратное включение. Пусть K — носитель функции χ, $\varepsilon > 0$, а функция $\varphi_0 \in C^+_{\mathscr{X}}$ такова, что $\varphi_0(x) = 1$ для всех $x \in K$. Тогда из $\gamma \in \Phi_g$ и $\gamma \geqslant \chi$ вытекает, что $\gamma + \varepsilon\varphi_0 \supset \chi$. Поэтому $I'(\gamma) \oplus \varepsilon I(\varphi_0) \supset I'(\gamma + \varepsilon\varphi_0) \supset J(\chi)$. Отсюда следует, что $I'(\chi) \supset J(\chi)$, чем (9.2.2$'$) и доказано.

Предложение 9.2.4 *Отображение I' возрастает, выпукло и полунепрерывно сверху на Φ_k. Если $\chi_n \downarrow \chi$ в Φ_k, то $I'(\chi_n) \downarrow I(\chi)$ и $I(\chi) = \lim I(\chi_n)$ в $\mathscr{K}_0$. Для любого $\gamma \in \Phi_g$ справедливо равенство $I'(\gamma) = \lim\{I(\chi),\ \chi \in \Phi_k,\ \chi \subset \gamma\}$. Выпуклая оболочка CI' (и само I', если I является C-интегралом) положительно линейна на Φ_k.*

Доказательство. В силу (9.2.2), I' — возрастающее отображение. Если F — замкнутое множество в $\mathbf{R}^d$, то, как вытекает из (9.2.2'), $I'(\chi) \in \mathscr{K}^F$ тогда и только тогда, когда существует такое $\gamma \in \Phi_g$, что $\chi \subset \gamma$ и $I'(\gamma) \cap F = \varnothing$. Но множества вида $\{\chi, \chi \subset \gamma\}$ открыты в Φ_k, так что множество $\{\chi, I'(\chi) \in \mathscr{K}^F\}$ также является открытым. Поэтому I' полунепрерывно сверху на Φ_k. Далее, из $\chi_n \downarrow \chi$ вытекает, что $\chi = \lim \chi_n$ в Φ_k, а значит, $I'(\chi_n) \downarrow I'(\chi)$ и $\lim I'(\chi_n) = I'(\chi)$, поскольку I' возрастает и полунепрерывно сверху на Φ_k. Пусть $\chi, \chi' \in \Phi_k$ и $\lambda, \mu \geqslant 0$. Выберем такие две последовательности $\{\varphi_n\}$ и $\{\varphi'_n\}$ в $C^+_{\mathscr{K}}$, что $\varphi_n \downarrow \chi$, $\varphi'_n \downarrow \chi'$. Тогда $(\lambda\varphi_n + \mu\varphi'_n) \downarrow (\lambda\chi + \mu\chi')$ и, следовательно,

$$I'(\lambda\chi + \mu\chi') = \lim (\lambda\varphi_n + \mu\varphi'_n) \subset \lim (\lambda I(\varphi_n) \oplus \mu I(\varphi'_n)) =$$
$$= \lambda I'(\chi) \oplus \mu I'(\chi'),$$

т. е. I' выпукло на Φ_k. Если I вогнуто, то получается обратное включение, т. е. I' вогнуто на Φ_k. Для всякого $\gamma \in \Phi_g$ имеем, в силу (9.2.2'), $I'(\gamma) \supset \lim \{I'(\chi), \chi \in \Phi_k, \chi \subset \gamma\}$, а из соотношения

$$I'(\gamma) = \lim \{I(\varphi), \varphi \in C^+_{\mathscr{K}}, \varphi \subset \gamma\}$$

и того факта, что $C^+_{\mathscr{K}} \subset \Phi_k$, вытекает обратное включение, что и дает нам желаемое равенство.

Пространство Φ псевдоинтегрируемых функций

Положим теперь для всякой положительной функции f на E

$$\begin{aligned} I'(f) &= \lim \{I'(\gamma), \gamma \in \Phi_g, \gamma \geqslant f\}, \\ I''(f) &= \lim \{I'(\chi), \chi \in \Phi_k, \chi \leqslant f\} \end{aligned} \tag{9.2.3}$$

и обозначим через $\overline{\Phi}$ множество таких положительных функций f, для которых $I'(f) = I''(f)$. Будем называть функцию f *псевдоинтегрируемой*, если $I'(f) = I''(f) \in \mathscr{K}_0$ (т. е. исключается случай, когда $I'(f) = I''(f) = \omega$), и обозначим множество псевдоинтегрируемых функций через Φ. Очевидно, $\Phi \subset \overline{\Phi}$. Если $f \in \overline{\Phi}$, то мы будем писать $I(f)$ вместо $I'(f)$ или $I''(f)$. Ясно, что $\Phi_g \subset \overline{\Phi}$ и $\Phi_k \subset \Phi$.

Для любых положительных функций f, f' очевидным образом выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} I''(f) &\subset I'(f), \\ I'(f + f') &\subset I'(f) \oplus I'(f'), \\ CI''(f + f') &\supset CI''(f) \oplus CI''(f'). \end{aligned} \tag{9.2.4}$$

Предложение 9.2.5. *Положительная функция f псевдоинтегрируема (т. е. $f \in \Phi$) тогда и только тогда, когда существуют такие последовательности $\{\gamma_n\} \subset \Phi_g$ и $\{\chi_n\} \subset \Phi_k$, что $\gamma_n \geqslant f$, а $\chi_n \leqslant f$ для любого n и $\lim I(\gamma_n - \chi_n) = \{0\}$ в $\mathscr{K}_0$. Аналогично $f \in \bar{\Phi}$ и $I(f) = \omega$ тогда и только тогда, когда существует такая возрастающая последовательность $n \to \chi_n \leqslant f$, что $\lim I(\chi_n) = \omega$ в $\bar{\mathscr{K}}_0$.*

Доказательство. Второе утверждение непосредственно вытекает из определения. Пусть f — положительная функция, для которой $I'(f) \neq \omega$. Тогда найдутся такая убывающая последовательность $n \to \gamma_n \geqslant f$ в Φ_g, что $I(\gamma_1) \neq \omega$ и $\lim I(\gamma_n) = I'(f)$, а также такая возрастающая последовательность $n \to \chi_n \leqslant f$ в Φ_k, что $\lim I(\chi_n) = I''(f)$. Последовательность $n \to (\gamma_n - \chi_n) \in \Phi_g$ убывает и принимает значения в Φ (так как $I(\gamma_1) \neq \omega$). Поэтому существует $A = \lim I(\gamma_n - \chi_n) = \bigcap I(\gamma_n - \chi_n) \in \mathscr{K}_0$. Из второго включения в (9.2.4) следует тогда, что

$$I(\gamma_n) = I(\gamma_n - \chi_n + \chi_n) \subset I(\gamma_n - \chi_n) \oplus I(\chi_n).$$

Таким образом, $I'(f) \subset A \oplus I''(f)$. Если $A = \{0\}$, то отсюда получаем, что $I'(f) = I''(f)$ и, значит, $f \in \Phi$.

Обратно, предположим, что $f \in \Phi$. Из последних двух включений (9.2.4) вытекает, что выпуклая оболочка CI аддитивна, т. е. $CI'(f + f') = CI''(f + f') = CI(f) \oplus CI(f')$ для любых $f, f' \in \Phi$. Отсюда следует, что $CI'(f) = C(A) \oplus CI''(f)$. Но $CI'(f) = CI''(f) = CI(f)$, поскольку $f \in \Phi$; значит, $C(A) = \{0\}$ и потому $A = \{0\}$.

Лемма 9.2.1. *Множество $\bar{\Phi}$ замкнуто относительно $\vee$, а Φ замкнуто относительно $\wedge$.*

Доказательство. Для любых положительных функций f и f' по определению $f \vee f' = \sup(f, f')$, $f \wedge f' = \inf(f, f')$. Пусть $f, f' \in \Phi$, и пусть $\{\gamma_n\}$ и $\{\chi_n\}$ (соотв. $\{\gamma_n'\}$ и $\{\chi_n'\}$) — две последовательности, удовлетворяющие условиям предложения 9.2.5 для функции f (соотв. функции f'). Тогда последовательность $n \to I(\gamma_n + \gamma_n' - \chi_n - \chi_n') \subset I(\gamma_n - \chi_n) \oplus I(\gamma_n' - \chi_n')$ сходится к $\{0\}$ в $\mathscr{K}_0$. Отсюда вытекает, что последовательность $n \to CI(\gamma_n + \gamma_n' - \chi_n - \chi_n') = CI(\gamma_n \vee \gamma_n' - \chi_n \vee \chi_n') \oplus CI(\gamma_n \wedge \gamma_n' - \chi_n \wedge \chi_n')$ также сходится к $\{0\}$, и потому $\{0\} = \lim CI(\gamma_n \vee \gamma_n' - \chi_n \vee \chi_n') = \lim CI(\gamma_n \wedge \gamma_n' - \chi_n \wedge \chi_n')$, а значит, и подавно $\lim I(\gamma_n \vee \gamma_n' - \chi_n \vee \chi_n') = \lim I(\gamma_n \wedge \gamma_n' - \gamma_n \wedge \gamma_n') = \{0\}$. Таким образом, $f \vee f' \in \Phi$ и $f \wedge f' \in \Phi$ (предложение 9.2.5).

Если $f \in \bar{\Phi}$ и $I(f) = \omega$, то существует такая последовательность $n \to \chi_n \leqslant f$ в Φ_k, что $\lim I(\chi_n) = \omega$ в $\mathscr{K}_0$. Для любой положительной функции f' из неравенства $f \vee f' \geqslant \chi_n$ вытекает, что

$I''(f \vee f') = \omega$. Поэтому, в силу утверждения 9.2.5, $f \vee f' \in \bar{\Phi}$ и $I(f \vee f') = \omega$.

Лемма 9.2.2. *Пространство Φ замкнуто относительно сложения, а отображение I является выпуклым и возрастающим на Φ. Кроме того, из f, $f' \in \Phi$ и $f \geqslant f'$ следует, что $f - f' \in \Phi$. Точно также $\bar{\Phi}$ замкнуто относительно $+$, а I выпукло и возрастает на $\bar{\Phi}$.*

Доказательство. Пусть f, $f' \in \Phi$, и пусть $\{\gamma_n\}$ и $\{\chi_n\}$ (соотв. $\{\gamma'_n\}$ и $\{\chi'_n\}$) — две последовательности, удовлетворяющие условиям предложения 9.2.5 для функции f (соотв. для f'). Тогда из включения $I(\gamma_n + \gamma'_n - \chi_n - \chi'_n) \subset I(\gamma_n - \chi_n) \oplus I(\gamma'_n - \chi'_n)$ вытекает, что $\lim I(\gamma_n + \gamma'_n - \chi_n - \chi'_n) = \{0\}$, и $f + f' \in \Phi$ (предложение 9.2.5). Если $f - f' \geqslant 0$, то $\gamma_n - \chi'_n \geqslant f - f' \geqslant (\chi_n - \gamma'_n)_+$ и $\gamma_n - \chi'_n - (\chi_n - \gamma'_n)_+ \leqslant \gamma_n - \chi'_n - (\chi_n - \gamma'_n) = (\gamma_n - \chi_n) + (\gamma'_n - \chi'_n)$. Отсюда следует, что $I\left(\gamma_n - \chi'_n - (\chi_n - \gamma'_n)_+\right) \subset I(\gamma_n - \chi_n) \oplus I(\gamma'_n - \chi'_n)$ и $\lim I\left(\gamma_n - \chi'_n - (\chi_n - \gamma'_n)_+\right) = \{0\}$ в $\mathscr{K}_0$. Поэтому $f - f' \in \Phi$ (предложение 9.2.5). Утверждение относительно $\bar{\Phi}$ является очевидным.

Предложение 9.2.6. *Множество $\bar{\Phi}$ замкнуто относительно взятия счетных сумм. Для любой последовательности $\{f_n\} \subset \Phi$*

$$I\left(\sum_{n=1}^{N} f_n\right) = \lim I\left(\sum_{n=1}^{N} f_n\right) \subset \bigoplus_{n=1}^{\infty} I(f_n)$$

и

$$CI\left(\sum_{n=1}^{N} f_n\right) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} CI(f_n).$$

Доказательство. Пусть $\{f_n\}$ — последовательность в $\bar{\Phi}$. Если $I(f_{n_0}) = \omega$ для некоторого целого n_0, то из $f = \sum f_n$ вытекает, что $f \geqslant f_{n_0}$, и поэтому $I''(f) \supset I(f_{n_0}) = \omega$, т. е. $f \in \bar{\Phi}$, $I(f) = \omega$. Предположим, что $f_n \in \Phi$ для любого n, и пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное положительное число, а $\{\varepsilon_n\} \subset \mathbf{R}_+$ — такая последовательность, что $\sum \varepsilon_n = \varepsilon$. Согласно предложению 9.2.5, для каждого n найдутся такие $\gamma_n \in \Phi_g$, $\gamma_n \geqslant f_n$, и $\chi_n \in \Phi_k$, $\chi_n \leqslant f_n$, что

$$I(\gamma_n - \chi_n) \subset \varepsilon_n B \tag{a}$$

(B — единичный шар в $\mathbf{R}^d$). С другой стороны, $\gamma = \sum \gamma_n \in \Phi_g$ и $\chi = \sum \gamma_n$ удовлетворяет условию $\gamma - \chi \in \Phi_g$, так что, в силу предложения 9.2.3,

$$I(\gamma)=\lim_N I\left(\sum_{n=1}^N \gamma_n\right), \quad I(\gamma-\chi)=\lim_N I\left(\sum_{n=1}^N (\gamma_n-\chi_n)\right). \tag{b}$$

Предположим сначала, что $I(\gamma)\neq\omega$. Тогда из (a) получаем

$$I\left(\sum_{n=1}^N (\gamma_n-\chi_n)\right)\subset\bigoplus_{n=1}^N I(\gamma_n-\chi_n)\subset\varepsilon B, \tag{c}$$

и, таким образом, из (b) вытекает, что $I(\gamma-\chi)\subset\varepsilon B$. Поэтому $f\in\Phi$ (предложение 9.2.5). Далее, из включений

$$I\left(\sum_{n=1}^N \gamma_n\right)\subset I\left(\sum_{n=1}^N f_n\right)\oplus\varepsilon B\subset\lim_N I\left(\sum_{n=1}^N f_n\right)\oplus\varepsilon B$$

следует, что

$$I(\gamma)\subset\lim_N I\left(\sum_{n=1}^N f_n\right)\oplus\varepsilon B$$

(предложение 9.2.3). Поэтому

$$I(f)\subset I(\gamma)\subset\left(\lim_N I\left(\sum_{n=1}^N f_n\right)\right)\oplus\varepsilon B.$$

Следовательно,

$$I(f)=\lim_N I\left(\sum_{n=1}^N f_n\right) \quad\text{и}\quad I(f)\subset\bigoplus_{n=1}^\infty I(f_n)$$

(лемма 9.2.2). Аналогичным образом получаем, что

$$CI(f)=\lim_N\bigoplus_{n=1}^N CI(f_n)=\bigoplus_{i=1}^\infty CI(f_n).$$

Пусть теперь $I(\gamma)=\omega$. Тогда

$$CI(\gamma)=\omega \quad\text{и}\quad \lim CI\left(\sum_{n=1}^N \gamma_n\right)=\lim\bigoplus_{n=1}^N CI(\gamma_n)=\omega.$$

Но из (a) вытекает, что $CI(f_n)\subset CI(\gamma_n)\subset CI(f_n)\oplus\varepsilon B$, и, таким образом,

$$\bigoplus_{n=1}^N CI(\gamma_n)\subset\varepsilon B\oplus\left(\bigoplus_{n=1}^N CI(f_n)\right).$$

Поэтому

$$\lim\bigoplus_{n=1}^N CI(f_n)\lim CI\left(\sum_1^N f_n\right)=\omega.$$

Значит, $f\in\bar\Phi$ и $I(f)=\omega$.

Предложение 9.2.7. *Множество $\bar{\Phi}$ замкнуто относительно монотонной сходимости $\uparrow$, причем из $f_n \uparrow f$ в $\bar{\Phi}$ вытекает, что $I(f_n) \uparrow I(f)$ и $\lim I(f_n) = I(f)$ в $\overline{\mathcal{K}}_0$. Аналогично Φ замкнуто относительно монотонной сходимости $\downarrow$, и из $f_n \downarrow f$ в Φ вытекает, что $I(f_n) \downarrow I(f)$ и $\lim I(f_n) = I(f)$ в $\mathcal{K}_0$.*

Доказательство. Пусть $\{f_n\} \subset \bar{\Phi}$ и $f_n \uparrow f$. Положим $h_1 = f_1$ и $h_n = f_n - f_{n-1}$, так что $f_N = \sum_{n=1}^{N} h_n$, $f = \sum_{n=1}^{\infty} h_n$. Из предложения 9.2.6 следует, что $f \in \bar{\Phi}$ и $I(f) = \lim I(f_n)$.

Пусть теперь последовательность $\{f_n\} \subset \Phi$ такова, что $f_n \downarrow 0$. Тогда (лемма 9.2.2) $f_1 - f_n \in \Phi$, и $(f_1 - f_n) \uparrow f_1$. Поэтому $I(f_1) = \lim I(f_1 - f_n)$ в $\mathcal{K}_0$ в соответствии с первой частью доказательства. С другой стороны, $\lim I(f_n) = \bigcap I(f_n) = A$ в $\mathcal{K}_0$, и $\lim CI(f_n) = C(A)$. Но CI аддитивно на Φ (предложение 9.2.2), так что $CI(f_1) = CI(f_1 - f_n) \oplus CI(f_n)$. Отсюда, устремляя $n \uparrow \infty$, получаем $CI(f_1) = C(A) \oplus CI(f_1)$, т. е. $C(A) = \{0\}$ и $A = \{0\} = I(0)$.

Наконец, пусть последовательность $\{f_n\} \subset \Phi$ такова, что $f_n \downarrow f$. Опять мы имеем $f_1 - f_n \in \Phi$ (лемма 9.2.2), $(f_1 - f_n) \uparrow (f_1 - f)$, так что $f_1 - f \in \Phi$ и $\lim I(f_1 - f_n) = I(f_1 - f)$, в силу первой части доказательства. Далее, $f = f_1 - (f_1 - f) \in \Phi$ (лемма 9.2.2) и поэтому $f_n - f \in \Phi$. Следовательно, $\lim I(f_n - f) = \{0\}$, так как $(f_n - f) \downarrow 0$. Поэтому из $I(f_n) \subset I(f) \oplus I(f_n - f)$ вытекает, что $\overline{\lim} I(f_n) \subset I(f)$, и таким образом, $\lim I(f_n) = I(f)$, поскольку $f_n \geqslant f$.

Более общим образом, справедлив следующий результат.

Лемма Фату — Лебега. *Пусть $\{f_n\} \subset \Phi$ — последовательность, доминируемая некоторой фиксированной функцией $g \in \Phi$. Тогда*

$$\overline{\lim} I(f_n) \subset I(\limsup f_n) \quad \text{и} \quad \underline{\lim} I(f_n) \supset I(\liminf f_n).$$

В частности, если $\{f_n\}$ поточечно сходится к f и доминируется фиксированной функцией $g \in \Phi$[1], *то $f \in \Phi$ и $\lim I(f_n) = I(f)$ в $\mathcal{K}_0$.*

Доказательство. В соответствии с леммой 9.2.1 и предложением 9.2.7 $\sup\{f_m, m \geqslant n\} \in \bar{\Phi}$, и из $\sup\{f_m, m \geqslant n\} \leqslant g \in \Phi$ вытекает, что $\sup\{f_m, m \geqslant n\} \in \Phi$. Следовательно, $I(\limsup f_n) = \lim I(\sup_{m \geqslant n} f_n)$. Поэтому из $I(f_n) \subset I(\sup_{m \geqslant n} f_m)$ следует, что $\overline{\lim} I(f_n) \subset I(\limsup f_n)$. Аналогично проводится доказательство для $\underline{\lim} I(f_n)$.

Лемма 9.2.8. *Для любых $f \in \Phi$ и $a \geqslant 0$ $f \wedge a \in \Phi$.*

[1] То есть $f_n \leqslant g$. — *Прим. ред.*

Доказательство. Пусть $\{K_n\} \subset \mathscr{K}(E)$ — такая последовательность, что $K_n \uparrow E$. Имеем $1_{K_n} \in \Phi_k \subset \Phi$, так что $f \wedge (a1_{K_n}) \in \Phi$ (лемма 9.2.1). Далее, $(f \wedge a1_{K_n}) \uparrow (f \wedge a)$, так что $(f \wedge a) \in \bar{\Phi}$ (предложение 9.2.7). Поскольку $f \wedge a \leqslant f \in \Phi$, отсюда следует, что $f \wedge a \in \Phi$.

Лемма 9.2.4. *Для любых $f \in \Phi$ и $a \geqslant b > 0$ индикаторы $1_{\{f>b\}}$ и $1_{\{a \geqslant f > b\}}$ псевдоинтегрируемы.*

Доказательство. Пусть $\beta > b \geqslant 0$. Положим $r_\beta = ((f \wedge \beta) - (f \wedge b))/(\beta - b)$. Тогда $r_\beta \in \Phi$ (леммы 9.2.3 и 9.2.2). При $\beta \downarrow b$ отсюда следует, что $r_\beta \uparrow 1_{\{f>b\}} \in \bar{\Phi}$ (предложение 9.2.7), а значит, $1_{\{f>b\}} \in \Phi$, если $b > 0$ (поскольку $1_{\{f>b\}} \leqslant (1/b) f$). Наконец, $1_{\{a \geqslant f > b\}} = 1_{\{f>b\}} - 1_{\{f>a\}} \in \Phi$ (лемма 9.2.2).

В качестве немедленного следствия получаем

Предложение 9.2.8. *Для всякого $f \in \bar{\Phi}$ положим*

$$r_n = \sum_{k=1}^{\infty} k2^{-n} 1_{\{(k+1)2^{-n} \geqslant f > k2^{-n}\}}.$$

Тогда $r_n \uparrow f$ в $\bar{\Phi}$, $\lim I(r_n) = I(f)$ в $\overline{\mathscr{K}_0}$ и

$$CI(f) = \lim_n \bigoplus_{k=1}^{\infty} (k2^{-n})\, CI\left(1_{\{(k+1)2^{-n} \geqslant f > k2^{-n}\}}\right).$$

$\mathscr{K}_0$-интегралы

Псевдоинтеграл I называется $\mathscr{K}_0$-*интегралом*, если $I(\varphi + \varphi') = I(\varphi) \oplus I(\varphi')$ для любых функций φ, $\varphi' \in C_{\mathscr{K}}^+$ с непересекающимися носителями. В случае когда произведение $\varphi\varphi' = 0$, носители $\operatorname{supp}\varphi$ и $\operatorname{supp}\varphi'$ не обязательно будут непересекающимися, но если мы возьмем какую-нибудь последовательность $\{\varepsilon_n\} \subset \mathbf{R}_+$, $\varepsilon_n \downarrow 0$, то функции $\varphi_n = (\varphi - \varepsilon_n)_+$ и $\varphi'_n = (\varphi' - \varepsilon_n)_+$ по-прежнему принадлежат $C_{\mathscr{K}}^+$ и их носители уже не пересекаются. Тогда из $I(\varphi_n + \varphi'_n) = I(\varphi_n) \oplus I(\varphi'_n)$, $\varphi_n \uparrow \varphi$ и $\varphi'_n \uparrow \varphi'$ вытекает, что $I(\varphi + \varphi') = I(\varphi) \oplus I(\varphi')$. Более общим образом, справедливо

Предложение 9.2.9. *Если I является $\mathscr{K}_0$-интегралом, f, $f' \in \bar{\Phi}$ и $\{f > 0\} \cap \{f' > 0\} = \varnothing$, то $I(f + f') = I(f) \oplus I(f')$.*

Доказательство. Как легко проверить, наше утверждение верно, когда f, $f' \in C_{\mathscr{K}}^+$, а также когда f, $f' \in \Phi_g$ или f, $f' \in \Phi_k$.

Если $f \in \bar{\Phi}$ и $I(f) = \omega$, то $I(f + f') = \omega = I(f) \oplus I(f')$. Предположим, что $f, f' \in \Phi$, и пусть $n \to \chi_n \leqslant f$ и $n \to \chi'_n \leqslant f'$ — две такие последовательности в Φ_k, что $I(f) = \lim I(\chi_n)$ и $I(f') = \lim I(\chi'_n)$ в $\mathscr{K}_0$. Если $\{f > 0\} \cap \{f' > 0\} = \varnothing$, то тем более $\chi_n \chi'_n = 0$, и $I(\chi_n + \chi'_n) = I(\chi_n) \oplus I(\chi'_n)$. Отсюда вытекает, что $I(f) \oplus I(f') = \lim I(\chi_n \oplus \chi'_n) \subset I(f + f')$ и, значит, $I(f) \oplus I(f') = I(f + f')$, поскольку I выпукло на Φ.

Следствие. *Если I является $\mathscr{K}_0$-интегралом, то для любого $f \in \Phi$*

$$I(f) = \lim_n \bigoplus_{k=1}^{\infty} (k2^{-n})\, I\left(1_{\{(k+1)\,2^{-n} \geqslant f > k2^{-n}\}}\right).$$

Доказательство. Пусть r_n определено так же, как и в предложении 9.2.8. Из предложений 9.2.6, 9.2.8 и 9.2.9 вытекает, что

$$I(r_n) = \bigoplus_{k=1}^{\infty} (k2^{-n})\, I\left(1_{\{(k+1)\,2^{-n} \geqslant f > k2^{-n}\}}\right)$$

и $I(f) = \lim I(r_n)$.

Если I — некоторый $\mathscr{K}_0$-интеграл на ЛКС-пространстве E, а $\bar{\Phi}$ — функциональное пространство, на которое I можно продолжить, то $\bar{\Phi}$ содержит борелевские функции на E и, в частности, индикатор 1_B любого множества B, принадлежащего борелевской σ-алгебре $\mathscr{B}(E) = \mathscr{B}$. Полагая $I(B) = I(1_B)$, мы получаем отображение I из $\mathscr{B}$ в $\bar{\mathscr{K}}_0$. При этом I будет возрастающим отображением на $\mathscr{B}$, $I(\varnothing) = \{0\}$, а из $B_n \uparrow B$ в $\mathscr{B}$ следует, что $I(B) = \lim I(B_n)$ в $\bar{K}_0$. Далее, из $B_n \downarrow B$ в $\mathscr{B}$ и $I(B_{n_0}) \neq \omega$ для некоторого целого n_0 вытекает, что $I(B) = \lim I(B_n)$ в $\mathscr{K}_0$. Кроме того, I аддитивно на $\mathscr{B}$ относительно сложения по Минковскому $\oplus$ (предложение 9.2.9), а потому и σ-аддитивно. Наконец, $I(K) \neq \omega$ для $K \in \mathscr{K}(E)$. Поэтому отображение I: $\mathscr{B} \to \bar{\mathscr{K}}_0$ можно назвать мерой Радона (со значениями в $\bar{\mathscr{K}}_0$).

Предложение 9.2.8 показывает, что $I(f)$ можно записать в виде

$$\int_E f(x)\, I(dx),$$

где интеграл понимается как предел интегралов от ступенчатых функций. Это приводит к мысли рассматривать абстрактные меры со значениями в $\mathscr{K}_0$.

9.3. АБСТРАКТНЫЕ МЕРЫ СО ЗНАЧЕНИЯМИ В $\mathcal{K}_0$

Пусть E — произвольное множество, наделенное некоторой σ-алгеброй $\mathcal{B}$. Отображение μ: $\mathcal{B} \to \mathcal{K}_0$ будем называть *мерой со значениями* в $\mathcal{K}_0$ или *$\mathcal{K}_0$-мерой*, если выполнены следующие три условия:

1) $B \subset B'$, B, $B' \in \mathcal{B} \Rightarrow \mu(B) \subset \mu(B')$;

2) $\mu(B \cup B') = \mu(B) \oplus \mu(B')$ для любых непересекающихся множеств B и B' из $\mathcal{B}$;

3) $B_n \downarrow \varnothing$ в $\mathcal{B} \Rightarrow \lim \mu(B_n) = \{0\}$ в $\mathcal{K}_0$.

Заметим, что множество $\mu(E)$ компактно и $\mu(B) \subset \mu(E)$ для всех $B \in \mathcal{B}$, так что *образ* $\mu(\mathcal{B})$ *относительно компактен в* $\mathcal{K}_0$. Из аксиом 1)—3) вытекают следующие соотношения:

$I(\varnothing) = \{0\}$;

$B_n \uparrow B$ или $B_n \downarrow B$ в $\mathcal{B} \Rightarrow \mu(B) = \lim \mu(B_n)$ в $\mathcal{K}_0$;

$\mu(\bigcup B_n) = \bigoplus \mu(B_n)$, если B_1, B_2, ... — попарно непересекающиеся множества из $\mathcal{B}$.

Докажем, например, непрерывность относительно монотонных последовательностей. Если $B_n \uparrow B$ в $\mathcal{B}$, то $(B \setminus B_n) \downarrow \varnothing$ и $\lim \mu(B \setminus B_n) = \{0\}$ в $\mathcal{K}_0$ (аксиома 3)). С другой стороны, $\mu(B) = \mu(B_n) \oplus \mu(B \setminus B_n)$ (аксиома 2)) и $\lim \mu(B_n) = \overline{\bigcup \mu(B_n)} \in \mathcal{K}_0$ (поскольку последовательность $\{\mu(B_n)\}$ возрастает и ограничена в $\mathcal{K}_0$). Поэтому $\lim \mu(B_n) = \mu(B)$ в силу непрерывности $\oplus$. Если $B_n \downarrow B$ в $\mathcal{B}$, то $(B_n \setminus B) \downarrow \varnothing$ и $\mu(B_n \setminus B) \downarrow \{0\}$. Отсюда $\mu(B_n) = \mu(B) \oplus \mu(B_n \setminus B) \downarrow \mu(B)$ в $\mathcal{K}_0$, и $\lim \mu(B_n) = \mu(B)$.

Аналогичным образом отображение μ из $\mathcal{B}$ в компактификацию $\overline{\mathcal{K}}_0$ называется *σ-конечной $\mathcal{K}_0$-мерой*, если существует такая последовательность $\{E_n\} \subset \mathcal{B}$, что $E_n \uparrow E$, $\mu(E_n) \in \mathcal{K}_0$, $\mu(B \cap E_n) \uparrow \mu(B)$ для любого $B \in \mathcal{B}$ и для любого n сужение μ_n отображения μ на E_n удовлетворяет указанным выше трем аксиомам.

Всякая σ-конечная $\mathcal{K}_0$-мера μ является возрастающей и σ-аддитивной, и из $B_n \uparrow B$ в $\mathcal{B}$ вытекает, что $\lim \mu(B_n) = \mu(B)$ в $\overline{\mathcal{K}}_0$.

Докажем только монотонную непрерывность. Если $B_n \uparrow B$ в $\mathcal{B}$ и $\mu(B) \neq \omega$, то

$$\mu(B) = \lim_m \mu(B \cap E_m) = \overline{\bigcup \mu(B \cap E_m)},$$

$$\mu(B_n) = \lim_m \mu(B_n \cap E_m) = \overline{\bigcup \mu(B_n \cap E_m)}$$

и поэтому

$$\lim \mu(B_n) = \overline{\bigcup \mu(B_n)} = \overline{\bigcup_n \overline{\bigcup_m \mu(B_n \cap E_m)}} =$$

$$= \overline{\bigcup_{m,n} \mu(B_n \cap E_m)} = \overline{\bigcup_m \mu(B \cap E_m)} = \mu(B).$$

Если $\mu(B) = \omega$, то ни для какого $K \in \mathscr{K}(\mathbf{R}^d)$ множество $\mu(B \cap E_m)$ не будет содержаться в K при достаточно больших m. Отсюда $\mu(B_n \cap E_m) \not\subset K$ для достаточно больших n и m, и $\mu(B_n) \not\subset K$, т. е. $\lim \mu(B_n) = \omega$.

Аналогично, если $B_n \downarrow B$ и $B_{n_0} \subset E_{m_0}$ для некоторых n_0 и m_0, то $\lim \mu(B_n) = \mu(B)$ в $\mathscr{K}_0$, т. е. $\mu(B) = \bigcap \mu(B_n)$.

Замечание. Всякая $\mathscr{K}_0$-мера μ является *возрастающей* относительно предпорядка $\geqslant$ на $\mathscr{K}_0$, определяемого так: $A \geqslant B$, если $A_B = A$. Действительно, из $B \subset B'$ вытекает, что $\mu(B') = \mu(B) \oplus \mu(B' \cap B^c)$, т. е. $\mu(B) \leqslant \mu(B')$.

Интеграл, соответствующий $\mathscr{K}_0$-мере

Пусть μ — некоторая $\mathscr{K}_0$-мера на $(E, \mathscr{B})$, а $\mathscr{E}_+$ — множество положительных ступенчатых функций на E (т. е. $f \in \mathscr{E}_+$, если $f = \sum x_i 1_{B_i}$, где $x_i \geqslant 0$, $x_i \neq x_j$ для $i \neq j$, а $\{B_i\} \subset \mathscr{B}$ — конечное разбиение пространства E). Для любой функции $f \in \mathscr{E}_+$ определим интеграл $\mu(f)$ соотношением

$$\mu(f) = \bigoplus x_i \mu(B_i).$$

Если f' — какая-нибудь другая функция из $\mathscr{E}_+$, $f' = \sum x'_j 1_{B'_j}$, то

$$f + f' = \sum_{i,j} (x_i + x'_j) 1_{B_i \cap B'_j} \quad \text{и} \quad \mu(f + f') = \bigoplus_{i,j} (x_i + x'_j) \mu(B_i \cap B'_j),$$

так что соотношение $(\lambda + \mu) K \subset \lambda K \oplus \mu K$ $(K \in \mathscr{K}_0)$ дает

$$\mu(f + f') \subset \mu(f) \oplus \mu(f').$$

Далее, если $ff' = 0$, то $f + f' = \sum x_i 1_{B_i} + \sum x'_j 1_{B'_j}$, так как $B_i \cap B'_j = \varnothing$ при $x_i x_j \neq 0$, и, таким образом, $\mu(f + f') = (\bigoplus x_i \mu(B_i)) \oplus (\bigoplus x'_j \mu(B'_j))$, т. е. $\mu(f + f') = \mu(f) \oplus \mu(f')$. Поэтому, используя методы классической теории интегрирования, меру μ можно продолжить на замкнутый относительно $\uparrow$ класс $\mathscr{I}_+$, порождаемый множеством $\mathscr{E}_+$, таким образом, чтобы выполнялись следующие условия:

$\mu(1_B) = \mu(B)$ $(B \in \mathscr{B})$;

$f_n \uparrow f$ или $f_n \downarrow f$ в $\mathscr{I}_+ \Rightarrow \lim \mu(f_n) = \mu(f)$;

μ — возрастающее выпуклое отображение на $\mathscr{I}_+$;

$\mu(f+f')=\mu(f)\oplus\mu(f')$, если f, $f'\in\mathscr{I}_+$ и $ff'=0$. Кроме того, справедливы лемма Фату — Лебега и теорема о мажорируемой сходимости.

Заметим, что мера μ аддитивна тогда и только тогда, когда она принимает значения в $C(\mathscr{K}_0)$, поскольку из справедливого при любом n представления $1_B=(1/n)\sum_1^n 1_B$ и μ-аддитивности вытекает, что $\mu(B)=(1/n)\mu(B)^{\oplus n}$, т. е. множество $\mu(B)$ безгранично делимо относительно $\oplus$, а значит, $\mu(B)\in C(\mathscr{K}_0)$.

Предположим теперь, что E — ЛКС-пространство, $\mathscr{B}$ — его борелевская σ-алгебра, $\{E_n\}\subset\mathscr{K}(E)$ — такая последовательность, что $E_n\uparrow E$ и $E_n\subset\overset{\circ}{E}_{n+1}$, а μ — такая σ-конечная $\mathscr{K}_0$-мера на $\mathscr{B}$, что $\mu(E_n)\in\mathscr{K}_0$ для любого n, т. е. $\mu(K)\neq\omega$, каково бы ни было $K\in\mathscr{K}(E)$ (σ-конечная мера с таким свойством называется *регулярной*). У всякой функции $\varphi\in C^+_{\mathscr{K}}$ носитель содержится в некотором E_n, и интеграл $\mu(\varphi)$ существует и принадлежит $\mathscr{K}_0$. Отображение $\varphi\to\mu(\varphi)$ является возрастающим и выпуклым (а потому непрерывным, предложение 9.2.2) на $C^+_{\mathscr{K}}$, т. е. существует такой $\mathscr{K}_0$-интеграл I, что $I(\varphi)=\mu(\varphi)$, $\varphi\in C^+_{\mathscr{K}}$. Этот $\mathscr{K}_0$-интеграл I можно продолжить на $\bar{\Phi}\supset\mathscr{I}_+$. Сохраним для этого продолжения (принимающего значения в $\bar{\mathscr{K}}_0$) то же обозначение I. Тогда, как нетрудно убедиться, $I(f)=\mu(f)$ для любой функции $f\in\mathscr{I}_+$. Более точно, справедливо

Предложение 9.3.1. *Пусть E — ЛКС-пространство и $\mathscr{B}$ — его борелевская σ-алгебра. Тогда каждой регулярной σ-конечной мере μ на $\mathscr{B}$ со значениями в $\bar{\mathscr{K}}_0$ соответствует единственный $\mathscr{K}_0$-интеграл I, такой, что $\mu(B)=I(1_B)$ для любого $B\in\mathscr{B}$, и обратно. При этом для любой функции $f\in\Phi$ существуют такие функции f_1 и $f_2\in\mathscr{I}_+$, что $f_1\leqslant f\leqslant f_2$ и $\mu(f_1)=\mu(f_2)$. Кроме того, I является C-интегралом тогда и только тогда, когда μ принимает значения в $C(\mathscr{K}_0)$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ[1]

Альфсен (E. M. Alfsen)
(1971) Compact convex sets, and boundary integrals, Springer, Berlin.
Ауманн (R. J. Aumann)
(1965) Integrals of set valued functions, *J. Math. An. Appl.*, **12**, 1—12.
Ахмад (S. Ahmad)
(1965) Éléments aléatoires dans les espaces vectoriels topologiques, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, B, **II**, № 2, 95—135.
Берж (C. Berge)
(1959) Espaces topologiques et fonctions multivoques, Dunod, Paris.
Бляшке (W. Blaschke)
(1936/37) Vorlesungen über integral Geometrie, Teubner, Leipzig.
Боннезен, Фенхель (T. Bonnesen, W. Fenchel)
(1934) Theorie der konvexen Körper, Springer, Berlin.
Бразерс (J. E. Brothers)
(1966) Integral geometry in homogeneous spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **124**, 480—517.
Бурбаки (N. Bourbaki)
(1965a) Общая топология. Основные структуры, «Наука», М., 1968.
(1965b) Интегрирование. Меры, интегрирование мер, «Наука», М., 1967.
Валадье (M. Valadier)
(1970) Contribution à l'analyse convexe, Thesis Paris.
Ван Кутсем (B. Van Cutsem)
(1971) Éléments aléatoires à valeurs convexes compactes, Thesis, Grenoble.
Вейсман (R. A. Wijsman)
(1964) Convergence of sequences of sets, cones and functions. I, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **70**, 186—188.
(1966) Convergence ... II, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **123**, 32—45.
Гельфанд И. М., М. И. Граев, Н. Я. Виленкин
(1962) Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений («Обобщенные функции», вып. 5), Физматгиз, М.
Датка (R. Datka)
(1970) Measurability properties of set valued mappings in Banach spaces, *SIAM J. Control*, **8**, № 2, 226—238.
Дебрё (G. Debreu)
(1967) Integration of correspondences. I, *5th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, Vol. II, 351—372.

[1] Для переводных книг в круглых скобках указан год выхода в свет оригинального издания, а год выхода перевода приводится, как обычно, в конце описания. Если последний меньше года в круглых скобках, то это означает, что перевод делался с более раннего издания, чем то, на которое ссылается автор. — *Прим. перев.*

Деллашери (C. Dellacherie)
(1969) Ensembles aléatoires, *Séminaire de Probabilités*, Vol. III, № 88, Springer, 97—114.
Дельтейль (R. Deltheil)
(1926) Probabilités géometriques, Gauthier-Villars, Paris.
Дельфинер (P. Delfiner)
(1970) A generalization of the concept of size, *3rd International Congress for Stereology*, Bern.
(1971) Étude morphologique des milieux poreux, et automatisation des mesures en lames minces, Thesis, Nancy.
Жоли (J. L. Joly)
(1970) Une famille de topologies et de convergences sur l'ensemble des fonctionelles convexes, Thesis, Grenoble.
Иосида (K. Yosida)
(1968) Функциональный анализ, «Мир», М., 1967.
Кендалл Д. (D. G. Kendall)
(1973) Foundations of a theory of random sets, *Stochastic Geometry* (E. F. Harding, D. G. Kendall, eds), John Wiley & Sons, New York, 322—376.
Кендалл М., Моран (M. G. Kendall, P. A. P. Moran)
(1963) Геометрические вероятности, «Наука», М., 1972.
Кляйн, Серра (J. C. Klein, J. Serra)
(1971) The texture analyzer, *J. Microsc.*, **95**, Part 2, 349—356.
Ландкоф Н. С.
(1966) Основы современной теории потенциала, «Наука», М.
Майкл (E. Michael)
(1951) Topologies on spaces of subsets, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **71**, 152—182.
Майлз (R. E. Miles)
(1964) Random polygons determined by random lines in a plane, *Proc. Nath. Acad. Sci. U. S. A.*, **52**, 901—907, 1157—1160.
(1969) Poisson flats in euclidean space, *Adv. Appl. Prob.*, **1**, 211—237.
(1970) A synopsis of Poisson flats in euclidean spaces, *Изв. АН Армянской ССР*, сер. матем., **3**, 263—285.
(1971) Poisson flats in euclidean spaces. II, *Adv. Appl. Prob.*, **3**, 1—43.
(1972) The random division of space, *Suppl. Adv. Appl. Prob.*, 243—266.
Матерон (G. Matheron)
(1967) Éléments pour une théorie des milieux poreux, Masson, Paris, 1967.
(1969) Théorie des ensembles aléatoires, *Cahiers du Centre de Morph. Math.*, Fasc. 4, Fontainebleau.
(1972) Ensembles aléatoires, ensembles semi-markoviens et polyèdres poissoniens, *Adv. Appl. Prob.* (December).
Мейер (P. A. Meyer)
(1966) Вероятность и потенциалы. «Мир», М., 1973.
Моран (P. A. P. Moran)
(1966) A note on recent research in geometric probability, *J. Appl. Prob.*, **3**, 453—463 [Русский перевод: Заметка о последних исследованиях по геометрическим вероятностям, *в книге*: М. Кендалл, П. Моран, Геометрические вероятности, «Наука», М., 1972.]
(1969) A second note on recent research in geometric probability, *Adv. Appl. Prob.*, **1**, 73—89. [Русский перевод: Вторая заметка о последних исследованиях по геометрическим вероятностям, *в книге*: М. Кендалл, П. Моран, Геометрические вероятности, «Наука», М., 1972.]
Моро (J. J. Moreau)
(1966/67) Fonctionelles convexes, College de France.

Моско (U. Mosko)
(1967) Convergence of convex sets and of solutions of variational inequalities, *Adv. Math.*, **3**, № 4, 510—585.

Мур, Уаймэн, Джозеф (G. A. Moore, L. L. Wyman, H. M. Joseph)
(1968) Comments on the possibilities of performing quantitative metallographic analysis with a computer in quantitative microscopy, McGraw-Hill, New York.

Нахбин (L. Nachbin)
(1965) The Haar integral, Van Nostrand, Princeton, N. J.

Невё (J. Neveu)
(1964) Математические основы теории вероятностей, «Мир», М., 1969.

Рокафеллар (R. T. Rockafellar)
(1968) Integrals which are convex functionals, *Pacific J. Math.*, **24**, № 3, 525—539.
(1970) Выпуклый анализ, «Мир», М., 1973.

Сантало (L. A. Santalo)
(1953) Введение в интегральную геометрию, ИЛ, М., 1956.

Серра (J. Serra)
(1969) Introduction à la morphologie mathématique, *Cahiers du Centre de Morph. Math.*, Fasc. 3, Fontainebleau.

Стока (M. I. Stoka)
(1967) Geometrie integrala, Bucharest.

Фара, Шайдеггер (H. D. Fara, A. E. Scheidegger)
(1961) *J. Geophys. Res.*, **66**, № 10 (October), 3279—3284.

Федерер (H. Federer)
(1969) Geometric measure theory, Springer, Berlin.

Феллер (W. Feller)
(1966) Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 1, 2, «Мир», М., 1967.

Хаас, Матерон, Серра (A. Haas, G. Matheron, J. Serra)
(1967) Morphologie mathématique et granulométries en place, *Ann. Mines*, **11**, 736—753; **12**, 767—782.

Хадвигер (H. Hadwiger)
(1957) Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии, «Наука», М., 1966.

Халмош (P. Halmos)
(1950) Теория меры, ИЛ, М., 1958.

Хёрмандер (L. Hörmander)
(1954) Sur la fonction d'appui des ensembles convexes dans un espace localement convexe, *Ark. Math.*, **3**, № 12, 181—186.

Хукухара (M. Hukuhara)
(1967) Sur l'application semicontinue dont la valeur est un convexe compact, *Funkcialoj Ekvacioj*, **10**, 43—66.

Шоке (G. Choquet)
(1953/54) Theory of capacities, *Ann. Inst. Fourier*, **5**, 131—295.
(1960) Le théorème de représentation intégrale dans les ensembles convexes compacts, *Ann. Inst. Fourier*, **10**, 333—444.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

УВАЖАЕМЫЙ ЧИТАТЕЛЬ!

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим присылать по адресу: 129820, Москва И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., д. 2, издательство «Мир».

ИБ № 951

Жорж Матерон

СЛУЧАЙНЫЕ МНОЖЕСТВА
И ИНТЕГРАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Редактор В. Авербух
Художник Н. Вовк
Художественный редактор В. Шаповалов
Технический редактор Е. Потапенкова
Корректор Е. Литвак

Сдано в набор 27.12.77. Подписано к печати 24.04.78.
Формат 60×90$^{1}/_{16}$. Бумага типографская № 2. Гарнитура латинская. Печать высокая. Объем 10,00 бум. л., 20,00 печ. л., уч.-изд. л. 18,45.
Тираж 7 500 экз. Зак. № 928. Цена 1 р. 50 к.

Издательство «Мир»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств полиграфии и книжной торговли. 198052, Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29