ANNALES DES MINES

DANS CE NUMÉRO : D-146

RECHERCHE D'OPTIMUM DANS LA RECONNAISSANCE ET LA MISE EN EXPLOITATION DES GISEMENTS MINIERS

●

L'ÉVOLUTION RÉCENTE DE LA PRODUCTION MINIÈRE MONDIALE

●

LA VIE DES ÉQUIPEMENTS

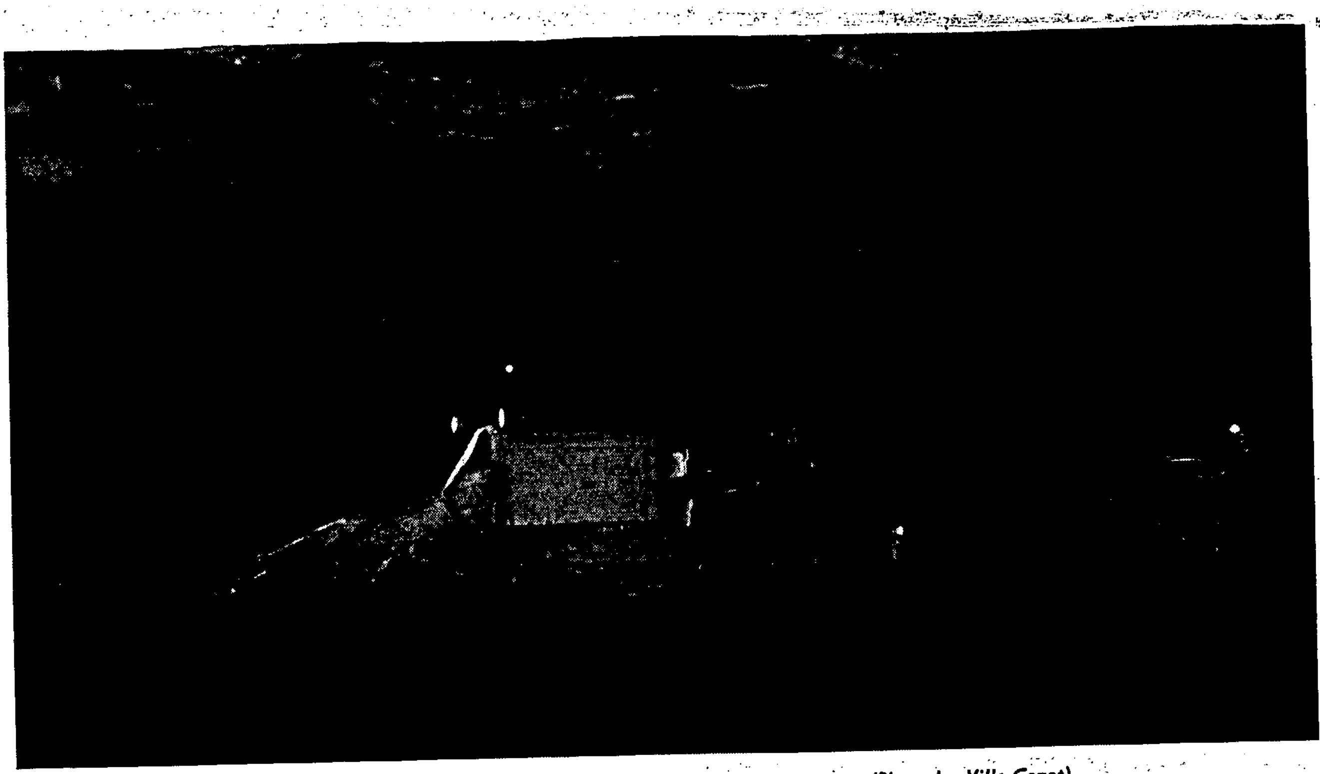
●

ACCIDENT DE SAINT-FLORENT DU 1er FÉVRIER 1963

REVUE MENSUELLE
10 F France
12 F Étranger

JUIN 1963

Revue fondée en 1795



Chargeuse et camion navette dans une mine de fer de Lorraine. (Photo Joy-Ville-Gozet)

Recherche d'optimum dans la reconnaissance et la mise en exploitation des gisements miniers

par G. MATHERON et Ph. FORMERY [1]

Dans les deux premières parties de cette étude, on a examiné le problème de l'optimisation de la reconnaissance dans le cas d'un gisement dont les réserves sont parfaitement connues, puis dans le cas où, malgré une erreur possible dans l'estimation des réserves, la rentabilité est considérée comme assurée. La troisième partie, que l'on trouvera ci-après, réintroduit le risque de ruine et pose le problème de l'arrêt des recherches : à l'issue d'une phase de reconnaissance, convient-il de décider l'abandon ou la mise en exploitation immédiate, ou encore de faire des recherches supplémentaires? Le critère adopté consiste à choisir celle des trois décisions qui donne la meilleure espérance mathématique pour le bénéfice futur.

Dans une quatrième et dernière partie, on traite numériquement un cas particulier, en appliquant successsivement les méthodes des trois premières parties. On dégage la conclusion intéressante que le niveau optimum de la reconnaissance est essentiellement lié au choix de la meilleure dimension de l'usine de traitement chimique.

(1) G. MATHERON, Ingénieur au corps de3 Mines en service détaché au Bureau de Recherches Géologiques et Minières (B. R. G. M.)
Ph. FORMERY, Ingénieur civil des Mines (B. R. G. M.).

CHAPITRE III

Optimisation sequentielle et arrêt des recherches

1. Le problème de l'arrêt des recherches

Il convient maintenant de réintroduire le risque de ruine. Dans le chapitre précédent, nous avons admis que la rentabilité du gisement avait pu être établie, et nous avons déterminé le meilleur niveau de la reconnaissance, en tenant compte seulement de la perte entraînée par un mauvais dimensionnement des installations. Il s'agissait d'un optimum purement technique, ayant valeur absolue, et défini sans actualisation. Le problème que nous abordons maintenant présente la plus haute importance pour la pratique de la recherche minière. Il se résume dans la question essentielle : *A quel moment convient-il d'arrêter les recherches, et de prendre une décision — positive ou négative — quant à la mise en exploitation du gisement* ? Le problème ne peut plus se formuler dans l'absolu. On doit se contenter d'analyser les éléments qui commandent la décision relativement au passage d'une phase de la recherche à la phase suivante. Reprenant le schéma séquentiel de la figure 1,

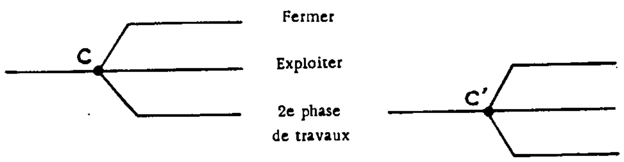


Fig. 1

supposons qu'une première tranche TR_1 de travaux de reconnaissance ait été exécutée. Elle a fourni des indications chiffrées sur le tonnage et la teneur du gisement reconnu, et les méthodes de la géostatistique ont permis de fixer la précision avec laquelle ces informations représentent la réalité. Une étude d'exploitabilité, d'autre part, a pu définir pour quels tonnages et quelles teneurs une exploitation pouvait être payante. Au point crucial C de la figure 1, auquel on est ainsi parvenu, trois décisions sont possibles :

1. On décide de ne pas exploiter et on abandonne le gisement (on ferme);

2. On décide d'exploiter tout de suite (1)*;

3. On décide de faire une deuxième tranche TR_2 de travaux de reconnaissance.

Si l'on adopte la troisième décision, on se retrouve, après l'exécution des TR_2, en un nouveau point crucial C', où, théoriquement, les trois décisions sont à nouveau possibles, mais peuvent être prises à la lumière d'une information améliorée. Dans de nombreux cas, en pratique, il sera hors de question, en réalité, d'envisager une troisième phase TR_3 de recherches. Nous nous limiterons, dans cette étude, au cas où le seul choix possible, en C', consistera à mettre, ou non, le gisement en exploitation.

Ce problème séquentiel se formule, nécessairement, de manière discontinue. En particulier, la deuxième phase de recherche TR_2, envisagée dans la troisième décision, sera imposée par la technologie. Par exemple, si l'on a reconnu un gisement filonien par traçages équidistants de 60 mètres, la deuxième phase consistera à tracer des sous-niveaux intermédiaires, de manière à ramener à 30 mètres la relevée entre niveaux. Ou bien, pour un gisement stratiforme reconnu par sondages à maille carrée, elle consistera à centrer la maille, c'est-à-dire à doubler le nombre des sondages utiles. Cette deuxième phase ne dépend donc pas d'un paramètre variant de façon continue, et dont la valeur pourrait être choisie arbitrairement (2).* Elle est imposée.

(1)* Si l'on n'actualise pas, il est indifférent d'exploiter tout de suite ou plus tard. Si l'on actualise, il est préférable d'exploiter tout de suite, sauf dans le cas où les cours seraient aujourd'hui, à un niveau anormalement bas, et où l'on espérerait leur redressement dans les années à venir. Comme nous ne prenons pas en compte, dans cette étude, la variabilité des cours, nous n'envisageons pas non plus la solution d'attente, dont la formulation sur des bases réalistes serait assez délicate.

(2)* Nous supposons, essentiellement, que la reconnaissance du gisement a été *exhaustive*. On a pu se tromper dans l'évaluation du tonnage et de la teneur, mais la totalité du gisement a été reconnue. Les travaux de reconnaissance ont débordé sur les limites de la minéralisation dans l'espace, et il n'y a pas de problème d'extension. Il ne serait d'ailleurs pas possible de traiter, mathématiquement, un problème d'extension. Un filon peut se prolonger à l'aval du der-

On aura parfois l'illusion qu'un choix continu est possible. Par exemple, ayant reconnu un gisement filonien puissant à trois niveaux, et échantillonné ces trois niveaux par des sondages percutants horizontaux, pris du toit au mur de la formation, on pourrait s'imaginer améliorer l'information disponible en resserrant la maille des percutants dans les niveaux déjà tracés sans faire de travaux miniers supplémentaires. La maille des percutants apparaîtrait ainsi comme un paramètre à peu près continu. Mais on sait [théorème du statisticien déçu (1)*] que l'amélioration apportée par des percutants supplémentaires serait presque toujours négligeable, la plus grande partie de la variance d'estimation provenant de l'extension des sections (supposées connues) à leurs tranches d'influence à trois dimensions, extension sur laquelle le resserrement de la maille des percutants reste sans action.

La géostatistique permet de calculer la précision avec laquelle les réserves sont connues à l'issue des TR_1, mais elle permet aussi de prévoir à l'avance la nouvelle précision avec laquelle elles seront connues lorsque l'on aura exécuté la deuxième phase TR_2, telle que la technologie l'impose. Pour formuler le problème séquentiel, il convient d'attribuer une valeur économique au supplément d'information apporté par les TR_2, et de le comparer au prix de revient des TR_2 eux-mêmes. Parmi les trois décisions possibles, on devra choisir celle qui conduit à la plus grande valeur probable du bénéfice futur (2)* en aval du point C (c'est-à-dire, sans tenir compte des dépenses antérieures, mais en tenant compte, pour la troisième décision, du prix de revient de la deuxième tranche TR_2, puisqu'en C celle-ci n'est pas encore exécutée). Mais la notion de valeur probable n'est pas immédiate. Nous devrons la définir avec soin, et préciser les limites de l'artifice probabiliste. C'est seulement ensuite que nous aborderons l'étude du problème séquentiel lui-même, en traitant successivement le cas d'un gisement tout ou rien, et le cas où la relation tonnage-teneur intervient effectivement.

nier niveau reconnu, et la géologie peut apporter des arguments en faveur de cette extension : mais ces arguments ne sont pas chiffrables. Ni la géostatistique, ni aucun artifice probabiliste ne peuvent remplacer une information manquante. Dans le cas des filons, il est, en fait, très rare que les travaux miniers atteignent la terminaison aval. Les calculs de rentabilité, que l'on fait en pratique, ne tiennent pas compte d'un aval possible au-delà du dernier niveau. Le tonnage effectivement reconnu doit justifier, à lui seul, la mise en exploitation. Nous ferons exactement de même dans notre analyse théorique.

(1)* Traité de géostatistique appliquée, tome I.

(2)* Nous laisserons volontairement ouverte la question de savoir si le bénéfice doit, ou non, être actualisé. En économie collectiviste, on n'actualiserait sans doute pas. En économie concurrentielle, le raisonnement de la première partie s'applique encore, au moins théoriquement : une grande société, se fixant comme objectif de produire chaque année une quantité donnée de métal au moindre prix de revient, devrait rechercher à minimiser la somme des dépenses consenties chaque année, et qui comprennent des dépenses d'exploitation, des investissements, pour remplacer les gisements venus à épuisement cette année là, et des travaux de recherche, pour préparer le remplacement des gisements qui s'épuiseront les années suivantes. Ce point de vue conduirait, en bonne logique, à adopter l'expression non actualisée du bénéfice dans l'optimisation séquentielle des recherches (corrélativement, d'ailleurs, le paramètre b ne correspondrait plus au prix du marché, mais à un prix interne, défini par la société de manière, précisément, à optimiser son programme de production global).

Ce raisonnement nous avait paru péremptoire, lors de l'étude de l'optimisation technique faite dans les deux premières parties, parce qu'il conduisait à une description correcte du comportement réel des exploitants. Dans l'optimisation séquentielle, au contraire, le comportement réel des exploitants, en économie concurrentielle, correspond à un taux non nul. On cherche, en effet, un critère de décision quant à une mise en exploitation éventuelle, et — en économie concurrentielle — on ne décide d'exploiter un gisement que si la valeur actualisée du bénéfice futur doit être positive. Nous nous servirons donc de l'expression (9), correspondant à un taux i non nul. Il sera extrêmement facile de passer au cas $i = 0$ en remplaçant, dans les résultats obtenus, les exponentielles e^{-iN} par l'unité, et les expressions $\frac{1 - e^{-iN}}{i}$ par N.

Les économistes attachent, avec raison, une grande importance au choix du critère adopté. Outre l'expression (9), actualisée ou non, du bénéfice futur, bien d'autres critères peuvent être envisagés, conduisant à des pratiques plus ou moins malthusiennes et à diverses variétés d'écrémage. Par exemple, le point de vue strictement capitalistique se fixerait comme objectif de faire rendre à chaque action le plus fort revenu possible, et conduirait à maximiser le rapport $\frac{B_i}{I}$. De même, le point de vue, un peu naïf, du technicien pur conduirait à minimiser le prix de revient du kilo de métal, etc. D'une manière générale, LESOURNE (J.), (in « Technique économique de gestion industrielle », Dunod, Paris), indique que les rapports, tels que $\frac{B}{I}$, constituent de mauvais critères économiques. Dans le problème qui nous occupe, le seul choix possible se limite donc à faire, ou non, $i = 0$ dans l'expression (9) du bénéfice.

2. L'artifice probabiliste

On sait que le tonnage ou la teneur d'un gisement ne constituent en aucune façon des variables aléatoires (1)*. La teneur d'un gisement, par exemple, est un phénomène naturel physiquement bien déterminé, et unique, même si les informations disponibles ne permettent pas de la connaître exactement. La question : combien y a-t-il de chances pour que la teneur de ce gisement dépasse 10 % est dépourvue de signification ? Si la teneur est 11 %, il y a, si l'on veut, 100 chances sur 100 pour qu'elle soit supérieure à 10 %, et zéro si elle est égale à 9 %. Mais comme, précisément, on ne sait pas

(1)* On peut même dire que c'est là le point de départ de la géostatistique.

si la teneur réelle est 9 % ou 11 %, une telle proposition est purement formelle (2)*. Cependant, pour développer le raisonnement séquentiel, nous avons besoin de définir des valeurs probables, et cela ne peut être fait qu'en assimilant certaines grandeurs à des variables aléatoires. Toute probabilisation est artificielle, en ce domaine, et entraîne une très large part d'arbitraire. Pour diminuer cet arbitraire, nous devons réduire les postulats probabilistes au strict nécessaire. Nous ne probabiliserons donc ni les teneurs, ni leurs estimations, mais seulement les erreurs, c'est-à-dire la différence entre l'estimation et la valeur vraie. Pour abréger le langage, nous allons traiter le cas des teneurs. Mais les raisonnements auront un caractère général, et s'appliqueront aussi bien à un tonnage ou à une relation teneur-tonnage. Nous définirons, en premier lieu, la notion géostatistique de variance d'estimation : cette notion possède une signification physique objective, et n'implique aucun artifice probabiliste, de même que la relation d'additivité que nous établirons ensuite. Enfin, nous introduirons le moins d'arbitraire possible en probabilisant les erreurs, de manière à donner un sens à la notion de valeur probable.

2. a. *La notion géostatistique de variance d'estimation*

Pour faire comprendre la notion géostatistique de variance d'estimation, imaginons un gisement G, de teneur moyenne inconnue m, reconnue par des travaux miniers. On imaginera, par exemple, G sous la forme de la portion d'un gisement filonien situé à l'amont du dernier niveau tracé. Pour estimer m, on dispose de la teneur z donnée par l'échantillonnage des travaux miniers. Dans un tel problème, la teneur m est unique et physiquement déterminée. Ce n'est pas une variable aléatoire. Mais il en est exactement de même de z, puisque l'implantation des travaux miniers, relativement au panneau G à estimer, n'est pas quelconque, mais unique et bien déterminée. Une loi de probabilité de z à m fixé n'a pas plus de sens qu'une loi de m à z fixé. Ni l'une ni l'autre de ces lois n'existe.

Pour lever la difficulté, la géostatistique rend leur mobilité à m et z simultanément, en supposant que le gisement G est un panneau extrait d'un grand gisement K, dans lequel est supposée régner la loi de dispersion intrinsèque (1)* définie par le variogramme expérimental observé dans les travaux miniers. Il est inutile de faire intervenir une loi de distribution, au sens statistique, des teneurs dans le gisement K. Si le panneau G se déplace dans K, en entraînant les travaux miniers qui lui sont liés, les deux teneurs m et z deviennent des variables régionalisées. On définit alors la variance d'estimation de m par z, comme la valeur moyenne (2)*, dans le champ K, de l'expression $(m - z)^2$.

$$D^2(m - z) = \frac{1}{V_K} \iiint_K (m - z)^2 dv \tag{44}$$

V_K désignant le volume du gisement K. Cette variance est calculable à partir du variogramme, et le caractère intrinsèque de la loi de dispersion nous garantit qu'elle ne dépend pas de la forme et des dimensions de K. Elle s'exprime par des intégrations effectuées sur le variogramme et dans le panneau G ou dans les travaux miniers. On notera bien que cette définition, purement géométrique, n'implique aucune référence à une loi de probabilité hypothétique. La variance d'estimation possède une signification physique objective au même titre que le variogramme qui sert à son calcul.

2. b. *La relation d'additivité*

Imaginons, maintenant, qu'après une première phase de travaux de reconnaissance, qui nous a donné une première estimation z, nous décidions d'effectuer une deuxième phase de recherche. Ces nouveaux travaux ne sont pas implantés de façon quelconque par rapport aux premiers. La teneur u qu'ils vont nous indiquer est donc tout aussi unique, et physiquement déterminée que m et z, et devient, en même temps que m et z, une variable régionalisée dans le champ K. Par

(2)* La teneur pourrait se probabiliser moyennant certains postulats arbitraires. Il faudrait, en premier lieu, définir, dans l'ensemble des gisements réels, des classes d'équivalence (c'est le problème de la classification des gîtes minéraux, sur lequel les métallogénistes discutent à perte de vue), considérer l'ensemble des gisements appartenant à la même classe C que le gisement étudié, définir un procédé de tirage au sort, et admettre que le gisement étudié peut être considéré comme ayant été tiré au sort dans la classe C suivant ce procédé. La teneur devient alors une variable aléatoire : mais sa loi de probabilité dépend étroitement de la définition des classes d'équivalence. Suivant la définition adoptée, on pourrait obtenir à peu près n'importe quelle loi. On peut se demander d'ailleurs, si les critères géologiques peuvent conduire à autre chose qu'à des analogies non transitives (A analogue à B et B analogue à C n'entraînant pas A analogue à C). Dans ce cas, les classes d'équivalence ne seraient pas logiquement définissables. Peut-être est-ce là l'origine des difficultés inextricables rencontrées par les métallogénistes dans la classification des gisements minéraux.

(1)* Pour les notions de loi de dispersion intrinsèque et de variogramme, cf. « Traité de géostatistique appliquée », tome I, ch. IV.

(2)* On remarquera que (44) représente aussi la variance d'estimation de z par m : cela est naturel, puisque les variables régionalisées m et z jouent des rôles symétriques.

des relations analogues à (44), on définit les variances d'estimation, σ_z^2 et σ_u^2, de m par z et u, et la covariance σ_{uz} des erreurs $(m - z)$ et $(m - u)$:

$$\begin{cases} \sigma_z^2 = D^2(z - m) \\ \sigma_u^2 = D^2(u - m) \\ \sigma_{uz} = E(m - z)(m - u) \end{cases}$$

Le symbole E représente ici une valeur moyenne dans le champ K. Tout comme l'expression (44), ces expressions ne dépendent en réalité que du variogramme et de la géométrie du panneau et des travaux miniers.

Lorsque les travaux de deuxième phase sont exécutés, leur teneur u est combinée avec la teneur z de la première phase pour donner une nouvelle estimation z' de la moyenne m :

$$z' = \lambda u + (1 - \lambda)z$$

Le paramètre λ est déterminé par la méthode habituelle du krigeage, qui consiste à minimiser la variance d'estimation de m par z'. Cette variance $\sigma_{z'}^2$:

$$\sigma_{z'}^2 = \frac{1}{V} \iiint_K (z' - m)^2 dv = \lambda^2\sigma_u^2 + 2\lambda(1 - \lambda)\sigma uz + (1 - \lambda)^2\sigma_z^2$$

est minimale pour

$$\lambda = \frac{N}{D} = \frac{\sigma_z^2 - \sigma_{uz}}{\sigma_z^2 + \sigma_u^2 - 2\sigma_{uz}}$$

Le dénominateur D de cette expression n'est autre que $D^2(z - u)$, c'est-à-dire la variance d'estimation de u par z. Avec cette valeur du paramètre λ de krigeage, la variance d'estimation de m par z' prend la forme :

$$\sigma_{z'}^2 = \sigma_z^2 - \lambda N = \sigma_z^2 - \lambda^2 D \tag{45}$$

Mais l'estimateur z' étant lui-même une variable régionalisée dans K, on peut définir la variance d'estimation σ'^2 de z' par z :

$$\sigma'^2 = D^2(z - z')$$

On obtient immédiatement :

$$\sigma'^2 = \lambda^2 D^2(z - u) = \lambda^2 D$$

et la relation (45) se met sous la forme :

$$\sigma'^2 = \sigma_z^2 - \sigma_{z'}^2 \tag{46}$$

La variance de l'estimation que l'on peut faire, à l'aide du résultat z de la première phase de reconnaissance, du résultat z' que l'on obtiendra par l'ensemble des deux phases, lorsque la deuxième phase aura été réalisée, apparaît comme la différence entre les variances d'estimation de m avant et après la deuxième phase. Cette variance σ'^2 représente exactement le gain d'information apporté par les nouveaux travaux de reconnaissance.

Cette relation (46), ou relation d'additivité, nous sera précieuse dans la formulation du raisonnement séquentiel. Elle est absolument générale, et résulte d'un processus régionalisé de krigeage. En particulier, elle possède une signification physique objective, et n'implique aucune référence à un modèle probabiliste plus ou moins arbitraire.

2. c. *La probabilisation des erreurs*

Nous n'avons encore introduit aucun artifice probabiliste, et toutes les variances que nous avons définies ont une signification objective. En vue de définir une notion de valeur probable, en limitant au maximum la part de l'arbitraire, nous ne probabiliserons que les erreurs. Seules, les différences du type $(m - z)$ seront assimilées à des variables (1)* aléatoires, et traitées comme telles.

A une variable telle que :

$$y = m - z$$

assimilée à une variable aléatoire, nous attribuerons une loi de probabilité, définie par une densité de fréquence $f(y)dy$. La forme mathématique de la fonction $f(y)$ est, *a priori*, indéterminée, mais la variance et la moyenne de y sont, elles, parfaitement définies : la variance est nécessairement égale à la variance d'estimation σ_z^2 définie plus haut, et la valeur moyenne ne peut être que nulle (2)*

$$\begin{cases} E(y) = 0 \\ D^2(y) = \sigma_z^2 \end{cases} \tag{47}$$

Une fois fixées la valeur moyenne et la variance de la loi $f(y)$, on s'aperçoit, en traitant des exemples numériques, que la forme mathématique de cette loi n'a que peu d'influence sur les résultats utiles. En pratique, et pour des raisons de commodité, nous utiliserons tantôt une loi normale et tantôt une loi lognormale.

(1)* Le postulat implicite consiste ici à considérer l'ensemble des gisements reconnus avec la même variance d'estimation σ_z^2, et à tirer l'un d'entre eux au sort : la différence $m - z$ entre sa teneur réelle et l'estimation déduite des travaux de reconnaissance est une variable aléatoire de variance σ_z^2: la classe d'équivalence est définie sans ambiguïté, et la part laissée à l'arbitraire est très réduite.

(2)* Il suffit, pour le voir, d'imaginer un champ K assez étendu. Dans un tel champ, les variables régionalisées m et z ont même valeur moyenne, et par suite $(m - z)$ a une valeur moyenne nulle. Dans le cas où G est un panneau sélectionné pour sa richesse, on n'oubliera pas que l'estimateur z doit résulter d'un krigeage, tenant compte aussi bien des données extérieures pauvres que des données intérieures riches.

Ceci étant, la teneur réelle m, inconnue, mais unique, du gisement peut se mettre sous la forme de la somme :

$$m = z + y$$

de la quantité fixe z, numériquement connue, et de la variable aléatoire y, dont la loi de probabilité est $f(y)$. Par suite, et bien qu'elle ne soit pas réellement probabilisable, il est légitime de traiter la quantité inconnue m comme une variable aléatoire de valeur probable z et de variance σ^2

$$\left\{ \begin{array}{l} E(m) = z \\ D^2(m) = \sigma^2 \end{array} \right. \tag{48}$$

Dans ce raisonnement, on n'a fait nulle part appel à la notion de loi de distribution de z à m fixé, ou de m à z fixé, loi dont nous savons qu'elle ne serait pas définissable objectivement. Seule l'erreur $y = m - z$ a été probabilisée. Si m était connue, et si nous cherchions une estimation de z, nous devrions écrire, de la même façon :

$$\left\{ \begin{array}{l} E(z) = m \\ D^2(z) = \sigma^2 \end{array} \right. \tag{49}$$

Certains statisticiens orthodoxes seront peut-être choqués par cette manière de raisonner. En fait, il n'y a aucune raison pour que le formalisme du calcul des probabilités classiques soit transposable à la géostatistique. Nous allons montrer, cependant, que le raisonnement classique conduit nécessairement, à la limite, aux relations (48). Les lecteurs que le purisme ou l'orthodoxie ne tourmentent pas peuvent, sans inconvénients, passer directement au paragraphe 3.

Le statisticien classique aurait considéré m et z comme de véritables variables aléatoires, sans insister, sur les postulats implicites que cela présuppose, et aurait soigneusement distingué les lois de z à m fixé et de m à z fixé. Dans cette optique, les relations (48) et (49) sont clairement incompatibles. Supposons, par exemple, que la distribution de m et z soit normale, avec une moyenne commune m_0, des variances σ_1^2 et σ_2^2, et un coefficient de corrélation ρ. La valeur probable de z à m fixé serait :

$$E(z.m) = m_0 + \rho \frac{\sigma^2}{\sigma_1} (m - m_0)$$

Le statisticien classique admet volontier (1)* que la valeur probable de z à m fixé soit égale à m, c'est-à-dire la relation (49). Il en résulte :

$$\rho = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$$

(1)* L'inverse, c'est-à-dire la relation (48), le choquerait : il assimile implicitement z au résultat d'un tirage au sort effectué sur une urne de composition m.

La valeur probable de m à z fixé est alors :

$$E(m.z) = m_0 + \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (z - m_0) = m_0 \left(1 - \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\right) + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} z \tag{50}$$

Elle est différente de z, puisque, si l'une des droites de régression a la pente unité, l'autre a nécessairement une pente différente de 1. Pour donner un sens concret à m_0, σ_1^2, et σ_2^2, interprétons les comme la moyenne et les variances de m et z dans un grand gisement K dont G serait extrait. Il y a d'ailleurs là quelque chose d'un peu inquiétant, puisque ces trois paramètres prendront des valeurs bien différentes, selon que l'on retiendra une plus ou moins grande portion de K. Mais supposons, à la limite, que K devienne très grand. Les deux variances σ_1^2 et σ_2^2 sont majorées d'une même constante A qui tend vers l'infini. A la limite, il reste :

$$E(m.z) = z$$

La deuxième droite de régression a rejoint la première, et la relation (48) en découle. On montrerait, de la même façon que la variance liée $\sigma_1^2(1 - \rho^2)$ a pour limite la variance d'estimation de la géostatistique.

Il y a plus. Supposons que le statisticien orthodoxe veuille utiliser la relation (50) dans une application pratique. Il lui faudra déterminer les valeurs numériques des variances et de la moyenne générale m_0. En ce qui concerne m^0, deux cas sont possibles. Ou bien G est un gisement entier, et l'on ne dispose d'aucun autre échantillon que ceux qui ont servi au calcul de z. Devra-t-on prendre m_0 supérieur ou inférieur à z? On sera, en fait, obligé d'estimer m_0 à partir de z lui-même, et la relation (50) donnera encore $E(m.z) = z$. Ou bien G n'est qu'un panneau d'un gisement réel plus grand, et des échantillons ont été prélevés à l'extérieur de G. La teneur m_0 est alors interprétée comme la teneur moyenne du gisement entier. Pour l'estimer, on fera une moyenne globale indifférenciée de tous les échantillons disponibles, intérieurs ou extérieurs à G. L'équation (50) représente alors un krigeage, c'est-à-dire une pondération ou un partage d'influence entre les échantillons extérieurs et intérieurs. A dire vrai, il s'agira là d'un mauvais krigeage, car le terme indifférencié m_0 ne représente sûrement pas la meilleure pondération possible des échantillons extérieurs. On a toujours intérêt à attribuer à chaque échantillon extérieur son poids propre, tenant compte de sa plus ou moins grande proximité du panneau G à estimer, et calculé de manière à rendre minimale la variance d'estimation. Mais, en réalité, c'est précisément par un tel krigeage que l'estimateur z doit toujours être formé. Comme les échantillons extérieurs sont incorporés dans l'expression de z, il ne reste plus rien au statisticien classique pour procéder à l'estimation de m_0.

3. L'optimisation séquentielle pour un gisement du type « tout ou rien »

Après avoir éclairci ces indispensables préliminaires théoriques, nous allons maintenant traiter du problème de l'arrêt des recherches dans le cas le plus simple où la relation tonnage-teneur n'intervient pas, c'est-à-dire dans le cas des gisements tout ou rien. Nous poserons, tout d'abord, les équations générales du problème. Nous chercherons ensuite à les particulariser. Enfin, nous traiterons le cas particulier très simple, mais fréquent, où la teneur intervient seule, et celui également important, où le tonnage intervient seul.

3. a. *Formulation générale du problème*

L'exploitation d'un gisement de tonnage T et de teneur m, laisse un bénéfice dont la valeur actualisée $B_1(T,m)$ est, par exemple, donnée par l'équation (9), dans laquelle la cadence annuelle d'exploitation t a été déterminée comme il a été dit dans la première partie. Nous négligerons ici les conséquences d'un mauvais dimensionnement des installations. La perte, calculée dans la deuxième partie, est du deuxième ordre et peut être négligée vis-à-vis du risque de ruine : en tenir compte conduirait à une complication, pratiquement inutile, des équations générales. La cadence t est ici considérée comme une simple fonction de T et m, donnée par la résolution de la première équation (20). En première approximation, on pourra même souvent considérer p et I comme des constantes.

Ceci dit, reprenons le schéma séquentiel de la figure 1. Au point C, c'est-à-dire à l'issue de la première campagne de reconnaissance, on dispose des estimations T_1 et m_1 du tonnage et de la teneur. Les valeurs vraies τ et μ sont inconnues, quoique physiquement déterminées, et nous avons vu qu'il était légitime de les traiter comme des variables aléatoires, dont les valeurs probables et les variances seraient :

$$(51)\qquad \begin{cases} E(\tau) = T_1 \\ D^2(\tau) = \sigma^2_{T_1} \end{cases} \qquad \begin{cases} E(\mu) = m_1 \\ D^2(\mu) = \sigma^2_{m_1} \end{cases}$$

Les variances sont les variances d'estimation calculées par la géostatistique. Éventuellement, il faudrait tenir compte d'une covariance $\sigma_{T_1m_1}$; car les erreurs sur le tonnage et la teneur ne peuvent pas toujours être considérées comme indépendantes. La densité de probabilité $f_1\ (\tau,\ \mu,\ T_1,\ m_1)\ d\tau\, d\mu$ des deux variables τ et μ peut être choisie de manière assez arbitraire, sous réserve de vérifier les relations (51), et. éventuellement, de respecter la covariance $\sigma_{T_1m_1}$.

De même, si l'on effectue la deuxième campagne, on aura, au nouveau point crucial C', les nouvelles estimations T_2 et m_2. A ce moment, les valeurs vraies τ et μ pourront être traitées comme des variables aléatoires vérifiant les relations :

$$(52)\qquad \begin{cases} E(\tau) = T^2 \\ D^2(\tau) = \sigma^2_{T_2} \end{cases} \qquad \begin{cases} E(\mu) = m_2 \\ D^2(\mu) = \sigma^2_{m_2} \end{cases}$$

et soumises à une loi de probabilité $f_2\ (\tau,\ \mu,\ T_2,\ m_2)\ d\tau\ d\mu$, qui peut être prise quelconque, sous réserve de respecter les relations (52), et, éventuellement, une covariance $\sigma_{T_2m_2}$.

Mais, au point C, la deuxième campagne n'a pas encore été exécutée. T_2 et m_2 sont inconnues, quoique physiquement déterminées, et on peut les traiter comme des variables aléatoires vérifiant les relations (46) et (48), qui s'écrivent ici :

$$(53)\qquad \begin{cases} E(T_2) = T_1 \\ E(m_2) = m_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \sigma^2_T = \sigma^2_{T_1} - \sigma^2_{T_2} \\ \sigma^2_m = \sigma^2_{m_1} - \sigma^2_{m_2} \end{cases}$$

La variance σ^2_T d'estimation de T_2 à partir de T_1 s'obtient en faisant la différence des variances d'estimation de T à partir de T_1 et de T_2. La loi de probabilité $g(T_2,\ m_2;\ T_1\ m_1)\ dT_2\ dm_2$ de T_2 et m_2 vérifie, outre les conditions (52), la relation :

$$(54)\qquad f_1(\tau,\mu;T_1m_1) = \iint f_2(\tau,\mu;T_2,m_2)\, g(T_2\ m_2;\ T_1m_1)\, dT_2\, dm_2$$

l'intégrale étant étendue au champ des valeurs possibles de T_2 et m_2.

Ceci étant, examinons les trois décisions possibles au point crucial C, et évaluons, pour chacune d'elles l'espérance mathématique du bénéfice futur B $(\tau,\ \mu)$. La première décision — fermer le chantier et abandonner le gisement — conduit très clairement à un bénéfice nul. Nous écrirons :

$$(55)\qquad E(B_1) = 0$$

La deuxième décision — arrêter les recherches et exploiter le gisement — conduit à un bénéfice B $(\tau,\ \mu)$ dont la valeur probable se déduit de la loi $f_1\ (\tau,\ \mu;\ T_1,\ m_1)$ de τ et μ lorsque les estimations T_1 et m_1 sont connues, soit :

$$(56)\qquad E(B_2) = \iint B(\tau,\mu) f_1(\tau,\mu;T_1,m_1)\, d\tau\, d\mu$$

L'intégration est étendue au champ des valeurs possibles de τ et μ. Pour la troisième décision, la formulation est un peu plus complexe. Anticipant les résultats T_2 et m_2 de la deuxième campagne, transportons-nous par la pensée au deuxième point crucial C', où deux décisions seulement seront possibles : fermer, ou exploiter. A ces deux décisions, sont associées des espérances données par des équations analogues à (55) et (56) :

$$\text{(57)} \quad \begin{aligned} &E'(B_1) = 0 \\ &E'(B_2) = \iint B(\tau, \mu) f_2(\tau, \mu; T_2 m_2)\, d\tau d\mu \end{aligned}$$

et, en C′, on adoptera la première ou la deuxième décision selon que $E'(B_2)$ sera négatif ou positif. Mais, en C, la deuxième campagne n'a pas encore été effectuée. Il convient donc, à l'aide de la loi $g(T_2, m_2; T_1\, m_1)$ de T_2 et m_2 lorsque T_1 et m_1 sont connus, d'anticiper, en probabilité, la décision future qui sera prise en C′. Il convient également de tenir compte du coût R de la deuxième campagne de recherche, puisque, en C, R n'a pas encore été dépensé. On obtient ainsi l'expression suivante pour l'espérance attachée à la troisième décision :

$$\text{(58)} \quad E(B_3) = \iint_D E'(B_2)\, g(T_2, m_2; T_1, m_1)\, dT_2\, dm_2 - R$$

L'expression de $E'_2(B)$, qui figure sous le signe somme, est donnée par la deuxième équation (57), et le domaine D d'intégration en T_2 et m_2, qui représente l'ensemble des cas où, en C′, on décidera d'exploiter, est défini par l'inégalité :

$$\text{(59)} \quad E'(B_2) \geqslant 0$$

Si R était nul, $E(B_3)$ serait nécessairement supérieur à $E(B_2)$, puisque la deuxième campagne, en complétant l'information, élimine du champ des cas possibles un certain nombre d'éventualités où le gisement, à l'exploitation, se révélerait non rentable. En introduisant le coût R des recherches supplémentaires, l'équation (58) met exactement en balance le coût de l'information et la valeur économique qu'on doit lui attribuer. Le critère de décision est alors très simple : les E(B) étant calculés, par les équations (55), (56) et (58), on choisit celle des trois décisions qui donne la meilleure espérance.

3. b. *Particularisation des équations générales*

Le calcul numérique effectif de l'expression (56), et surtout (58), est relativement difficile, dans le cas général. Le résultat, d'autre part, dépend de la forme adoptée pour les lois de probabilité f_1, f_2 et g. Mais ces lois sont parfaitement arbitraires, et peuvent être prises quelconques, sous réserve seulement de vérifier les conditions de valeur moyenne et de variance qui leur sont imposées. En pratique, on leur attribuera une forme mathématique qui conduise aux calculs les plus simples possibles.

Examinons, en premier lieu, l'expression (56) de $E(B_2)$. Le bénéfice $B(\tau, \mu)$ doit être pris sous la forme (9). Au point crucial C, les problèmes posés par le dimensionnement des installations apparaissent comme un peu lointains, et dépourvus d'urgence. La perte calculée dans la deuxième partie est d'ailleurs du second ordre, c'est-à-dire négligeable, en première approximation et au point C, vis-à-vis du risque de ruine. On peut considérer la cadence annuelle t comme une constante, puisque les incidences de ses variations possibles apparaissent comme très faibles, et difficilement calculables au point C. Cela revient à considérer les investissements I et les dépenses à la tonne p comme des constantes, numériquement forfaitées. On prendra donc le bénéfice sous la forme :

$$\text{(60)} \quad B(\tau, \mu) = (b\mu - p)t \frac{1 - e^{-i\frac{\tau}{t}}}{i} - I$$

Dans cette expression, μ intervient linéairement, et τ par l'intermédiaire d'une exponentielle. Il pourra donc être commode de traiter μ comme une variable lognormale, et τ comme une variable normale : μ et $e^{-i\frac{\tau}{t}}$ sont ainsi lognormales simultanément. Pour ne pas alourdir l'exposé, nous ne donnerons pas le détail des calculs, ni les expressions lognormales exactes. En posant $N_1 = \frac{T_1}{t}$, on obtient pour $E(B_2)$ l'expression approchée :

$$\text{(61)} \quad E(B_2) = (bm_1 - p)t \frac{1 - e^{-iN_1}}{i} - I$$

qui est un simple démarquage de (60). On se contente de remplacer τ et μ, dans l'expression du bénéfice, par leurs valeurs probables T_1 et m_1.

Passons maintenant au calcul, plus difficile, de l'expression (58). En premier lieu, $E'(B_2)$ se calcule exactement comme en (61) :

$$\text{(62)} \quad E'(B_2) = (bm_2 - p)t \frac{(1 - e^{-iN_2})}{i} - I$$

En deuxième lieu, l'expression obtenue doit être portée dans l'intégrale de l'équation (58). Le calcul exact de cette intégrale serait assez difficile, car le domaine D d'intégration, défini par l'inégalité (59), est limité par la courbe, assez complexe, d'équation $E'(B_2) = 0$, qui représente la limite d'exploitabilité tonnage-teneur. Il est préférable de transformer l'intégrale double en une intégrale simple, en introduisant une nouvelle variable :

$$X = E'(B_2)$$

dont la loi de probabilité $H(X;\, T_1,\, m_1)dX$ peut, en principe, se calculer à partir de f_2 et g. On a alors :

$$\text{(63)} \quad E(B_3) = \int_0^{\infty} X H(X;\, T_1, m_1)\, dX - R$$

l'intégrale étant, cette fois, prise de zéro à l'infini. En ce qui concerne la loi H, il serait, en réalité, assez vain de la déduire rigoureusement de f_2 et g : ces deux dernières lois étant de forme arbitraire, on peut aussi bien se donner directement une loi H(X) de forme aussi simple que possible, sous réserve seulement que la valeur moyenne et la variance de cette loi prennent les valeurs exactes. La valeur probable de X n'est autre que l'espérance $E(B_2)$ calculée en (61).

Une expression approchée (1)*de la variance de X s'obtient rapidement, en linéarisant X, fonction des variables m_2 et T_2 dans un petit domaine autour du point (m_1, T_1). On a approximativement :

$$X - E(B_2) = \frac{\partial X}{\partial m_1}(m_2 - m_1) + \frac{\partial X}{\partial T_1}(T_2 - T_1)$$

$$\sigma_X^2 = E\left[X - E(B_2)\right]^2 = \left(\frac{\partial X}{\partial m_1}\right)^2 \sigma_m^2 + 2\frac{\partial X}{\partial m_1}\frac{\partial X}{\partial T_1}\sigma_{mT} + \left(\frac{\partial X}{\partial T_1}\right)^2 \sigma_{T_1}^2$$

Or,

$$X = (bm_2 - p)t\,\frac{1 - e^{-i\frac{T_2}{t}}}{i} - I$$

$$\frac{\partial X}{\partial m_1} = tb\,\frac{1 - e^{-iN_1}}{i} \qquad \frac{\partial X}{\partial T_1} = (bm_1 - p)e^{-iN_1}$$

d'où :

$$\sigma_X^2 = b^2t^2\left(\frac{1 - e^{-iN_1}}{i}\right)^2 \sigma_m^2 + (bm_1 - p)^2\, e^{-2iN_1}\,\sigma_T^2 + 2bt(bm_1 - p)e^{-iN_1}\left(\frac{1 - e^{-iN_1}}{i}\right)\sigma_{mT} \tag{64}$$

On assimilera X à une variable normale ayant la variance ainsi calculée et la valeur probable :

$$X_0 = (bm_1 - p)t\,\frac{1 - e^{-iN_1}}{i} - I$$

En désignant par G(z) l'intégrale gaussienne habituelle :

$$G(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_z^{\infty} e^{\frac{1}{2}z^2}\,dz$$

l'expression (62) se met sous la forme simple

$$E(B_3) = X_0 G\left(-\frac{X_0}{\sigma_X}\right) + \frac{\sigma_X}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{X_0^2}{\sigma_X^2}} - R \tag{65}$$

(1)* Les formules lognormales exactes ne sont pas reproduites ici. Les expressions approchées (61) et (64) sont suffisantes pour les applications pratiques.

Les tables de la fonction G, qui donnent généralement aussi la valeur de l'exponentielle, permettent un calcul numérique très facile. Si X_0 dépasse 3 ou 4 fois l'écart type σ_x, on pourra utiliser les formules asymptotiques données en annexe.

3. c. *Cas particulier où la teneur intervient seule*

Il arrive parfois que l'erreur sur le tonnage puisse être négligée, et que, par suite, la teneur intervienne seule. Il en est souvent ainsi, en particulier, dans le cas des gisements filoniens (1)*. Les formules du paragraphe précédent se simplifient beaucoup. Si la teneur limite de rentabilité est m_L, et la teneur réelle μ, le bénéfice peut toujours se mettre sous la forme :

$$B = bT(\mu - m_L) \tag{66}$$

où T est le tonnage, et b la valeur du point de métal sous forme de concentré contenu dans une tonne de minerai. Par une application immédiate des relations (48), on trouve :

$$\begin{cases} E(B_1) = 0 \\ E(B_2) = bT(m_1 - m_L) \end{cases} \tag{67}$$

On voit, et c'était bien évident *a priori*, que si le choix, en C, se limitait aux deux premières décisions, on exploiterait ou on abandonnerait selon que l'estimation m_1 serait supérieure, ou inférieure à la limite d'exploitabilité m_L. Pour calculer $E(B_3)$, on assimile, comme au paragraphe précédent, m_2 à une variable lognormale de valeur moyenne m_1 et de variance $\frac{\sigma^2 m}{m^2}\,\sigma_2$.On obtient très facilement :

$$E(B_3) = bT\left[m_1 G(z - \sigma) - m_L G(z)\right] - R \tag{68}$$

G étant l'intégrale de Gauss, et z la variable réduite associée à la limite m_L de rentabilité :

$$z = \frac{1}{\sigma}\log\frac{m_L}{m_1} + \frac{1}{2}\sigma$$

Pour illustrer ces diverses formules, donnons un exemple numérique. Un gisement de plomb-zinc a été reconnu à un niveau par travaux miniers, et par des travaux de surface. Le tonnage certain est de 400 000

(1)* En réalité, la reconnaissance d'un filon par travaux miniers laisse, presque toujours, ouverte la possibilité d'une extension en aval, mais cette possibilité n'est pas chiffrable. Dans l'étude de la rentabilité de l'exploitation, on ne prend en compte que le tonnage effectivement reconnu. On doit faire la même chose pour l'optimisation de la reconnaissance : on ne retient que le tonnage démontré, et celui-ci est considéré comme certain, ce qui revient à annuler la variance d'estimation σ_T^2.

tonnes. Il y a peut-être un aval, mais on n'en tient pas compte. La valeur du Pb, du Zn et de l'Ag contenus dans une tonne de minerai a été estimée (1)* à 30 F. La teneur limite correspond à 30 F, de sorte que l'on est exactement dans le cas marginal. Compte tenu de l'incertitude des cours futurs, nous ferons cependant les calculs pour trois valeurs différentes de m_L, soient 27, 30 et 33. La teneur moyenne est connue avec un écart-type d'estimation $\sigma_{m_1} = 0{,}15$. Une deuxième campagne de reconnaissance, qui consisterait à tracer un sous-niveau intermédiaire, coûterait 400 000 F, et donnerait un nouvel (2)* écart-type $\sigma'_{m_2} = \frac{1}{2}\sigma_{m_1}$. On en déduit l'écart type σ_m de l'estimation de m_2 à partir de m_1 :

$$\sigma_m = \sqrt{\sigma^2_{m_1} - \sigma'^2_{m_2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_{m_1} = 0.13$$

Le calcul des espérances (67) et (68) pour les trois limites d'exploitabilité conduit aux résultats numériques suivants (en milliers de francs).

3. d. *Cas où le tonnage intervient seul*

Dans certains cas, la teneur moyenne peut être considérée comme bien connue, tandis que le tonnage inspire certaines inquiétudes. Il en est souvent ainsi pour les gisements sédimentaires, et aussi pour les gisements dans lesquels la minéralisation payante se présente sous forme de lentilles discontinues, réparties irrégulièrement au sein d'une formation homogène inexploitable par elle-même. En pareil cas, la rentabilité est liée à la démonstration d'un tonnage suffisant pour amortir les investissements.

Avec les mêmes notations, pour les tonnages, qu'en 3 — *b*, et en désignant par V la valeur de la tonne de minerai, on trouve pour $E(B_2)$:

$$E(B_2) = \frac{1 - e^{-i\frac{T_1}{t} + \frac{i^2}{2}\frac{\sigma^2_{T_1}}{t^2}}}{i}(V - p)t - I \tag{69}$$

m_L	27	30	33
$E(B_1)$	0	0	0
$E(B_2)$	+ 1200	0	− 1 200
$E(B_3)$	1 360 − 400 = + 960	560 − 400 = + 160	200 − 400 = − 200

Si la limite est fixée à 27 F, on doit exploiter tout de suite. Si elle est de 33, on doit abandonner. Si elle est de 30, c'est-à-dire dans le cas exactement marginal, il y a un avantage théoriquement non nul, mais numériquement assez faible (160 000 F), à faire une deuxième campagne de reconnaissance. C'est là une circonstance assez générale : c'est dans le cas exactement marginal que les informations apportées par des travaux supplémentaires présentent le maximum d'intérêt. Cet intérêt décroît assez vite dès que l'on s'écarte du cas marginal par excès ou par défaut. Dès que l'on est pratiquement sûr que la teneur réelle est supérieure (ou inférieure) à la limite de rentabilité, on décide d'exploiter (ou de fermer), et le besoin de travaux nouveaux ne se fait nullement sentir.

(1)* Comme il y a plusieurs métaux, il est plus simple de raisonner directement sur les valeurs contenues, et non sur les teneurs.

(2)* On est dans la zone linéaire du variogramme, de sorte que la nouvelle variance est égale au quart de l'ancienne.

On note que cette espérance est toujours plus petite que si le tonnage était parfaitement connu ($\sigma^2_{T_1} = 0$). C'est là un effet de l'actualisation. Les chances pour que le tonnage réel soit inférieur ou supérieur à T_1 sont bien égales, mais la perte qui se produit dans le premier cas a lieu dans un avenir moins éloigné que le gain qui apparaît dans le deuxième, et pèse donc plus lourd en valeur actualisée. Cet effet est, en réalité, le plus souvent négligeable, le terme $\frac{i^2}{2}\frac{\sigma^2_{T_1}}{t^2}$ étant en général assez petit.

Si l'on adopte la troisième décision, la deuxième campagne donnera un résultat T_2, avec une variance d'estimation $\sigma^2_{T_2}$, et on aura, au point C' :

$$E'(B_2) = \frac{1 - e^{-i\frac{T_2}{t} + \frac{i^2}{2}\frac{\sigma^2_{T_2}}{t^2}}}{i}(V - p)t - I$$

et, en C', on décidera d'exploiter ou d'abandonner selon que $E'(B_2)$ sera positif ou négatif, c'est-à-dire selon que T_2 sera supérieur ou inférieur au tonnage limite de rentabilité T_L correspondant à $E'(B_2) = 0$:

$$T_L = -\frac{t}{i}\log\left[1 - \frac{iI}{(V-p)t}\right] + \frac{i}{2}\frac{\sigma^2_{T_2}}{t} \tag{70}$$

Ce tonnage (1)* est d'autant plus petit que $\sigma^2_{T_2}$ est plus petit, c'est-à-dire que la reconnaissance est plus poussée. C'est encore un effet de l'actualisation. En exécutant une deuxième campagne, on abaisse le tonnage limite de la quantité positive :

$$\frac{i}{2}\frac{\sigma^2_{T_1}-\sigma^2_{T_2}}{t}=\frac{i}{2}\frac{\sigma^2_T}{t}$$

Au point C, T_2 est assimilé à une variable normale, de valeur probable égale à T_1, et de variance $\sigma^2_T = \sigma^2_{T_1} - \sigma^2_{T_2}$. L'exponentielle $e^{-i\frac{T_2}{t}}$ étant une variable lognormale, l'expression (63) se calcule expli-citement, en intégrant, sur les tonnages, de T_L à l'infini. On obtient :

$$\text{(71)} \quad \begin{aligned} E(B^3) &= \frac{(V-p)t}{i} - I\ G\left(\frac{T_L - T_1}{\sigma_T}\right) \\ &- \frac{(V-p)t}{i} e^{-i\frac{T_1}{t}+\frac{i^2}{2}\frac{\sigma^2_{T_1}}{t^2}} G\left(\frac{T_1-T_L}{i\sigma_T} - \frac{i\sigma T}{t}\right) - R \end{aligned}$$

Cette équation, où G est l'intégrale de Gauss, permet un calcul numérique facile.

4. L'optimisation séquentielle dans le cas d'une relation tonnage-teneur

Dans le cas où la relation tonnage-teneur intervient effectivement, le problème de l'optimisation séquentielle devient à peu près inextricable si l'on cherche à le formuler de façon rigoureuse. Par contre, si, au point crucial C, on néglige les incidences d'un mauvais choix de la teneur de coupure x et de la cadence t, ce qui est légitime en première approximation, on retombe sur les équations du cas tout ou rien. En effet, en C, les résultats de la première campagne donnent une estimation $T_1(x)$ de la relation tonnage-teneur. Cette relation permet d'élaborer un avant-projet sommaire d'exploitation, comportant une coupure x_1, un tonnage T_1 et une teneur m_1. Adoptons, conformément à la prudence, le point de vue d'une exploitation rigide. Le tonnage T_1 est délimité sur plan. Son périmètre est connu. Il n'y a pas d'effet de bordure et T_1 ne diffère du tonnage qui serait réellement exploité, lors de l'exécution du projet, que par un terme de variance $\sigma^2_{T_1}$ représentant, par exemple, l'erreur sur l'estimation d'une puissance moyenne (effet de bordure exclu). De même m_1 représente la teneur réelle du périmètre choisi avec une variance $\sigma^2_{m_1}$, que l'on sait calculer.

A l'issue de la deuxième phase, on aura une nouvelle estimation $T_2(x)$ de la relation tonnage-teneur, à l'aide de laquelle on élaborera un nouveau projet (x_2, T_2, m_2), comportant, en général, pour le tonnage retenu T_2, le choix d'un périmètre légèrement différent du premier. Mais cette différence est, en première approximation, sans incidence sur les nouvelles variances d'estimation $\sigma^2_{T_2}$ et $\sigma^2_{m_2}$, qui peuvent se calculer comme si les deux périmètres coïncidaient. Le raisonnement se poursuit exactement comme dans le cas tout ou rien. En C, T_2 et m_2 sont inconnues, mais peuvent être traitées comme des variables aléatoires vérifiant les relations (53), et les diverses espérances se calculent exactement comme au paragraphe 3 *b*. De plus, l'effet de bordure étant exclu, il arrivera souvent que l'erreur résiduelle sur le tonnage soit faible, et que les variances d'estimation σ^2_T puissent être négligées. On est alors ramené au cas très simple où la teneur intervient seule, et l'on peut utiliser les résultats du paragraphe 3 *c*.

(1)* Ce tonnage diffère du tonnage limite défini dans la première partie par le terme correctif $\frac{i^2}{2}\frac{\sigma^2_T}{t^2}$; qui traduit l'effet de l'incertitude. Ce terme étant toujours petit, les deux notations du tonnage limite coïncident pratiquement.

CHAPITRE IV

Exemple d'application issu d'un projet réel d'exploitation

Nous nous proposons d'illustrer par un exemple numérique les différents points mis en évidence dans les trois premières parties. Les caractéristiques du gisement et de son exploitation nous ont été suggérées par un projet réel d'exploitation, dont les données ont été modifiées pour des raisons de discrétion.

Disons seulement qu'il s'agit d'un gisement que l'on a décidé de prendre en carrière. Une importante quantité de stérile de couverture est à prendre en même temps — ou à peu près — que le minerai. Le matériel de carrière est loué à une entreprise, d'où il résulte que les dépenses d'escavation sont à peu près proportionnelles à la quantité de minerai et de stérile manipulés. D'autre part, les divers projets d'exploitation montrent que le rapport du stérile au minerai reste à peu près constant.

L'exploitation du gisement exige, en outre, la création assez onéreuse d'un atelier de concentration. Il faut ajouter, de plus, quelques investissements assez minces. On admettra que le cube des investissements croît comme le carré de la cadence annuelle d'exploitation : c'est là une loi assez communément adoptée et qui a déjà été mentionnée au début de cette étude. La gestion de l'atelier de concentration révèle des frais proportionnels (au tonnage traité) et des frais fixes annuels.

Ceci posé, nous respecterons les notations des trois premières parties, sans guère nous étendre de nouveau sur leur définition.

L'exercice proposé, d'un point de vue théorique, revient à l'étude d'une fonction de bénéfice de la forme :

$$B = (V - p)t\frac{1 - e^{-iN}}{i} - I \text{ où } N = \frac{T}{t}$$

et V une fonction de T par l'intermédiaire de m, et éventuellement d'une autre fonction explicite de T. $\frac{dV}{dT}$ désigne la dérivée totale par rapport à T :

$$\frac{dV}{dT} = \frac{\partial V}{\partial m}\frac{dm}{dT} + \frac{\partial V}{\partial T}$$

p et I sont des fonctions de t seulement.

1. Estimation des paramètres

1° *Données relevant à la fois de la géologie et de la technique d'exploitation*

L'analyse de trois projets d'exploitation de la carrière, correspondant à divers périmètres d'étendues différentes permet d'ajuster une loi de Lasky représentant la teneur moyenne d'exploitation en fonction du tonnage de minerai relatif au périmètre retenu.

Les trois projets relatifs aux extensions respectives de 320 000 tonnes, 530 000 tonnes, 770 000 tonnes, révèlent des teneurs moyennes de 1,46 %, 1,15 %, 0,87 %. Ces trois projets s'alignent convenablement sur la droite de Lasky :

$$m = \alpha - \beta \log T \quad \text{avec } \alpha = 5{,}36$$
$$\beta = 0{,}674$$

les tonnages étant exprimés *en milliers de tonnes, les teneurs en pourcentage.*

On note que la loi de la teneur de coupure se déduit de la loi de m par la translation $-\beta$, comme il a été exposé plus haut.

$$x = m - 0{,}674$$

2° *Valorisation du produit recélé*

Il a été précisé au 1° que les tonnages seraient exprimés en milliers de tonnes, les sommes d'argent dans ce qui suit le seront *en milliers de francs.*

Le métal récupéré est vendu 9,45 F le kilo dans les concentrés. Cependant, l'atelier de concentration ne permet pas de sauvegarder la totalité du métal contenu, le rendement escompté est :

$$9(m - 0{,}10) \text{ kg de métal par tonne de minerai}$$

La valeur contenue dans une tonne de minerai est, par suite :

$$9{,}45\,(9m - 0{,}9) = 85\,m - 8{,}5$$

Le terme désigné plus haut par b est ici égal à 85, quant au terme 8,5 indépendant de la teneur, nous allons l'englober dans les dépenses directes.

3° *Dépense à la tonne*

Elle est décomposée :

— *en dépenses directes à la tonne :* a_0.

On rappelle que la formule d'exploitation prévoit de louer le matériel d'extraction à une entreprise. Les dépenses d'extraction seront par suite tenues pour proportionnelles au tonnage et n'impliquent ni investissement ni dépenses fixes.

Comprenant :

Le coût d'extraction d'une tonne de minerai.	4,00 F
Le coût d'extraction de 4,376 tonnes de stérile pour 1 tonne de minerai à 2,5 F la tonne.............................. (y compris le coût de la location du matériel).	10,94 F
Les frais directs de l'atelier de concentration..............................	11,20 F
Enfin, le terme soustractif de la valeur contenue..............................	8,50 F
$a_0 =$	34,64 F

— *en frais fixes à la tonne :* $\frac{a_1}{t}$

a_1 représente l'ensemble des charges fixes annuelles de l'entreprise : administration, maîtrise, entretien, intérêt des emprunts, etc., dont la plus grande part à trait à l'atelier de concentration :

$$a_1 = 580$$

4° *Investissements*

Ils correspondent essentiellement au coût de construction de l'atelier de concentration : l'expérience nous a indiqué qu'ils pouvaient être représentés par :

$\mathrm{I} = 617\,t^{2/3}$ (617 est le terme C_1 indiqué plus haut).

En résumé, la teneur moyenne est donnée par :

$$m = 5{,}36 - 0{,}674 \log \mathrm{T}$$

et la fonction de bénéfice :

$$\mathrm{B} = \left(85\,m - 34{,}64 - \frac{580}{t}\right) t\,\frac{1 - e^{-i\mathrm{N}}}{i} - 617\,t^{2/3}$$

2. Les équations de l'optimum

2. a. *Les équations de l'optimum. Optimisation des bénéfices actualisés et non actualisés*

L'optimum est obtenu par le couple (T, t) qui annule les équations aux dérivées partielles de B par rapport à T et par rapport à t. La présente étude a exposé (cf. chapitre 1.2, c) les raisons pour lesquelles l'optimum devait être recherché à taux d'actualisation nul (c'est-à-dire en faisant $i = o$ dans les équations aux dérivées partielles). Nous allons cependant, ici, afin de pouvoir juger des ordres de grandeur et des différences entre deux conceptions, chercher l'optimum selon les deux méthodes :

— en rendant maximum l'expression du bénéfice, actualisé au taux $i = 0{,}08$;

— en rendant maximum l'expression du bénéfice, non actualisé ($i = 0$).

Nous allons donner, avant de particulariser les fonctions et les constantes numériques, les équations générales de l'optimum à taux i non nul :

$$\mathrm{B}'_{\mathrm{T}} = e^{-i\mathrm{N}}(\mathrm{V} - p) + \frac{1 - e^{-i\mathrm{N}}}{i}\,t\,\frac{d\mathrm{V}}{d\mathrm{T}} = 0$$

$$\mathrm{B}'_t = \frac{1 - e^{-i\mathrm{N}} - i\mathrm{N}e^{-i\mathrm{N}}}{i}(\mathrm{V} - p) - t\,\frac{1 - e^{-i\mathrm{N}}}{i}\frac{dp}{dt} - \frac{d\mathrm{I}}{dt} = 0$$

Ces équations peuvent s'écrire, en introduisant dans la première l'expression de la teneur de coupure x, et en remplaçant la seconde par une combinaison linéaire des deux équations :

$$i \neq 0 \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{p}{b} + \frac{e^{i\mathrm{N}} - 1 - i\mathrm{N}}{i\mathrm{N}}(m - x) \\ \frac{1 - e^{-i\mathrm{N}}}{i}\left(\frac{e^{i\mathrm{N}} - 1 - i\mathrm{N}}{i\mathrm{N}}\,\mathrm{T}\,\frac{d\mathrm{V}}{d\mathrm{T}} + t\,\frac{dp}{dt}\right) + \frac{d\mathrm{I}}{dt} = 0 \end{array} \right.$$

La première équation suppose toutefois que *V est proportionnel à m.* : V = bm.

Pour $i = 0$, le système se réduit à :

$$i = 0 \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{p}{b} \\ \mathrm{T}\,\frac{dp}{dt} + \frac{d\mathrm{I}}{dt} = 0 \end{array} \right.$$

On retrouve le système maintes fois utilisé dans les premières parties de l'étude en particularisant les fonctions V(T), $p(t)$ et I(t), selon les formules retenues pour l'exemple envisagé et en attribuant aux paramètres les valeurs numériques indiquées, on obtient les systèmes d'équations, en notant que la teneur de coupure x est une fonction de T définie par la loi de Lasky :

$$x = m - \beta = \alpha - \beta - \beta \log \mathrm{T}$$

$$i \neq 0 \begin{cases} T \log T + \left(\frac{e^{0,08N} - 1}{0,08N} - 7,3479\right) T \\ \qquad + 10,1239N = 0 \\ \frac{e^{0,08N} - 1 - 0,08N}{0,08N} T - 0,5744 \frac{N^{1/3}}{1 - e^{-0,08N}} T^{2/3} \\ \qquad + 10,1239\,N = 0 \end{cases}$$

Pour $i = 0$ le système d'équation se réduit à :

$$i = 0 \begin{cases} \log T + 8,2376\ T^{-0,6} - 6,3479 = 0 \\ t = 1,2289\ T^{0,6} \end{cases}$$

La seconde équation associe à chaque ampleur T du périmètre d'exploitation la cadence annuelle appropriée t.

Le système des équations de l'optimum, dans le cas général : i non nul, se résoud par itérations. On se donne une valeur de N, à laquelle la deuxième équation associe une valeur de T, que l'on porte dans la première équation, dont on déduit une nouvelle valeur de N. Cette nouvelle valeur est portée dans la deuxième équation qui donne une nouvelle valeur de T et ainsi de suite... Au bout d'un petit nombre d'itérations on obtient pour T et N des limites qui sont les racines du système, c'est-à-dire les caractéristiques de l'optimum.

La résolution du système dans le cas $i = 0$ est plus élémentaire, car les variables T et t sont séparées.

Le tableau suivant présente les résultats dans chacune des deux hypothèses :

— optimum défini sans actualisation;

— optimum défini avec actualisation ($i = 8$ %).

Les paramètres techniques obtenus par optimisation du bénéfice actualisé conduisent à écrémer le gisement, à grossir les investissements et à réduire les dépenses globales d'exploitation. La vie de l'exploitation est réduite pratiquement de moitié.

On pourrait être surpris de ce que le prix de revient (dépenses d'exploitation non-actualisées et augmentées des investissements, l'ensemble étant réparti sur la production de métal) soit à peu près identique dans l'une et l'autre options. On se serait plutôt attendu à un meilleur prix de revient pour l'optimum obtenu sans actualisation.

Ce fait n'a en réalité, rien d'étonnant car le critère d'optimisation du bénéfice non actualisé n'est pas identique à un critère d'optimisation du prix de revient. Voyons succinctement ce que donnerait le critère d'optimisation du prix de revient appliqué à notre gisement et à quel gâchis il mènerait.

		Optimum défini sans actualisation	Optimum défini avec actualisation ($i = 8$ %)
	Ampleur du périmètre T	464,6	385,1
	Cadence annuelle d'exploitation t	49,0	71,1
	Nombre d'années d'exploitation $N = \frac{T}{t}$	9,49	5,42
	Teneur de coupure observée x	0,547 %	0,673 %
	Teneur moyenne du gisement retenu m	1,221 %	1,347 %
	Importance des investissements $\dot{I}$	8 256	10 586
	Valeur du bénéfice global non actualisé	18 361	17 025
	Valeur du bénéfice global actualisé ($i = 8$ %)	10 394	11 818
Non actualisées	Dépenses totales d'exploitation (1)*	17 646	13 209
	Dépenses totales y compris investissement	25 902	23 795
	Tonnage de métal récupéré (tonnes)	4 687	4 322
	Dépense au kilo de métal (F)	5,526	5,506

(1)* On a déduit de p le terme de rendement qui y avait été inclus au § I, 3°.

2. b. *Digression sur l'optimisation du prix de revient*

Pour éviter la confusion des notations, on désigne par : p^* le prix de revient p déduction faite du terme de rendement qui y avait été inclus au paragraphe 1, 3°.

Le prix de revient au kilo de métal s'écrit :

$$\rho = \frac{p^* T + \dot{I}}{9(m - 0,1)T} = \frac{p^*}{9(m - 0,1)} + \frac{\dot{I}}{9(m - 0,1)T}$$

Les paramètres techniques t et T de l'exploitation sont obtenus en annulant les dérivées partielles ρ'_t et ρ'_T.

L'équation $\rho'_t = 0$ adapte la cadence d'exploitation t au périmètre T :

$$T \frac{dp^*}{dt} + \frac{d\dot{I}}{dt} = 0$$

cette équation *est identique* à l'équation d'adaptation de la cadence au tonnage qui a été obtenue dans l'optique de maximisation du bénéfice non actualisé.

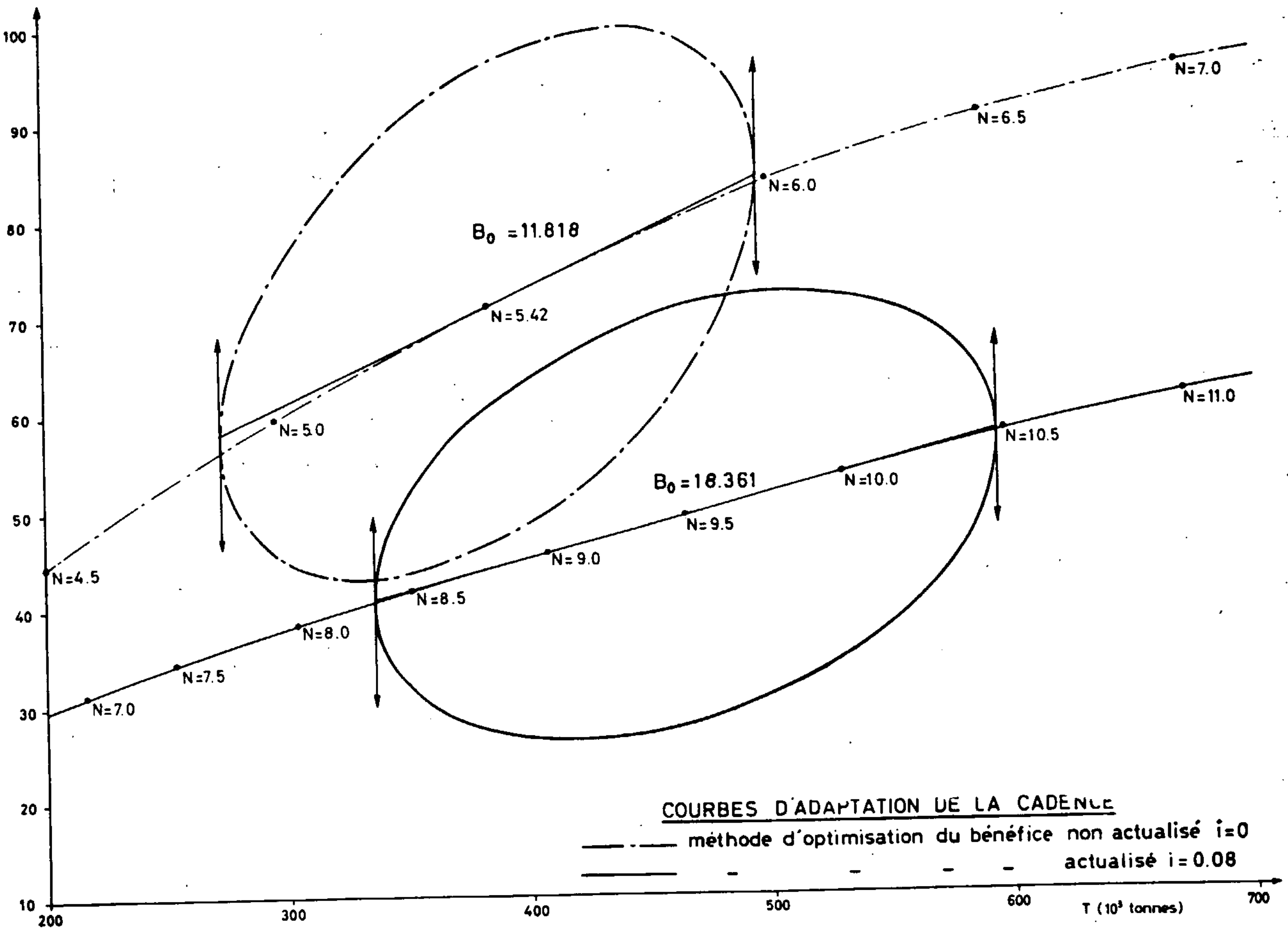


Fig. 1. — Plages des optima à 5 % de perte. — Courbes d'adaptation de la cadence

L'équation ρ'_T, par contre, où l'on peut introduire comme plus haut la teneur de coupure x, conduit à une expression différente de celle-ci :

$$x - 0{,}1 = \frac{p^*T}{I}(m - x)$$

Le système des deux équations devient, avec les fonctions et les valeurs numériques adoptées pour p^* et I :

$$\begin{cases} T = 0{,}7092\, t^{5/3} \\ t + 55{,}44 \log t - 215{,}61 = 0 \end{cases}$$

qui définissent la cadence d'exploitation annuelle t = 29,0, puis l'ampleur du périmètre T = 194,1, puis la teneur de coupure : x = 1,136 %.

Obéir au critère d'optimisation du prix de revient nous amènerait à un écrémage éhonté du gisement et à une exploitation anarchique dont les caractéristiques seraient les suivantes :

Ampleur du périmètre T		194,1
Cadence annuelle d'exploitation t		29,0
Nombre d'années d'exploitation $N = \frac{T}{t}$		6,69
Teneur de coupure observée x		1,136 %
Teneur moyenne du gisement retenu m		1,810 %
Importance des investissements I		5 824
Valeur du bénéfice global non actualisé		13 447
Valeur du bénéfice global actualisé ($i = 8$ %)		9 081
Non actualisées	Dépenses totales d'exploitation	8 956
	Dépenses totales y compris investissement	14 780
	Tonnage de métal récupéré (tonnes)	2 987
	Dépense au kilo de métal (F)	4,948

3. Comportement du bénéfice au voisinage de l'optimum. Cadence adaptée

Nous poursuivons encore en ce paragraphe la comparaison détaillée des deux procédés d'optimisation technique, avec ou sans actualisation. Notre choix entre les deux méthodes est déjà fait — pour des raisons théoriques. Nous continuerons, toutefois, l'analyse afin de faire ressortir le comportement des caractéristiques dans deux options radicalement différentes.

3. a. *Plages autour des optima*

On peut se demander si l'optimum s'apparente à un sommet escarpé ou à une croupe arrondie — autrement dit quelle serait la conséquence sur le bénéfice d'une modification des caractéristiques autour de l'optimum? On ne pourra pas, en général, respecter exactement l'optimum défini, car les divers projets d'exploitation possibles forment une suite discrète entre les termes de laquelle on ne pourra pas toujours s'arrêter. La sensibilité de la fonction de bénéfice autour de ses maxima est figurée simplement par la construction des courbes, ellipses, sur lesquelles la perte, petite, de bénéfice reste constante.

On a porté sur le diagramme joint, en coordonnées T et t les ellipses correspondant à *une perte de* 5 % sur chacun des deux optima. (*cf. figure 1*).

La détermination de ces plages exige la connaissance de la différentielle seconde du bénéfice aux points optima. Nous donnons les expressions des dérivées partielles secondes, à l'optimum, dans chacune des deux options :

i différent de 0 — pour $i = 0$

$$\left\{\begin{aligned} B''_{T^2} &= \frac{1-e^{-iN}}{iN}\,T\,\frac{d^2V}{dT^2} + (1+e^{-iN})\frac{dV}{dT} && = T\frac{d^2V}{dT^2} + \frac{2dV}{dT} \\ B''_{Tt} &= \frac{1-e^{-iN}-iN}{i}\frac{dV}{dT} - e^{-iN}\frac{dp}{dt} && = -\frac{dp}{dt} \\ B''_{t^2} &= N^2(1-e^{-iN})\frac{dV}{dT} + 2Ne^{-iN}\frac{dp}{dt} - \frac{1-e^{-iN}}{i}\frac{d^2(pt)}{dt^2} && \\ & && = -T\frac{d^2p}{dt^2} - \frac{d^2l}{dt^2} \end{aligned}\right.$$

formules qui donnent d'après les données numériques retenues :

	i différent de 0	pour $i = 0$
B''_{T^2}	$= -0{,}1245$	$= -0{,}1233$
B''_{Tt}	$= +0{,}2264$	$= +0{,}2420$
B''_{t^2}	$= -1{,}8774$	$= -3{,}8284$

3. b. *Adaptation de la cadence d'exploitation au périmètre retenu*

S'il est difficile de choisir exactement pour périmètre, le périmètre correspondant à l'optimum de T, il est généralement plus aisé d'adapter convenablement la cadence d'extraction, ainsi que la capacité de l'atelier de traitement t au tonnage retenu.

La relation, qui lie T et t adapté à T, est donnée par l'annulation de la dérivée partielle du bénéfice par rapport à t.

Dans le cas où l'optimisation des paramètres techniques est réalisée à taux d'actualisation nul, cette relation est très simple et prend, avec les fonctions envisagées la forme déjà signalée :

$$t = 1{,}2289\, T^{0,6}$$

Si les paramètres techniques étaient obtenus par optimisation du bénéfice actualisé, la loi qui lie T et t se traduit par la relation moins aisée entre N et T, dont la forme numérique est d'après les lois envisagées :

$$\frac{e^{0,08N} - 1 - 0{,}08N}{0{,}08}\,T\log T - 7{,}3479\,\frac{e^{0,08N} - 1 - 0{,}08N}{0{,}08}\,T$$
$$+ 7{,}1798N^{1/3}\,e^{0,08N}\,T^{2/3} - 10{,}1239N^2 = 0$$

Les deux courbes d'adaptation sont portées sur le graphique, elles passent évidemment par les optima et leurs tangentes en ces points ne sont autres que le diamètre conjugué des cordes de l'ellipse parallèles à l'axe des t. Cette propriété évidente analytiquement se conçoit aisément : la direction de la tangente à la courbe d'adaptation est telle que, à perte de bénéfice constante, le tonnage retenu pour le périmètre de carrière soit le plus éloigné du tonnage optimum. On peut aussi dire d'un point de vue à peine différent que la direction de la tangente est telle que la perte soit la plus petite pour un écart donné du tonnage avec le tonnage optimum. Ces deux façons de voir font apparaître les points à tangentes parallèles à l'axe des t, dans le système d'ellipses (cf. fig. 1).

4. Courbe d'exploitabilité

Ayant semble-t-il suffisamment poussé la comparaison entre les deux points de vue d'optimisation du bénéfice, nous considérerons *dans tout ce qui suit* que les caractéristiques de l'optimum technique sont obtenues par maximisation du bénéfice *non actualisé*.

Dès lors, nous retiendrons une cadence d'exploitation de 49.000 tonnes par an, à laquelle correspond une dépense à la tonne p = 46,48 F (charges directes aug-

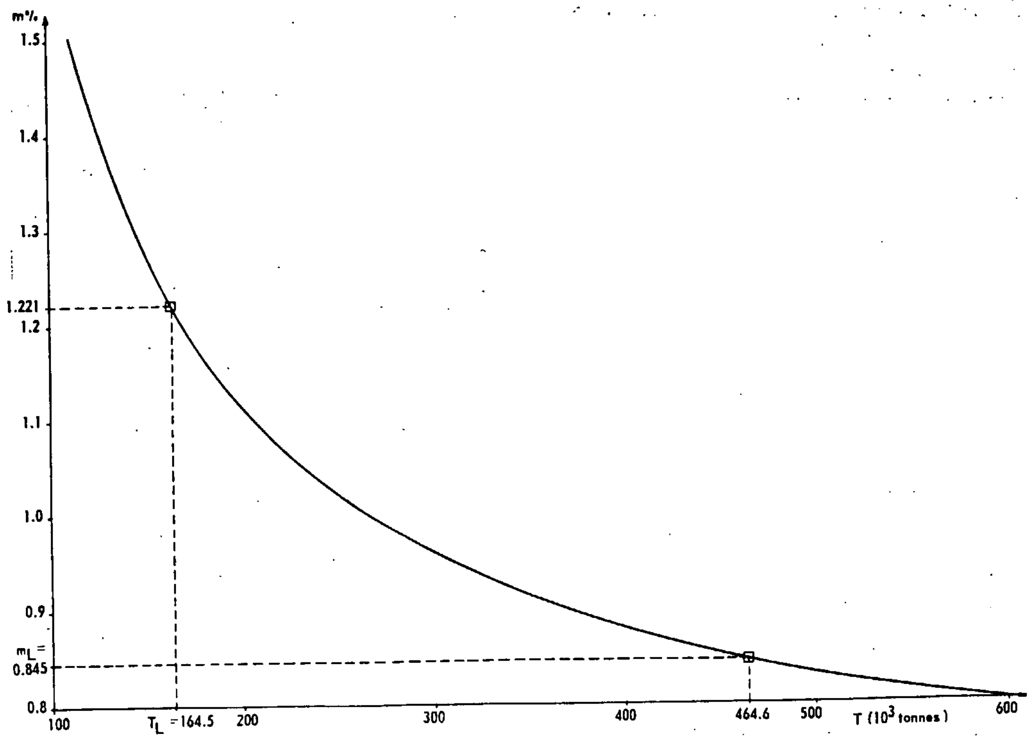


Fig. 2. — Courbe d'exploitabilité

mentées des frais indirects à la tonne), et une masse d'investissements de 8.246.000 F. Par ailleurs, le périmètre optimum correspond à un tonnage de 464.600 tonnes à une teneur moyenne de 1,221 %, et devrait être exploité en N = 9,49 années.

La cadence annuelle d'exploitation étant choisie, c'est-à-dire les dépenses et les investissements étant bien définis, la courbe d'exploitabilité met en évidence les couples : tonnage de la carrière-teneur moyenne susceptibles d'annuler le bénéfice actualisé. Cette courbe est représentée par l'équation : (cf. chap. I [3] équation 25).

$$\left[V(m) - p(t)\right] t \, \frac{1 - e^{-i\frac{T}{t}}}{i} - I(t) = 0$$

soit ici :

$$(52.063\, m - 28.469)\,(1 - e^{-0{,}00163T}) - 8.256 = 0$$

Deux valeurs remarquables sont données par cette équation :

— *la teneur d'exploitabilité* m_L obtenue pour la valeur optimum du tonnage T = 464,6 c'est-à-dire m_L = 0,854 %;

— *le tonnage limite d'exploitabilité* T_L obtenu pour a teneur moyenne du périmètre optimum m = 1,221 %, oit : T_L = 164,5.

La courbe de rentabilité est tracée sur un graphique joint (voir fig. 2).

5. Reconnaissance optimale en vue de définir correctement les paramètres techniques-tonnage et cadence de l'exploitation.

On se reportera au chapitre II, dont la démarche et les conclusions s'appliquent sans modifications au cas de notre carrière. Nous nous trouvons devant un type *d'exploitation rigide,* où le périmètre est défini à l'avance, l'effet de bordure est négligeable, l'erreur sur le tonnage est presque exclusivement due à l'erreur sur la puissance moyenne de la formation minéralisée, qui se traduit par la variance désignée dans le chapitre II par σ_T^2.

Ayant décidé que la carrière devait être reconnue par sondages, on souhaiterait savoir, *a priori,* l'ordre de grandeur du nombre de sondages à implanter.

En effet, une reconnaissance trop approximative conduit inévitablement à définir de façon défectueuse le périmètre d'exploitation optimum, et à se tromper, en outre, sur la quantité réelle de minerai qu'il recèle. Ces deux déterminations erronées se traduisent, par ailleurs, en une adaptation imparfaite de la cadence d'exploitation. Il est bien évident, par contre, qu'il n'y a pas à développer, outre mesure, une reconnaissance onéreuse. Un compromis doit être trouvé entre la perte inévitable consécutive à une reconnaissance limitée et le coût des travaux.

Il faut reconnaître que les caractéristiques de l'exploitation et les paramètres géostatistiques ne peuvent être appréciés que par un minimum de reconnaissance préalable. La détermination, au moyen des indications données par les sondages préalables, du nombre optimum de sondages à forer, doit permettre d'indiquer si la reconnaissance préalable est déjà suffisante au point où elle est parvenue et s'il y a lieu d'arrêter les travaux, ou de poursuivre et de rectifier le projet d'exploitation à la lumière des nouvelles données.

Ceci posé, une campagne de reconnaissance restreinte nous a permis d'établir les expressions approximatives des variances d'estimation σ^2_μ de la teneur moyenne et σ^2_τ du tonnage (effet de bordure exclu), en fonction du nombre n de sondages.

$$\sigma^2_\mu \frac{0{,}08}{n}(6 - \operatorname{Log} n) \qquad \sigma^2_\tau = \frac{12.000}{n}(6 - \mathrm{L}n)$$

Ces expressions permettent le calcul de la perte, dont l'expression est établie au paragraphe 3 *a*, du chapitre II. Le coût des travaux associés à cette perte est, si un sondage revient à 4.250 F :

$$\mathrm{R} = 4{,}25\, n.$$

La formule (35) donne l'expression de la perte probable :

$$(35)\quad \mathrm{P} = -\frac{1}{2}\,\frac{-bp'^2\dfrac{dx}{d\mathrm{T}}\sigma^2_\tau + 2bp'^2\sigma_{\tau\xi} + b^2(\mathrm{l}'' + p''\mathrm{T})\sigma^2_\xi}{p'^2 + b\dfrac{dx}{d\mathrm{T}}(\mathrm{l}'' + p''\mathrm{T})}$$

dans laquelle s'introduisent les dérivées partielles secondes calculées au paragraphe 3, optimisation du bénéfice *non actualisé* :

$$\mathrm{P} = \frac{1}{2}\,\frac{-\mathrm{B}''_{\tau^2}(\mathrm{B}''_{\tau t})^2\sigma^2_\tau + 2b(\mathrm{B}''_{\tau})^2\sigma_{\tau\xi} - b^2\mathrm{B}''_{t}\,\sigma^2_\xi}{\mathrm{B}''_{\tau^2}\,\mathrm{B}''_{t^2} - (\mathrm{B}''_{\tau})^2}$$

σ^2_τ est connu, σ^2_ξ est estimé d'après les formules (38) et (39) au moyen de $\sigma^2_\mu, \alpha, \beta$, — $\sigma_{\tau\xi}$ est négligé, ce qui est admissible d'après la formule (40) si les estimations de la teneur moyenne et du tonnage sont à peu près indépendantes, ce qui est le cas ici :

$$\mathrm{B}''_{\tau^2} = -0{,}1233 \qquad \mathrm{B}''_{\tau t} = 0{,}2420 \qquad \mathrm{B}''_{t^2} = -3{,}8284$$

$$\sigma_{\tau\xi} = 0 \qquad \sigma^2_\xi = \left(1 - \mathrm{T}e^{t}\,\frac{\alpha}{\beta}\right)\sigma^2_\mu = 0{,}555\,\sigma^2_\mu$$

d'où :

$$\mathrm{P} = 0{,}008731\,\sigma^2_\tau + 18.564\,\sigma^2_\mu$$

et en fonction du nombre n de sondages :

$$\sigma^2_\tau = \frac{12.000}{n}(6 - \log n) \qquad \sigma^2_\mu = \frac{0{,}08}{n}(6 - \log n)$$

$$\mathrm{P} = 1590\,\frac{6 - \log n}{n}$$

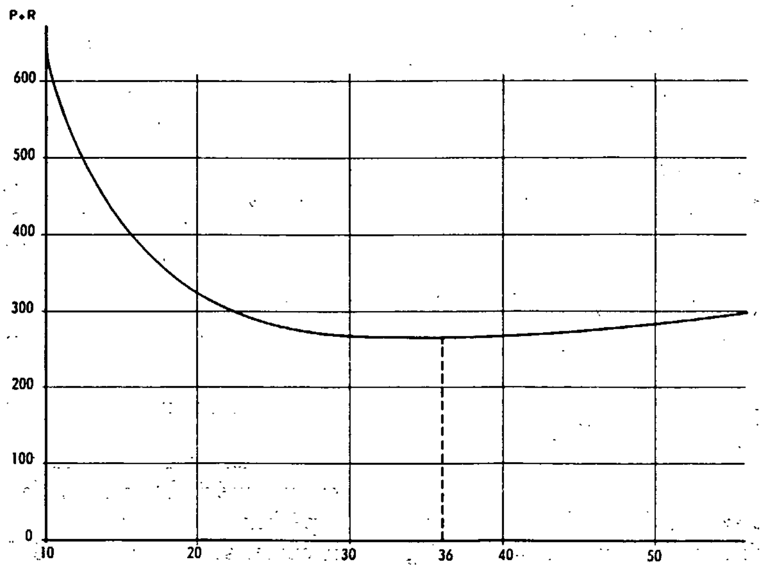


Fig. 3. — Perte probable accrue du coût de la reconnaissance correspondante selon l'importance de la campagne de sondages

Le nombre le meilleur de sondages, du moins pour ce qui est de définir correctement les paramètres techniques, minimise la valeur probable de la perte, accrue du coût des travaux supplémentaires :

$$P + R = 1.590 \frac{6 - \log n}{n} + 4{,}25\, n$$

c'est-à-dire, annule l'équation dérivée :

$$n^2 - 374\,(7 - \log n) = 0$$

On trouve que le volume optimum de sondages *est de 36.*

La courbe ci-contre présente les variations de la fonction P + R, perte probable, augmentée du coût des recherches correspondantes, en fonction de l'importance n de la campagne. Elle montre, en particulier, par sa dissymétrie, que, dans le doute, il vaut mieux reconnaître plutôt davantage que trop peu.

6. Optimisation séquentielle et problème de l'arrêt des recherches

Cette dernière question ne se propose plus de déterminer de façon suffisamment adéquate les caractéristiques techniques de l'exploitation, mais s'intéresse aux travaux de reconnaissance en tant que ceux-ci peuvent prémunir contre une ruine éventuelle.

Nous nous trouvons au point C, à l'issue d'une première tranche de sondages de reconnaissance : 28 sondages ont été forés, se répartissant selon une maille carrée de 30 mètres de côté. Du point de vue du risque de ruine, y-a-t-il lieu de s'en tenir là et d'exploiter ? ou bien est-il préférable d'effectuer une seconde tranche de reconnaissance, en centrant la maille et en précisant certaines zones ambiguës, ce qui conduirait à forer 32 sondages supplémentaires, soit un total de 60 sondages ? Il est à peine besoin d'indiquer qu'il ne saurait être question de renoncer à l'exploitation à l'issue de la première tranche de reconnaissance, l'espérance de bénéfice :

$E(B_2) = 10.394$ étant franchement positive.

il s'agit plutôt de savoir si la deuxième tranche de reconnaissance est susceptible d'améliorer encore cette espérance de bénéfice, déduction faite du coût de la deuxième tranche de reconnaissance : $E(B_3)$ désigne cette nouvelle espérance.

On peut appliquer textuellement les raisonnements et conclusions du chapitre III : la carrière est un gisement où intervient une relation tonnage-teneur (1)* dont l'étude peut être rattachée approximativement à celle d'un gisement du type « tout ou rien », dans le cas général où jouent simultanément les variations du tonnage et de la teneur (cf. chapitre III, § 3, 3 *b*).

Le problème est résolu par les formules (61), (64) et (65) du paragraphe 3 *b*.

Les divers termes sont calculés au moyen des paramètres techniques correspondant à l'optimum, défini sans actualisation; nous les rappelons :

$$b = 85\,; \qquad m = 1{,}221\ \%$$
$$t = 49{,}0 \qquad p = 46{,}48$$
$$N = 9{,}49$$

Quant aux variances d'estimation introduites dans la formule (64), elles représentent l'amenuisement des variances d'estimation entre la fin de la première tranche et la fin de la seconde tranche, correspondant respectivement à $n = 28$ et $n = 60$ sondages.

$$\sigma_m^2 = \frac{0{,}08}{28}(6 - \log 28) - \frac{0{,}08}{60}(6 - \log 60)$$
$$= 0{,}0076 - 0{,}0025 = 0{,}0051$$
$$\sigma_T^2 = \frac{12.000}{28}(6 - \log 28) - \frac{12.000}{60}(6 - \log 60)$$
$$= 1.143 - 381 = 762$$

D'où :

$E(B_2) = X_0 = 10.394$ d'après la formule (61).

$$\sigma_X^2 = b^2 t^2 \left(\frac{1 - e^{-iN}}{i}\right)^2 \sigma_m^2 + (bm - p)^2\, e^{-2iN}\, \sigma_T^2$$

(Formule 64)

$$\sigma_X^2 = 767.000.000\, \sigma_m^2 + 719\, \sigma_T^2$$
$$\sigma_X^2 = 3.912.000 + 548.000 = 4.460.000.$$
$$\text{D'où } \sigma_X = 2.110$$

L'essentiel de la variance est dû à la variabilité de la teneur moyenne — il était à peu près évident de prime abord que la variabilité de la puissance moyenne interviendrait peu et il eût été acceptable de traiter cette dernière partie comme si la teneur intervenait seule (cf. chapitre III, § 3, 3*c*).

Le rapport de la valeur centrale X_0 à l'écart-type σ_X est grand :

$$z = \frac{X_0}{\sigma_X} = \frac{10.394}{2.110} = 4{,}92$$

et on peut substituer à la formule (65) donnant $E(B_3)$ un développement asymptotique (L) donné en annexe et dont le premier terme est :

$$E(B_3) = E(B_2)\left[1 + \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{z^3\sqrt{2\pi}}\right] - R$$

(1)* [Chap. III, § 4].

Le coût de la tranche supplémentaire de reconnaissance est :

$$R = 32 \times 4{,}25 = 136$$

D'où :

$$E(B_3) = 10.394 + 0{,}0002 - 136$$

Le bénéfice $E(B_3)$ que l'on peut espérer réaliser après avoir fait la deuxième tranche de reconnaissance est inférieur, au bénéfice $E(B_2)$ au point C, de la totalité du coût des travaux supplémentaires, à une somme infime près : 0,20 F. On en conclut, que dans la ligne de conduite à tenir *vis-à-vis du risque de ruine,* il n'y a certainement pas lieu de faire la seconde tranche de reconnaissance.

Une conclusion qui nous semble intéressante et assez inattendue apparaît : c'est ici la détermination correcte des paramètres techniques et non la crainte de ruine qui régit la densité de la reconnaissance à qui elle impose une valeur assez élevée.

ANNEXE

Formules asymptotiques

Dans l'expression générale (66), où dans les expressions particulières (69) et (72) figurent des intégrales de Gauss $G(u)$, où l'argument u est une variable réduite. Si l'on est voisin du cas marginal, u est petit, en valeur absolue, et il faut utiliser effectivement les tables de la fonction G. Mais si l'on est franchement *supra* ou *infra* marginal, on peut utiliser la formule asymptotique :

$$(K)\quad \begin{cases} G(u) = \dfrac{1}{u\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}u^2}\left[1 - \dfrac{1}{u^2} + \dfrac{1.3}{u^4} - \dfrac{1.3.5}{u^6} + \dots\right] \\ \qquad\qquad \text{pour } u > 0 \\ G(u) = 1 - G(-u) \qquad \text{pour } u < 0 \end{cases}$$

Ces formules sont utilisables, en pratique, dès que (u) est supérieur à 3 ou 4.

Par exemple, si X_0 est plus grand que σ_x, la formule (65) peut s'écrire :

$$(L)\quad \begin{cases} E(B_3) = \dfrac{\sigma X}{\sqrt{2\pi}}\, e^{\frac{-X_0^2}{2\sigma_x^2}}\left[\dfrac{\sigma_x^2}{X_0^2} - 1.3\left(\dfrac{\sigma_x}{X_0}\right)^4 + \dots\right] - R \\ \qquad\qquad X_0 < 0 \\ E(B_3) = X_0 + \dfrac{\sigma_x}{\sqrt{2\pi}}\, e^{\frac{-X_0^2}{2\sigma_x^2}}\left[\dfrac{\sigma_x^2}{X_0^2} - 1.3\left(\dfrac{\sigma_x}{X_0}\right)^4 + \dots\right] - R \\ \qquad\qquad \text{pour } X_0 > 0 \end{cases}$$

La décroissance très rapide de l'exponentielle permet de voir que, dès que l'on s'écarte de quelques écarts types du cas marginal, les travaux supplémentaires ne présentent pratiquement plus aucun intérêt économique.