GENÈSE ET SIGNIFICATION ÉNERGÉTIQUE DE LA LOI DE DARCY

G. MATHERON
École Nationale Supérieure des Mines de Paris

Extrait de la
REVUE DE L'INSTITUT FRANÇAIS DU PÉTROLE
ET ANNALES DES COMBUSTIBLES LIQUIDES
Vol. XXI, n° 11, novembre 1966
7, rue Nélaton, PARIS, 15e

Réf. 13.856

milieu poreux

D-149

GENÈSE ET SIGNIFICATION ÉNERGÉTIQUE DE LA LOI DE DARCY

G. MATHERON
École Nationale Supérieure des Mines de Paris.

Reprenant l'outil des fonctions aléatoires ergodiques utilisé dans un article antérieur, nous essayons d'effectuer ici, dans le cas d'un milieu poreux homogène, le passage du niveau granulométrique au niveau macroscopique. La loi de Darcy apparaît comme une conséquence, non pas des équations de Navier elles-mêmes, mais de leur linéarité, et d'une condition générale imposée à priori à un tel changement d'échelle. En examinant la signification énergétique des résultats obtenus, nous montrons ensuite que les propriétés classiques des perméabilités (symétrie et caractère défini positif) peuvent se déduire de l'équation de Navier.

Returning to the ergodic aleatory functions brought up in a previous article, this article attempts to made the transition from the granulometric to the macroscopic level in a homogeneous porous medium. Darcy's law appears as a result, not of Navier's equation themselves, but of their linearity and of general condition imposed a priori on such a change of scale. After making an examination of the energetical significance of the results obtained, we go on to show that the standard properties of permeabilities (symmetry and positive defined character) can be deduced from Navier's equation.

Utilizando nuevamente el método de las funciones aleatorias ergodicas utilizado en un artículo anterior, hemos tratado de efectuar acá, en el caso de un medio poroso homogéneo, el pasage del nivel granulométrico al nivel macroscópico. La ley de Darcy aparece como una consecuencia, no de las ecuaciones de Navier en ellas mismas, sino de su linearidad y de una condición general impuesta a priori a tal cambio de escala. Examinando la significación energética de los resultados obtenidos, nosotros mostramos a continuación que las propiedades clásicas de las permeabilidades (simetría y carácter definido positivo) pueden deducirse de la ecucción de Navier.

INTRODUCTION

Dans un article antérieur [1], nous avons essayé de montrer comment une perméabilité **macroscopique** constante pouvait apparaître dans un milieu à perméabilités ponctuelles variables possédant une certaine homogénéité statistique. Nous avons dû pour cela recourir à un langage probabiliste, celui de la théorie des fonctions aléatoires ergodiques et stationnaires. Pour éviter toute équivoque, il convient de souligner qu'un tel langage n'implique en aucune façon que l'on fasse

[1] Structure et Composition des Perméabilités. *Rev. Inst. Franç. du Pétrole*, 1966, **XXI**-4, 564.

appel à un **hasard** [1] hypothétique, conçu comme un accroc au déterminisme. Ainsi la mécanique statistique classique, renonçant à expliciter le fourmillement des particules élémentaires et l'entrecroisement sans fin de leurs interactions, ne retient fermement que ce seul point : à savoir que ces mouvements, si complexes soient-ils, obéissent strictement aux lois de la mécanique, et ce point lui suffit pour définir la température, la pression, etc., c'est-à-dire pour retrouver les concepts et les lois de la thermodynamique.

Le calcul des probabilités n'apparaît donc pas ici comme une science des lois du hasard, mais comme un outil conceptuel permettant de penser un changement d'échelle. Il fonctionne comme un grand simplificateur. De l'inépuisable richesse des phénomènes qui se manifestent à l'échelle inférieure, et de la complexité inextricable des structures qu'ils y dessinent, il ne retient rien, ou presque (c'est-à-dire seulement l'universel). Mais ce presque rien se révèle essentiel, et lui suffit pour reconstruire ou retrouver les concepts et les lois qui donnent la clé de ce qui se joue à l'échelle supérieure. Et à leur tour, ces nouveaux objets apparus à l'échelle supérieure vont entrer dans de nouvelles synthèses, nouer de nouvelles structures, dont la complexité croissante rendra bientôt nécessaire une nouvelle simplification et le passage à une échelle encore plus élevée...

Ainsi l'étude d'un milieu poreux, et des écoulements de filtration dont il est le théâtre, peut être entreprise à différents niveaux d'observation, chacun de ces niveaux étant caractérisé par des objets, des structures et des lois qui n'apparaissent qu'à son échelle. Outre un niveau microscopique, qui est celui des particules élémentaires, on doit distinguer un niveau granulométrique, où règne l'équation de Navier, puis un premier niveau macroscopique, où apparaît la loi de Darcy. Les perméabilités apparues à ce premier niveau macroscopique prennent une signification purement locale, et se manifestent comme régionalisées, lorsque l'on élève encore le point de vue, d'où passage à un deuxième niveau macroscopique, et genèse des perméabilités macroscopiques constantes étudiées dans l'article mentionné ci-dessus : dans une formation géologique un peu complexe, caractérisée comme la superposition de structures emboitées les unes dans les autres à des échelles différentes, le processus se répète, et on doit définir autant de perméabilités distinctes qu'il y a d'échelles de structure.

Dans le présent article, nous nous proposons d'étudier le passage du niveau granulométrique au premier niveau macroscopique (qui sera désigné dans la suite, sans plus, comme le niveau macroscopique). Il s'agit donc, si l'on veut, d'une théorie des milieux poreux homogènes. Du point de vue hydrodynamique, nous nous limiterons aux écoulements de filtration permanents de fluides visqueux incompressibles, et nous devrons examiner s'il est possible de passer des équations de Navier à la loi de Darcy. Dans une première partie, nous tenterons d'effectuer ce passage. Nous essayerons ensuite, dans une deuxième partie, de dégager la signification énergétique des perméabilités, et d'établir leurs propriétés principales (symétrie et caractère défini positif). Le système de notations utilisé sera le même que dans l'article précédent déjà cité, et, plus généralement, certains raisonnements développés en détail dans cet article ne seront repris ici que sous forme abrégée.

I. GENÈSE DE LA LOI DE DARCY

Nous examinerons successivement le niveau granulométrique et le niveau macroscopique, puis les règles formelles permettant de passer de l'un à l'autre. La loi de Darcy en résultera très simplement, moyennant une condition *a priori* selon laquelle seuls des écoulements uniformes ou quasi uniformes sont observables au niveau macroscopique.

[1] Le concept de hasard, c'est-à-dire proprement de « ce qui n'est ni voulu, ni prévu par l'homme » n'a rien de scientifique. La formulation axiomatique de la théorie des probabilités n'en fait aucun usage : le mot même de hasard n'est plus guère utilisé que par une sorte de concession à une habitude ancienne, ou pour rendre plus intuitifs les exemples traités.

I.1. Le niveau granulométrique et l'équation de Navier.

Le niveau granulométrique correspond à des éléments de volumes grands à l'échelle des particules élémentaires, mais petits à l'échelle de la granulométrie. C'est à ce niveau que la mécanique statistique permet, en tout point x appartenant aux pores, de définir la pression $p(x)$ et la vitesse $v^i(x)$ d'un écoulement, et d'établir l'équation de Navier :

$$\frac{\partial (\rho v_i)}{\partial t} + \partial_j (\rho v^j v_i) - \mu \Delta v_i = -\partial_i p + f_i \qquad [1]$$

à laquelle on doit ajouter l'équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \partial_i (\rho v^i) = 0$$

ρ désignant la masse spécifique du fluide, p la pression, μ la viscosité, et f_i la densité de forces. Dans tous les cas usuels, $f_i = -\partial_i \Phi$ dérive d'un potentiel Φ. Si l'on remplace la pression p par **la charge** $p + \Phi$, le terme f_i disparaît du second membre de [1]. Dans la suite de cette étude, nous prendrons donc $f_i = 0$, et nous désignerons par p la charge elle-même et non plus la pression.

L'équation [1] de Navier n'est pas linéaire, à cause de la présence du terme quadratique en v^j qui figure dans son premier membre. Mais on sait que les écoulements de filtration sont, le plus souvent, suffisamment lents pour que ce terme quadratique puisse être négligé. Si, de plus, l'écoulement est supposé permanent, et le fluide incompressible ($\rho = C^{te}$), l'équation de Navier et l'équation de continuité, toutes deux **linéaires**, s'écrivent :

$$\begin{cases} \partial_i p = \mu \Delta v_i \\ \partial_i v^i = 0 \end{cases} \qquad [2]$$

On remarquera que (pour un fluide supposé incompressible) ces deux relations épuisent totalement le contenu de ce que la mécanique statistique est suceptible de nous apporter [1].

A ces équations, valables en tout point x des pores, on doit ajouter des conditions aux limites, d'ailleurs extraordinairement complexes, exprimant que la vitesse v_i s'annule à la surface de séparation des grains et des pores. La géométrie des grains et des pores peut être représentée par **la porosité ponctuelle** $\omega(x)$, qui est une fonction en tout ou rien égale à zéro dans les grains et à 1 dans les pores. Si l'on connaît cette fonction $\omega(x)$ et si l'on se donne les conditions aux limites extérieures, le système [2] admet une solution unique, de sorte que le gradient $\partial_i p$ et la vitesse v^i apparaissent comme des fonctionnelles parfaitement déterminées (bien que nous ne soyons pas capables de les expliciter) de $\omega(x)$ et des conditions aux limites extérieures.

Enfin, de la linéarité du système [2] résulte un principe de superposition linéaire : si l'on connaît plusieurs solutions distinctes respectant la géométrie du milieu [définie par une même fonction $\omega(x)$], toute combinaison linéaire de ces solutions représente un écoulement possible dans ce même milieu.

---

(1) On voit ainsi qu'il n'est pas possible de déduire directement la **symétrie** des perméabilités du théorème général de mécanique statistique qui porte le nom d'Onsager. En effet, c'est au niveau granulométrique que ce théorème peut être appliqué. Mais, à ce niveau, il n'y a pas encore d'équation *phénoménologique* du type de la loi de Darcy, mais seulement l'équation de Navier, de sorte que le théorème est sans objet. Il n'est pas possible non plus de court-circuiter l'étape granulométrique, en passant directement de l'échelle des particules élémentaires au niveau macroscopique. En effet, la définition du milieu poreux homogène à partir d'une fonction aléatoire en tout ou rien ergodique et stationnaire (porosité $\omega(x)$, voir page suivante) relève d'une formalisme étranger à celui de la mécanique statistique, et rien ne prouve à priori que dans la synthèse de ces deux formalismes la validité du théorème d'Onsager reste assurée. C'est donc de l'équation de Navier elle-même qu'il convient de déduire, comme nous le ferons page suivante, la symétrie des perméabilités.

I.2. Le niveau macroscopique et la loi de Darcy.

Le niveau macroscopique, de son côté, correspond à des éléments de volume suffisamment grands, vis-à-vis des dimensions granulométriques, pour que le milieu poreux puisse être regardé comme homogène. Les grandeurs macroscopiques définies à cette échelle, la charge P et le flux Q^i se déduisent des quantités analogues déjà introduites au niveau granulométrique par des opérations **linéaires** que nous expliciterons dans le paragraphe suivant.

Dans un tel milieu homogène, on constate expérimentalement que ces grandeurs macroscopiques obéissent à la loi de Darcy. Cette loi, complétée par l'équation de continuité, conduit au système suivant :

$$\left\{ \begin{aligned} & Q^i = -\frac{\rho}{\mu} K^{ij} \partial_j P \\ & \partial_i Q^i = 0 \end{aligned} \right. \qquad [3]$$

où les K^{ij} sont les composantes du tenseur des perméabilités (le flux, ou débit Q^i est exprimé en masse de fluide et non en volume).

On sait que la loi de Darcy — relation purement *phénoménologique* — ne peut, en aucune manière, se déduire de l'équation de Navier. Les systèmes [2] et [3] ne présentent aucun lien logique. Leur seul caractère commun est **leur linéarité.** On soupçonne que l'équation phénoménologique de Darcy doit être une conséquence, non pas de l'équation de Navier [2] elle-même, mais seulement du caractère linéaire de cette équation et de certaines conditions, générales et formelles, auxquelles doit être soumise l'opération de changement d'échelle faisant passer du niveau granulométrique au niveau macroscopique (1). C'est qu'en effet, n'importe quel écoulement microscopique ne correspond pas à un phénomène macroscopique observable. On peut penser que seuls seront observables macroscopiquement des écoulements pouvant être considérés comme **localement uniformes au niveau macroscopique**, ou, comme nous dirons, **quasi uniformes**, c'est-à-dire assimilables à des écoulements uniformes pour une échelle intermédiaire, correspondant à des dimensions, peut-être petites au niveau macroscopique, mais suffisamment grandes au niveau granulométrique pour que les propriétés du milieu y soient statistiquement homogénéisées par effet d'ergodicité. Un écoulement qui ne serait pas de ce type se présenterait à l'expérimentateur comme la superposition de deux composantes : la première, localement uniforme, vérifierait les exigences formulées ci-dessus. La deuxième apparaîtrait comme une sorte de fourmillement aléatoire de résultante moyenne nulle, c'est-à-dire comme une sorte de turbulence. On sait que les écoulements de filtration sont toujours assez lents pour que de telles turbulences ne se manifestent pas.

I.3. Passage d'un niveau à l'autre.

Pour rendre concevable cette opération de changement d'échelle, nous devons recourir au langage des fonctions aléatoires. La porosité ponctuelle $\omega(x)$, dont la donnée définit la géométrie du milieu poreux, sera donc interprétée comme une **réalisation d'une fonction aléatoire en tout ou**

---

(1) On peut remarquer que seules les valeurs numériques des perméabilités dépendent du choix de l'équation de l'écoulement au niveau granulométrique, mais non la forme même de la loi de Darcy (relation linéaire entre gradient et flux). Cette forme subsistera si l'on remplace l'équation de Navier par une équation linéaire quelconque. Les considération auxquelles on se livre ici expliquent donc aussi bien la genèse de la loi d'Ohm à partir des équations linéaires de l'électromagnétisme, et d'autres phénomènes analogues. Cette identification ne concerne cependant que la forme linéaire de la loi et ne s'étend pas aux valeurs numériques des coefficients. On ne doit pas s'attendre à observer de relation simple entre le tenseur des perméabilités d'un milieu poreux et le tenseur des conductivités qui prend naissance dans ce même milieu lorsqu'on le sature d'une solution conductrice.

rien, ergodique et stationnaire, et toutes les propriétés macroscopiques du milieu, y compris la perméabilité, devront se déduire de la seule loi spatiale de $\omega(x)$.

Nous avons déjà indiqué que le gradient $\partial_i p(x)$ et la vitesse $v^i(x)$ de l'écoulement au niveau granulométrique apparaissaient comme des fonctionnelles très complexes de $\omega(x)$ et des conditions aux limites extérieures. Par l'intermédiaire de ces mêmes fonctionnelles, $\partial_i p$ et v^i deviennent elles-mêmes des fonctions aléatoires, lorsque $\omega(x)$ est considérée comme une réalisation d'une fonction aléatoire, et la loi spatiale de $\partial_i p$ et v^i ne dépend que de celle de $\omega(x)$.

Or le flux et le gradient macroscopique Q^i et $\partial_i P$ se déduisent de v^i et $\partial_i p$ par certaines opérations de moyennes spatiales qui, grâce à l'hypothèse d'ergodicité, se ramènent à des espérances mathématiques. Le flux Q^i, moyenne spatiale du flux *granulométrique* égal à ρv^i dans les pores et nul dans les grains, sera donc donné par :

$$Q^i = E[\omega \rho v^i] \tag{4}$$

La pression macroscopique P, de son côté, apparaît comme une moyenne spatiale de la pression p du fluide dans les pores, cette moyenne spatiale devant cette fois être rapportée au volume utile, c'est-à-dire au volume effectif des pores. Par ergodicité, on peut donc définir P comme l'espérance mathématique **conditionnelle** de $p(x)$ dans l'hypothèse où le point x appartient aux pores, ce qui s'écrit :

$$P = E\,|\,p(x)\,|\,\omega(x) = 1\,| = \frac{E(\omega p)}{E(\omega)} \tag{5}$$

et, pour le gradient :

$$\partial_i P = \frac{1}{E(\omega)}\,\partial_i E(\omega p) \tag{6}$$

Lorsque les conditions aux limites extérieures sont données, les relations [4] et [5] montrent que les grandeurs macroscopiques P et Q^i ne dépendent que de la loi spatiale de $\omega(x)$, puisque p et v^i sont des fonctionnelles parfaitement définies de $\omega(x)$. C'est donc bien de la seule loi spatiale de $\omega(x)$ que doivent être tirées les propriétés macroscopiques du milieu.

Remarque :

D'une manière générale $p(x)$ et $v^i(x)$ sont définis uniquement dans les pores. Nous les supposerons identiquement nuls dans les grains, de manière à étendre leur définition à l'espace entier. En raison des conditions aux limites imposées à l'équation de Navier, v^i s'annule à la surface de séparation des grains et des pores, et reste, par suite, continue dans tout l'espace. L'équation de continuité :

$$\partial_i v^i = 0 \tag{7}$$

est donc valable **dans l'espace entier**. Par contre $p(x)$ subit une discontinuité à la traversée de la surface de séparation. Ses dérivées doivent être prises au sens de la théorie des distributions. Nulles dans les grains, identiques dans les pores aux dérivées usuelles, elles coïncident, sur la surface de séparation, avec une mesure de Dirac portée par cette surface. Comme les v^i s'annulent sur cette surface, toute expression du type $v^i \partial_i p$ coïncide avec la fonction usuelle, de même expression, définie dans les pores et nulle dans les grains.

Ainsi, l'équation de Navier [2], valable dans les pores au sens usuel, ne peut être étendue à l'espace entier qu'à une mesure de Dirac près portée par la surface de séparation. Par contre, l'équation :

$$v^i \partial_i p = \mu v^i \Delta v_i \tag{8}$$

est vérifiée dans tout l'espace, et il est en particulier légitime de prendre l'espérance mathématique de ses deux membres.

I.4. Genèse de la loi de Darcy.

Parmi les solutions du système de Navier [2], considérons en premier lieu celles pour lesquelles la vitesse $v^i(x)$ et le gradient $\partial_i p(x)$ sont des fonctions aléatoires stationnaires. Pour de telles solutions, les relations [4] et [6] montrent que flux et gradient macroscopiques sont constants, autrement dit caractérisent un **écoulement macroscopique uniforme**. Nous supposerons qu'il existe effectivement de telles solutions stationnaires, et, plus précisément, nous admettrons l'existence et l'unicité d'une solution du système de Navier sous forme de fonctions aléatoires vérifiant les deux conditions suivantes :

1) $v^i(x)$ et $\partial_i p(x)$ sont des fonctions aléatoires stationnaires (1).

2) L'expression $\frac{1}{E(\omega)} \partial_i E(\omega p)$ est égale à un vecteur constant de composantes covariantes données d'avance.

Les démarches suivantes reproduisant celles de l'article antérieur déjà cité, on nous permettra d'en abréger l'exposé. L'espace ayant n dimensions, on choisit un système de **solutions privilégiées**, constitué de n solutions stationnaires distinctes, indexées par l'indice l, de vitesse v^{il} et de gradients $\partial_i p^l$ telles que les gradients macroscopiques :

$$\partial_i P^l = \frac{1}{E(\omega)} \partial_i E[\omega p^l]$$

coïncident avec les vecteurs colonnes de la matrice associée à un tenseur donné (par exemple le tenseur δ^l de Kronecker). De cette manière $\partial_i p^l$ et v^{il} possèdent l'invariance tensorielle.

A la solution privilégiée d'indice l correspond un écoulement de flux Q^{il} et de gradient $\partial_j P^l$ constants, donnés par les relations [4] et [6]. Plus généralement toute combinaison linéaire (à coefficients ϖ_l constants) des solutions privilégiées, de la forme :

$$\left\{ \begin{aligned} \partial_j p &= \varpi_l \partial_j p^l \\ v^i &= \varpi_l v^{il} \end{aligned} \right. \qquad [9]$$

est une solution stationnaire et correspond à l'écoulement macroscopique uniforme de paramètres :

$$\left\{ \begin{aligned} \partial_j P &= \varpi_l \partial_j P^l \\ Q^i &= \varpi_l Q^{il} \end{aligned} \right. \qquad [10]$$

et inversement, toute solution stationnaire peut être mise sous la forme [9] à cause de l'unicité des solutions assujetties aux conditions posées ci-dessus.

Il en résulte immédiatement que les écoulements macroscopiques uniformes obéissent à la loi de Darcy. Il suffit, pour le voir, d'éliminer les ϖ_l entre les relations [10]. En particulier, adoptons, ce qui est toujours loisible, le système privilégié dans lequel les composantes du gradient macrosco-

(1) Du fait que p n'est réellement définissable que dans les pores, le gradient n'est en fait stationnaire que conditionnellement, c'est-à-dire dans les pores. Nous passons ici sous silence cette petite difficulté.

pique $\partial_j P^l$ s'identifient aux composantes δ_j^l ($= 0$ si $l \neq j$, $= 1$ si $l = j$) du tenseur de Kronecker. La première relation [10] se réduit à :

$$\partial_j P = \varpi_j \qquad [11]$$

Les constantes ϖ_l ne sont donc pas autre chose, dans ce cas, que les composantes covariantes du gradient. La deuxième relation [10] se réduit à la loi de Darcy. Posant, en effet :

$$\frac{\rho}{\mu} K^{ij} = -Q^{ij}$$

cette relation, compte tenu de [11], se réduit bien à :

$$Q^i = -\frac{\rho}{\mu} K^{ij} \partial_j P$$

Examinons, maintenant, le cas des **écoulements quasi uniformes**, c'est-à-dire des écoulements localement uniformes au niveau macroscopiques, tels qu'ils ont été définis au paragraphe I.2. Le gradient et la vitesse d'un écoulement de ce type peuvent encore se mettre sous la forme [9], à condition de remplacer les constantes ϖ_l par des fonctions $\varpi_l(x)$ variant très lentement dans l'espace à l'échelle de la granulométrie. En effet, les dérivées des $\varpi_l(x)$ sont alors négligeables, vis-à-vis des dérivées correspondantes des solutions privilégiées, de sorte que ces combinaisons linéaires à coefficients lentement variables vérifient encore les équations [2] de l'écoulement. En passant aux espérances mathématiques, on obtient ensuite le gradient et le flux (variables) de l'écoulement macroscopique sous la forme :

$$\begin{cases} Q^i(x) = \varpi_l(x)\, Q^{il} \\ \partial_j P(x) = \varpi_l(x)\, \partial_j P^l \end{cases}$$

et l'elimination des $\varpi_l(x)$ conduit à nouveau à la loi de Darcy, avec les mêmes perméabilités K^{ij} que dans le cas des écoulements uniformes.

Naturellement, les fonctions $\varpi_l(x)$ ne peuvent pas être quelconques. Avec le choix particulier $\partial_j P^l = \delta_j^l$ des solutions privilégiées, la relation [11] montre que les $\varpi_j(x)$ doivent être les composantes d'un gradient, et de plus $Q^i(x)$ doit vérifier la relation de conservation. Autrement dit, on obtient le système habituel :

$$\begin{cases} Q^i = -\dfrac{\rho}{\mu} K^{ij} \partial_j P \\ \partial_i Q^i = 0 \end{cases}$$

On voit ainsi que les écoulements quasi uniformes vérifient le système de Darcy pour la simple raison que de tels écoulements se présentent comme des combinaisons linéaires à coefficients lentement variables des n solutions privilégiées. La loi de Darcy n'est donc pas une conséquence des équations de Navier. Elle résulte seulement de la linéarité de ces équations, et de la condition *a priori*, indiquée au paragraphe I.2. selon laquelle seuls peuvent être observables, au niveau macroscopique, les écoulements localement uniformes à ce niveau.

Remarque :

Le résultat obtenu a un caractère très formel. Nous avons, en effet, rendu compte de la forme de la loi de Darcy, mais nous sommes incapables de calculer effectivement la perméabilité à partir de la loi spatiale de $\omega(x)$: il faudrait pour cela que nous puissions former explicitement la loi spatiale des solutions privilégiées à partir de celle de $\omega(x)$, et les difficultés d'une telle entreprise semblent presque insurmontables. Pour atténuer un peu cette conclusion pessimiste, nous allons maintenant, à l'aide de considérations énergétiques, établir quelques propriétés générales des perméabilités (symétrie et caractère défini positif).

II. SIGNIFICATION ÉNERGÉTIQUE DES PERMÉABILITÉS

Partant de l'expression classique de la densité de puissance consommée par les forces de viscosité, nous allons en déduire l'existence d'un tenseur W^{ij} de densité de puissance, symétrique et défini positif, et montrer que ce tenseur se relie très simplement à la perméabilité du milieu.

II.1. La densité de puissance consommée.

En mécanique des fluides, le tenseur des déformations e_{ij} se définit classiquement, sous forme covariante, en symétrisant le gradient des vitesses :

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i v_j + \partial_j v_i) \qquad [12]$$

et l'on sait que la densité W de puissance consommée par les forces de viscosité admet l'expression :

$$W = 2\mu e^{ij} e_{ij} = 2\mu e^{ij} \partial_i v_j \qquad [13]$$

Dans le problème étudié ici, ces relations s'appliquent au niveau granulométrique et en tout point x appartenant aux pores. D'autre part, on peut prendre, conventionnellement, $v^i(x)$ et $p(x)$ identiquement nuls à l'intérieur des grains. Comme les vitesses v^i s'annulent à la surface de séparation des grains et des pores, en raison des conditions aux limites imposées aux équations de Navier, les dérivées $\partial_i v_j$ sont définissables dans l'espace entier, et il en est de même du tenseur de déformation e_{ij} et de la densité de puissance W : ces expressions sont d'ailleurs identiquement nulles à l'intérieur des grains. Il en résulte que l'on peut prendre l'espérance mathématique des deux membres de [13], et que l'expression E(W) ainsi obtenue va représenter la densité de puissance consommée évaluée au niveau macroscopique. On obtient ainsi :

$$E(W) = 2\mu E(e^{ij}\partial_i v_j) = 2\mu E\left|\partial_i (e^{ij} v_j)\right| - 2\mu E(v_j \partial_i e^{ij})$$

Comme les v_j sont supposés stationnaires, il en est de même des e^{ij} et par suite :

$$E\left|\partial_i (e^{ij} v_j)\right| = 0$$

D'autre part, compte tenu de la relation de continuité $\partial_i v^i = 0$, on a, d'après [12] :

$$\partial_i e^{ij} = \frac{1}{2}\Delta v^j$$

Δ désignant le laplacien. Finalement, il vient :

$$E(W) = -\mu E(v_j \Delta v^j)$$

Pour évaluer le deuxième membre de cette relation, nous pouvons utiliser l'équation [8], puisque celle-ci (contrairement à l'équation de Navier elle-même) est valable dans l'espace entier. Nous obtenons ainsi la relation :

$$E(W) = -E(v^i \partial_i p) \tag{15}$$

Ainsi la densité de puissance consommée, évaluée au niveau macroscopique coïncide avec l'espérance du produit scalaire de la vitesse et du gradient, pris au niveau granulométrique. Par un raisonnement déjà utilisé dans l'article précédent, nous allons montrer qu'en fait cette densité de puissance s'identifie au produit scalaire des mêmes grandeurs évaluées au niveau macroscopique.

En effet, la pression $p = \omega p$ est supposée identiquement nulle dans les grains, et son gradient est supposé stationnaire. Si $\partial_i P$ désigne le gradient macroscopique constant défini en [5[, nous pouvons mettre la pression p sous la forme :

$$p = \omega [x^j \partial_j P + \lambda] \tag{16}$$

où λ est une fonction aléatoire stationnaire. Évaluons alors l'expression :

$$v^i \partial_i p = \partial_i (v^i p)$$

Comme $\omega v^i = v^i$ (puisque v^i est nul dans les grains) et compte tenu de $\partial_i v^i = 0$, on obtient :

$$v^i \partial_i p = \partial_j P \, \partial_i (v^i x^j) + \partial_i (\lambda v^i) = v^i \partial_i P + \partial_i (\lambda v^i)$$

Mais λv^i est stationnaire, de sorte que l'espérance de son gradient est nulle. Passant aux espérances, il vient donc :

$$E(v^i \partial_i p) = E(v^i) \partial_i P \tag{17}$$

D'après [4], $E(v^i)$ se rattache immédiatement au flux macroscopique Q^i, de sorte que la densité de puissance $E(W)$ s'exprime aussi bien à l'aide du produit scalaire du flux et du gradient macroscopiques constants. La relation [15] se complète donc ainsi :

$$E(W) = -E(v^i \partial_i p) = -\frac{1}{\rho} Q^i \partial_i P \tag{18}$$

II.2. Le tenseur densisé de puissance.

Donnons-nous, maintenant, un système de solutions privilégiées v^{il}, $\partial^i p^l$ correspondant au flux et aux gradients macroscopiques constants Q^{il} et $\partial_j P^l$, et soit $e^{ij,l}$ le tenseur de déformation associé à la solution privilégiée d'indice l. Toute solution stationnaire se présente comme une combinaison linéaire de type [9], et son tenseur de déformation est de la forme :

$$e^{ij} = \varpi_l e^{ij,l}$$

D'après [13], la densité de puissance consommée W est donc de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} W = \varpi_l \varpi_s W^{ls} \\ W^{ls} = 2\mu e^{ij,l} e^s_{ij} \end{array} \right. \tag{19}$$

Nous voyons ainsi apparaître un tenseur densité de puissance consommée, dont les composantes W^{ls} sont manifestement **symétriques** relativement aux indices l et s. A partir de l'expression [19] de W^{ij}, il suffit de reprendre point par point la chaîne de raisonnements qui nous a permis au paragraphe précédent de passer de [13] aux relations [18] pour obtenir de la même manière :

$$E(W^{ij}) = -E(v^{ij}\partial_i p^j) = -\frac{1}{\rho} Q^{ij}\partial_i P^j \qquad [20]$$

Le tenseur W^{ij} est d'ailleurs non seulement symétrique, mais également défini positif. En effet, la densité d'énergie consommée par les forces de viscosité est toujours positive, de sorte que la forme quadratique $\varpi_i \varpi_j W^{ij}$ est positive quelles que soient les constantes arbitraires ϖ_i. L'espérance $E(W^{ij})$ possède évidemment ces mêmes propriétés, ainsi par suite que les teneurs qui figurent au deuxième et troisième membre de [20].

II.3. Relation entre perméabilité et densité de puissance.

Au niveau macroscopique les solutions privilégiées vérifient la loi de Darcy, c'est-à-dire les relations :

$$Q^{ij} = -\frac{\rho}{\mu} K^{ij}\partial_j P^l$$

Portons cette expression de Q^{ij} dans la deuxième relation [20]. Nous obtenons :

$$E(W^{ij}) = \frac{1}{\mu} K^{ij}\partial_j P^l \partial_i P^l \qquad [21]$$

Ainsi le tenseur des perméabilités se déduit directement de l'espérance du tenseur densité de puissance. En particulier, si les solutions privilégiées ont été choisies de telle manière que les $\partial_j P^l$ coïncident avec les composantes δ_j^l du tenseur de Kronecker, la relation [21] se réduit simplement à :

$$K^{ij} = \mu E(W^{ij})$$

Au paragraphe précédent, nous avons montré que le tenseur $E(W^{ij})$ est nécessairement symétrique et défini positif. Le tenseur K^{ij} des perméabilités possède donc les mêmes propriétés.

Manuscrit reçu en août 1966.