milieu poreux

D-182

STRUCTURE ET COMPOSITION DES PERMÉABILITÉS

G. MATHERON

Bureau de Recherches Géologiques et Minières.

Cette étude tente de montrer comment une perméabilité macroscopique constante K peut apparaître dans un milieu à perméabilités ponctuelles variables k possédant une certaine homogénéité statistique, et de préciser la loi de composition permettant de déterminer K à partir des paramètres statistiques de k. Les perméabilités ponctuelles, prises sous forme tensorielle (pour tenir compte d'une anisotropie possible du milieu) sont traitées comme une fonction aléatoire, tensorielle, ergodique et stationnaire (ceci exprime, en langage mathématique précis, la notion courante d'homogénéité statistique à grande échelle, et permet de remplacer les moyennes spatiales usuelles par un symbole E d'espérance mathématique possédant une signification probabiliste précise). On établit les trois propositions suivantes :

1. La matrice des perméabilités ponctuelles peut se mettre sous la forme $k = CA$ du produit de deux matrices aléatoires stationnaires. L'une C est conservative (de divergence nulle) ; l'autre, A, est l'inverse d'une matrice gradient B. Les vecteurs colonnes de C et de B représentent, respectivement, le flux et le gradient de pression associés à un système de solutions privilégiées macroscopiquement uniformes.

2. La perméabilité macroscopique constante K est alors donnée par une loi de composition qui s'écrit, sous forme matricielle

$$K = E(C)\,[E(A^{-1})]^{-1}$$

3. M et M' étant des matrices définies positives, on écrit $M \leq M'$ lorsque $M' - M$ est elle-même définie positive. On a les inégalités fondamentales :

$$[E(k^{-1})]^{-1} \leq K \leq E(k)$$

qui montrent que les perméabilités ponctuelles k se composent toujours selon un mode intermédiaire entre les pondérations harmonique et arithmétique. Ce résultat, classique dans l'étude des milieux stratifiés, est démontré ici en toute généralité.

This study tries to demonstrate how a constant macroscopic permeability K can appear in a medium with variable point permeabilities k that have a certain statistical homogeneity. It also attempts to define the law of composition that enables K to be determined from the statistical parameters of k. The point permeabilities, considered in their tensorial form (so as to account for a possible anisotropy of the medium), are treated as an aleatory, tensorial, ergodic and stationary function (which, in precise mathematical terms, expresses the current notion of large-scale statistical homogeneity and enables standard space averages to be replaced by the symbol E for expected value which has a precise probabalistic meaning). The three following proposals are established :

1. The point permeability matrix can be expressed as $K = CA$ of the product of two stationary contingent matrices. One of these matrices, C, is conservative (with no divergence) ; the other, A, is the inverse of a B-gradient matrix. The column vectors of C and B represent, respectively, the flux and the pressure gradient associated with a system of macroscopically uniform privileged solutions.

2. The constant macroscopic permeability K is then defined by a law of composition which is written in its matricial form :

$$K = E(C)\,[E(A^{-1})]^{-1}$$

3. Assuming M and M′ as positive defined matrices, $M \leqslant M'$ can be written when $M' - M$ itself is defined as positive. This then produces the fundamental equalities

$$[E(k^{-1})]^{-1} \leqslant K \leqslant E(k)$$

which show that the point permeabilities k are always constituted according to an intermediate method between harmonic and arithmetic ponderations. This finding, which is now standard in the study of stratified media, is described here in its entire generality.

Este estudio tiende a demostrar como una permeabilidad macroscópica constante K puede aparecer en un medio a permeabilidades puntuales variables k poseyendo una cierta homogeneidad estadística, y a precisar la ley de composición que permite determinar K a partir de los parámetros estadísticos de k. Las permeabilidades puntuales, tomadas en forma tensorial (para tener en cuenta de una anisotropía posible del medio) se tratan como una función aleatoria, tensorial, ergotica y estacionaria (esto expresa, en lenguaje matemático preciso la noción corriente de homogeneidad estadística a gran escala y permite reemplazar los medios espaciales usuales por un símbolo E de esperanza matemática poseyendo una significación probabilística precisa). Se establecen las tres proposiciones siguientes :

1. La matriz de las permeabilidades puntuales puede ponerse bajo la forma $k = CA$ del producto de las dos matrices aleatorias estacionarias. Una de ellas C es conservativa (de divergencia nula), la otra A es la inversa de una matriz gradiente B. Los vectores columnas de C y de B representan, respectivamente, el flujo y el gradiente de presión asociados a un sistema de soluciones privilegiades, macroscopicamente uniformes.

2. La permeabilidad macroscópica constante K es dada entonces por una ley de composición que se escribe bajo forma matricial :

$$K = E(C)\,[E(A^{-1})]^{-1}$$

3. Siendo M y M′ matrices definidas positivas, se escribe $M \leqslant M'$ cuando $M' - M$ es ella misma definida positiva. Se tienen las designalidades fundamentales :

$$[E(k^{-1})]^{-1} \leqslant K \leqslant E(k)$$

que muestran que las permeabilidades puntuales k se componen siempre de acuerdo a un método intermediario entre las ponderaciones harmónica y aritmética. Este resultado, clásico en el estudio de los medios estratificados, se demuestra acá en toda generalidad.

I. INTRODUCTION

Dans la plupart des milieux poreux naturels, les perméabilités ponctuelles k sont extrêmement variables. Cependant, cette hétérogénéité au niveau ponctuel dissimule souvent une homogénéité, de nature statistique, qui se manifeste lorsque l'on change l'échelle d'observation. Au niveau « macroscopique », c'est-à-dire vis-à-vis d'écoulements dont les lignes de courant se déploient en grandes nappes, les propriétés hydrodynamiques d'un tel milieu apparaissent, à nouveau, comme homogènes, et peuvent être caractérisées par une perméabilité macroscopique K constante.

Dans ces conditions, existe-t-il des règles précises permettant de calculer la perméabilité K connaissant les caractéristiques statistiques des k ? Dans le cas particulier d'un milieu stratifié, on sait que les règles de pondérations arithmétique $K = E(k)$ et harmonique $K^{-1} = E(k^{-1})$ s'appliquent, respectivement, aux modes de couplage en parallèle et en série. Dans le cas général, on applique souvent une règle de pondération géométrique $\log \cdot K = E(\log k)$, qui donne, en général, des ordres de grandeur raisonnable. Cette règle empirique, cependant, manque de justification théorique. On peut tout au plus remarquer que la moyenne géométrique est toujours comprise entre les moyennes harmonique et arithmétique, qui constituent les deux pôles extrêmes dans le cas des milieux stratifiés, et soupçonner, par suite, une proposition générale, que nous démontrerons effectivement, et qui est la suivante : dans tous les cas (que le milieu soit stratifié ou non) la **perméabilité macroscopique K**

est toujours comprise entre la moyenne harmonique $[E(k^{-1})]^{-1}$ **et la moyenne arithmétique E (k).**

Hypothèses et notations.

Le plus souvent, les milieux naturels ne sont pas isotropes. En tout point x d'un tel milieu, il existe n directions principales (n, nombre des dimensions de l'espace, est égal à 2 ou à 3, mais il est préférable de ne pas spécifier sa valeur, de manière à traiter simultanément les cas $n = 3$ et $n = 2$).

Mais ces directions principales, peuvent elles-mêmes varier dans l'espace. C'est pourquoi la perméabilité ponctuelle doit être représentée par un tenseur $k^{ij}(x)$, lui-même variable dans l'espace, c'est-à-dire fonction du point x, ou, comme nous dirons, **régionalisé**. La matrice des composantes k^{ij} de ce tenseur régionalisé sera supposée **symétrique** ($k^{ij} = k^{ji}$) et **définie positive** [1].

Nous utiliserons de manière systématique les notations tensorielles classiques, et, notamment, la convention d'Einstein, selon laquelle on doit sommer sur tout indice répété en position contravariante (supérieure) et covariante (inférieure). Par exemple, on écrira :

$$g_{ij}x^ix^j \qquad \text{au lieu de} \qquad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g_{ij}x^ix^j$$

La dérivée $\frac{\partial_i \Phi}{\partial x^i}$ d'une fonction φ par rapport à la coordonnée x^i sera notée $\partial_i \Phi$. Ainsi, avec la convention de sommation, une expression comme $\partial_i q^i$ représente la divergence du vecteur de composantes contravariantes q^i. Le tenseur métrique, donnant l'élément d'arc sous la forme :

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j$$

sera toujours noté g_{ij}, et son inverse g^{ij}. Nous utiliserons aussi les symboles de Kronecker δ_i^j ($\delta_i^j = 1$ si $i = j$, 0 si $i \neq j$).

Au niveau ponctuel, nous noterons k^{ij} le tenseur (régionalisé) des perméabilités et h_{ij} son inverse, qui est le tenseur des résistivités. Au niveau macroscopique, les tenseurs correspondants (constants) seront notés K^{ij} et H_{ij}.

L'écoulement, dans ce milieu, d'un fluide incompressible de masse spécifique ρ et de viscosité μ est caractérisé par une pression $p(x)$ (ou, plus généralement, une charge) et un flux $q^i(x)$, fonctions du point x. Le vecteur q^i est un flux de matière (le produit scalaire $q^i\beta_i$ représente la masse de fluide traversant un élément de surface unité dont la normale a les cosinus directeurs β_i). Nous supposons que tout écoulement **permanent** obéit à la loi de Darcy :

$$q^i = -\frac{\rho}{\mu} k^{ij}\partial_j p$$

Pour simplifier les notations, nous prendrons $\frac{\rho}{\mu} = 1$ (ou, ce qui revient au même, nous remplacerons le tenseur k par le tenseur $k' = \frac{\rho}{\mu} k$). Les équations de cet écoulement sont constituées par la loi

(1) Dans un article ultérieur, où nous étudierons la signification énergétique de la loi de Darcy, nous montrerons que la symétrie des k^{ij} découle nécessairement des équations de Navier qui régissent l'écoulement au niveau granulométrique. Le caractère défini positif résulte des considérations énergétiques simples exposées au paragraphe III de la présente étude.

de Darcy et la loi de conservation de la quantité de fluide, c'est-à-dire par le système suivant, que nous appellerons **système de Darcy** :

$$\begin{cases} q^i = -k^{ij}\partial_j p \\ \partial_i q^i = 0 \end{cases} \qquad [1]$$

Au flux $q^i(x)$ et à la pression $p(x)$, définis au niveau ponctuel, correspondent un flux Q^i et une pression P macroscopiques, qui se déduisent des précédents à l'aide de certaines moyennes spatiales, effectuées dans des volumes suffisamment grands pour que les propriétés du milieu y apparaissent comme homogénéisées. Un arbitraire assez large préside, d'ailleurs, à la définition de ces moyennes spatiales.

C'est pour éviter cet arbitraire que l'on est conduit à employer le langage des **fonctions aléatoires** Du point de vue mathématique, une fonction aléatoire est définie par la donnée d'une loi de probabilité sur un ensemble, ou espace, de fonctions. Toute fonction particulière obtenue à l'issue d'un tirage au sort effectué sur cet espace de fonctions et selon cette loi de probabilité, s'appelle une **réalisation** de la fonction aléatoire.

D'autre part, si l'on considère m points $x_1, x_2, \dots x_m$ de l'espace, les valeurs $f(x_1), f(x_2) \dots f(x_m)$ prises en ces points par la fonction aléatoire $f(x)$ constituent une variable aléatoire (ordinaire) à m composantes. Il leur correspond une loi de probabilité à m variables, qui dépend évidemment du choix des points d'appui $x_1 \dots x_m$. L'ensemble de toutes ces lois, pour tous les systèmes de points d'appui en nombre quelconque (mais fini) constitue la **loi spatiale** de la fonction aléatoire. Le plus souvent, une fonction aléatoire peut être considérée comme définie par la donnée de sa loi spatiale.

Une fonction aléatoire est dite **stationnaire** si sa loi spatiale est invariante par translation, c'est-à-dire si les $f(x_1), f(x_2) \dots f(x)_m)$ ont la même loi de probabilité que $f(x_1 + h), f(x_2 + h) \dots f(x_m + h)$, et cela quels que soient le vecteur de translation h et les points d'appui $x_1 \dots x_m$. Ce caractère stationnaire exprime que la fonction aléatoire $f(x)$ est homogène dans l'espace, le mot homogène ayant ici le sens que nous lui prêtions plus haut lorsque nous parlions de milieu « statistiquement homogène » au niveau macroscopique.

En tout point x, la valeur prise par $f(x)$ est une variable aléatoire et possède généralement (nous supposerons qu'il en est ainsi) **une espérance mathématique** que l'on note $E[f(x)]$, et que l'on peut calculer à partir de la loi spatiale. Plus généralement, toute fonctionnelle de $f(x)$, c'est-à-dire toute expression dont la valeur numérique dépend des valeurs prises par f sur un ensemble fini ou infini de points d'appui, est une variable aléatoire, dont l'espérance mathématique peut également se déduire de la loi spatiale. Par exemple, **la moyenne**

$$m(V) = \frac{1}{V}\int_V f(x)\,dx$$

des valeurs prises par f dans un volume V possède une espérance $E[m(V)]$ qui ne dépend que de V et de la loi spatiale de f.

On dit alors qu'une fonction aléatoire stationnaire $f(x)$ est **ergodique** si la variable aléatoire $m(V)$ converge vers son espérance $E[m(V)]$ lorsque V devient très grand. L'ergodicité signifie donc que la moyenne spatiale $m(V)$ coïncide pratiquement avec son espérance pourvu que V soit pris suffisamment grand. Concrètement, cela entraîne que toute **réalisation** de $f(x)$ possède des propriétés macroscopiques qui n'ont plus rien d'aléatoire, et peuvent se déduire de la seule loi spatiale.

Dans ce qui suit, **nous admettrons que les perméabilités régionalisées $k^{ij}(x)$ peuvent être considérées comme une réalisation d'une fonction aléatoire (tensorielle) ergodique et stationnaire.** Une telle hypothèse revient, on le voit, à exprimer dans un langage mathématique précis la notion, un peu vague, dont nous étions partis : celle d'un milieu statistiquement homogène au niveau macroscopique.

On peut, naturellement, s'interroger sur le sens et la valeur de cette hypothèse. En fait, il n'est jamais possible de démontrer, de manière purement déductive, qu'une théorie mathématique abstraite (construite à partir d'une base axiomatique) s'applique à un phénomène concret. Cette difficulté n'est pas particulière au problème étudié ici. Elle se manifeste avec la même force lorsque l'on veut, par exemple, interpréter une partie de pile ou face en disant : « Il y a une chance sur deux d'obtenir pile », et se résout de la même manière, par un arbitrage souverain et sans appel : le recours à l'expérience. La valeur de notre hypothèse devra donc être jugée en comparant les conclusions que nous en déduisons mathématiquement avec les résultats que la pratique et l'expérimentation ont accumulés.

II. LES ÉCOULEMENTS MACROSCOPIQUEMENT UNIFORMES

Tout écoulement permanent vérifie le système de Darcy :

$$\left\{\begin{aligned} q^i &= -k^{ij}\partial_j p \\ \partial_i q^i &= 0 \end{aligned}\right. \qquad [1]$$

et inversement, lorsque le tenseur $k^{ij}(x)$ est supposé connu, ce système, auquel il convient d'ajouter les conditions aux limites correspondant au problème posé, permet (en principe) de déterminer la pression et le flux. Ainsi, le flux $q^i(x)$ et le gradient $\partial_j p(x)$ apparaissent comme des fonctionnelles, d'ailleurs assez complexes, de la fonction tensorielle $k^{ij}(x)$, et des conditions aux limites. Par l'intermédiaire de ces mêmes fonctionnelles, flux et gradient deviennent des fonctions aléatoires lorsque $k^{ij}(x)$ est lui-même considéré comme une fonction aléatoire tensorielle. De plus, c'est le point capital, les lois de probabilités des fonctions aléatoires $q^i(x)$ et $\partial_j p(x)$ ne dépendent que de la loi spatiale des perméabilités $k^{ij}(x)$ (et des conditions aux limites). En particulier, les espérances mathématiques $E(q^i)$ et $E(\partial_j p)$ sont parfaitement définies.

Parmi les solutions du système [1], nous nous intéresserons exclusivement à celles pour lesquelles le flux $q^i(x)$ et le gradient $\partial_j p(x)$ sont des **fonctions aléatoires stationnaires**. Nous montrerons plus loin que leur connaissance suffit pour déterminer les perméabilités macroscopiques K^{ij}. De telles solutions décrivent **des écoulements uniformes au niveau macroscopique**. En effet, flux Q^i et gradient $\partial_j P$ macroscopiques se déduisent de $q^i(x)$ et $\partial_j p(x)$ à l'aide de certaines moyennes spatiales qui, grâce à l'hypothèse ergodique, peuvent être remplacées par les espérances mathématiques correspondantes soit :

$$\left\{\begin{aligned} Q^i &= E(q^i) \\ \partial_j P &= E(\partial_j p) \end{aligned}\right. \qquad [2]$$

Lorsque q^i et $\partial_j p$ sont stationnaires, leurs espérances sont des **constantes**, et l'écoulement est caractérisé par un flux et un gradient **macroscopiques** uniformes.

Système de solutions privilégiées.

L'existence de telles solutions stationnaires se conçoit très bien, d'un point de vue physique. D'un point de vue purement mathématique, cependant, une discussion, assez délicate, serait nécessaire. L'existence et l'unicité de la solution du système [1] est assurée, en effet, lorsqu'on se donne les conditions aux limites sous la forme usuelle. Nous admettrons sans démonstration que l'existence d'une solution, sous forme de fonctions aléatoires $q^i(x)$ et $\partial_j p(x)$, est encore assurée lorsque les conditions aux limites classiques sont remplacées par les deux conditions suivantes :

1) $q^i(x)$ et $\partial_j p(x)$ sont des fonctions aléatoires **stationnaires**.

2) L'espérance $E(\partial_j p)$ est égale à un vecteur constant, de composantes covariantes données d'avance.

Autrement dit, nous admettons qu'il existe toujours une solution stationnaire correspondant à un gradient macroscopique constant $\partial_j P$ donné d'avance. Nous montrerons au paragraphe IV que cette solution est nécessairement **unique**.

L'espace ayant n dimensions, on peut alors trouver n solutions **distinctes**, stationnaires, $q^{il}(x)$, $\partial_j p^l(x)$ $(l = 1, 2, \dots n)$, vérifiant le système de Darcy, et telles que les espérances

$$E(\partial_j p^l) = \partial_j P^l \qquad [3]$$

coïncident, pour chaque valeur de l, avec les composantes du $l^{ième}$ vecteur colonne d'une matrice $\partial_j P^l$ **donnée d'avance** (et de déterminant non nul). L'ensemble de ces n solutions constitue ce que nous appellerons un système de **solutions privilégiées**.

Toute combinaison linéaire des solutions privilégiées, de la forme :

$$\begin{cases} q^i = \varpi_l q^{il} \\ \partial_j p = \varpi_l \partial_j p^l \end{cases} \qquad [4]$$

avec des coefficients ϖ_l constants est évidemment elle-même une solution stationnaire du système de Darcy, et décrit un écoulement macroscopiquement uniforme caractérisé par le gradient et le flux macroscopiques constants :

$$\begin{cases} \partial_j P = \varpi_l \partial_j P^l \\ Q^i = \varpi_l Q^{il} \end{cases} \qquad [5]$$

Et, inversement, **tout** écoulement macroscopiquement uniforme est de la forme [4], à cause de l'unicité de la solution du système de Darcy assujettie aux conditions 1 et 2 posées ci-dessus.

Invariance tensorielle.

Un arbitraire assez large subsiste sur le choix d'un système de solutions privilégiées. En effet, toute combinaison linéaire de solutions stationnaires du système de Darcy étant elle-même une solution stationnaire, il est possible d'effectuer, sur l'indice l des solutions privilégiées, une substitution linéaire quelconque. Ainsi, cet indice l ne présente, au départ, aucun caractère d'invariance tensorielle. Toutefois, une fois choisie la matrice des $\partial_j P^l$ qui figure en [3], le système des q^{il}, $\partial_j p^l$ est parfaitement déterminé. Si nous **convenons** de choisir pour les $\partial_j P^l$ la matrice des composantes mixtes d'un **tenseur** donné, q^{il}, $\partial_j p^l$ et $Q^{il} = E(q^{il})$ prennent, elles aussi, le caractère tensoriel.

En effet, si les ϖ_l sont les composantes covariantes d'un **vecteur** constant quelconque, les quantités définies en [4] représentent les composantes du flux et du gradient de l'écoulement unique caractérisé par son gradient macroscopique constant $\varpi_l \partial_j P^l$, qui est un vecteur bien défini. Par suite $\varpi_l q^{il}$ et $\varpi_l \partial_j p^l$ représentent des vecteurs, et q^{il} et $\partial_j p^l$ sont les composantes de deux tenseurs.

En particulier, il sera souvent commode de **choisir**, pour $\partial_j P^l$, le tenseur δ_j^l de Kronecker ($\delta_j^l = 0$ si $l \neq j$, $= 1$ si $l = j$)

$$\partial_j P^l = \delta_j^l \qquad [6]$$

Avec ce choix (conventionnel) du système privilégié, tout écoulement macroscopiquement uniforme peut être mis sous la forme [4], avec des constantes ϖ_i vérifiant :

$$\varpi_j = \mathrm{E}\,(\partial_j p) = \partial_j \mathrm{P}$$

Autrement dit, les constantes ϖ_i ne sont autres, dans ce cas, que les composantes covariantes du gradient macroscopique.

III. COMPOSITION DES PERMÉABILITÉS

Examinons, maintenant, de quelle manière les perméabilités ponctuelles $k^{ij}(x)$ vont se composer pour engendrer les perméabilités macroscopiques constantes K^{ij}. Il est sans doute instructif de considérer, en premier lieu, les deux cas particuliers où le système de Darcy admet comme solutions soit des vecteurs flux constants, soit des gradients constants.

1. Milieu admettant des écoulements à gradient constant.

Pour que le système de Darcy [1] admette la solution $\partial_j p = \varpi_j$ pour tout vecteur covariant **constant** ϖ_j, il faut et il suffit que l'on ait

$$\partial_i k^{ij} = 0$$

c'est-à-dire que le tenseur des perméabilités soit **conservatif** (ait une divergence nulle). La solution :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_j p = \varpi_j \\ q^i = -k^{ij}\varpi_j \end{array} \right.$$

est stationnaire, et décrit donc un écoulement macroscopique caractérisé par le flux et le gradient **constants** :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_j \mathrm{P} = \varpi_j \\ \mathrm{Q}^i = -\varpi_j \mathrm{E}\,(k^{ij}) \end{array} \right.$$

Par suite, le tenseur des perméabilités macroscopiques K^{ij} est :

$$\mathrm{K}^{ij} = \mathrm{E}\,(k^{ij})$$

Ainsi, lorsque le tenseur des perméabilités est conservatif, la règle de composition arithmétique $\mathrm{K} = \mathrm{E}\,(k)$ s'applique en toute rigueur.

Exemple 1.

Soit, dans l'espace à trois dimensions, un milieu où le tenseur des perméabilités conserve des directions principales fixes. Ces directions étant prises comme axes des coordonnées x, y et z, supposons que les perméabilités principales correspondantes, k_1, k_2 et k_3, ne dépendent : la première que de y et z, la seconde de z et x, la troisième de x et y, soit :

$$k = \left\{ \begin{array}{ccc} k_1(y, z) & 0 & 0 \\ 0 & k_2(z, x) & 0 \\ 0 & 0 & k_3(x, y) \end{array} \right\}$$

Ce tenseur étant conservatif, les perméabilités macroscopiques sont :

$$K = \begin{Bmatrix} E(k_1) & 0 & 0 \\ 0 & E(k_2) & 0 \\ 0 & 0 & E(k_3) \end{Bmatrix}$$

De fait, il est clair que, vis-à-vis d'un écoulement parallèle à l'axe des x, par exemple, ce milieu se comporte comme s'il était constitué des « strates » $k_1(y, z) = C^{te}$ parallèles à l'axe des x.

2. Milieu admettant des écoulements à flux constants.

De même, cherchons à quelle condition le système de Darcy admet comme solution n'importe quel vecteur flux, q^i **constant**. Soit h_{ij} le tenseur des **résistivités**, inverse des k^{ij}. Le système de Darcy peut s'écrire :

$$\begin{cases} \partial_i q^i = 0 \\ \partial_j p = -h_{ij} q^i \end{cases}$$

Il admet comme solution tout vecteur q^i constant si, et seulement si, $h_{ij}q^i$ est un gradient quels que soient les q^i, donc si l'on peut trouver un vecteur V_i dont h_{ij} soit le gradient :

$$h_{ij} = \partial_j V_i$$

Compte tenu de la condition de symétrie $h_{ij} = h_{ji}$, V_i doit être lui-même un gradient, et h_{ij} est de la forme $\partial_{ij}\varphi$ où φ est une fonction scalaire aléatoire. Au niveau macroscopique, on obtient pour de telles solutions :

$$\begin{cases} Q^i = q^i \\ \partial_j P = -q^i E(h_{ij}) \end{cases}$$

Par suite, la **résistivité** macroscopique H_{ij} est :

$$H_{ij} = E(h_{ij})$$

Ainsi, lorsque le tenseur des perméabilités est l'inverse d'un tenseur gradient, la règle de pondération harmonique $K^{-1} = E(k^{-1})$ s'applique en toute rigueur.

Exemple 2.

Avec les mêmes notations que pour l'exemple 1, supposons que k soit de la forme :

$$k = \begin{Bmatrix} k_1(x) & 0 & 0 \\ 0 & k_2(y) & 0 \\ 0 & 0 & k_3(z) \end{Bmatrix}$$

son inverse :

$$h = \begin{Bmatrix} \dfrac{1}{k_1(x)} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{k_2(y)} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{k_3(z)} \end{Bmatrix}$$

est un gradient, et par suite les perméabilités macroscopiques sont :

$$K = \begin{Vmatrix} \dfrac{1}{E\left(\dfrac{1}{k_1}\right)} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{E\left(\dfrac{1}{k_2}\right)} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{E\left(\dfrac{1}{k_3}\right)} \end{Vmatrix}$$

De fait, il est clair que, vis-à-vis d'un écoulement parallèle à l'axe des x, ce milieu se comporte comme s'il était constitué de strates $k_1(x) = C^{te}$ perpendiculaires à l'axe des x.

3. Cas général.

Plaçons nous maintenant, dans le cas général où le tenseur $k^{ij}(x)$ est simplement supposé stationnaire, et soit q^{il} et $\partial_j p^l$ un système de solutions privilégiées. D'après la loi de Darcy, nous avons :

$$\begin{cases} q^{il} = -k^{ij}\partial_j p^l \\ \partial_i q^{il} = 0 \end{cases} \qquad [7]$$

Comme les p^l constituent des solutions indépendantes du système (1), leur jacobien, qui est le déterminant des $\partial_j p^l$, n'est pas identiquement nul. Soit donc A_l^j la matrice inverse des $\partial_j p^l$. L'équation [7] s'écrit :

$$k^{ij} = -q^{il}A_l^j$$

D'autre part, au niveau macroscopique, le flux et le gradient constants correspondant à la solution privilégiée d'indice l sont :

$$\begin{cases} Q^{il} = E(q^{il}) \\ \partial_j P^l = E(\partial_j p^l) \end{cases}$$

Par suite, la perméabilité macroscopique constante K^{ij} s'obtient en résolvant le système :

$$E(q^{il}) = -K^{ij}E(\partial_j p^l)$$

Pour éviter la présence du signe moins, nous prendrons $C^{il} = -q^{il}$. Les résultats obtenus peuvent s'énoncer sous la forme d'une proposition et d'une règle de pondération.

Proposition :

Toute perméabilité $k^{ij}(x)$ aléatoire, stationnaire et ergodique peut être mise sous la forme :

$$k^{ij} = C^{il}A_l^j$$

du produit d'un tenseur C conservatif ($\partial_i C^{il} = 0$) et stationnaires et d'un tenseur A inverse d'un tenseur gradient stationnaire $\partial_j p^l$.

Règle de composition :

Le tenseur des perméabilités macroscopiques constantes K^{ij} s'obtient en effectuant le produit de E (C^{ij}) par l'inverse du tenseur E ($\partial_i p^j$).

Autrement dit, **sous forme matricielle**, on a :

$$\left\{\begin{array}{l} k = \mathrm{C\,A} \\ \mathrm{K} = \mathrm{E\,(C)}\left[\mathrm{E\,(A^{-1})}\right]^{-1} \end{array}\right. \qquad [8]$$

Cette règle de composition constitue une généralisation évidente des règles de pondération arithmétique et harmonique rencontrées dans les deux cas particuliers *a* et *b*. Dans les deux derniers paragraphes de cette étude, nous allons montrer, à l'aide de considérations énergétiques, que la règle [8] donne toujours un résultat intermédiaire entre les moyennes harmonique et arithmétique, qui apparaîtront ainsi comme deux cas limites. Au préalable, à titre d'illustration, nous allons traiter deux exemples simples.

Exemple 3.

Avec les mêmes notations que dans les exemples 1 et 2, supposons que la matrice des perméabilités soit de la forme :

$$k = \begin{pmatrix} f_1(yz)\, g_1(x) & 0 & 0 \\ 0 & f_2(zx)\, g_2(y) & 0 \\ 0 & 0 & f_3(xy)\, g_3(z) \end{pmatrix}$$

Le tenseur gradient $\mathrm{B} = \mathrm{A}^{-1}$ et le tenseur conservatif C sont :

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{g_1(x)} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{g_2(y)} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{g_3(z)} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{C} = \begin{pmatrix} f_1(y, z) & 0 & 0 \\ 0 & f_2(z, x) & 0 \\ 0 & 0 & f_3(xy) \end{pmatrix}$$

Par suite les perméabilités macroscopiques constantes sont :

$$\mathrm{K} = \mathrm{E\,(C)}\left[\mathrm{E\,(B)}\right]^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{E}(f_1)}{\mathrm{E}\left(\dfrac{1}{g_1}\right)} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\mathrm{E}(f_2)}{\mathrm{E}\left(\dfrac{1}{g_2}\right)} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\mathrm{E}(f_3)}{\mathrm{E}\left(\dfrac{1}{g_3}\right)} \end{pmatrix}$$

La composition s'effectue selon un mode intermédiaire entre les pondérations harmonique et arithmétique.

Exemple 4 : (milieu à stratification horizontale).

Soit, dans l'espace à trois dimensions, un milieu stratifié où les perméabilités $k^{ij}(z)$ ne dépendent que de la coordonnée z (les composantes rectangulaires ne sont pas supposées nulles). On cherche à priori un tenseur gradient $\partial_j p^i$ de la forme :

$$B = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ B_3^1(z) & B_3^2(z) & B_3^3(z) \end{Bmatrix}$$

et un tenseur C vérifiant

$$\begin{cases} C^{ij} = k^{il} B_l^j \\ \partial_i C^{ij} = 0 \end{cases}$$

On obtient sans peine la solution :

$$B = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\dfrac{k^{13}}{k^{33}} & -\dfrac{k^{23}}{k^{33}} & \dfrac{1}{k^{33}} \end{Bmatrix}$$

$$C = \begin{Bmatrix} k^{11} - \dfrac{\overline{k^{13}}^2}{k^{33}} & k^{12} - \dfrac{k^{13}k^{23}}{k^{33}} & \dfrac{k^{13}}{k^{33}} \\ k^{21} - \dfrac{k^{13}k^{23}}{k^{33}} & k^{22} - \dfrac{\overline{k^{23}}^2}{k^{33}} & \dfrac{k^{23}}{k^{33}} \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}$$

Les vecteurs colonnes de B et (au signe près) de C donnent le gradient et le flux de trois solutions privilégiées. Il suffit ensuite de résoudre le système KE (B) = E (C) pour obtenir :

$$\begin{cases} K^{11} = E\left[k^{11} - \dfrac{(k^{13})^2}{k^{33}}\right] + \dfrac{\left[E\left(\dfrac{k^{13}}{k^{33}}\right)\right]^2}{E\left(\dfrac{1}{k^{33}}\right)} \\ K^{22} = E\left[k^{22} - \dfrac{(k^{23})^2}{k^{33}}\right] + \dfrac{\left[E\left(\dfrac{k^{23}}{k^{33}}\right)\right]^2}{E\left(\dfrac{1}{k^{33}}\right)} \\ K^{12} = E\left[k^{12} - \dfrac{k^{13}k^{23}}{k^{33}}\right] + \dfrac{E\left(\dfrac{k^{13}}{k^{33}}\right) E\left(\dfrac{k^{23}}{k^{33}}\right)}{E\left(\dfrac{1}{k^{33}}\right)} \end{cases}$$

$$k^{33} = \frac{1}{\mathrm{E}\left(\frac{1}{k^{33}}\right)}$$

$$\left\{\begin{aligned} k^{13} &= \frac{\mathrm{E}\left(\frac{k^{13}}{k^{33}}\right)}{\mathrm{E}\left(\frac{1}{k^{33}}\right)} \\ k^{23} &= \frac{\mathrm{E}\left(\frac{k^{23}}{k^{33}}\right)}{\mathrm{E}\left(\frac{1}{k^{33}}\right)} \end{aligned}\right.$$

La règle de pondération harmonique s'applique, comme il se doit, à la composante K^{33}. Pour les deux autres termes diagonaux, on montre facilement que l'on a, par exemple :

$$K^{11} < \mathrm{E}\,(k^{11})$$

l'égalité n'ayant lieu que si k^{13} est nul : les termes rectangles entraînent une détérioration des perméabilités horizontales relativement à la moyenne arithmétique que laissait prévoir le mode de couplage en parallèle.

IV. LA DENSITÉ DE PUISSANCE

La règle de composition donnée en [8] est assez formelle, en ce sens que, pour l'appliquer effectivement, il faudrait déjà connaître un système de solutions privilégiées, ce qui ne sera pour ainsi dire jamais le cas en pratique. Cependant, l'introduction de notions énergétiques va nous permettre de tirer de la seule forme des relations [8] des renseignements relativement précis sur les perméabilités macroscopiques, renseignements utilisables même si l'on ne connaît pas les solutions privilégiées.

Soit un écoulement macroscopiquement uniforme de flux q^i et de gradient $\partial_i p$, au niveau ponctuel, et $Q^i = \mathrm{E}\,(q^i)$, $\partial_i P = \mathrm{E}\,(\partial_i p)$ au niveau macroscopique, et proposons-nous d'évaluer la puissance consommée par les forces de viscosité.

Considérons, en premier lieu, un volume élémentaire dv, sous la forme d'un petit tube de lignes de courant, limité par deux éléments de surface isobares $p = p_0$ et $p' = p_0 - dp$. Cet élément étant supposé extrait du milieu, nous imperméabilisons sa surface latérale, et nous plongeons ses deux faces terminales dans deux récipients contenant le même fluide, mais sous les pressions p_0 et $p_0 - dp$ respectivement. Un piston refoule le fluide du récipient soumis à la pression la plus forte p_0, et son mouvement est réglé de telle manière que cette pression reste constante. En raison de l'unicité de la solution du système de Darcy, l'écoulement permanent qui s'établit possède le même flux q^i et le même gradient $\partial_i p$ que l'écoulement en place. La puissance consommée par les forces de viscosité s'évalue en calculant le travail fourni par le piston. On trouve aisément cette puissance sous la forme :

$$\mathrm{W}\,dv = -\frac{1}{\rho}\, q^i \partial_i p \; dv$$

Ainsi, dans l'écoulement dont le milieu réel est le théâtre, **la densité de puissance consommée par les forces de viscosité** (¹) est :

$$\mathrm{W} = -\frac{1}{\rho}\, q^i \partial_i p \qquad [9]$$

(¹) Dans un article ultérieur, la relation [9] sera déduite directement des équations de Navier.

Dans un volume V, la puissance consommée est donc $\frac{1}{\rho}\int_V q^i \partial_i p \, dv$, et, si V a été choisi suffisamment grand pour que l'ergodicité s'y manifeste, cette intégrale peut être remplacée par l'expression :

$$-\frac{V}{\rho} E(q^i \partial_i p)$$

Mais cette même puissance peut être évaluée directement au niveau macroscopique. Prenant, en effet, comme volume V un cylindre ayant ses génératrices parallèles au flux macroscopique constant Q^i et ses bases dans deux surfaces isobares $P = P_0$ et $P = P_1$, on voit, en répétant le même raisonnement que ci-dessus, que cette puissance est :

$$-\frac{V}{\rho} Q^i \partial_i P = -\frac{V}{\rho} E(q^i) E(\partial_i p)$$

Égalant ces deux expressions de la puissance, nous obtenons :

$$E(q^i \partial_i p) = E(q^i) E(\partial_i p) \qquad [10]$$

Cette relation fondamentale exprime que, **vis-à-vis du produit scalaire, flux et gradient des solutions stationnaires se comportent comme s'ils étaient indépendants** : l'espérance du produit scalaire est égale au produit scalaire des espérances.

En fait, la relation [10], qui exprime un bilan énergétique, peut se déduire de la seule relation :

$$\partial_i q^i = 0 \qquad [11]$$

qui exprime la conservation de la quantité de fluide. En effet, le gradient $\partial_j p$ étant stationnaire, la pression p peut se mettre sous la forme :

$$p = x^j \partial_j P + \lambda \qquad [12]$$

λ étant une fonction aléatoire stationnaire (1) d'espérance nulle. On a alors, compte tenu de [11] :

$$q^i \partial_i p = q^i \partial_i P + q^i \partial_i \lambda = q^i \partial_i P + \partial_i (\lambda q^i)$$

Passons aux espérances en remarquant que, λq^i étant stationnaire, on a $E\left[\partial_i (\lambda q^i)\right] = \partial_i E(\lambda q^i) = 0$. Il vient :

$$E(q^i \partial_i p) = Q^i \partial_i P$$

c'est-à-dire la relation [10].

Unicité des solutions privilégiées.

La densité de puissance consommée est obligatoirement positive. D'après [9] et la loi de Darcy, on a donc :

$$k^{ij} \partial_i p \partial_j p \geqslant 0$$

l'égalité n'ayant lieu que si $\partial_i p = 0$ (fluide au repos). Cette inégalité exprime, comme on sait, que la matrice des perméabilités est définie positive.

(1) En réalité, du fait que $\partial_j p$ est stationnaire d'ordre deux, on déduit seulement que p est à accroissements stationnaires d'ordre deux, et [12] constitue une hypothèse supplémentaire, qui n'est peut-être pas réellement indispensable, mais simplifie l'exposé.

Supposons alors qu'il soit possible de trouver deux écoulements, macroscopiquement uniformes, de gradients $\partial_j p_1$ et $\partial_j p_2$ vérifiant :

$$E(\partial_j p_1) = E(\partial_j p_2)$$

On en déduit, par différence, un écoulement macroscopiquement uniforme de gradient :

$$\partial_j p = \partial_j p_1 - \partial_j p_2$$

vérifiant :

$$\partial_j P = E(\partial_j p) = 0$$

c'est-à-dire caractérisant un fluide en état de repos macroscopique. Si $\partial_j p$ n'est pas identiquement nul, $q^i \partial_i p$ est strictement négatif, et par suite aussi

$$E(q^i \partial_i p) = Q^i \partial_i P < 0$$

Mais cela est impossible puisque $\partial_i P$ est nul. Donc $\partial_j p$ est nul (le fluide est réellement en repos). Par suite $\partial_j p_1 = \partial_j p_2$, et la solution stationnaire de gradient macroscopique constant est nécessairement unique, comme nous l'avions annoncé.

Le tenseur densité de puissance.

Soit maintenant q^{ii}, $\partial_j p^i$ un système de solutions privilégiées. Toute solution stationnaire est de la forme :

$$\begin{cases} q^i = \varpi_i q^{ii} \\ \partial_j p = \varpi_i \partial_j p^i \end{cases}$$

et admet, d'après [9], la densité d'énergie :

$$W = W^{ij} \varpi_i \varpi_j$$

avec :

$$W^{ij} = -\frac{1}{\rho} q^{ii} \partial_i p^j \qquad [13]$$

W^{ij} est **le tenseur densité de puissance**. Il est **symétrique et défini positif**. En effet, utilisant la loi de Darcy, on obtient :

$$W^{ij} = \frac{1}{\rho} k^{ij} \partial_i p^i \partial_j p^j$$

Le tenseur k^{ij} étant lui-même symétrique et défini positif, il en est de même de W^{ij}.

Enfin, la relation [10] se généralise sans peine. Il suffit, en effet, de reprendre le raisonnement utilisant l'équation de continuité [11] pour obtenir :

$$E(q^{ii} \partial_i p^j) = E(q^{ii})\, E(\partial_i p^j) \qquad [14]$$

Ainsi, l'espérance mathématique du tenseur densité de puissance est :

$$E(W^{ij}) = -\frac{1}{\rho} Q^{ii} \partial_i P^j \qquad [15]$$

Relation entre perméabilité macroscopique et densité de puissance.

Portons dans [15] la relation de Darcy exprimée au niveau macroscopique :

$$Q^{i} = K^{ij}\partial_j P^{i}$$

Il vient :

$$E(W^{ij}) = \frac{1}{\rho} K^{ij}\,\partial_i P^i \partial_j P^i \qquad [16]$$

Ainsi le tenseur des perméabilités macroscopiques peut se déduire de l'espérance du tenseur densité de puissance. En particulier, si les solutions privilégiées ont été choisies conformément à la règle [6], il vient simplement :

$$K^{ij} = \rho\, E(W^{ij})$$

On voit ainsi que le tenseur K^{ij} est symétrique et défini positif comme la densité de puissance W^{ij}.

V. LES INÉGALITÉS FONDAMENTALES

Rappelons, tout d'abord, une définition : on dit qu'une matrice symétrique M^{ij} est définie positive si, quelles que soient les constantes α_i, on a toujours :

$$\alpha_i\alpha_j M^{ij} \geqslant 0$$

Le caractère défini positif entraîne, en particulier, les conséquences suivantes :
— les termes diagonaux sont positifs $M^{ii} \geqslant 0$;
— les termes rectangulaires vérifient l'inégalité de Schwartz :

$$|M^{ij}| \leqslant \sqrt{M^{ii}M^{jj}}$$

— les valeurs propres et le déterminant sont positifs ou nuls.

Dans ce qui suit, nous admettrons que la matrice (régionalisée) des k^{ij} est toujours symétrique et définie positive. D'après l'équation de Darcy, cela signifie que l'on a toujours :

$$q^i\partial_i p = -k^{ij}\partial_i p\partial_j p \leqslant 0$$

autrement dit que la pression va toujours en diminuant le long d'une ligne de courant, ou encore que les forces de viscosité consomment de l'énergie (et n'en fournissent pas). Il s'agit bien d'une condition de nature physique, imposée a priori de manière impérative. D'après les résultats du paragraphe précédent, il en résulte que les matrices des perméabilités macroscopiques K^{ij} et des densités de puissance W^{ij} sont également symétriques et définies positives.

Nous allons en déduire que les matrices $E(k) - K$ et $E(h) - H$ sont également définies positives. En effet, la relation [14] établie au paragraphe précédent s'écrit aussi bien :

$$-E(q^{ij}\partial_i p^i) = K^{ij}\partial_i P^i \partial_j P^i = H_{ij}Q^{ij}Q^{ji} \qquad [17]$$

a) Les $\partial_i p^i$ peuvent se mettre sous la forme :

$$\partial_i p^i = \partial_i P^i + \partial_i \lambda^i$$

avec :

$$E(\partial_i\lambda^i) = 0$$

On a alors, en utilisant la loi de Darcy au niveau ponctuel :

$$-q^{ij}\partial_i p' = k^{ij}\partial_i p'\partial_j p' = k^{ij}(\partial_i p'\partial_j P' + \partial_i P'\partial_j p') - k^{ij}\partial_i P'\partial_j P' + k^{ij}\partial_i\lambda'\partial_j\lambda'$$

Prenons l'espérance mathématique des deux membres de cette équation. A gauche, d'après [17], apparaît $K^{ij}\partial_i P'\partial_j P'$. A droite, on remarque que l'on a :

$$\partial_j P' E(k^{ij}\partial_i p') = -\partial_j P' Q^{j} = K^{ij}\partial_i P'\partial_j P'$$

Par suite, il vient :

$$K^{ij}\partial_i P'\partial_j P' = E(k^{ij})\,\partial_i P'\partial_j P' - E(k^{ij}\partial_i\lambda'\partial_j\lambda')$$

Avec le choix [6] des solutions privilégiées, il reste simplement :

$$E(k^{ij}) - K^{ij} = E(k^{ij}\partial_i\lambda'\partial_j\lambda') \qquad [18]$$

Or, k^{ij} étant symétrique et défini positif, il en est de même de $k^{ij}\partial_i\lambda'\partial_j\lambda'$, et par suite aussi du tenseur qui figure au deuxième membre de [18].

Par suite, **le tenseur $E(k^{ij}) - K^{ij}$ est toujours défini positif.**

b) De la même manière, les q^{ij} peuvent se mettre sous la forme :

$$q^{ij} = Q^{ij} + \theta^{ij}$$

avec :

$$E(\theta^{ij}) = 0$$

Utilisant la loi de Darcy au niveau ponctuel, on obtient :

$$\begin{aligned}-q^{ij}\partial_i p' &= h_{ij}q^{ij}q^{j\prime}\\ &= h_{ij}(q^{ij}Q^{j\prime} + Q^{ij}q^{j\prime}) - h_{ij}Q^{ij}Q^{j\prime} + h_{ij}\theta^{ij}\theta^{j\prime}\end{aligned}$$

Prenons l'espérance des membres extrêmes de cette relation. A gauche, selon [17], appaıaît $H_{ij}Q^{ij}Q^{j\prime}$. A droite, on remarque que l'on a :

$$Q^{j\prime}E(h_{ij}q^{ij}) = -Q^{j\prime}\partial_j P' = H_{ij}Q^{ij}Q^{j\prime}$$

Par suite, on obtient :

$$H_{ij}Q^{ij}Q^{j\prime} = E(h_{ij})\,Q^{ij}Q^{j\prime} - E(h_{ij}\theta^{ij}\theta^{j\prime}) \qquad [19]$$

Comme h_{ij} est symétrique et défini positif, il en est de même du tenseur $E(h_{ij}\theta^{ij}\theta^{j\prime})$. Par suite, le tenseur

$$E(h_{ij})\,Q^{ij}Q^{j\prime} - H_{ij}Q^{ij}Q^{j\prime}$$

est lui-même symétrique et défini positif. On en déduit sans difficulté que $E(h_{ij}) - H_{ij}$ possède la même propriété. Si α^i est un vecteur quelconque, on peut trouver β_i avec :

$$\alpha^i = Q^{ij}\beta_i$$

Par définition, on a :

$$\left[E(h_{ij}) - H_{ij}\right] Q^{ij}\,Q^{j\prime}\,\beta_i\beta_{\prime} > 0$$

Donc aussi :

$$\left[E(h_{ij}) - H_{ij}\right]\alpha^i\alpha^j > 0$$

Ainsi, **le tenseur $E(h_{ij}) - H_{ij}$ est toujours défini positif.**

c) Pour présenter ces résultats de manière plus frappante, introduisons une relation d'ordre entre matrices symétriques définies positives, en posant :

$$A \leqslant B$$

lorsque la matrice symétrique B — A est définie positive. Les résultats obtenus ci-dessus s'écrivent ainsi :

$$K \leqslant E(k) \qquad H \leqslant E(h)$$

D'autre part, si $A \leqslant B$ et si A est inversible, on vérifie immédiatement que B est également inversible et que l'on a $B^{-1} \leqslant A^{-1}$. Les deux inégalités ci-dessus entraînent par conséquent les deux suivantes :

$$\left[E(k)\right]^{-1} \leqslant H \qquad \left[E(h)\right]^{-1} \leqslant K$$

Finalement, nous obtenons les deux systèmes d'inégalités équivalents suivants :

$$\begin{aligned} \left[E(k^{-1})\right]^{-1} &\leqslant K \leqslant E(k) \\ \left[E(h^{-1})\right]^{-1} &\leqslant H \leqslant E(h) \end{aligned} \qquad [20]$$

Ces inégalités fondamentales expriment, comme nous l'avions annoncé, que la perméabilité macroscopique K est toujours intermédiaire entre la moyenne harmonique $E(k^{-1})^{-1}$ et la moyenne arithmétique $E(k)$.

Géométriquement, les inégalités :

$$K^{ij}\alpha_i\alpha_j \leqslant \alpha_i\alpha_j E(k^{ij})$$
$$H_{ij}\beta^i\beta^j \leqslant \beta^i\beta^j E(h_{ij})$$

montrent que les ellipsoïdes traditionnels d'équations $K^{ij}x_ix_j = 1$ et $H_{ij}x^ix^j = 1$ contiennent les ellipsoïdes analogues construits sur les $E(k^{ij})$ et $E(h_{ij})$ respectivement. On verra de même que les ellipsoïdes représentatifs de K et de H sont contenus dans les ellipsoïdes représentatifs de $\left[E(h)\right]^{-1}$ et $\left[E(k)\right]^{-1}$ respectivement.

Manuscrit reçu en janvier 1966.

BIBLIOGRAPHIE

Pour le calcul tensoriel, on se référera à :

LICHNEROWICZ (A.). — Éléments de calcul tensoriel, *Armand Colin*, Paris.

En ce qui concerne la notion de variable régionalisée et ses rapports avec celle de fonction aléatoire, on pourra consulter :

MATHERON (G.). — Les variables régionalisées et leur estimation, *Masson*, Paris, 1965.

L'idée de formuler les problèmes d'écoulement dans les milieux à perméabilités régionalisées en termes de fonctions aléatoires apparaît dans les travaux du canadien SCHEIDEGGER, *ainsi que dans :*

BAN (A.), etc. — Propriétés des roches et écoulements de filtration, Moscou 1962. *Traduction française Inst. Franç. du Pétrole*, 1965.

Mais c'est, semble-t-il, avec les travaux de SCHWYDLER *que cette idée, grâce à une méthode d'approximation convenable et une formulation théorique correcte, conduit pour la première fois à des résultats précis. Ces travaux ont été publiés en traduction française par les soins de l'*Institut Français du Pétrole, *et sous la direction de* M. DUPUY *(on y trouvera la référence des publications originales en russe).*

SCHWYDLER (M. I.). — Les courants d'écoulement dans les milieux hétérogènes, *Inst. Franç. du Pétrole*, 1964, et sur les calculs hydrodynamiques d'écoulement dans les milieux poreux hétérogènes, *Inst. Franç. du Pétrole*, 1965.

On consultera également le texte de présentation synthétique de ces travaux :

DUPUY (M.). — Sur les calculs hydrodynamiques d'écoulement de filtration dans les milieux poreux hétérogènes, *Inst. Franç. du Pétrole*, 1965.