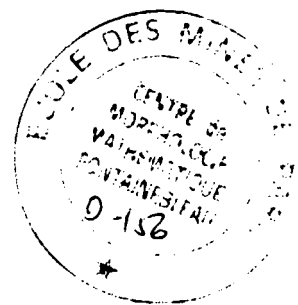


COMPOSITION DES PERMÉABILITÉS EN MILIEU POREUX HÉTÉROGÈNE MÉTHODE DE SCHWYDLER ET RÈGLES DE PONDÉRATION



G. MATHERON

École Nationale Supérieure des Mines de Paris.

Nous approfondissons ici l'étude de la composition des perméabilités dans un milieu hétérogène. En ce qui concerne les écoulements uniformes, nous démontrons que la règle usuelle de pondération géométrique s'applique rigoureusement aux écoulements plans si la loi spatiale des perméabilités est lognormale et invariante par rotation, mais n'est pas valable dans l'espace à trois dimensions. A l'aide de la méthode de Schwydlér nous montrons ensuite que la perméabilité macroscopique constante K se place à mi-chemin ou aux deux tiers du chemin entre moyenne harmonique et moyenne arithmétique, selon que l'espace a deux ou trois dimensions.

En ce qui concerne les écoulements radiaux, nous montrons que la perméabilité apparente, en valeur probable, se situe toujours entre ces deux limites. En valeur vraie, elle se rapproche davantage de la moyenne harmonique ou de la perméabilité du puits selon que R_1 est très grand ou R_0 très petit. Nous concluons qu'il n'est pas possible de décrire globalement les écoulements non uniformes à l'aide d'une loi de Darcy macroscopique.

This article goes further into the study of the composition of permeabilities in heterogeneous media. With regard to uniform flows, we show that the standard rule of geometric weighting is rigorously applicable to plane flows if the spatial law is lognormal and unvarying by rotation, but it is not valid in 3-dimensional space. With the help of the Schwydlér method we then go on to show that the average macroscopic permeability K is situated half or two thirds of the way between the harmonic and the arithmetical mean, depending on whether the problem is considered in two or three dimensions.

With regard to radial flow, we show that the probable value of the effective permeability is always situated between these two limits. In actual value it comes closer to the harmonic mean of the permeability distribution or to the permeability at the well depending on whether R_1 is very large or R_0 very small. We conclude that a comprehensive description of non-uniform flows cannot be given by using a macroscopic-Darcy's law.

Profundizamos acá el estudio de la composición de las permeabilidades en un medio heterogéneo. En lo concerniente a los flujos uniformes, demostramos que la regla usual de ponderación geométrica se aplica rigurosamente a los flujos planos si la ley espacial de las permeabilidades es lognormal e invariante por rotación, pero no es válida en el espacio de tres dimensiones. Con la ayuda del método de Schwydlér, mostramos luego que la permeabilidad macroscópica constante K se sitúa a la mitad o a los dos tercios del camino entre media armónica y media aritmética, según que el espacio tenga dos o tres dimensiones.

En lo referente a los flujos radiales, mostramos que la permeabilidad aparente, en valor probable, se sitúa siempre entre estos dos límites. En valor verdadero, ella se aproxima más a la media armónica o de la permeabilidad del pozo según que R_1 sea muy grande o R_0 muy pequeño. Deducimos que no es posible describir globalmente los flujos no uniformes con la ayuda de una ley de Darcy macroscópica.

INTRODUCTION

Nous nous proposons dans cette étude d'approfondir le problème de la composition des perméabilités, déjà abordé dans un article antérieur ⁽¹⁾ d'un point de vue très général. Étant donné un milieu à perméabilités ponctuelles $k''(x)$ régionalisées (variables dans l'espace) mais possédant une certaine homogénéité statistique à grande échelle, il s'agissait de montrer comment ces perméabilités ponctuelles se composent pour engendrer une perméabilité macroscopique constante k' . En supposant que les $k''(x)$ peuvent être regardées comme une réalisation d'une fonction aléatoire (tensorielle) ergodique et stationnaire, nous avons montré que le tenseur K ne dépend que de la loi spatiale des k'' (par l'intermédiaire de fonctionnelles d'ailleurs complexes) et vérifie toujours les inégalités matricielles ⁽²⁾ :

$$|E(k^{-1})|^{-1} \leq K \leq E(k) \quad [1]$$

Ce résultat signifie que la perméabilité macroscopique est toujours comprise entre la moyenne harmonique et la moyenne arithmétique des perméabilités ponctuelles. Il ne nous donne cependant pas de valeurs numériques précises, et ne nous indique même pas si K doit être plutôt plus proche de l'une ou l'autre de ces deux limites. Il existe bien une règle empirique de pondération géométrique :

$$\log K = E[\log k] \quad [2]$$

souvent utilisée en pratique, qui semble indiquer que K se situerait plutôt à mi-chemin. Une analyse plus approfondie nous montrera que la règle [2] ne peut pas, en fait, prétendre à une valeur universelle. Il est certain, en effet, que **le nombre N des dimensions de l'espace** doit exercer une grande influence sur la manière dont se composent les perméabilités ponctuelles. Toutes choses égales d'ailleurs, les filets de courant ont d'autant plus de facilité pour contourner les zones de mauvaises perméabilités que l'espace présente davantage de dimensions. Pour $N = 1$, il n'existe aucune possibilité de contournement, et K est toujours égal à la moyenne harmonique. La perméabilité résultante doit s'améliorer au fur et à mesure que N augmente et se rapprocher de la moyenne arithmétique. De fait, à l'aide d'une méthode d'approximation empruntée à SCHWYDLER, nous montrerons que K se situe à mi-chemin de ces deux limites pour $N = 2$, au deux tiers de ce chemin pour $N = 3$, et se rapprocherait asymptotiquement de la moyenne arithmétique s'il nous était permis d'envisager des espaces dont le nombre de dimensions augmenterait indéfiniment.

En particulier, la règle [2] ne peut être valable que pour $N = 2$, c'est-à-dire dans le cas d'écoulements plans. Nous démontrerons d'ailleurs, d'une manière rigoureuse, qu'elle s'applique effectivement dans le cas particulier intéressant d'un milieu à deux dimensions, macroscopiquement isotrope et à perméabilités lognormales.

Ce qu'il y a de plus remarquable, dans une règle du type [2], et qui cependant risque de passer inaperçu tant cela semble aller de soi, ce n'est pas l'apparition de la moyenne géométrique, mais le fait que l'on admet implicitement que K ne dépend que de la loi de probabilité des valeurs prises par les perméabilités ponctuelles **en un même point d'appui**. Convenons de dire qu'il existe une **règle de pondération** lorsqu'il en est ainsi, c'est-à-dire lorsque K ne dépend effectivement que de la loi des valeurs prises par les $k''(x)$ en un **même point d'appui** x . Dans le cas général, on ne doit pas s'attendre à ce qu'il existe une telle règle de pondération. L'étude que nous avons faite de la composition des perméabilités montre, en effet, que K dépend de la loi spatiale de k , c'est-à-dire de

⁽¹⁾ Structure et composition des perméabilités, *Rev. Inst. Franç. du Pétrole*, 1966, **XXI**-4, 564-580.

⁽²⁾ Rappelons que l'inégalité $A \leq B$ entre matrices symétriques et définies positives signifie que la matrice $B - A$ est définie positive. Le symbole E désigne l'espérance mathématique.

la loi des valeurs prises simultanément en **tous les points de l'espace**. Toutefois, on voit facilement, à l'aide de considérations de similitude élémentaires, que K doit rester invariante si l'on transforme la loi spatiale des k par une homothétie. Or, parmi les fonctionnelles de la loi spatiale qui restent invariantes par homothétie, figure une classe particulièrement simple, celle précisément des fonctionnelles qui ne dépendent que de la loi de probabilité des valeurs prises par les k'' en un même point d'appui. On peut donc espérer trouver au moins des cas particuliers où il existera effectivement une règle de pondération. Dans l'article déjà cité nous avons, en effet, rencontré des cas où il en était ainsi ⁽¹⁾, mais il s'agissait d'exemples très particuliers et assez artificiels. Dans la présente étude, nous montrons que la règle [2] de pondération géométrique s'applique dans le cas, beaucoup plus intéressant, d'un milieu macroscopiquement isotrope à deux dimensions et à perméabilités lognormales. Les résultats de la méthode d'approximation de SCHWYDLER, d'autre part, nous inciteront à penser qu'il existe probablement encore une règle de pondération dans des cas plus généraux, par exemple dans le cas d'un milieu macroscopiquement isotrope (tel que la loi spatiale des perméabilités soit invariante par rotation).

Les différents points que nous venons de mentionner, et qui feront l'objet de la première partie de cette étude, ne concernent en fait que les écoulements macroscopiquement uniformes ou quasi uniformes (c'est-à-dire pouvant être assimilés à des écoulements uniformes à l'échelle de volumes de dimensions assez grandes pour que le milieu y apparaisse comme homogénéisé par effet d'ergodicité). Il existe cependant une classe d'écoulements très importants pour les applications, à savoir les écoulements radiaux, qui ne peuvent absolument pas être considérés comme quasi uniformes, et auxquels par suite les résultats précédents ne sont pas applicables. Dans une deuxième partie, donc, nous entreprendrons directement l'étude de ces écoulements non uniformes : après avoir établi un théorème fondamental généralisant les inégalités [1], nous établirons les équations de l'approximation de Schwydlér et nous les appliquerons au cas des écoulements radiaux. Nous généraliserons ainsi un certain nombre de résultats établis par SCHWYDLER ⁽²⁾. La conclusion générale, un peu décevante, sera que la perméabilité macroscopique constante K des écoulements uniformes ne peut pas être utilisée pour représenter des écoulements non uniformes.

I. ÉCOULEMENTS MACROSCOPIQUEMENT UNIFORMES

Nous étudierons en premier lieu le cas des écoulements plans, c'est-à-dire d'un milieu à $N = 2$ dimensions, et nous montrerons qu'il peut dans ce cas exister une règle de pondération géométrique. Nous exposerons ensuite les résultats plus généraux que suggère la méthode de Schwydlér.

I.1. Milieu à deux dimensions et règle de pondération géométrique.

Soit, dans l'espace à deux dimensions, un milieu infini caractérisé par une perméabilité $k''(x)$ aléatoire et stationnaire, dont la loi spatiale est supposée **invariante** par **rotation** ⁽³⁾, et soient q et ∂p un flux et un gradient stationnaires vérifiant le système de Darcy :

$$\begin{aligned} q' &= -k'' \partial_i p \\ \partial_i q' &= 0 \end{aligned} \quad [3]$$

⁽¹⁾ Cas d'une perméabilité conservative, avec règle de pondération arithmétique ; cas où la perméabilité est l'inverse d'un tenseur gradient, avec règle de pondération harmonique ; cas des milieux stratifiés, etc.

⁽²⁾ Voir bibliographie *in fine*.

⁽³⁾ Cette invariance par rotation s'étend à toutes les propriétés macroscopiques de ce milieu (puisqu'elles ne dépendent que de la loi spatiale) : Elle signifie que le milieu est macroscopiquement isotrope.

On sait que, dans l'espace à deux dimensions, une rotation de 90° transforme un vecteur gradient en un vecteur conservatif (de divergence nulle) et réciproquement. Dans un système d'axes ortho-normés, les vecteurs G et F de composantes :

$$G \begin{cases} G_1 = -q^2 \\ G_2 = q^1 \end{cases} \quad \text{et} \quad F \begin{cases} F^1 = -\partial_2 p \\ F^2 = \partial_1 p \end{cases}$$

sont donc, le premier un gradient, et le deuxième un flux conservatif. Si h_{ij} est la résistivité du milieu, inverse de k^{ij} , la loi de Darcy, qui peut s'écrire :

$$\partial_i p = -h_{ij} q^j$$

montre qu'il existe également une relation linéaire entre F et G . Si l'on désigne par P le tenseur déduit de h_{ij} par une rotation de 90° (P possède donc la même loi spatiale que h) soit :

$$P = \begin{pmatrix} h_{22} & -h_{12} \\ -h_{21} & h_{11} \end{pmatrix}$$

on obtient, en effet :

$$\begin{cases} F^i = -P^{ij} G_j \\ \partial_i F^i = 0 \end{cases} \quad [4]$$

Compte tenu du fait que G est un gradient, ce système [4] se présente comme un deuxième système de Darcy, d'ailleurs équivalent à [3].

La perméabilité macroscopique constante K est un scalaire (puisque la loi spatiale est invariante par rotation) et a pour valeur :

$$K = - \frac{E(q^i)}{E(\partial_i p)} \quad (\text{sans sommation en } i)$$

Elle se déduit de la loi spatiale des k^{ij} par un certain nombre d'opérations liées uniquement à la structure du système de Darcy. Comme les systèmes [4] et [3] ont la même structure, ces mêmes opérations, effectuées sur la loi spatiale des P^{ij} , vont conduire à la valeur numérique du rapport $-\frac{E(F^i)}{E(G_i)}$. Mais d'une part ce rapport ne diffère pas du rapport $-\frac{E(\partial_i p)}{E(q^i)}$, c'est-à-dire de la résistivité macroscopique $H = \frac{1}{K}$; d'autre part les P^{ij} ont la même loi spatiale que les h_{ij} . D'où la conclusion :

Proposition 1.

Dans un milieu à deux dimensions dont les perméabilités ont une loi spatiale invariante par rotation, la perméabilité macroscopique K et la résistivité macroscopique H s'obtiennent en effectuant les mêmes opérations sur les lois spatiales des perméabilités k et des résistivités h respectivement.

Désignons alors par k_0 et h_0 les espérances $E(k)$ et $E(h)$ de la perméabilité et de son inverse : ce sont des scalaires, puisque les lois spatiales sont invariantes par rotation. Dans le cas particulier où l'on suppose de plus que $\frac{k_{ij}}{k_0}$ et $\frac{h_{ij}}{h_0}$ ont la même loi spatiale, la proposition 1 ci-dessus entraîne immédiatement l'égalité :

$$\frac{K}{k_0} = \frac{H}{h_0}$$

d'où l'on déduit aussitôt la règle de pondération :

$$K = \sqrt{\frac{k_0}{h_0}} \quad [5]$$

Du fait que $\frac{k}{k_0}$ et $\frac{h}{h_0}$ ont même loi spatiale, la règle [5] est d'ailleurs équivalente à la règle de pondération géométrique. En effet, remarquons tout d'abord que, la matrice k étant définie positive, son logarithme $\log k$ existe également : c'est la matrice admettant les mêmes vecteurs propres que k , et, comme valeurs propres les logarithmes de valeurs propres de k (qui sont positives). De même $\log h$ existe, et on a $\log h = -\log k$. Par ailleurs, puisque $\frac{k}{k_0}$ et $\frac{h}{h_0}$ ont la même loi spatiale, leurs logarithmes ont la même espérance mathématique, soit :

$$E(\log k) - \log k_0 = E(\log h) - \log h_0 = -E(\log k) - \log h_0$$

D'où résulte immédiatement :

$$E(\log k) = \frac{1}{2} \log \frac{k_0}{h_0}$$

Par suite la règle [5] est bien équivalente à la règle de pondération géométrique :

$$\log K = E(\log k)$$

La condition que $\frac{k}{k_0}$ et $\frac{h}{h_0}$ aient la même loi spatiale est toujours remplie dans le cas particulier très intéressant où cette loi spatiale est lognormale, c'est-à-dire dans le cas où la matrice des perméabilités k est de la forme :

$$k = e^A \quad [6]$$

A étant une matrice symétrique, non nécessairement définie positive, dont les composantes sont des fonctions aléatoires à loi spatiale gaussienne. (On notera qu'une matrice à loi lognormale est toujours définie positive : ses valeurs propres sont, en effet, les exponentielles des valeurs propres de A , donc toujours positives). Si k est de la forme [6], alors, $\frac{k}{k_0}$ et $\frac{h}{h_0}$ ont la même loi spatiale ; en effet, posons :

$$A = E(A) + \alpha$$

Comme α est gaussienne et de moyenne nulle, α et $-\alpha$ ont même loi spatiale, donc aussi e^α et $e^{-\alpha}$ et par suite également :

$$\frac{k}{k_0} = \frac{e^\alpha}{E(e^\alpha)} \quad \text{et} \quad \frac{h}{h_0} = \frac{e^{-\alpha}}{E(e^{-\alpha})}$$

Résumons ces divers résultats sous la forme d'une proposition.

Proposition 2.

Si, dans un milieu à deux dimensions, les matrices aléatoires $\frac{k}{E(k)}$ et $\frac{h}{E(h)}$ possèdent la même loi spatiale, et si cette loi est invariante par rotation, les perméabilités se composent selon la règle de pondération géométrique $\log K = E(\log k)$ ou selon la règle équivalente $K = [E(k)]^{\frac{1}{2}} [E(h)]^{-\frac{1}{2}}$. Ces conditions sont en particulier remplies lorsque la loi spatiale de k est lognormale et invariante par rotation.

Remarque.

Les résultats exprimés dans les deux propositions précédentes sont liés étroitement au nombre $N = 2$ des dimensions de l'espace et ne peuvent pas se généraliser au cas $N = 3$. En effet, leur démonstration repose essentiellement sur le fait qu'une rotation de 90° transforme un gradient en un vecteur conservatif. C'est là une propriété particulière à l'espace à deux dimensions, qui n'a pas d'équivalent dans le cas $N \neq 2$. Nous verrons d'ailleurs, dans le prochain paragraphe, que la règle de pondération géométrique n'est possible que dans l'espace à deux dimensions.

1.2. La méthode d'approximation de Schwydlér.

Dans ce qui suit, nous nous plaçons dans un milieu infini à N dimensions, dont les perméabilités régionalisées $k^{ij}(x)$ sont interprétées comme une réalisation d'une fonction aléatoire (tensorielle) ergodique et stationnaire. L'espace étant rapporté à des axes orthonormés, nous désignerons par g^{ij} le tenseur unité ($g^{ij} = 0$ si $i \neq j$, et $g^{ij} = 1$ si $i = j$). Nous supposons que l'espérance $E(k^{ij})$ est proportionnelle à ce tenseur unité : autrement dit, la perméabilité moyenne est un scalaire k_0 et l'on a :

$$E(k^{ij}) = k_0 g^{ij}$$

Il est alors possible de représenter la perméabilité sous la forme tensorielle :

$$k^{ij} = k_0 (g^{ij} + \varepsilon \gamma^{ij}) \quad [7]$$

ou sous la forme matricielle équivalente :

$$k = k_0 (I + \varepsilon \gamma)$$

le tenseur γ ayant une espérance nulle $E(\gamma^{ij}) = 0$. Le paramètre ε étant supposé petit, la méthode d'approximation de Schwydlér consiste à exprimer les solutions du système de Darcy sous forme de développements limités en ε .

Il est possible, par cette méthode, d'obtenir l'expression du terme général de ces développements, et par suite d'écrire les solutions de l'écoulement sous forme de développements en série entière. Mais d'une part, au delà du terme d'ordre 2, les fonctionnelles donnant le terme général deviennent trop complexes pour que l'on puisse les calculer effectivement, de l'autre la convergence d'un tel développement en série serait fort difficile à établir. C'est pourquoi nous nous contenterons (comme d'ailleurs SCHWYDLER lui-même) de développements limités arrêtés au terme d'ordre 2. Il s'agit donc, à strictement parler, d'une théorie des milieux à perméabilités faiblement variables. Mais, en fait, les résultats que nous obtiendrons auront une valeur indicative plus large, et nous permettront, soit de pressentir ce qui peut se passer dans le cas général, soit au contraire de démontrer que certaines circonstances sont exclues.

1.2.1. Les équations de récurrence.

Cherchons à exprimer la solution du système [3] sous la forme de développements en ε :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \partial_i p &= \partial_i p_0 + \sum \varepsilon^n \partial_i p_n \\ q^i &= q_0^i + \sum \varepsilon^n q_n^i \end{aligned} \quad [8]$$

où les q_n^i et $\partial_i p_n$ sont des fonctions aléatoires stationnaires à déterminer.

Compte tenu de [7], la première équation [3], c'est-à-dire la loi de Darcy, donne, en identifiant les termes de même degré en ε :

$$\begin{cases} q_0^i = -k_0 g^{ij} \partial_j p_0 \\ q_n^i = -k_0 [g^{ij} \partial_j p_n + \gamma^{ij} \partial_j p_{n-1}] \end{cases} \quad [9]$$

Il suffit ensuite de porter ces expressions dans la deuxième équation [3], (c'est-à-dire l'équation de continuité) pour obtenir les équations de récurrence cherchées :

$$\begin{cases} \Delta p_0 = 0 \\ \Delta p_n + \partial_i [\gamma^{ij} \partial_j p_{n-1}] = 0 \end{cases} \quad [10]$$

Cherchons à résoudre (formellement) de telles équations. En premier lieu, on remarque que, pour $\varepsilon = 0$, $k = k_0$ est constant, et les solutions stationnaires correspondantes sont également des constantes. Ainsi le terme d'ordre 0 du gradient ∂p_0 , et la composante correspondante du flux $q_0 = -k_0 \partial p_0$ sont des constantes. Le vecteur constant ∂p_0 peut d'ailleurs être choisi arbitrairement.

La deuxième équation [10] est du type de l'équation bien connue de Poisson :

$$\Delta f + \Phi = 0 \quad [11]$$

dont la solution se construit à l'aide des potentiels harmoniques. Désignons par $\alpha(x)$ le potentiel harmonique (c'est-à-dire la solution élémentaire de l'équation $\Delta f = 0$) de l'espace à N dimensions, soit (r désignant le rayon vecteur) :

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2\pi} \log r && \text{pour } N = 2 \\ \alpha &= \frac{1}{4\pi r} && \text{pour } N = 3, \text{ etc.} \end{aligned}$$

On sait que l'équation [11] admet la solution :

$$f(x) = \int \alpha(x - \xi) \Phi(\xi) d\xi$$

que l'on écrit aussi, sous forme plus simple, en introduisant le symbole $*$ du produit de convolution :

$$f = \alpha * \Phi$$

Ainsi la solution de l'équation [10] peut s'écrire :

$$p_n = \alpha * [\partial_i (\gamma^{ij} \partial_j p_{n-1})]$$

Enfin, on sait que pour dériver un produit de convolution il suffit de dériver l'un, quelconque, de ses facteurs. Le terme d'ordre n du gradient peut donc s'écrire :

$$\partial_i p_n = \partial_{ij} \alpha * (\gamma^{jk} \partial_k p_{n-1}) \quad [12]$$

Prenons l'espérance mathématique des deux membres de l'équation [12]. On sait que, pour toute constante C , on a dans l'espace à N dimensions :

$$\partial_{ij} \alpha * C = -\frac{1}{N} g_{ij} C$$

Par suite nous obtenons l'espérance du terme d'ordre n sous la forme :

$$E(\partial_j p_n) = -\frac{1}{N} g_{ij} E(\gamma^{ij} \partial_u p_{n-1}) \quad [13]$$

En ce qui concerne l'espérance du flux q'_n , on tire de [9] :

$$E(q'_n) = -k_0 \left[g^{ij} E(\partial_j p_n) + E(\gamma^{ij} \partial_u p_{n-1}) \right]$$

Il suffit de comparer à [13] pour obtenir :

$$E(q'_n) = k_0 (N-1) g^{ij} E(\partial_j p_n) \quad [14]$$

(sauf, évidemment, pour $n = 0$, puisque q'_0 est donné par la première équation [9]).

Remarque.

Ce qui précède ne constitue pas une démonstration rigoureuse, mais seulement une indication générale. La question de l'existence d'un produit de convolution tel que [12] devrait, pour le moins, être examinée de près. Mais les résultats fondamentaux du paragraphe suivant peuvent être justifiés, en toute rigueur, à l'aide d'une méthode un peu plus longue, où l'on remplace les équations [10] de récurrence par des équations portant directement sur la fonction de covariance et non plus sur les fonctions aléatoires γ^{ij} elles-mêmes.

1.2.2. L'approximation d'ordre deux et le tenseur de Schwydlar.

En ce qui concerne, tout d'abord, les termes du premier ordre, on remarque que leurs espérances sont nécessairement nulles :

$$E(q'_1) = E(\partial_j p_1) = 0$$

Cela résulte immédiatement de [13] et [14]. En effet, $\partial_u p_0$ est une constante et l'espérance du tenseur γ est nulle. D'où ce premier résultat intéressant : **l'effet perturbateur de la variabilité des perméabilités ne se manifeste que par des termes du deuxième ordre en ϵ .**

Cherchons maintenant les termes d'ordre 2. Si, dans la relation [13] nous remplaçons, au deuxième membre, $\partial_u p_1$ par son expression explicite [12] :

$$\partial_u p_1 = \int \partial_{uv} x(\xi) \gamma^{vr}(x-\xi) \partial_r p_0 d\xi$$

nous voyons qu'il convient de prendre l'espérance de l'intégrale :

$$\partial_r p_0 \int \partial_{uv} x(\xi) \gamma^{ur}(x) \gamma^{vr}(x-\xi) d\xi$$

Introduisons donc la matrice $R^{ij,kl}(h)$ des covariances de la fonction aléatoire tensorielle γ^{ij} :

$$R^{ij,kl}(h) = E[\gamma^{ij}(x) \gamma^{kl}(x+h)] \quad [15]$$

On a d'ailleurs manifestement :

$$R^{ij,kl}(h) = R^{kl,ij}(-h) \quad [16]$$

et $R^{i,l}$ est symétrique en i et j ainsi qu'en l et s . Avec cette notation, on voit que l'expression cherchée est :

$$E(\partial_i p_2) = -\frac{1}{N} g_{ju} \partial_r p_0 \int \partial_{iv} \alpha(\xi) R^{vr,iu}(\xi) d\xi \quad [17]$$

Nous mettons ainsi en évidence un nouveau tenseur, qui va jouer un rôle fondamental, et que nous appellerons le **tenseur de Schwydler** S'' :

$$S'' = - \int \partial_{iv} \alpha(\xi) R^{iv,iu}(\xi) d\xi \quad [18]$$

Ce tenseur est manifestement **symétrique** en i et j . On le voit en changeant ξ en $-\xi$, en utilisant [16] et en remarquant que $\partial_{iv} \alpha(\xi)$ est paire vis-à-vis de ξ . Nous montrerons un peu plus loin que S'' est également **défini positif**.

Les termes d'ordre 2 s'expriment très simplement à l'aide du tenseur de Schwydler. De [17] et de [14] on tire, en effet :

$$\begin{cases} E(\partial_i p_2) = \frac{1}{N} S'_i \partial_i p_0 \\ E(q_2) = k_0 \frac{N-1}{N} S'' \partial_i p_0 \end{cases} \quad [19]$$

1.2.3. La perméabilité macroscopique constante K .

Nous allons maintenant évaluer, au deuxième ordre en ε , l'expression de la perméabilité macroscopique constante K'' , et montrer qu'elle ne dépend que du tenseur de Schwydler. Conformément à la méthodologie générale exposée dans l'article antérieur déjà cité, nous devons former un système de N solutions stationnaires $\partial_i p^l$, q^l , indexées par l'indice l , et effectuer le produit contracté de $E(q^l)$ par l'inverse de $E(\partial_i p^l)$. Pour réaliser ce programme, nous remplacerons le terme constant $\partial_i p_0$ du gradient par le tenseur de Kronecker δ'_l ($= 1$ si $l = j$, $= 0$ si $l \neq j$). Les solutions privilégiées cherchées sont donc de la forme :

$$\begin{cases} q^l = -k_0 [q_0^l + \varepsilon q_1^l + \varepsilon^2 q_2^l + \dots] \\ \partial_i p^l = \delta'_i + \varepsilon \partial_i p_1^l + \varepsilon^2 \partial_i p_2^l + \dots \end{cases}$$

En exprimant les termes d'ordre 2 à l'aide de [19], on obtient au deuxième ordre en ε :

$$\begin{cases} E(\partial_i p^l) = \delta'_i + \frac{1}{N} \varepsilon^2 S'_i \\ E(q^l) = -k_0 \left[g^l - \frac{N-1}{N} \varepsilon^2 S'' \right] \end{cases} \quad [20]$$

Il suffit ensuite d'inverser $E(\partial_i p^l)$, ce qui donne au deuxième ordre en ε :

$$\delta'_i - \frac{1}{N} \varepsilon^2 S'_i$$

et de multiplier par $E(q^l)$ pour obtenir, toujours au deuxième ordre :

$$K'' = k_0 \left[g^{ii} - \varepsilon^2 S'' \right] \quad [21]$$

ou, sous forme matricielle :

$$K = k_0 (1 - \varepsilon^2 S)$$

Ainsi le **tenseur de Schwydlar** représente la **détérioration des perméabilités**, c'est-à-dire la différence relative :

$$\frac{E(k) - K}{E(k)} = \varepsilon^2 S$$

entre la moyenne arithmétique et la perméabilité macroscopique.

Si nous inversons (au deuxième ordre) la relation [21], nous obtenons la résistivité macroscopique $H = K^{-1}$ sous la forme matricielle :

$$H = \frac{1}{k_0} (1 + \varepsilon^2 S) \quad [22]$$

Comparons H à la moyenne $E(h)$ des résistivités. Inversant [7] au deuxième ordre en ε , nous trouvons :

$$h = \frac{1}{k_0} (1 - \varepsilon \gamma + \varepsilon^2 \gamma^2)$$

$$E(h) = \frac{1}{k_0} [1 + \varepsilon^2 E(\gamma^2)]$$

On notera que les composantes de $E(\gamma^2)$ s'expriment à l'aide de la matrice des covariances $R^{ii',jj'}(h)$ prises en $h = 0$. $E(\gamma^2)$ est une variance matricielle. Elle a pour composantes :

$$g_{ii'} E[\gamma^{ii'}(x) \gamma^{jj'}(x)] = g_{ii'} R^{ii',jj'}(0) \quad [23]$$

Finalement [22] se met sous la forme :

$$H = E(h) - \frac{\varepsilon^2}{k_0} [E(\gamma^2) - S] \quad [24]$$

Or nous avons démontré ailleurs que les tenseurs $E(k) - K$ et $E(h) - H$ sont toujours définis positifs. Les relations [21] et [24] que nous venons d'établir montrent donc que le tenseur de Schwydlar S , ainsi que le tenseur $E(\gamma^2) - S$ sont définis positifs ⁽¹⁾. Les inégalités fondamentales [1] se traduisent donc ici de la manière suivante :

$$0 < S < E(\gamma^2)$$

Indiquons encore (mais sans reproduire la démonstration) les résultats suivants qui montrent qu'au deuxième ordre en ε les **fluctuations des isobares et des lignes de courant** se rattachent également de manière simple au tenseur de Schwydlar :

$$E(g^{ij} \partial_i p_1' \partial_j p_1') = S^{ii'}$$

$$E(g_{ij} q_1^{ii'} q_1^{jj'}) = g_{ij} R^{ii',jj'}(0) - S^{ii'}$$

Ainsi les fluctuations des isobares sont liées au tenseur S et celles des lignes de courant au tenseur $E(\gamma^2) - S$.

⁽¹⁾ Ces propriétés peuvent du reste se déduire directement de l'expression [18] du tenseur de Schwydlar. Il suffit d'utiliser la transformation de Fourier, et d'appliquer le théorème de Bochner.

1.2.4. Cas où il existe une règle de pondération.

Puisque, comme nous venons de le voir, la perméabilité macroscopique, au deuxième ordre en ε , ne dépend que du tenseur de Schwydlér S , l'existence d'une règle de pondération, au sens que nous avons donné à cette expression dans l'introduction de cette étude, doit se manifester par le fait que S ne dépend que de la matrice $R^{ij}(0)$ des covariances des γ^{ij} prises au même point d'appui. L'examen de la formule [18] montre que cette circonstance ne se produit pas dans le cas général, puisque S dépend effectivement des valeurs prises par la matrice $R(\xi)$ pour toutes les valeurs de l'argument ξ et non pas seulement en $\xi = 0$. Toutefois les dérivées secondes $\partial_{is}\alpha(\xi)$ sont étroitement apparentées à la mesure de Dirac δ , puisque l'on a toujours :

$$\Delta\alpha = g^{is}\partial_{is}\alpha = -\delta$$

Autrement dit, $\partial_{is}\alpha$ présente une composante égale à $-\frac{1}{N}g_{is}\delta$, sans d'ailleurs se réduire pour autant à cette seule mesure de Dirac. Mais, si la fonction matricielle $R^{ij}(\xi)$ possède des propriétés convenables de symétrie, il peut arriver que l'action de la distribution $\partial_{is}\alpha$ sur cette fonction se réduise à celle de sa seule composante de Dirac. Lorsque une telle simplification se produit, nous dirons que nous sommes dans **le cas sub-isotrope**. Par définition, donc, dans le cas sub-isotrope, l'expression [18] du tenseur de Schwydlér se réduit à :

$$S^{ij} = \frac{1}{N}g_{is}R^{is,jj}(0) \quad [25]$$

ou encore, sous une forme matricielle plus parlante, à :

$$S = \frac{1}{N}E(\gamma^2) \quad [25 \text{ bis}]$$

De ce qui précède résulte que **c'est seulement dans le cas sub-isotrope que l'existence d'une règle de pondération est possible**. Or, il existe au moins un cas où l'hypothèse de sub-isotropie est vérifiée, et où par suite on peut espérer trouver une règle de pondération, c'est le cas où la covariance $R^{ij}(h)$ ne dépend que du rayon vecteur $r = |h|$. On montre, en effet, facilement, à l'aide de considérations de symétrie élémentaires, que l'action de $\partial_{is}\alpha$ sur une fonction possédant la symétrie sphérique, c'est-à-dire une fonction de la forme $f(r)$, se réduit à celle de sa seule composante de DIRAC, c'est-à-dire à $-\frac{1}{N}g_{is}f(0)$. Autrement dit, dans ce cas, la relation [25 bis] est vérifiée.

Comme exemple encore plus particulier de cas où une telle simplification se produit, citons le cas (à l'étude duquel SCHWYDLER s'est d'ailleurs lui-même limité) où il existe une perméabilité scalaire $k(x)$ [c'est-à-dire $k^{ij} = g^{ij}k(x)$] possédant une fonction de covariance :

$$C(r) = E[k(x)k(x+h)] - [E(k)]^2$$

ne dépendant que du rayon vecteur $|h| = r$. Dans ce cas, en effet, on a :

$$R^{ij,jj}(h) = \frac{1}{k_0^2}g^{ij}g^{jj}C(r)$$

et les conditions requises ci-dessus sont bien remplies.

L'étude du cas sub-isotrope met bien en évidence **le rôle déterminant que joue le nombre N des dimensions de l'espace**. Pour $N = 1$, en effet, le tenseur de Schwydler coïncide, selon [25 bis], avec sa borne supérieure $E(\gamma^2)$. Au fur et à mesure que N augmente, on voit ensuite S se rapprocher davantage de sa limite inférieure, qui est zéro. Ou encore, si nous nous reportons aux équations [21] et [24], nous obtenons :

$$\begin{cases} K = k_0 \left[1 - \frac{\varepsilon^2}{N} E(\gamma^2) \right] \\ H = E(h) - \frac{\varepsilon^2}{k_0} \frac{N-1}{N} E(\gamma^2) \end{cases}$$

Et, compte tenu de l'expression de $E(h)$ écrite plus haut, d'où l'on déduit :

$$\varepsilon^2 E(\gamma^2) = 1 - \frac{1}{k_0} |E(h)|^{-1}$$

on peut écrire (au deuxième ordre en ε) :

$$K = \frac{N-1}{N} E(k) + \frac{1}{N} |E(k^{-1})|^{-1} \quad [26]$$

ou, aussi bien :

$$H = \frac{1}{N} E(h) + \frac{N-1}{N} [E(h^{-1})]^{-1}$$

Bien qu'un tel résultat ne soit établi (quantitativement) qu'au deuxième ordre en ε , il semble légitime de penser que sa signification (qualitative) doit avoir une valeur générale. Cette signification est la suivante : dans un milieu, possédant des propriétés d'isotropie suffisantes pour qu'une règle de pondération y soit applicable, **la perméabilité se situe à mi-chemin ou au deux tiers du chemin entre moyenne harmonique et moyenne arithmétique selon que l'espace est à deux ou trois dimensions**.

Pour $N = 1$, K coïncide, comme il se doit, avec la moyenne harmonique. Lorsque le nombre N des dimensions de l'espace augmente, on voit la perméabilité macroscopique croître et se rapprocher asymptotiquement de sa limite supérieure, qui est la moyenne arithmétique.

Observons encore ceci : dans le cas sub-isotrope tout au moins, **la règle de pondération géométrique ne peut s'appliquer que dans un espace à $N = 2$ dimensions**. Elle est exclue à trois dimensions. On vérifie, en effet, facilement que l'on a au deuxième ordre en ε :

$$\begin{cases} E(\log k) = \log E(k) - \frac{\varepsilon^2}{2} E(\gamma^2) \\ \log K = \log E(k) - \frac{\varepsilon^2}{N} E(\gamma^2) \end{cases} \quad [26 \text{ bis}]$$

Ces expressions ne coïncident donc que pour $N = 2$.

Remarque.

Dans les conditions de la proposition 2 du premier paragraphe, nous avons obtenu une autre forme de la règle de pondération qui était :

$$K = [E(k)]^{\frac{1}{2}} [E(k^{-1})]^{-\frac{1}{2}}$$

On peut se demander dans quelle mesure une règle de la forme :

$$K = [E(k)]^{\frac{N-1}{N}} [E(k^{-1})]^{-\frac{1}{N}}$$

dont on peut vérifier qu'elle est compatible avec [26] au deuxième ordre en ϵ , ne pourrait pas s'appliquer dans un espace à N dimensions. Nous ne sommes malheureusement pas en mesure de donner une indication positive sur ce point.

II. ÉCOULEMENTS NON UNIFORMES ET ÉCOULEMENTS RADIAUX

On sait que la perméabilité macroscopique K'' , dont l'étude a fait l'objet de la première partie de cette étude, permet une description correcte des écoulements localement uniformes au niveau macroscopique, c'est-à-dire des écoulements pouvant être considérés comme uniformes dans des domaines de dimensions peut être petites à l'échelle macroscopique, mais suffisamment grandes cependant pour que les propriétés du milieu, liées aux perméabilités régionalisées $k''(x)$, y apparaissent comme homogénéisées par effet d'ergodicité. Or il existe des classes d'écoulements très importantes pour les applications, comme les écoulements radiaux, qui ne vérifient nullement cette condition. Au voisinage d'un puits de pompage, l'écoulement n'est pas localement uniforme. La perméabilité apparente observée n'a donc pas de raison a priori de coïncider avec l'expression que l'on calculerait si le milieu était homogène et de perméabilité constante K'' . La méthode de Schwydlér, cependant, peut s'appliquer aussi aux écoulements non uniformes. Dans ce qui suit, nous essayerons, en nous limitant au deuxième ordre, de déterminer les caractéristiques de cette perméabilité apparente (moyenne et variance, car il s'agira d'une quantité aléatoire, et non plus d'une constante, comme dans la première partie).

Après avoir défini les conditions aux limites et établi un théorème fondamental (paragr. I. 1), nous déterminerons l'espérance et la variance de la perméabilité apparente par des formules générales où figurera une fonction de Green (paragr. I. 2.). Nous particulariserons ensuite au cas des écoulements radiaux, en examinant les cas de simplification et les limites $R_0 \rightarrow 0$ et $R_1 \rightarrow \infty$, R_0 et R_1 désignant les rayons intérieur et extérieur de la zone de drainage (paragr. I. 3). Enfin nous évoquerons le cas où la perméabilité $k''(0)$ du puits de pompage est connue, et où par suite la loi spatiale des $k''(x)$ doit être remplacée par la loi liée (non stationnaire) correspondante.

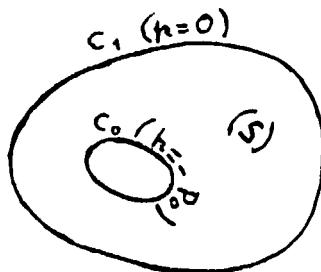
Nous nous limiterons, en principe, au **cas d'un espace à deux dimensions**. Mais les résultats des deux premiers paragraphes se transposent sans difficulté à l'espace à trois dimensions.

II.1. Les inégalités fondamentales.

Avant d'exposer les résultats de la méthode de Schwydlér pour les écoulements non-uniformes, nous allons établir un théorème fondamental généralisant les inégalités [1] rappelées ci-dessus. Con-

sidérons une zone de drainage S en forme de couronne limitée par un contour intérieur C_0 et un contour extérieur C_1 , de formes d'ailleurs quelconques ⁽¹⁾. Dans S règne une perméabilité régionalisée :

$$k^{ij} = k_0 (g^{ij} + \varepsilon \gamma^{ij})$$



où γ^{ij} est une réalisation d'une fonction aléatoire tensorielle stationnaire d'espérance égale à zéro.

Comme condition aux limites, nous nous imposons une pression nulle sur le contour extérieur C_1 , et une pression constante $-P_0$ sur le contour intérieur C_0 (le signe $-$ est introduit pour que $P_0 > 0$ corresponde à un pompage). Soit Q le débit total traversant la couronne, et recueilli, par conséquent, à l'intérieur de C_0 . Désignons par $q_i(x)$ et $\partial_i p(x)$ le flux et le gradient de pression en tout point x de la zone drainée S . Le flux est conservatif ($\partial_i q^i = 0$) de sorte que l'on a :

$$q^i \partial_i p = \partial_i (p q^i)$$

Intégrons cette expression dans S et appliquons la formule d'Ostrogradsky :

$$\int_S q^i \partial_i p \, dx = \int_{C_1} p q^i n_i \, ds + \int_{C_0} p q^i n_i \, ds$$

On désigne suivant l'usage, par n_i les cosinus directeurs de la normale extérieure aux contours C_0 et C_1 . Comme $p = 0$ sur C_1 et $p = -P_0$ sur C_0 il reste simplement :

$$Q P_0 = - \int_S q^i \partial_i p \, dx \quad [27]$$

Cette relation fondamentale nous permettra de calculer le débit Q , et par suite la perméabilité apparente. Elle possède la même signification énergétique et la même structure que la relation analogue :

$$E(q^i) E(\partial_i p) = E(q^i \partial_i p)$$

que l'on a établi ailleurs dans le cas d'un milieu infini et d'un écoulement macroscopique uniforme : à droite figure l'énergie consommée par les forces de viscosité, à gauche l'énergie que l'on doit fournir de l'extérieur pour entretenir l'écoulement. Cependant, grâce au choix des conditions aux limites, la relation [27] s'applique au flux et au gradient eux-mêmes, et non pas seulement à leurs espérances mathématiques comme dans le cas d'un écoulement uniforme.

Décomposons maintenant la pression $p(x)$ en deux termes :

$$p(x) = \varpi(x) + \lambda(x) \quad [28]$$

⁽¹⁾ Il serait également loisible de limiter latéralement l'aire S par deux parois imperméables joignant C_0 et C_1 .

dont le premier $\varpi(x)$ est une fonction déterminée (non aléatoire) vérifiant les conditions aux limites $\varpi = 0$ sur C_1 et $\varpi = -P_0$ sur C_0 , et à cela près quelconque. Le deuxième terme $\lambda(x)$ est par conséquent une fonction aléatoire qui s'annule sur les deux contours C_0 et C_1 . En utilisant la loi de Darcy, on peut écrire :

$$\begin{aligned} -q' \partial_i p &= k'' \partial_i p \partial_j p \\ &= k'' \partial_i p \partial_j \varpi + k'' \partial_i \varpi \partial_j p - k'' \partial_i \varpi \partial_j \varpi + k'' \partial_i \lambda \partial_j \lambda \\ &= -2 q' \partial_i \varpi - k'' \partial_i \varpi \partial_j \varpi + k'' \partial_i \lambda \partial_j \lambda \end{aligned}$$

Intégrons dans S . A gauche apparaît $Q P_0$, selon [27]. A droite, on remarque que l'on a :

$$\int_S q' \partial_i \varpi dx = \int_S \partial_i (\varpi q') dx = -Q P_0$$

à cause du choix des conditions aux limites imposées à ϖ . Ainsi, nous obtenons :

$$Q P_0 = \int_S k'' \partial_i \varpi \partial_j \varpi dx - \int_S k'' \partial_i \lambda \partial_j \lambda dx \quad [28 \text{ bis}]$$

Or, k'' étant définie positive, la deuxième intégrale est toujours positive. Par conséquent, pour toute fonction ϖ vérifiant les conditions aux limites du problème posé, on a l'inégalité :

$$Q P_0 \leq \int_S k'' \partial_i \varpi \partial_j \varpi dx \quad [29]$$

Cette inégalité signifie que, **parmi tous les écoulements possibles compatibles avec les conditions aux limites, l'écoulement réel est celui qui réalise le minimum de la puissance consommée par les forces de viscosité**. On sait qu'une telle condition d'extremum s'exprime par la relation :

$$\partial_i (k'' \partial_j p) = 0$$

qui n'est autre chose que l'équation de continuité $\partial_i q' = 0$.

La relation [28 bis] va maintenant nous conduire à un théorème exprimant, comme dans le cas des écoulements uniformes, que la perméabilité apparente est toujours comprise entre les moyennes harmonique et arithmétique. Du fait qu'ici $Q P_0$ est une variable aléatoire, le théorème ne s'énonce qu'en espérance mathématique.

Théorème fondamental.

L'espérance de la perméabilité apparente est toujours comprise entre les moyennes arithmétique et harmonique.

Plus précisément, si l'on désigne par Q_H et Q_A les débits que l'on observerait, avec les mêmes conditions aux limites, si l'on remplaçait le milieu réel par des milieux homogènes de perméabilité constantes égales à $[E(k^{-1})]^{-1}$ et $E(k)$ respectivement, on a les inégalités fondamentales :

$$Q_H \leq E(Q) \leq Q_A \quad [30]$$

La deuxième inégalité [30] découle directement de [29]. Prenons, en effet, pour $\varpi(x)$ la pression qui s'établit dans le milieu de perméabilité constante $E(k)$, et passons aux espérances. Il vient, compte tenu de la relation [27] :

$$E(Q P_0) = \int_S E(k'') \partial_i \varpi \partial_j \varpi dx = Q_A P_0$$

Pour démontrer maintenant la première inégalité [30], nous mettrons le flux q^i sous la forme :

$$q^i = \chi^i + \theta^i$$

χ^i et θ^i étant deux vecteurs conservatifs que nous préciserons dans un instant. Si h_{ij} désigne la résistivité, inverse de k_{ij} , on a :

$$\begin{aligned} k^{ij} \partial_i p \partial_j p &= h_{ij} q^i q^j \\ &= h_{ij} \chi^i q^j + h_{ij} \chi^i q^j - h_{ij} \chi^i \chi^j + h_{ij} \theta^i \theta^j \\ &= -2 \chi^i \partial_i p - h_{ij} \chi^i \chi^j + h_{ij} \theta^i \theta^j \end{aligned}$$

En intégrant dans S, et en désignant par χ le débit total du flux χ^i , on en tire :

$$2 \chi P_0 - \int_S h_{ij} \chi^i \chi^j dx = Q P_0 - \int_S \theta^i \theta^j h_{ij} dx$$

Comme h_{ij} est défini positif, on en déduit l'inégalité :

$$2 \chi P_0 - \int_S h_{ij} \chi^i \chi^j dx < Q P_0$$

Prenons, maintenant, comme vecteur χ^i , le flux qui s'installe, pour les mêmes conditions aux limites, dans le milieu homogène de résistivité constante $E(h_{ij})$. On a $\chi = Q_n$ par définition, et aussi, d'après [27] :

$$\int_S E(h_{ij}) \chi^i \chi^j dx = Q_n P_0$$

Il suffit donc de prendre les espérances des deux membres de l'inégalité écrite ci-dessus pour obtenir :

$$Q_n P_0 < P_0 E(Q)$$

ce qui achève de démontrer le théorème fondamental.

II.2. Les développements de Schwydlar.

Comme dans la première partie de cette étude, nous allons chercher des développements de la forme [8] vérifiant le système de DARCY : on obtient encore les relations [9], qui donnent le flux en fonction du gradient, et les équations de récurrence [10] qui vont permettre de déterminer la pression. Mais cette fois nous devons choisir comme fonction $p_0(x)$ la fonction harmonique égale à 0 sur le contour C_1 et à la constante $-P_0$ sur C_0 , c'est-à-dire la solution du problème posé dans le cas $\varepsilon = 0$. Pour $P_n(x)$ nous choisirons la fonction (unique) vérifiant [10] et s'annulant sur C_0 et C_1 . Ce sera une fonction aléatoire, mais son gradient ne sera pas stationnaire.

On doit ici introduire **La fonction de Green** $G(x, y)$ définie comme suit :

1) $G(x, y) - \alpha(x-y)$ est harmonique et régulière dans tout le domaine S. (α est le potentiel harmonique, soit $\frac{1}{2\pi} \log r$ dans l'espace à deux dimensions).

2) $G(x, y)$ est nulle lorsque x appartient au contour C_0 ou au contour C_1 .

On sait que ces conditions déterminent, d'une manière unique, la fonction de Green pour tout point y de S, et que de plus cette fonction est symétrique en x et y .

$$G(x, y) = G(y, x)$$

Compte tenu du choix des conditions aux limites, la solution $p_n(x)$ de l'équation [10] se met sous la forme :

$$p_n(x) = \int_S G(x,y) \partial_i [\gamma^{ij}(y) \partial_j p_{n-1}(y)] dy$$

Comme $G(x,y)$ s'annule, d'après la condition [2] et la symétrie en x, y de la fonction de Green, lorsque y appartient à C_0 ou à C_1 , une intégration par parties nous donne :

$$p_n(x) = - \int_S \frac{\partial}{\partial y^i} G(x,y) \gamma^{ij}(xy) \partial_j p_{n-1}(y) dy$$

D'où l'expression du gradient :

$$\partial_i p_n(x) = - \int_S \gamma^{ij}(y) \partial_j p_{n-1}(y) \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial y^j} G(x,y) dy \quad [31]$$

Cette expression (dans laquelle la convention de sommation s'applique à l'indice i) peut être comparée à [12] : on voit que la fonction de Green joue ici exactement le même rôle que le potentiel harmonique α dans le cas des écoulements uniformes.

II.2.1. Développement de $P_0 Q$

Pour évaluer simplement le développement de $Q P_0$ limité à l'ordre 2, nous pouvons utiliser la relation [28] en posant :

$$\begin{aligned} \varpi(x) &= p_0(x) \\ \lambda(x) &= \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \dots \end{aligned}$$

Compte tenu de [7], nous obtenons ainsi :

$$\begin{aligned} \left(\frac{P_0 Q}{k_0} \right) &= \int_S g^{ij} \partial_i p_0 \partial_j p_0 dx + \varepsilon \int_S \gamma^{ij} \partial_i p_0 \partial_j p_0 dx \\ &+ \varepsilon^2 \int_S g^{ij} \partial_i p_1 \partial_j p_1 dx + \dots \end{aligned} \quad [32]$$

Le coefficient du terme en ε^2 , qui est $-\int_S \text{grad } p_1^2 dx$, donc toujours négatif, peut s'explicitier comme suit : on remarque d'abord qu'en raison du choix des conditions aux limites ($p_1 = 0$ sur C_0 et C_1) on a :

$$\int_S q_1^i \partial_i p_1 dx = \int_S \partial_i (p_1 q_1^i) dx = 0$$

ensuite on remplace q_1^i par son expression [9], ce qui donne :

$$\int_S g^{ij} \partial_i p_1 \partial_j p_1 dx + \int_S \gamma^{ij} \partial_i p_0 \partial_j p_1 dx = 0$$

Enfin, on remplace $\partial_j p_1$ par son expression déduite de [31] et on obtient :

$$\int_S g^{ij} \partial_i p_1 \partial_j p_1 dx = \int_S \int_S \gamma^{ij}(x) \gamma^{kl}(y) \partial_i p_0(x) \partial_k p_0(y) \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial y^l} G(xy) dx dy \quad [33]$$

II.2.2. Espérance mathématique du débit.

Si nous prenons l'espérance des deux membres de [32], nous remarquons que le terme en ε disparaît, puisque $E(\gamma'') = 0$: la perturbation est ici encore du deuxième ordre en ε . Il reste donc :

$$E(P_0 Q) = P_0 Q_0 - k_0 \varepsilon^2 T^2 \quad [34]$$

Le premier terme :

$$P_0 Q_0 = k_0 \int_S \overline{\text{grad } p_0^2} dx$$

est celui qui correspond au cas $\varepsilon = 0$ (perméabilité k_0 constante). Le coefficient T_2 du deuxième terme admet les deux expressions suivantes, qui résultent de [33] :

$$\begin{aligned} T_2 &= \int_S E[\overline{\text{grad } p_1^2}] dx \\ &= \int_S \int_S R^{ij,kl}(y-x) \partial_i p_0(x) \partial_j p_0(x) \partial_k p_0(y) \partial_l p_0(y) \frac{\partial^2 G(x,y)}{\partial x^i \partial y^j} dx dy \end{aligned} \quad [35]$$

La première expression montre que T_2 est positif. La deuxième, où figure la matrice des covariances telle que nous l'avons définie en [15], permet un calcul explicite, sous réserve que l'on sache former la fonction de Green et la solution $\partial_i p_0$ correspondant à une perméabilité constante.

II.2.3. Calcul de la variance $D^2(P_0 Q)$.

D'après [32] et au deuxième ordre en ε , la variance s'obtient en prenant l'espérance du carré du terme d'ordre 1 en ε du développement de $P_0 Q$. Ce carré se présente comme l'intégrale double :

$$\varepsilon^2 k_0^2 \int_S \int_S \gamma''(x) \gamma''(y) \partial_i p_0(x) \partial_j p_0(x) \partial_k p_0(y) \partial_l p_0(y) dx dy$$

et l'on a par conséquent :

$$D^2(P_0 Q) = \varepsilon^2 k_0^2 \int_S \int_S R^{ij,kl}(y-x) \partial_i p_0(x) \partial_j p_0(x) \partial_k p_0(y) \partial_l p_0(y) dx dy \quad [36]$$

Cette expression est plus simple que celle de l'espérance mathématique, puisqu'elle ne dépend pas de la fonction de Green. Néanmoins, on ne manquera pas d'être frappé par la difficulté des calculs auxquels conduisent les développements de SCHWYDLER, même limités à l'ordre 2. Pour essayer de rendre plus parlants les résultats obtenus, nous allons les particulariser au cas des écoulements radiaux.

II.3. Cas des écoulements radiaux.

Nous supposons maintenant que les contours C_0 et C_1 sont deux cercles concentriques, centrés à l'origine, de rayon r_0 et r_1 . La zone S de drainage est donc la couronne circulaire comprise entre les deux cercles. C'est là le dispositif classique que l'on utilise pour étudier l'écoulement qui se produit lorsque l'on fait débiter un puits isolé. Le contour extérieur C_1 , a, le plus souvent, un caractère pure-

ment conventionnel : on s'impose la condition $p = 0$ sur C' à seule fin qu'un écoulement permanent puisse s'établir. Il en résultera certaines difficultés, assez troublantes, dans l'interprétation de ce qui suit.

En vue de simplifier au maximum les formules tensorielles du paragraphe précédent, nous supposons qu'il existe une **perméabilité scalaire**, autrement dit que l'on a :

$$k^{ij} = k_0 g^{ij} (1 + \varepsilon \gamma)$$

$\gamma(x)$ étant une fonction aléatoire stationnaire d'espérance nulle. Nous supposons de plus que la covariance de $\gamma(x)$ est de la forme $R(r)$, c'est-à-dire ne dépend que du rayon vecteur $r = |h|$. Dans ces conditions, la covariance matricielle qui intervient dans les formules générales prend la forme plus simple :

$$R^{ij,kl}(h) = g^{ij} g^{kl} R(r) \quad [37]$$

On notera que la valeur $R(0)$ de $R(r)$ en $r = 0$ n'est autre que la variance $D^2(\gamma)$ de γ .

Ces hypothèses sont celles-là mêmes qui figurent dans les travaux de SCHWYDLER. Nous nous permettrons, dans ce qui suit de citer plusieurs résultats sans reproduire les calculs intermédiaires. D'une part, en effet, il s'agit de calculs assez longs et, pour tout dire, plutôt fastidieux, de l'autre on pourra toujours se reporter aux articles de SCHWYDLER.

Avec les pressions 0 sur C_1 et $-P_0$ sur C_0 , les termes d'ordre 0 du développement de SCHWYDLER s'obtiennent immédiatement. Si l'on désigne par $r = |x|$ le rayon vecteur du point courant la pression $p_0(x)$ et le débit total Q_0 sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} p_0(x) = a \log \frac{r}{R_1} \\ Q_0 = 2\pi a k_0 \\ a = \frac{P_0}{\log R_1 - \log R_0} \end{array} \right. \quad [38]$$

Nous allons maintenant calculer, au deuxième ordre en ε , l'espérance mathématique et la variance du débit Q .

II.3.1. Calcul de la variance du débit Q .

Compte tenu des hypothèses faites, la formule générale [36] se simplifie. Comme on a :

$$g^{ij} \partial_i p_0(x) \partial_j p_0(x) = \frac{a^2}{r^2}$$

on obtient, en portant dans [36] l'expression [37] de la covariance, et en passant en coordonnées polaires :

$$D^2(QP_0) = 2\pi a^4 \varepsilon^2 k_0^2 \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{r} \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr'}{r'} \int_0^{2\pi} R(\rho) d\theta$$

On a posé pour abréger :

$$\rho = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta}$$

Nous considérons plutôt la variance relative $D^2\left(\frac{Q}{Q_0}\right)$: elle sera, en effet, égale à la variance relative de la perméabilité apparente. Compte tenu de [38], on trouve :

$$D^2\left(\frac{Q}{Q_0}\right) = \frac{\varepsilon^2}{2\pi \left(\log \frac{r_1}{r_0}\right)^2} \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{r} \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr'}{r'} \int_0^{2\pi} R(\rho) d\theta \quad [39]$$

Étudions la limite de cette expression pour $r_0 \rightarrow 0$ et $r_1 \rightarrow \infty$ (dans les applications, en effet, r_0 est petit à l'échelle de la covariance $R(r)$, et r_1 est grand). Pour cela, nous allons encadrer la variance relative au moyen de l'inégalité de Schwarz. Tout d'abord, de

$$|R(\rho)| \leq R(0) = D^2(\gamma)$$

on déduit :

$$D^2\left(\frac{Q}{Q_0}\right) \leq \varepsilon^2 D^2(\gamma) \quad [39 \text{ bis}]$$

Mais cette première inégalité est trop lâche. On obtient une majoration plus stricte en introduisant la fonction aléatoire auxiliaire définie en intégrant γ sur le cercle C_r de rayon r :

$$X(r) = \int_{C_r} \gamma(x) d\theta$$

Désignons par $C(r)$ et $C(r, r')$ la variance de $X(r)$ et la covariance de $X(r)$ et $X(r')$:

$$\begin{aligned} C(r) &= 2\pi \int_0^{2\pi} R\left(2r \sin \frac{\theta}{2}\right) d\theta \\ C(r, r') &= 2\pi \int_0^{2\pi} R(\rho) d\theta \end{aligned}$$

L'inégalité de Schwarz donne :

$$|C(r, r')| \leq \sqrt{C(r)C(r')}$$

Il suffit de porter cette inégalité dans [39] pour obtenir la majoration cherchée :

$$D^2\left(\frac{Q}{Q_0}\right) \leq \frac{\varepsilon^2}{4\pi^2 \left(\log \frac{r_1}{r_0}\right)^2} \left| \int_{r_0}^{r_1} \sqrt{C(r)} \frac{dr}{r} \right|^2 \quad [40]$$

Pour les fonctions $R(r)$ usuelles (ergodiques), $C(r)$ décroît assez vite, lorsque r tend vers l'infini, pour que l'intégrale $\int_{r_0}^{r_1} \sqrt{C(r)} \frac{dr}{r}$ soit convergente. Ainsi, lorsque l'on fait tendre r_0 vers 0 et r_1 vers l'infini, cette intégrale est équivalente à :

$$-\log r_0 \sqrt{C(0)} = -2\pi \log r_0 \sqrt{R(0)}$$

et par suite [40] nous donne :

$$\lim D^2 \left(\frac{Q}{Q_0} \right) \leq \varepsilon^2 \lim \left(\frac{\log r_0}{\log \frac{r_1}{r_0}} \right)^2 D^2(\gamma) \quad [41]$$

Nous allons maintenant établir l'inégalité inverse en cherchant à minorer [39]. A cette fin, nous utiliserons la covariance de $\frac{Q}{Q_0}$ avec la valeur $\gamma(0)$ prise par $\gamma(x)$ à l'origine des coordonnées.

De [32] on déduit sans peine :

$$E \left[\gamma(0) \frac{Q}{Q_0} \right] = \frac{\varepsilon}{\log \frac{r_1}{r_0}} \int_{r_0}^{r_1} R(r) \frac{dr}{r}$$

et l'inégalité de Schwarz nous donne :

$$\frac{\varepsilon^2}{D^2(\gamma)} \left[\frac{1}{\log \frac{r_1}{r_0}} \int_{r_0}^{r_1} R(r) \frac{dr}{r} \right]^2 \leq D^2 \left(\frac{Q}{Q_0} \right) \quad [42]$$

Passant ensuite à la limite $r_0 \rightarrow 0$ et $r_1 \rightarrow \infty$, on obtient l'inégalité inverse de [41], d'où l'on conclut :

$$\lim D^2 \left(\frac{Q}{Q_0} \right) = \varepsilon^2 D^2(\gamma) \lim \left(\frac{\log r_0}{\log \frac{r_1}{r_0}} \right)^2 \quad [43]$$

On obtient ainsi la généralisation d'un résultat établi par SCHWYDLER dans le cas particulier d'une fonction de covariance de la forme :

$$R(r) = D^2(\gamma) e^{-\lambda r^2} \quad [44]$$

Cependant, on doit faire certaines réserves sur la formule [43]. Cette formule ne peut pas, en effet, être utilisée numériquement, puisque, tant que r_0 et r_1 ont des valeurs finies, la valeur prise par l'expression $\frac{\log r_0}{\log r_1 - \log r_0}$ dépend du choix des unités : il faut, au numérateur, remplacer $\log r_0$ par $\log \frac{r_0}{b}$, b représentant la portée de la covariance $R(r)$. Dans le cas [44], étudié par SCHWYDLER on obtient, en effet, la formule approchée :

$$\begin{cases} D^2 \left(\frac{Q}{Q_0} \right) = \frac{1 + \left(\log \frac{b}{r_0} \right)^2}{\left(\log \frac{r_1}{r_0} \right)^2} \varepsilon^2 D^2(\gamma) \\ b = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} e^{-\frac{C}{2}} \quad (C = 0,577\,216 \dots) \end{cases}$$

Mais il y a plus grave. En effet, la limite [43] dépend de la manière dont on fait tendre simultanément r_0 vers zéro et r_1 vers l'infini. Selon la plus ou moins grande rapidité de la croissance de l'un et

de la décroissance de l'autre, on obtient toute la gamme des valeurs comprises entre les deux bornes suivantes :

Si $r_1 \rightarrow \infty$, r_0 fixe :

$$\lim D^2 \left(\frac{Q}{Q_0} \right) = 0$$

Si $r_0 \rightarrow 0$, r_1 fixe :

$$\lim D^2 \left(\frac{Q}{Q_0} \right) = \varepsilon^2 D^2(\gamma)$$

Or, en général, le choix du rayon r_1 du contour extérieur est purement conventionnel, comme nous l'avons déjà remarqué, et cependant ce choix exerce une assez grande influence sur la détermination de la variance, et aussi sur celle de l'espérance, comme nous allons le voir.

II.3.2. Calcul de l'espérance du débit Q .

La formule générale [34] conduit facilement à la relation :

$$E \left(\frac{Q}{Q_0} \right) = 1 - \frac{\varepsilon^2}{\log \frac{r_1}{r_0}} \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{r} \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr'}{r'} \int_0^{2\pi} R(\rho) \frac{\partial^2 G(x, y)}{\partial r \partial r'} d\theta$$

En explicitant la fonction de Green sous forme de développements en série de Fourier, et après une discussion analytique assez longue, que nous ne reproduirons pas, il est possible d'établir la formule d'approximation suivante, valable lorsque r_0 est petit et r_1 grand à l'échelle de la covariance $R(r)$:

$$E \left(\frac{Q}{Q_0} \right) = 1 + D^2 \left(\frac{Q}{Q_0} \right) - \varepsilon^2 D^2(\gamma) \quad [45]$$

Cette espérance est toujours inférieure à l'unité, comme le montre l'inégalité [39 bis] précédemment établie. Il y a donc toujours détérioration de la perméabilité apparente, relativement au cas d'un milieu homogène. L'espérance est toujours comprise entre les deux valeurs qui correspondent aux deux cas extrêmes suivants :

Si $r_1 \rightarrow \infty$, r_0 fixe :

$$\lim E \left(\frac{Q}{Q_0} \right) = 1 - \varepsilon^2 D^2(\gamma)$$

Si $r_0 \rightarrow 0$, r_1 fixe :

$$\lim E \left(\frac{Q}{Q_0} \right) = 1$$

Aucune de ces deux limites ne correspond à ce que l'on observerait avec un milieu homogène possédant la perméabilité macroscopique constante $K = k_0 \left[1 - \frac{\varepsilon^2}{2} D^2(\gamma) \right]$ que le milieu réel présente vis-à-vis des écoulements uniformes. Au lieu de :

$$1 - \frac{\varepsilon^2}{2} D^2(\gamma)$$

en effet, on observe $1 - \varepsilon^2 D^2(\gamma)$ dans le cas $r_1 \rightarrow \infty$ avec r_0 fixe : cette valeur correspond à la **moyenne harmonique**, et au contraire on observe la valeur 1 pour $r_0 \rightarrow 0$ avec r_1 fixe, ce qui corres-

pond à la **moyenne arithmétique**. Dans le cas général, on obtiendra n'importe quelle valeur comprise entre ces deux limites, selon la rapidité de la croissance de r_1 et de la décroissance de r_0 . On sera plus proche de la moyenne harmonique si r_1 croît plus vite que r_0 ne décroît, et inversement.

III.3.3. Loi liée du débit lorsque l'on connaît la perméabilité à l'origine.

Dans les applications, on connaît en général la perméabilité du puits de pompage, c'est-à-dire (pratiquement) $k(0)$. Avant donc de passer à des conclusions générales, il est intéressant de préciser ce que deviennent les résultats précédents lorsque l'on remplace la loi spatiale de $k(x)$ par la même loi prise conditionnellement, c'est-à-dire liée par la connaissance de la perméabilité $k(0)$ à l'origine. Nous avons effectué les calculs correspondants, qui sont forts longs et ne peuvent pas être reproduits ici, en supposant que cette loi spatiale est gaussienne. Les résultats obtenus doivent cependant avoir une valeur indicative plus générale.

En ce qui concerne l'espérance liée du débit, on obtient une expression de la forme suivante :

$$E\left(\frac{Q}{Q_0} \middle| \gamma(0)\right) = 1 + \varepsilon \gamma(0) \frac{\log \frac{b}{r_0}}{\log \frac{r_1}{r_0}} + \varepsilon^2 [A D^2(\gamma) + B \overline{\gamma(0)^2}] \quad [46]$$

b est la portée de la covariance, dont nous avons explicité ci-dessus la valeur dans le cas d'une covariance en $e^{-\lambda r^2}$. A et B sont des fonctions assez complexes de r_0 , r_1 et des paramètres de la loi. Pour r_1 grand ou r_0 petit on observe les circonstances suivantes :

Si $r_1 \rightarrow \infty$, r_0 fixe	la limite est $1 - \varepsilon^2 D^2(\gamma)$
Si $r_0 \rightarrow 0$, r_1 fixe	la limite est $1 + \varepsilon \gamma(0)$

Dans le premier cas (r_1 infini) la perméabilité apparente coïncide avec la moyenne harmonique, et n'est pas influencée par la connaissance de la perméabilité à l'origine.

Dans le deuxième cas (r_0 nul), au contraire, la perméabilité apparente coïncide avec la perméabilité à l'origine.

Ces résultats ne s'appliquent pas seulement en valeur probable, mais à la valeur elle-même de la perméabilité apparente. En effet, on obtient pour la variance liée l'expression suivante :

$$D^2\left[\frac{Q}{Q_0} \middle| \gamma(0)\right] = \frac{\varepsilon^2}{\left(\log \frac{r_1}{r_0}\right)^2} D^2(\gamma)$$

Cette variance liée tend vers 0 lorsque l'on fait tendre, séparément ou simultanément, r_0 vers 0 et r_1 vers l'infini. Ainsi le débit Q converge en moyenne quadratique vers son espérance mathématique [46].

III.3.4. Conclusions générales sur les écoulements non uniformes.

Sans même parler de l'extrême complication des calculs auxquels conduit la méthode de Schwydlér, les résultats que nous avons indiqués font apparaître les écoulements non uniformes sous un aspect assez complexe. La perméabilité apparente, en effet, est une variable aléatoire, et ne coïncide

même pas en valeur probable avec la perméabilité macroscopique constante K des écoulements uniformes. Son espérance, peut prendre n'importe quelle valeur comprise entre les limites habituelles $E(k)$ et $[E(k^{-1})]^{-1}$. Si le contour extérieur de la zone de drainage est très éloigné, elle est plutôt plus proche de la moyenne harmonique. Si, au contraire, le diamètre du puits est très petit, elle se rapproche davantage de la moyenne arithmétique. Lorsque la perméabilité du puits de pompage est connue, la perméabilité apparente elle-même (et non plus sa valeur probable) tend à se rapprocher de la perméabilité du puits, ou, au contraire, de la moyenne harmonique générale, selon que le diamètre du puits devient très petit ou que le contour extérieur s'éloigne indéfiniment. Si l'on ajoute à cela le caractère le plus souvent conventionnel du choix de ce contour extérieur, on conçoit l'embaras des utilisateurs, et la nécessité pour eux de recourir à une règle empirique simple, même grossièrement approchée, telle que la règle de pondération géométrique, qui a au moins l'avantage de tomber à mi-chemin des deux limites extrêmes possibles. Il faut malheureusement se rendre à l'évidence : dans un milieu à perméabilités régionalisées, il n'existe pas de loi de Darcy macroscopique permettant de décrire globalement les écoulements non-uniformes.

Manuscrit reçu en septembre 1966.

BIBLIOGRAPHIE

- SCHWYDLER (M. L.). — Les courants d'écoulement dans les milieux hétérogènes. *Izvest. Akad. Nauk S. S. R., mekh. i mas.*, 1962, **3**, 185-190.
 Courants d'écoulement plans dans les milieux à hétérogénéité aléatoire. *Izvest. Akad. Nauk, mekh. i mas.*, 1962, **6**, 65-71.
 Sur les caractéristiques moyennes des courants d'écoulements dans les milieux à hétérogénéité aléatoire. *Izvest. Akad. Nauk S. S. R., mekh. i. mas.*, 1963, **4**, 127-129.
 — Sur la précision de la prévision du débit des puits. *Izvest. Akad. Nauk. S. S. R., mekh. i. mas.*, 1963, **5**, 148-150.
 Sur les calculs hydrodynamiques des écoulements de filtration dans les milieux poreux hétérogènes. *Dobyča nefti, teorija i praktika*. Annuaire 1963, 107-118, VNII.
 MATHERON (G.). — Structure et composition des perméabilités. *Rev. Inst. Franç. du Pétrole*, 1966, **XXI-4**, 564-580.
 — Genèse et signification énergétique de la loi de Darcy. *Rev. Inst. Franç. du Pétrole*, 1966, **XXI-11**, 1697-1706.