COMPOSITION DES PERMÉABILITÉS EN MILIEU POREUX HÉTÉROGÈNE : CRITIQUE DE LA RÈGLE DE PONDÉRATION GÉOMÉTRIQUE

G. MATHERON

École Nationale Supérieure des Mines de Paris.

Extrait de la
REVUE DE L'INSTITUT FRANÇAIS DU PÉTROLE
ET ANNALES DES COMBUSTIBLES LIQUIDES
Vol. XXIII, n° 2, février 1968
7, rue Nélaton, PARIS, 15e

Réf. 15.620

COMPOSITION DES PERMÉABILITÉS EN MILIEU POREUX HÉTÉROGÈNE : CRITIQUE DE LA RÈGLE DE PONDÉRATION GÉOMÉTRIQUE

G. MATHERON
École Nationale Supérieure des Mines de Paris.

Nous avons vu dans un article précédent que la règle de pondération géométrique ne s'applique jamais aux milieux poreux hétérogènes à une ou à trois dimensions. Nous montrons ici qu'elle n'est pas valable non plus à deux dimensions, en dehors des cas particuliers que nous avons étudiés antérieurement. Cette règle équivaut, en effet, à un principe d'équipartition de l'énergie qui n'est pas vérifié en général. Nous confirmons ce résultat en traitant trois exemples à l'aide de la méthode d'approximation de Schwydler (qu'il faut ici pousser jusqu'au troisième ordre). Pour chacun d'eux, nous trouvons une règle de pondération différente : l'existence d'une règle de pondération constitue probablement un phénomène assez général, mais la forme de cette règle doit dépendre du type de la loi spatiale, et non pas seulement du nombre des dimensions de l'espace.

In a previous article we saw that the law of geometric weighting is never applied to heterogenous porous media with either one or three dimensions. In this article we show that it is also not valid for two dimensions, except in the particular cases which we described previously. This law is the equivalent of a principle of the equidistribution of energy, which is generally not valid. We confirm this finding by taking three examples which are dealt with using the Schwydler approximation (which here has to be carried out to the third order). We find a different weighting law for each example. The existence of a weighting law is probably a rather general phenomenon, but the form of this law has to depend on the type of space law and not merely on the number of space dimensions.

Hemos visto en un artículo precedente que la regla de ponderación geométrica no se aplica jamás a los medios porosos heterogéneos a una o a tres dimensiones. Nosotros mostramos en este trabajo que esta regla no es válida tampoco a dos dimensiones, fuera de casos particulares que hemos estudiado anteriormente. Esta regla equivale, en efecto, a un principio de equipartición de la energía que no se verifica en general. Confirmamos este resultado tratando tres ejemplos con la ayuda del método de aproximación de Schwydler (que es necesario prolongar acá hasta el tercer orden). Para cada uno de ellos, encontramos una regla de ponderación diferente : la existencia de una regla de ponderación constituye probablemente un fenómeno bastante general, pero la forma de esta regla debe depender del tipo de ley espacial y no solamente del número de dimensiones del espacio.

INTRODUCTION

Dans une série d'articles antérieurs, nous avons étudié un milieu poreux hétérogène dont la perméabilité régionalisée $k^{ij}(x)$ pouvait être considérée comme une réalisation d'une fonction aléatoire (tensorielle) ergodique et stationnaire : vis-à-vis des écoulements uniformes ou quasi uniformes au niveau macroscopique, ce milieu se comporte comme s'il était doué d'une perméabilité macroscopique constante K^{ij} obligatoirement comprise entre les moyennes harmonique et arithmétique des perméabilités ponctuelles k^{ij}. La loi selon laquelle les $k^{ij}(x)$ se composent pour engendrer K^{ij} fait, en principe, intervenir la totalité de la loi spatiale, c'est-à-dire la loi de probabilité des valeurs prises simultanément par les $k^{ij}(x)$ en tous les points x de l'espace. Il semble, cependant, exister des cas assez généraux où K^{ij} ne dépend que de la loi des valeurs prises par les $k^{ij}(x)$ en un même point d'appui x de l'espace, et où, par suite, il est possible d'appliquer une **règle de pondération** de la forme :

$$\varphi(K) = E\left[\varphi(k)\right] \qquad [1]$$

φ désignant une fonction matricielle qu'il s'agit d'expliciter. En particulier, dans l'espace à deux dimensions, lorsque $k/E(k)$ et $h/E(h)$ ($h = k^{-1}$ désignant la résistivité) possèdent la même loi spatiale, et que celle-ci est invariante par rotation, la règle de pondération géométrique :

$$\log K = E(\log k) \qquad [2]$$

s'applique en toute rigueur. Ce résultat, cependant, ne s'étend pas à des espaces possédant un nombre N de dimensions différent de 2, K se rapprochant d'autant plus de la moyenne arithmétique $E(k)$ que N est plus élevé.

Dans la présente étude, nous nous proposons de montrer que la règle géométrique [2] n'est pas valable, en général, même dans l'espace à deux dimensions, en dehors du cas particulier auquel nous avons fait allusion, et que l'on doit s'attendre par suite à observer des règles de pondération du type [1] avec des fonctions φ différentes pour différents types de lois spatiales.

Nous donnerons de ce résultat deux démonstrations indépendantes. Dans une première partie, nous examinerons la signification énergétique de la règle de pondération géométrique, et nous montrerons que cette règle est logiquement équivalente à un principe d'équipartition de l'énergie. Mais, en raison même de la richesse de son contenu physique, et de l'universalité de la forme sous laquelle se présente un tel principe, sa validité ne peut pas être liée à une particularité aussi contingente que le nombre N des dimensions de l'espace. Il serait choquant pour la raison qu'un principe de ce genre s'applique aux écoulements plans, et non dans les espaces à une ou à trois dimensions. Or il ne s'applique pas pour $N = 1$ ou 3, puisque, justement, la règle de pondération géométrique ne peut pas être vérifiée en dehors du cas $N = 2$: il ne doit donc pas non plus être valable pour $N = 2$, sauf cas particulier, de sorte que la règle [2] ne sera pas vérifiée, en général, même par les écoulements plans.

Il se pourrait, cependant, qu'une démonstration de nature aussi philosophique ne paraisse pas suffisamment convaincante. C'est pourquoi, dans une deuxième partie, nous raisonnerons sur des exemples précis, en utilisant la méthode d'approximation de SCHWYDLER. Mais, dans l'espace à deux dimensions, le développement de K coïncide, au deuxième ordre, avec celui de la moyenne géométrique. Nous devrons donc pousser les développements de SCHWYDLER jusqu'au troisième ordre. En fait, nous pourrons même obtenir l'expression du terme général d'ordre n, bien qu'elle ne présente plus beaucoup d'intérêt pratique au-delà de $n = 3$ ou 4, en raison de la complication des calculs auxquels elle conduit. Nous étudierons ensuite trois exemples de milieux poreux, macroscopiquement isotropes, dans l'espace à deux dimensions, et nous constaterons qu'aucun d'eux ne vérifie la règle de pondération géométrique, bien que chacun possède sa propre règle liée étroitement à la forme de sa loi spatiale.

Notations :

Nous utiliserons le même système de notations que dans les articles précédents. La perméabilité et son inverse, la résistivité, seront notées k^{ij} et h_{ij} au niveau ponctuel, K^{ij} et H_{ij} au niveau macroscopique. De même, g_{ij} désignera le tenseur métrique, $\partial_i p$ le gradient de charge d'un écoulement macroscopiquement uniforme, et q^i le vecteur débit correspondant. Nous prendrons égaux à l'unité la viscosité et le poids spécifique du fluide, et nous utiliserons systématiquement les notations $\partial_j p^l$ et q^{il} pour désigner le système de solutions privilégiées (stationnaires) indexées par l'indice l et vérifiant le système d'équations de Darcy :

$$\begin{cases} q^{il} = -k^{ij}\partial_j p^l \\ \partial_i q^{il} = 0 \end{cases} \qquad [3]$$

ainsi que la condition supplémentaire :

$$E(\partial_j p^l) = \delta_j^l = \begin{matrix} 0 & \text{si} & j \neq l \\ 1 & \text{si} & j = l \end{matrix} \qquad [4]$$

On sait que, si l'on connaît la solution de ce système, la perméabilité macroscopique K^{il} est donnée par :

$$K^{il} = -E(q^{il}) \qquad [5]$$

Enfin, nous désignerons par W^{ls} le tenseur représentant la densité de puissance consommée par les forces de viscosité, dont l'expression est :

$$W^{ls} = k^{ij}\partial_i p^l \partial_j p^s = -q^{il}\partial_i p^s \qquad [6]$$

et nous utiliserons la relation fondamentale :

$$K^{ls} = E(W^{ls}) \qquad [7]$$

1. LE PRINCIPE D'ÉQUIPARTITION DE L'ÉNERGIE

Pour examiner la signification énergétique de la règle de pondération géométrique, nous allons utiliser une méthode variationnelle, qui présente d'ailleurs un certain intérêt par elle-même, et en déduire une relation différentielle entre K^{ls} et l'espérance de la densité de puissance W^{ls} prise conditionnellement dans l'hypothèse où k est connue. Le principe d'équipartition que nous avons en vue en résultera très simplement.

1.1. Méthode variationnelle.

Dans les relations [6] et [7], remplaçons k^{ij} par $k^{ij} + \delta k^{ij}$, en désignant par δk^{ij} une fonction aléatoire ergodique et stationnaire comme k^{ij} elle-même. Il n'est pas nécessaire de supposer cette fonction tensorielle $\delta k^{ij}(x)$ indépendante de $k^{ij}(x)$. Nous obtenons, compte tenu de la symétrie du tenseur k :

$$\delta W^{ls} = \delta k^{ij}\partial_i p^l \partial_j p^s + 2k^{ij}\partial_i p^l \partial_j \delta p^s$$

Le terme où figure l'expression $\partial_j \delta p^s$ a une espérance mathématique nulle. En effet, appliquant successivement la loi de Darcy et l'équation de continuité [3], nous trouvons :

$$k^{ij}\partial_i p^l \partial_j \delta p^s = -q^{jl}\partial_j \delta p^s = -\partial_j (q^{jl}\delta p^s)$$

Comme q^{jl} et δp^s sont stationnaires, il en est de même du produit $q^{jl}\delta p^s$: l'espérance mathématique de cette expression est constante, et celle de ses dérivées est nullle. Compte tenu de [7], nous obtenons ainsi :

$$\delta K^{ls} = E(\delta W^{ls}) = E(\delta k^{ij} \partial_i p^l \partial_j p^s) \qquad [8]$$

Cette équation [8] pourrait servir de point de départ pour une étude plus fine des propriétés énergétiques de l'écoulement. Il ne nous est pas possible de développer ici ce point comme il le mériterait, et nous nous contenterons de donner trois indications élémentaires :

Tout d'abord, si nous prenons $\delta k^{ij} = \delta\lambda k^{ij}$ ($\delta\lambda$ constante), c'est-à-dire si les perméabilités varient proportionnellement, il vient :

$$\delta K^{ls} = \delta\lambda E(W^{ls}) = \delta\lambda K^{ls}$$

conformément à une règle de similitude évidente. En deuxième lieu, pour $\delta k^{ij} = \delta\lambda g^{ij}$, c'est-à-dire si l'on augmente les perméabilités principales d'une même quantité constante $\delta\lambda$, il vient :

$$\delta K^{ls} = \delta\lambda E(g^{ij} \partial_i p^l \partial_j p^s)$$

On voit apparaître le tenseur dont les composantes sont les produits scalaires des gradients des différentes solutions privilégiées. Ce tenseur exprime la déformation que présentent les surfaces isobares vis-à-vis des plans de coordonnées. De la même manière si nous augmentons les résistivités principales d'une même quantité constante $\delta\lambda$, c'est-à-dire si nous prenons cette fois $\delta k = -k^{-2}\delta\lambda$ nous voyons apparaître les produits scalaires des vecteurs-courant des solutions privilégiées. On obtient, en effet, dans ce cas :

$$\delta K^{ls} = -\delta\lambda E(g_{ij} q^{il} q^{js})$$

On voit que ces résultats conduisent à une interprétation énergétique de la géométrie des isobares et des lignes de courant.

1.2. Milieu poreux à *n* composantes.

En vue d'expliciter la signification de la relation [8], considérons le cas d'un milieu possédant une perméabilité scalaire $k(x)$, autrement dit prenons $k^{ij}(x) = g^{ij} k(x)$, et supposons que $k(x)$ ne soit susceptible de prendre que n valeurs distinctes $k_1, k_2 \ldots k_n$. L'ensemble (aléatoire) des points x pour lesquels $k(x) = k_a$ ($a = 1, 2 \ldots$ ou n) peut être caractérisé par sa fonction indicatrice $f_a(x)$, égale à 1 si $k(x) = k_a$ et à 0 dans le cas contraire. Les $f_a(x)$ constituent n fonctions aléatoires stationnaires vérifiant les conditions : $\sum_a f_a(x) = 1$, et $f_a(x) f_b(x) = 0$ si $a \neq b$. La perméabilité scalaire peut se mettre sous la forme :

$$k(x) = \sum_{a=1}^{n} k_a f_a(x)$$

Les $f_a(x)$ définissent une partition de l'espace en compartiments distincts, dans chacun desquels la perméabilité reste constante. Ces compartiments, c'est-à-dire les $f_a(x)$, restant inchangés, faisons varier l'une des valeurs possibles de la perméabilité, par exemple k_a, d'une quantité constante δk_a, autrement dit, prenons la variation :

$$\delta k(x) = \delta k_a f_a(x)$$

L'équation [8] nous donne aussitôt :

$$\delta K^{ls} = \delta k_a E\left[g^{ij} f_a(x)\, \partial_i p^l \partial_j p^s\right] \qquad [9]$$

Cette expression est liée à l'espérance mathématique **conditionnelle** $E(W^{ij}|k_a)$ de la densité de puissance W^{ij} prise dans l'hypothèse où $k(x) = k_a$, c'est-à-dire à la valeur moyenne de la puissance consommée **dans la composante** a. En effet, si $\varpi_a = E[f_a(x)]$ désigne la probabilité pour que l'on ait $k(x) = k_a$ on peut écrire :

$$E(W^{ij}|k_a) = \frac{1}{\varpi_a} E[f_a(x) W^{ij}] = \frac{k_a}{\varpi_a} E[f_a(x) g^{ij} \partial_i p^1 \partial_j p^1]$$

puisque, par définition, la perméabilité est k_a lorsque $f_a(x) = 1$, et, par suite, la relation [9] peut se mettre sous la forme :

$$\delta K^{ij} = \varpi_a \frac{\delta k_a}{k_a} E(W^{ij}|k_a) \qquad [10]$$

Mais, les $f_a(x)$ étant données, c'est-à-dire pour une partition donnée de l'espace en composantes de n types, la perméabilité macroscopique se présente comme une fonction $K^{ij}(k_1, k_2 \dots k_n)$ des n paramètres $k_1, k_2 \dots k_n$, et la relation [10] est équivalente aux systèmes suivants d'équations aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial K^{ij}}{\partial k_a} = \frac{\varpi_a}{k_a} E[W^{ij}|k_a] \qquad [11]$$

Ainsi, pour le milieu à n composantes, toute règle de pondération possède une signification énergétique : la puissance consommée totale $\sum_a \varpi_a E(W|k_a)$ se répartit entre les différentes composantes du milieu au prorata des dérivées partielles :

$$k_a \frac{\partial K^{ij}}{\partial k_a} = \frac{\partial K^{ij}}{\partial \log k_a}$$

1.3. Le principe d'équipartition de l'énergie.

Examinons quelle serait la signification énergétique de la règle de pondération géométrique dans le cas du milieu à n composantes envisagé ci-dessus. Les $f_a(x)$ et les ϖ_a étant fixés, la perméabilité macroscopique est scalaire ($K^{ij} = K g^{ij}$) et on a :

$$K = k_1^{\varpi_1} k_2^{\varpi_2} \dots k_n^{\varpi_n}$$

Il résulte alors de [11] que le tenseur $E(W^{ij}|k_a)$ est lui-même de la forme $g^{ij} E(W|k_a)$, et que l'on a :

$$E(W|k_1) = E(W|k_2) = \cdots = E(W|k_n) = K \qquad [12]$$

Autrement dit, la valeur moyenne de la densité de puissance consommée est la même dans chacune des n composantes ; ou encore, si l'on préfère, il y a équipartition de l'énergie entre ces n composantes.

Inversement, supposons réalisé le principe d'équipartition qu'exprime l'équation [12]. D'après [11], nous avons alors le système suivant d'équations aux dérivées partielles :

$$\frac{k_1}{\varpi_1}\frac{\partial K}{\partial k_1} = \frac{k_2}{\varpi_2}\frac{\partial K}{\partial k_2} = \dots = \frac{k_n}{\varpi_n}\frac{\partial K}{\partial k_n} = K$$

La solution générale de ce système est de la forme $K = C k_1^{\varpi_1} k_2^{\varpi_2} \dots k_n^{\varpi_n}$, et la constante C est nécessairement égale à l'unité, comme on le voit en prenant $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = K$: par conséquent, le principe [11] d'équipartition de l'énergie entraîne la validité de la règle de pondération géométrique. Énonçons :

Proposition :

Dans le milieu poreux à n composantes, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1) La règle de pondération géométrique est applicable ;

2) Le principe d'équipartition de l'énergie est valable.

Autrement dit, ces deux propositions seront vraies ou fausses **ensemble**. Il y a des cas où nous savons qu'elles sont vérifiées toutes deux. Par exemple, dans l'espace à deux dimensions, un milieu à deux composantes, tel que le damier aléatoire ou le milieu à polygones convexes que nous étudierons dans la troisième partie, conduit à une loi spatiale invariante pour les rotations de 90°. Si, de plus, $\varpi_1 = \varpi_2 = 1/2$ (et seulement dans ce cas-là) on vérifie que $k/E(k)$ et $h/E(h)$ ont la même loi spatiale. Donc la règle de pondération géométrique $K = \sqrt{k_1 k_2}$ est applicable, ainsi que le principe d'équipartition de l'énergie. Mais la conclusion ne subsiste pas pour $\varpi_1 \neq \varpi_2$.

Il est d'ailleurs remarquable que la proposition énoncée ci-dessus ne fasse en aucune manière intervenir le nombre des dimensions de l'espace. En fait, en dehors du cas $N = 2$, nous savons que la règle de pondération géométrique ne peut pas être valable. Ainsi que nous l'avons déjà indiqué dans notre introduction, nous devons en conclure que les deux propriétés dont nous avons démontré l'équivalence doivent être, en général, fausses toutes les deux, y compris dans le cas $N = 2$. Autrement dit, la règle de pondération géométrique ne s'appliquera pas, même aux écoulements plans, en dehors des cas particuliers habituels.

Pour confirmer cette conclusion, nous allons reprendre maintenant la méthode d'approximation de Schwydler, en poussant les développements jusqu'au troisième ordre, et nous l'appliquerons ensuite à quelques exemples précis.

2. L'APPROXIMATION DE SCHWYDLER AU TROISIÈME ORDRE

2.1. Les équations de récurrence.

Dans la méthode de Schwydler, on suppose que k^{ij} est de la forme :

$$k^{ij} = k_0 (g^{ij} + \varepsilon \gamma^{ij})$$

avec $E(\gamma^{ij}) = 0$, ou $E(k^{ij}) = k_0 g^{ij}$, et on cherche à obtenir les solutions privilégiées sous la forme de développements (limités, ou en série entière) en fonction du paramètre ε supposé petit :

$$\begin{cases} \partial_i p^j = \delta_i^j + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \partial_i p_n^j \\ -q^{ij} = k_0 \left(g^{ij} - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n q_n^{ij} \right) \end{cases} \qquad [13]$$

La loi de Darcy donne alors :

$$\begin{aligned} -q_0^{il} &= k_0 g^{il} \\ -q_n^{il} &= k_0\,(g^{ij}\partial_j p_n^l + \gamma^{ij}\partial_j p_{n-1}^l) \end{aligned} \qquad [14]$$

et l'équation de continuité conduit aux relations de récurrence :

$$\Delta p_n^l + \partial_i\,(\gamma^{ij}\partial_j p_{n-1}^l) = 0 \qquad [15]$$

Partant de $\partial_i p_0^l = \delta_i^l$, ces équations permettent de déterminer les $\partial_i p_n^l$ successifs. En fait, lorsque $\partial_i p_{n-1}^l$ est connu, l'équation [15] permet d'obtenir les $\partial_i p_n^l$ à une fonction harmonique près seulement. Mais $\partial_i p_n^l$ doit être une fonction aléatoire stationnaire. Comme les seules fonctions harmoniques qui puissent être considérées comme des fonctions aléatoires stationnaires sont des constantes, nous voyons que $\partial_i p_n^l$ est en réalité déterminé à une constante près. Cette constante sera elle-même déterminée, si l'on s'impose de respecter la condition E $(\partial_i p^l) = \delta_i^l$, c'est-à-dire :

$$\mathrm{E}\,(\partial_i p_n^l) = 0 \qquad [16]$$

Compte tenu de cette condition [16], la perméabilité macroscopique est donnée par [5]. Il suffit ensuite d'utiliser le développement [13] de q^{il} et la relation [14] pour obtenir :

$$\left\{ \begin{aligned} & \mathrm{K}^{il} = k_0\left(g^{il} - \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \mathrm{S}_n^{il}\right) \\ & \mathrm{S}_n^{il} = -\mathrm{E}\,(\gamma^{ij}\partial_j p_{n-1}^l) \end{aligned} \right. \qquad [17]$$

Pour $n = 1$, le tenseur S_1^{il} est nul, puisque E $(\gamma) = 0$. Pour $n = 2$, S_2^{il} n'est pas autre chose que le tenseur de Schwlydler, étudié dans un article précédent. Pour chaque indice n (indice dépourvu de signification tensorielle) S_n^{il} est un tenseur **symétrique** d'ordre 2 (puisque K^{il} est symétrique quelque soit ε). On sait que S_2^{il} est défini positif, mais cette dernière propriété ne se généralise pas à S_n^{il} pour n quelconque.

2.2. Calcul explicite de S_n^{il}.

Nous connaissons déjà l'expression du tenseur de Schwydler S_2^{il}, qui est :

$$\mathrm{S}_2^{il} = -\int \partial_{ij}\alpha\,(\xi)\,\mathrm{R}^{il,jl}\,(\xi)\,d\xi$$

α (ξ) désignant la solution élémentaire de l'équation de Laplace, c'est-à-dire le potentiel $\frac{1}{2\pi}\log r$, dans l'espace à 2 dimensions, $\frac{1}{4\pi r}$ dans l'espace à 3 dimensions, etc., et $\mathrm{R}^{il,jl}$ représentant la covariance tensorielle :

$$\mathrm{E}\left[\gamma^{il}\,(x)\,\gamma^{jl}\,(x+\xi)\right] = \mathrm{R}^{il,jl}\,(\xi)$$

En ce qui concerne le tenseur d'ordre 3, S_3^{il}, nous renvoyons en annexe I le détail des calculs, et nous nous contenterons de citer ici le résultat final. Introduisons le moment fonctionnel d'ordre 3 :

$$\mathrm{R}^{il,aj,bk}\,(x, y, z) = \mathrm{E}\left[\gamma^{il}\,(x)\,\gamma^{aj}\,(y)\,\gamma^{bk}\,(z)\right] \qquad [18]$$

C'est une fonction (tensorielle) qui ne dépend en réalité que de deux arguments ($y - x$ et $z - x$) et non des trois points d'appui x, y et z séparément, puisque la loi spatiale est invariante par translation (stationnaire). On obtient alors pour S_3 l'expression suivante :

$$S_3^{le} = -\int \partial_{ij}\alpha(\xi)\,\partial_{ab}\alpha(\eta)\,R^{li,aj,be}(o, \xi, \xi + \eta)\,d\xi d\eta \qquad [19]$$

Cette égalité doit être prise au sens des distributions (*voir* annexe I). En fait, il suffit de comparer les expressions de S_2 et de S_3 pour voir apparaître la loi générale selon laquelle il est possible de construire S_n. Mais, en pratique, n croissant, l'expression de S_n devient trop complexe pour que l'on puisse espérer la calculer numériquement.

2.3. Cas d'une perméabilité scalaire et isotrope.

Pour effectuer des calculs explicites, nous supposerons qu'il existe une perméabilité scalaire, soit $\gamma^{ij} = g^{ij}\gamma$, où γ est une fonction aléatoire stationnaire dont la loi spatiale est, de plus, supposée invariante par rotation. En posant :

$$R(o, \xi, \xi + \eta) = E\left[\gamma(x)\,\gamma(x + \xi)\,\gamma(x + \xi + \eta)\right] \qquad [20]$$

on a ici :

$$R^{li,aj,be}(o, \xi, \xi + \eta) = g^{li}g^{aj}g^{be}R(o, \xi, \xi + \eta) \qquad [21]$$

Si l'on change ξ en $-\xi$ dans [19] et si l'on tient compte de :

$$R(o, -\xi, -\xi + \eta) = R(o, \xi, \eta)$$

on obtient le tenseur S_3^{le} sous la forme :

$$S_3^{le} = -g^{li}g^{aj}g^{be}\int \partial_{ij}\alpha(\xi)\,\partial_{ab}\alpha(\eta)\,R(o, \xi, \eta)\,d\xi d\eta \qquad [22]$$

Il convient donc d'introduire le tenseur du quatrième ordre :

$$C_{ij,ab} = \int \partial_{ij}\alpha(\xi)\,\partial_{ab}\alpha(\eta)\,R(o, \xi, \eta)\,d\xi d\eta \qquad [23]$$

Ce tenseur est symétrique en ij comme en ab, et invariant également par échange de (ij) et (ab). Il doit de plus être invariant par rotation, comme la loi spatiale de γ. Ces différentes conditions ne peuvent être remplies que par un tenseur de la forme :

$$C_{ij,ab} = \lambda g_{ij}g_{ab} + \mu\left[g_{ia}g_{jb} + g_{ja}g_{ib}\right]$$

Il ne dépend donc que de deux paramètres λ et μ. De plus, la relation $\Delta\alpha = g^{ij}\partial_{ij}\alpha = -\delta$ (mesure de Dirac) montre que l'on doit avoir :

$$C_{ia}^{ia} = \lambda N^2 + 2\mu N = R(o, o, o) = E(\gamma^3)$$

Nous désignerons par $m_n = E(\gamma^n)$ le moment d'ordre n de γ. Ainsi, l'espace ayant N dimensions, les deux paramètres λ et μ vérifient la relation :

$$\lambda N^2 + 2\mu N = m_3 \qquad [24]$$

Le tenseur C, est par suite aussi le tenseur S_3^{ls}, seront donc entièrement déterminés si l'on connaît le moment d'ordre 3, m_3, et l'unique paramètre μ dont l'expression fasse intervenir R (o, ξ, η) :

$$\mu = \int \partial_{12}\alpha(\xi)\, \partial_{12}\alpha(\eta)\, R(o, \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \qquad [25]$$

En effet, S_3^{ls}, qui, d'après [22] et [23], se met sous la forme :

$$S_3^{ls} = -g^{li}g^{aj}g^{bs}C_{ij,ab} = -\left[\lambda + (N + 1)\mu\right] g^{ls}$$

s'écrira, compte tenu de [24] :

$$S_3^{ls} = -\left[\frac{m_3}{N^2} + \left(N + 1 - \frac{2}{N}\right)\mu\right] g^{ls}$$

A partir de maintenant, nous nous limiterons au cas de l'espace à N = 2 dimensions. Les tenseurs de Schwydler d'ordre 2 et 3 sont alors donnés par :

$$\begin{aligned} S_2^{ls} &= 1/2\ m_2\ g^{ls} \\ S_3^{ls} &= -(1/4\, m_3 + 2\,\mu)\ g^{ls} \end{aligned} \qquad [26]$$

Le développement de Schwydler limité à l'ordre 3 nous donne donc la perméabilité macroscopique sous la forme :

$$\frac{K}{k_0} = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2 m_2 + \left(\frac{1}{4}\, m_3 + 2\,\mu\right)\varepsilon^3 \qquad [27]$$

Ce développement doit être comparé à celui de la moyenne géométrique :

$$\frac{K}{k_0} = \frac{e^{E(\log k)}}{E(k)} = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2 m_2 + \frac{1}{3}\varepsilon^3 m_3$$

Tout se ramène donc à comparer entre elles les valeurs numériques de $1/3\ m_3$ et de $(1/4\, m_3 + 2\,\mu)$, qui ne coïncident que pour $\mu = 1/12\ m_3$. Nous allons examiner trois exemples, et obtenir pour chacun d'eux des rapports μ/m_3 différents de 1/12. Cela signifiera que la règle de pondération géométrique n'est pas applicable à ces exemples, bien qu'il existe pour chacun d'eux une règle de pondération.

Remarque :

S'il existe une règle de pondération, elle doit se manifester par un développement de Schwydler à l'ordre 3 de la forme :

$$\frac{K}{k_0} = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2 m_2 + A\varepsilon^3 m_3$$

où A est un coefficient numérique déterminé, dont la valeur dépend d'ailleurs de la forme de la règle de pondération : ainsi A = 1/3 correspondrait à la règle géométrique. Seulement, il peut arriver que $m_3 = E(\gamma^3)$ soit lui-même un infiniment petit de l'ordre de ε lui-même : dans ce cas, le terme $A\varepsilon^3 m_3$ est du quatrième ordre, et doit être regroupé avec les autres termes d'ordre 4.

Cette circonstance se produit en particulier lorsque $k/E(k)$ et $h/E(h)$ ont la même loi spatiale : dans ce cas, le moment impair $E(\varepsilon^{2p+1}\gamma^{2p+1}) = \varepsilon^{2p+1} m_{2p+1}$ est toujours d'ordre supérieur à $2p + 1$. Une étude analytique plus poussée montre que c'est justement pour cette raison que la règle géométrique s'applique dans ce cas. Montrons-le en nous limitant au terme d'ordre 3. Pour cela, explicitons le développement de la résistivité $h = 1/k$:

$$\begin{cases} h = \dfrac{1}{k_0}\left[1 - \varepsilon\gamma + \varepsilon^2\gamma^2 - \varepsilon^3\gamma^3 + \cdots\right] \\ h_0 = \mathrm{E}(h) = \dfrac{1}{k_0}\left[1 + \varepsilon^2 m_2 - \varepsilon^3 m_3 + \cdots\right] \end{cases}$$

Nous en tirons :

$$\frac{h}{h_0} = 1 - \varepsilon\gamma + \varepsilon^2(\gamma^2 - m_2) - \varepsilon^3(\gamma^3 - m_3 - m_2\gamma)$$

Si h/h_0 et k/k_0 ont la même loi spatiale, ils ont en particulier la même variance. La variance de k/k_0 est $\varepsilon^2 m_2$ par définition. Celle de h/h_0 se déduit du développement précédent. On trouve, au troisième ordre :

$$\mathrm{D}^2\left(\frac{h}{h_0}\right) = \varepsilon^2 m_2 - 2\varepsilon^3 m_3 + \cdots$$

Cette quantité devant coïncider avec $\varepsilon^2 m_2$, les coefficients des monômes ε^3, ε^4... doivent être identiquement nuls. Par suite $\varepsilon^3 m_3$ est nécessairement d'ordre 4 au moins en ε. Par suite aussi, quel que soit le coefficient A de $\varepsilon^3 m_3$ dans le développement de K/k_0, ce développement coïncide au troisième ordre avec celui que donne la règle de la moyenne géométrique, et cela pour la simple raison qu'aucun de ces deux développements ne contient réellement de terme en ε^3.

3. EXEMPLES

3.1. Mot croisé aléatoire.

Nous supposons que le plan est divisé en carrés de côté a selon un quadrillage régulier. En fait la maille a ne joue aucun rôle, puisque K est invariant pour toute similitude effectuée sur la loi spatiale : nous prendrons donc simplement $a = 1$. A chacun de ces carrés, nous attribuons une perméabilité scalaire k tirée au sort selon une loi donnée, admettant une espérance mathématique k_0 et des moments centrés :

$$\mathrm{E}\left[(k - k_0)^n\right] = (k_0)^n \varepsilon^n m_n$$

Il est entendu que ces tirages au sort sont effectués indépendamment les uns des autres pour les différents carrés.

Le calcul du paramètre μ, que l'on trouvera en annexe II, conduit à la valeur numérique :

$$\frac{\mu}{m_3} = 0{,}0145\ldots$$

ce qui donne :

$$1/4\, m_3 + 2\,\mu = 0{,}279\ m_3$$

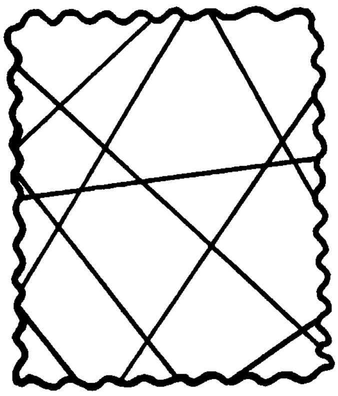
valeur comprise entre $1/4$ et $1/3$, mais différente de $1/3\, m_3$. La règle de pondération géométrique ne s'applique donc pas au mot croisé aléatoire, sauf dans le cas particulier où $k/\mathrm{E}(k)$ et $h/\mathrm{E}(h)$ ont la même loi de probabilité : cette circonstance se traduit, comme nous l'avons vu, par la disparition du terme d'ordre 3, m_3 étant déjà lui-même un infiniment petit équivalent à ε.

Mais on notera que le développement de K/k_0 à l'ordre 3 ne fait pas intervenir d'autres paramètres que les trois premiers moments. Il existe donc effectivement une règle de pondération (non géométrique) applicable au damier aléatoire, règle qui s'écrit au troisième ordre :

$$\frac{K}{k_0} = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2 m_2 + 0{,}279\varepsilon^3 m_3$$

3.2. Milieu à polygones convexes aléatoires.

Le plan est maintenant divisé en polygones convexes aléatoires, grâce à des droites implantées au hasard selon un schéma poissonien (plus précisément : les droites de direction comprise entre θ et $\theta + d\theta$ dessinent sur une perpendiculaire à leur direction θ un processus poissonien de densité $\lambda d\theta$, λ étant une constante indépendante de θ). A chacun de ces polygones convexes, on attribue ensuite une perméabilité scalaire k tirée au sort comme dans l'exemple précédent. On sait que, dans un tel



schéma, la probabilité pour qu'une aire convexe de périmètre $2L$ ne soit recoupée par aucune des droites aléatoires est $\exp(-2\lambda L)$. En particulier, la probabilité pour que trois points o, ξ, et η soient intérieurs à un même polygone (c'est-à-dire, pour que le triangle de sommets o, ξ et η ne soit rencontré par aucune droite) est de cette même forme, de sorte que l'on a :

$$R(o, \xi, \eta) = m_3 e^{-\lambda[|\xi| + |\eta| + |\xi - \eta|]}$$

La formule [25] permet ensuite de calculer μ. On trouve (*voir* annexe III) la valeur numérique :

$$\frac{\mu}{m_3} = \frac{1}{8}(3 - 4\log 2) = 0{,}0284\ldots$$

On en tire $\frac{1}{4} m_3 + 2\mu = 0{,}3068\, m_3$, valeur différente de $m_3/3$. La règle de pondération géométrique ne s'applique pas, et le développement de Schwydler à l'ordre 3 est :

$$\frac{K}{k_0} = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2 m_2 + 0{,}3068\, m_3 \varepsilon^3$$

3.3. Schéma à loi indéfiniment divisible.

Nous partons maintenant d'une mesure aléatoire à loi indéfiniment divisible dF, telle que les intégrales $\int_{S_1} dF$ et $\int_{S_2} dF$ soient indépendantes dès que les deux aires S_1 et S_2 sont disjointes :

cette mesure dF peut, par exemple, être constituée par des points implantés au hasard dans le plan selon un schéma poissonien. Nous attribuons ensuite à chaque point x du plan une perméabilité scalaire $k(x)$ égale à l'intégrale :

$$k(x) = \int_{C_x} dF$$

de la mesure aléatoire dans le cercle C_x de rayon a centré en x. Nous pouvons d'ailleurs prendre $a = 1$, puisque K est invariant par similitude. Alors la covariance $R(x, y)$ est proportionnelle à l'aire de l'intersection des deux cercles C_x et C_y, et le moment d'ordre 3, $R(0, \xi, \eta)$ est proportionnel à l'aire de l'intersection triple des trois cercles C_0, C_ξ et C_η. On en déduit cette fois (*voir* annexe IV) :

$$\mu = 0$$

Ce milieu n'obéit pas à la règle de pondération géométrique, mais à une règle différente qui s'écrit au troisième ordre :

$$\frac{K}{k_0} = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2 m_2 + \frac{1}{4}\varepsilon^3 m_3$$

CONCLUSION GÉNÉRALE

Au terme de cette étude, nous aboutissons à une conclusion qui pourra paraître un peu décevante : la règle de pondération géométrique, dont nous savions déjà qu'elle ne peut pas s'appliquer dans les espaces possédant un nombre $N \neq 2$ dimensions, n'est pas non plus valable, en général, pour les écoulements plans, en dehors du cas particulier où k/k_0 et h/h_0 obéissent à une même loi spatiale isotrope. Cependant, ce cas particulier est important en pratique, puisqu'il s'applique à des perméabilités lognormales. D'autre part, il est fort possible, dans le cas $N = 2$, que K, sans coïncider avec la moyenne géométrique, en diffère suffisamment peu, en général, pour que la règle conserve sa valeur pratique. Mais surtout, on notera que chacun des trois exemples traités a permis de conclure à l'existence effective d'une règle de pondération (non géométrique) : conclusion établie, en réalité, au troisième ordre en ε, mais dont la validité à tous les ordres peut être démontrée facilement. C'est là le résultat positif de cette étude. Pour aller plus loin, c'est-à-dire pour rechercher quel type de règle de pondération peut correspondre à tel ou tel type de loi spatiale, compte tenu de la valeur de N, il conviendrait d'entreprendre simultanément des études expérimentales assez systématiques, et des études mathématiques, d'un niveau assez élevé, relatives aux opérateurs aléatoires et à leurs solutions stationnaires éventuelles.

ANNEXE I

EXPRESSION DU TENSEUR DE SCHWYDLER D'ORDRE 3

Pour déterminer $S_3^{i'}$, nous allons former une fonction $S_3^{i'}(\xi, \eta)$ dont la valeur en $\xi = \eta = 0$ coïncidera avec celle de $S_3^{i'}$ telle qu'elle est définie en (17). Posons, en premier lieu :

$$S_3^{i'}(\xi, 0) = -E\left[\gamma^{i'}(x)\partial_i p_1^i(x+\xi)\right] \qquad \text{[I-1]}$$

Cette fonction coïncide bien avec S_3^{ls} en $\xi = 0$. D'autre part, et moyennant une hypothèse naturelle d'ergodicité, elle tend vers o lorsque $|\xi|$ tend vers l'infini, puisque $\gamma^{li}(x)$ et $\partial_i p_1^s(x+\xi)$ sont alors asymptotiquement indépendants. Cette condition aux limites permet de déterminer une fonction à partir de son laplacien. Prenons donc le laplacien (en ξ) de [I-1], ce qui, compte tenu de [15], va nous donner :

$$\Delta_\xi S_3^{ls}(\xi, 0) = \mathrm{E}\left[\gamma^{li}(x)\, \partial_{ij}\left(\gamma^{aj}(x+\xi)\, \partial_a p_1^s(x+\xi)\right)\right] \tag{I-2}$$

Ensuite, nous introduisons la deuxième variable η en posant :

$$\Delta_\xi S_3^{ls}(\xi, \eta) = \mathrm{E}\left[\gamma^{li}(x)\, \partial_{ij}\left(\gamma^{aj}(x+\xi)\, \partial_a p_1^s(x+\xi+\eta)\right)\right] \tag{I-3}$$

L'équation [I-3], jointe à la condition aux limites $S_3^{ls}(\infty, \eta) = 0$ détermine effectivement la fonction $S_3^{ls}(\xi, \eta)$. Mais le deuxième membre de [I-3] s'annule également pour $|\eta| \to \infty$ (toujours moyennant la même hypothèse d'ergodicité), et par conséquent cette nouvelle condition aux limites nous permet de reconstituer $S_3^{ls}(\xi, \eta)$ à partir de son laplacien itéré $\Delta_\xi \Delta_\eta$: d'après [15], l'opérateur Δ_η appliqué à [I-3] nous donne (compte tenu de $\partial_j p_0^l = \delta_j^l$) :

$$\Delta_\xi \Delta_\eta S_3^{ls}(\xi, \eta) = -\mathrm{E}\left[\gamma^{li}(x)\, \partial_{ij}\left(\gamma^{aj}(x+\xi)\, \partial_{ab} \gamma^{bs}(x+\xi+\eta)\right)\right]$$

Introduisant alors le moment fonctionnel R (x, y, z) défini en [18], nous trouvons :

$$\Delta_\xi \Delta_\eta S_3^{ls}(\xi, \eta) = -\frac{\partial^2}{\partial \xi^i \partial \xi^j} \frac{\partial^2}{\partial \eta^a \partial \eta^b} R^{li, aj, bs}(x, x+\xi, x+\xi+\eta) \tag{I-4}$$

et, en raison du caractère stationnaire, l'expression obtenue ne dépend pas de x : nous pouvons prendre simplement $x = 0$.

En vue de résoudre [I-4], nous devons préciser notre hypothèse d'ergodicité en supposant que le tenseur R (x, y, z) tend suffisamment vite vers o, lorsque l'un des points d'appui, z par exemple, s'éloigne indéfiniment. Nous nous intéressons à la solution $S_3^{ls}(\xi, \eta)$ de [I-4] qui tend vers o lorsque $|\xi|$ ou $|\eta|$ tend vers l'infini. Cette solution se présente comme un produit de convolution dans l'espace à 2 N dimensions :

$$S_3(\xi, \eta) = -\left[\alpha(\xi) \times \alpha(\eta)\right] * \partial R(0, \xi, \xi+\eta)$$

Le symbole de dérivation ∂ peut être appliqué à l'un ou l'autre des facteurs du produit de convolution de sorte que l'on a aussi :

$$S_3^{ls}(\xi, \eta) = -\left(\partial_{ij}\alpha(\xi)\, \partial_{ab}\alpha(\eta)\right) * R^{li, aj, bs}(0, \xi, \xi+\eta) \tag{I-5}$$

En tant que produit de convolution de distributions, [I-5] a toujours un sens, à cause de la décroissance suffisamment rapide de R à l'infini, liée à l'ergodicité. Mais ce qui nous intéresse, c'est la valeur en $\xi = \eta = 0$ de la fonction S_3, qui doit donc être continue à l'origine. En utilisant la transformation de Fourier, on note que la transformée de S_3 est sommable lorsque celle de R est elle-même sommable dans l'espace à 2 N dimensions. Par suite, si R est continue, relativement à l'ensemble des deux points ξ et η (sans être nécessairement dérivable), il en est de même de $S_3(\xi, \eta)$. On peut alors faire $\xi = \eta = 0$ dans [I-5] et obtenir le tenseur S_3^{ls} de Schwydler sous la forme :

$$S_3^{ls} = -\int \partial_{ij}\alpha(\xi)\, \partial_{ab}\alpha(\eta)\, R^{li, aj, bs}(0, \xi, \xi+\eta)\, d\xi\, d\eta \tag{I-6}$$

Cette expression doit être prise au sens des distributions : la valeur à l'origine du produit de convolution [I-5] est le produit scalaire de la distribution $\partial_{ij}\alpha(\xi)\,\partial_{ab}\alpha(\eta)$ par la fonction suffisamment régulière $R(0, \xi, \xi+\eta)$.

Le raisonnement ci-dessus peut être facilement réitéré, et conduit à l'expression suivante du terme générale du développement de Schwydler :

$$S_n^{ls} = -\int \partial_{i_1 j_1}\alpha(\xi_1)\cdots\partial_{i_{n-1}j_{n-1}}\alpha(\xi_{n-1})\, R^{li_1, j_1 i_2, \cdots j_{n-1}s}(0, \xi_1, \xi_1+\xi_2, \cdots, \xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_{n-1})\, d\xi_1 d\xi_{n-1} \quad \text{[I-7]}$$

avec naturellement :

$$R^{li_1, j_1 i_2 \cdots j_n, s}(0, \xi_1, \cdots, \xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_{n-1}) = E\left[\gamma^{li_1}(x)\,\gamma^{j_1 i_2}(x+\xi_1)\cdots\gamma^{j_{n-1}s}(x+\xi_1+\cdots+\xi_{n-1})\right]$$

Mais [I-7] représente le produit scalaire d'une distribution de l'espace à nN dimensions par la fonction R, et son calcul effectif semble devenir à peu près impossible au-delà de $n = 3$ ou 4.

ANNEXE II

MOT CROISÉ ALÉATOIRE

Soient Ox et Oy deux axes parallèles aux directions principales du réseau carré, l'origine O étant prise au centre de l'un des carrés. Introduisons la fonction $f(x)$ définie comme suit :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad -1/2 < x < +1/2 \\ 0 & \text{dans les autres cas} \end{cases}$$

$f(x)\,f(y)$ est donc la fonction indicatrice du carré centré à l'origine. Le moment $R(0, \xi, \eta)$ est proportionnel à l'intersection du carré unité et de ses deux translatés dans les translations $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ et $\eta = (\eta_1, \eta_2)$, soit :

$$R(0, \xi, \eta) = m_3 \int f(x_1)\, f(x_2)\, f(x_1+\xi_1)\, f(x_1+\xi_2)\, f(x_1+\eta_1)\, f(x_2+\eta_2)\, dx_1 dx_2$$

Désignant par δ la mesure de Dirac, nous avons :

$$\frac{df(x)}{dx} = \delta\left(x+\frac{1}{2}\right) - \delta\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

et par suite :

$$\frac{\partial^4 R(0, \xi, \eta)}{\partial\xi_1\partial\xi_2\partial\eta_1\partial\eta_2} = m_3 \int f(x_1)\, f(x_2)\, \Sigma\, \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4\, \delta\left(x_1+\xi_1+\frac{1}{2}\varepsilon_1\right) \delta\left(x_2+\xi_2+\frac{1}{2}\varepsilon_2\right) \delta\left(x_1+\eta_1+\frac{1}{2}\varepsilon_3\right) \delta\left(x_2+\eta_2+\frac{1}{2}\varepsilon_4\right) dx_1 dx_2$$

la somme étant étendue aux 16 termes $\varepsilon_i = \pm 1$. On a donc ici :

$$\mu = \int \alpha(\xi)\,\alpha(\eta)\,\frac{\partial^4 R}{\partial\xi_1\partial\xi_2\partial\eta_1\partial\eta_2}\,d\xi d\eta$$
$$= m_2 \int f(x_1)\,f(x_2)\,\Sigma\,\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4\alpha\left(x_1 + \frac{1}{2}\varepsilon_1,\ x_2 + \frac{1}{2}\varepsilon_2\right)\alpha\left(x_1 + \frac{1}{2}\varepsilon_3,\ x_2 + \frac{1}{2}\varepsilon_4\right)dx_1 dx_2$$

Désignons par r_1, r_2, r_3, r_4 les rayons vecteurs joignant le point courant (x, y) aux sommets du carré unité. Comme ici $\alpha = \frac{1}{2\pi}\log r$, nous obtenons :

$$\mu = \frac{m_2}{4\pi^2}\int_0^1\int_0^1\left[\log\frac{r_1 r_3}{r_2 r_4}\right]^2 dx dy = 0{,}0145\cdots$$

ANNEXE III

MILIEU A POLYGONES CONVEXES ALÉATOIRES

Avec le R (o, ξ, η) de ce milieu, la formule [25] nous donne :

$$\frac{\mu}{m_2}\int \partial_{12}\alpha(\xi)\,\partial_{12}\alpha(\eta)\,e^{-\lambda[|\xi|+|\eta|+|\xi+\eta|]}\,d\xi d\eta$$

Le principe de la méthode va consister à exprimer $e^{-\lambda|\xi+\eta|}$ en fonction de la transformée de Fourier de exp $(-\lambda r)$, avec $r = |\xi|$, dans l'espace à deux dimensions, qui est :

$$P(\rho) = \frac{2\pi}{\lambda^2\left[1 + \frac{4\pi^2\rho^2}{\lambda^2}\right]^{3/2}}$$

($\rho = \sqrt{u^2 + v^2}$ est le rayon vecteur dans le plan de Fourier). De :

$$e^{-\lambda|\xi+\eta|} = \int P(\rho)\,e^{2i\pi[u_1(\xi_1+\eta_1)+u_2(\xi_2+\eta_2)]}\,du_1 du_2$$

on déduira, en effet :

$$\frac{\mu}{m_2} = \int P(\rho)\,[A(u, v)]^2\,du dv$$
$$A(u, v) = \int \partial_{12}\alpha(\xi)\,e^{-\lambda|\xi|+2i\pi(u\xi_1+v\xi_2)}\,d\xi_1 d\xi_2 \qquad [3\text{-}1]$$

Calculons donc A (u, v). Comme :

$$\int \partial_{12}\alpha(\xi)\,e^{-\lambda|\xi|}\,d\xi_1 d\xi_2 = 0$$

on obtient :

$$A(u, v) = -\frac{1}{\pi} \int \frac{xy}{r^4} e^{-\lambda r} \left[e^{2i\pi(ux+vy)} - 1 \right] dx dy$$

$$= -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin\theta \cos\theta d\theta \int_0^{\infty} \frac{1}{r} e^{-\lambda r} \left(e^{2i\pi\rho\cos(\theta-\alpha)} - 1 \right) dr$$

(avec $u = \rho \cos\alpha$ et $v = \rho \sin\alpha$), soit encore :

$$A(u, v) = -\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{2i\pi\rho}{\lambda} \right)^n \int_0^{2\pi} [\cos(\theta-\alpha)]^n \sin\theta \cos\theta d\theta$$

D'ailleurs, on a :

$$\int_0^{2\pi} [\cos(\theta-\alpha)]^n \sin\theta \cos\theta d\theta = \sin\alpha \cos\alpha \int_0^{2\pi} [\cos\theta]^n \cos 2\theta d\theta$$

Cette intégrale est nulle pour n impair. En sommant sur les entiers n pairs on trouve :

$$A(u, v) = \frac{\sin\alpha \cos\alpha}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left[1 + \frac{4\pi^2\rho^2}{\lambda^2} \cos^2\theta \right] \cos 2\theta d\theta$$

Cette intégrale se calcule exactement. On trouve :

$$A(u, v) = -\sin\alpha \cos\alpha \frac{1 - \sqrt{1 + \frac{4\pi^2\rho^2}{\lambda^2}}}{1 + \sqrt{1 + \frac{4\pi^2\rho^2}{\lambda^2}}}$$

Portons cette expression dans l'équation [2-1]. Il vient :

$$\frac{\mu}{m_3} = \int_0^{2\pi} \sin^2\alpha \cos^2\alpha d\alpha \int_0^{\infty} P(\rho) \left[\frac{1 - \sqrt{1 + \frac{4\pi^2\rho^2}{\lambda^2}}}{1 + \sqrt{1 + \frac{4\pi^2\rho^2}{\lambda^2}}} \right]^2 \rho d\rho$$

avec :

$$P(\rho) = \frac{2\pi}{\lambda^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{4\pi^2\rho^2}{\lambda^2} \right)^{3/2}}$$

Il suffit de faire le changement de variable $x^2 = 1 + \frac{4\pi^2\rho^2}{\lambda^2}$ pour obtenir :

$$\frac{\mu}{m_3} = \frac{1}{8} \int_1^{\infty} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^2 \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{8}(3 - 4\log 2) = 0{,}0284\cdots$$

ANNEXE IV

SCHÉMA A LOI INDÉFINIMENT DIVISIBLE

Désignons par $f(x)$ la fonction indicatrice du cercle de rayon 1 :

$$f(x) = \begin{matrix} 1 & \text{si} & |x| < 1 \\ 0 & \text{si} & |x| > 1 \end{matrix}$$

de sorte que la perméabilité $k(x)$ se mette sous la forme :

$$k(x) = \frac{1}{\pi} \int f(x + \xi)\, dF(\xi)$$

Le moment d'ordre 3, $R(x_1, x_2, x_3)$ est prorportionnel à l'aire de l'intersection triple des cercles centrés en x_1, x_2, et x_3, soit :

$$R(x_1, x_2, x_3) = A \int f(x_1 + \xi)\, f(x_2 + \xi)\, f(x_3 + \xi)\, d\xi$$

Portons dans [25]. Il vient :

$$\begin{aligned} \mu &= A \int f(h) f(\xi + h)\, f(\eta + h)\, \partial_{12}\alpha(\xi)\, \partial_{12}\alpha(\eta)\, d\xi d\eta dh \\ &= A \int f(h)\, [\partial_{12}\alpha * f]^2\, dh \end{aligned}$$

Calculons donc le produit de convolution $\partial_{12}\alpha * f$, et pour cela, en premier lieu, $\alpha * f$: ce dernier représente le potentiel engendré par une masse unité uniformément répartie dans le cercle de rayon 1 :

$$\alpha * f = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi}(r^2 - 1) & \text{si } r < 1 \\ \dfrac{1}{2\pi} \log r & \text{si } r > 1 \end{cases}$$

Cette fonction est continue en $r = 1$ ainsi que ses dérivées premières. Par suite :

$$\partial_{12}\alpha * f = \begin{cases} 0 & \text{si } r < 1 \\ \partial_{12}\alpha & \text{si } r > 1 \end{cases}$$

Par conséquent :

$$\mu = A \int_0^1 (\partial_{12}\alpha * f)^2\, 2\pi r\, dr = 0$$

Manuscrit reçu en novembre 1967.

BIBLIOGRAPHIE

MATHERON (G.). — Structure et composition des perméabilités. *Rev. Inst. Franç. du Pétrole*, 1966, **XXI**-4, 564.

— Genèse et signification énergétique de la loi de Darcy. *Rev. Inst. Franç. du Pétrole*, 1966, **XXI**-11, 1697.

— Composition des perméabilités en milieu poreux hétérogène : méthode de Schwydler et règles de pondération. *Rev. Inst. Franç. du Pétrole*, 1967, **XXII**-3, 443.

MATHERON (G.). — Éléments pour une théorie des milieux poreux. *Masson*, Paris, 1967.

HAAS (A.), MATHERON (G.) et SERRA (J.). — Morphologie mathématique et granulométrie en place. *Ann. Mines*, nov. et déc. 1967.