STRUCTURES ALEATOIRES ET GEOLOGIE MATHEMATIQUE

Dr. G. MATHERON, Directeur du Centre de

Morphologie Mathématique de Fontainebleau

-:-:-:-:-:-

1 - INTRODUCTION

L'introduction des mathématiques et, plus particulièrement, des concepts et des méthodes de la théorie des probabilités est à l'ordre du jour en Géologie.

Dans cet exposé, je voudrais essayer de dégager la signification épistémologique de ce courant d'idée, en m'appuyant, à titre d'exemple, sur certaines recherches entreprises au Centre de Fontainebleau. Qu'il s'agisse de géostatistique, d'étude des milieux poreux ou de morphologie proprement dite, ces travaux ont en commun un même principe de base. Cet élément commun, c'est la notion de structure aléatoire, la conjonction en apparence paradoxale de l'aléatoire et du structural.

Il est possible, d'ailleurs, que cette conjonction ne semble pas tellement paradoxale à des gens qui ont la pratique des sciences de la terre. En effet, le géologue a constamment affaire à des phénomènes dont la structure en grand se conforme à des lois ou à des modèles, sur lesquels il peut énoncer des propositions assez précises (et en tirer certaines conclusions), alors que les détails, le comportement local du phénomène lui échappent et lui restent à peu près imprévisibles : le même phénomène présente ainsi deux aspects apparemment contradictoires, une structure en grand, susceptible d'être connue, coexistant avec une extrême irrégularité de détail empêchant toute prévision précise, bref, un aspect aléatoire et un aspect structuré.

Naturellement, ces deux aspects ne sont pas réellement dissociables. Il s'agit bien du même phénomène. Ce serait une épistémologie un peu courte, une manière vraiment pauvre et simpliste d'interpréter la nature, que de considérer ce phénomène comme la somme ou la juxtaposition pure et simple de deux composantes étrangères l'une à l'autre, dont la première serait régulière, continue, "déterministe", et la seconde purement aléatoire. Ces deux aspects sont, en réalité, en interaction étroite et profonde, et c'est d'un point de

vue plus synthétique qu'il convient d'en aborder l'étude.

Le procédé barbare qui consiste à mutiler un phénomène en le décomposant en deux termes étrangers l'un à l'autre correspond à une tendance profonde de l'esprit humain vers le moindre effort intellectuel. Nous avons en tête deux représentations extrêmes, presque caricaturales : d'une part, celle d'un déterminisme conçu comme une évolution très régulière et continue, de l'autre celle d'un phénomène complètement chaotique et purement aléatoire, au sens que l'on donne à ce mot dans la statistique classique où l'on a pris l'habitude de ne manipuler que des variables indépendantes les unes des autres. C'est à cette pauvre antinomie que nous tendons constamment à réduire le riche contenu de ce qui nous est donné.

Entre ces deux termes extrêmes, il existe en réalité toute une gamme d'états intermédiaires, qui possèdent à la fois et synthétiquement les caractères de l'aléatoire et du structural. Il se trouve que la théorie moderne des probabilités, c'est-à-dire essentiellement la théorie des fonctions aléatoires, nous fournit, au moment même où nous en éprouvons le besoin, l'arsenal conceptuel et les techniques mathématiques qui permettent de construire une représentation adéquate de ces états intermédiaires.

2 - NOTION DE STRUCTURE ALEATOIRE

Prenons donc, sans la mutiler, la notion de structure aléatoire, et tâchons d'en préciser le contenu épistémologique. Nous ne chercherons pas ici à donner de cette notion une définition rigoureuse, qui nous entraînerait trop loin dans le domaine des mathématiques abstraites, mais seulement à éclaircir le sens des termes que nous utilisons.

Le terme de structure, tout d'abord, est trop galvaudé aujourd'hui pour que l'on puisse l'employer sans précaution. Pour les mathématiciens, il possède un sens extrêmement précis. Les Bourbaki [1] consacrent un fascicule entier à sa définition. Il serait possible de prendre ce terme au sens même où l'entendent les mathématiciens, et de faire correspondre à chacune des structures mathématiques son équivalent sur le mode aléatoire : on peut ainsi envisager de construire une théorie des groupes aléatoires, des topologies aléatoires etc... [13]. Nous nous contenterons ici d'utiliser ce terme dans un sens un peu plus large, mais encore relativement précis : la structure d'un ensemble ou d'un phénomène, ce sera pour nous le système des relations existant entre

les éléments ou les parties constitutives de cet ensemble ou de ce phénomène.

Lorsque les géologues, par exemple, parlent de structure anticlinale, le système de relations qu'ils évoquent. est le suivant : à l'intérieur d'une même formation stratigraphique, les éléments qui se trouvent dans la partie axiale sont à une cote plus élevée que ceux qui se trouvent sur les flancs. Dans un deuxième temps, on désigne encore par ce même terme des structures déduites de la précédente par certaines déformations continues.

En deuxième lieu, il y a le mot "aléatoire" : dans le langage courant, ce terme évoque le hasard, c'est-à-dire ce qui n'est ni voulu ni prévu par l'homme. Quand on a dit d'un phénomène qu'il est dû au hasard, on n'a en réalité, rien énoncé du tout à son sujet, sinon tout au plus que l'on ignore les mécanismes qui l'ont engendré. Le concept de hasard est dépourvu de contenu positif et impropre à un usage scientifique. Ce n'est pas à ce concept que se réfère le terme "aléatoire".

Au fond, le mot aléatoire désigne une attitude, ou même une décision épistémologique. Dire d'un phénomène qu'il est aléatoire revient à décider qu'on l'étudiera au moyen de méthodes et de techniques dérivées de la théorie des probabilités (c'est-à-dire pour nous essentiellement de la théorie des fonctions aléatoires). De ce point de vue, n'importe quel phénomène peut être considéré comme aléatoire : il peut s'agir de la pièce de monnaie traditionnelle que l'on jette en l'air, du milliard de particules que l'on lâche dans une enceinte, ou encore des éclipses de lune ou de soleil. Le seul problème qui se pose réellement est de savoir si cette décision épistémologique est la meilleure possible, et celà, c'est l'expérience seule qui peut nous l'apprendre. Dans le cas des deux premiers exemples (jeu de pile ou face, mécanique statistique), il se trouve que cette décision est effectivement la meilleure possible. Dans le cas des éclipses, on peut, et ce n'est pas absurde, étudier par des techniques probabilistes la série chronologique constituée des observations que l'on a pu faire dans le passé, et en déduire des renseignements déjà assez précis, permettant même une certaine forme de prévision. Mais naturellement, ces renseignements sont beaucoup moins précis que ceux que l'on peut déduire de la mécanique céleste, et il y a tout intérêt dans le cas des éclipses, à laisser les astronomes travailler selon leurs propres méthodes.

Ayant défini séparément chacun des deux termes, voyons ce que donne leur rapprochement. D'après ce qui précède, dire que l'on considère un phénomène comme une (réalisation d'une) structure aléatoire signifie que l'on décide d'exprimer en termes probabilistes les relations existant entre les éléments ou les parties constitutives de ce phénomène.

3 - EXEMPLES

Donnons quelques exemples pour éclaircir cette définition. Si f(x) désigne une variable régionalisée, l'égalité $[f(x+h) - f(x)]^2$ = quelque chose exprime une relation entre les deux points x et x+h de l'espace. Il suffit de passer à l'espérance mathématique pour obtenir la transposition probabiliste de cette relation : et l'on obtient ainsi la notion de variogramme :

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} E \left[\left(f(x+h) - f(x) \right)^2 \right]$$

qui constitue le point de départ de la Géostatistique, [4], [6], [12], [15].

Donnons d'autres exemples, [2], [5], [13], empruntés cette fois à la théorie des milieux poreux. Soit A l'ensemble des points de l'espace appartenant aux pores (le complémentaire de A représente donc l'ensemble des grains). La relation la plus simple que nous puissions imaginer est $x \in A$, où x désigne un point de l'espace. Cette relation se transpose sous forme probabiliste, et conduit à la probabilité $P(x \in A)$ pour que le point x appartienne aux pores A : ce n'est pas autre chose que la porosité du milieu.

On peut naturellement aussi introduire des relations plus complexes et plus riches. On peut ainsi partir d'un ensemble B donné (B pourra être, par exemple, une petite sphère de rayon r centrée en un point x de l'espace) et considérer des relations du type $B \subset A$ (B est inclus dans les pores) ou $B \cap A \neq \emptyset$ (B rencontre les pores, ou B n'est pas contenu dans les grains). A chacune de ces relations possibles entre les éléments ou les parties constitutives de ce milieu poreux, on fait ensuite correspondre la probabilité pour que cette relation soit réalisée : $P(B \subset A)$, probabilité pour que la petite sphère B soit contenue dans les pores, etc... Si l'on fait varier le rayon r de la sphère B, la probabilité $P(B \subset A)$ devient une fonction de r, et l'on

peut en tirer un certain nombre de renseignements fort intéressants : la surface spécifique du milieu, par exemple, ou encore diverses notions à caractère granulométrique. Il convient de souligner que ces différentes probabilités (ainsi que les caractéristiques physiques du milieu que l'on peut en déduire) peuvent être déterminées expérimentalement, et même avec une assez grande facilité, grâce aux techniques fondées sur l'analyseur de textures. [16]

4 - CHANGEMENT D'ECHELLE, ET PROBLEME DE LA STATIONNARITE

Il convient de faire un certain nombre de remarques sur la méthodologie que nous venons d'esquisser. En premier lieu, on constate dans tous ces exemples que le passage de la relation à son expression probabiliste a toujours une seule et même signification : celle d'un changement d'échelle faisant passer d'un niveau microscopique, ou granulométrique, à un niveau macroscopique correspondant à une échelle plus élevée. On ne s'intéresse plus au fait que tel ou tel point x particulier se trouve effectivement dans les pores, ni au fait que telle sphère B rencontre effectivement les grains. Ces renseignements seraient d'ailleurs à peu près dépourvus d'intérêt par eux-mêmes. On s'intéresse seulement, en réalité, à la probabilité pour que ces évènements soient réalisés, ou encore, si l'on préfère, à la fréquence statistique de leur réalisation dans le milieu que l'on étudie. Il y a donc bien passage implicite à un point de vue macroscopique. Les relations que nous avons considérées n'ont qu'une signification probabiliste lorsque nous les envisageons au niveau microscopique. Mais lorsque l'on passe au niveau macroscopique, ces mêmes relations probabilistes acquièrent une valeur parfaitement déterministe, et conduisent à des concepts physiques précis : nous avons déjà mentionné la porosité et la surface spécifique, mais il y en a bien d'autres. En particulier, nous verrons un peu plus loin que la loi de Darcy et l'existence des perméabilités s'expliquent parfaitement par ce mécanisme de changement d'échelle, bien que cette fois la formulation mathématique soit un peu moins simple. [5]

En toute rigueur, cette opération de changement d'échelle ne conduit à des concepts physiques valables au niveau macroscopique que si la structure aléatoire sur laquelle on travaille peut être considérée comme stationnaire. En fait, conformément à un principe d'approximation que les physiciens connaissent bien, il suffit que cette structure puisse être considérée comme localement stationnaire : on peut alors l'assimiler localement à une structure aléatoire stationnaire tangente à

laquelle il est possible d'appliquer le formalisme que nous venons d'évoquer. Ainsi, contrairement aux apparences, les résultats majeurs de la Géostatistique ne sont pas réellement liés à une hypothèse stationnaire, [6]. De même, cette remarque conduit à la solution des problèmes obscurs (parce que, semble-t-il, mal posés jusqu'ici) que soulèvent les techniques dites de "Trend Surface Analysis". Dans notre terminologie, pour éviter tout anthropomorphisme, nous disons dérive plutôt que trend. Il est clair qu'une dérive doit être interprétée comme l'espérance mathématique d'une fonction aléatoire non stationnaire. La logique de notre point de vue probabiliste nous a donc conduit à mettre au point des techniques d'estimation optimale en présence de dérives. Ces méthodes sont connues sous le nom de Krigeage Universel, et trouvent des applications intéressantes, notamment, dans le domaine de la cartographie automatique, [11].

5 - FIGURES STRUCTURANTES

En deuxième lieu, on remarque, dans chacun des exemples précédents, que l'on part d'une relation particulière dont l'énoncé fait intervenir certains éléments géométriques choisis à priori (et arbitrairement). Nous avons chaque fois posé à la nature une question précise, sous la forme d'une figure structurante (la sphère B, les deux points x et x + h dans le cas du variogramme) que nous avons envoyée à la manière d'une sonde à l'intérieur du milieu pour y recueillir certaines informations ; et chaque fois la nature a donné sa réponse (la probabilité $P(B \subset A)$, le variogramme) en fonction de la question même que nous avions posée. La réponse que nous obtenons ne pourra pas présenter d'avantage de valeur ou de signification que la question elle-même. A la question la plus simple possible ($x \in A$?) la réponse de la nature est une caractéristique physique précise du milieu sa porosité $P(x \in A)$. Comme la question était très simple, le renseignement que l'on obtient n'a pas non plus un contenu très riche, et l'on ne peut absolument pas reconstituer, par exemple, la surface spécifique du milieu à partir de sa seule porosité. Il faudra de même poser à la nature des questions beaucoup plus élaborées si l'on désire déterminer une caractéristique du milieu aussi riche de contenu physique que, par exemple, une perméabilité.

6 - NECESSITE DES SCHEMAS THEORIQUES

Ainsi, chaque figure structurante apportera bien une information de nature structurale, mais de contenu à la fois

précis et limité. Pour obtenir une description probabiliste exhaustive du phénomène, il faudrait donc poser toutes les questions correspondant à toutes les figures structurantes possibles, et dresser la liste de toutes les réponses. Mais cette liste est infinie, et nous n'avons aucun espoir d'obtenir, par des procédés purement expérimentaux, une description exhaustive de notre structure aléatoire. C'est là, comme on sait, une circonstance générale en matière scientifique : l'empirisme pur conduit à une impasse méthodologique. Il se heurte au mauvais infini des philosophes ; quand bien même nous aurions déjà posé mille questions intéressantes, et obtenu des réponses satisfaisantes, rien ne nous garantira qu'un aspect essentiel et insoupçonné du phénomène ne se dissimule pas dans la réponse à la mille et unième question, celle-là même que nous n'aurons pas posée.

Pour sortir de cette impasse méthodologique, il convient de procéder comme les physiciens : construire des schémas théoriques, dont nous connaîtrons parfaitement la loi de formation (pour l'avoir choisie nous-mêmes) ; en déduire, par un calcul théorique, les probabilités P(B,R) pour un nombre aussi grand que l'on peut de figures structurantes B et de relations R (ce qui est toujours possible, au moins théoriquement puisque nous connaissons la loi de construction du schéma) ; voir ensuite si les probabilités déterminées expérimentalement sont compatibles avec leurs expressions théoriques. Si cette vérification a pu être faite pour un certain nombre de figures B et de relations R, on sera conduit à admettre que le schéma théorique représente convenablement la réalité. Parvenus à ce stade, nous aurons alors la possibilité d'obtenir, grâce à des raisonnements théoriques, toute une moisson de résultats inaccessibles expérimentalement.

Mais en réalité les choses ne sont pas si simples. Le théoricien va se heurter à trois sortes de difficultés au moins, dont aucune n'est facile à surmonter. Il va, en premier lieu, tomber sur des difficultés de nature purement mathématique : il s'agit, en effet, de théories mathématiques particulièrement coriaces, et le calcul effectif des P(B,R) à partir de la loi de construction d'un schéma théorique ne sera pas toujours aisé, ni même possible. Ensuite, il va tomber sur un nombre incroyablement élevé de schémas possibles, correspondant à des lois de construction bien différentes, mais qui pourront conduire à des valeurs numériques peu différentes, ou même identiques, pour le petit nombre des P(B,R) qu'il est possible de vérifier expérimentalement ; et pourtant, il lui faudra bien faire un choix. En troisième lieu, enfin, à moins de se limiter à des schémas élémen-

taires, que leur simplicité même rendrait inaptes à représenter toute la richesse de phénomènes naturels complexes, le théoricien va proposer des schémas dépendant d'un nombre en général très grand de paramètres indéterminés : c'est le contrôle expérimental, cette fois, qui va devenir difficile ou même vide de sens. Si les paramètres indéterminés sont suffisamment nombreux, on sait bien, en effet, qu'il est presque toujours possible de les ajuster numériquement de manière à rendre compte d'à peu près n'importe quelles données expérimentales. Mais dans ce cas l'accord avec l'expérience ne signifie plus rien.

7 - EXEMPLE DE LA LOI DE DARCY

En ce qui concerne les difficultés de nature purement mathématique, un géologue ou un exploitant peut sans doute s'en désintéresser, puisque c'est là au fond l'affaire du mathématicien lui-même (et même l'un des aspects les plus intéressants de sa recherche). Il est peut être utile, pourtant, d'indiquer sur un exemple de quelle nature peuvent être ces difficultés. Revenons pour celà au milieu poreux que nous avons déjà envisagé plus haut, et supposons même que nous connaissions (par exemple, à partir de la loi de formation du schéma) tous les P(B,R) pour toutes les figures structurantes B et toutes les relations R possibles. Il reste à expliquer pourquoi ce milieu, envisagé au niveau macroscopique, obéit à la loi de Darcy, et si possible à calculer numériquement la perméabilité à partir des P(B,R).

Or le mathématicien est capable d'établir le résultat suivant : il existe (en un sens probabiliste) un et un seul écoulement possible (caractérisé par la vitesse v du fluide et le gradient grad p de charge, qui sont ici des fonctions aléatoires) correspondant à un gradient macroscopique (moyen) constant donné grad P = E(grad p). Le débit Q du fluide, évalué au niveau macroscopique, se déduit du vecteur vitesse v du niveau microscopique en passant à l'espérance mathématique : Q = E(v). Mais toute combinaison linéaire d'écoulements possibles est encore un écoulement possible (à cause de la linéarité des équations de Navier). Il suffit alors de fixer trois solutions possibles particulières (correspondant, par exemple, à des gradients macroscopiques grad P orientés respectivement dans chacune des trois directions de l'espace) et d'utiliser le théorème d'unicité pour voir que tout écoulement microscopique correspondant à un écoulement macroscopique uniforme (linéaire) se présente né-

cessairement comme une combinaison linéaire des trois solutions particulières envisagées ci-dessus. Cette conclusion s'étend même aux écoulements quasi-uniformes, (c'est-à-dire assimilables localement à des écoulements uniformes) à condition cette fois de considérer des combinaisons linéaires dont les coefficients varient lentement dans l'espace à l'échelle de la granulométrie. On en déduit alors sans peine qu'il existe une relation linéaire entre le débit Q et le gradient de charge grad P macroscopiques de tout écoulement uniforme ou quasi-uniforme : cette conclusion constitue précisément l'énoncé de la loi de Darcy, et s'écrit $Q = K \text{grad } P$ avec une certaine matrice K appelée matrice des perméabilités [5], [8].

Ainsi, notre interprétation probabiliste des milieux poreux conduit à une justification mathématique rigoureuse de la loi de Darcy. On notera aussi l'extrême généralité du raisonnement précédent, que l'on pourrait reprendre mot pour mot pour justifier, par exemple, la loi d'Ohm dans un milieu conducteur, à partir seulement de la linéarité des équations de l'électromagnétisme valables au niveau des particules élémentaires, et d'un théorème sur l'existence et l'unicité des solutions macroscopiquement uniformes.

Cette généralité souligne bien une circonstance qui n'est pas sans importance méthodologique : les propriétés d'un milieu envisagé à l'échelle macroscopique sont relativement indifférentes à la nature exacte des propriétés de ce même milieu envisagé au niveau microscopique, et semblent dépendre surtout de certaines conditions formelles liées à l'opération même de changement d'échelle. Cette circonstance a une contre-partie évidente, et illustre aussi bien la puissance que la faiblesse du raisonnement mathématique, capable d'établir en toute généralité l'existence et l'unicité d'une solution sans pour autant fournir les moyens permettant son calcul effectif : nous avons bien démontré l'existence d'une loi de Darcy $Q = K \text{ grad } P$, mais nous ne savons pas pour autant relier numériquement la perméabilité K aux probabilités P(B,R) qui définissent notre milieu poreux en tant que structure aléatoire, et c'est là un problème autrement difficile.

Indiquons toutefois, pour ne pas tomber dans un découragement injustifié, qu'il est souvent possible d'obtenir des résultats beaucoup plus précis. Il en est ainsi, par exemple, dans le problème de la composition des perméabilités, dont la formulation est très voisine : [5], [7], [9], [10] : il s'agit cette fois d'un milieu poreux hétérogène, dans lequel des perméabilités ponctuelles k sont régionalisées (variables dans l'espace), mais présentent des caractéristiques

statistiques constantes dans l'espace : envisagé à une échelle plus vaste, ce milieu apparaît donc à nouveau comme macroscopiquement homogène, et le raisonnement précédent montre qu'il existe encore une loi de Darcy valable à cette échelle avec une perméabilité macroscopique constante K. Le problème de la composition des perméabilités consiste à déduire cette perméabilité constante K des caractéristiques statistiques des perméabilités ponctuelles k. On peut tout d'abord démontrer que K est nécessairement comprise entre les moyennes harmonique et arithmétique des k : $[E(k^{-1})]^{-1} \leq K \leq E(k)$. Il est même possible d'obtenir l'expression explicite de K sous la forme d'un développement en série. Dans certains cas, on obtient des résultats extrêmement simples. Par exemple, dans le cas d'un milieu à deux dimensions macroscopiquement isotrope, et sous réserve que les perméabilités K vérifient une certaine condition (automatiquement vérifiée lorsque k est distribuée selon la loi lognormale), on démontre que la perméabilité macroscopique K est donnée par la règle de pondération géométrique $\log K = E(\log K)$. Mais ce résultat ne subsiste pas dans l'espace à trois dimensions (on comprend facilement d'ailleurs que la manière dont les perméabilités ponctuelles se composent pour engendrer K dépend au plus haut point du nombre des dimensions de l'espace : les filets de courant ont, en effet, d'autant plus de facilité pour contourner les zones de mauvaise perméabilité que ce nombre est plus élevé).

8 - INTRODUCTION D'IDEES GENETIQUES

Evoquons maintenant les deux autres sortes de difficultés qui guettent le théoricien, à savoir l'arbitraire qui préside au choix d'un schéma, et l'impossibilité d'un contrôle expérimental réellement significatif, dûe au nombre trop élevé des paramètres dont dépendent en général ce genre de schéma. La solution consiste ici à introduire des concepts génétiques. Si la méthodologie que nous avons exposée jusqu'ici représente un progrès notable vis-à-vis de ce degré structural zéro qui correspond au point de vue de la statistique classique, il est clair que le fait de compléter la notion de structure par celle de génèse va nous faire franchir un degré de plus dans l'échelle des valeurs épistémologiques. Ici, le mathématicien peut et doit, tout d'abord, se laisser guider par le naturaliste. Pour ce dernier, en effet, toute structure est l'aboutissement d'une histoire, le résultat d'un mécanisme génétique. Le mathé-

maticien devra donc partir du mécanisme génétique que lui propose le naturaliste, et chercher à en donner une représentation probabiliste précise : ce mécanisme doit lui suggérer cette loi de construction du schéma théorique dont nous avons déjà souligné l'importance décisive. D'un côté, donc, cette manière de procéder va limiter l'arbitraire qui présidait au choix d'un schéma théorique, de l'autre, le schéma lui-même va prendre une valeur explicative, et non plus seulement descriptive : l'accord avec les données prendra alors une signification autrement plus riche et plus convaincante que celle d'un simple ajustement empirique. Et, en retour, le schéma génétique initial du naturaliste se trouvera considérablement enrichi, grâce à la formulation mathématique beaucoup plus précise qu'il aura reçue et au contrôle expérimental plus poussé dont il aura fait l'objet. Sous cette nouvelle forme, il permettra des prévisions quantitatives qui n'étaient pas accessibles auparavant.

9 - POUR UNE GEOLOGIE MATHEMATIQUE

Cette synthèse, dont nous venons d'évoquer la possibilité, entre les idées génétiques des naturalistes et la théorie moderne des probabilités, représente sans doute l'un des points de départ à partir desquels on peut envisager de construire une géologie mathématique digne de ce nom. Il s'agit ici de recherches qui en sont à leurs premiers balbutiements, et les indications que nous allons donner n'ont qu'une valeur toute provisoire. Considérons, à titre d'exemple, un phénomène de sédimentation cyclique. L'idée d'utiliser la théorie des fonctions aléatoires pour construire une représentation mathématique des séries lithologiques rythmiques n'est pas nouvelle. Mais les tentatives faites en ce sens ont été jusqu'ici soumises à deux limitations qui en restreignent singulièrement la portée :

- on n'a guère cherché, jusqu'à présent, qu'à décrire l'évolution du système sédimentaire le long d'une seule et même verticale, autrement dit à rendre compte des observations recueillies, par exemple, le long d'un sondage unique. L'origine de cette limitation est évidente. Si l'on assimile la cote z le long de cette verticale à un temps t, on peut alors utiliser la théorie des processus stochastiques, et bénéficier des résultats obtenus dans cette branche particulièrement fouillée de la théorie des fonctions aléatoires. Mais l'évolution horizontale et le raccordement latéral des formations rencontrées par différents sondages présentent en fait un intérêt décisif pour le sédimentologiste comme pour l'exploitant. Une représentation mathématique de la sédimentation qui ne tiendrait pas compte de cet as-

pect essentiel du phénomène n'aurait que peu de chances de conduire à des résultats théoriques ou pratiques présentant un intérêt réel.

- de plus, pour décrire cette évolution le long d'une verticale unique, on n'a, le plus souvent, utilisé que des processus markoviens (comme si, dans l'esprit de ces auteurs tout processus stochastique était nécessairement markovien). Une observation simple montre qu'il ne s'agit pas, en général, de processus de ce type : le caractère markovien entraînerait en effet, une loi exponentielle pour l'histogramme des puissances d'une formation donnée, alors que les histogrammes expérimentaux présentent le plus souvent un ou plusieurs maxima distincts. (Pour tourner cette difficulté, on utilise souvent des processus markoviens "d'ordre n", dans lesquels chaque point est lié aux n points qui le précèdent, et non plus à son seul prédécesseur : ce mode opératoire est lié à une discrétisation artificielle d'un phénomène essentiellement continu, et fait jouer au pas (arbitraire) de cette discrétisation un rôle capital auquel ne correspond aucune réalité physique).

10 - EXEMPLE

Indiquons, sur un exemple très simple, les démarches successives permettant de construire des schémas de plus en plus satisfaisants. Soit une série sédimentaire rythmique, dans laquelle la base de chaque cycle est indiquée par un horizon repère, un conglomérat par exemple. Sur la verticale Oz de la figure 1, ces repères sont marqués en B, B', B", B"'. -

a) La première idée qui vient à l'esprit, lorsque l'on veut mathématiser l'évolution du phénomène le long de la verticale Oz, consiste à supposer que ces points B, B' etc... sont répartis "au hasard" sur la verticale, c'est-à-dire constituent un processus de Poisson. (c'est à ce processus que conduit l'hypothèse markovienne dans le cas très simple que nous étudions). Conséquence théorique de cette hypothèse : les longueurs BB', B'B", etc... doivent être des variables aléatoires indépendantes obéissant à une même loi exponentielle. Le contrôle expérimental est facile. En général, les histogrammes ne sont pas compatibles avec la loi exponentielle, et les repères ne constituent donc pas un processus de Poisson.

b) On peut améliorer le schéma en conservant l'hypothèse de l'indépendance des longueurs successives, mais en remplaçant la loi exponentielle par une loi quelconque (à déterminer expérimentalement) : on a alors un processus de renouvellement (non markovien). Le contrôle expérimental consiste à vérifier l'indépendance des longueurs BB', B'B", ... : la réponse sera parfois positive, parfois négative.

c) Pour aller plus loin, on doit faire intervenir les mécanismes qui ont dirigé cette sédimentation. Supposons qu'il s'agisse d'une alternance de périodes d'émersion et d'érosion (C_1A_1, C_2A_2 etc...). Les repères B,B'... marquent les reprises en A_1,A_3 ... des périodes de sédimentation. Certains de ces repères ont été ultérieurement érodés (ainsi, le repère correspondant à A_2 a été enlevé par l'érosion C_3A_3).

Du point de vue probabiliste, le schéma sera défini si l'on se donne :

- la loi des puissances sédimentées (de O à C_1, de A_1 à C_2 etc...)

- la loi des hauteurs érodées (C_1A_1, C_2A_2 etc...)

les relations de dépendance entre les longueurs sédimentées et érodées successives.

La théorie permet alors d'en déduire la loi des longueurs successives BB', B'B" etc... et leurs relations de dépendance, à partir desquelles on procèdera à la vérification expérimentale.

Dans l'hypothèse la plus simple, on admet l'indépendance des puissances érodées et sédimentées. Celle-ci entraîne à son tour l'indépendance des BB', B'B", et les repères dessinent sur la verticale Oz un processus de renouvellement.

Si les données expérimentales ne sont pas compatibles avec cette indépendance, le schéma devient plus complexe. On pourra, en premier lieu, introduire une dépendance markovienne entre les puissances érodées et sédimentées successives, et préciser le type de dépendance qui en résulte pour les BB', B'B" ... Si celà ne suffit pas, on introduira des modes de plus en plus complexes de dépendance, jusqu'à ce que l'on aboutisse à un accord satisfaisant. Ici encore, on pourra se laisser guider par les indications de la géologie : celle-ci, par exemple, peut suggérer que les cycles élémentaires sédimentation/érosion se regroupent, à leur tour, pour constituer des unités ou des cycles d'ordre supérieur, et l'on construira en conséquence un schéma comportant deux niveaux structuraux.

d) Il reste enfin le problème le plus difficile, qui est celui du passage à l'espace à 3 dimensions. On pourra procéder de manière analogue : on se donnera par exemple, la surface topographique au temps t sous la forme d'une fonction aléatoire. De t à t + Δt interviendra un mécanisme de sédimentation que nous représenterons par une équation différentielle comportant des termes aléatoires : la structure de cette équation exprimera, par exemple, que la sédimentation est plus puissante dans les zones profondes que dans les hauts fonds, tandis que les termes (fonctions) aléatoires du second membre exprimeront l'hétérogènéité de l'apport, qui n'est constant ni dans l'espace, ni dans le temps. Nous laisserons le processus évoluer un certain temps selon ce mécanisme, jusqu'au moment où un abaissement du niveau de la mer provoquera l'émersion et l'érosion des parties les plus hautes : c'est sur les zones ainsi érodées que viendront se déposer les horizons témoins qui marqueront la reprise du cycle suivant. On déduira de ce schéma certaines caractéristiques probabilistes des divers horizons repères (concernant leurs dimensions, et leurs dispositions mutuelles) que l'on comparera ensuite avec les données expérimentales. [3].

Summary - The notion of random structure expresses an epistemological decision : it is decided that the relationship existing between the constitutive elements of a phenomenon will be expressed in probabilistic terms. A few examples borrowed from geostatistics, morphology and the study of porous media are given. Through the operation of change of scale, relationships which have but a probabilistic value at the microscopic level give birth to deterministic physical concepts at the macroscopic level. But the system of these relationships is too rich and the corresponding probabilities cannot all be experimentally determined. Pure empiricism is insufficient, and the introduction of genetic ideas borrowed from geologists should allow the construction of probabilistic models of an explanatory (and not solely descriptive) nature.

Example of a cyclic sedimentaty process.

BIBLIOGRAPHIE

[1] - BOURBAKI, N. (1967) - Eléments de Mathématique, Livre I, ch. IV (structures) ; Hermann, Paris.

[2] - HAAS, A., MATHERON, G., et SERRA, J. (1967) - Morphologie Mathématique et Granulométrie en place ; Annales des Mines XI, 735-753 et XII, 768-782.

[3] - JACOD, J. et MATHERON, G.(à paraitre en 1970) - Les Processus d'Ambarzoumian, et leur applications

en Géologie - Les Cahiers du Centre de Morphologie Mathématique, Fasc. 5, Fontainebleau.

[4] MATHERON, G. (1965) - Les Variables régionalisées et leur estimation ; 306 pages ; Masson, PARIS.

[5] MATHERON, G. (1967) - Eléments pour une théorie des milieux poreux ; 164 pages ; Masson, PARIS.

[6] MATHERON, G. (1968) - Osnovy prikladnoï geostatistiki ; 408 pages, Editions Mir, MOSCOU.

[7] MATHERON, G. (1966) - Structure et Composition des perméabilités Revue de l'Institut Français du Pétrole, XXI-4, 564-582

[8] MATHERON, G. (1966) - Genèse et signification énergétique de la loi de Darcy - Revue de l'Institut Français du Pétrol XXI-11, 1697-1706

[9] MATHERON, G. (1967) - Composition des perméabilités en milieu poreux hétérogène : Méthode de Schwydler et règles de pondération - Revue de l'Institut Français du Pétrole, XXII-3, 443-466.

[10] MATHERON, G. (1968) - Composition des perméabilités en milieu poreux hétérogène : Critique de la règle de pondération géométrique - Revue de l'Institut Français du Pétrole, XXIII-2, 201-218.

[11] MATHERON, G. (1969) - Le Krigeage Universel ; 82 pages, Les Cahiers du Centre de Morphologie Mathématique, fasc. Fontainebleau.

[12] MATHERON, G. (1969) - Cours de Géostatistique ; 82 pages, les Cahiers du Centre de Morphologie Mathématique, fasc. Fontainebleau.

[13] MATHERON, G. (1969) - Théorie des Ensembles Aléatoires ; 52 pages, Les Cahiers du Centre de Morphologie Mathématique, fasc. 4, Fontainebleau.

[14] MATHERON, G. (1966) - Comparaison entre les échantillonnages à poids constant et à effectif constant - Revue de l'Industrie Minérale, VIII, 609-621

[15] SERRA, J. - Echantillonnage et estimation locale des phénomènes miniers de transition (Thèse), 670 pages, NANCY - (196

[16] SERRA, J. (1967) - But et réalisation de l'Analyseur de Textures ; Revue de l'Industrie Minérale, 49,9-14

[17] SERRA, J. (1968) - Morphologie Mathématique et Genèse des Concrétions carbonatées du Toarcien de Lorraine - Sédimentology, 10, 183-208.

[18] SERRA, J. (1968) - Les Structures Gigogne : Morphologie Mathématique et interprétation métallogénique - Mineralium Deposita, 3, 135-154.

[19] SERRA, J. (1969) - Introduction à la Morphologie Mathématique ; 160 pages ; Les Cahiers du Centre de Morphologie Mathématique, Fasc. 3, Fontainebleau.

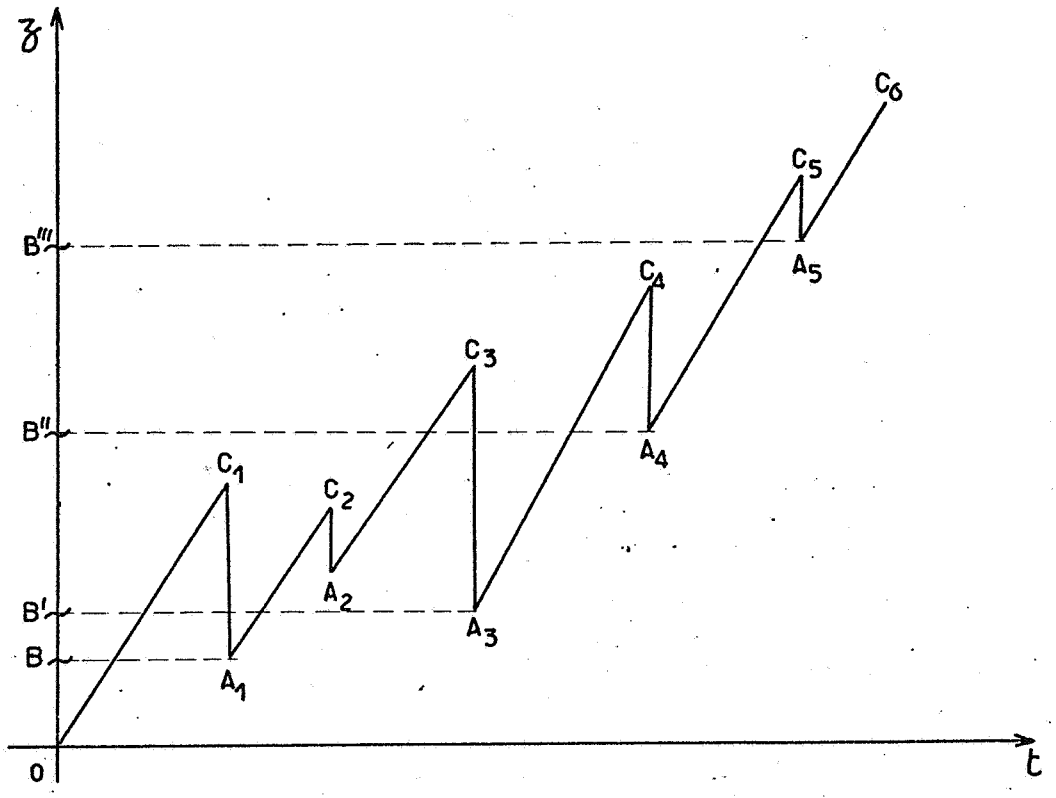

FIGURE 1

Représentation schématique d'une sédimentation cyclique.