

# ENSEMBLES FERMES ALEATOIRES, ENSEMBLES SEMI-MARKOVIENS ET POLYEDRES POISSONIENS

BY  
G. MATHERON

Reprinted from the  
**ADVANCES IN APPLIED PROBABILITY**  
Vol. 4, No. 3, pp. 508-541  
December 1972

# ENSEMBLES FERMÉS ALÉATOIRES, ENSEMBLES SEMI-MARKOVIENS ET POLYÈDRES POISSONIENS

G. MATHERON, *Centre de Morphologie Mathématique, Fontainebleau*

## Abstract

Random set theory is closely connected with integral geometry. After a general description, based upon the Choquet theorem, the semi-Markovian property is defined and characterized in terms of integral geometry. Applications are made to Poisson polytopes characterized by conditional invariance properties.

RANDOM CLOSED SETS; SEMI-MARKOVIAN SETS; BOOLEAN SCHEMES; POISSON POLYTOPES

## TABLE DES MATIÈRES

|                                                                                                   | Page |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| 0. INTRODUCTION . . . . .                                                                         | 509  |
| 1. DÉFINITIONS GÉNÉRALES . . . . .                                                                | 510  |
| 1.1 Les ensembles fermés aléatoires . . . . .                                                     | 510  |
| 1.2 Les fonctionnelles $Q$ et $T$ . . . . .                                                       | 511  |
| 1.3 Fermés indéfiniment divisibles pour la réunion . . . . .                                      | 513  |
| 1.4 Opérations mesurables . . . . .                                                               | 516  |
| 1.5 L'espace vectoriel de Minkowski . . . . .                                                     | 518  |
| 2. LA PROPRIÉTÉ SEMI-MARKOVienne . . . . .                                                        | 519  |
| 2.1 Définition . . . . .                                                                          | 519  |
| 2.2 La fonctionnelle $\psi = -\log Q$ . . . . .                                                   | 520  |
| 2.3 Les schémas booléens à grains primaires convexes . . . . .                                    | 523  |
| 3. LES POLYÈDRES POISSONIENS ET L'INVARIANCE CONDITIONNELLE . . . . .                             | 525  |
| 3.1 Définition des polyèdres poissoniens . . . . .                                                | 525  |
| 3.2 L'invariance conditionnelle . . . . .                                                         | 527  |
| 3.3 Réciproque . . . . .                                                                          | 527  |
| 3.4 Point de vue de la loi en nombre . . . . .                                                    | 529  |
| 4. APPLICATIONS . . . . .                                                                         | 530  |
| 4.1 Relation entre la loi du volume $V$ et l'espérance conditionnelle de la surface $S$ . . . . . | 530  |

Article révisé reçu le 6 mars 1972.

|     |                                                                                                 |     |
|-----|-------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.2 | Granulométries des polyèdres poissoniens selon les boules .                                     | 531 |
| 4.3 | Les premiers moments du volume $V$ , du contour apparent $V'$<br>et de la surface $S$ . . . . . | 534 |
| 4.4 | Cas des polygones poissoniens isotropes . . . . .                                               | 538 |

|                         |     |
|-------------------------|-----|
| Bibliographie . . . . . | 540 |
|-------------------------|-----|

## 0. INTRODUCTION

Les ensembles aléatoires semi-markoviens constituent une assez large généralisation des variétés linéaires poissoniennes (Poisson flats) étudiés en particulier par Miles [10], [11], [12], [13]. C'est la recherche de modèles mathématiques adaptés à une description probabiliste des milieux poreux qui m'a conduit à la notion d'ensemble semi-markovien et m'a permis d'en construire des exemples assez généraux (Matheron [6]). C'est, d'autre part, le développement des techniques expérimentales de l'analyse des textures (Serra [15], [16]) qui m'a incité à redéfinir la notion même d'ensemble aléatoire à l'aide de  $\sigma$ -algèbres adaptées directement à ces techniques opératoires (Matheron [7]), suivant en cela Choquet [2]. Il se trouve que ces  $\sigma$ -algèbres s'identifient aux tribus boréliennes associées aux topologies dont il est naturel de munir les ensembles constitués des fermés, des ouverts ou des compacts de l'espace de départ. Le thème probabiliste initial s'infléchit alors en direction de la géométrie intégrale. C'est sans doute cette fusion progressive de la géométrie intégrale et de la théorie des probabilités qui confère leur intérêt mathématique (si elles en ont un) à des études de ce genre. Leur intérêt pratique a été suffisamment illustré par des applications déjà nombreuses à des domaines aussi variés que la géologie, la biologie, l'agriculture, le traitement des minerais, la métallurgie, etc.

Dans une première partie, je rappelle rapidement les définitions topologiques et probabilistes les plus utiles pour la suite, notamment celle de fermé aléatoire. J'insiste sur la fonctionnelle  $T$  ou  $Q$  qui joue pour un fermé aléatoire le même rôle qu'une fonction de répartition pour une variable aléatoire, et se laisse caractériser, d'après un théorème dû à Choquet, comme une capacité alternée d'ordre infini. Viennent ensuite les fermés aléatoires indéfiniment divisibles pour la réunion, puis quelques propriétés particulières à l'espace euclidien, concernant notamment l'espace vectoriel de Minkowski (à cause d'un lemme de prolongement qui joue un rôle fondamental au Paragraphe 3.3). La seconde partie introduit la propriété semi-markovienne, et envisage ses conséquences sur la fonctionnelle  $\psi = -\log Q$ :  $\psi$  est  $H$ -additive, et cette propriété est nécessaire et suffisante pour qu'un fermé indéfiniment divisible soit semi-markovien (mais j'ignore s'il existe des fermés semi-markoviens qui ne soient pas indéfiniment divisibles). Dans le cas stationnaire et isotrope,

en particulier,  $\phi$  est une combinaison linéaire des fonctionnelles de Minkowski (Quermassintegrals). L'exemple des schémas booléens à grains primaires convexes montre qu'il existe effectivement des ensembles semi-markoviens plus généraux que les variétés poissonniennes de Miles. De fait, tout fermé semi-markovien indéfiniment divisible est limite inductive de tels schémas. La 3ème partie caractérise les polyèdres poissonniens par une propriété d'invariance conditionnelle (qui généralise la propriété caractéristique bien connue des lois exponentielles). La dernière partie, enfin, consacrée à des applications, suggère que cette invariance conditionnelle pourrait fournir un instrument nouveau pour étudier les propriétés encore un peu énigmatiques des polyèdres poissonniens.

## 1. DÉFINITIONS GÉNÉRALES

Désignons par  $E$  un espace localement compact à base dénombrable (L.C.D.), et par  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{K}$  respectivement les familles constituées par les ensembles respectivement fermés, ouverts et compacts dans  $E$ . Le plus souvent dans ce qui suit,  $E$  sera simplement l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$  à  $n$  dimensions, ou un sous-ensemble compact de  $\mathbb{R}^n$ . Pour un exposé systématique, on se reportera à Matheron [7].

### 1.1 Les ensembles fermés aléatoires

Si  $B$  est un ensemble quelconque dans  $\mathbb{R}^n$ , on désignera par  $V^B$  la famille des fermés disjoints de  $B$ , et par  $V_B$  son complémentaire dans  $\mathcal{F}$ , soit :

$$V^B = \{F \in \mathcal{F}, F \cap B = \emptyset\}; V_B = \{F \in \mathcal{F}, F \cap B \neq \emptyset\}.$$

Nous munirons  $\mathcal{F}$  de la topologie engendrée par les  $V^K$ ,  $K \in \mathcal{K}$  et par les  $V_G$ ,  $G \in \mathcal{G}$ , et l'espace  $\mathcal{G}$  de la topologie déduite de la précédente par passage aux complémentaires. Munies de ces topologies,  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  sont compactes et de type dénombrable. Une suite  $F_n$  converge vers  $F$  dans  $\mathcal{F}$  si et seulement si elle vérifie les deux conditions suivantes :

1. tout  $x \in F$  est limite d'une suite  $x_n \in F_n$ ,  $n$  prenant toutes les valeurs entières sauf au plus un nombre fini;
2. pour toute suite partielle  $F_{n_k}$ , tout suite  $x_{n_k} \in F_{n_k}$  a ses valeurs d'adhérence dans  $F$ .

De même, nous munirons  $\mathcal{K}$  de la *topologie myope*, dont les ouverts sont engendrés par les familles de compacts de la forme  $V^F \cap \mathcal{K}$ ,  $F \in \mathcal{F}$  et  $V_G \cap \mathcal{K}$ ,  $G \in \mathcal{G}$ . L'espace  $\mathcal{K}$  est alors localement compact de type dénombrable. Une famille  $V$  de compacts fermée dans  $\mathcal{K}$  est compacte dans  $\mathcal{K}$  si et seulement si les compacts de  $V$  sont contenus dans un compact fixe. En particulier  $\mathcal{K}$  est compact (et coïncide avec  $\mathcal{F}$ ) si et seulement si  $E$  est lui-

même compact. La topologie myope est plus fine que la topologie induite sur  $\mathcal{K}$  par celle de  $\mathcal{F}$ , mais ces deux topologies coïncident sur les parties compactes de  $\mathcal{K}$ . Ainsi, une suite  $K_n$  converge vers  $K$  dans  $\mathcal{K}$  si et seulement si les  $K_n$  convergent vers  $K$  dans  $\mathcal{F}$  en restant contenus dans un compact fixe.

L'ensemble vide  $\emptyset$  est un point isolé dans  $\mathcal{K}$  pour la topologie myope (mais  $\emptyset$  n'est pas un point isolé dans  $\mathcal{F}$ , sauf toujours si  $E$  est compact). Nous désignerons par  $\mathcal{K}'$  l'ensemble des compacts non vides de  $E$ .  $\mathcal{K}'$  est un espace L.C.D. pour la topologie myope. Lorsque  $E$  est l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$ , cette topologie sur  $\mathcal{K}'$  est équivalente à la topologie métrique utilisée en géométrie intégrale, et qui est définie par la distance  $d$  suivante: soit  $\oplus$  l'addition de Minkowski (def:  $A \oplus B = \{a + b, a \in A, b \in B\}$  pour  $A$  et  $B$  sous-ensembles quelconque de  $\mathbb{R}^n$ ) et  $B_\varepsilon$  la boule fermée de centre 0 et de rayon  $\varepsilon \geq 0$ . Pour  $K, K'$  compacts non vides, on pose

$$d(K, K') = \inf \{ \varepsilon : K \subset K' \oplus B_\varepsilon, K' \subset K \oplus B_\varepsilon \}.$$

Pour définir la notion d'ensemble fermé aléatoire, il convient de munir  $\mathcal{F}$  de sa  $\sigma$ -algèbre borélienne, que nous désignerons par  $(\sigma(\mathcal{V}))$ . On vérifie que  $\sigma(\mathcal{V})$  est engendrée par les seuls ouverts du type  $V^K$ ,  $K \in \mathcal{K}$ , ou, aussi bien, par les seuls ouverts du type  $V_G$ ,  $G \in \mathcal{G}$ . Un ensemble fermé aléatoire est alors une application mesurable  $A$  d'un espace probabilisé  $(\Omega, \alpha, P)$  dans  $(\mathcal{F}, \sigma(\mathcal{V}))$ . On se ramène facilement au cas où  $A$  est l'application identique sur  $\mathcal{F}$ , et le fermé aléatoire  $A$  est alors défini par la donnée d'une probabilité  $P$  sur  $(\mathcal{F}, \sigma(\mathcal{V}))$ . La compacité de  $\mathcal{F}$  nous garantit qu'il existe effectivement de telles probabilités. On peut de même définir des familles  $(A_i)_{i \in I}$  de fermés aléatoires sur les espaces-produits correspondants.

## 1.2 Les fonctionnelles $Q$ et $T$

Si  $A$  est un fermé aléatoire défini par une probabilité  $P$  sur  $\sigma(\mathcal{V})$ , nous poserons pour tout compact  $K \in \mathcal{K}$

$$T(K) = P(V_K) = P(A \cap K \neq \emptyset),$$

$$Q(K) = P(V^K) = P(A \cap K = \emptyset).$$

On a évidemment  $Q = 1 - T$  et  $T(\emptyset) = 0$ . La fonction  $T$  ainsi définie sur  $\mathcal{K}$  est semi-continue supérieurement (s.c.s.), mais non continue en général. De même,  $Q$  est semi-continue inférieurement (s.c.i.) sur  $\mathcal{K}$ . Pour  $G \in \mathcal{G}$  ouvert, on peut de même poser  $T(G) = P(V_G) = P(A \cap G \neq \emptyset)$ , et  $T$  est s.c.i. sur  $\mathcal{G}$ . On vérifie sans difficulté les propriétés d'approximation

$$T(G) = \sup \{ T(K), K \in \mathcal{K}, K \subset G \},$$

$$T(K) = \inf \{ T(G), G \in \mathcal{G}, G \supset K \}.$$



Considérons dans  $E$  une suite croissante d'ouverts  $B_n$  dont les adhérences  $\bar{B}_n$  sont compactes dans  $E$  et qui vérifient  $\bar{B}_n \subset B_{n+1}$  et  $E = \cup_n B_n$ . Donnons-nous pour chaque  $n$  un compact aléatoire  $A_n \subset \bar{B}_n$  défini par la fonction  $T_n$  telle que  $T_n(K) = P(A_n \cap K \neq \emptyset)$ ,  $K \in \mathcal{K}(\bar{B}_n)$ , et supposons que ces fonctions  $T_n$  vérifient la condition suivante:

$$(1.2) \quad T_{n+m}(K) = T_n(K) \quad (n, m > 0, K \in \mathcal{K}, K \subset \bar{B}_n).$$

Cette condition exprime que les compacts aléatoires  $A_n$  et  $A_{n+m} \cap \bar{B}_n$  sont équivalents, (c'est-à-dire admettent la même probabilité). Il est alors possible de définir un fermé aléatoire  $A$  de  $\mathcal{F}(E)$  tel que, pour tout  $n$ ,  $A \cap \bar{B}_n$  soit équivalent à  $A_n$ . On dira que  $A$  est la limite inductive des compacts aléatoires  $A_n$ .

En effet, pour établir l'existence de  $A$ , il suffit de construire la fonction  $T$  correspondante. Si  $K$  est un compact quelconque, on a  $K \subset \bar{B}_{n_0}$  pour un entier  $n_0$ , puisque les ouverts  $B_n$  couvrent  $E$ , et, d'après (1.2),  $T_n(K) = T_{n_0}(K)$  pour  $n > n_0$ . Si l'on pose  $T(K) = T_{n_0}(K)$ , il est facile de vérifier que la fonction  $T$  ainsi définie sur  $\mathcal{K}(E)$  satisfait aux conditions du théorème de Choquet. Il existe donc un fermé aléatoire  $A$  tel que  $P(A \in V_K) = T(K)$ . Mais par construction  $T$  coïncide avec  $T_n$  sur  $\mathcal{K}(\bar{B}_n)$ , et par suite  $A \cap \bar{B}_n$  est équivalent à  $A_n$ .

*Fermés aléatoires indépendants.* Un couple  $(A_1, A_2)$  de fermés aléatoires est une application mesurable d'un espace probabilisé  $(\Omega, \alpha, P)$  sur l'espace produit  $(\mathcal{F} \times \mathcal{F}, \sigma(\mathcal{V}) \otimes \sigma(\mathcal{V}))$ . Les fonctionnelles  $Q_1$  et  $Q_2$  relatives à  $A_1$  et  $A_2$  sont définies pour tout  $K \in \mathcal{K}$  par  $Q_i(K) = P(A_i \in V^K)$ ,  $i = 1, 2$ . On vérifie alors sans peine que  $A_1$  et  $A_2$  sont indépendants dès que l'on a

$$(1.3) \quad P(V^{K_1} \times V^{K_2}) = Q_1(K_1)Q_2(K_2) \quad (K_1, K_2 \in \mathcal{K}).$$

### 1.3 Fermés indéfiniment divisibles pour la réunion

Soit  $A$  un fermé aléatoire, et  $Q = 1 - T$  la fonction définie sur  $\mathcal{K}$  par  $Q(K) = P(A \cap K = \emptyset)$ . Nous dirons que  $A$  est *indéfiniment divisible* pour la réunion si pour tout entier  $n > 0$ ,  $A$  est équivalent à la réunion  $A'_1 \cup A'_2 \cup \dots \cup A'_n$  de  $n$  fermés aléatoires indépendants équivalents entre eux. C'est là une propriété de la seule fonction  $Q$ . En effet, si l'on pose  $Q_n(K) = P(A'_i \cap K = \emptyset)$ , on a, d'après (1.3),  $Q = (Q_n)^n$ . Ainsi,  $A$  est indéfiniment divisible si et seulement si la fonction  $T_n$  définie sur  $\mathcal{K}$  par  $T_n = 1 - Q^{1/n}$  vérifie les conditions du théorème de Choquet.

Nous allons expliciter la forme générale de ces fonctionnelles  $Q$  indéfiniment divisibles. Il nous faut, auparavant, examiner le cas où  $A$  admet des *points fixes* (déf.:  $x_0$  est un point fixe pour le fermé aléatoire  $A$  si  $P(x_0 \in A) = 1$ , c'est-à-dire  $Q(\{x_0\}) = 0$ ).

*Lemme 1.1.* Si  $A$  est un fermé aléatoire indéfiniment divisible pour la

réunion, l'ensemble des points fixes de  $A$  est un fermé  $F$ , éventuellement vide, et la fonctionnelle  $Q$  associée à  $A(Q(K) = P(A \cap K = \emptyset))$  vérifie  $Q(K) > 0$  strictement pour tout compact  $K$  disjoint de  $F$ .

Notons d'abord que,  $Q$  étant s.c.i. sur  $\mathcal{K}' = \mathcal{K} \setminus \emptyset$ , l'ensemble des compacts non vides  $K \in \mathcal{K}'$  tels que  $Q(K) = 0$  est inductif pour l'inclusion. D'après le théorème de Zorn, donc, si  $Q(K) = 0$ , il existe un compact minimal non vide  $K_0 \subset K$  tel que  $Q(K_0) = 0$ . Si nous montrons que tout compact minimal  $K_0$  est ponctuel, la proposition en découlera: en effet, la réunion de ces points fixes  $x_0$  est un fermé  $F$  (puisque  $A$  est fermé) et si un compact  $K$  vérifie  $Q(K) = 0$ , il contiendra un compact minimal, c'est-à-dire un point fixe  $x_0 \in F$ , donc ne sera pas disjoint de  $F$ .

Soit donc  $K_0$  un compact minimal tel que  $Q(K_0) = 0$ . Montrons que  $K_0$  est ponctuel. En effet, supposons que  $K_0$  contienne deux points distincts. On peut alors trouver deux compacts  $K_1$  et  $K_2$  non vides et distincts de  $K_0$  tels que  $K_0 = K_1 \cup K_2$ . Comme  $K_0$  est minimal, on a

$$Q(K_1) > 0, \quad Q(K_2) > 0,$$

et, puisque  $V^{K_1 \cup K_2}$  est p.s. vide, on a aussi

$$P(V^{K_1} \cup V^{K_2}) = Q(K_1) + Q(K_2).$$

Mais  $A$  est indéfiniment divisible, et  $Q_n = Q^{1/n}$  est la fonctionnelle d'un fermé aléatoire  $A_n$  admettant évidemment les mêmes compacts minimaux que  $A$  lui-même. Si  $P_n$  est la probabilité de  $A_n$ , on a donc aussi

$$P_n(V^{K_1} \cup V^{K_2}) = (Q(K_1))^{1/n} + (Q(K_2))^{1/n}.$$

Or,  $Q(K_1)$  et  $Q(K_2)$  étant strictement positifs, le second membre de cette relation est  $> 1$  pour  $n$  assez grand, ce qui est impossible. Par suite  $K_0$  est ponctuel, et la proposition est établie.

Quitte à remplacer l'espace  $E$  initial par  $E \cap F^c$  (qui est encore L.C.D.), et le fermé aléatoire  $A$  de  $\mathcal{F}(E)$  par le fermé aléatoire  $A \cap F^c$  de  $\mathcal{F}(E \cap F^c)$  on peut toujours se ramener au cas où  $A$  est *sans point fixe*. D'après la proposition, la fonctionnelle  $Q$  d'un fermé aléatoire indéfiniment divisible et sans point fixe ne s'annule pas sur  $\mathcal{K}$ . Ce sont ces fonctionnelles que nous allons caractériser. Posons d'abord un lemme.

**Lemme 1.2.** Soit  $T$  une capacité (alternée, d'ordre infini) vérifiant  $T(\emptyset) = 0$  et  $T \leq 1$  sur  $\mathcal{K}$ , et soit  $G(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n$  la fonction génératrice d'une loi de probabilité discrète. Si l'on pose  $Q = 1 - T$ ,  $1 - G(Q)$  est encore une capacité alternée d'ordre infini, nulle en  $\emptyset$  et majorée par 1.

En effet, d'après le Théorème 1,  $Q$  est la fonctionnelle d'un fermé aléatoire  $A$ , et  $Q^N$  celle de la réunion de  $N$  fermés aléatoires indépendants équivalents



à  $A$ . Soient alors  $A, A_2, \dots$  une suite de fermés aléatoires indépendants admettant la même fonctionnelle  $Q$ , et  $N$  une variable aléatoire indépendante des  $A_i$  et vérifiant  $P(N = n) = p_n$ . On vérifie que l'application  $(N, A_1, A_2, \dots) \rightarrow A_1 \cup \dots \cup A_N$  de  $N \times \mathcal{F}^N$  dans  $\mathcal{F}$  est mesurable pour la  $\sigma$ -algèbre produit, et que  $A' = A_1 \cup \dots \cup A_N$  est un fermé aléatoire dont la fonctionnelle est  $Q' = G(Q)$ : d'après le Théorème 1, le lemme en résulte.

*Corollaire.* Dans les mêmes conditions, pour  $\lambda > 0$ ,  $1 - e^{-\lambda T}$  est une capacité alternée d'ordre infini, nulle en  $\emptyset$  et majorée par 1.

Il suffit, en effet, de prendre pour  $G$  la fonction génératrice de la loi de Poisson, soit  $G(s) = \exp\{-\lambda(1-s)\}$ .

*Théorème 2.* Pour qu'une fonction  $Q$  sur  $\mathcal{K}$  soit la fonctionnelle associée à un fermé aléatoire  $A$  indéfiniment divisible et sans point fixe, il faut et il suffit que  $Q$  soit de la forme

$$Q(K) = \exp\{-\psi(K)\} \quad (K \in \mathcal{K})$$

pour une capacité  $\psi$  alternée d'ordre infini vérifiant  $\psi(\emptyset) = 0$  et  $\psi(K) < \infty$  pour tout  $K \in \mathcal{K}$ .

Ces conditions sont nécessaires. En effet, si  $A$  est indéfiniment divisible et sans point fixe,  $Q$  ne s'annule pas sur  $\mathcal{K}$  (Lemme 1.1), et  $T_n = 1 - Q^{1/n}$  est une capacité. Pour  $K \in \mathcal{K}$ ,  $nT_n(K)$  converge vers la limite

$$\psi(K) = -\log Q(K)$$

avec  $\psi(\emptyset) = 0$  et  $\psi(K) < \infty$ . Il reste à montrer que  $\psi$  est une capacité. Or  $\psi$  est s.c.s. sur  $\mathcal{K}$ , car  $Q$  est s.c.i. et ne s'annule pas. D'autre part, les  $T_n$  sont des capacités alternées d'ordre infini. Les fonctions  $S_p$  construites à partir de  $T$  selon la Relation (1.1) sont donc  $\geq 0$  comme limites simples des fonctions positives correspondantes construites à partir des  $nT_n$ . Donc  $\psi$  est bien une capacité.

Montrons maintenant que les conditions de l'énoncé sont suffisantes. Soit donc  $\psi$  une capacité nulle en  $\emptyset$  et  $< \infty$  sur  $\mathcal{K}$ . Posons  $Q = e^{-\psi}$ . On a évidemment  $Q(\emptyset) = 1$  et  $Q(K) \geq 0$ , de sorte que  $1 - Q$  vérifie la première condition du Théorème 1. Pour montrer que  $Q$  est bien la fonctionnelle d'un fermé aléatoire, nous allons utiliser la notion de limite inductive introduite au Paragraphe 1.2. Soit donc  $B_n$  une suite d'ouverts relativement compacts vérifiant  $B_n \uparrow E$  et  $\bar{B}_n \subset B_{n+1}$ . Pour chaque  $n$ , définissons une fonctionnelle  $Q_n$  sur  $\mathcal{K}(\bar{B}_n)$  en posant

$$Q_n(K) = Q(K) = e^{-\psi(K)} \quad (K \in \mathcal{K}, K \subset \bar{B}_n).$$

Sur  $\mathcal{K}(\bar{B}_n)$ ,  $\psi(K)$  est majorée par  $\psi(\bar{B}_n) < \infty$ . Si les  $\psi(\bar{B}_n)$  sont tous nuls,  $Q = 1$  sur  $\mathcal{K}$  est la fonctionnelle associée au fermé aléatoire p.s. vide, et le

théorème est établi. Supposons donc  $\psi(\bar{B}_n) > 0$  pour  $n$  assez grand. La capacité  $\psi(K)/\psi(\bar{B}_n)$  vérifie, alors, sur  $\mathcal{K}(\bar{B}_n)$ , les conditions du Lemme 1.2, et, en appliquant le corollaire de ce lemme avec  $\lambda = \psi(\bar{B}_n)$ , on voit que  $1 - e^{-\psi}$  est une capacité sur  $\mathcal{K}(\bar{B}_n)$  nulle en  $\emptyset$  et majorée par 1. Par suite, d'après le Théorème 1,  $Q_n = e^{-\psi}$  est la fonctionnelle d'un fermé aléatoire  $A_n$  de  $\mathcal{F}(\bar{B}_n)$ . Mais les  $Q_n$  vérifient la Condition (1.2). Par suite, la fonctionnelle  $Q = e^{-\psi}$  définie sur  $\mathcal{K}(E)$  entier est associée à un fermé aléatoire  $A$ , limite inductive des  $A_n$ . Comme  $\psi/n$  vérifie, pour tout  $n > 0$ , les mêmes hypothèses que  $\psi$  elle-même,  $Q^{1/n}$  est également la fonctionnelle d'un fermé aléatoire, et  $A$  est donc indéfiniment divisible. Enfin,  $Q$  ne s'annule pas sur  $\mathcal{K}$ , puisque  $\psi$  reste finie, et par suite, d'après le Lemme 1.1,  $A$  n'a pas de point fixe.

Les schémas booléens (voir ci-dessous Paragraphe 2.3), les variétés linéaires poissoniennes de Miles ([11], [12], [13]) fournissent des exemples de fermés aléatoires indéfiniment divisibles, ainsi que le fermé aléatoire harmonique, lié à la capacité newtonienne (Choquet [2]).

#### 1.4 Opérations mesurables

Tout fermé aléatoire  $A$  possède la propriété de mesurabilité. En particulier, si  $\mu$  est une mesure positive sommable sur l'espace L.C.D.  $E$ ,  $\mu(A)$  est une variable aléatoire et vérifie

$$(1.4) \quad E(\mu(A)) = \int P(x \in A) \mu(dx) = \int T(\{x\}) \mu(dx).$$

Si  $\alpha$  est une application mesurable de  $\mathcal{F}$  dans lui-même,  $\alpha(A)$  est encore un fermé aléatoire. La réunion  $(F_1, F_2) \rightarrow F_1 \cup F_2$  étant une application continue de  $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$  dans  $\mathcal{F}$ , la réunion de deux fermés aléatoires est encore un fermé aléatoire.

On dira qu'une application d'un espace topologique  $E'$  dans  $\mathcal{F}$  est s.c.s. (resp. s.c.i.) si l'image inverse d'un ouvert du type  $V^K$ ,  $K \in \mathcal{K}$  (resp.  $V_G$ ,  $G \in \mathcal{G}$ ) est ouverte dans  $E'$ . Une telle application est alors évidemment mesurable pour la tribu borélienne de  $E'$ . Ainsi, l'intersection  $(F_1, F_2) \rightarrow F_1 \cap F_2$  est une application s.c.s. de  $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$  dans lui-même, et l'intersection  $A_1 \cap A_2$  de deux fermés aléatoires est encore un fermé aléatoire.

Plaçons-nous maintenant dans le cas où l'espace  $E$  est l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$ . On munit souvent  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  d'une loi de composition associative et commutative, notée  $\oplus$  et appelée *addition de Minkowski*, définie par

$$A \oplus B = \{a + b, a \in A, b \in B\} \quad (A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n))$$

et aussi de la loi duale, notée  $\ominus$ , appelée *soustraction de Minkowski* et définie par  $A \ominus B = (A^c \oplus B)^c$ . On vérifie sans peine que l'application  $(F, K) \rightarrow F \oplus K$  est une application continue de  $\mathcal{F} \times \mathcal{K}'$  dans  $\mathcal{F}$ , et de même  $(F, K) \rightarrow F \ominus K$

est une application s.cs. de  $\mathcal{F} \times \mathcal{K}'$  dans  $\mathcal{F}$ . En particulier, si  $K_0$  est un compact non vide et  $A$  un fermé aléatoire,  $A \oplus K_0$  et  $A \ominus K_0$  sont encore des fermés aléatoires, et vérifient la Relation (1.4).

Soit  $K_0 \in \mathcal{K}'$  un compact non vide, et  $\check{K}_0 = \{k, -k \in K_0\}$  son *transposé*, c'est-à-dire le symétrique de  $K_0$  par rapport à l'origine. On a  $x \in A \oplus \check{K}_0$  si et seulement si le translaté  $K_0 \oplus \{x\}$  de  $K_0$  par  $x$  rencontre  $A$ . On dira que  $A \oplus \check{K}_0$  est le *dilaté* de  $A$  par  $K_0$ . Par dualité, on voit que  $x \in A \ominus \check{K}_0$  équivaut de même à  $K_0 \oplus \{x\} \subset A$ , et on dit que  $A \ominus \check{K}_0$  est l'*érodé* de  $A$  par  $K_0$ . Soit alors  $A$  un fermé aléatoire,  $Q$  sa fonctionnelle,  $A \oplus \check{K}_0$  le dilaté de  $A$  par  $K_0$  et  $Q_{K_0}$  la fonctionnelle associée à ce fermé aléatoire. Pour  $K \in \mathcal{K}'$ ,  $K$  est disjoint de  $A \oplus \check{K}_0$  si et seulement si  $K \oplus K_0$  est disjoint de  $A$ . Autrement dit, la fonctionnelle associée au dilaté est définie par

$$(1.5) \quad Q_{K_0}(K) = Q(K \oplus K_0).$$

En combinant érosion et dilatation, on obtient encore les opérations suivantes (qui permettent de définir la notion de granulométrie d'un fermé aléatoire, cf. Paragraphe 4.2 ci-dessous):

$$A^{K_0} = (A \oplus \check{K}_0) \ominus K_0 \quad (\text{fermeture de } A \text{ selon } K_0),$$

$$A_{K_0} = (A \ominus \check{K}_0) \oplus K_0 \quad (\text{ouverture de } A \text{ selon } K_0).$$

Ces opérations vérifient les règles suivantes:

$$A \subset B \Rightarrow A^{K_0} \subset B^{K_0}, \quad A_{K_0} \subset B_{K_0}$$

$$A_{K_0} \subset A \subset A^{K_0},$$

$$(A^{K_0})^{K_0} = A^{K_0}, \quad (A_{K_0})_{K_0} = A_{K_0}$$

$$(A_{K_0})^c = (A^c)^{K_0}, \quad (A^{K_0})^c = (A^c)_{K_0}.$$

Il s'agit donc d'une fermeture (et d'une ouverture) au sens algébrique, d'ailleurs duales l'une de l'autre. Lorsque  $A$  est un fermé aléatoire et  $K_0$  un compact non vide,  $A^{K_0}$  et  $A_{K_0}$  sont encore des fermés aléatoires.

Si  $K$  et  $K_0$  sont compacts et non vides,  $K^{K_0}$  est contenu dans l'enveloppe convexe  $C(K)$  de  $K$ . De plus, si  $K_0$  est un compact convexe d'intérieur non vide, et  $\rho K_0$  son homothétique dans une homothétie de module  $\rho > 0$ , l'adhérence de la réunion des  $K^{\rho K_0}$ , ou, ce qui revient au même, la limite dans  $\mathcal{K}$  des  $K^{\rho K_0}$  pour  $\rho \rightarrow \infty$  est égale à l'enveloppe convexe  $C(K)$ , soit

$$C(K) = \overline{\bigcup_{\rho > 0} K^{\rho K_0}} = \lim_{\rho \rightarrow \infty} K^{\rho K_0}.$$

De cette propriété, on déduit un lemme de géométrie intégrale, qui nous sera utile ultérieurement.

**Lemme 1.3.** Soit  $K \in \mathcal{K}'$  un compact non vide,  $C(K)$  son enveloppe convexe, et  $B_r$  la boule de centre 0 et de rayon  $r$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , on peut trouver  $\rho_\varepsilon$  tel que l'on ait  $K \oplus B_{r+\varepsilon} \supset C(K) \oplus B_r$  pour  $r \geq \rho_\varepsilon$ .

En effet, on a  $C(K) = \bigcup K^{B_\rho}$ , et  $K^{B_\rho}$  converge dans  $\mathcal{K}$  vers  $C(K)$  d'après le résultat rappelé ci-dessus. Il existe donc  $\rho_\varepsilon$  tel que  $C(K) \subset K^{B_r} \oplus B_\varepsilon$  pour  $r \geq \rho_\varepsilon$ . Mais  $K^{B_r} \oplus B_\varepsilon \subset (K \oplus B_{r+\varepsilon}) \ominus B_r$  entraîne alors  $C(K) \oplus B_r \subset (K \oplus B_{r+\varepsilon})_{B_r} \subset K \oplus B_{r+\varepsilon}$ , et le lemme en résulte.

### 1.5 L'espace vectoriel de Minkowski

Dans toute la suite de cette étude, l'espace  $E$  est l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$ . Nous désignerons par  $C_0(\mathcal{K})$  le sous-ensemble de  $\mathcal{K}$  (fermé dans  $\mathcal{K}$ ) constitué des compacts convexes de  $\mathbb{R}^n$  contenant l'origine 0. Tout  $K \in C_0(\mathcal{K})$  est défini par sa *podaire*  $r_K(u)$ , fonction  $\geq 0$  sur la sphère unité  $S$  de  $\mathbb{R}^n$  associant à chaque direction  $u \in S$  la distance  $r_K(u)$  à l'origine du plan d'appui dans la direction  $u$ . Désignons par  $\mathcal{R}$  l'image de  $C_0(\mathcal{K})$  par l'application  $K \rightarrow r_K$  dans l'espace  $\mathcal{C}(S)$  des fonctions continues sur  $S$ . L'application podaire  $K \rightarrow r_K$  est un *homéomorphisme* de  $C_0(\mathcal{K})$  sur  $\mathcal{R}$  muni de la topologie induite par la convergence uniforme. En effet, si  $B_\varepsilon$  est la boule de rayon  $\varepsilon$ , on a  $\sup_{u \in S} |r_K(u) - r_{K'}(u)| \leq \varepsilon$  si et seulement si  $K \subset K' \oplus B_\varepsilon$  et  $K' \subset K \oplus B_\varepsilon$ . D'autre part, les relations immédiates

$$r_{K \oplus K'} = r_K + r_{K'}; \quad r_{\alpha K} = \alpha r_K \quad (\alpha \geq 0); \quad K \subset K' \Leftrightarrow r_K \leq r_{K'}$$

montrent que cette application est aussi un isomorphisme de  $C_0(\mathcal{K})$  muni de l'addition de Minkowski (pour laquelle il est un demi-groupe) des homothéties positives et de la relation d'ordre  $\subset$  dans  $\mathcal{R}$  muni de l'addition usuelle, de la multiplication par les constantes positives, et de la relation d'ordre  $\leq$ . Ainsi,  $C_0(\mathcal{K})$  est identifiable à un cône convexe  $\mathcal{R}$  fermé dans  $\mathcal{C}(S)$  et admettant une base compacte.

Désignons alors par  $\mathcal{M}(S)$ , ou espace vectoriel de Minkowski, le sous-vectoriel de  $\mathcal{C}(S)$  engendré par  $\mathcal{R}$ , muni de la topologie induite par la convergence uniforme.  $\mathcal{M}(S)$  est dense dans  $\mathcal{C}(S)$ , (mais ne coïncide pas avec  $\mathcal{C}(S)$ ). Cela résulte du lemme suivant.

**Lemme 1.4.** Désignons par  $\mathcal{C}_2(S)$  l'ensemble des fonctions deux fois continuellement différentiables sur la sphère unité  $S$ . Pour tout  $f \in \mathcal{C}_2(S)$ , on peut trouver une constante  $C < \infty$  telle que  $f + C \in \mathcal{R}$ , et  $\mathcal{C}_2(S)$  est contenu dans  $\mathcal{M}(S)$ .

Comme les constantes  $\geq 0$  sont dans  $\mathcal{R}$ , comme podaires des boules de centre 0, il suffit de justifier le premier énoncé. Soit  $\phi \in \mathcal{C}_2(S)$ ,  $\nabla \phi$  sa différentielle seconde continue sur  $S$ , et  $\gamma$  le tenseur métrique sur  $S$ , c'est-à-dire le tenseur associé à la forme quadratique représentant l'élément d'arc sur  $S$ .

On sait que  $\phi$  est dans  $\mathcal{R}$  si et seulement si le tenseur  $\gamma\phi + \nabla\phi$  est de type positif sur  $S$ . Pour  $f \in \mathcal{C}_2(S)$ ,  $\gamma f + \nabla f$  est continu sur l'espace compact  $S$ . On peut donc trouver  $C < \infty$  telle que  $\gamma(f + C) + \nabla f$  soit de type positif sur  $S$ , d'où le lemme.

Soit maintenant  $I$  une fonctionnelle définie sur  $\mathcal{R}$  ou sur  $C_0(\mathcal{X})$ . On dira que  $I$  est croissante si  $r \leq r'$  dans  $\mathcal{R}$  entraîne  $I(r) \leq I(r')$ , et qu'elle est positivement linéaire si  $I(r + r') = I(r) + I(r')$  et  $I(\alpha r) = \alpha I(r)$ ,  $r, r' \in \mathcal{R}$ ,  $\alpha > 0$ . Si  $I$  est croissante et positivement linéaire, on a  $I(0) = 0$  et  $I(r) \geq 0$  sur  $\mathcal{R}$ . Le lemme suivant nous sera utile dans la suite (Paragraphe 3.3).

**Lemme 1.5. (lemme de prolongement).** Toute fonctionnelle  $I$  croissante et positivement linéaire sur  $\mathcal{R}$  admet sur  $\mathcal{C}(S)$  un et un seul prolongement linéaire et continu; ou encore, il existe une et une seule mesure de Radon positive  $\lambda_I$  telle que l'on ait

$$I(r) = \int_S r(u) \lambda_I(du), \quad r \in \mathcal{R}.$$

En effet, soit  $f \in \mathcal{C}_2(S)$ , et une constante  $C \geq 0$  telle que  $f + C \in \mathcal{R}$  (Lemme 1.4). Comme  $I$  est linéaire,  $I(f + C) - I(C)$  ne dépend pas du choix de cette constante  $C$ . On peut donc définir une fonctionnelle  $I_2$  sur  $\mathcal{C}_2(S)$  en posant  $I_2(f) = I(f + C) - I(C)$ , et  $I_2$  coïncide avec  $I$  sur  $\mathcal{R} \cap \mathcal{C}_2$ . On voit sans peine que  $I_2$  est additive, vérifie  $I_2(\alpha f) = \alpha I_2(f)$ ,  $\alpha \geq 0$ , et  $I_2(-f) = -I_2(f)$ , donc est linéaire sur  $\mathcal{C}_2$ .  $I_2$  est croissante: si  $f \leq f'$  dans  $\mathcal{C}_2(S)$ , soit  $C < \infty$  telle que  $f + C$  et  $f' + C$  soient dans  $\mathcal{R}$ . On a alors  $I_2(f + C) \leq I_2(f' + C)$  d'où  $I_2(f) \leq I_2(f')$ . D'après une proposition de Bourbaki ([1], Chapitre III, Paragraphe 1, Prop. 9, p. 56),  $I_2$  se prolonge en une mesure positive  $\lambda_I$  sur  $S$ , d'ailleurs unique puisque  $\mathcal{C}_2$  est dense dans  $\mathcal{C}$ , et la restriction à  $\mathcal{R}$  de ce prolongement coïncide manifestement avec  $I$ .

## 2. LA PROPRIÉTÉ SEMI-MARKOVIENNE

### 2.1 Définition

Si  $C, K$  et  $K'$  sont trois compacts de  $\mathbb{R}^n$ , nous dirons que  $C$  sépare  $K$  et  $K'$  si pour tout  $x \in K$  et tout  $x' \in K'$  le segment  $\{(1 - \lambda)x + \lambda x', 0 \leq \lambda \leq 1\}$  rencontre  $C$ . (En particulier, si  $K$  ou  $K'$  est vide,  $C$  sépare toujours  $K$  et  $K'$ ; si  $C = \emptyset$ ,  $C$  ne sépare  $K$  et  $K'$  que si l'un de ces deux compacts est vide).

Dans ces conditions, nous dirons qu'un fermé aléatoire  $A$  est *semi-markovien*, si la fonctionnelle  $Q$  sur  $\mathcal{K}$  qui lui est associée vérifie la relation

$$(2.1) \quad Q(K \cup K' \cup C)Q(C) = Q(K \cup C)Q(K' \cup C)$$

dès que le compact  $C$  sépare les compacts  $K$  et  $K'$ .

Examinons la signification de la Relation (2.1). Pour  $Q(C) = 0$ , elle est toujours vérifiée. Si  $Q(C) \neq 0$ , elle signifie que les *fermés aléatoires*  $A \cap K$  et  $A \cap K'$  sont *conditionnellement indépendants* lorsque l'évènement  $\{A \cap C = \emptyset\}$  est réalisé.

En effet, pour  $Q(C) \neq 0$ , la probabilité  $P'$  sur  $\sigma(\mathcal{V})$  définie par  $P'(V) = P(V \cap V^C)/Q(C)$  définit un fermé aléatoire  $A'$  presque sûrement disjoint de  $C$ , que l'on peut considérer comme représentant  $A$  conditionnellement si  $A \cap C = \emptyset$ . Soit  $Q'$  la fonctionnelle associée à  $A'$  définie par  $Q'(K_1) = Q(K_1 \cup C)/Q(C)$ ,  $K_1 \in \mathcal{K}$ . La Relation (2.1) s'écrit

$$Q'(K \cup K') = Q'(K)Q'(K').$$

Comme  $A' \cap K \cap K_1 = \emptyset$  équivaut à  $A' \in V^{K \cap K_1}$ , les fonctionnelles  $Q'_K$  et  $Q'_{K'}$  attachées respectivement aux fermés aléatoires  $A' \cap K$  et  $A' \cap K'$  sont définies par

$$Q'_K(K_1) = Q'(K \cap K_1); \quad Q'_{K'}(K'_1) = Q'(K' \cap K'_1).$$

Or  $C$ , séparant  $K$  et  $K'$ , sépare aussi  $K \cap K_1$  et  $K' \cap K'_1$ , quels que soient les compacts  $K_1$  et  $K'_1$ . La Relation (2.1) leur est donc applicable, soit

$$Q'[(K \cap K_1) \cup (K' \cap K'_1)] = Q'(K \cap K_1)Q'(K' \cap K'_1).$$

Au premier membre, figure la probabilité pour que  $A'$  soit disjoint de  $K \cap K_1$  et de  $K' \cap K'_1$ , c'est-à-dire  $P(A' \cap K \in V^{K_1} \text{ et } A' \cap K' \in V^{K'_1})$ . Le second membre est le produit  $Q'_K(K_1)Q'_{K'}(K'_1)$ . D'après (1.1), cette relation signifie donc bien que  $A' \cap K$  et  $A' \cap K'$  sont indépendants.

*Dilaté d'un fermé semi-markovien.* Si  $A$  est un fermé aléatoire semi-markovien, le *dilaté*  $A \oplus \check{K}_0$  de  $A$  par un *convexe* compact non vide  $K_0 \in C(\mathcal{K}')$  est encore semi-markovien.

Pour le voir, on établit d'abord la propriété élémentaire suivante. Si  $C$  sépare  $K$  et  $K'$  et si  $K_0$  est convexe,  $C \oplus K_0$  sépare  $K \oplus K_0$  et  $K' \oplus K_0$ . On note ensuite la relation de distributivité

$$(K \cup K' \cup C) \oplus K_0 = K \oplus K_0 \cup K' \oplus K_0 \cup C \oplus K_0,$$

et on applique la Relation (1.5), d'où

$$Q_{K_0}(K \cup K' \cup C)Q_{K_0}(C) = Q_{K_0}(K \cup C)Q_{K_0}(K' \cup C)$$

dès que  $C$  sépare  $K$  et  $K'$ , et  $A \oplus \check{K}_0$  est encore semi-markovien.

## 2.2 La fonctionnelle $\psi = -\log Q$

Soit  $A$  un fermé aléatoire semi-markovien, et  $Q$  sa fonctionnelle sur  $\mathcal{K}$  vérifiant la Relation (2.1), Posons  $\psi(K) = -\log Q(K)$  pour  $K \in \mathcal{K}$  ( $\psi(K) = \infty$

si  $Q(K) = 0$ ). La restriction de  $\psi$  au sous-espace  $C(\mathcal{K})$  des compacts convexes est  $H$ -additive (c'est-à-dire additive au sens que Hadwiger [4] donne à cet adjectif). Pour le voir, posons d'abord un lemme.

**Lemme 2.1.** Soient  $K$  et  $K'$  deux compacts tels que  $K \cup K'$  soit convexe. Alors  $K \cap K'$  sépare  $K$  et  $K'$ .

En effet, soient  $x \in K$  et  $x' \in K'$ . Posons  $x(\alpha) = (1 - \alpha)x + \alpha x'$  ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ). On a  $x(\alpha) \in K \cup K'$ , puisque  $K \cup K'$  est convexe. Désignons par  $\alpha_0$  le supremum des  $\alpha$  tels que  $x(\alpha) \in K$ . On a  $x(\alpha_0) \in K$ , puisque  $K$  est compact. Si  $\alpha_0 = 1$ , il en résulte  $x' \in K$  et le lemme est établi. Si  $\alpha_0 < 1$ , on a  $x(\alpha_0 + \varepsilon) \in K \cup K'$  pour  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit, donc  $x(\alpha_0 + \varepsilon) \in K'$ , puis  $x(\alpha_0) \in K'$ , puisque  $K'$  est compact. Ainsi,  $x(\alpha_0) \in K \cap K'$ , d'où le lemme.

Ainsi, la fonctionnelle  $Q$  du fermé aléatoire  $A$  semi-markovien vérifie la propriété suivante. Si  $K$  et  $K'$  sont deux compacts dont la réunion est convexe, on a

$$(2.2) \quad Q(K \cup K') Q(K \cap K') = Q(K) Q(K').$$

Cette relation découle, en effet, du lemme ci-dessus et de (2.1). On note qu'il n'est pas nécessaire de supposer  $K$  et  $K'$  convexes. La fonctionnelle  $\psi$ , positive, croissante et s.c.s. sur  $\mathcal{K}$ , vérifie donc dans les mêmes conditions la relation suivante.

$$(2.2') \quad \psi(K \cup K') + \psi(K \cap K') = \psi(K) + \psi(K').$$

Nous dirons que le fermé aléatoire  $A$  est *stationnaire* si sa probabilité  $P$  (ou, ce qui revient au même, sa fonctionnelle  $Q$ ) est invariante par translation; qu'il est *isotrope*, si  $Q$  est invariante pour les rotations de centre 0.  $A$  est donc stationnaire et isotrope si et seulement si la fonctionnelle  $Q$  est invariante pour les déplacements dans  $\mathbb{R}^n$ . Si  $A$  est semi-markovien et stationnaire,  $Q$  ne s'annule sur  $\mathcal{K}$  que si  $A$  est presque sûrement égal à  $\mathbb{R}^n$  (on le vérifie immédiatement à partir de (2.2)). Si  $Q(K_0) = 0$ , il existe nécessairement  $x_0 \in K_0$  tel que  $x_0 \in A$  presque sûrement. Par translation, on a  $P(x \in A) = 1$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}^n$ , donc le fermé  $A$  contient presque sûrement toute partie dénombrable dense dans  $\mathbb{R}^n$ , et  $A = \mathbb{R}^n$  presque sûrement. On obtient alors l'énoncé suivant.

Si  $A$  est un fermé aléatoire semi-markovien, stationnaire et isotrope non p.s. égal à  $\mathbb{R}^n$ , et si de plus sa fonctionnelle  $Q$  est *continue* sur l'espace  $C(\mathcal{K}')$  des compacts convexes non vides, alors il existe  $n + 1$  constantes  $\beta_i \geq 0$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  telles que l'on ait

$$(2.3) \quad \psi(K) = -\log Q(K) = \sum_{i=0}^n \beta_i W_i(K) \quad (K \in C(\mathcal{K}')),$$

les  $W_i(K)$  désignant les *fonctionnelles de Minkowski* (Quermassintégrale) de la géométrie intégrale.

En effet, comme  $A$  n'est pas égal à  $R^n$ ,  $Q$  ne s'annule pas sur  $\mathcal{K}$ , comme on vient de le voir, et  $\psi$  est donc continue sur  $C(\mathcal{K}')$ . Or  $\psi$  est invariante pour les déplacements, et vérifie la Relation (2.2'). Il résulte alors de Hadwiger [4] (Théorème V, p. 222) que  $\psi$  est bien de la forme (2.3) sur  $C(\mathcal{K}')$ .

Nous allons maintenant montrer que la condition ci-dessus ( $\psi$   $H$ -additive), qui est nécessaire pour que  $A$  soit semi-markovien, est également suffisante dans le cas où  $A$  est, de plus, supposé indéfiniment divisible pour la réunion. Donnons d'abord un lemme qui caractérise les *fermés aléatoires p.s. convexes* (les fermés convexes constituent un sous-espace compact de  $\mathcal{F}$ , de sorte que cette notion a un sens).

**Lemme 2.2.** Soit  $A$  un fermé aléatoire dans  $R^n$  et  $T$  la fonctionnelle définie sur  $\mathcal{K}$  par  $T(K) = P(A \cap K \neq \emptyset)$ . Les trois propriétés suivantes sont équivalentes:

- a)  $A$  est p.s. convexe;
- b) si  $K, K'$  et  $C$  sont trois compacts tels que  $C$  sépare  $K$  et  $K'$ , on a

$$T(K \cup K' \cup C) + T(C) = T(K \cup C) + T(K' \cup C);$$

- c)  $T$  est  $H$ -additive sur  $C(\mathcal{K})$ , c'est-à-dire vérifie

$$T(K \cup K') + T(K \cap K') = T(K) + T(K') \quad (K, K' \text{ et } K \cup K' \in C(\mathcal{K})).$$

La Relation b) équivaut à  $V^C \cap V_K \cap V_{K'} = \emptyset$  p.s., de sorte que a) entraîne b), et b) entraîne c), car  $K \cap K'$  sépare  $K$  et  $K'$  dès que  $K \cup K'$  est convexe (Lemme 2.1). Il reste à démontrer que c) entraîne a).

Si un fermé  $F$  n'est pas convexe, on peut trouver  $x \in F$ ,  $x' \in F$  et  $\lambda$  compris entre 0 et 1 tel que  $y = \lambda x + (1 - \lambda)x' \notin F$ .  $F$  étant fermé, il existe une boule  $B_\varepsilon(y_0)$  de centre  $y_0$  et de rayon  $\varepsilon > 0$  rationnels contenant  $y$  et disjointe de  $F$ . On peut ensuite trouver deux points  $x_0$  et  $x'_0$  de coordonnées rationnelles tels que  $y_0$  soit sur le segment  $(x_0, x'_0)$  et que l'on ait  $x \in B_\varepsilon(x_0)$  et  $x' \in B_\varepsilon(x'_0)$ .

Désignons alors par  $C$  l'enveloppe convexe de  $B_\varepsilon(x_0) \cup B_\varepsilon(y_0)$  et par  $C'$  celle de  $B_\varepsilon(x'_0) \cup B_\varepsilon(y_0)$ . On vérifie sans peine que  $C \cup C'$  est alors l'enveloppe convexe de  $B_\varepsilon(x_0) \cup B_\varepsilon(x'_0)$ . On a donc  $C, C'$  et  $C \cup C' \in C(\mathcal{K})$ ,  $C \cap F \neq \emptyset$ ,  $C' \cap F \neq \emptyset$  tandis que  $C \cap C' = B_\varepsilon(y_0)$  est disjoint de  $F$ . Désignons par

$$V(C, C') = V^{C \cap C'} \cap V_C \cap V_{C'}$$

l'évènement " $A$  rencontre  $C$  et  $C'$  mais non leur intersection". Si  $T$  est  $H$ -additive, l'hypothèse c) entraîne  $V(C, C') = \emptyset$  p.s. Or, l'ensemble  $\mathcal{C}$  des couples  $(C, C')$  construits selon le procédé que nous venons de décrire est *dénombrable*. On a donc aussi

$$\bigcup_{(C, C') \in \mathcal{C}} V(C, C') = \emptyset \text{ p.s.}$$

Par suite, le fermé aléatoire  $A$  est p.s. convexe, et le lemme en résulte.



Revenons maintenant à la propriété semi-markovienne. Un fermé aléatoire  $A$  est semi-markovien si la fonctionnelle  $Q$  définie sur  $\mathcal{K}$  par  $Q(K) = P(A \cap K = \emptyset)$  vérifie la relation

$$(2.1) \quad Q(K \cup K' \cup C)Q(C) = Q(K \cup C)Q(K' \cup C)$$

dès que le compact  $C$  sépare les compacts  $K$  et  $K'$ . Le théorème suivant permet d'identifier la propriété semi-markovienne et la  $H$ -additivité de la géométrie intégrale.

**Théorème 3.** Soit  $A$  un fermé aléatoire indéfiniment divisible pour la réunion, et  $Q = e^{-\psi}$  la fonction définie sur  $\mathcal{K}$  par  $Q(K) = P(A \cap K = \emptyset)$ . Les trois propriétés suivantes sont alors équivalentes:

- a) le fermé aléatoire  $A$  est semi-markovien;
- b)  $A$  est limite inductive d'une suite  $A_n$  déduite par poissonisation d'une suite  $A'_n$  de fermés aléatoires p.s. convexes;
- c) la fonctionnelle  $\psi$  est  $H$ -additive sur  $C(\mathcal{K})$ .

Montrons a)  $\Rightarrow$  b). Soit  $B_n$  la suite des boules de centre 0 et de rayon  $n$ .  $A$  est limite inductive des  $A_n = A \cap B_n$ . Si  $\psi(B_n) = 0$  pour tout  $n$ , on a  $Q = 1$  sur  $\mathcal{K}$ ,  $A$  est p.s. vide, et b) est trivialement vérifiée. Supposons donc  $\psi(B_n) > 0$  pour  $n$  assez grand.  $A_n$  est alors équivalent à la réunion  $A'_1 \cup \dots \cup A'_N$  d'un nombre poissonien  $N$  d'espérance  $\psi(B_n)$  d'ensembles aléatoires indépendants  $A'_i$  définis par  $P(A'_i \cap K \neq \emptyset) = \psi(K)/\psi(B_n)$ ,  $K \in \mathcal{K}$ ,  $K \subset B_n$ . Si  $A$  est semi-markovien, il résulte de la Relation (2.1) que chaque  $A'_i$  vérifie la condition b) du Lemme 2.2, donc est p.s. convexe.

Les implications b)  $\Rightarrow$  a)  $\Rightarrow$  c) résultent immédiatement du Lemme 2.2. Si c) est vérifiée, la fonction  $T_n$  définie sur  $\mathcal{K}$  par  $T_n(K) = \psi(K \cap B_n)/\psi(B_n)$  est encore  $H$ -additive.  $A_n = A \cap B_n$  est donc équivalent à la réunion  $\bigcup_{i=1}^N A'_i$  d'un nombre poissonien de fermés aléatoires  $A'_i$  indépendants admettant la loi  $T_n$ , donc p.s. convexes d'après le Lemme 2.2. Par suite, b) est vérifiée, et le théorème en résulte.

### 2.3 Les schémas booléens à grains primaires convexes

Pour construire un schéma booléen sur  $\mathbf{R}^n$ , nous procédons en deux étapes. Soit, tout d'abord,  $A'$  un fermé aléatoire presque sûrement compact (ou, si l'on préfère, un compact aléatoire), et  $Q'$  la fonctionnelle sur  $\mathcal{K}$  qui lui est associée. Il n'y a aucune difficulté à définir le translaté  $A' \oplus \{\xi\}$  de  $A'$  dans la translation  $\xi$  et sa fonctionnelle  $Q'_\xi(K) = Q'(K \oplus \{-\xi\})$ . Soit, ensuite, un processus de Poisson ponctuel dans  $\mathbf{R}^n$ , et  $\theta(dx)$  la mesure qui lui est associée. A chacun des points  $\xi_i$  de ce processus ponctuel, on associe un fermé aléatoire  $A'_i$  admettant la fonctionnelle  $Q'_{\xi_i}$ , et on suppose les  $A'_i$

mutuellement indépendants. On prend ensuite la réunion  $A$  des  $A'_i$ , et on dit que  $A$  se déduit de  $A'$  par passage en booléen selon le processus de Poisson de densité  $\theta(dx)$ . On vérifie sans peine que la fonctionnelle  $Q$  associée à  $A$  est définie par

$$(2.4) \quad Q(K) = \exp \left\{ - \int [1 - Q'_i(K)] \theta(d\xi) \right\}.$$

Mais  $1 - Q'_i(K) = P'(-\xi \in A' \oplus \check{K})$ , et, d'après (1.4), on trouve

$$(2.4') \quad Q(K) = \exp \{ - E\theta(\check{A}' \oplus K) \}.$$

On note que le fermé aléatoire  $A$  ainsi construit est indéfiniment divisible. Le cas le plus intéressant est celui où la mesure  $\theta(dx) = \theta dx$  est proportionnelle à la mesure de Lebesgue.  $A$  est alors stationnaire.

Si le "grain primaire"  $A'$  est *presque sûrement convexe*, alors  $A$  est *semi-markovien*. En effet, si un compact  $C$  sépare deux compacts  $K$  et  $K'$ , on a  $V^c \cap V_K \cap V_{K'} = \emptyset$  p.s. pour  $A'$  et pour chacun des  $A'_i$ . On en déduit

$$Q'(C) = Q'(C \cup K \cup K') + P'(V^c \cap V_K) + P'(V^c \cap V_{K'}).$$

Mais on a aussi

$$Q'(C) = Q'(K \cup C) + P'(V^c \cap V_K),$$

$$Q'(C) = Q'(K' \cup C) + P'(V^c \cap V_{K'}).$$

Par différence, on en déduit

$$Q'(C \cup K \cup K') + Q'(C) = Q'(K \cup C) + Q'(K' \cup C).$$

En portant ce résultat dans (2.4), on en déduit la relation

$$Q(C \cup K \cup K')Q(C) = Q(K \cup C)Q(K' \cup C)$$

et  $A$  est semi-markovien.

On notera, d'après le Théorème 3, énoncé b), que tout fermé semi-markovien et indéfiniment divisible est limite inductive de schémas booléens à grains primaires convexes. (J'ignore s'il existe des fermés semi-markoviens non indéfiniment divisibles.)

Examinons maintenant le cas *stationnaire*  $\theta(dx) = \theta dx$ . On sait que la mesure de Lebesgue est continue sur  $C(\mathcal{H}')$ . Il résulte alors de (2.4') que la fonctionnelle  $Q$  est *continue* sur  $C(\mathcal{H}')$ . En effet, si  $K_n$  converge vers  $K$  dans  $C(\mathcal{H}')$  et si  $K' \in C(\mathcal{H}')$ ,  $K' \oplus K_n$  converge vers  $K' \oplus K$  dans  $\mathcal{H}$  et  $\theta(K' \oplus K_n)$  vers  $\theta(K' \oplus K)$ . De plus, les  $K_n$  étant contenues dans un compact  $K_0$  fixe, on a  $K' \oplus K_n \subset K' \oplus K_0$  et  $\theta(K' \oplus K_n) \leq \theta(K' \oplus K_0)$ . Le théorème de convergence dominée montre alors que le compact aléatoire  $A'$  p.s. convexe vérifie

$$E\theta(\check{A}' \oplus K_n) \rightarrow E\theta(\check{A} \oplus K).$$

Donc, d'après (2.4'),  $Q$  est continue sur  $C(\mathcal{K}')$  (il n'en résulte pas que  $Q$  soit continue sur  $\mathcal{K}$  entier). Si  $A'$  est de plus *isotrope*, il en est de même de  $A$ , et la fonctionnelle  $Q$  vérifie une relation de la forme (2.3).

On peut, d'ailleurs, déduire directement ce résultat de la formule de Steiner et obtenir ainsi l'interprétation des coefficients  $\beta_i$  de la Relation (2.3). En effet, si  $K$  est convexe et  $A'$  isotrope, le volume  $V(\check{A}' \oplus K)$  est une variable aléatoire et vérifie

$$EV(\check{A}' \oplus K) = \frac{1}{\omega_n} \sum_{k=0}^n W_{n-k}(K) EW_k(A'),$$

$\omega_n$  désignant le volume de la boule unité de  $\mathbf{R}^n$ , et les  $W_k$  les fonctionnelles de Minkowski sur  $C(\mathcal{K}')$ . Pour  $\theta(dx) = \theta dx$ , on a donc la relation

$$(2.5) \quad Q(K) = \exp \left\{ -\frac{\theta}{\omega_n} \sum_{k=0}^n W_{n-k}(K) EW_k(A') \right\} \quad (K \in C(\mathcal{K}')).$$

*Remarque.* La donnée de  $Q$  sur l'espace  $C(\mathcal{K})$  des compacts convexes ne suffit pas pour déterminer  $Q$  sur  $\mathcal{K}$  tout entier. En effet, il est facile de former  $n$  variétés linéaires poissoniennes indépendantes les unes des autres dont la réunion  $A_1$  admette une fonctionnelle  $Q_1$  coïncidant sur  $C(\mathcal{K}')$  avec la fonctionnelle  $Q$  du schéma booléen vérifiant (2.5).

### 3. LES POLYÈDRES POISSONIENS ET L'INVARIANCE CONDITIONNELLE

#### 3.1 Définition des polyèdres poissoniens

Désignons par  $S$  la sphère unité de l'espace  $\mathbf{R}^n$ , et par  $\mathbf{R}_+$  l'ensemble des réels positifs. A tout point  $(iu, r)$  de l'espace produit  $S \times \mathbf{R}_+$  associons l'hyperplan  $H(u, r)$  de  $\mathbf{R}^n$ , défini par l'équation  $\langle u, x \rangle = r$ . L'application  $H: S \times \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathcal{F}$  ainsi définie est manifestement *continue*. Donnons-nous alors un processus de Poisson ponctuel dans  $S \times \mathbf{R}_+$  dont la densité soit de la forme  $\lambda(du)dx$ , où  $\lambda$  est une mesure de Radon positive sur  $S$  et  $dx$  la mesure de Lebesgue sur  $\mathbf{R}_+$ . L'image par  $H$  de ce processus constitue un réseau d'hyperplans aléatoires de  $\mathbf{R}^n$  appelé *réseau poissonien*. Désignons par  $A$  la réunion des hyperplans de ce réseau. Alors  $A$  est un fermé aléatoire. En effet, on a  $A \in V^K$ , pour  $K \in \mathcal{K}$ , si et seulement si l'ensemble  $H^{-1}(V_K)$  fermé, donc mesurable, dans  $S \times \mathbf{R}_+$ , ne contient aucun point du processus ponctuel. Cet événement est donc mesurable, et sa probabilité  $Q(K) = P(V^K)$  est donnée par

$$(3.1) \quad \begin{aligned} Q(K) &= e^{-\psi(K)}, \quad (K \in \mathcal{K}) \\ \psi(K) &= \int_{H^{-1}(V_K)} \lambda(du)dx, \end{aligned}$$

Le même raisonnement montre d'ailleurs aussi que le nombre  $N(K)$  des hyperplans du réseau qui rencontrent le compact  $K$  est une variable aléatoire obéissant à la loi de Poisson d'espérance  $\psi(K)$ .

Montrons que  $A$  est semi-markovien. Soient  $C$ ,  $K$  et  $K'$  trois compacts. Si  $C$  sépare  $K$  et  $K'$ , un hyperplan disjoint de  $C$  ne peut rencontrer à la fois  $K$  et  $K'$ . Autrement dit, on a

$$H^{-1}(V_K) \cap H^{-1}(V_{K'}) \cap H^{-1}(V^C) = \emptyset.$$

Les nombres  $N$  et  $N'$  des points du processus de  $S \times \mathbb{R}^+$  tombant respectivement dans  $H^{-1}(V_K)$  et  $H^{-1}(V_{K'})$  sont donc indépendants conditionnellement si aucun point de Poisson n'est tombé dans  $H^{-1}(V^C)$ . Ainsi, les événements  $\{A \in V^K\}$  et  $\{A \in V^{K'}\}$  sont conditionnellement indépendants si  $\{A \in V^C\}$  est réalisé, ce qui constitue la définition même de la propriété semi-markovienne.

Le complémentaire  $A^c$  de  $A$  est p.s. constitué de polyèdres ouverts convexes disjoints, et on a aussi  $P(0 \in A^c) = 1$ . Parmi ces polyèdres, nous allons nous intéresser à celui qui contient le point 0, dont l'existence p.s. est ainsi établie. Nous le désignerons par  $\Pi_0$ , et nous dirons que  $\Pi_0$  est un *polyèdre poissonien*.  $\Pi_0$  est un ouvert aléatoire p.s. convexe et contenant p.s. le point 0. Si  $K$  est un compact, on a  $K \subset \Pi_0$  si et seulement si l'enveloppe convexe  $C$  de  $\{0\} \cup K$  est disjointe de  $A$ , c'est-à-dire si  $A \in V^C$ , et ceci a lieu avec la probabilité  $Q(C)$ . La probabilité de l'ouvert aléatoire  $\Pi_0$  est donc parfaitement définie par la donnée de la fonctionnelle  $P(K \subset \Pi_0)$  sur l'ensemble  $C_0(\mathcal{K})$  des compacts convexes contenant l'origine, fonctionnelle identique sur  $C_0(\mathcal{K})$  à la fonctionnelle  $Q$  du réseau  $A$  lui-même.

Explicitons cette fonctionnelle. Soit  $K \in C_0(\mathcal{K})$ , et  $r_K \in \mathcal{R}$  son image dans  $\mathcal{C}(S)$  par l'application podaire (Paragraphe 1.5). L'ensemble  $H^{-1}(V_K)$  de  $S \times \mathbb{R}_+$  est ici  $\{(u, r) : r \leq r_K(u)\}$ , et la Formule (3.1) donne alors

$$(3.2) \quad \begin{aligned} Q(K) &= e^{-\psi(K)}, & [K \in C_0(\mathcal{K})] \\ \psi(K) &= \int_S \lambda(du) r_K(u). \end{aligned}$$

D'après ce qui précède, cette Relation (3.2) prolongée sur  $\mathcal{K}$  entier en posant

$$(3.3) \quad Q(K) = Q(C), \quad (K \in \mathcal{K})$$

$C$  désignant l'enveloppe convexe de  $\{0\} \cup K$  peut servir à définir la notion de polyèdre poissonien  $\Pi_0$ . En particulier, il y a autant de polyèdres poissoniens que de mesures de Radon  $\lambda$  positives sur la sphère unité. Lorsque la mesure  $\lambda$  sur  $S$  est *symétrique* par rapport à l'origine 0, le polyèdre  $\Pi_0$  correspondant peut être associé à un réseau  $A$  *stationnaire* d'hyperplans dans  $\mathbb{R}^n$ . Lorsque  $\lambda$  est proportionnelle à la mesure  $du$  sur  $S$  invariante par rotation, le polyèdre  $\Pi_0$  est dit *isotrope* (sa probabilité est alors invariante par rotation).

### 3.2 L'invariance conditionnelle

On a vu au Paragraphe 1.5 que l'application podaire est un homéomorphisme de  $C_0(\mathcal{K})$  sur le cône  $\mathcal{R} \subset \mathcal{C}(S)$ . Comme  $\lambda$  est une mesure de Radon, il en résulte que  $\psi$  et  $Q$  sont continues sur  $C_0(\mathcal{K})$ , d'après (3.2), et aussi sur  $\mathcal{K}$  tout entier, d'après (3.3). La relation  $r_{K \oplus K'} = r_K + r_{K'}$  dans  $C_0(\mathcal{K})$  donne ensuite  $\psi(K \oplus K') = \psi(K) + \psi(K')$  et, compte tenu de la continuité,  $\psi(\alpha K) = \alpha \psi(K)$ ,  $\alpha \geq 0$ , pour  $K$  et  $K' \in C_0(\mathcal{K})$ . Ces résultats subsistent lorsque  $K$  et  $K'$  sont des compacts quelconques contenant l'origine. Ainsi, en désignant par  $\mathcal{K}_0$  l'ensemble des compacts contenant l'origine 0, la fonctionnelle  $Q_0(K) = P(K \subset \Pi_0)$  vérifie

$$Q_0(\alpha K) = [Q_0(K)]^\alpha, \quad (\alpha \geq 0, K, K' \in \mathcal{K}_0)$$

$$Q_0(K \oplus K') = Q_0(K)Q_0(K').$$

La seconde de ces relations est la relation des *demi-groupes*. Elle exprime une propriété de type markovien que nous allons expliciter, et nous verrons au paragraphe suivant qu'elle suffit pour caractériser les polyèdres poissonniens. Pour dégager cette interprétation, notons d'abord que  $K \subset \Pi_0$  équivaut à  $0 \in \Pi_0 \ominus \check{K}$ . De même,  $K \oplus \check{K}' \subset \Pi_0$  équivaut à  $K' \subset \Pi_0 \ominus \check{K}$ . Ainsi, la relation des demi-groupes  $Q(K \oplus K') = Q(K)Q(K')$  s'écrit

$$P(K' \subset \Pi_0 \ominus \check{K}) = P(K' \subset \Pi_0)P(K \subset \Pi_0).$$

Or,  $K$  et  $K'$  contenant l'origine,  $K' \subset \Pi_0 \ominus \check{K}$  implique  $K \subset \Pi_0$ , et  $P(K \subset \Pi_0)$  n'est jamais nul. On peut donc écrire la relation des demi-groupes en termes de probabilités conditionnelles

$$P(K' \subset \Pi_0 \ominus \check{K} \mid 0 \in \Pi_0 \ominus \check{K}) = P(K' \subset \Pi_0).$$

Ainsi, conditionnellement dans l'hypothèse où 0 appartient à l'érodé  $\Pi_0 \ominus \check{K}$ , cet érodé  $\Pi_0 \ominus \check{K}$  est un polyèdre poissonnier admettant la même loi de probabilité que le polyèdre  $\Pi_0$  initial. Nous exprimerons cette propriété en disant que les polyèdres poissonniens sont conditionnellement invariants pour les érosions par des compacts contenant l'origine. On trouvera au Paragraphe 3.4 une interprétation légèrement différente de cette invariance conditionnelle.

### 3.3 Réciproque

Montrons maintenant que cette invariance conditionnelle est une propriété caractéristique des polyèdres poissonniens. Plus précisément, démontrons l'énoncé suivant, ou l'on pose  $Q(K) = P(K \subset \Pi_0)$ .

**Théorème 4.** Pour qu'un ouvert aléatoire  $\Pi_0$  contenant p.s. le point 0

vérifie la relation  $Q(K \oplus K') = Q(K)Q(K')$  pour  $K, K'$  compacts contenant 0, il faut et il suffit que  $\Pi_0$  soit un polyèdre poissonien.

On vient de voir que cette condition est suffisante. Inversement, soit  $\Pi_0$  un ouvert aléatoire vérifiant  $P(0 \in \Pi_0) = 1$  et

$$(3.4) \quad Q(K \oplus K') = Q(K)Q(K'), \quad (K, K' \in \mathcal{K}_0)$$

avec  $Q(K) = P(K \subset \Pi_0)$ . Dans tout ce qui suit,  $B_r$  désigne la boule de centre 0 et de rayon  $r$ . Procédons par étapes.

a) On a  $Q(B_\varepsilon) \uparrow 1$  pour  $\varepsilon \downarrow 0$ . En effet, la fonctionnelle  $Q$  est toujours s.c.i. sur  $\mathcal{K}$ , et  $B_\varepsilon \rightarrow \{0\}$  dans  $\mathcal{K}$  si  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

b)  $Q$  est continue sur  $\mathcal{K}$ . Comme  $Q(K) = Q(K \cup \{0\})$ , et que la réunion est continue, il suffit de vérifier que  $Q$  est continu sur  $\mathcal{K}_0$ . Soit donc  $K_n$  une suite convergeant vers  $K$  dans  $\mathcal{K}_0$ . Pour  $\varepsilon > 0$  donné, on a  $K \subset K_n \oplus B_\varepsilon$  et  $K_n \subset K \oplus B_\varepsilon$  dès que  $n$  est assez grand. La Relation (3.4) donne alors

$$Q(K) \geq Q(B_\varepsilon) \overline{\lim} Q(K_n), \quad \underline{\lim} Q(K_n) \geq Q(K) Q(B_\varepsilon).$$

Compte tenu de a), on en déduit  $\lim Q(K_n) = Q(K)$ , et  $Q$  est continue.

c) Si  $K \in \mathcal{K}$ , et si  $C_0$  est l'enveloppe convexe de  $\{0\} \cup K$ , on a  $Q(K) = Q(C_0)$ .

Comme  $0 \in \Pi_0$  p.s., il suffit de montrer  $Q(K) = Q(C)$ ,  $C$  désignant l'enveloppe convexe de  $K$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . D'après le Lemme 1.1, on peut trouver  $r > 0$  tel que  $C \oplus B_r \subset K \oplus B_r \oplus B_\varepsilon$ , d'où  $Q(K)Q(B_\varepsilon) \leq Q(C)$  d'après la Relation (3.4), puis  $Q(K) \leq Q(C)$  d'après a). L'inégalité inverse étant évidente, on a bien  $Q(K) = Q(C)$ .

d) De la Relation (3.4) et de la continuité de  $Q$  résulte aussitôt

$$Q(\alpha K) = [Q(K)]^\alpha, \quad \alpha \geq 0, \quad K \in \mathcal{K}.$$

Notons d'ailleurs que  $Q$  ne peut pas s'annuler sur  $\mathcal{K}$ . En effet, si  $Q(K_0) = 0$  pour un compact  $K_0$ , prenons une boule  $B_{\rho_0} \supset K_0$ . On a  $Q(B_{\rho_0}) = [Q(B_1)]^{\rho_0} = 0$ . Par suite  $Q(B_\rho) = 0$  pour tout  $\rho > 0$ , mais cela contredit a). Donc  $Q$  ne s'annule pas, et par suite  $\psi = -\log Q$  est continue sur  $\mathcal{K}$ .

e) La fonctionnelle  $\psi$  est donc continue, croissante et positivement linéaire sur  $\mathcal{K}_0$ , et *a fortiori* sur  $C_0(\mathcal{K})$ . D'après le lemme de prolongement 1.5, il existe donc une mesure de Radon  $\lambda$  positive sur la sphère unité telle que l'on ait

$$\psi(K) = \int_S r_K(u) \lambda(du), \quad K \in C_0(\mathcal{K}).$$

Compte tenu de c), et de la Définition (3.2)–(3.3) des polyèdres poissoniens,  $\Pi_0$  est donc le polyèdre poissonien associé à la mesure  $\lambda$ .

### 3.4 Point de vue de la loi en nombre

Soit maintenant  $\lambda$  une mesure positive symétrique sur  $S$ , et  $A$  le réseau stationnaire d'hyperplans poissoniens de  $\mathbf{R}^n$  associé au processus de Poisson de densité  $\lambda(du)dx$  dans  $S \times \mathbf{R}_+$ . Le complémentaire  $A^c$  de  $A$  est réunion de polyèdres ouverts convexes disjoints  $\Pi_i$  dont l'un, soit  $\Pi_0$ , contient l'origine 0. Dans un langage intuitif, on peut envisager la "population" constituée par les polyèdres  $\Pi_i$  considérés comme des individus, en attribuant à chacun d'eux le même poids, et définir ainsi la loi en nombre du polyèdre Poissonien  $\Pi$  (on trouvera dans les travaux de Miles [10], [12], [13], une justification rigoureuse de ce point de vue). On peut, au contraire, attribuer à chacun des  $\Pi_i$  un poids proportionnel à son volume  $V(\Pi_i)$  dans  $\mathbf{R}^n$  et considérer la loi en volume de ce même polyèdre poissonien. Le polyèdre poissonien  $\Pi_0$  tel que nous l'avons défini au Paragraphe 3.1 doit correspondre au point de vue de la loi en volume, car (dans un langage intuitif), l'origine 0 a plus de chances de tomber dans un grand polyèdre que dans un petit. De fait, Miles, s'appuyant sur un théorème ergodique, a établi le résultat suivant: soient  $X$  une caractéristique d'un polyèdre  $\Pi$ ,  $V$  son volume,  $F_0(dX, dV)$  la loi de  $(X, V)$  pour le polyèdre poissonien  $\Pi_0$  du Paragraphe 3.1,  $F(dX, dV)$  la loi de  $(X, V)$  pour le polyèdre poissonien, considéré du point de vue de la loi en nombre,  $E_0$  et  $E$  enfin, les espérances attachées à ces lois. On a alors

$$F_0(dX, dV) = \frac{V}{E(V)} F(dX, dV).$$

Examinons ce que devient l'invariance conditionnelle lorsque l'on passe du point de vue des lois en mesure à celui des lois en nombre. Soit  $K$  un compact convexe contenant l'origine. La probabilité du polyèdre érodé  $\Pi_0 \ominus \check{K}$  pris conditionnellement pour  $0 \in \Pi_0 \ominus \check{K}$  est la loi en mesure associée selon le théorème ergodique à la loi en nombre qui est celle de l'érodé  $\Pi \ominus \check{K}$  pris conditionnellement pour  $\Pi \ominus \check{K} \neq \emptyset$ . On en déduit l'énoncé suivant, où la restriction  $0 \in K$  est inutile (car éroder un translaté de  $\Pi$  équivaut à translater l'érodé de  $\Pi$ ).

Si  $\Pi$  est un polyèdre poissonien (envisagé du point de vue de la loi en nombre) et  $K$  un compact non vide quelconque, conditionnellement dans l'hypothèse où l'érodé  $\Pi \ominus \check{K}$  n'est pas vide, cet érodé est équivalent à  $\Pi$  en probabilité. Cet énoncé généralise un résultat établi par d'autres moyens par Miles ([10], Théorème 9).

Si donc  $X(\Pi)$  est une caractéristique du polyèdre  $\Pi$  (c'est-à-dire une fonction mesurable sur l'espace des ouverts convexes) vérifiant  $X(\emptyset) = 0$ , on peut écrire

$$E(X(\Pi \ominus \check{K})) = E(X(\Pi)) P(\Pi \ominus \check{K} \neq \emptyset).$$

Montrons que l'on a en fait

$$(3.5) \quad P(\Pi \ominus \check{K} \neq \emptyset) = Q(K),$$

d'où résultera la relation suivante, particulièrement utile pour la suite de cette étude:

$$(3.6) \quad E(X(\Pi \ominus \check{K})) = Q(K) E(X(\Pi)).$$

En effet, après l'énoncé de l'invariance conditionnelle, on a déjà  $P(\Pi \ominus \check{K} \neq \emptyset) = E[V(\Pi \ominus \check{K})]/E[V(\Pi)]$ , où  $V$  désigne le volume. D'autre part, désignons par  $A$  le réseau poissonien, et par  $U_K(x)$  l'indicatrice de l'ensemble  $A^c \ominus \check{K}$  (réunion des érodés par  $K$  des polyèdres du réseau). Pour tout point  $x \in \mathbb{R}^n$ , on a  $Q(K) = P(U_K(x) = 1) = E(U_K(x))$ . Si  $B_r$  désigne la boule de rayon  $r$ , on en déduit aussi

$$Q(K) = E \left[ \frac{1}{V(B_r)} \int_{B_r} U_K(x) dx \right].$$

Lorsque  $r$  tend vers l'infini, le théorème ergodique montre que la variable

$$\frac{1}{V(B_r)} \int_{B_r} U_K(x) dx$$

converge vers  $E[V(\Pi \ominus \check{K})]/E[V(\Pi)]$  c'est-à-dire vers  $P(\Pi \ominus \check{K} \neq \emptyset)$ . La Relation (3.5) en résulte bien.

Nous allons consacrer le reste de cette étude à quelques applications de la propriété d'invariance conditionnelle.

#### 4. APPLICATIONS

##### 4.1 Relation entre la loi du volume $V$ et l'espérance conditionnelle de la surface $S$

Soit  $\Pi$  le polyèdre poissonien de  $\mathbb{R}^n$  (point de vue de la loi en nombre) associé à une mesure symétrique et positive  $\lambda$  donnée sur la sphère unité. Nous supposons essentiellement que  $\Pi$  est p.s. borné donc que le support de  $\lambda$  sur la sphère unité de  $\mathbb{R}^n$  n'est pas contenu dans un sous-vectoriel strict de  $\mathbb{R}^n$ . Selon les notations de Hadwiger [4], nous désignerons par  $W_k$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ) les fonctionnelles de Minkowski (Quermassintégrale) définies sur l'espace  $C(\mathcal{K}')$  des convexes compacts non vides. Comme ces fonctionnelles sont continues sur  $C(\mathcal{K}')$  et que l'adhérence  $\bar{\Pi}_0$  de  $\Pi_0$  appartient p.s. à  $C(\mathcal{K}')$ , les  $W_k(\Pi_0)$  sont des variables aléatoires, et le théorème ergodique leur associe les variables aléatoires  $W_k(\Pi)$ . Nous nous intéresserons surtout aux deux fonctionnelles  $W_0$  et  $W_1$ , donc au volume  $V = W_0(\Pi)$  et à la sur-



face  $S = nW_1(\Pi)$  du polyèdre poissonien, dont nous allons voir qu'elles admettent des espérances finies.

Désignons par  $B_r$  la boule de rayon  $r$  et de centre 0, et par  $V(r) = V(\Pi \ominus B_r)$  la variable aléatoire égale au volume de l'érodé de  $\Pi$  par  $B_r$ . Les événements  $\{V(r) = 0\}$  et  $\{\Pi \ominus B_r = \emptyset\}$  sont p.s. identiques et admettent la probabilité

$$Q(B_r) = e^{-ar} \quad \left( a = \psi(B_1) = \int \lambda(du) \right).$$

Si  $f$  est une fonction  $\leq 0$  mesurable sur  $R_+$  et nulle en  $x = 0$ , il résulte alors de l'expression (3.6) de la propriété d'invariance conditionnelle que l'on a

$$E[f(V(r))] = e^{-ar} E[f(V)].$$

Avec  $f(x) = e^{-\mu x} - 1$  ( $\mu \geq 0$ ), on voit que les transformées de Laplace  $\Phi(\mu)$  et  $\Phi_r(\mu)$  de  $V$  et  $V(r)$  vérifient la relation

$$\Phi_r(\mu) = 1 - e^{-ar} + e^{-ar} \Phi(\mu).$$

Or  $V(r)$  est p.s. dérivable à droite, et cette dérivée  $V'(r)$  vérifie p.s.  $V'(0) = -S$  puisque  $\Pi$  est p.s. convexe. La relation précédente entraîne donc

$$(4.1) \quad E(S e^{-\mu V}) = a \frac{1 - \Phi(\mu)}{\mu}.$$

Désignons alors par  $h(V) = E(S | V)$  l'espérance conditionnelle de  $S$  relativement à  $V$ , et par  $F(dV)$  la loi du volume. Dans la Relation (4.1), figure à gauche la transformée de la mesure  $h(V)F(dV)$ , à droite celle de la fonction  $a[1 - F(V)]$ . Par suite, la loi du volume admet une densité  $f(V)$  qui vérifie la relation

$$f(V)h(V) = a[1 - F(V)].$$

On en tire aussitôt l'expression de la loi du volume  $V$  en fonction de l'espérance conditionnelle  $h(V)$  de la surface.

$$(4.2) \quad 1 - F(V) = \exp \left\{ -a \int_0^V \frac{dv}{h(v)} \right\} \quad (h(V) = E(S | V)).$$

Ainsi,  $a/h(V) = a/E(S | V)$  est la "densité de mort" associée à la loi du volume, autrement dit  $a dx/h(x)$  est la probabilité conditionnelle d'avoir  $V \in (x, x + dx)$  lorsque  $V \geq x$ .

On note que cette Relation (4.2) est valable pour tous les polyèdres poissoniens stationnaires (mesure symétrique  $\lambda$  quelconque sur la sphère unité) Elle généralise certains résultats de P. I. Richards (cités dans Miles [10], p. 904).

## 4.2 Granulométries des polyèdres poissoniens selon les boules

On se reportera à Matheron [8] pour la définition axiomatique la plus

générale des granulométries, et nous nous limiterons ici à la granulométrie d'un ouvert aléatoire  $A$  selon un *compact convexe*  $B$ , qui est la plus simple des granulométries possibles (Matheron [6] et [7], Delfiner [3]). Nous avons déjà défini au Paragraphe (1.4) l'érode  $A \ominus \check{B}$  de  $A$  par  $B$  et l'ouverture

$$A_B = (A \ominus \check{B}) \oplus B$$

de  $A$  selon  $B$ . On montre facilement que  $A_B$  est la réunion des translatés de  $B$  inclus dans  $A$ . Si  $B$  est un compact convexe non vide, la famille  $A_{\mu B}$  constituée des ouvertures de  $A$  selon les homothétiques  $\mu B$  de  $B$  ( $\mu \geq 0$ ) est décroissante en  $\mu$ . Pour qu'un point  $x$  appartienne à  $A_{\mu B}$ , il faut et il suffit qu'il existe un translaté de  $\mu B$  contenant  $x$  et inclus dans  $A$ . Nous désignerons par  $G_B(\mu; x)$  la probabilité de cet événement, prise conditionnellement pour  $x \in A$ , soit

$$G_B(\mu; x) = P(x \in A_{\mu B} \mid x \in A).$$

Si l'ensemble aléatoire  $A$  est stationnaire, cette fonction  $G_B$  ne dépend pas du point  $x$ .

La fonction  $G_B(\mu; x)$  possède une signification granulométrique que nous allons mettre en évidence en résumant [7]. Si l'on pose

$$\Lambda(x) = \sup_{\mu > 0} \{ \mu : x \in A_{\mu B} \}$$

et  $\Lambda(x) = 0$  si  $A_{\mu B} = \emptyset$ ,  $\Lambda(x)$  est une variable aléatoire qui fixe la dimension maximale des homothétiques de  $B$  contenus dans  $A$  et contenant le point  $x$ . Autrement dit,  $\Lambda(x)$  donne une mesure de la taille de l'ensemble  $A$  en tant que mesurée au point  $x$  selon l'étalon  $B$ . On montre alors que la fonction  $G_B$  se relie à la loi conditionnelle de  $\Lambda(x)$  pour  $\Lambda(x) \neq 0$  par la relation

$$G_B(\mu; x) = \frac{P[\Lambda(x) \leq \mu]}{P[\Lambda(x) \neq 0]}.$$

Ainsi, la fonction  $G_B$  a bien la signification d'une granulométrie. Nous allons maintenant calculer explicitement cette fonction dans le cas de polyèdres poissoniens.

Soit  $A$  un réseau d'hyperplans poissoniens stationnaires dans  $\mathbf{R}^n$ , et  $\lambda(du)$  la mesure symétrique sur la sphère unité qui fixe la loi de  $A$ . Nous allons établir l'expression de la granulométrie  $G_B(\mu)$  de  $A^c$  selon les homothétiques de la *boule*  $B$  de rayon unité dans  $\mathbf{R}^n$ . Il s'agit donc ici de la granulométrie du polyèdre poissonien  $\Pi_0$  considéré selon le point de vue de la loi en *volume* (qui a seul, ici, une signification expérimentale possible). Nous devons calculer l'expression

$$1 - G_B(\mu) = P(0 \in (\Pi_0 \ominus \mu B) \oplus \mu B).$$

D'après le théorème ergodique de Miles, cette probabilité se déduit de la loi en nombre des polyèdres  $\Pi$  selon la formule

$$1 - G_B(\mu) = \frac{E[V(\Pi \ominus \mu B)]}{E[V(\Pi)]}.$$

Mais, d'après l'invariance conditionnelle, l'érodé  $\Pi \ominus \mu B$  a même loi conditionnelle que  $\Pi$  lui-même s'il n'est pas vide, ce qui a lieu avec la probabilité  $Q(B) = \exp\{\mu\psi(B)\}$ ,  $\psi(B) = \int \lambda(du)$ . On en déduit aussitôt

$$1 - G_B(\mu) = \frac{E[V(\Pi \oplus \mu B)]}{E[V(\Pi)]} e^{-\mu\psi(B)}.$$

Mais, d'après la formule de Steiner, on a aussi

$$V(\Pi \ominus \mu B) = \sum_{k=0}^n C_n^k W_k(\Pi) \mu^k,$$

les variables aléatoires  $W_k(\Pi)$  désignant les valeurs pour  $\Pi$  des fonctionnelles de Minkowski. D'où l'expression cherchée de la granulométrie

$$(4.3) \quad 1 - G_B(\mu) = \frac{\sum_{k=0}^n C_n^k E(W_k) \mu^k e^{-\mu\psi(B)}}{E(W_0)}.$$

Cette loi est toujours une *exponentielle polynôme* de degré  $n$  égal au nombre des dimensions de l'espace. Pour  $n = 1$ , on trouve en particulier pour les traversées linéaires une *loi gamma* de densité  $a^2 \mu e^{-a\mu}$ . Il s'agit de la loi ou "chacune" des traversées est comptée pour un poids proportionnel à sa longueur. La loi en nombre correspondante est évidemment la loi exponentielle de densité  $a e^{-ax}$  ( $a = \psi(B)$ ).

*Exemple.* Considérons le cas des polyèdres poissoniens *isotropes*, c'est-à-dire le cas où la mesure  $\lambda$  sur la sphère unité est invariante pour les rotations. Nous désignerons, suivant l'usage, par

$$\omega_n = \frac{\pi^{\frac{1}{2}n}}{\Gamma(1 + \frac{1}{2}n)}$$

le volume de la boule unité dans  $\mathbf{R}^n$ , et nous achèverons de déterminer la mesure  $\lambda$  (unique à un facteur constant près) en nous donnant le paramètre  $\lambda_n > 0$  défini par

$$(4.4) \quad \lambda_n = \frac{1}{n \omega_n} \int \lambda(du)$$

( $n \omega_n$  est la surface de la sphère unité).

Pour  $K \in C_0(\mathcal{K})$ , on a alors

$$\int \lambda(du) r_K(u) = \lambda_n N(K) = n \lambda_n W_{n-1}(K).$$

$N(K) = n W_{n-1}(K)$  est la fonctionnelle bien connue en géométrie intégrale sous le nom de *norme* (pour  $n = 2$ ,  $N$  est le périmètre; pour  $n = 3$ ,  $N$  généralise l'intégrale de la courbure moyenne). Ainsi la fonctionnelle  $Q$  du polyèdre poissonien  $\Pi_0$  contenant 0 (loi en volume) est définie par

$$(4.5) \quad Q(K) = e^{-\lambda_n N(K)}, (K \in C_0(\mathcal{K})).$$

Ce réseau isotrope d'hyperplans poissoniens de  $\mathbf{R}^n$  induit évidemment sur chaque variété linéaire à  $k$  dimensions ( $0 < k < n$ ) un réseau isotrope d'hyperplans poissoniens de  $\mathbf{R}^k$ . Soit  $\lambda_k$  le paramètre (4.4) caractérisant ce schéma induit. De (4.5) et des formules de la géométrie intégrale exprimant la norme dans  $\mathbf{R}^n$  d'un convexe compact de  $\mathbf{R}^k$  (voir aussi Miles [13]), on déduit aisément les formules de transformations

$$\lambda_k \omega_{k-1} = \lambda_n \omega_{n-1}.$$

Dans ce qui suit, il sera souvent commode de désigner par  $\lambda = \lambda_2$  le paramètre du schéma induit dans  $\mathbf{R}^2$ . La loi précédente s'écrit alors

$$\lambda_k = \frac{2\lambda}{\omega_{k-1}}, \quad (1 \leq k \leq n).$$

Avec cette notation  $\lambda = \lambda_2$ , des raisonnements simples de géométrie intégrale conduisent—compte tenu du théorème ergodique habituel—à l'expression suivante pour les espérances des  $W_k(\Pi)$  du polyèdre  $\Pi$  (en nombre) de l'espace  $\mathbf{R}^n$  (voir aussi Miles [12]):

$$(4.6) \quad E(W_k) = \frac{\omega_k}{\omega_{k-1}} \lambda^{k-n}.$$

En reportant ce résultat dans (4.3), on spécifie ainsi complètement la granulométrie de  $\Pi_0$  selon les boules des espaces à 1, 2, ...  $n$  dimensions. En particulier, les granulométries selon les *disques* (boules de  $\mathbf{R}^2$ ) et les *boules de*  $\mathbf{R}^3$  sont, respectivement (avec  $\lambda = \lambda_2 = \frac{1}{2}\pi\lambda_3$ )

$$1 - G_2(r) = (1 + 2\lambda\pi r + \pi^2\lambda^2 r^2)e^{-2\lambda\pi r},$$

$$1 - G_3(r) = (1 + 8\lambda r + \frac{2}{3}\pi^2\lambda^2 r^2 + \frac{16}{9}\pi^2\lambda^3 r^3)e^{-8\lambda r}.$$

### 4.3 Les premiers moments du volume $V$ , du contour apparent $V'$ et de la surface $S$

Considérons à nouveau le réseau *isotrope*  $A$  d'hyperplans poissonniens de  $\mathbf{R}^n$  défini par le paramètre  $\lambda = \lambda_2$  du réseau induit dans  $\mathbf{R}^2$ , et soient  $x$  et  $x + h$  deux points de  $\mathbf{R}^n$ . D'après (4.5), la probabilité d'avoir  $x$  et  $x + h$

dans  $\Pi_0$  (point de vue de la loi en *volume*) est  $e^{-2\lambda\mathcal{L}}$  ou  $2\mathcal{L} = |x| + |x+h| + |h|$  est le *périmètre* du triangle défini par les trois points 0,  $x$  et  $x+h$ , soit

$$(4.7) \quad Q(x, x+h) = e^{-\lambda|x| - \lambda|x+h| - \lambda|h|}.$$

Mais, si l'on désigne par  $k(x)$  l'indicatrice (aléatoire) de  $\Pi_0$ , on a aussi

$$Q(x, x+h) = E[k(x)k(x+h)].$$

Désignons par  $g(h)$  l'intégrale dans  $\mathbf{R}^n$  de cette expression

$$g(h) = \int_{\mathbf{R}^n} Q(x, x+h) dx,$$

$g(h)$  est l'espérance (pour la loi en volume) du volume de l'intersection de  $\Pi_0$  et de son translaté par  $h$ . Or cette intégrale représente, au facteur  $e^{-\lambda|h|}$  près, le produit de convolution de la fonction  $e^{-\lambda|x|}$  par elle-même. Cette fonction exponentielle admet dans  $\mathbf{R}^n$  la transformée de Fourier

$$\mathcal{F}_n e^{-\lambda r} = \frac{1}{\lambda^n} 2^n \pi^{\frac{1}{2}(n-1)} \Gamma(\frac{1}{2}(n+1)) \left[ \left( 1 + \frac{4\pi^2 \rho^2}{\lambda^2} \right)^{\frac{1}{2}(n+1)} \right]^{-1}$$

( $\rho = (u_1^2 + \dots + u_n^2)^{\frac{1}{2}}$  désigne le rayon vecteur de l'espace  $\mathbf{R}^n$  conjugué). Le produit de convolution  $e^{-\lambda r} * e^{-\lambda r}$  admet donc la transformée

$$(\mathcal{F}_n e^{-\lambda r})^2 = \frac{1}{\lambda^{2n}} 2^{2n} \pi^{n-1} [\Gamma(\frac{1}{2}(n+1))]^2 \left[ \left( 1 + \frac{4\pi^2 \rho^2}{\lambda^2} \right)^{n+1} \right]^{-1}.$$

Il suffit d'effectuer la transformation inverse pour obtenir

$$e^{-\lambda r} * e^{-\lambda r} = \frac{1}{\lambda^n} 2^{\frac{1}{2}n} \pi^{\frac{1}{2}n-1} \frac{[\Gamma(\frac{1}{2}(n+1))]^2}{\Gamma(n+1)} (\lambda r)^{1+\frac{1}{2}n} K_{1+\frac{1}{2}n}(\lambda r).$$

Dans cette expression,  $K_{1+\frac{1}{2}n}$  représente la fonction de Bessel modifiée de seconde espèce d'indice  $1 + \frac{1}{2}n$ , et  $r = |h|$  représente le rayon vecteur de  $\mathbf{R}^n$ . On en déduit

$$(4.8) \quad g(r) = \frac{1}{\lambda^n} \frac{2^{\frac{1}{2}n} \pi^{\frac{1}{2}n-1}}{n!} [\Gamma(\frac{1}{2}(n+1))]^2 e^{-\lambda r} (\lambda r)^{1+\frac{1}{2}n} K_{1+\frac{1}{2}n}(\lambda r).$$

Pour  $r = 0$ , on obtient l'espérance (en volume) de  $V(\Pi_0)$ . En intégrant en  $h$  (dans  $\mathbf{R}^n$ ), on obtient de même l'espérance du carré de ce volume. L'intégrale de  $g(h)$  dans  $\mathbf{R}^n$  est d'ailleurs égale à la valeur en  $P$  du produit de convolution  $e^{-\lambda|x|} * e^{-\lambda|x|} * e^{-\lambda|x|}$ , et se calcule de manière analogue à l'aide d'une transformation de Fourier. On trouve ainsi

$$(4.9) \quad \begin{aligned} E_0(V) &= 2^{-n} \omega_n n! \lambda^{-n} \\ E_0(V^2) &= 2^{2n} \pi^{n-\frac{3}{2}} \frac{\Gamma(n + \frac{3}{2}) [\Gamma(\frac{1}{2}(n+1))]^3}{\Gamma(\frac{3}{2}(n+1))} \lambda^{-2n}. \end{aligned}$$

L'indice 0 dans  $E_0$  rappelle qu'il s'agit d'espérances relatives à la loi *en volume*. D'après le théorème ergodique, ces espérances  $E_0$  se déduisent des espérances  $E$  relatives à la loi *en nombre* selon la règle

$$E_0(V^k) = E(V^{k+1})/E(V).$$

On a déjà calculé  $E(V) = E(W_0) = 1/\omega_n \lambda^n$ . Les Formules (4.9) donnent donc les *trois premiers moments* de la loi (en nombre) du volume  $V$ . On trouve ainsi dans  $R^n$  (avec toujours  $\lambda = \lambda_2 = \omega_{n-1} \lambda_n / 2$ )

$$\begin{aligned} E(V) &= \frac{\Gamma(1 + \frac{1}{2}n)}{\pi^{\frac{1}{2}n}} \frac{1}{\lambda^n}, \\ E(V^2) &= \frac{n!}{2^n} \frac{1}{\lambda^{2n}}, \\ E(V^3) &= 2^{2n} \pi^{\frac{1}{2}(n-3)} \frac{\Gamma(1 + \frac{1}{2}n) \Gamma(n + \frac{3}{2}) [\Gamma(\frac{1}{2}(n+1))]^3}{\Gamma(\frac{3}{2}(n+1))} \frac{1}{\lambda^{3n}}. \end{aligned}$$

Les expressions des moments d'ordre 1 et 2 étaient déjà connues (Miles [10], [12]), mais non, semble-t-il, celle du moment d'ordre 3 pour  $n \geq 4$ . Dans l'espace à deux dimensions, ces formules donnent

$$E(V) = \frac{1}{\pi \lambda^2}, \quad E(V^2) = \frac{1}{2\lambda^4}, \quad E(V^3) = \frac{4}{7} \frac{\pi}{\lambda^6}$$

et dans  $R^3$  (avec  $\lambda = \lambda_2 = \pi \lambda_3 / 2$ )

$$E(V) = \frac{3}{4\pi} \frac{1}{\lambda^3}, \quad E(V^2) = \frac{3}{4} \frac{1}{\lambda^6}, \quad E(V^3) = \frac{21}{8} \frac{\pi}{\lambda^9}.$$

Désignons maintenant par  $V'(\Pi) = V'$  le volume (à  $n-1$  dimension) du *contour apparent* du polyèdre  $\Pi$ , c'est-à-dire de la projection de  $\Pi$  sur un hyperplan de  $R^n$ . Le point de vue est ici, obligatoirement, celui de la loi *en nombre*. Nous allons calculer les *deux premiers moments* de la loi (en nombre) de  $V'$ , en nous appuyant sur l'invariance conditionnelle de  $\Pi$ .

Du point de vue de la loi en nombre, le  $g(r)$  calculé en (4.8) représente la quantité

$$g(r) = E(V V(r))/E(V),$$

où  $V(r) = V(\Pi \cap \Pi_r)$  représente le volume de l'intersection du polyèdre  $\Pi$  par son translaté  $\Pi_r$  dans une translation de module  $r$  et de direction  $u_0$ . Comme  $\Pi$  est convexe,  $\Pi \cap \Pi_r$  est aussi l'érodé de  $\Pi$  par le vecteur  $ru_0$ .

Soit  $\rho$  un réel  $\geq 0$ , et  $\Pi_{r+\rho}$  le translaté de  $\Pi$  dans la translation de module  $r + \rho$  et de même direction  $u_0$ . L'expression (3.6) de l'invariance conditionnelle de  $\Pi$  pour les érosions montre que l'on a ici, avec  $Q(K) = e^{-2\lambda r}$ :

$$(4.10) \quad E[V(r) V(r + \rho)] = e^{-2\lambda r} E[V V(\rho)] = e^{-2\lambda r} E(V) g(\rho).$$

Comme  $\Pi$  est p.s. ouvert et convexe,  $V(r)$  est dérivable à droite, et la valeur en  $r = 0$  de cette dérivée  $V'(r)$  est  $V'(0) = -V'$ ,  $V'$  désignant le  $n-1$ -volume du contour apparent dans la direction  $u_0$ . Dérivons (4.10) une fois en  $r$  et une fois en  $\rho$  avant de faire  $\rho = 0$ . Il vient

$$(4.11) \quad E(V'^2) + E[V V''(0)] = -2\lambda E[V V'(0)].$$

Or de l'expression (4.8) de  $g(r)$ , on déduit (pour  $n > 1$ )

$$E[V V(r)] = E(V^2) [1 - \lambda r + (n-1)/2n \lambda^2 r^2 - \dots].$$

On a déjà calculé  $E(V^2) = n!/2^n \lambda^{2n}$ . On déduit ainsi de cette relation

$$E[V V'(0)] = -\lambda E(V^2) = -n!/2^n \lambda^{2n-1},$$

$$E[V V''(0)] = \frac{n-1}{n} \lambda^2 E(V^2) = \frac{(n-1)(n-1)!}{2^n} \frac{1}{\lambda^{2n-2}},$$

puis, en portant ces résultats dans (4.11)

$$(4.12) \quad E(V'^2) = \frac{n+1}{n} \lambda^2 E(V^2) = \frac{(n+1)(n-1)!}{2^n} \frac{1}{\lambda^{2n-2}}.$$

Le calcul de  $E(V')$  s'effectue de même à partir de  $E[V(r)] = e^{-2\lambda r} E(V)$ , relation qui découle encore de l'expression (3.6) de l'invariance conditionnelle, et donne

$$E(V') = 2\lambda E(V) = \frac{2}{\omega_n} \frac{1}{\lambda^{n-1}}.$$

Tels sont les deux premiers moments (en nombre) de la loi du contour apparent. Dans le plan  $\mathbf{R}^2$ , on trouve explicitement

$$E(V') = \frac{2}{\lambda\pi}, \quad E(V'^2) = \frac{3}{4} \frac{1}{\lambda^2}, \quad E(V V') = \frac{1}{2\lambda^3},$$

et dans  $\mathbf{R}^3$

$$E(V') = \frac{3}{2\pi} \frac{1}{\lambda^2}, \quad E(V'^2) = \frac{1}{\lambda^4}, \quad E(V V') = \frac{3}{4} \frac{1}{\lambda^5}.$$

Les expressions de  $E(V')$  et  $E(V V')$  étaient déjà connues, mais non semble-t-il celle de  $E(V'^2)$ , Relation (4.12).

Désignons maintenant par  $S_n$  la surface du polyèdre poissonien de  $\mathbf{R}^n$ ,

c'est-à-dire le  $(n-1)$ -volume de sa frontière. D'après la géométrie intégrale,  $S_n$  se relie à l'intégrale du contour apparent  $V'(u)$  dans la direction  $u$  selon la formule suivante, où l'intégration est étendue à la sphère unité

$$(4.13) \quad S_n = \frac{1}{\omega_{n-1}} \int V'(u) du.$$

On en déduit aussitôt l'espérance de  $S_n$  pour la loi en nombre

$$E(S_n) = \frac{n \omega_n}{\omega_{n-1}} E(V') = \frac{2n}{\omega_{n-1}} \frac{1}{\lambda^{n-1}},$$

et pour la loi en mesure

$$E_0(S_n) = \frac{n \omega_n}{\omega_{n-1}} E_0(V') = \frac{n \omega_n}{\omega_{n-1}} \frac{E(VV')}{E(V)} = \frac{n!}{2^n} \frac{(\omega_n)^2}{\omega_{n-1}} \frac{1}{\lambda^{n-1}}.$$

De l'espérance en mesure  $E_0(S_n)$ , il est possible de déduire le moment d'ordre deux  $E(S_n^2)$  de la loi en nombre ([9], [12]). Contentons-nous ici de noter le résultat

$$(4.14) \quad E(S_n^2) = \frac{n!}{2^{n-2}} \left( 1 + \frac{n^2}{4} \left[ \frac{\omega_n}{\omega_{n-1}} \right]^2 \right) \frac{1}{\lambda^{2n-2}}.$$

#### 4.4 Cas des polygones poissonniens isotropes

Pour terminer cette étude, nous allons donner quelques indications supplémentaires sur le cas  $n=2$ , c'est-à-dire le cas des polygones poissonniens isotropes de  $\mathbf{R}^2$ . En premier lieu, nous allons calculer explicitement la loi de probabilité du contour apparent du polygone poissonnier (en nombre) c'est-à-dire, puisque nous sommes dans  $\mathbf{R}^2$ , la loi du *diamètre apparent* de ce polygone. Cette loi admet la densité

$$(4.15) \quad f(x) = \frac{4\lambda}{\pi} (2\lambda x) K_{-1}(2\lambda x),$$

où  $K_{-1}$  désigne la fonction de Bessel modifiée de seconde espèce d'indice  $-1$ , et les moments d'ordre  $n \geq 0$  (entier ou non),

$$m_n = \frac{\Gamma(n+2)}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}(n+1))}{\Gamma(1+\frac{1}{2}n)} \frac{1}{(2\lambda)^n}.$$

Pour établir (4.15), donnons-nous un mode de construction explicite du polygone poissonnier  $\Pi$  (en nombre). Pour cela, considérons la partition du plan en polygones poissonniens réalisée par un réseau de droites poissonniennes, et plaçons-nous conditionnellement dans l'hypothèse où l'origine 0 est un sommet du réseau (ce qui nécessiterait, pour être rigoureux, un passage à la limite à partir de disques de rayons tendant vers 0 et centrés au point 0, mais nous nous contenterons ici d'une démarche heuristique). Le plan étant



rapporté à deux axes de coordonnées  $ox$  et  $oy$ , un (et p.s. un seulement) des 4 polygones admettant le point 0 comme sommet est contenu dans le demi-plan  $x \geq 0$ . On peut alors déduire du théorème ergodique que ce polygone  $\Pi$  est équivalent au polygone poissonnien pris en nombre. Sans insister sur ce point, indiquons seulement d'une manière heuristique que cela résulte du fait que le réseau poissonnien contient, "en moyenne", autant de sommets que de polygones. Désignons par  $\beta_0$  et  $\beta_1$  ( $-\pi/2 \leq \beta_0 \leq \beta_1 \leq \pi/2$ ) les angles polaires des deux arêtes du polygone  $\Pi$  issues du point 0. Il est facile de voir que la loi de ces deux variables admet la densité

$$g(\beta_0, \beta_1) = \frac{1}{\pi} \sin(\beta_1 - \beta_0) \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \beta_0 \leq \beta_1 \leq \frac{\pi}{2}\right).$$

Désignons maintenant par  $M$  le sommet (p.s. unique) de  $\Pi$  de coordonnées  $(x_0, y_0)$  telles que  $\Pi$  soit contenu dans le demi-plan  $x \leq x_0$ . Il est clair que  $x_0$  est le diamètre apparent de  $\Pi$  (dans la direction de l'axe des  $y$ ). Nous allons former la loi de  $x_0$ . Pour cela, considérons l'évènement  $\{x_0 \geq a\}$ , équivalent à:  $\{\text{la droite } x = a \text{ rencontre } \Pi\}$ . Plaçons-nous d'abord à  $\beta_0$  et  $\beta_1$  fixés. Notre évènement se réalise de l'une ou l'autre des deux manières incompatibles suivantes:

a) ou bien le point  $M_1 = (a, a \operatorname{tg} \beta_1)$  appartient à  $\Pi$ , et cela a lieu avec la probabilité  $\exp\{-2\lambda(a/\cos \beta_1)\}$ ,

b) ou bien il existe sur la droite  $x = a$  un point  $M$  d'ordonnée  $y$  ( $a \operatorname{tg} \beta_0 \leq y < a \operatorname{tg} \beta_1$ ) appartenant à  $\Pi$  tel que le point  $(a, y + dy)$  n'appartienne pas à  $\Pi$ , et cela a lieu avec la probabilité

$$\lambda a \int_{\beta_0}^{\beta_1} e^{-2\lambda a/\cos \alpha} (1 + \sin \alpha) \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha}.$$

Par conséquent, nous trouvons

$$\begin{aligned} P(x_0 \geq a) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-2\lambda a/\cos \beta_1} d\beta_1 \int_{-\pi/2}^{\beta_1} \sin(\beta_1 - \beta_0) d\beta_0 \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\beta_1 \int_{-\pi/2}^{\beta_1} \sin(\beta_1 - \beta_0) d\beta_0 \int_{\beta_0}^{\beta_1} e^{-2\lambda a/\cos \alpha} (1 + \sin \alpha) \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha}. \end{aligned}$$

Après quelques calculs élémentaires, on obtient

$$P(x_0 \geq a) = \frac{4\lambda a}{\pi} \int_0^{\pi/2} e^{-2\lambda a/\cos \alpha} \frac{d\alpha}{\cos \alpha} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} e^{-2\lambda a/\cos \alpha} d\alpha.$$

Il suffit de dériver en  $a$  pour en déduire la densité de probabilité  $f(x)$  du diamètre apparent  $x_0$ , soit

$$f(x) = \frac{8\lambda^2 x}{\pi} \int_0^{\pi/2} e^{-2\lambda x/\cos \alpha} \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha}.$$

Cette intégrale s'exprime à l'aide de la fonction de Bessel  $K_{-1}(2\lambda x)$  et l'on obtient la Relation (4.15) écrite ci-dessus ainsi que l'expression des moments  $m_n$ .

Désignons maintenant par  $S$  le périmètre du polygone poissonien, désignons par  $N$  le nombre de ses côtés, et cherchons quelques informations sur la loi de ces deux variables.

Soit  $P_n$  la probabilité d'avoir  $N = n$  pour la loi en volume.  $P_n$  ne dépend pas du paramètre  $\lambda$ . Or, on peut considérer le réseau d'hyperplans poissoniens de paramètre  $(\lambda + \mu)$  comme la réunion de deux réseaux indépendants de paramètres  $\lambda$  et  $\mu$ . La probabilité pour que le polyèdre du réseau  $(\lambda + \mu)$  contenant l'origine 0 ait  $n$  côtés appartenant tous au réseau  $\lambda$  est alors  $P_n(\lambda/(\lambda + \mu))^n$ . On peut aussi évaluer différemment cette probabilité, en écrivant d'abord que le polyèdre du réseau  $\lambda$  contenant 0 possède  $n$  côtés (probabilité  $P_n$ ), puis que ce polyèdre est disjoint du second réseau (probabilité  $E(e^{-\mu S} | n)$   $S$  désignant le périmètre de ce polyèdre). On en déduit

$$E_0(e^{-\mu S} | N) = (\lambda/(\lambda + \mu))^N.$$

La loi conditionnelle en  $N$  du périmètre  $S$  est donc une loi gamma à  $N$  degrés de liberté. On retrouve ici dans un cas simple une propriété générale établie par Miles. Si  $X$  est une caractéristique sans dimension du polyèdre  $\Pi$  (par exemple,  $X = S^2/V$ ), c'est-à-dire une caractéristique dont la loi ne dépend pas de  $\lambda$ , le même raisonnement que ci-dessus donne

$$E_0(e^{-\mu S} | N, X) = (\lambda/(\lambda + \mu))^N.$$

Par conséquent, à  $N$  fixé, le périmètre est conditionnellement indépendant de toutes les caractéristiques sans dimension.

### Bibliographie

- [1] BOURBAKI, N. (1965) *Eléments de Mathématiques*, Fasc. XIII, *Intégration*. Hermann, Paris.
- [2] CHOQUET, G. (1953–54) Theory of capacities. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* V, 131–295.
- [3] DELFINER, P. (1971) A generalization of the concept of size. *3rd Int. Cong. for Stereology, Berne*. (A paraître).
- [4] HADWIGER, H. (1957) *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*. Springer, Berlin.
- [5] KENDALL, M. G. ET MORAN, P. A. P. (1963) *Geometrical Probability*. Hafner, New York.
- [6] MATHERON, G. (1967) *Eléments pour une Théorie des Milieux Poreux*. Masson, Paris.
- [7] MATHERON, G. (1969) *Théorie des Ensembles Aléatoires*. Cahiers du Centre de Morphologie Mathématique, Fontainebleau. Fasc. 4.
- [8] MATHERON, G. (1971) Random sets theory, and its applications to stereology. *3rd Int. Cong. for Stereology, Berne*. (A paraître).
- [9] MATHERON, G. (1971) Les polyèdres poissoniens isotropes. *3ème Symposium Européen sur la Fragmentation, Cannes*. (A paraître).

- [10] MILES, R. E. (1964) Random polygons determined by random lines in a plane. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **52**, 901-907; II 1157-1160.
- [11] MILES, R. E. (1969) Poisson flats in euclidean space. *Adv. Appl. Prob.* **1**, 211-237.
- [12] MILES, R. E. (1970) A synopsis of Poisson flats in euclidean spaces. *Izv. Akad. Nauk Armjan. SSR* **3**, 263-285.
- [13] MILES, R. E. (1971) Poisson flats in euclidean space, Part II. *Adv. Appl. Prob.* **3**, 1-43.
- [14] NEVEU, J., (1964) *Bases Mathématiques du Calcul des Probabilités*. Masson, Paris.
- [15] SERRA, J. (1967) But et réalisation de l'analyseur de textures. *Revue de l'Industrie Minérale* **49**, 9-33.
- [16] SERRA, J. (1969) Introduction à la Morphologie Mathématique. Cahiers du Centre de Morphologie Mathématique, Fontainebleau Fasc. 3.

