D-847

Adv. Appl. Prob. **6**, 563–579 (1974)
Printed in Israel

HYPERPLANS POISSONIENS ET COMPACTS DE STEINER

G. MATHERON, *Centre de Morphologie Mathématique, Fontainebleau*

Abstract

A compact convex set in R^N is Steiner if it is a finite Minkowski sum of line segments, or a limit of such finite sums, and then satisfies an extension of the Steiner formula. With each Poisson hyperplane stationary process A is uniquely associated a Steiner set M, and for any linear variety V, the Steiner set associated with $A \cap V$ is the projection of M on V. The density of the order k network A_k (i.e., the set of the intersections of k hyperplanes belonging to A) is linked with simple geometrical properties of M. In the isotropic case, the expression of the covariance measures associated with A_k is derived and compared with the analogous results obtained for $(N-k)$-dimensional Poisson flats.

POISSON FLATS; STEINER COMPACT SETS; STEINER FORMULA; CONVARIANCE MEASURE

0. Introduction

Dans l'espace euclidien R^N, on dit qu'un compact convexe symétrique par rapport à l'origine est un compact de Steiner s'il est somme de Minkowski finie de segments de droites, ou limite de telles sommes finies. Dans [4], j'ai présenté un théorème d'unicité concernant les représentations intégrales des fonctions d'appui de ces compacts convexes. Les compacts de Steiner possèdent des propriétés intéressantes du point de vue de la géométrie intégrale, et vérifient notamment une version généralisée de la formule classique de Steiner (Paragraphe 1 ci-dessous). Leur intérêt principal, du point de vue probabiliste, vient de ce qu'ils fournissent une représentation géométrique des réseaux stationnaires d'hyperplans poissoniens. A tout réseau poissonien A d'hyperplans est, en effet, associé bi-univoquement un compact de Steiner M, et, si V est une variété linéaire de dimension inférieure à N, le compact de Steiner associé au réseau $A \cap V$ induit sur V est la projection de M sur V. D'autre part, si A_k est le réseau d'ordre k associé à A (constitué des intersections k à k des hyperplans de A), la densité de $(N-k)$-volume associé à A_k est proportionnelle à la fonctionnelle de Minkowski $W_{N-k}(M)$ (Paragraphe 2). Dans le cas où le réseau A est isotrope, il est même possible de former l'expression explicite de la mesure-covariance associée au réseau A_k d'ordre k (Paragraphes 3 et 4). L'article se termine par une com-

Reçu le 13 avril 1973.

paraison avec les propriétés analogues, mais plus simples, des variétés poissoniennes de dimension $< N-1$ (Paragraphe 5).

1. La classe de Steiner

Rappelons d'abord quelques notations et définitions. Dans l'espace euclidien $E = R^N$ à N dimensions, on désignera par $\mathscr{S}_k$ ($k = 0, 1, \cdots, N$) l'ensemble des sous-espaces de dimension k dans E. En particulier, $\mathscr{S}_0 = \{0\}$ et $\mathscr{S}_N = \{E\}$ sont réduits à un seul élément. On sait que $\mathscr{S}_k$ est un sous-espace compact de l'espace $\mathscr{F}$ des fermés de E, [3], et qu'il existe une et une seule probabilité ϖ_k sur $\mathscr{S}_k$ invariante par rotation, [1]. La fonctionnelle de Minkowski W_{N-k} d'indice $N-k$, [2] est définie sur l'espace $C(\mathscr{K})$ des compacts convexes de E par la relation

$$(1.1) \qquad W_{N-k}(K) = (\omega_N/\omega_k) \int_{\mathscr{S}_k} \lambda_k(\Pi_S K)\varpi_k(dS) \qquad (K \in C(\mathscr{K})),$$

où $\omega_k = \pi^{k/2}/\Gamma(1+k/2)$ est le volume de la boule unité de R^k, λ_k la mesure de Lebesgue sur R^k (ou sur $S \in \mathscr{S}_k$ identifié à R^k) et Π_S le projecteur de S. En particulier, $W_0(K)$ est le volume de K et $W_n(K) = \omega_N$.

Pour $S_p \in \mathscr{S}_p$ et $S_q \in \mathscr{S}_q$, on désignera par $|S_p, S_q|$ la valeur absolue du déterminant de la restriction à S_p du projecteur Π_{S_q}, c'est-à-dire la constante $\geqq 0$ telle que l'on ait

$$(1.2) \qquad \lambda_p(\Pi_S K) = |S_p, S_q| \lambda_p(K)$$

pour tout compact $K \subset S_p$. En particulier, on a $0 \leqq |S_p, S_q| \leqq 1$, et $|S_p, S_q| = 0$ si et seulement si $\dim \Pi_{S_q} S_p < p$.

De même, pour $L_1, L_2, \cdots, L_k \in \mathscr{S}_1$, on désignera par $V(L_1, \cdots, L_k)$ le k-volume du parallèlépipède construit sur k vecteurs unitaires (d'orientations quelconques) parallèles respectivement à $L_1, L_2, \cdots, L_k$. En particulier, en désignant par $S^\perp$ l'orthogonal d'un sous-espace S et par $\oplus$ l'addition de Minkowski:

$$V(L_1, \cdots, L_k) = |L_2, L_1^\perp| \times |L_3, L_1^\perp \cap L_2^\perp| \times \cdots \times |L_k, L_1^\perp \cap \cdots \cap L_{k-1}^\perp|$$

$$(1.3) \quad V(L_1, \cdots, L_k, L_{k+1}, \cdots, L_{k+k'}) = V(L_1, \cdots, L_k)V(L_{k+1}, \cdots, L_{k+k'}) |L_1 \oplus \cdots \oplus L_k, L_{k+1}^\perp \cap \cdots \cap L_{k+k'}^\perp|.$$

On désigne par $C_0(\mathscr{K})$ la classe des compacts convexes contenant l'origine. Tout $K \in C_0(\mathscr{K})$ est caractérisé par sa fonction d'appui r_K, et l'application $K \to r_K$ est un homéomorphisme de $C_0(\mathscr{K})$ sur un cone convexe $\mathscr{R}$ à base compacte dans l'espace des fonctions continues sur la sphère unité de R^N. De plus, cet homéomorphisme est également un isomorphisme de $C_0(\mathscr{K})$ muni de $\oplus$ et des homothéties positives sur $\mathscr{R}$ muni de l'addition ordinaire et de la multiplication par les constantes positives (voir, par exemple, [3]). Dans ce qui suit, la classe $C_s(\mathscr{K})$ des *compacts convexes symétriques* par rapport à l'origine jouera un grand rôle. Plutôt que par sa fonction d'appui, nous caractériserons un élément $K \in C_s(\mathscr{K})$ par la fonction b_K: $L \to b_K(L)$ continue sur $\mathscr{S}_1$ définie par $b_K(L) = \lambda_1(\Pi_L K)$ ($b_K(L)$ est la *largeur de K dans la direction* $L \in \mathscr{S}_1$). L'image $\mathscr{R}_s$ de $C_s(\mathscr{K})$ par l'application $K \to b_K$ est donc un cône convexe à base compacte dans l'espace $\mathscr{C}(\mathscr{S}_1)$ des fonctions continues sur $\mathscr{S}_1$ (muni de la convergence uniforme). Enfin, nous désignerons par $C_1(\mathscr{K})$ la classe des compacts convexes symétriques par rapport à l'origine qui sont somme de Minkowski finie de segments de droites, ou limite dans $C_s(\mathscr{K})$ de telles sommes finies. Nous dirons que $C_1(\mathscr{K})$ est la *classe de Steiner*, et nous désignerons par $\mathscr{R}_1$ son image dans $\mathscr{R}_s$ par l'homéomorphisme $K \to b_K$ de $C_s(\mathscr{K})$ sur $\mathscr{R}_s$. D'après [4], une fonction $\phi \in \mathscr{C}(\mathscr{S}_1)$ est dans $\mathscr{R}_1$ si et seulement si elle admet une représentation de la forme

$$(1.4) \qquad \phi(L) = \int_{\mathscr{S}_1} |L, L'| \, G(dL') \qquad (L \in \mathscr{S}_1)$$

pour une mesure $G \geqq 0$ sur $\mathscr{S}_1$ nécessairement unique, et l'application $G \to \phi$ définie par (1.4) est un homéomorphisme de l'espace des mesures $\geqq 0$ sur $\mathscr{S}_1$ muni de la topologie vague sur le cône convexe $\mathscr{R}_1$. De plus, $\mathscr{R}_1$ est une partie totale de $\mathscr{C}(\mathscr{S}_1)$.

En vue d'expliciter certaines propriétés de la classe de Steiner, introduisons les notations suivantes: si $G = G_1$ est une mesure $\geqq 0$ sur $\mathscr{S}_1$, *on désignera par G_k ($k = 1, 2, \cdots, N$) la mesure sur $\mathscr{S}_k$ définie comme l'image de la mesure*

$$\mu(dL_1, \cdots, dL_k) = (1/k!) \, V(L_1, \cdots, L_k) \, G(dL_1) \cdots G(dL_k)$$

sur $(\mathscr{S}_1)^k$ *par l'application* $(L_1, \cdots, L_k) \to L_1 \oplus \cdots \oplus L_k$ (définie μ-presque partout) de $(\mathscr{S}_1)^k$ dans $\mathscr{S}_k$. Autrement dit, pour tout $f \in \mathscr{C}(\mathscr{S}_k)$, on a par définition

$$(1.5) \qquad \int_{\mathscr{S}_k} f(S) \, G_k(dS) = \int_{(\mathscr{S}_1)^k} \tilde{f}(L_1, \cdots, L_k) \, G(dL_1) \cdots G(dL_k),$$

avec $\tilde{f}(L_1, \cdots, L_k) = (1/k!) V(L_1, \cdots, L_k) f(L_1 \oplus \cdots \oplus L_k)$ si $L_1 \oplus \cdots \oplus L_k \in \mathscr{S}_k$ et $\tilde{f}(L_1, \cdots, L_k) = 0$ si $\dim(L_1 \oplus \cdots \oplus L_k) < k$. La fonction $\tilde{f}$ ainsi définie est continue sur $(\mathscr{S}_1)^k$, et on en déduit aussitôt que *l'application $G \to G_k$ est continue pour la topologie vague*. Pour $k = 0$, on définit conventionnellement la mesure G_0 sur $\mathscr{S}_0$ en posant $G_0(\{0\}) = 1$.

A tout compact de Steiner A, nous associerons la mesure (unique) $G^A = G_1^A$ sur $\mathscr{S}_1$ telle que $\lambda_1(\Pi_L A) = \int |L, L'| \, G_1^A(dL')$, et les mesures G_k^A qui se déduisent de G^A par la relation (1.5) ($k = 0, 1, \cdots, N$).

Théorème 1.1. *Pour tout compact de Steiner A, tout entier $k = 0, 1, \cdots, N$, et tout $S \in \mathscr{S}_k$, on a*

$$(1.6) \qquad \lambda_k(\Pi_S A) = \int_{\mathscr{S}_k} |\sigma, S| G_k^A(d\sigma).$$

En particulier, le volume de A est

$$\lambda_N(A) = \int_{\mathscr{S}_N} G_N^A = (1/N!) \int_{(\mathscr{S}_1)^N} V(L_1, \cdots, L_n) G_1^A(dL_1) \cdots G_1^A(dL_n).$$

En effet, considérons d'abord le cas où A est une somme finie de segments de droite, soit $G_1^A = \sum l_i \delta_{L_i}$ $(i = 1, 2, \cdots, p,\ l_i \geqq 0,\ L_i \in \mathscr{S}_1)$, δ_L désignant la mesure de Dirac en $L \in \mathscr{S}_1$. D'après (1.2) et la définition (1.5), on trouve sans peine

$$\lambda_k(\Pi_S A) = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} l_{i_1} \cdots l_{i_k} |L_{i_1} \oplus \cdots \oplus L_{i_k}, S| V(L_{i_1}, \cdots, L_{i_k})$$
$$= \int_{\mathscr{S}_k} |\sigma, S| G_k^A(d\sigma).$$

D'autre part, les applications $A \to G_1^A$, $G_1^A \to G_k^A$ et $A \to \lambda_k(\Pi_S A)$ sont continues, de sorte que (1.6) reste valable pour tout compact de Steiner.

Pour $A \in C_1(\mathscr{K})$ et tout réel ρ, on a évidemment $G_k^{\rho A} = \rho^k G_k^A$. En ce qui concerne l'addition de Minkowski, pour $A, A' \in C_1(\mathscr{K})$, la mesure $G_k^{A \oplus A'}$ vérifie pour tout $f \in \mathscr{C}(\mathscr{S}_k)$ la relation

$$(1.7) \qquad \int_{\mathscr{S}_k} f(\sigma) G_k^{A \oplus A'}(d\sigma) = \sum_{p=0}^{k} \int_{\mathscr{S}_p \times \mathscr{S}_{k-p}} |S', S^\perp| f(S' \oplus S) G_p^{A'}(dS') G_{k-p}^A(dS).$$

Cela se vérifie par un calcul élémentaire à partir de (1.3) et (1.5). Cette relation (1.7) va nous permettre de montrer que les compacts de Steiner vérifient *une version généralisée de la formule de Steiner* classique en géométrie intégrale.

Théorème 1.2. *Soit A un compact de Steiner, et K un compact convexe quelconque. Pour tout* $p = 0, 1, \cdots, N$ *et tout* $S \in \mathscr{S}_p$, *on a*

$$(1.8) \qquad \lambda_p(\Pi_S(A \oplus K)) = \sum_{k=0}^{p} \int_{\mathscr{S}_k} |\sigma, S| \lambda_{p-k}(\Pi_{S \cap \sigma^\perp} K) G_k^A(d\sigma).$$

En particulier, le volume de $A \oplus K$ *est*

$$(1.8') \qquad \lambda_N(A \oplus K) = \sum_{k=0}^{N} \int_{\mathscr{S}_k} \lambda_{N-k}(\Pi_{\sigma^\perp} K) G_k^A(d\sigma).$$

Réciproquement, si A est un compact convexe symétrique et s'il existe des mesures positives G_k^A *telles que* (1.8') *soit vérifié pour tout* $K \in C(\mathscr{K})$, *alors A est un compact de Steiner.*

Démonstration. Si A est un segment de droite, la relation (1.8) se vérifie de façon élémentaire. Compte tenu de la continuité des applications $A \to G_k^A$, (1.8) sera donc valable pour tout compact de Steiner, si nous établissons que la classe des compacts de Steiner vérifiant (1.8) est stable pour $\oplus$. Soient donc A, $A' \in C_1(\mathscr{K})$ et vérifiant (1.8), et $K \in C(\mathscr{K})$. En appliquant la relation (1.8) à A avec $A' \oplus K$ au lieu de K, et en développant $\lambda_{p-k}(\Pi_{S\cap\sigma^\perp}(A' \oplus K))$ au moyen de la même relation (1.8), on trouve

$$\lambda_p(\Pi_S(A \oplus A' \oplus K)) = \sum_{k=0}^{p} \sum_{j=0}^{p-k} \int_{\mathscr{S}_k} |\sigma, S|\, G_k^A(d\sigma)$$

$$\times \int_{\mathscr{S}_j} |\tau, S \cap \sigma^\perp|\, \lambda_{p-k-j}(\Pi_{S\cap\sigma^\perp\cap\tau^\perp} K) G_j^{A'}(d\tau).$$

Compte tenu de la relation $|\sigma, S| \times |\tau, S \cap \sigma^\perp| = |\tau, \sigma^\perp| \times |\sigma \oplus \tau, S|$ et de (1.7), un calcul élémentaire montre que $A \oplus A'$ vérifie bien la Relation (1.8).

Soit maintenant A un compact convexe symétrique vérifiant (1.8), et K un compact convexe contenu dans un $S_0 \in \mathscr{S}_{N-1}$. On trouve directement, pour $\rho > 0$, $\lambda_N(K \oplus \rho A) = \rho\lambda_{N-1}(K)\lambda_1(\Pi_{S_0^\perp} A) + O(\rho^2)$, et, en utilisant (1.8′) $\lambda_N(K \oplus \rho A) = \rho\lambda_{N-1}(K) \int_{\mathscr{S}_1} |S_0, \sigma^\perp|\, G_1^A(d\sigma)$.

En posant $L = S_0^\perp$, et compte tenu de $|S_0, \sigma^\perp| = |L, \sigma|$, il vient donc $\lambda_1(\Pi_L A) = \int_{\mathscr{S}_1} |L, \sigma|\, G_1^A(d\sigma)$ et A est un compact de Steiner.

Corollaire 1. Pour tout $A \in C_1(\mathscr{K})$, les fonctionnelles de Minkowski W_k, $k = 0, 1, \cdots, N$ vérifient

$$W_k(A) = \left(\omega_k \Big/ \binom{N}{k}\right) \int_{\mathscr{S}_{N-k}} G_{N-k}^A(dS). \tag{1.9}$$

En effet, si B est la boule unité dans $\boldsymbol{R}^N$, la formule classique de Steiner donne $\lambda_N(A \oplus \rho B) = \sum \binom{N}{k} \rho^k W_k(A)$, et il suffit d'identifier avec (1.8′) pour en déduire (1.9).

Corollaire 2. La boule unité B est dans $C_1(\mathscr{K})$, et, en désignant par ϖ_k la probabilité invariante par rotation sur $\mathscr{S}_k$, on a

$$G_k^B = \binom{N}{k} (\omega_N / \omega_{N-k}) \varpi_k. \tag{1.10}$$

En effet, le compact de Steiner associé à la mesure ϖ_1 invariante sur $\mathscr{S}_1$ est une boule, donc $B \in C_1(\mathscr{K})$. Pour chaque $k = 2, \cdots, N$, G_k^B est invariante par rotation, donc proportionnelle à ϖ_k, et l'on obtient le coefficient de proportionalité en appliquant (1.9), compte tenu de $W_k(B) = \omega_N$.

Corollaire 3. Pour k, p entiers tels que $0 \leqq k \leqq p \leqq N$ et $S \in \mathscr{S}_p$, la moyenne de rotation de la fonction $\sigma \to |\sigma, S|$ sur $\mathscr{S}_k$ est

$$\int_{\mathscr{S}_k} |\sigma, S|\, \varpi_k(d\sigma) = \binom{p}{k} \omega_p \omega_{N-k} \left[\binom{N}{k} \omega_N \omega_{p-k}\right]^{-1}.$$

Il suffit d'appliquer (1.8) avec $A = B$ et $K = \rho B$, et de procéder par identification, compte tenu de (1.10). Au Paragraphe 3, nous donnerons la moyenne de rotation de $|\sigma, S|^\alpha$ pour α réel $\geqq 0$ quelconque.

Si A est un compact de Steiner, *sa projection* $\Pi_S A$ *sur* un $S \in \mathscr{S}_p (0 < p < N)$ est encore dans $C_1(\mathscr{K})$, à cause de la relation $\Pi_S(A \oplus A') = \Pi_S A \oplus \Pi_S A'$. Les mesures $G_k^{\Pi_S A}$ sont alors données par la relation suivante

$$(1.11) \qquad \int_{\mathscr{S}_k} f(\sigma) G_k^{\Pi_S A}(d\sigma) = \int_{\mathscr{S}_k} |\sigma, S| f(\Pi_S \sigma) G_k^A(d\sigma), \qquad (f \in \mathscr{C}(\mathscr{S}_k)).$$

En particulier, $G_k^{\Pi_S A} = 0$ pour $k > p$. Cette relation se déduit par un calcul élémentaire des définitions et de (1.3). En particulier, si nous prenons $f = 1$ dans (1.11), nous obtenons, compte tenu de (1.9), le corollaire suivant.

Corollaire 4. Pour $A \in C_1(\mathscr{K})$ et $S \in \mathscr{S}_p$, les fonctionnelles de Minkowski vérifient

$$(1.12) \qquad W_k(\Pi_S A) = \left(\omega_k \Big/ \binom{N}{k}\right) \int_{\mathscr{S}_{N-k}} |\sigma, S| G_{N-k}^A(d\sigma).$$

L'expression calculée ci-dessus concerne le compact $\Pi_S A$ considéré comme sous-ensemble de $\boldsymbol{R}^N$. Si l'on identifie S à $\boldsymbol{R}^p$, on peut aussi calculer la valeur $W_k^p(\Pi_S A)$ de la fonctionnelle de Minkowski d'indice k dans $\boldsymbol{R}^p = S$. Il suffit pour cela d'écrire la relation (1.8) avec $K = \rho B$ et d'identifier avec la formule de Steiner (appliquée dans l'espace S identifié à $\boldsymbol{R}^p$). On trouve ainsi pour $0 \leqq k \leqq p \leqq N$

$$(1.12') \qquad W_k^p(\Pi_S A) = \left(\omega_k \Big/ \binom{p}{k}\right) \int_{\mathscr{S}_{p-k}} |\sigma, S| G_{p-k}^A(d\sigma).$$

Le passage de (1.12) à (1.12′) résulte d'ailleurs aussi d'une formule classique ([2], page 215).

On peut encore rattacher les mesures G_k^A aux fonctionnelles mixtes $W_k(K, K')$ définies sur $C(\mathscr{K}) \times C(\mathscr{K})$ par $\lambda_N(K \oplus \rho K') = \sum \binom{N}{k} \rho^k W_k(K, K')$, ([2], pages 279 et suivantes). Pour $A \in C_1(\mathscr{K})$ et $K \in C(\mathscr{K})$, il vient en effet, d'après (1.8),

$$W_k(A, K) = \left(1 \Big/ \binom{N}{k}\right) \int_{\mathscr{S}_{N-k}} \lambda_k(\Pi_{\sigma^\perp} K) G_{N-k}^A(d\sigma).$$

2. Représentation des hyperplans poissoniens

On sait qu'un réseau stationnaire d'hyperplans poissoniens A dans $\boldsymbol{R}^N$ est défini par la donnée d'une mesure positive G sur $\mathscr{S}_1$ tel que l'on ait, pour tout compact $K \subset \boldsymbol{R}^N$, $P(\{A \cap K = \varnothing\}) = \exp\{-\psi(K)\}$ avec

$$(2.1) \qquad \psi(K) = \int_{\mathscr{S}_1} \lambda_1(\Pi_L K) G(dL)$$

(voir [3] et les travaux de Miles cités dans [3]). Il est donc naturel *d'associer au réseau A le compact de Steiner $M \in C_1(\mathscr{K})$* tel que l'on ait $G_1^M = G$, c'est-à-dire $\lambda_1(\Pi_L M) = \int_{\mathscr{S}_1} |L, L'| G(dL')$. Ainsi, la classe de Steiner et l'ensemble des réseaux poissoniens stationnaires d'hyperplans poisonniens sont en correspondance biunivoque. Pour chaque variété linéaire V de dimension $p < N$ et de direction $S \in \mathscr{S}_p$, $A \cap V$ est un réseau poissonien d'hyperplans dans V (identifié à $\boldsymbol{R}^p$) appelé *réseau induit* par A. Le compact de Steiner associé à ce réseau induit ne dépend que de la direction $S \in \mathscr{S}_p$ de V, et on le désignera par $M(S)$. En fait, *$M(S)$ est identique à la projection de M sur S*, soit $M(S) = \Pi_S M$. En effet, d'après la relation (2.1), pour $L \in \mathscr{S}_1$ on a $\lambda_1(\Pi_L M) = \psi(\tilde{L})$, $\tilde{L}$ désignant un segment de droite de direction L et de longueur unité. D'autre part, la fonctionnelle ψ_S associé au réseau induit est évidemment la restriction de ψ à l'ensemble $\mathscr{K}(S)$ des compacts inclus dans S. Ainsi, $M(S)$ vérifie la relation $\lambda_1(\Pi_L M(S)) = \psi(\tilde{L}) = \lambda_1(\Pi_L M)$ pour tout $L \in \mathscr{S}_1$ tel que $L \subset S$, et par suite $M(S) = \Pi_S M$.

Il en résulte que la représentation du réseau poissonien A par son Steiner associé M permet de *calculer trés facilement les caractéristiques des réseaux induits*: chaque fois que l'on aura exprimé une propriété du réseau A en fonction de M et de la dimension N, il suffira de remplacer M par $\Pi_S M$ et N par p pour obtenir la propriété correspondante des réseaux induits sur les variétés V parallèles à $S \in \mathscr{S}_p$.

De ce point de vue, le cas *isotrope* est particulièrement intéressant. Si le réseau A est isotrope, en effet, G est proportionnel à la probabilité ϖ_1 invariante sur $\mathscr{S}_1$, soit $G = b\varpi_1$ avec une constante $b = \int G(dL)$, qui vérifie $b = N W_{N-1}(M)/\omega_{N-1}$ d'après (1.12). Ainsi, le compact de Steiner M associé à A est *la boule de rayon a* défini par

$$a = (\omega_{N-1}/N\omega_N) \int_{\mathscr{S}_1} G(dL). \tag{2.2}$$

Par suite, pour tout $S \in \mathscr{S}_p$, le compact de Steiner associé au réseau induit $A \cap S$ est la boule *de même rayon a* dans $S = \boldsymbol{R}^p$. Autrement dit, *le même paramètre a caractérise aussi bien le réseau isotrope initial A que tous les réseaux induits.* Ainsi, chaque fois qu'une caractéristique de A sera exprimée en fonction de a et de N, il suffira de remplacer N par p pour obtenir la caractéristique correspondante du réseau induit.

Par exemple, lorsque A est isotrope, la formule de définition (2.1) peut s'écrire, pour $K \in C(\mathscr{K})$,

$$\psi(K) = a(2N/\omega_{N-1})\, W_{N-1}^N(K) \tag{2.3}$$

(W_{N-1}^N désigne la fonctionnelle de Minkowski d'indice $N-1$ dans $\boldsymbol{R}^N$). Pour $S \in \mathscr{S}_p$ et K compact convexe inclus dans S, on trouvera donc pour le réseau induit $\psi(K) = a(2p/\omega_{p-1}) W_{p-1}^p(K)$.

Nous aurons souvent à utiliser la valeur $\psi(B)$ de la fonctionnelle ψ pour la boule unité B. D'après (2.1) et (1.9), on trouve dans le cas général (non isotrope)

$$\psi(B) = (2N/\omega_{N-1})\, W_{N-1}(M), \tag{2.4}$$

et dans le cas isotrope

$$\psi(B) = (2N\omega_N/\omega_{N-1})\, a\,. \tag{2.4'}$$

Les réseaux d'ordre k

Si A est un réseau stationnaire d'hyperplans poissoniens, nous désignerons par A_k ($k = 1, 2, \cdots, N$) le réseau constitué des intersections k à k des hyperplans de A, qui sont p.s. des variétés linéaires de dimension $N-k$, et nous dirons que A_k est *le réseau d'ordre k*. (A_1 est identique à A lui-même, et A_N est constitué des points de $\boldsymbol{R}^N$, appelés *sommets* du réseau A.)

A toute variété V de dimension k on peut associer la mesure de Lebesgue λ_k^V portée par V, définie par $\lambda_k^V(K) = \lambda_k(V \cap K)$ pour tout compact K. Comme le réseau A_k d'ordre k est localement fini, on peut alors lui associer la *mesure aléatoire* ν_k définie par

$$\nu_k(K) = \sum_{V \in A_k} \lambda_{N-k}^V(K) \qquad (K \in \mathscr{K}).$$

Cette mesure aléatoire ν_k est positive et stationnaire, de sorte qu'il existe une constante $\bar{\nu}_k \geqq 0$ telle que l'on ait

$$E(\nu_k(K)) = \bar{\nu}_k \lambda_N(K)\,.$$

Nous dirons que $\bar{\nu}_k$ est la *densité de $(N-k)$-volume* du réseau A_k d'ordre k associé à A. Nous verrons dans un instant que $\bar{\nu}_k$ est $< \infty$ et *s'exprime de manière simple, à l'aide du compact de Steiner M* associé à A, par la formule

$$\bar{\nu}_k = \left[\binom{N}{k}\Big/\omega_{N-k}\right] W_{N-k}(M) = \int_{\mathscr{S}_k} G_k^M(dS), \tag{2.5}$$

qui se réduit dans le cas isotrope à

$$\bar{\nu}_k = \left[\binom{N}{k}\omega_N/\omega_{N-k}\right] a^k. \tag{2.5'}$$

Pour $k = N$, en particulier, il en résulte que *l'espérance $\bar{\nu}_N$ du nombre de sommets par unité de volume est égale au volume $W_0(M)$ du Steiner associé* (dans le cas isotrope, $\bar{\nu}_N = \omega_N a^N$).

A la mesure aléatoire stationnaire ν_k est également attachée une *mesure-covariance C_k* sur $\boldsymbol{R}^n$ définie par la relation

$$E[(\nu_k(K))^2] = \int C_k(dh) g_K(h) \qquad (K \in \mathscr{K}),$$

où l'on a posé $g_K(h) = \int 1_K(x) 1_K(x+h)dx$. Nous donnerons au Paragraphe 4 l'expression explicite de ces mesures-covariance C_k, mais seulement dans le cas isotrope. Nous allons au préalable démontrer la formule (2.5).

Calcul des densités de $(N-k)$-volume

Pour démontrer (2.5), nous allons calculer l'expression $E[v_k(RB)] = \bar{v}_k \omega_N R^N$ (B, boule unité, $R \geqq 0$). Pour cela, nous allons en premier lieu nous placer dans l'hypothèse où k hyperplans du réseau rencontrent la boule RB, et calculer l'espérance conditionnelle correspondante. L'expression de $\bar{v}_k$ en résultera ensuite facilement.

a) Désignons par H_i, $i = 1, 2, \cdots, k$ les k hyperplans du réseau A qui rencontrent RB, par $S_i \in \mathscr{S}_{N-1}$ la direction de H_i et par R_i le rayon de la $(N-i)$ boule $RB \cap H_1 \cap \cdots \cap H_i$ (si celle-ci n'est pas vide).

Posons $b = \int G(dS) = NW_{N-1}(M)/\omega_{N-1}$. La loi de $S_1^\perp$ est la probabilité $(1/b)G$ sur $\mathscr{S}_1$ et, à S_1 fixé, l'unique point de l'intersection $H_1 \cap S_1^\perp$ est uniformément distribué sur $RB \cap S_1^\perp$. Ainsi R_1 est équivalent à $\rho_1 R$ avec $\rho_1 = (1-X^2)^{\frac{1}{2}}$ pour une variable aléatoire X uniformément distribué sur $[0,1]$.

De même, $S_2^\perp$ est indépendant de $S_1^\perp$ et de ρ_1 et admet la loi $(1/b)$ G sur $\mathscr{S}_1$. A S_2, S_1 et ρ_1 fixé la probabilité pour que H_2 rencontre $H_1 \cap RB$ est $\rho_1 \left| S_2^\perp S_1 \right|$, et, conditionnellement lorsqu'il en est ainsi, la boule $RB \cap H_1 \cap H_2$ admet le rayon $\rho_2 R_1 = \rho_1 \rho_2 R$, où ρ_2 est indépendant de ρ_1 et lui est équivalent.

En procédant par récurrence, on voit qu'à $S_1, \cdots, S_{k-1}, R_1 = \rho_1 R$, $R_2 = \rho_1 \rho_2 R, \cdots, R_{k-1} = \rho_1 \rho_2 \cdots \rho_{k-1} R$ fixés, S_k admet encore la loi $(1/b)G$; H_k rencontre $RB \cap H_1 \cap \cdots \cap H_{k-1}$ avec la probabilité $\rho_1 \cdots \rho_{k-1} \left| S_k^\perp, S_1 \cap \cdots \cap S_{k-1} \right|$ et, lorsqu'il en est ainsi, la boule $RB \cap H_1 \cap \cdots \cap H_k$ admet le rayon $\rho_1 \rho_2 \cdots \rho_k R$, où ρ_k est indépendante de $\rho_1, \cdots, \rho_{k-1}$ et équivalente à celle-ci.

Par suite, d'après (1.3), nous pouvons écrire

$$
\begin{aligned}
E[\lambda_{N-k}(H_1 \cap \cdots \cap H_k \cap RB)] &= \omega_{N-k} R^{N-k} E[\rho_1^{N-1} \rho_2^{N-2} \cdots \rho_k^{N-k}] \\
&\quad \times E[V(S_1^\perp, S_2^\perp, \cdots, S_k^\perp)].
\end{aligned} \tag{2.6}
$$

Un calcul simple donne $E(\rho_1^{N-1} \cdots \rho_k^{N-k}) = 2^{-k} \omega_N / \omega_{N-k}$. Pour calculer $E[V(S_1^\perp, \cdots, S_k^\perp)]$, nous allons utiliser la mesure G_k^M associée au compact de Steiner M. d'après la définition (1.5) de cette mesure, on trouve en effet: $E[V(S_1^\perp, \cdots, S_k^\perp)] = (k!/b^k) \int G_k$, d'où, compte tenu de (1.9),

$$E[V(S_1^\perp, S_2^\perp, \cdots, S_k^\perp)] = (N!/(N-k)!\, \omega_{N-k} b^k) W_{N-k}(M).$$

En reportant ces résultats dans (2.6), il vient

$$
\begin{gathered}
E[\lambda_{N-k}(H_1 \cap \cdots \cap H_k \cap RB)] = \frac{2^{-k} N!}{(N-k)!} \frac{\omega_N}{\omega_{N-k}} \frac{W_{N-k}(M)}{b^k} R^{N-k} \\
\left(b = \int_{\mathscr{S}_1} G(dL) = N W_{N-1}(M)/\omega_{N-1} \right).
\end{gathered} \tag{2.7}
$$

b) Si maintenant $n \geqq k$ hyperplans recontrent la boule RB, ce qui a lieu avrc la probabilité $([R\psi(B)]^n/n!)\exp(-\psi(B))$, l'espérance du $(N-k)$-volume est $\binom{n}{k}$ fois plus grande. Compte tenu de (2.4) et de $\Sigma_k^\infty(x^m/(n-k)!)\exp(-x) = x^k$, on en déduit $E(v_k(RB)) = \binom{N}{k}(\omega_N/\omega_{N-k})W_{N-k}(M)R^n$, d'où l'expression cherchée de la densité du $(N-k)$-volume

$$\bar{v}_k = \left(\binom{N}{k}\Big/\omega_{N-k}\right) W_{N-k}(M).$$

Remarque. Avec les notations précédentes, nous voyons aussi que—conditionnellement lorsque k hyperplans du réseau rencontrent la boule RB—*la probabilité p_k pour que l'intersection de ces k hyperplans rencontre RB est* $p_k = E(\rho_1^{k-1}\rho_2^{k-2}\cdots\rho_{k-1})E[V(S_1^\perp,\cdots,S_k^\perp]$, soit, d'après ce qui précède,

$$p_k = \frac{2^{-k}N!}{(N-k)!}\,\frac{\omega_k}{\omega_{N-k}}\,\frac{W_{N-k}(M)}{b^k}.$$

3. Lois des variables $|S, S_p|$

Pour calculer (dans le cas isotrope) la mesure-covariance C_k associée au réseau A_k d'ordre k, nous aurons besoin de connaître la loi de la variable aléatoire $S \to |S, S_p|$ lorsque $S_p \in \mathscr{S}_p$ est fixe et S aléatoire avec la probabilité invariante ϖ_k sur $\mathscr{S}_k$ $(0 < k \leqq p < N)$. On trouvera des résultats analogues dans les travaux de Miles cités en [3], mais il nous a paru commode de donner ici une dérivation directe.

Commençons par le cas le plus simple $k = 1$, et désignons par Y_p une variable aléatoire équivalente à $|L, S_p|$ lorsque L est aléatoire sur $\mathscr{S}_1$ avec la probabilité ϖ_1 (la loi de Y_p ne dépend pas du choix de l'élément particulier $S_p \in \mathscr{S}_p$). Désignons par $X = (X_1, \cdots, X_N)$ un vecteur gaussien isotrope dans $\boldsymbol{R}^N$, et par $X' = (X_1, \cdots, X_p)$ et $X'' = (X_{p+1}, \cdots, X_n)$ ses projections sur les sous-espaces à p et $(N-p)$ dimensions définis par les p premiers et les $(N-p)$ derniers axes de coordonnées. X' et X'' sont des vecteurs gaussiens isotropes indépendants, et, de plus, la variable $|X'|/|X|$ est équivalente à Y_p et indépendante de $|X^2| = |X'|^2 + |X''|^2$. On voit facilement que les variables indépendantes $|X'|^2$ et $|X''|^2$ obéissent à des lois gamma de paramètres $p/2$ et $(N-p)/2$ respectivement, de sorte que $|X'|^2/|X|^2$ est une variable beta de paramètres $p/2$ et $(N-p)/2$. Ainsi, la loi de la variable Y_p équivalente à $|X'|/|X|$ est définie par

$$E((Y_p)^\lambda) = \frac{\Gamma(N/2)}{\Gamma(p/2)}\,\frac{\Gamma((\lambda+p)/2)}{\Gamma((\lambda+N)/2)} \qquad (\lambda \geqq 0). \tag{2.8}$$

Supposons maintenant $1 < k \leqq p < N$, et considérons la variable $S \to |S, S_p|$ sur $\mathscr{S}_k$ munie de la probabilité invariante ϖ_k. Ici encore, la loi de $|S, S_p|$ ne dépend pas du choix de $S_p \in \mathscr{S}_p$. D'autre part, la loi ϖ_k invariante sur $\mathscr{S}_k$ est induite de la probabilité $\varpi_1(dL_1) \times \cdots \times \varpi_1(dL_k)$ sur $(\mathscr{S}_1)^k$ par l'application $(L_1, L_2, \cdots, L_k) \to L_1 \oplus L_2 \oplus \cdots \oplus L_k$ (définie presque partout). Si donc L_i, $i = 1, 2, \cdots, k$ sont k éléments aléatoires indépendants admettant la même loi ϖ_1 sur $\mathscr{S}_1$, la variable $|S, S_p|$ est équivalente à $\lambda_k(\Pi_{S_p}(\tilde{L}_1 \oplus \cdots \oplus \tilde{L}_k))/\lambda_k(\tilde{L}_1 \oplus \cdots \oplus \tilde{L}_k)$ où $\tilde{L}_i$ est le segment de droite unité parallèle à L_i. Mais on peut écrire

$$\lambda_k(\tilde{L}_1 \oplus \cdots \oplus \tilde{L}_k) = |\tilde{L}_1| \times |\Pi_{L_1^\perp}\tilde{L}_2| \times \cdots \times |\Pi_{L_1^\perp \cap \cdots \cap L_{k-1}^\perp}\tilde{L}_k|$$

$$\lambda_k(\Pi_{S_p}(\tilde{L}_1 \oplus \cdots \oplus \tilde{L}_k)) = |\Pi_{S_p}\tilde{L}_1| \times \cdots \times |\Pi_{S_p \cap L_1^\perp \cap \cdots \cap L_{k-1}^\perp}\tilde{L}_k|$$

et l'indépendance et l'isotropie des L_i impliquent que les différents facteurs qui apparaissent dans ces expressions sont des variables indépendantes. Ainsi, en désignant par Y_j des variables indépendantes obéissant aux lois définies en (2.8), on obtient les équivalences en loi suivantes

$$\lambda_k(\tilde{L}_1 \oplus \cdots \oplus \tilde{L}_k) = V(L_1, \cdots, L_k) \equiv \prod_{j=N-k+1}^{N} Y_j \tag{2.9}$$

$$\lambda_k(\Pi_{S_p}(\tilde{L}_1 \oplus \cdots \oplus \tilde{L}_k)) \equiv \prod_{j=p-k+1}^{p} Y_j$$

(conventionnellement, $Y_N = 1$ p.s.).

D'autre part, la variable $V(L_1, \cdots, L_k) = \lambda_k(\tilde{L}_1 \oplus \cdots \oplus \tilde{L}_k)$ est invariante en loi par rotation, donc indépendante de $S = L_1 \oplus \cdots \oplus L_k$. Au contraire, le rapport $|S, S_p| = \lambda_k(\Pi_{S_p}(\tilde{L}_1 \oplus \cdots \oplus \tilde{L}_k))/V(L_1, \cdots, L_k)$ ne dépend que de S (l'élément $S_p \in \mathscr{S}_p$ étant fixe). On déduit donc de (2.9) l'équivalence en loi

$$|S, S_p| \prod_{j=N-k+1}^{N} Y_j \equiv \prod_{j=p-k+1}^{p} Y_j .$$

Autrement dit, pour tout λ réel $\geqq 0$, nous trouvons

$$E(|S, S_p|^\lambda) = \prod_{j=p-k+1}^{p} [E((Y_j)^\lambda)/E((Y_{j+N-p})^\lambda)] .$$

Compte tenu de (2.8), la loi de $|S, S_p|$ est donc définie par

$$E(|S, S_p|^\lambda) = \prod_{j=p-k+1}^{p} \frac{\Gamma((j+N-p)/2)}{\Gamma(j/2)} \frac{\Gamma((\lambda+j)/2)}{\Gamma((\lambda+j+N-p)/2)}, \tag{2.10}$$

de sorte que $|S, S_p|^2$ est équivalent à un produit de variables beta indépendantes. Cette relation (2.10) va nous permettre de calculer explicitement les mesures-covariances C_k associées aux réseaux d'ordre k dans le cas isotrope.

4. Les mesures-covariance C_k (cas isotrope)

Soit A un réseau stationnaire et *isotrope* d'hyperplans poissoniens dans $\boldsymbol{R}^N$, et A_k le réseau d'ordre k. La covariance C_k associée à A_k existera si

$E[(v_k(RB))^2] < \infty$ pour tout $R > 0$, et le calcul ci-dessous montre que cette condition est effectivement vérifiée. Il est clair que la mesure C_k sur $\mathbf{R}^N$ est elle-même isotrope (i.e., invariante par rotation). Le lemme suivant montre alors que C_k est déterminée si l'on connaît $E(v_k(RB))^2\}$ pour tout $R > 0$.

Lemme 4. Soit C une mesure isotrope sur $\mathbf{R}^N$, B la boule unité, et, pour chaque $R > 0$, g_R la fonction sur $\mathbf{R}^N$ définie par

$$g_R(h) = \int_{\mathbf{R}^N} 1_{RB}(x)\, 1_{RB}(x+h)\lambda_N(dx) \qquad (h \in \mathbf{R}^N).$$

Alors C est déterminée si l'on connaît la fonction $R \to \int g_R(h)\, C(dh)$. En particulier, on a $C = \sum_0^{N-1}(a_p/|h|^p)\lambda_N + a_N\delta$ (δ est la mesure de Dirac) si et seulement si

$$(4.1) \quad \int g_R(h) C(dh) = \sum_{p=0}^{N-1} a_p \frac{N 2^{1+N-p}}{(N-p)(1+N-p)} \frac{\omega_N \omega_{2N-p}}{\omega_{1+N-p}} R^{2N-p} + a_N \omega_N R^N.$$

Pour démontrer la permière partie du lemme, désignons par $\tilde{C}$ la mesure sur R_+ déduite de C par l'application $x \to |x|$. Il est clair que $C \to \tilde{C}$ est une bijection de l'espace des mesures isotropes sur $\mathbf{R}^N$ sur l'espace des mesures sur R_+. Posons $|h| = \rho$ et convenons d'écrire $g_R(\rho)$ au lieu de $g_R(h)$. La fonction $\rho \to g_R(\rho)$ admet la dérivée $g'_R(\rho) = -\omega_{N-1}(R^2 - \rho^2/4)^{(N-1)/2}$ pour $\rho \leqq 2R$, et $g'_R(\rho) = 0$ pour $\rho > 2R$. Posons $F(\rho) = \int_0^\rho \tilde{C}(dr)$ pour $\rho \geqq 0$. Il vient alors

$$\int_0^\infty g_R(\rho)\tilde{C}(d\rho) = -\int_0^\infty F(\rho) g'_R(\rho) d\rho = \omega_{N-1} \int_0^{2R} (R^2 - \rho^2/4)^{(N-1)/2} F(\rho)\, d\rho.$$

En effectuant le changement de variable $\xi = \rho^2/4$ et en utilisant la transformation de Laplace, on en déduit sans difficulté le premier énoncé du lemme. Le second énoncé en résulte après quelques calculs élémentaires.

D'après ce lemme, il suffit donc de calculer $E[v_k(RB))^2]$ et de vérifier que cette expression est $< \infty$ pour en déduire l'existence et l'expression de la mesure-covariance C_k. Nous allons faire ce calcul en suivant une démarche analogue à celle du Paragraphe 2.

a) Plaçons-nous d'abord conditionnellement dans l'hypothèse où n hyperplans H_1, $i = 1, 2, \cdots, n$ du réseau isotrope A rencontrent la boule RB et posons

$$X_{i_1, \cdots i_k} = \lambda_{N-k}(H_{i_1} \cap \cdots \cap H_{i_k} \cap RB).$$

Nous avons déjá calculé au Paragraphe 2 l'espérance de cette variable. D'autre part (toujours pour n fixé), on a

$$(v_k(RB))^2 = \sum_{0 < i_1 < \ldots < i_k \leqq n} \; \sum_{0 < j_1 < \ldots < j_k \leqq n} X_{i_1, \ldots, i_k} X_{j_1, \ldots, j_k}$$

et il convient donc de calculer $E(X_{i_1,\dots,i_k}X_{j_1,\dots,j_k})$ pour tous les choix possibles des indices $i_1,\cdots,i_k$ et $j_1,\cdots,j_k$.

Soient donc $\{i_1,\cdots,i_k\}$ et $\{j_1,\cdots,j_k\}$ deux suites dans $\{1,2,\cdots,n\}$, et p le nombre des indices communs à ces deux suites. Autrement dit, il existe $2k-p$ hyperplans $H_1,\cdots,H_p,\ H_{p+1},\cdots,H_k,\ H'_{p+1},\cdots,H'_k$ tels que

$$X_{i_1,\dots,i_k} = \lambda_{N-k}(H_1\cap\cdots\cap H_p\cap H_{p+1}\cap\cdots\cap H_k\cap RB)$$
$$X_{j_1,\dots,j_k} = \lambda_{N-k}(H_1\cap\cdots\cap H_p\cap H'_{p+1}\cap\cdots\cap H'_k\cap RB).$$

Désignons par $S_1,\cdots,S_p,\ S_{p+1},\cdots,S_k,\ S'_{p+1}\cdots S'_k$ les directions de ces hyperplans, et par $\rho_1,\cdots,\rho_p,\ \rho_{p+1},\cdots,\rho_k,\ \rho'_{p+1},\cdots,\rho'_k,(2k-p)$ variables indépendantes équivalentes à $(1-X)^2)^{\frac{1}{2}}$, où X est uniformément distribué sur $[0,1]$. Le calcul est très analogue à celui du Paragraphe 2. On trouve d'abord que la probabilité pour que $H_1\cap\cdots\cap H_p\cap RB$ ne soit pas vide est

$$\rho_1^{p-1}\rho_2^{p-2}\cdots\rho_p\left|S_2^\perp,S_1\right|\times\cdots\times\left|S_p^\perp,S_1\cap\cdots\cap S_{p-1}\right|.$$

Conditionnellement pour $H_1\cap\cdots\cap H_p\cap RB\neq\varnothing$, la probabilité pour que les intersections $H_1\cap\cdots\cap H_k\cap RB$ et $H_1\cap\cdots\cap H'_k\cap RB$ ne soient pas vides est ensuite (avec $\sigma=S_1\cap\cdots\cap S_p\in\mathscr{S}_{N-p}$ p.s.)

$$(\rho_1\rho_2\cdots\rho_p)^{2k-p}\rho_{p+1}'^{k-p-1}\cdots\rho'_{k-1}\rho_{p+1}^{k-p-1}\cdots\rho_{k-1}\times\left|\Pi_\sigma S_{p+1}^\perp\right|$$
$$\times\cdots\times\left|\Pi_\sigma S_k^\perp,\sigma\cap S_{p+1}\cap\cdots\cap S_{k-1}\right|\times\left|\Pi_\sigma S_{p+1}'^\perp\right|$$
$$\times\cdots\times\left|\Pi_\sigma S_k^\perp,\sigma\cap S'_{p+1}\cap\cdots\cap S'_{k-1}\right|.$$

Conditionnellement lorsque ces intersections ne sont pas vides, on a alors

$$X_{i_1,\dots,i_k}X_{j_1,\dots,j_k}=$$
$$(\omega_{N-k}R^{N-k})^2(\rho_1\cdots\rho_p)^{2(N-k)}(\rho'_{p+1}\cdots\rho'_k)^{N-k}(\rho_{p+1}\cdots\rho_k)^{N-k}.$$

Par suite, nous devons calculer l'espérance de l'expression suivante

$$(\omega_{N-k}R^{N-k})^2\rho_1^{2N-p-1}\rho_2^{2N-p-2}\cdots\rho_p^{2N-2p}(\rho_{p+1}\rho'_{p+1})^{N-p-1}\cdots(\rho_k\rho'_k)^{N-k}$$
$$\times\left|S_2^\perp,S_1\right|\times\cdots\times\left|S_p^\perp,S_1\cap\cdots\cap S_{p-1}\right|\times\left|\Pi_\sigma S_{p+1}^\perp\right|\times\left|\Pi_\sigma S_{p+1}'^\perp\right|$$
$$\times\cdots\times\left|\Pi_\sigma S_k^\perp\sigma\cap S_{p+1}\cap\cdots\cap S_{k-1}\right|\times\left|\Pi_\sigma S_k'^\perp,\sigma\cap S'_{p+1}\cap\cdots\cap S'_{k-1}\right|.$$

D'après le Paragraphe 2, les différents facteurs qui figurent dans ce produit sont des variables indépendantes, et l'expression ci-dessus est équivalente à

$$(\omega_{N-k}R^{N-k})^2\rho_1^{2N-p-1}\cdots\rho_p^{2N-2p}(\rho_{p+1}\rho'_{p+1})^{N-p-1}\cdots(\rho_k\rho'_k)^{N-k}$$
$$\times\prod_{N-p+1}^{N}Y_j\times\prod_{N-k+1}^{N-p}Y'_j\times\prod_{N-k+1}^{N-p}Y''_j.$$

Compte tenu de $E(\rho^j) = \omega_{1+j}/2\omega_j$ et $E(Y_j) = (j/N)(\omega_{N-1}/\omega_N)(\omega_j/\omega_{j-1})$ et après quelques calculs élémentaires, il vient

$$(4.2)\quad \begin{aligned} &E(X_{i_1,\dots i_k}X_{j_1,\dots,j_k}) = B(p,k)R^{2(N-k)} \\ &B(p,k) = 2^{p-2k}\frac{N!(N-p)!}{((N-k)!)^2}\,\frac{\omega_{2N-p}\omega_N(\omega_{N-p})^3}{\omega_{2N-2p}(\omega_{N-k})^2}\left(\frac{\omega_{N-1}}{N\omega_N}\right)^{2k-p}\end{aligned}$$

pour deux suites $\{i_1,\cdots,i_k\}$ et $\{j_1,\cdots,j_k\}$ comportant p indices communs.

b) Toujours dans l'hypothèse où n hyperplans rencontrent RB, il leur est associé $\binom{n}{k}$ variétés du réseau d'ordre k, et, parmi celles-ci,

$$\binom{n}{p}\binom{n-p}{k-p}\binom{n-k}{k-p} = n!/[((k-p)!)^2 p!(n-2k+p)!]$$

couples du type

$$(H_1\cap\cdots\cap H_p\cap H_{p+1}\cap\cdots\cap H_k,\ H_1\cap\cdots\cap H_p\cap H'_{p+1}\cap\cdots\cap H'_k)$$

considéré ci-dessus. Compte tenu de (4.2) et du fait que n est une Poisson d'espérance $R\psi(B)$, il en résulte

$$\begin{aligned} E[(v_k(RB))^2] &= \sum_{p=0}^{k}\sum_{n=2k-p}^{\infty}\frac{n!\,B(p,k)R^{2(N-k)}}{p!\,(n-2k+p)!\,[(k-p)!]^2} \\ &\quad\times\frac{(R\psi(B))^n}{n!}\exp(-R\,\psi(B)) \\ &= \sum_{p=0}^{k}\frac{B(p,k)}{p!\,[(k-p)!]^2}(\psi(B))^{2k-p}R^{2N-p}.\end{aligned}$$

Compte tenu de l'expression (4.2) de $B(p,k)$ et de (2.4′), on obtient donc

$$E[(v_k(RB))^2] =$$

$$\sum_{p=0}^{k}\frac{N!(N-p)!}{p!\,[(N-k)!\,(k-p)]^2}\,\frac{\omega_{2N-p}\omega_N(\omega_{N-p})^3}{\omega_{2N-2p}(\omega_{N-k})^2}a^{2k-p}R^{2N-p}.$$

c) D'autre part, on a $E[(v_k(RB))^2] = \int g_R(h)C_k(dh)$. D'après le Lemme 4 et en identifiant les expressions (4.3) et (4.1), on obtient l'énoncé suivant.

Théorème 4. Pour $k<N$, la mesure-covariance isotrope associée au réseau A_k d'ordre k est

$$C_k = \sum_{p=0}^{k}\frac{(N-p)(N-1)!(N-p)!}{p![(N-k)!(k-p)!]^2}\left(\frac{\omega_{N-p}}{\omega_{N-k}}\right)^2 a^{2k-p}(1/r^p)\lambda_N,$$

où λ_N est la mesure de Lebesgue et r la fonction $x\to|x|$ sur $\boldsymbol{R}^N$. De même en désignant par δ la mesure de Dirac, la mesure-covariance C_N associée au réseau ponctuel A_N est

$$C_N = \sum_{p=0}^{N-1} \binom{N-1}{p} (\omega_{N-p})^2 a^{2N-p}(1/r^p)\lambda_N + \omega_N a^N \delta .$$

5. Comparaison avec les variétés poissoniennes de dimension $< N-1$

Pour terminer cette étude, il est peut-être intéressant de comparer les résultats précédents avec ceux que l'on obtient dans le cas des variétés linéaires poissoniennes de dimension inférieure à $N-1$. Rappelons qu'un réseau stationnaire A de variétés de dimension $N-k$ dans $\boldsymbol{R}^n$ est défini par la donnée d'une mesure $G \geqq 0$ sur $\mathscr{S}_k$ telle que l'on ait $P(\{A \cap K = \varnothing\}) = \exp(-\psi(K))$ pour tout compact K avec

$$\psi(K) = \int_{\mathscr{S}_k} \lambda_k(\Pi_S K)\, G(dS). \tag{5.1}$$

A ce réseau A, on peut, comme ci-dessus, associer la mesure aléatoire positive v définie par

$$v(K) = \sum_{V \in A} \lambda_{N-k}(V \cap K) \qquad (K \in \mathscr{K}).$$

Cette définition a un sens du fait que le réseau A est localement fini. Comme le réseau A est stationnaire, il existe ici encore un nombre $v \geqq 0$ appelé densité de $(N-k)$-volume du réseau A tel que l'on ait $E[v(K)] = \bar{v}\lambda_N(K)$ pour tout $K \in \mathscr{K}$.

Le calcul de $\bar{v}$ se fait comme ci-dessus: conditionnellement lorsqu'une seule variété V du réseau A rencontre K, la direction S de l'orthogonal de V admet la loi $(\lambda_k(\Pi_S K)/\psi(K))\, G(dS)$ sur $\mathscr{S}_k$, et, à S fixé, l'unique point de l'intersection $V \cap S$ est uniformément distribué sur $\Pi_S K$. On retrouve ainsi la formule connue

$$\begin{aligned} E[\lambda_{N-k}(V \cap K)] &= \int [\lambda_k(\Pi_S K)/\psi(K))]\,[\lambda_N(K)/\lambda_k(\Pi_S K)]\, G(dS) \\ &= [\lambda_N(K)/\psi(K)] \int G(dS). \end{aligned}$$

D'autre part, le nombre n des variétés qui rencontrent A est poissonien avec $E(n) = \psi(K)$. Par suite, on trouve

$$E[v(K)] = \psi(K)\, E[\lambda_{N-k}(V \cap K)] = \lambda_N(K) \int G(dS),$$

c'est-à-dire

$$\bar{v} = \int_{\mathscr{S}_k} G(dS). \tag{5.2}$$

En ce qui concerne la mesure-covariance C associée à v, nous nous limiterons comme ci-dessus *au cas isotrope* (bien que cette fois le calcul ne soit pas très difficile à expliciter dans le cas général), c'est-à-dire, compte tenu de (5.2), au cas où la mesure G est $G = \bar{v}\varpi_k$, ϖ_k désignant la probabilité invariante par rotation sur $\mathscr{S}_k$.

Conditionnellement lorsqu'une seule variété V du réseau isotrope A rencontre le compact K, on dit (en géométrie intégrale) que V est la *$(N-k)$-sécante aléatoire* de K, et on s'intéresse à la variable $\lambda_{N-k}(V \cap K)$. On a calculé ci-dessus l'espérance de cette variable, qui est $(\lambda_N(K)/\psi(K)) \int G(dS)$, avec ici $G(dS) = \bar{\nu}\varpi_k$. Pour calculer le moment d'ordre 2, $E([\lambda_{N-k}(V \cap K)]^2)$, il convient d'introduire la fonction g_K définie par

$$g_K(h) = \int 1_K(x)\, 1_K(x+h)\, \lambda_N(dx). \tag{5.3}$$

De (5.3), résulte immédiatement $\int g_K(h)\, \lambda_N(dh) = (\lambda_N(K))^2$ et, plus généralement, pour tout $S \in \mathscr{S}_{N-k}$,

$$\int_S g_K(h)\lambda_{N-k}(dh) = \int_{S^\perp} [\lambda_{N-k}(K \cap (S \oplus \{x\}))]^2 \lambda_k(dx). \tag{5.4}$$

Or, la direction S de la sécante aléatoire V de K obéit à la loi $[\lambda_k(\Pi_{S^\perp} K)/\int \lambda_k(\Pi_{S^\perp} K)\omega_{N-k}(dS)]\varpi_{N-k}$ sur $\mathscr{S}_{N-k}$, et, à S fixé, l'unique point $x \in V \cap S$ est uniformément distribué sur $\Pi_{S^\perp} K$. D'après (5.4), on trouve donc

$$E[(\lambda_{N-k}(V \cap K))^2] = \left[1\Big/\int \lambda_k(\Pi_{S^\perp}K)\varpi_{N-k}(dS)\right] \times \int_{\mathscr{S}_{N-k}} \varpi_{N-k}(dS) \int g_K(h)\lambda_{N-k}(dh)$$

$$= \left[(N-k)\varpi_{N-k}/N\omega_N \int \lambda_k(\Pi_{S^\perp}K)\varpi_{N-k}(dS)\right] \times \int_{\mathbf{R}^N} (g_K(h)/|h|^k)\lambda_N(dh).$$

Si $K \in C(\mathscr{K})$, compte tenu de la définition (1.1) des fonctionnelles de Minkowski, on retrouve l'expression bien connue du moment d'ordre 1, et aussi celle du moment d'ordre 2. En désignant par g_K la fonction définie en (5.3), ces résultats s'énoncent ci-dessous.

Théorème 5. *Soit K un compact convexe dans $\mathbf{R}^N$ et V sa $(N-k)$-sécante aléatoire. Alors, les moments d'ordre un et deux de la variable $\lambda_{N-k}(V \cap K)$ $(k = 1, 2, \cdots, N-1)$ sont*

$$E[\lambda_{N-k}(V \cap K)] = (\omega_N/\omega_k)W_0(K)/W_{N-k}(K)$$

$$E[(\lambda_{N-k}(V \cap K))^2] = ((N-k)\omega_{N-k}/N\,\omega_k W_{N-k}(k)) \int (g_K(h)/|h|^k)\, \lambda_N(dh).$$

De ce théorème, on déduit ensuite sans difficulté l'expression de la mesure-covariance C associée au réseau A, définie par

$$\int C(dh) g_K(h) = E[(\nu(K))^2], \quad K \in \mathscr{K},$$

à savoir, si $k < N$,

$$C = \bar{v}^2\lambda_N + \bar{v}[(N-k)\omega_{N-k}/N\omega_N](1/r^k)\lambda_N,$$

et, pour $k = N$, c'est-à-dire pour un processus de Poisson ponctuel dans $\boldsymbol{R}^N$, $C = \bar{v}^2\lambda_N + \bar{v}\delta$. En comparant ces expressions avec celles qui apparaissent dans le Théorème 4, on voit que le réseau d'ordre k associé à un réseau isotrope d'hyperplans poissoniens a une structure nettement plus compliquée que le réseau isotrope de variétés poissoniennes de même dimension et de même densité.

Bibliographie

[1] Blaschke, W. (1936–1937) *Vorlesungen über Integral Geometrie.* Teubner, Leipzig.

[2] Hadwiger, H. (1957) *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie.* Springer, Berlin.

[3] Matheron, G. (1972) Ensembles aléatoires, ensembles semi-markoviens et polyèdres poissoniens. *Adv. Appl. Prob.* **4,** 508–541.

[4] Matheron, G. (1973) Un théorème d'unicité pour les hyperplans poissoniens. *J. Appl. Prob.* **11,** 184–189.