D-1046

J. Appl. Prob. 13, 707–713 (1976)
Printed in Israel

LA FORMULE DE CROFTON POUR LES SECTIONS ÉPAISSES

GEORGES MATHERON, *Centre de Morphologie Mathématique, École Nationale Supérieure des Mines de Paris*

Abstract

The classical Crofton formula is generalized to the case of thick sections, and the corresponding corrective formulae are given.

CROFTON'S FORMULA; THICK SECTIONS; RANDOM CONVEX ISOTROPIC SETS; INTEGRAL GEOMETRY; STEINER'S FORMULA

Introduction et notation

La formule classique de Crofton permet de retrouver les valeurs $W_k(A)$ des fonctionnelles de Minkowski d'un compact convexe A de R^3 à partir d'observations effectuées sur des sections planes. De même, si l'on a affaire à une famille finie d'ovoïdes A_i disjoints, on reconstituera les sommes $\Sigma_i W_k(A_i)$, sauf pour $k = 3$ (c'est-à-dire que le nombre de ces ovoïdes restera inconnu). Mais, en pratique, on a souvent affaire à des sections épaisses. Au lieu de la section $A \cap H$ de A par un plan H, on observe la projection sur H de l'intersection $A \cap (H \oplus au)$ de A avec le dilaté de H par un segment de droite au d'épaisseur a et orthogonal à H.

Plus généralement, on peut aussi considérer le cas de variétés linéaires V de dimension $k \leqq n-1$ dilatées par la boule εB de rayon ε. On observe alors non pas l'intersection $A \cap V$ elle-même, mais la projection sur V de $A \cap (V \oplus \varepsilon B)$. Par exemple, avec $n = 3$ et $k = 1$, on observe l'intersection de A par un cylindre de révolution projetée sur l'axe de ce cylindre.

Dans ce qui suit, nous donnons une formule de géométrie intégrale qui généralise la formule de Crofton au cas de ces sections épaisses. Pour $n = 3$ et $k = 2$ (sections planes épaisses dans l'espace usuel) cette formule est implicitement présente dans Miles (1974) et (1976) (il suffit de faire tendre vers 0 la 'densité poissonnienne' de son schéma), et des résultats analogues pour n et k quelconques doivent être prochainement publiés par Davy (voir aussi Giger (1972), équations (4) et (5)). Toutefois, la base de ces travaux est celle des classes d'ensembles convexes aléatoires isotropes situés aux points de processus ponc-

Received in revised form 9 February 1976.

tuels homogènes et dissimule le caractère essentiellement géométrique du résultat final. La démonstration directe que nous donnons ci-dessous n'utilise que des notions de géométrie intégrale, et met en évidence la parenté profonde du résultat final avec la célèbre formule de Crofton.

Notations. Les notations utilisées ici sont les mêmes que dans Matheron (1975). $\mathcal{S}_k$ est l'ensemble des sous-espaces de dimension k dans $\mathbb{R}^n$ ($k = 0, 1, \cdots n$). L'unique probabilité invariante par rotation sur $\mathcal{S}_k$ est désignée par ϖ_k. Pour un $S \in \mathcal{S}_k$ donné, $\mathcal{S}_p(S)$ désigne l'ensemble des sous-espaces de S de dimension p ($p = 0, 1, \cdots k$) et ϖ_p^S l'unique probabilité sur $\mathcal{S}_p(S)$ invariante pour les rotations de S. On peut aussi considérer $\mathcal{S}_p(S)$ comme un sous-ensemble de $\mathcal{S}_p$, et ϖ_p^S comme une probabilité sur $\mathcal{S}_p$ concentrée sur $\mathcal{S}_p(S)$.

Enfin, on désigne par $b_k = \pi^{k/2}/\Gamma(1 + k/2)$ le volume de la boule unité dans $\mathbb{R}^k$, par Π_S le projecteur d'un sous-espace $S \in \mathcal{S}_k$, par $S^\perp \in \mathcal{S}_{n-k}$ l'orthogonal de $S \in \mathcal{S}_k$, et par S_h la variété linéaire déduite de S par une translation h. Avec ces notations, les fonctionnelles de Minkowski dans $\mathbb{R}^n$ sont définies par

$$W_{n-k}(A) = \frac{b_n}{b_k} \int_{\mathcal{S}_k} \mu_k(\Pi_S A) \varpi_k(dS).$$

(A, compact convexe, μ_k mesure de Lebesgue dans S identifié à $\mathbb{R}_k$.) Si $A \subset S$ pour un $S \in \mathcal{S}_k$, on peut aussi définir les fonctionelles $W_{k-p}^k(A)$ dans S, identifié à $\mathbb{R}^k$:

$$W_{k-p}^k(A) = \frac{b_k}{b_p} \int_{\mathcal{S}_p(S)} \mu_p(\Pi_\sigma A) \varpi_p^S(d\sigma).$$

Passons maintenant à la démonstration du résultat essentiel, qui est la formule (5) ci-dessous. Soit A compact et convexe dans $\mathbb{R}^n$. Nous supposons qu'au lieu d'observations faites sur des variétés k-dimensionnelles $V = S_h$ ($S \in \mathcal{S}_k$, $h \in S^\perp$) on connaisse la projection sur V de l'intersection de A et du cylindre $V \oplus \varepsilon B$, soit

$$\Pi_V(A \cap (V \oplus \varepsilon B)).$$

Si l'on désigne par $C = C(S^\perp)$ le disque unité orthogonal à l'axe V, il est facile de montrer que l'on a

$$\Pi_V(A \cap (V \oplus \varepsilon B)) = V \cap (A \oplus \varepsilon C). \tag{1}$$

Ainsi, les observations rapportées à V ne concernent pas A mais son dilaté $A \oplus \varepsilon C$ par le disque orthogonal à son axe.

De cette formule (1), nous allons déduire les formules de Crofton pour les cylindres de révolution: nous reprenons d'abord la démonstration de la formule classique de Crofton, au moment opportun nous remplaçons A par $A' =$

$A \oplus \varepsilon C(S^\perp)$, nous évaluons le terme correspondant grâce à une généralisation de la formule de Steiner, et enfin nous prenons les moyennes de rotation.

1. Démonstration de la formule de Crofton

Bien que cette démonstration soit classique, nous devons l'expliciter ici pour effectuer au moment opportun le remplacement de A par $A' = A \oplus \varepsilon C$.

Soit S_h, $S \in \mathcal{S}_k$, $h \in S^\perp$, une variété à k dimensions, et

$$W_{k-p}^k(A \cap S_h) = \frac{b_k}{b_p} \int_{\mathcal{S}_p(S)} \mu_p(\Pi_\sigma(A \cap S_h)\varpi_p^S(d\sigma)$$

la valeur pour la section $A \cap S_h$ de la fonctionnelle W_{k-p}^k $(0 \leqq p \leqq k)$ calculée dans l'espace S_h identifié à $\mathbb{R}^k$. La deuxième étape consiste à intégrer cette expression en $h \in S^\perp$, ce qui donne

$$\int_{S^\perp} \mu_{n-k}(dh)\mu_p(\Pi_\sigma(A \cap S_h)) = \mu_{n-k+p}(\Pi_{\sigma \oplus S^\perp} A),$$

puisque $\sigma \subset S$ est orthogonale à $S^\perp$, et par suite

$$\text{(2)} \qquad \int_{S^\perp} W_{k-p}^k(A \cap S_h)\mu_{n-k}(dh) = \frac{b_k}{b_p} \int_{\mathcal{S}_p(S)} \mu_{n-k+p}(\Pi_{\sigma \oplus S^\perp} A)\varpi_p^S(d\sigma).$$

Il reste à prendre la moyenne de rotation en $S \in \mathcal{S}_k$, où, ce qui revient au même, en $S^\perp \in \mathcal{S}_{n-k}$. Or l'image de la mesure $\varpi_{n-k}(dS^\perp)\varpi_p^S(d\rho)$ par l'application $(S^\perp, \sigma) \to S^\perp \oplus \sigma = S'$ est la mesure $\varpi_{n-k+p}(dS')$ isotrope sur $\mathcal{S}_{n-k+p}$. On trouve donc

$$\int_{\mathcal{S}_K} \mu_k(dS) \int_{S^\perp} W_{k-p}^k(A \cap S_h)\mu_{n-k}(dh)$$
$$= \frac{b_k}{b_p} \int_{\mathcal{S}_{n-k+p}} \mu_{n-k+p}(\Pi_{S'} A)\varpi_{n-k+p}(dS') = \frac{b_k b_{n-k+p}}{b_p b_n} W_{k-p}(A).$$

C'est la formule classique de Crofton. Pour passer au cas des cylindres de révolution $S_h \oplus \varepsilon B$, c'est au niveau de la relation (2) que l'on doit effectuer la substitution $A \to A' = A \oplus \varepsilon C(S^\perp)$. L'étape suivante consiste donc à calculer le développement de $\mu_{n-k+p}(\Pi_{\sigma \oplus S^\perp}(A \oplus \varepsilon C))$.

2. Développement de $\mu_{n-k+p}(\Pi_{\sigma \oplus S^\perp}(A \oplus \varepsilon C))$

Le disque unité $C = S^\perp \cap B$ de $S^\perp \in \mathcal{S}_{n-k}$ est un compact de Steiner. Pour $i = 1, 2, \cdots n-k$, la mesure G_i^C qui lui est associée (selon Matheron (1975), Théorème 4–5–2) est concentrée sur $\mathcal{S}_i(S^\perp)$ et proportionnelle à la mesure invariante $\varpi_i^{S^\perp}$, soit

$$G_i^C = a_i \varpi_i^{S^\perp}$$

avec

$$a_i = \binom{n-k}{i} \frac{b_{n-k}}{b_{n-k-i}}.$$

(Le calcul de la constante a_i se fait sans difficulté en évaluant $W_{n-i}(C)$ de deux manières différentes à partir des Corollaires 4 et 6 du théorème déjà cité.)

Le disque εC de rayon ε admet les mesures $G_i^{\varepsilon C} = \varepsilon^i G_i^C$. Donc

$$G_i^{\varepsilon C} = \varepsilon^i \binom{n-k}{i} \frac{b_{n-k}}{b_{n-k-i}} \varpi_i^{S^\perp}. \tag{3}$$

Posons maintenant $S' = \sigma \oplus S^\perp (S \in \mathcal{S}_k, \sigma \in \mathcal{S}_p(S))$. Comme σ est orthogonal à $S^\perp$, on a $S' \in \mathcal{S}_{n+p-k}$. Nous allons calculer $(\Pi_{S'}(A \oplus \varepsilon C))$ au moyen du Corollaire 1 du théorème déjà cité: d'après cette version généralisée de la formule de Steiner, nous trouvons

$$\begin{aligned}\mu_{n-k+p}(\Pi_{S'}A \oplus \varepsilon C) &= \mu_{n-k+p}(\Pi_{S'}A) \\ &+ \sum_{i=1}^{n-k+p} \int |\tau, S'|\, \mu_{n-k+p-i}(\Pi_{S' \cap \tau^\perp} A) G_i^{\varepsilon C}(d\tau).\end{aligned}$$

Comme $G_i^{\varepsilon C} = 0$ pour $i > n-k$, la sommation s'arrête en fait à $i = n-k$. D'autre part, $G_i^{\varepsilon C}$ est concentrée sur $S^\perp \subset S'$, de sorte que $|\tau, S'| = 1$ dans l'intégrale ci-dessus. D'après (3), nous obtenons

$$\begin{aligned}\mu_{n-k+p}(\Pi_{S'}A \oplus \varepsilon C) &= \mu_{n-k+p}(\Pi_{S'}A) \\ &+ \sum_{i=1}^{n-k} \varepsilon^i \binom{n-k}{i} \frac{b_{n-k}}{b_{n-k-i}} \int \mu_{n-k+p-i}(\Pi_{S' \cap \tau^\perp} A) \varpi_i^S(d\tau),\end{aligned}$$

avec, rappelons-le, $S' = \sigma \oplus S^\perp$. C'est cette expression qui doit être substituée à $\mu_{n-k+p}(\Pi_{S'}A)$ dans la formule (2). On voit donc apparaître, dans le 2ème membre de cette formule, des termes correctifs de la forme

$$\int_{\mathcal{S}_p(S)} \varpi_p^S(d\sigma) \int_{\mathcal{S}_i(S)} \mu_{n-k+p-i}(\Pi_{\sigma \oplus S^\perp \cap \tau^\perp} A) \varpi_i^{S^\perp}(d\tau),$$

dont il faut ensuite prendre la moyenne de rotation en $S \in \mathcal{S}_k$. Or, par l'application $(S, \sigma, \tau) \to (\sigma \oplus S^\perp, \tau) = (S', \tau)$, la mesure $\varpi_k(dS)\, \varpi_p^S(d\sigma)\, \varpi_i^{S^\perp}(d\tau)$ a pour image $\varpi_{n-k+p}(dS')\varpi_i^{S'}(d\tau)$. Cette dernière mesure devient $\varpi_{n-k+p-i}(d\tau')$ par $(S', \tau) \to S' \cap \tau^\perp$. La moyenne de rotation en $S \in \mathcal{S}_k$ du terme ci-dessus est donc simplement

$$\int_{\mathcal{S}_{n-k+p-i}} \mu_{n-k+p-i}(\Pi_{\tau'}A) \varpi_{n-k+p-i}(d\tau') = \frac{b_{n-k+p-i}}{b_n} W_{k-p+i}(A).$$

Ainsi, la moyenne de rotation de $\mu_{n-k+p}(\Pi_{\sigma\oplus S^\perp}A \oplus \varepsilon C)$ est

$$\int \varpi_k(dS)\int \mu_{n-k+p}(\Pi_{\sigma\oplus S^\perp}(A \oplus \varepsilon C))\varpi_p^S(d\sigma)$$

$$= \frac{b_{n-k+p}}{b_n} W_{k-p}(A) + \sum_{i=1}^{n-k} \binom{n-k}{i} \frac{b_{n-k}}{b_{n-k-i}} \frac{b_{n-k+p-i}}{b_n} \varepsilon^i W_{k-p+i}(A). \tag{4}$$

3. Formule de Crofton pour les cylindres

Cette relation (4) permet de trouver les termes correctifs que l'on doit ajouter à la formule classique lorsque la variété V de dimension k est remplacée par le cylindre $V \oplus \varepsilon B$: du fait de ce remplacement, les calculs conduits selon la formule classique de Crofton conduisent non pas à la vraie valeur $W_{k-p}(A)$ mais à la valeur différente $W'_{k-p}(A)$ donné par

$$W'_{k-p}(A) = W_{k-p}(A) + \sum_{i=1}^{n-k} \binom{n-k}{i} \frac{b_{n-k}}{b_{n-k-i}} \frac{b_{n-k+p-i}}{b_{n-k+p}} \varepsilon^i W_{k-p+i}(A). \tag{5}$$

Telle est la formule corrective cherchée.

Cas des sections planes épaisses. Examinons le cas, le plus intéressant en pratique, des sections par des hyperplans épais ($k = n-1$). En désignant par $a = 2\varepsilon$ *l'épaisseur* de la section, il vient

$$W'_{n-p-1}(A) = W_{n-p-1}(A) + a(b_p/b_{p+1})W_{n-p}(A). \tag{6}$$

Telle est l'expression de *l'erreur due à l'emploi de sections épaisses.* On peut en déduire une *correction approchée* (pour a petit). La relation (6) donne, en effet,

$$W'_0(A) = W_0(A) + a(b_{n-1}/b_n)W_1(A)$$

$$W'_1(A) = W_1(A) + a(b_{n-2}/b_{n-1})W_2(A)$$

$$\cdots$$

$$W'_{n-1}(A) = W_{n-1}(A) + a(b_0/b_1)W_n(A).$$

Donc

$$W'_{n-1}(A) = W'_{n-1}(A) - a(b_0/b_1)W_n(A),$$

et par récurrence,

$$\begin{aligned} W_{n-p-1}(A) = {} & W'_{n-p-1}(A) - a(b_p/b_{p+1})W'_{n-p}(A) + a^2(b_{p-1}/b_{p+1})W'_{n-p+1}(A) \\ & + \cdots (-1)^p a^p (b_1/b_{p+1})W'_{n-1}(A) + (-1)^{p+1} a^{p+1}(b_0/b_{p+1})W_n(A). \end{aligned} \tag{7}$$

Dans le cas tridimensionnel usuel, $V = W_0$ est le volume, $F = 3W_1$ la surface et $N = 3W_2$ la norme. On trouve donc, pour un convexe A unique

$$V' = V + \tfrac{1}{4}aF,$$

$$F' = F + (2/\pi)aN,$$

$$N' = N + 2\pi a,$$

et par suite

$$N = N' - 2\pi a,$$

$$F = F' - (2/\pi)aN' + 4a^2,$$

$$V = V' - \tfrac{1}{4}aF' + (1/2\pi)a^2N' - a^3.$$

Remarque. Si, au lieu d'un convexe A unique, nous avons affaire à un nombre ν (inconnu) de convexes A_i, $i = 1, 2 \cdots \nu$, les formules précédentes subsisteront (pourvu que les projections $\Pi_V(A \cap (V \oplus \varepsilon B))$ soient disjointes sur chacune des variétés V) à condition de poser $W_{n-p}(A) = \Sigma_i W_{n-p}(A_i)$. En particulier $(1/b_n)W_n(A) = \nu$ est le nombre (inconnu) des constituants de A. Mais on voit sur (7), ou (8), que ν n'intervient que dans le terme correctif d'ordre maximal. La troisème relation (8), par exemple, donne

$$V = V' - \tfrac{1}{4}aF' + (1/2\pi)a^2N' - a^3\nu.$$

Si donc a est petit, on reconstituera V, F et N avec une très bonne précision.

Mais il y a mieux: si l'on dispose de deux séries de mesures effectuées sur des *lames épaisses d'épaisseurs différentes, a'* et a'', il est alors *possible de reconstituer le nombre ν des constituants de A* (quoiqu'avec une précision vraisemblablement médiocre). En effet, soient

$$N' = N + 2\pi a'\nu \quad \text{et} \quad N'' = N + 2\pi a''\nu$$

les mesures (entachées d'erreur) de la norme obtenue à partir des deux séries d'observation. Par différence, on trouve

$$N' - N'' = 2\pi(a' - a'')\nu,$$

c'est-à-dire

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\frac{N' - N''}{a' - a''}.$$

Il est donc théoriquement possible de reconstituer ν. Mais la précision sera médiocre, si a' et a'' sont petits (car N' et N'' sont peu différentes, et $N' - N''$ risque d'être du même ordre de grandeur que les erreurs expérimentales commises sur N' et N'').

References

Giger, H. (1972) Grundgleichungen der Stereologie II. *Metrika* **18**, 84–93.

Matheron, G. (1975) *Random Sets and Integral Geometry*. Wiley, New York.

Miles, R. E. (1974) The estimation of aggregate and overall characteristics from thick sections by transmission microscopy. *Electron Microscopy* 1974, Vol. 2, Ed. J. V. Sanders and D. J. Goodchild. Australian Academy of Science, Canberra, 6–7.

Miles, R. E. (1976) On estimating aggregate and overall characteristics from thick sections by transmission microscopy. *Proceedings of the 4th International Congress for Stereology, Gaithersburg, Md., U.S.A.* National Bureau of Standards Special Publication 431.