

D 1159

I

LA FORMULE DE STEINER POUR LES ÉROSIONS

G. MATHERON, *Centre de Morphologie Mathématique, École Nationale Supérieure des Mines de Paris*

Abstract

If A and K are compact convex sets in $\mathbb{R}^n$, a Steiner-type formula is valid for the erosion of A by K if and only if A is open with respect to K . The if part is proved in the general case. The only if part is conjectured, and proved only in the case $n = 2$.

EROSION; STEINER FORMULA

Si A et K sont compacts et convexes dans $\mathbb{R}^n$, et si $\oplus$ désigne la somme de Minkowski (i.e. $B \oplus C = \{b + c, b \in B, c \in C\}$), on montre en géométrie intégrale que le volume de $A \oplus \rho K$ ($\rho \geq 0$) est un polynôme de degré $\leq n$, soit:

$$(1) \quad V(A \oplus \rho K) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} W_k(A, K) \rho^k.$$

Les coefficients de ce polynôme sont les valeurs en (A, K) des fonctionnelles mixtes de Minkowski. En particulier $W_0(A, K) = V(A)$ et $W_n(A, K) = V(K)$. Plus généralement, on a aussi

$$(2) \quad W_p(A \oplus \rho K, K) = \sum_{k=0}^{n-p} \binom{n-p}{k} W_{k+p}(A, K) \rho^k \quad (p = 0, 1, \dots, n).$$

Ces fonctionnelles mixtes (à deux variables A et K) sont liées aux fonctionnelles usuelles, à une seule variable, (*Quermassintegrale*) par l'intermédiaire d'un passage aux *moyennes de rotation*: Si Ω désigne le groupe des rotations de $\mathbb{R}^n$, et $\bar{\omega}(d\omega)$ l'unique probabilité invariante par rotation sur Ω , on a, en effet, la relation classique

$$(3) \quad \int_{\Omega} W_k(\omega A, K) \bar{\omega}(d\omega) = (1/b_n) W_k(A) W_{n-k}(K)$$

où b_n désigne le volume de la boule unité dans $\mathbb{R}^n$. En particulier, la moyenne de rotation du volume de $A \oplus \rho K$ est donnée par

$$(4) \quad \int_{\Omega} V(\omega A \oplus \rho K) \bar{\omega}(d\omega) = (1/b_n) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} W_k(A) W_{n-k}(K) \rho^k.$$

Received 12 January 1977.

Vis-à-vis de la soustraction de Minkowski $\ominus$, on n'a pas, en général, de résultats aussi simples. Plutôt que la soustraction de Minkowski, d'ailleurs, il y a intérêt à considérer l'érosion de A par ρK , c'est-à-dire la différence $A \ominus \rho \check{K}$ où $\check{K}$ est le symétrique de K par rapport à l'origine des coordonnées. (D'une manière générale, $B \ominus \check{C} = \{x : C_x \subset B\}$, C_x désignant le translaté de C par x .) Mon objectif, dans ce qui suit, est d'examiner sous quelles conditions les formules (1), (2) ou (4) restent applicables aux érosions, en changeant ρ en $-\rho$. Dans le premier paragraphe, j'établis la condition nécessaire et suffisante pour que (2) reste valable pour les érosions: A doit être *ouvert* selon K , i.e. $A = A_K$, avec $A_K = (A \ominus \check{K}) \oplus K$.

Ce premier résultat doit pouvoir être amélioré. La réciproque, en effet, suppose que toutes les fonctionnelles W_p ($p = 0, 1, \dots, n$) vérifient la relation en question. Je conjecture une forme plus forte de réciproque: Il doit suffire de supposer seulement que le volume de l'érodé vérifie la formule pour que A soit ouvert selon K . De même, si on passe aux moyennes de rotation, on déduit de ce premier résultat la démonstration générale d'une conjecture de Miles [1] (démontrée par cet auteur dans le cas $n = 2$) selon laquelle la formule de Steiner s'applique à la moyenne de rotation de l'érodé pourvu que A et tous ses transformés par rotation soient ouverts selon K . A mon tour, j'avance à titre de nouvelle conjecture que cette condition doit être non seulement suffisante, mais aussi nécessaire. Je démontre ces deux nouvelles conjectures dans le paragraphe 3, mais pour l'espace à deux dimensions seulement. Dans le dernier paragraphe, je donne (toujours dans $\mathbb{R}^2$) la condition nécessaire et suffisante pour que le volume de l'érodé soit un polynôme du deuxième degré.

1. La formule (2) pour les érosions

Donnons tout de suite le résultat principal.

Théorème 1. Soient A et K compacts et convexes dans $\mathbb{R}^n$. On a :

$$(2') \quad W_p(A \ominus \rho \check{K}, K) = \sum_{k=0}^{n-p} \binom{n-p}{k} (-1)^k \rho^k W_{k+p}(A, K)$$

pour $p = 0, 1, \dots, n$ et tout $\rho \in (0, 1)$ si et seulement si A est ouvert selon K .

Démonstration. (a) Supposons A ouvert selon K , soit $A = A_1 \oplus K$ avec $A_1 = A \ominus \check{K}$. Alors, pour $0 \leq r \leq 1$, on a aussi $A \ominus r \check{K} = A_1 \oplus (1-r)K$ et, d'après la formule (2):

$$W_p(A \ominus r \check{K}, K) = \sum \binom{n-p}{k} (1-r)^k W_{k+p}(A_1, K) = Q_p(r)$$

est un polynôme en r . D'après la même formule, pour $r \geq 0$ on trouve aussi:

$$W_p(A \oplus rK, K) = \sum \binom{n-p}{k} r^k W_{k+p}(A, K) = P_p(r).$$

Mais on a $A \oplus rK = A_1 \oplus (1+r)K$, et par suite encore:

$$W_p(A \oplus rK, K) = \sum \binom{n-p}{k} (1+r)^k W_{k+p}(A_1, K) = Q_p(-r).$$

Par conséquent, $Q_p(-r) = P_p(r)$ pour $r \geq 0$: comme il s'agit de polynômes, cela entraîne aussi $Q_p(r) = P_p(-r)$ pour $r \in (0, 1)$, c'est-à-dire $W_p(A \ominus r\check{K}, K) = P_p(-r)$.

(b) Inversement, supposons:

$$W_p(A \ominus \check{K}, K) = P_p(-1) \quad \text{pour } p = 0, 1, \dots, n.$$

Appliquons la formule (1) à l'ouverture $A_K = (A \ominus \check{K}) \oplus K$. Il vient:

$$V(A_K) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} W_k(A \ominus \check{K}, K) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P_k(-1).$$

Un calcul élémentaire donne alors $\sum \binom{n}{k} P_k(-1) = V(A)$. Comme $A_K \subset A$, l'égalité $V(A_K) = V(A)$ entraîne l'égalité $A_K = A$: A est ouvert selon K .

Corollaire 1. Si A est ouvert selon K , pour tout $p \in (0, 1)$ on a:

$$(1') \quad V(A \ominus p\check{K}) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k p W_k(A, K).$$

Ce corollaire est trivial, mais sa réciproque ne l'est pas. Nous l'énoncerons sous forme de conjecture dans $\mathbb{R}^n$, et nous la démontrerons seulement dans le cas $n = 2$.

Conjecture 1 (réciproque forte). Si (1') est vrai, alors A est ouvert selon K .

Nous verrons ci-dessous que le volume de l'érodé est dérivable en ρ et admet la dérivée:

$$(5) \quad \frac{d}{d\rho} V(A \ominus \rho\check{K}) = -n W_1(A \ominus \rho\check{K}, K) \quad (\rho \in (0, 1))$$

(pourvu que $A \ominus \check{K} \neq \emptyset$). Il suit de là que (1') entraîne que (2') est vérifiée pour $p = 1$. Dans l'espace à deux dimensions, cela suffit (puisque $W_2(A \ominus \rho\check{K}, K) = V(K)$ vérifie trivialement (2')), et la conjecture 1 est un simple corollaire du théorème. Mais il n'en est plus du tout de même pour $n \geq 3$.

En ce qui concerne les moyennes de rotation, nous obtenons un résultat avancé par Miles [1] à titre de conjecture (et démontré par lui dans le cas $n = 2$).

Corollaire 2. Si A et tous ses transformés par rotation sont ouverts selon K , alors, pour tout $\rho \in (0, 1)$, on a:

$$(4') \quad \int_{\Omega} V(\omega A \ominus \rho \check{K}) \bar{\omega}(d\omega) = \frac{1}{b_n} \sum_k \binom{n}{k} (-1)^k \rho^k W_k(A) W_{n-k}(K).$$

En effet, il suffit d'appliquer (1') à ωA et d'utiliser la relation (3).

Remarque. Il est facile de voir que notre condition (ωA ouvert selon K pour toute rotation $\omega \in \Omega$) est équivalente à celle que donne Miles (le sup des rayons de courbure de K doit être majoré par l'inf des rayons de courbure de A) ou encore à la suivante:

il existe une boule Br de rayon $r \geq 0$ telle que A soit ouvert selon Br , et Br ouverte selon K .

Nous démontrerons plus loin la réciproque de ce corollaire dans le cas $n = 2$. Pour $n > 2$, nous l'avancerons à titre de conjecture.

Conjecture 2. Si (4') est vérifiée, alors A et tous ses transformés par rotation sont ouverts selon K .

2. Dérivabilité et convexité de $V(A \ominus \rho \check{K})$

Dans ce qui suit, A et K désigneront toujours des compacts convexes tels que l'érodé $A \ominus \check{K}$ ne soit pas vide. Comme les diverses fonctionnelles étudiées ici sont invariantes par translation, nous pouvons même supposer $0 \in K \subset A$, ce qui permettra d'utiliser les fonctions d'appui ϕ_K et ϕ_A de ces convexes.

Notre premier objectif est d'établir la dérivabilité de $V(A \ominus \rho \check{K})$, et la relation (5) utilisée pour démontrer la conjecture 1 dans le cas $n = 2$. Notons d'abord une inégalité. De $A \supset A_{\rho K} = (A \ominus \rho \check{K}) \oplus \rho K$ et de la relation (1), résulte:

$$V(A) \geq V(A \ominus \rho \check{K}) + n\rho W_1(A \ominus \rho \check{K}, K) + \dots$$

(compte tenu de la continuité de W_1) et par suite pour ρ tendant vers 0:

$$(6) \quad \liminf \frac{V(A) - V(A \ominus \rho \check{K})}{\rho} \geq nW_1(A, K).$$

Utilisons ensuite le lemme suivant (que nous démontrerons dans un instant).

Lemme de convexité. Pour tout $\rho \in (0, 1)$, on a:

$$(7) \quad V(A \oplus \rho K) - V(A) \geq V(A) - V(A \ominus \rho \check{K}).$$

D'après ce lemme, on obtient pour ρ tendant vers 0:

$$\limsup \frac{V(A) - V(A \ominus \rho \check{K})}{\rho} \leq \lim \frac{V(A \oplus \rho K) - V(A)}{\rho} = nW_1(A, K).$$

Compte tenu de (6), cela signifie que $V(A \ominus \rho \check{K})$ admet en $\rho = 0$ une dérivée à

droite égale à $-nW_1(A, K)$. En remplaçant A par $A \ominus \rho\check{K}$, on trouve ensuite pour $0 \leq \rho < 1$

$$\frac{d^+ V(A \ominus \rho\check{K})}{d\rho} = -nW_1(A \ominus \rho\check{K}, K).$$

Pour $0 < \rho \leq 1$, des raisonnements analogues montrent que la dérivée à gauche existe également et vaut encore $-nW_1(A \ominus \rho\check{K}, K)$. Ceci établit la dérivabilité et la relation (5). De plus, cette dérivée est croissante (car $W_1(C, K)$ est une fonction croissante du convexe C) de sorte que la fonction $\rho \rightarrow V(A \ominus \rho\check{K})$ est convexe sur $(0, 1)$, et donc aussi sur $(0, \rho_0)$, où $\rho_0 = \max\{\rho : A \ominus \rho\check{K} \neq \emptyset\}$. En fait, on vérifie sans peine $V(A \ominus \rho_0\check{K}) = 0$, de sorte que $V(A \ominus \rho\check{K})$ est convexe sur $(0, \infty)$.

Si nous posons $\Phi(\rho) = V(A \ominus \rho\check{K})$ pour $\rho \geq 0$, $= V(A \oplus \rho\check{K})$ pour $\rho < 0$, cette fonction Φ admet la même dérivée $-nW_1(A, K)$ à droite et à gauche en $\rho = 0$. Comme elle est convexe sur la demi-droite positive, et aussi, d'après (1), sur la demi-droite négative, cette fonction est donc convexe sur la droite entière $(-\infty, +\infty)$.

Démonstration du lemme de convexité. Considérons d'abord le cas où A est un *polyèdre* (d'intérieur non vide). Soient F_i , $i=1, \dots, N$ les faces de A , S_i le $(n-1)$ volume de F_i et U_i son vecteur normal unitaire orienté vers l'extérieur. Si ϕ_* désigne la fonction d'appui de K , on a:

$$V(A \oplus \rho K) \geq V(A) + \rho \sum S_i \phi_*(U_i)$$

et

$$nW_1(A, K) = \sum S_i \phi_*(U_i).$$

Montrons que $V(A \ominus \rho\check{K})$ admet la dérivée à droite $-nW_1(A, K)$ en $\rho = 0$.

Soit $x \in A$ un point de A . On a $x \notin A \ominus \rho\check{K}$ si et seulement si $x \in F_i \oplus \rho\check{K}$ pour l'une, au moins, des faces F_i . Mais il est facile de voir que le volume de $A \cap (F_i \oplus \rho\check{K})$ admet une majoration de la forme

$$V((F_i \oplus \rho\check{K}) \cap A) \leq \rho(S_i \phi_*(U_i) + \varepsilon_i)$$

avec $\varepsilon_i \rightarrow 0$ si $\rho \rightarrow 0$. (ϕ_* est la fonction d'appui de K). Par suite:

$$V(A) - V(A \ominus \rho\check{K}) \leq \sum_i V[(F_i \oplus \rho\check{K}) \cap A] \leq \rho \sum (S_i \phi_*(U_i) + \varepsilon_i)$$

et

$$\limsup \frac{V(A) - V(A \ominus \rho\check{K})}{\rho} \leq \sum_i S_i \phi_*(U_i) = nW_1(A, K).$$

Compte tenu de (6), ceci implique l'existence de la dérivée à droite en $\rho = 0$.

Comme cette dérivée vaut $-nW_1(A, K)$, la fonction $\Phi(\rho) = V(A \ominus \rho\check{K})$ si $\rho \geq 0$, $= V(A \oplus \rho K)$ si $\rho < 0$ admet elle-même la dérivée

$$\Phi'(0) = -nW_1(A, K) \quad \text{en } \rho = 0.$$

Pour $\rho > 0$, $A \ominus \rho\check{K}$ est encore un polyèdre (comme intersection de polyèdres déduits de A par translation), et l'on peut appliquer le même raisonnement en remplaçant A par $A \ominus \rho\check{K}$. On voit ainsi que Φ admet en tout $\rho \in (-\infty, 1)$ la dérivée $\Phi'(\rho) = -nW_1(A \ominus \rho\check{K}, K)$ si $\rho \geq 0$, $= -nW_1(A \oplus \rho K, K)$ si $\rho < 0$. Cette dérivée est croissante, de sorte que Φ est convexe. En particulier, A vérifie la relation (7).

Si maintenant A n'est pas un polyèdre, considérons une suite $\{A_n\}$ décroissante de polyèdres convexes telle que $A = \cap A_n$: on a $A \oplus \rho K = \cap (A_n \oplus \rho K)$, $A \ominus \rho\check{K} = \cap (A_n \ominus \rho\check{K})$, de sorte que la relation (7), vérifiée par chaque A_n , passe à la limite.

La mesure de surface. Lorsque A est un polyèdre convexe, on a pour tout K compact convexe:

$$(8) \quad nW_1(A, K) = \int \phi_K(u) G_A(du)$$

où G_A est la mesure sur la sphère unité définie par $G_A = \sum S_i \delta_{u_i}$. Comme les fonctions d'appui ϕ_K des compacts convexes K forment une partie totale dans l'espace des fonctions continues sur la sphère unité (munie de la convergence uniforme), cette relation (8) passe à la limite: pour tout A compact convexe, il existe une mesure G_A sur la sphère unité telle que (8) soit vérifiée, et l'application $A \rightarrow G_A$ est continue. (Si $A_n \rightarrow A$ pour la métrique de Hausdorff, $G_{A_n} \rightarrow G_A$ pour la convergence vague.)

De plus, si A est un polyèdre, les $(n-1)$ volumes $S_i(\rho)$ des faces de l'érodé $A \ominus \rho\check{K}$ sont majorées par les $(n-1)$ -volumes S_i des faces correspondantes de A . On a donc, $G_{A \ominus \rho\check{K}} \leq G_A$. Cette relation, également, passe à la limite: pour tout A compact convexe, l'application $\rho \rightarrow G_{A \ominus \rho\check{K}}$ est décroissante. En particulier, nous voyons le résultat suivant.

Lemme 2. Dans l'espace à deux dimensions, A est ouvert selon $A \ominus \check{K}$, quels que soient les compacts convexes A et K tels que $A \ominus \check{K} \neq \emptyset$.

En effet, dans $\mathbb{R}^2$, une mesure G sur le cercle unité est la mesure périmétrique d'un compact convexe (défini à une translation près) si et seulement si $\int e^{i\theta} G(d\theta) = 0$ (condition de fermeture du contour). Si $A \ominus \check{K} \neq \emptyset$, on a $G_{A \ominus \check{K}} \leq G_A$, d'après ce qui précède. Donc, la mesure $G = G_A - G_{A \ominus \check{K}}$ est positive, et, comme elle vérifie la condition de fermeture, G est la mesure périmétrique d'un compact convexe K_1 .

Mais $G_A = G_{A \ominus \check{K}} + G_{K_1}$ équivaut alors à $A = (A \ominus \check{K}) \oplus K_1$. Donc A est ouvert selon $A \ominus \check{K}$.

Remarque. Le lemme 2 n'est pas vrai pour $n \geq 3$. Contre exemple: dans $\mathbb{R}^3$, prenons pour A un cône de révolution, limité par une base circulaire, et pour K un segment de droite h parallèle à cette base. Alors $A \ominus \check{K}$ est l'intersection $A \cap A_{-h}$, et on voit facilement que A n'est pas ouvert selon $A \cap A_{-h}$.

Dans $\mathbb{R}^n$, posons successivement $A_1 = A \ominus \check{K}$, $K_1 = A \ominus \check{A}_1 = A \ominus (\check{A} \ominus K)$. Il est facile de voir que K_1 est la fermeture de K selon le complémentaire A^c de A (i.e. l'intersection des translatés de A qui contiennent K), soit:

$$K_1 = K^{A^c} = (K \oplus \check{A}^c) \ominus A^c = \cap \{A_h : A_h \supset K\}.$$

Alors $A \ominus \check{K}_1 = A_1$ (car $A \ominus \check{K}_1$ est la fermeture de A_1 selon A^c , mais A_1 est déjà fermé selon A^c en tant qu'intersection de translatés de A) et on a $A_{K_1} = A_{A_1} = A_1 \oplus K_1 \subset A$. Mais l'inclusion est stricte, en général, et c'est seulement dans le cas $n = 2$ que l'égalité $A = A_1 \oplus K_1$ est assurée.

Dans $\mathbb{R}^n$, si A est ouvert selon K , soit $A = A_1 \oplus K$, on a nécessairement $K_1 = K$.

En effet, $A_1 \oplus K = A \supset A_1 \oplus K_1 \supset A_1 \oplus K$ entraîne alors l'égalité $A_1 \oplus K_1 = A_1 \oplus K$ et $K_1 = K$.

Pour $n = 2$, la réciproque est vraie: dans $\mathbb{R}^2$, A est ouvert selon K si et seulement si $K_1 = K$.

En effet, selon le lemme 2, dans $\mathbb{R}^2$, A est ouvert selon $A_1 = A \ominus \check{K}$. On a donc $A = A_1 \oplus C$ pour un compact convexe C qui vérifie alors $C = A \ominus \check{A}_1 = K_1$. Donc $A = A_1 \oplus K_1$. Par suite, si $K_1 = K$, on a $A = A_1 \oplus K$ et A est ouvert selon K .

3. Démonstration des Conjectures 1 et 2 pour $n = 2$

Dans le cas $n = 2$, on a une importante inégalité.

Théorème 2. Si A et K sont compacts convexes dans $\mathbb{R}^2$ et $A \ominus \check{K} \neq \emptyset$, on a:

$$(9) \quad V(A \ominus \rho \check{K}) \geq V(A) - 2\rho W_1(A, K) + \rho^2 V(K)$$

pour tout $\rho \in (0, 1)$, avec égalité si et seulement si A est ouvert selon ρK .

En effet, d'après (5), on a tout d'abord:

$$\frac{d}{d\rho} V(A \ominus \rho \check{K}) = -2W_1(A \ominus \rho \check{K}, K)$$

et $A \supset A_{\rho K} = (A \ominus \rho \check{K}) \oplus \rho K$ entraîne ensuite, d'après (2):

$$W_1(A, K) \geq W_1(A \ominus \rho \check{K}, K) + \rho V(K).$$

Par suite:

$$\frac{d}{d\rho} V(A \ominus \rho \check{K}) \geq 2\rho V(K) - 2W_1(A, K)$$

et en intégrant de 0 à $\rho_0 \leq 1$:

$$V(A \ominus \rho_0 \check{K}) \geq V(A) - 2\rho_0 W_1(A, K) + \rho_0^2 V(K).$$

Si l'égalité est réalisée, cela entraîne:

$$\frac{d}{d\rho} V(A \ominus \rho \check{K}) = 2\rho V(K) - 2W_1(A, K)$$

pour $(0 \leq \rho \leq \rho_0)$, i.e. $W_1(A \ominus \rho \check{K}) = W_1(A, K) - \rho v(K)$.

En reportant ces résultats dans

$$V(A_{\rho_0 K}) = V(A \ominus \rho_0 \check{K}) + 2\rho_0 W_1(A \ominus \rho_0 \check{K}, K) + \rho_0^2 V(K)$$

on trouve alors identiquement $V(A_{\rho_0 K}) = V(A)$, et par suite $A = A_{\rho_0 K}$ est ouvert selon $\rho_0 K$.

Corollaire. Les conjectures 1 et 2 sont vraies dans $\mathbb{R}^2$.

Pour la conjecture 1, cela est immédiat. Supposons que nous ayons:

$$\int_{\Omega} V(\omega A \ominus \rho \check{K}) \bar{\omega}(d\omega) = V(A) - (\rho/2\pi) S(A) S(K) + \rho^2 V(K)$$

où $S(A) = 2W_1(A)$ et $S(K) = 2W_1(K)$ sont les périmètres de A et K . D'après l'inégalité (9), cela signifie que l'on a:

$$V(\omega A \ominus \rho \check{K}) = V(A) - 2\rho W_1(A, K) + \rho^2 V(K),$$

donc ωA ouvert selon K , pour $\bar{\omega}$ -presque toute rotation $\omega \in \Omega$. Comme l'ensemble des compacts convexes ouverts selon K est fermé (pour la métrique de Hausdorff) cette relation a lieu, en fait, pour tout $\omega \in \Omega$, et la conjecture 2 en résulte.

A ce stade, nous sommes conduits à avancer une troisième conjecture (dont les conjectures 1 et 2 seraient des conséquences immédiates).

Conjecture 3. Dans $\mathbb{R}^n$, on a pour tout $\rho \in (0, 1)$:

$$V(A \ominus \rho \check{K}) \geq \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \rho^k W_k(A, K)$$

avec égalité si et seulement si A est ouvert selon ρK .

4. Conditions pour que $V(A \ominus \rho \check{K})$ soit un polynome

Lorsque A n'est pas ouvert selon K , la fonction $\rho \rightarrow V(A \ominus \rho \check{K})$ peut être assez compliquée (par exemple, si l'on érode une boule selon un cube), mais

peut, dans certains cas, être un polynôme de degré n (par exemple, si l'on érode un cube selon une boule). Dans le cas de l'espace à deux dimensions, on peut obtenir à cet égard un résultat précis (qui ne se généralise pas à $n > 2$).

En effet, (pour $n = 2$), posons $A_\rho = A \ominus \rho\check{K}$ et $K_\rho = A \ominus \check{A}_\rho$ ($\rho \in (0, 1)$). D'après le lemme 2, on a alors $A = A_\rho \oplus K_\rho$, et $\rho K \subset K_\rho \subset \rho K_1$. On peut aussi écrire $A_1 = A \ominus \check{K} = (A \ominus \rho\check{K}) \ominus (1 - \rho)\check{K} = A_\rho \ominus (1 - \rho)\check{K}$. D'après le même lemme 2, ceci entraîne que A_ρ est ouvert selon A_1 , soit:

$$(10) \quad A_\rho = A_1 \oplus X_\rho$$

avec $X_\rho = A_\rho \ominus \check{A}_1$. Il en résulte $A = A_\rho \oplus K_\rho = A_1 \oplus K_\rho \oplus X_\rho$. Comme on a aussi: $A = A_1 \oplus K_1$, ceci entraîne encore

$$(10') \quad K_1 = K_\rho \oplus X_\rho.$$

Ainsi, K_1 est ouvert selon $K_\rho = A \ominus \check{A}_\rho$ pour tout $\rho \in (0, 1)$. Comme $\rho K \subset \rho K_1$, on a ensuite $A \ominus \rho\check{K} = A_\rho \supset A \ominus \rho\check{K}_1$, donc:

$$(11) \quad V(A \ominus \rho\check{K}) \geq V(A \ominus \rho\check{K}_1) = V(A) - 2\rho W_1(A, K_1) + \rho^2 V(K_1)$$

avec d'ailleurs l'égalité en $\rho = 0$ et en $\rho = 1$ (car $A \ominus \check{K} = A \ominus \check{K}_1$).

Pour ρ différent de 0 et de 1, l'inégalité (11) devient une égalité si et seulement si $A \ominus \rho\check{K} = A \ominus \rho\check{K}_1$, c'est-à-dire si:

$$A_1 \oplus X_\rho = (A_1 \oplus K_1) \ominus \rho\check{K}_1 = A_1 \oplus (1 - \rho)K_1,$$

donc enfin si $X_\rho = (1 - \rho)K_1$. Mais $X_\rho = (1 - \rho)K_1$, d'après (10'), équivaut à $K_\rho = \rho K_1$.

D'où un premier résultat.

Lemme 3. Dans $\mathbb{R}^2$, l'inégalité (11) est vraie, et l'égalité a lieu en $\rho \in (0, 1)$ si et seulement si $K_\rho = \rho K_1$.

Plus généralement, nous avons le théorème suivant.

Théorème 3. Dans $\mathbb{R}^2$, $V(A \ominus \rho\check{K})$ est un polynôme du second degré en ρ si et seulement si $K_\rho = \rho K_1$ pour tout $\rho \in (0, 1)$, et dans ce cas on a

$$\begin{cases} V(A \ominus \rho\check{K}) = V(A) - 2\rho W_1(A, K_1) + \rho^2 V(K_1) \\ W_1(A, K_1) = W_1(A, K). \end{cases}$$

Si $K_\rho = \rho K_1$, les relations annoncées découlent du lemme 3 et de la formule (5). Inversement, supposons que $V(A_\rho)$ soit un polynôme du second degré,

$$V(A_\rho) = V(A) - 2a\rho + H\rho^2.$$

En appliquant (5), nous trouvons $a = W_1(A, K)$ et

$$W_1(A_\rho, K) = W_1(A, K) - \rho H.$$

Mais $A = A_\rho \oplus K_\rho$ et $W_1(A, K) = W_1(A_\rho, K) + W_1(K_\rho, K)$. Par suite:

$$\rho H = W_1(K_\rho, K) \quad (\forall \rho \in (0, 1)).$$

En particulier, pour $\rho = 1$, il vient

$$H = W_1(K_1, K).$$

On peut alors écrire pour $\rho = 1$

$$\begin{aligned} V(A_1) &= V(A) - 2W_1(A, K) + W_1(K_1, K) \\ &= V(A) - 2W_1(A_1, K) - W_1(K_1, K) \end{aligned}$$

(puisque $A = A_1 \oplus K_1$), puis (d'après $K \subset K_1$)

$$V(A_1) \geq V(A) - 2W_1(A_1, K_1) - V(K_1) = V(A) - 2W_1(A, K_1) + V(K_1) = V(A_1).$$

Il suit de là que les inégalités précédentes sont, en fait, des égalités:

$$W_1(K_1, K) = V(K_1)$$

$$W_1(A_1, K) = W_1(A_1, K_1)$$

$$W_1(A, K) = W_1(A, K_1).$$

On a donc bien $a = W_1(A, K_1)$ et $H = V(K_1)$. D'après le lemme 3, ceci entraîne $A_\rho = A \ominus \rho \check{K}_1$, et $K_\rho = \rho K_1$ pour tout $\rho \in (0, 1)$.

Remarque. Le théorème 3 n'est pas vrai pour $n \geq 3$. En effet, prenons, dans $\mathbb{R}^3$, pour A la boule diamètre unité et pour K un segment de droite de longueur unité. Alors pour $\rho \in (0, 1)$, on trouve:

$$V(A \ominus \rho \check{K}) = \frac{\pi}{6} (1 - \frac{3}{2}\rho + \frac{1}{2}\rho^3).$$

C'est un polynôme du troisième degré. Mais la relation $K_\rho = \rho K_1$ n'est pas vérifiée.

Référence

[1] MILES, R. E. (1974) On the elimination of edge effects in planar sampling. In *Stochastic Geometry*, ed. E. F. Harding and D. G. Kendall. Wiley, London.

