

CHANGEMENT DE SUPPORT EN MODELE MOSAIQUE

par Georges MATHERON

TABLE DES MATIERES

ABSTRACT - RESUME	ZUSAMMENFASSUNG
A - Introduction.....	G - Version discrète d'un processus de diffusion.....
B - Définition des lois monovariabiles..	H - Un modèle de changement de support
C - Définition de la loi bivariable....	I - Krigeage disjonctif en modèle mosaïque.....
D - Factorisation du modèle mosaïque....	J - Une simulation.....
E - Conservation de l'orthogonalité....	References.....
F - Cas d'un processus de diffusion continu	

ILLUSTRATIONS

Figure 1 - Courbes $Q = Q(T)$

* Centre de Géostatistique et Morphologie Mathématique, Ecole des Mines de Paris,
35 rue Saint-Honoré - 77305 FONTAINEBLEAU - France.

R E S U M E

On présente ici un nouveau modèle de changement de support qui réalise la factorisation du modèle mosaïque, et permet de construire de nouveaux types de modèles isofactoriels. Dans le cadre d'un modèle mosaïque, l'estimation des réserves récupérables par krigeage disjonctif relève d'un formalisme remarquablement simple.

A B S T R A C T

A new model of change of support is presented here, which factorizes the mosaic model and allows building new types of isofactorial models. In the framework of a mosaic model, estimating recoverable reserves by disjunctive kriging can be done in a remarkably simple way.

Z U S A M M E N F A S S U N G

Es wird hier ein neues Modell des Stützungswechsels (Stützung : Volumen, auf das ein Erzgehalt bezogen wird) vorgestellt, welches das Mosaik-Modell mit einem Faktor versteht und es ermöglicht, neue Arten von isofaktoriellen Modellen zu schaffen. Im Rahmen eines Mosaik-Modells lässt sich die Schätzung der bauwürdigen Vorräte mittels disjunkтивem Kriging auf bemerkenswert einfache Weise durchführen.

A - I N T R O D U C T I O N

Le modèle de changement de support présenté ci-dessous est assez particulier, en ce sens qu'il réalise une factorisation du modèle mosaïque. Voici ce qu'il faut entendre par là. Dans un modèle mosaïque, deux teneurs ponctuelles sont indépendantes avec la probabilité $(1-\rho)$, et admettent la même loi F , ou bien au contraire sont égales avec la probabilité ρ , et la loi de cette valeur commune est encore F . Ainsi, pour toute fonction φ , l'espérance conditionnelle de $\varphi(Z_x)$ connaissant Z_x est $\rho\varphi(Z_x) + (1-\rho) E[\varphi(Z_x)]$. L'opérateur correspondant est donc $\rho I + (1-\rho) E$, où I est l'identité et E l'espérance.

Si maintenant nous considérons un bloc V et un point x aléatoire dans V , la loi F_V de la teneur Z_V du bloc se déduit de la loi F si l'on connaît la loi conditionnelle $P(z;d z_V)$ de Z_V à Z fixé. Il est commode de considérer cette loi $P(z;d z_V)$ comme une probabilité de transition (dans le sens point $\rightarrow$ vers bloc). De même, la loi conditionnelle $\Gamma(z_V;dz)$ de la teneur Z_x d'un point x aléatoire dans V lorsque Z_V est fixé est une probabilité de transition dans le sens bloc $\rightarrow$ point. Dans ces conditions le produit $P\Gamma$ représente la loi conditionnelle de la teneur d'un point x aléatoire dans V lorsque l'on connaît la teneur d'un autre point x' implanté dans V de manière aléatoire et indépendante de x . Dans le modèle mosaïque, on doit donc avoir

$$P\Gamma = \rho I + (1-\rho)E \quad (a)$$

C'est en ce sens que les probabilités de transition point $\rightarrow$ bloc et bloc $\rightarrow$ point réalisent la factorisation du modèle mosaïque.

Cette équation (a) admet plusieurs solutions. On trouvera dans les trois premiers paragraphes un procédé simple, basé sur des opérations du type Maximum ou Minimum, permettant de trouver une solution, c'est-à-dire des versions acceptables des probabilités de transition point $\rightarrow$ bloc et bloc $\rightarrow$ point. Les trois paragraphes suivants tirent les conséquences de la principale propriété de ces opérateurs P et Γ , qui est la conservation de l'orthogonalité. Il en résulte un procédé permettant de fabriquer de nouveaux modèles isofactoriels à partir d'un modèle isofactoriel donné. Pour les applications à la Géostatistique, c'est là sans doute la propriété la plus intéressante de ce modèle. On montre ensuite que les réserves récupérables associées à un support V se déduisent par des formules très simples des réserves définies sur un support v . Enfin, on examine comment se présente, dans le cadre d'un modèle mosaïque, l'estimation locale, par krigeage disjonctif, de ces réserves récupérables : le formalisme obtenu est aussi simple que le krigeage des indicatrices, mais beaucoup plus réaliste comme le montrent les résultats de deux simulations présentés dans le dernier paragraphe.

B - D E F I N I T I O N D E S L O I S M O N O V A R I A B L E S

Soit Y une variable aléatoire admettant une loi $F(dy)$. Nous posons :

$$F(y) = P(Y < y) ; F_+(y) = P(y \leq y)$$

Si α est un nombre réel strictement compris entre 0 et 1, posons

$$G(x) = \frac{(1-\alpha) F(x)}{1-\alpha F(x)} \quad (1)$$

Il est facile de voir que G est encore une fonction de répartition. L'interprétation de cette loi G est la suivante : considérons une suite de V.A. indépendantes $Y_0, Y_1, \dots$ admettant la même loi F , et une V.A. discrète N , indépendante de la suite $Y_0, Y_1, \dots$, telle que :

$$P(N=n) = p_n = (1-\alpha) \alpha^n \quad (2)$$

Posons alors

$$X = Y_0 \vee Y_1 \vee \dots \vee Y_N = \text{Max} (Y_0, Y_1, \dots, Y_N) \quad (3)$$

Comme on a $X < x$ si et seulement si $Y_i < x$ pour $i = 0, 1, \dots, N$, il en résulte :

$$P(X < x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n (F(x))^{n+1} = \frac{(1-\alpha) F(x)}{1-\alpha F(x)} = G(x)$$

Ainsi, $G(x)$ est la fonction de répartition de la variable X définie en (3).

En sens inverse, on peut partir de la loi G définie en (1). On considère une suite de V.A. indépendantes $X_0, X_1, \dots, X_N$ admettant cette loi G , et la même variable discrète N que ci-dessus. On pose cette fois :

$$Y = X_0 \wedge X_1 \wedge \dots \wedge X_N = \text{Min} (X_0, X_1, \dots, X_N) \quad (4)$$

D'où :

$$P(Y \geq y) = \sum p_n [1-G(y)]^{n+1} = \frac{(1-\alpha) (1-G(y))}{1-\alpha + \alpha G(y)}$$

Compte tenu de (1), cela donne :

$$P(Y \geq y) = 1 - F(y)$$

Ainsi, la variable définie en (4) admet la loi F de départ. Autrement dit, les transformations (3) et (4) apparaissent comme réciproques en ce sens qu'elles échangent les lois F et G .

En vue de ce qui suit, il est commode de résumer ces transformations sous la forme suivante

$$G = \frac{(1-\alpha) F}{1-\alpha F} ; \quad 1-F = \frac{(1-\alpha) (1-G)}{1-\alpha + \alpha G} \quad (5)$$

$$1-G = \frac{1-F}{1-\alpha F} ; \quad F = \frac{G}{1-\alpha + \alpha G} \quad (5')$$

Notons aussi la relation utile :

$$[1 - \alpha F] [1 - \alpha + \alpha G] = 1 - \alpha \quad (5'')$$

Naturellement, on a les mêmes relations entre les fonctions

$$F_+(z) = P(Y \leq z) \quad \text{et} \quad G_+(z) = P(X \leq z)$$

En ce qui concerne les probabilités $F(dz)$ et $G(dz)$, on trouve :

$$G(dx) = \frac{(1-\alpha) F(dx)}{[1-\alpha F(x)][1-\alpha F_+(x)]} ; \quad F(dy) = \frac{(1-\alpha) G(dy)}{[1-\alpha + \alpha G][1-\alpha + \alpha G_+]} \quad (6)$$

et, en particulier, compte tenu de (5'') :

$$\frac{F(dz)}{1-\alpha F(z)} = \frac{G(dz)}{1-\alpha + \alpha G_+(z)}$$

C - D E F I N I T I O N D E L A L O I B I V A R I A B L E

Nous allons maintenant définir une loi $H(dx, dy)$ à deux variables X et Y admettant comme lois marginales les deux lois G et F ci-dessus. Pour cela, nous partons, par exemple, comme ci-dessus, d'une suite $Y_0, Y_1, \dots$ de V.A. indépendantes admettant la même loi F et d'une V.A. discrète N admettant la loi (2). Posons

$$Y = Y_0 ; \quad X = Y_0 \vee Y_1 \vee \dots \vee Y_N$$

A $Y = y_0$ fixé, la loi conditionnelle de X admet la fonction de répartition

$$G(x|y_0) = 1 - y_0 \sum_{y < x} p_n (F(x))^n = \frac{1-\alpha}{1-\alpha F(x)} 1_{y_0 < x}$$

soit, compte tenu de (5'') :

$$G(x|y_0) = [1 - \alpha + \alpha G(x)] 1_{y_0 < x} \quad (7)$$

On en déduit la fonction de répartition de X :

$$P(X < x) = \int G(x|y) F(dy) = [1 - \alpha + \alpha G(x)] F(x)$$

c'est-à-dire, d'après (5') :

$$P(X < x) = G(x)$$

Ainsi, la loi marginale de X est bien la loi G .

D'après (7), la loi conditionnelle de X est concentrée sur l'intervalle (y_0, ∞) : on a p.s. $X \geq y_0$, et d'ailleurs

$$P(X = y_0) = 1 - \alpha + \alpha G_+(y_0)$$

La probabilité conditionnelle correspondante est :

$$G(dx|y_0) = [1 - \alpha + \alpha G_+(y_0)] \delta_{y_0}^{(dx)} + \alpha 1_{x > y_0} G(dx) \quad (8)$$

Tenant compte de (6'), nous en déduisons pour la probabilité bivariable $H(dx, dy)$ les deux expressions équivalentes :

$$\begin{aligned} H(dx, dy) &= [1 - \alpha + \alpha G_+(y_0)] F(dy) \delta_y^{(dx)} + \alpha 1_{x > y} F(dy) G(dx) \\ &= [1 - \alpha F(x)] G(dx) \delta_x^{(dy)} + \alpha 1_{y < x} G(dx) F(dy) \end{aligned}$$

D'après la seconde expression de la loi H, on voit que la loi conditionnelle de Y à $X = x_0$ fixé est :

$$F(dy|x_0) = [1 - \alpha F(x_0)] \delta_{x_0}^{(dy)} + \alpha 1_{y < x_0} F(dy) \quad (8')$$

Cette loi se déduit de (8) en remplaçant G par F et en renversant les sens des inégalités. Autrement dit, on aurait pu aussi bien partir de :

$$X = X_0 \quad ; \quad Y = X_0 \wedge X_1 \wedge \dots \wedge X_N$$

Cette construction duale aurait abouti à la même loi bivariable H, et aux mêmes lois conditionnelles (8) et (8').

D - FACTORISATION DU MODELE MOSAÏQUE

Cette loi bivariable H est en rapport étroit avec le modèle mosaïque. Pour le voir, considérons deux variables Y et Y' conditionnellement indépendantes à $X = x_0$ fixé et admettant la même loi conditionnelle (8'). Alors, la loi bivariable non conditionnelle de (Y, Y') sera définie par :

$$P(Y \geq y, Y \geq y') = \int G(dx) [1 - F(y|x)] [1 - F(y'|x)]$$

Cette loi bivariable admet une expression très simple. Pour le voir, on peut faire un calcul direct. Il est plus instructif de partir de la construction précédente : on a :

$$Y = X \wedge X_1 \wedge \dots \wedge X_N \quad ; \quad Y' = X \wedge X_1' \wedge \dots \wedge X_N'$$

avec des variables $N, N', X, X_1, X_2, \dots, X_1', X_2', \dots$ indépendantes, N et N' admettant la même loi (2), tandis que les X, X_i, X_j admettent la même loi G . Alors :

$$P(Y \geq y, Y' \geq y') = [1 - G(y \vee y')] \left(\sum p_n [1 - G(y)]^n \right) \left(\sum p_n [1 - G(y')]^n \right) \\ = \frac{(1 - G(y \vee y')) (1 - \alpha)^2}{(1 - \alpha + \alpha G(y))(1 - \alpha + \alpha G(y'))}$$

Compte tenu de (5''), ceci s'écrit

$$P(Y \geq y, Y' \geq y') = [1 - G(y \vee y')] [1 - \alpha F(y)] [1 - \alpha F(y')] \\ = [1 - G(y \vee y')] [1 - \alpha F(y \vee y')] [1 - \alpha F(y \wedge y')]$$

puis, grâce à (5') :

$$P(Y \geq y, Y' \geq y') = [1 - F(y \vee y')] [1 - \alpha F(y \wedge y')] \\ = (1 - \alpha) [1 - F(y \vee y')] + \alpha [1 - F(y \vee y')] [1 - F(y \wedge y')]$$

et donc finalement :

$$P(Y \geq y, Y' \geq y') = (1 - \alpha) [1 - F(y \vee y')] + \alpha (1 - F(y))(1 - F(y'))$$

Sous forme différentielle, cela s'écrit :

$$F(dy, dy') = (1 - \alpha) F(dy) \delta_y(dy') + \alpha F(dy) F(dy') \quad (9)$$

C'est le modèle mosaïque (Matheron, 1982) : avec la probabilité $1 - \alpha$, les deux variables sont égales et leur valeur commune admet la loi F , ou bien, avec la probabilité α , elles sont indépendantes et identiquement distribuées selon la même loi F .

On peut, naturellement, aussi faire la construction réciproque : si deux variables X et X' sont conditionnellement indépendantes à $Y = y_0$ fixé et admettent la même loi (8), la loi non conditionnelle de (X, X') sera la loi mosaïque

$$G(dx, dx') = (1 - \alpha) G(dx) \delta_x(dx') + \alpha G(dx) G(dx') .$$

Le fait que la loi H réalise la factorisation du modèle mosaïque montre qu'elle peut jouer le rôle d'un modèle de changement de support adapté à ce modèle mosaïque. Avant d'aborder ce point, examinons d'abord une autre propriété importante.

E - C O N S E R V A T I O N D E L ' O R T H O G O N A L I T E

Aux lois conditionnelles (8) et (8'), nous pouvons associer les espérances conditionnelles correspondantes :

7

$$E_X \varphi = E[\varphi(Y)|X] ; E_Y \psi = E[\psi(X)|Y]$$

Explicitement :

$$\begin{cases} (E_X \varphi)(x) = [1-\alpha F(x)] \varphi(x) + \alpha \int_{-\infty}^{x-\alpha} \varphi(y) F(dy) \\ (E_Y \psi)(y) = [1-\alpha + \alpha G_+(y)] \psi(y) + \alpha \int_{y+\alpha}^{\alpha} \psi(x) G(dx) \end{cases}$$

L'opérateur E_X projette $L^2(R,F)$ dans $L^2(R,G)$, tandis que E_Y projette $L^2(R,G)$ dans $L^2(R,F)$. Ces deux opérateurs sont adjoints l'un de l'autre, puisque l'on a

$$\langle \psi(X), E_X \varphi \rangle = E[\psi(X) \varphi(Y)] = \langle E_Y \psi, \varphi(Y) \rangle$$

En particulier, partant de deux éléments, $\varphi_1(Y)$, $\varphi_2(Y)$ dans $L^2(R,F)$, nous trouvons :

$$\langle E_X \varphi_1, E_X \varphi_2 \rangle = \langle \varphi_1, E_Y E_X \varphi_2 \rangle \quad (10)$$

Mais, par définition de la loi bivariante $F(dy, dy')$ dont l'expression a été calculée en (9), nous avons :

$$\begin{aligned} \langle E_X \varphi_1, E_X \varphi_2 \rangle &= \int \varphi_1(y) \varphi_2(y') F(dy, dy') \\ \text{soit :} \quad \langle E_X \varphi_1, E_X \varphi_2 \rangle &= (1-\alpha) \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle + \alpha E(\varphi_1) \cdot E(\varphi_2) \end{aligned} \quad (11)$$

Comme l'égalité (10) a lieu pour toute fonction φ_1 dans $L^2(R,F)$, on en déduit

$$E_Y E_X \varphi = (1-\alpha) \varphi + \alpha E(\varphi)$$

pour toute fonction φ dans $L^2(R,F)$: $E_Y E_X \varphi$ est l'espérance conditionnelle de $\varphi(Y')$ lorsque Y est donné. Sous forme d'opérateur, ceci s'écrit :

$$E_Y E_X = (1-\alpha) I + \alpha E$$

C'est la relation (a) de notre introduction.

Avec $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$, la relation (11) donne

$$E[(E_X \varphi)^2] = (1-\alpha) E(\varphi^2) + \alpha (E(\varphi))^2$$

Comme $E(E_X \varphi) = E(\varphi)$, il en résulte :

$$\text{Var}(E_X \varphi) = (1-\alpha) \text{Var}(\varphi) \quad (12)$$

Quelle que soit la transformation $\varphi(Y)$, l'opérateur E_X réduit la variance dans le même

rapport $1-\alpha$: cette remarque nous sera utile plus bas.

Si, au contraire, $\varphi_1(Y)$ et $\varphi_2(Y)$ sont orthogonales et d'espérance nulle, (11) donne

$$\langle E_X \varphi_1, E_X \varphi_2 \rangle = 0$$

Autrement dit, $E_X \varphi_1$ et $E_X \varphi_2$ sont, elles aussi, orthogonales et d'espérance nulle.

Il en résulte que si une suite :

$$\varphi_0 = 1, \varphi_1, \varphi_2, \dots$$

constitue un système orthogonal complet dans $L^2(R, F)$, la suite

$$\psi_0 = E_X \varphi_0 = 1, \psi_1 = E_X \varphi_1, \dots$$

constitue elle aussi un système orthogonal complet dans $L^2(R, G)$.

En effet, on vient de voir l'orthogonalité. Supposons qu'il existe une fonction h telle que $h(X)$ soit orthogonale aux $\psi_n(X)$. On a :

$$\langle h, E_X \varphi_n \rangle = \langle E_Y h, \varphi_n \rangle = 0$$

Donc $E_Y h$ est orthogonal aux φ_n . Par suite $E_Y h = 0$, puisque le système φ_n est complet, et donc aussi $E_X E_Y h = 0$. Mais, comme on l'a vu plus haut, on a

$$E_X E_Y h = (1-\alpha) h + E h = (1-\alpha) h$$

(car $E h = 0$, puisque h est orthogonal à $\psi_0 = 1$). Donc $h = 0$, et le système ψ_n est complet.

En ce qui concerne les normes, on notera, d'après (12), que l'on a

$$\|\varphi_0\|^2 = \|\psi_0\|^2 = 1; \quad \|\psi_n\|^2 = (1-\alpha) \|\varphi_n\|^2 \quad (n \geq 1)$$

On voit apparaître ainsi la possibilité de construire des modèles isofactoriels en (X, X') à partir de modèles isofactoriels en (Y, Y') supposés donnés. En effet, si les $\varphi_n(Y)$ forment une suite orthonormée complète dans $L^2(R, F)$, avec $\varphi_0 = 1$, on aura un modèle isofactoriel en (Y, Y') de la forme

$$F_t(dy, dy') = \left(1 + \sum_{n \geq 1} e^{-\lambda_n t} \varphi_n(y) \varphi_n(y') \right) F(dy) F(dy') \quad (13)$$

sous réserve de positivité, et, pour $t = 0$, $Y = Y'$ p.s. Si nous posons

$$G_t(dx, dy) = \left(1 + \sum_{n \geq 1} e^{-\lambda_n t} \frac{\psi_n(x) \psi_n(x')}{1 - \alpha} \right) G(dx) G(dx') \quad (14)$$

avec $\psi_n = E_X \varphi_n$, nous obtenons un modèle isofactoriel en (X, X') possédant la même propriété ($X = X'$ si $t = 0$), pourvu toutefois que la positivité soit conservée. Nous allons voir que la positivité est effectivement conservée dans deux cas particuliers importants : celui où la loi bivariable (13) est celle d'un processus markovien de diffusion, et la version discrétisée de ce même processus.

F - CAS D'UN PROCESSUS DE DIFFUSION CONTINU

Il s'agit d'un processus markovien dont le générateur infinitésimal est de la forme :

$$A \varphi = a \varphi'' + b \varphi'$$

Nous supposons que ce processus admet une loi stationnaire F : celle-ci est alors obligatoirement continue, et sa densité f vérifie l'équation différentielle

$$(a f)' = b f$$

de sorte que le générateur infinitésimal peut être mis sous la forme :

$$A \varphi = \frac{1}{f} (a f \varphi')'$$

Supposons que l'opérateur A , qui est auto-adjoint dans $L^2(R, f)$, admette un spectre discret et un système complet de fonctions propres φ_n

$$A \varphi_n = \frac{1}{f} (a f \varphi_n')' = -\lambda_n \varphi_n \quad (15)$$

(avec $\varphi_0 = 1$, $\lambda_0 = 0$ et $\lambda_n > 0$ pour $n \geq 1$). La suite φ_n étant supposée normée, les lois bivariées sont alors du type (13). Posons $\psi_n = E_X \varphi_n$, soit

$$\psi_n(x) = (1 - \alpha F(x)) \varphi_n(x) + \alpha \int_{-\infty}^x \varphi_n f dy \quad (15')$$

ou, compte tenu de (15)

$$\psi_n' = (1 - \alpha F) \varphi_n' - \frac{\alpha}{\lambda_n} (a f \varphi_n')$$

et, puisque $\lambda_n \varphi_n = -A \varphi_n$:

$$-\lambda_n \psi_n = \frac{(1 - \alpha F)}{f} [a f \varphi_n']' + \alpha (a f \varphi_n') \quad (16)$$

Mais, en dérivant (15'), nous trouvons

$$\psi_n' = (1 - \alpha F) \varphi_n', \text{ soit } \varphi_n' = \psi_n' / [1 - \alpha F]$$

et, en substituant dans (16) :

$$-\lambda \psi_n = \frac{1-\alpha}{f} F \left[\frac{a f}{1-\alpha F} \psi_n' \right]' + \alpha a f \frac{\psi_n}{1-\alpha F}$$

c'est-à-dire finalement :

$$a \psi_n'' + \left[b + \frac{2\alpha}{1-\alpha F} a f \right] \psi_n' = -\lambda \psi_n$$

Ainsi, les ψ_n sont les fonctions propres du générateur infinitésimal

$$A_\alpha = a \frac{d^2}{dx^2} + \left(b + \frac{2\alpha}{1-\alpha F} a f \right) \frac{d}{dx}$$

et les valeurs propres correspondantes sont encore les $-\lambda_n$. Il est facile de voir que la loi stationnaire pour le processus A_α est justement G. Par suite, la loi bivariante de ce nouveau processus est de la forme (14). En particulier, la condition de positivité est automatiquement satisfaite.

G - VERSION DISCRETE D'UN PROCESSUS DE DIFFUSION

Ici le générateur est de la forme

$$(A \varphi)_i = a_i (\varphi_{i+1} - \varphi_i) + b_i (\varphi_{i-1} - \varphi_i) \quad (i = 0, 1, \dots)$$

Nous admettons l'existence d'une probabilité stationnaire f_i , qui est donnée par l'équation aux différences

$$a_i f_i = b_{i+1} f_{i+1}$$

et nous poserons $F_i = \sum_{j < i} f_j$. L'opérateur A est auto-adjoint dans $L^2(N, f)$. Nous supposons qu'il admet un système complet de fonctions propres $\varphi_n(i)$:

$$A \varphi_n = -\lambda_n \varphi_n \quad (\varphi_0 = 1, \lambda_0 = 0, \lambda_n > 0 \text{ pour } n \geq 1)$$

Ici les ψ_n sont donnés par :

$$\psi_n(i) = (1-\alpha F_i) \varphi_n(i) + \alpha \sum_{j < i} f_j \varphi_n(j) \quad (17)$$

Mais on a :

$$\sum_{j < i} f_j A \varphi_j = f_i b_i (\varphi_{i-1} - \varphi_i)$$

pour toute fonction φ . Avec $\varphi_n = -A \varphi_n / \lambda_n$, on trouve donc

$$\sum_{j < i} f_j \varphi_n(j) = -\frac{1}{\lambda_n} f_i b_i (\varphi_n(i) - \varphi_n(i-1))$$

et par suite :

$$-\lambda_n \psi_n(i) = (1-\alpha F_i)(A \varphi_n)_i + \alpha f_i b_i (\varphi_n(i) - \varphi_n(i-1)) \quad (18)$$

D'autre part (17) entraîne

$$\psi_n(i+1) - \psi_n(i) = (1-\alpha F_{i+1}) (\varphi_n(i+1) - \varphi_n(i))$$

ce qui permet d'évaluer $A \varphi_n$ à l'aide des ψ_n . Reportant dans (18), il vient :

$$\frac{1-\alpha F_i}{1-\alpha F_{i+1}} a_i [\psi_n(i+1) - \psi_n(i)] + \frac{1-\alpha F_{i+1}}{1-\alpha F_i} b_i [\psi_n(i-1) - \psi_n(i)] = -\lambda_n \psi_n(i)$$

Ainsi, les ψ_n sont les fonctions propres du générateur :

$$(A \varphi)_i = a_i (\varphi_{i+1} - \varphi_i) + b_i (\varphi_{i-1} - \varphi_i)$$

$$a_i = \frac{1-\alpha F_i}{1-\alpha F_{i+1}} ; b_i = \frac{1-\alpha F_{i+1}}{1-\alpha F_i}$$

et les valeurs propres sont encore les $-\lambda_n$: A est le générateur d'un processus de diffusion discrète, dont la loi stationnaire est

$$g_i = \frac{(1-\alpha f_i)}{(1-\alpha F_i)(1-\alpha F_{i+1})}$$

c'est-à-dire justement la loi qui se déduit des f_i par la transformation (6'). Il en résulte que la loi bivariante du processus A_α est de la forme (14). En particulier, la positivité est automatiquement assurée.

H - UN MODELE DE CHANGEMENT DE SUPPORT

La loi bivariable $H(dx, dy)$ définie ci-dessus conduit à un modèle de changement de support qui présente certains avantages. Désignons en effet, par φ_v et φ_v les anamorphoses reliant les distributions F_v et F_v des teneurs Z_v et Z_v définies sur des supports v et v aux lois F et G respectivement, soit :

$$Z_v = \varphi_v(Y) ; Z_v = \varphi_v(X)$$

Si l'on admet que, pour un petit bloc v implanté au hasard dans un panneau V , la loi bivariable de (X, Y) est la loi $H(dx, dy)$ définie plus haut, la condition de Cartier (Matheron, 1983) montre que l'on doit avoir :

$$\varphi_V(x) = E[\varphi_V(Y)/X = x]$$

c'est-à-dire, avec nos notations :

$$\varphi_V = E_X \varphi_V \quad (19)$$

Le paramètre α représente alors la réduction de variance. D'après (12), en effet, on a toujours :

$$1 - \alpha = \sigma_V^2 / \sigma^2$$

et cela, quelle que soit la transformation φ_V utilisées. Explicitement, (19) s'écrit :

$$\varphi_V(x) = [1 - \alpha F(x)] \varphi_V(x) + \alpha \int_{-\infty}^{x-0} \varphi_V(y) F(dy) \quad (20)$$

On en déduit sans peine que, si φ_V est une véritable anamorphose (c'est-à-dire une transformation strictement croissante), φ_V est, elle aussi, une véritable anamorphose. De plus, pour une même valeur de x , on a aussi dans ce cas

$$\varphi_V(x) \leq \varphi_V(x) \quad (21)$$

Un cas intéressant est celui où les variables X et Y sont ≥ 0 et admettent des atomes au point 0. Ces atomes, $P(X=0) = g_0$ et $P(Y=0) = f_0$, sont liés par la relation (6'), qui s'écrit ici

$$f_0 = \frac{g_0}{1 - \alpha + \alpha g_0}$$

d'où résulte $f_0 > g_0$, comme il se doit, puisque le grand support comporte moins de zéros que le petit.

Il existe une relation simple entre les fonctions B_V et B_V représentant, en fonction d'une teneur de coupure z , le bénéfice conventionnel associé aux variables Z_V et Z_V (Matheron, 1983). Par définition, ces fonctions sont :

$$B_V(z) = \int_z^\infty [1 - F_V(u)] du ; \quad B_V(z) = \int_z^\infty [1 - F_V(u)] du$$

Soit z_0 une teneur de coupure sur Z_V , et x_0 défini par

$$z_0 = \varphi_V(x_0)$$

On a donc :

$$B_V(z_0) = \int_{x_0}^\infty [1 - G(x)] \varphi_V'(x) dx$$

Mais $\varphi'_V(x) = [1 - \alpha F(x)] \varphi'_V(x)$, d'après (20), et $[1 - \alpha F] = (1 - F)$, d'après (5'). Donc

$$B_V(z_o) = \int_{x_o}^{\infty} [1 - F(x)] \varphi'_V(x) dx$$

En posant

$$z_o' = \varphi_V(x_o) = \varphi_V[\varphi_V^{-1}(z_o)]$$

il en résulte

$$B_V(z_o) = B_V(z_o') \quad (22)$$

Comme z_o' est plus grand que z_o , d'après (21), il en résulte $B_V(z_o) < B_V(z_o')$, comme il se doit.

Avec les mêmes notations, la quantité de métal $Q_V(z_o)$ associée à la coupe $Z_V \geq z_o$ est :

$$Q_V(z_o) = E[z_V \mid Z_V \geq z_o] = E[\varphi_V(x) \mid x \geq x_o]$$

Comme $\varphi_V(x)$, d'après (19), est l'espérance conditionnelle en x de $\varphi_V(y)$, il en résulte

$$Q_V(z_o) = E[\varphi_V(y) \mid x \geq x_o] = \int [1 - G(x_o \mid y)] \varphi_V(y) F(dy)$$

D'après (8), on a

$$1 - G(x_o \mid y) = 1_{x_o \leq y} + \alpha T_V(z_o) 1_{x_o > y}$$

$T_V(z_o) = 1 - G_+(x_o)$ représentant le tonnage associé à la coupe $Z_V \geq z_o$. Ainsi

$$\begin{aligned} Q_V(z_o) &= \int_{x_o}^{\infty} \varphi_V(y) F(dy) + \alpha T_V \int_0^{x-o} \varphi_V(y) F(dy) \\ &= (1 - \alpha T_V(z_o)) Q_V(z_o') + \alpha T_V(z_o) \end{aligned}$$

Notons que les tonnages $T_V(z_o) = 1 - G(x_o)$ et $T_V(z_o') = 1 - F(x_o)$ associées aux coupes $Z_V \geq z_o$ et $Z_V \geq z_o'$ sont liés par (5) et (5'), soit

$$T_V(z_o) = \frac{(1 - \alpha) T_V(z_o')}{1 - \alpha T_V(z_o')}$$

Ainsi, dans le paramétrage en T , les fonctions $Q_V(T)$ et $Q_V(T)$ donnant la quantité de métal associée à un tonnage T de minerai pour les deux variables Z_V et Z_V sont liées par la relation

$$Q_v(T) = (1-\alpha T) Q_v \left(\frac{(1-\alpha) T}{1-\alpha T} \right) + \alpha T m \quad (23)$$

Comme $m = Q_v(1)$, la concavité de la fonction Q_v montre que l'on a

$$Q_v(T) \leq Q_v(\alpha T + (1-\alpha) T) = Q_v(T)$$

comme il se doit.

Ces relations (22) et (23) permettent un calcul rapide des réserves récupérables associées à Z_v .

I - KRIGEAGE DISJONCTIF EN MODELE MOSAIQUE

Dans le modèle mosaïque, les lois bivariées sont du type (9) pour les teneurs ponctuelles: l'espace est divisé en compartiments aléatoires, et les teneurs de chaque compartiment sont des V.A. indépendantes admettant la même loi F. on sait (Matheron, 1982) que dans ce cas, le krigeage disjonctif, pour les teneurs ponctuelles, coïncide avec le krigeage des indicatrices. Mais le krigeage des indicatrices ne permet évidemment pas l'estimation des réserves récupérables pour un support non ponctuel. Nous allons voir que le modèle de changement de support présenté ci-dessus conduit, dans le cas du modèle mosaïque, à une solution très simple de ce problème.

Ce modèle est le suivant : pour le support v, les teneurs sont du type $Z_v = \Phi_v(Y)$, où Y a une loi F. Pour le support V, plus grand que v, elles sont de la forme $Z_v = \Phi_v(X)$, avec comme ci-dessus $\Phi_v = E_X \Phi_v$, et X admet la loi G associée au paramètre

$$\alpha = 1 - r^2 = 1 - \sigma_v^2 / \sigma_v^2$$

Pour v aléatoire dans V, la loi bivariable (X,Y) est la loi H(dx,dy) définie plus haut, avec les lois conditionnelles (8) et (8'). Les variables X et X' associées aux teneurs de deux blocs v et v' ont une loi de la forme

$$G_{v,v'}(dx,dx') = \rho_{vv'} G(dx) \delta_x(dx') + (1-\rho_{vv'}) G(dx) G(dx') \quad (24)$$

où $\rho_{vv'}$ est le coefficient de corrélation de Z_v et $Z_{v'}$. Pour un échantillon v aléatoire dans le bloc V, la loi de Y et de X est la loi H écrite plus haut. Pour un échantillon v_α aléatoire dans un bloc v_α et un bloc V, l'hypothèse habituelle d'indépendance de Z_{v_α} et Z_v à Z_{v_α} fixé montre que la loi des variables Y_α et X (telles que $Z_{v_\alpha} = \Phi_{v_\alpha}(Y_\alpha)$ et $Z_v = \Phi_v(X)$) est :

$$(1 - \rho_{v_\alpha v}) G(dx) F(dy_\alpha) + \rho_{v_\alpha v} H(dx, dy_\alpha)$$

En particulier, la loi conditionnelle de X à Y_α fixé est :

$$(1 - \rho_{V_\alpha V}) G(dx) + \rho_{V_\alpha V} G(dx|Y_\alpha) \quad (25)$$

où $G(dx|Y_\alpha)$ est la loi définie en (8).

Enfin, pour des échantillons v_α, v_β , la loi de (Y_α, Y_β) est :

$$(1 - \rho_{\alpha\beta}) F(dy_\alpha) F(dy_\beta) + \rho_{\alpha\beta} F(dy_\alpha) \delta_{Y_\alpha} (dy_\beta) \quad (26)$$

avec

$$\rho_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = \beta \\ r^2 \rho_{V_\alpha V_\beta} & \text{si } \alpha \neq \beta \end{cases}$$

Soit alors $\phi(X)$ une fonction d'espérance nulle. Posons

$$E_Y \phi = \varphi$$

D'après (25), il vient :

$$E(\phi(X)/Y_\alpha) = \rho_{V_\alpha V} \varphi(Y_\alpha)$$

et d'après (26) :

$$E[\varphi(Y_\beta)/Y_\alpha] = \rho_{\alpha\beta} \varphi(Y_\alpha)$$

Par conséquent, le krigeage disjonctif de $\phi(X)$ sera

$$\phi_{KD} = \sum \lambda^\alpha \varphi(Y_\alpha)$$

avec des coefficients λ^α déterminés par le système du krigeage simple :

$$\lambda^\alpha \rho_{\alpha\beta} = \rho_{V_\alpha V_\beta}$$

Dans le cas général où ϕ n'est pas d'espérance nulle, on trouve de même

$$\begin{cases} \phi_{KD} = (1 - \sum \lambda^\alpha) E\phi + \sum \lambda^\alpha \varphi(Y_\alpha) \\ \varphi(y) = [r^2 + (1-r^2) G_+(y)] \phi(y) + (1-r^2) \int_{y+0}^{\infty} \phi(x) G(dx) \end{cases}$$

En particulier, pour le tonnage associé à la coupure $Z_V \geq z$, avec $x = \varphi_V^{-1}(z)$, on trouve l'estimation

$$\left\{ \begin{array}{l} T_V^*(z) = (1 - \sum \lambda^\alpha) [1 - G(x)] + \sum \lambda^\alpha [1 - G(x|y^\alpha)] \\ 1 \text{ si } x < y^\alpha \\ 1 - G(x|y^\alpha) = (1 - r^2) [1 - G(x)] \text{ si } x \geq y^\alpha \end{array} \right. \quad (27)$$

De même, pour la quantité de métal

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_V^*(z) = (1 - \sum \lambda^\alpha) Q_V(z) + \sum \lambda^\alpha X_V(x|y^\alpha) \\ (1 - r^2) \int_x^\infty \varphi_V(u) G(du) \text{ si } x \geq y^\alpha \\ X_V(x|y^\alpha) = [1 - (1 - r^2)(1 - G(y^\alpha))] \varphi_V(y^\alpha) + (1 - r^2) \int_{y^\alpha}^\infty \varphi_V(u) G(du) \text{ si } x < y^\alpha \end{array} \right. \quad (27')$$

Ainsi le krigeage disjonctif est très facile à mettre en oeuvre, puisqu'il ne nécessite la résolution que d'un seul système de krigeage. Mais les estimations obtenues, (27) et (27'), sont nettement plus élaborées qu'un simple krigeage d'indicatrice.

J - UNE SIMULATION

Pour contrôler la validité de ce nouveau modèle de changement de support, on a effectué deux simulations. La première est multilognormale au niveau ponctuel :

$$Z(x) = m \exp(s Y(x) - s^2/2)$$

où $Y(x)$ est une F.A. gaussienne sur R , d'espérance nulle et de variance unité avec une covariance $C(h) = \exp(-h)$. La seconde est une mosaïque lognormale : la droite est divisée en segments aléatoires par des points poissonniens (densité 1), et chaque segment reçoit, indépendamment des autres segments, une lognormale admettant les mêmes paramètres m et s que ci-dessus. On a pris

$$m = 1, \quad s = 1,5 \quad \text{et donc} \quad \sigma^2 = 8,488$$

Comme changement de support, on a choisi, dans chacun des deux cas, la longueur correspondant à une réduction de variance de 80%

$$\alpha = 1 - r^2 = 0,8, \quad \text{soit } \sigma_V^2 = 1,698$$

Il s'agit donc d'un cas extrême. Pour chacune des deux simulations, on a simulé 10.000 valeurs indépendantes de Z_V . Les valeurs expérimentales obtenues pour m et σ_V^2 sont :

Multilognormale	Mosaïque lognormale	Theorique
m	1,0052	1
σ^2_v	1,812	1,698

Elles sont suffisamment proches des valeurs théoriques pour que l'on puisse admettre la représentativité de ces deux simulations.

Le tableau suivant montre les histogrammes obtenus, et les compare aux prédictions de trois modèles : modèle isofactoriel (i.e. permanence de la lognormalité), modèle mosaïque (i.e. le modèle défini ci-dessus) et correction affine. Les limites de classe choisies correspondent à une fréquence théorique de 1000 pour le modèle isofactoriel, à l'exception des deux dernières classes où cette fréquence est de 500.

FREQUENCES X 10000					
Simulations			Prédictions		
Multilog	Log. Mos.	Perm.	Mos.	Aff.	
599	224	1000	1082	0	
864	576	1000	700	0	
1055	921	1000	753	0	
1103	1243	1000	859	0	
1107	1352	1000	993	2630	
1121	1404	1000	1134	3591	
1076	1345	1000	1245	1636	
1099	1197	1000	1260	968	
1090	990	1000	1124	651	
469	391	500	462	260	
417	357	500	388	274	

La correction affine est visiblement hors jeu. Les deux modèles idofactoriel et mosaïque surestiment fortement l'effectif de la classe la plus basse. Pour le reste, il y a un accord relativement bon entre la simulation multilog et le modèle isofactoriel d'une part, et entre la simulation lognormale mosaïque et le modèle mosaïque de l'autre (ce qui, en somme, est assez satisfaisant). Le test χ^2 donne les valeurs suivantes :

Modèle	Simulation	Multilog.	Log. Mosaïque
Isofactoriel		258	1356
Mosaïque		504	1146

Du point de vue statistique, ces valeurs énormes incitent à rejeter les deux modèles. Mais les critères de la géostatistique ne sont pas exactement les mêmes que ceux de la statistique. Il apparaît qu'en fait ces deux modèles permettent une prévision raisonnable des réserves récupérables. Le tableau ci-dessous donne les valeurs des quantités de métal pour les teneurs de coupure correspondant aux mêmes limites de classes que ci-dessus :

QUANTITES DE METAL X 10000				
Simulations		Prédictions		
Multilog.	Log. Mos.	Perm.	Mosaïque	
9898	10022	9886	9899	
9709	9894	9669	9747	
9380	9605	9357	9512	
8922	9084	8941	9154	
8326	8353	8404	8618	
7550	7380	7713	7830	
6581	6179	6815	6711	
5264	4747	5614	5200	
3381	3043	3876	3261	
2180	2039	2581	2070	

De même, sur la figure 1, on a représenté la courbe $Q = Q(T)$ pour les trois modèles et les deux simulations : c'est, semble-t-il, le modèle mosaïque qui donne la meilleure prévision.

REFERENCES

- MATHERON, G. (1982).- La destruction des hautes teneurs et le krigeage des indicatrices.
Rapport Interne, C.G.M.M., Fontainebleau.
- MATHERON, G. (1983).- The selectivity of the distributions, and the second principle of Geostatistics. 2nd NATO A.S.I."Geostatistics for Natural Resources Characterization", D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, Netherlands.

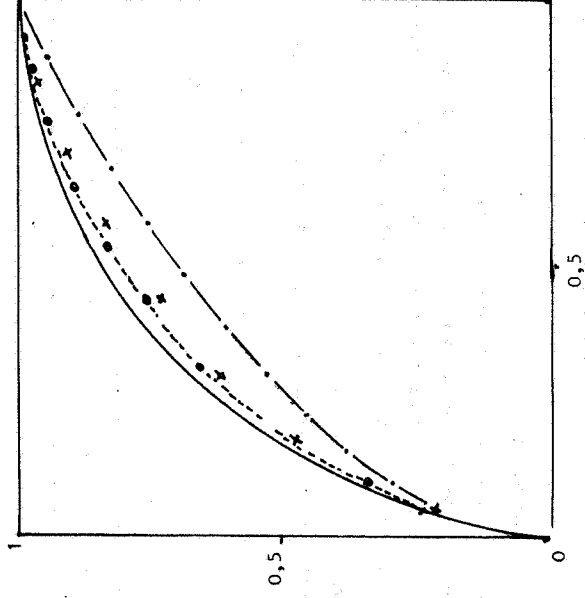


Figure 1

Courbes $Q = Q(T)$

Traits pleins : Modèle isofactoriel

Pointillé : Modèle mosaïque

Tiré : Correction affine

o o : Simulation multilognormale

x x : Simulation lognormale mosaïque