

L'émergence de la loi de Darcy



par Georges MATHERON

Centre de géostatistique et de morphologie mathématique, Ecole des mines de Paris

On examine ici le problème des changements d'échelle successifs dans les milieux poreux. Le premier changement d'échelle nous fait passer d'un niveau granulométrique, où l'écoulement est régi par les équations de Navier-Stokes, à un milieu poreux homogène où règne la loi de Darcy. C'est le problème de la genèse de la loi de Darcy. Dans le cas d'un milieu poreux localement hétérogène, où les perméabilités $k(x)$ apparaissent comme régionalisées, un second changement d'échelle nous conduit à un second niveau macroscopique, où le milieu apparaît à nouveau comme statistiquement homogène. Le problème est de savoir comment les perméabilités ponctuelles $k(x)$ se composent pour engendrer une nouvelle perméabilité macroscopique constante K . Dans les deux cas, la solution découle simplement de la linéarité des équations du niveau microscopique et d'un théorème d'existence et d'unicité pour l'écoulement macroscopique uniforme. Le fil directeur est fourni par un principe variationnel qui conduit à une interprétation énergétique des perméabilités.

LE PROBLÈME PHYSIQUE ET SA TRANSPOSITION PROBABILISTE

Considérons un milieu poreux « homogène ». Cette homogénéité est une notion de nature macroscopique. Elle signifie que deux échantillons ayant même taille, même forme et même orientation présenteront les mêmes propriétés globales, pourvu seulement que leur taille soit suffisamment grande vis-à-vis des dimensions granulométriques. L'homogénéité dont il s'agit ici est donc de nature statistique. Il est clair, en effet, qu'à l'échelle de la granulométrie, nos deux échantillons ne sont certainement pas identiques. Leurs grains et leurs pores n'ont ni les mêmes formes ni les mêmes dimensions, et c'est en un sens statistique seulement que leurs géométries complexes peuvent se comparer. Si nous changeons l'échelle d'observation, l'effet d'ergodicité va jouer, et les deux échantillons présenteront les mêmes propriétés macroscopiques.

Parmi ces propriétés, l'une des plus importantes est la *perméabilité* liée à la loi de Darcy. Rappelons rapidement le contexte expérimental. Nous prélevons un échantillon ayant la forme d'un cylindre de longueur L et de section S . Nous imperméabilisons la surface latérale, et nous mettons les deux sections terminales S_0 et S_1 en contact avec un même fluide. Nous imposons une différence de pression $\Delta P = P_0 - P_1$, nous attendons qu'un régime permanent s'établisse et nous mesurons le débit Q du fluide traversant le cylindre. On peut, aussi bien, imposer le débit Q et mesurer la différence de pression. Expérimentalement, on observe une relation de proportionnalité :

$$(1) \quad Q = C \Delta P$$

Si nous recommençons l'expérience avec d'autres échantillons cylindriques ayant des longueurs et des sections différentes, nous trouvons que le coefficient C de la relation précédente varie en raison inverse de la longueur L et directe de la section S , soit :

$$(2) \quad C = KS/L$$

Si le milieu n'est pas macroscopiquement isotrope, il est important de ne comparer entre eux que des échantillons ayant la même orientation in situ : le coefficient K peut dépendre de cette orientation. Notre relation expérimentale peut donc s'écrire :

$$(3) \quad Q/S = K \Delta P/L$$

On peut donc, au niveau macroscopique, représenter un écoulement permanent au moyen d'un vecteur q , représentant le flux de fluide, et d'un gradient macroscopique (constant) de pression (ou de charge) $\text{grad } P$, liés par la relation :

$$q = -K \text{ grad } P$$

C'est la *loi de Darcy*. Si le milieu n'est pas statistiquement isotrope, tout en restant statistiquement homogène, le coefficient scalaire K doit être remplacé par un tenseur. Ce coefficient K , scalaire ou tensoriel, est, par définition la *perméabilité* du milieu. C'est une caractéristique macroscopique de ce milieu.

L'émergence, au niveau macroscopique, d'une loi aussi simple mérite réflexion. A l'échelle granulométrique, en effet, un écoulement permanent (suffisamment lent pour que l'on puisse négliger les termes liés à l'énergie cinétique) est régi par les équations de Navier :

$$\mu \Delta u = \text{grad } p \quad ; \quad \text{div } u = 0$$

où u et p représentent la vitesse et la pression en un point du fluide. A cette équation, valable dans les pores, s'ajoutent des conditions aux limites très sévères : pression (ou débit) imposée sur les faces terminales, vitesse u nulle sur la surface latérale et sur la surface des grains. L'extraordinaire difficulté que pose la résolution d'une telle équation, compte tenu de la complexité de la géométrie des pores, contraste fortement avec le caractère très simple de la loi qui émerge au niveau macroscopique.

A dire vrai, compte tenu de la linéarité de l'équation de Navier, et à supposer que, pour des conditions aux limites données, l'existence et l'unicité de la solution soient tenues pour garanties, la relation (1), c'est-à-dire la proportionnalité entre débit global et différence de pression pour un dispositif expérimental donné, était aisément prévisible. Mais la relation (2) est beaucoup moins triviale. Elle signifie, en effet, que pour un flux q et un gradient de pression $\text{grad } P$ macroscopiques donnés, les propriétés statistiques de la solution de l'équation de Navier sont indépendantes de la forme de l'échantillon, et constituent des caractéristiques macroscopiques du milieu. En particulier, les conditions aux limites sur la surface extérieure de l'échantillon, pourvu que celui-ci soit de taille suffisamment grande, n'exercent pas d'influence sensible, sauf évidemment au voisinage immédiat des parois, sur la structure de l'écoulement. Par exemple, si nous mettons bout à bout des échantillons prismatiques, ou si nous les accolons par leurs parois latérales de manière à constituer un prisme plus grand, la solution relative au grand prisme ne doit pas différer beaucoup de la réunion des solutions que l'on obtiendrait pour chacun des petits prismes considérés isolément.

Cette circonstance suggère un passage à l'infini. Comme il n'existe pas, dans la nature, de milieu poreux infini, il ne peut s'agir que d'un modèle mathématique. Mais ce modèle pourra présenter un grand intérêt pour le physicien, dans la mesure où il nous suggérera des relations, expérimentalement contrôlables, entre la perméabilité et telle ou telle caractéristique statistique de la géométrie des pores.

La transposition mathématique normale de la notion physique d'un milieu « statistiquement » ou « macroscopiquement » homogène est celle de fonction, ou d'ensemble aléatoire stationnaire et ergodique. A l'échelle granulométrique, donc, le milieu sera représenté comme un ensemble aléatoire stationnaire (« les pores ») défini, par exemple, par une fonction aléatoire stationnaire et ergodique $I(x)$ en tout ou rien : $I(x) = 1$ dans l'intérieur des pores, $I(x) = 0$ dans les grains et sur leur frontière. Dans ce modèle, le problème à résoudre serait le suivant :

Trouver un vecteur $u(x)$ aléatoire stationnaire vérifiant les conditions suivantes :

$$(4) \quad \begin{aligned} \mu \Delta u &= I(x) \text{ grad } p & ; & \quad \text{div } u = 0 \\ u(x) &= I(x)u(x) & ; & \quad E(u) = V = Q/p \end{aligned}$$

où $V = Q/p$ est un vecteur constant donné (Q est le flux macroscopique donné, et p la densité du fluide). Sous cette forme, il n'est pas facile d'établir un théorème d'existence et d'unicité. C'est pourquoi, dans un instant, nous remplacerons le système (4) par un principe variationnel équivalent, basé sur des considérations énergétiques. Avant d'examiner ce point, il convient de commenter la signification physique des équations (4).

Avant tout, notons que $u(x)$ et $\text{grad } p$ sont ici des fonctions aléatoires stationnaires. En ce qui concerne la pression (ou, plus généralement, la charge) $p(x)$, la stationnarité du gradient n'implique nullement que $p(x)$ elle-même soit stationnaire. Cela ne serait d'ailleurs pas compatible avec la physique du problème, puisqu'on aurait alors $E(p(x)) = \text{Cst}$, c'est-à-dire une pression macroscopique constante. En fait, la stationnarité du gradient implique seulement que $p(x)$ est une fonction aléatoire intrinsèque, c'est-à-dire à accroissements stationnaires. En particulier, $p(x)$ n'aura pas, en général, de covariance stationnaire, mais seulement un variogramme $\gamma(h) = 1/2 E([p(x+h) - p(x)]^2)$, en général indéfiniment croissant avec h . Son espérance, i.e. la pression macroscopique, sera une fonction linéaire de x , ce qui correspond bien à un gradient macroscopique $\text{grad } P = E(\text{grad } p)$ constant.

Il résulte de tout ceci que le modèle (4) ne décrit, en réalité, rien d'autre qu'un écoulement *macroscopiquement uniforme* (Q et $\text{grad } P$ constants). Mais, en fait, il restera valable, au moins en première approximation, dans le cas d'écoulements macroscopiques *quasi uniformes*, c'est-à-dire d'écoulements pouvant être regardés comme uniformes sur un domaine δV de taille peut-être petite à l'échelle macroscopique, mais suffisamment grande vis-à-vis des dimensions granulométriques pour que le milieu poreux y apparaisse déjà comme homogénéisé par effet d'ergodicité. En pratique, pour des pores de dimensions nettement infra-millimétriques, δV serait centimétrique ou décimétrique. Dans un tel écoulement quasi uniforme, en somme, Q et $\text{grad } P$ ne sont plus constants, mais varient lentement dans l'espace à l'échelle des pores.

Une autre remarque importante est que l'opérateur d'émergence, ou de changement d'échelle, n'est plus l'habituelle moyenne spatiale des physiciens, mais l'espérance mathématique. Du point de vue de la clarté conceptuelle, on a beaucoup gagné en remplaçant une opération de statut mathématique peu satisfaisant par un opérateur bien défini. Mais la signification physique reste la même, en raison de l'hypothèse d'ergodicité puisque l'espérance est la limite de la moyenne spatiale prise sur des domaines de plus en plus grands (cf. l'article de C.M. Marle [1]* dans ce même numéro). Dans le cas des écoulements quasi uniformes, on ajoute l'hy-

* Les chiffres entre crochets se réfèrent à la bibliographie en fin d'article.

pothèse que cette limite ergodique est pratiquement atteinte pour un domaine δV sur lequel l'écoulement macroscopique ne diffère que très peu d'un écoulement uniforme.

L'ÉNERGIE DISSIPÉE ET LE PRINCIPE VARIATIONNEL

D'une manière générale, la densité de puissance dissipée par les forces de viscosité est donnée par :

$$W_D = 2\mu e_{ij} \quad [e_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i)]$$

La notation $\partial_i u_j$ désigne la dérivée partielle dans la direction i de la composante u_j de la vitesse, et on utilise la convention d'Einstein de sommation sur les indices répétés : $a^i b_i = \sum_i a^i b_i$.

Comme u est stationnaire et de divergence nulle, on voit facilement que l'espérance, ou valeur moyenne, de cette densité, est :

$$E(W_D) = \mu E(\sum_{i,j} (\partial_i u_j)^2)$$

Tout l'intérêt va donc se concentrer sur la forme quadratique :

$$(5) \quad W(x) = \mu \sum_{i,j} (\partial_i u_j)^2$$

qui ne coïncide d'ailleurs pas avec W_D , mais admet la même valeur moyenne. Si maintenant nous supposons que $u(x)$ est solution du système (4), il apparaît ceci : parmi *tous* les vecteurs aléatoires stationnaires qui vérifient les conditions :

$$(6) \quad \text{div } u = 0 \quad ; \quad u(x) = I(x)u(x) \quad ; \quad E(u) = V$$

celui qui minimise l'espérance EW de la puissance dissipée est justement la solution de (4). D'où l'idée de remplacer ce système (4) par le *principe variationnel* physiquement équivalent : parmi tous les vecteurs stationnaires $u(x)$ vérifiant les conditions (6), trouver celui qui minimise EW . Comme EW , à quelques restrictions près, possède les propriétés d'une norme hilbertienne, il est alors possible, moyennant quelques hypothèses additionnelles, d'établir un théorème d'existence et d'unicité [3].

D'après (5) et la stationnarité de u , on a toujours $EW = -\mu E(u \cdot \Delta u)$. Lorsque u vérifie (4), l'équation $\mu \Delta u = \text{grad } p$ n'est valable qu'à l'intérieur des pores. En particulier, le laplacien Δu présente, en général, un dirac localisé sur la frontière des pores. Mais, u étant justement nul sur cette frontière, la relation

$$\mu u \cdot \Delta u = u \cdot \text{grad } p$$

est vraie dans tout l'espace. De plus, on sait que pour tout gradient stationnaire $\text{grad } p$, et pour tout vecteur stationnaire u de divergence nulle, l'espérance du produit scalaire est égale au produit scalaire des espérances :

$$E(u \cdot \text{grad } p) = E(u) \cdot E(\text{grad } p)$$

Il vient donc finalement :

$$(7) \quad E(W) = -E(u \cdot \text{grad } p) = -Q/\rho \cdot \text{grad } P$$

où Q et $\text{grad } P$ représentent le flux et le gradient macroscopiques constants. Cette relation (7) présente une importance capitale pour la physique des milieux poreux. Elle établit, en effet, l'équivalence de l'énergie dissipée, évaluée au niveau granulométrique, (W) , ou au niveau macroscopique $(-Q/\rho \cdot \text{grad } P)$, et traduit ainsi la *conservation de l'énergie dans l'opération de changement d'échelle*.

LA LOI DE DARCY

Moyennant ce théorème d'existence et d'unicité, il est alors facile de retrouver la loi de Darcy. L'espace ayant n dimensions ($n = 2$ ou 3), choisissons, en effet, n vecteurs macroscopiques constants $e_1, e_2, \dots, e_n$ linéairement indépendants. Par exemple, e_ℓ sera le vecteur unité de l'axe de la coordonnée ℓ , et ses composantes seront : $e_\ell^j = \delta_\ell^j$. D'après le théorème d'existence et d'unicité, pour chaque indice $\ell = 1, 2, \dots, n$, il existe une et une seule solution du système (4), soit $u_\ell, \text{grad } p_\ell$, avec $E(u_\ell) = e_\ell$. Il résulte alors de la *linéarité* du système (4) que toute autre solution sera une combinaison linéaire de ces n solutions particulières. Par exemple, pour un *flux macroscopique* $Q = Q^\ell e_\ell$ de composantes Q^ℓ données, la solution sera :

$$(8) \quad u = \frac{Q^\ell}{\rho} u_\ell \quad ; \quad \text{grad } p = \frac{Q^\ell}{\rho} \text{grad } p_\ell$$

Par hypothèse, les composantes u_ℓ^j de u_ℓ vérifient $E(u_\ell^j) = \delta_\ell^j$. Posons :

$$H_{i\ell} = -\frac{1}{\mu} E(\partial_i p_\ell)$$

Prenant l'espérance des équations (8), on obtient ainsi pour le *gradient macroscopique* $\text{grad } P = E(\text{grad } p)$ la relation :

$$\partial_i P = -\frac{\mu}{\rho} H_{i\ell} Q^\ell$$

ou encore, en désignant par K la matrice inverse de H :

$$Q^\ell = -\frac{\rho}{\mu} K^{\ell i} \partial_i P$$

C'est la *loi de Darcy*, qui apparaît ainsi comme une simple conséquence de la linéarité du système (4) et du théorème d'existence et d'unicité. Ce mode de raisonnement est d'ailleurs assez général. Il expliquerait, par exemple, aussi bien la genèse de la *loi d'Ohm* à partir des équations linéaires de l'électromagnétisme valables à l'échelle microscopique. En contrepartie, il nous dit seulement qu'il existe une relation linéaire entre flux et gradient macroscopiques, mais ne nous permet pas de calculer explicitement le tenseur K des perméabilités. Cependant, les considérations énergétiques présentées plus haut permettent d'aller un peu plus loin.

En effet, à chacune de nos solutions privilégiées u_ℓ correspond un terme énergétique $W_{\ell\ell} = \mu \sum_{i,j} (\partial_i u_{j\ell})^2$. Mais on peut aussi introduire les termes rectangles, et donc la matrice :

$$W_{\ell s} = \mu \sum_{i,j} \partial_i u_{j\ell} \cdot \partial_i u_{js}$$

qui est, par construction, symétrique et définie positive. L'espérance $E(W_{\ell s})$ sera donc encore une matrice symétrique et définie positive. Or les relations (4) sont vérifiées par les u_ℓ et les u_s , et cela entraîne

$$E(W_{\ell s}) = -\mu E(u_\ell \cdot \Delta u_s) = -E(u_\ell) \cdot E(\text{grad } p_s)$$

et donc :

$$E(W_{\ell s}) = H_{\ell s}$$

Ainsi, la matrice H , ainsi que son inverse K , qui est la matrice des perméabilités, est *symétrique et définie positive*. De plus, elle ne dépend pas de la viscosité μ ni de la densité ρ du fluide, puisque les u_ℓ n'en dépendent pas.

Notons encore que cette formulation variationnelle du problème permet d'établir certaines inégalités intéressantes. On se reportera à [3] pour la notion de *perméabilité de filière*. Mentionnons seulement ici que, dans le cas isotrope, on obtient l'inégalité :

$$K \leq \frac{\phi}{12n} E(L^2)$$

où ϕ est la porosité, $n = 2$ ou 3 le nombre des dimensions de l'espace, et $E(L^2)$ l'espérance du carré de la traversée des pores (évaluée selon la granulométrie en mesure).

LA COMPOSITION DES PERMÉABILITÉS

Nous nous proposons maintenant d'examiner un second changement d'échelle : après avoir étudié la genèse de la perméabilité d'un milieu poreux homogène, nous considérons maintenant le niveau auquel cette perméabilité est apparue comme un niveau ponctuel, et la perméabilité elle-même comme une propriété ponctuelle du milieu. Passant alors à une échelle d'observation encore plus élevée, nous constatons que le milieu ne peut plus être considéré comme homogène. Les perméabilités ponctuelles apparaissent maintenant comme des fonctions $k^{ij}(x)$ extrêmement variables du point x de l'espace. Nous dirons qu'elles sont *régionalisées*. Cependant, cette hétérogénéité, observée au niveau ponctuel, dissimule souvent une homogénéité, de nature statistique, qui se manifeste à une échelle supérieure. Pour énoncer cette homogénéité en grand dans un langage précis, nous admettrons que les perméabilités régionalisées $k^{ij}(x)$ peuvent être considérées comme une réalisation d'une fonction aléatoire (tensorielle) ergodique et stationnaire. On a vu ci-dessus la signification physique qu'il convient d'attribuer à un modèle de ce genre, et il n'y a pas lieu d'y revenir ici.

Dans ces conditions, on doit tout d'abord se demander s'il y a genèse d'une nouvelle loi de Darcy, et si les propriétés hydrodynamiques de ce milieu, envisagées à l'échelle supérieure, peuvent être complètement caractérisées par une perméabilité macroscopique constante K . En ce qui concerne les écoulements non uniformes, par exemple les écoulements radiaux, la réponse à cette question est en fait négative. On ne s'en étonnera pas, si l'on remarque que l'opération de changement d'échelle et le passage au niveau supérieur ne sont pas réellement effectués par de tels écoulements. Nous nous limiterons ici au cas des écoulements macroscopiquement uniformes, ou quasi uniformes, c'est-à-dire, ici encore, aux écoulements qui peuvent être considérés comme uniformes pour une échelle intermédiaire correspondant à des volumes de dimensions, peut-être petites au niveau macroscopique, mais suffisamment grandes au niveau ponctuel pour que les propriétés du milieu y apparaissent déjà comme homogénéisées par effet d'ergodicité. Vis-à-vis de ces écoulements, dont les lignes de courant se déploient en vastes nappes, il existe effectivement une perméabilité macroscopique constante K . Nous allons le voir grâce à un raisonnement tout à fait analogue à celui que nous avons utilisé dans la première partie.

LE PRINCIPE VARIATIONNEL

Pour simplifier les notations, nous prenons maintenant $\mu = \rho = 1$. Le problème posé est alors le suivant : étant donnés une perméabilité $k^{ij}(x)$ considérée comme une fonction aléatoire stationnaire, et un gradient macroscopique constant $\partial_i P$, (ou un flux macroscopique constant Q^i), on cherche un gradient aléatoire stationnaire $\partial_i p$ et un flux stationnaire $q^i(x)$ tels que :

$$\text{div } q = 0 \quad ; \quad q^i = -k^{ij} \partial_j p \quad ; \quad E(\partial_i p) = \partial_i P \\ (\text{ou } E(q^i) = Q^i)$$

L'énergie dissipée admet, comme on l'a vu, l'expression :

$$W = -q^i \partial_i p$$

mais $W = W(x)$ est maintenant une fonction aléatoire stationnaire. D'après la loi de Darcy, W s'exprime donc en fonction du tenseur k des perméabilités ou de son inverse h , selon la relation :

$$W = \partial_i p k^{ij} \partial_j p = q^i h_{ij} q^j$$

D'où deux formulations équivalentes du principe variationnel :

- ou bien on cherche le minimum de $E(W) = E(\partial_i p k^{ij} \partial_j p)$ sous la condition $E(\partial_i p) = \partial_i P$ donné, et cela est équivalent à la condition $\text{div } q = 0$ avec $q^i = -k^{ij} \partial_j p$;
- ou bien on cherche le minimum de $E(W) = E(q^i h_{ij} q^j)$, avec $\text{div } q = 0$ et $E(q^i) = Q^i$ donné, et cela est équivalent à $h_{ij} q^j = -\partial_i p$ pour un gradient stationnaire $\partial_i p$.

LA LOI DE DARCY MACROSCOPIQUE

Sous cette forme variationnelle, et moyennant quelques hypothèses additionnelles sur la fonction aléatoire $k(x)$, il n'est pas très difficile d'établir alors un théorème d'existence et d'unicité. Dès lors, désignant par $\partial_i p^\ell$ et $q^{i\ell}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) n solutions particulières définies par exemple par :

$$E(\partial_i p^\ell) = \delta_i^\ell ; \quad \partial_i q^{i\ell} = 0 ; \quad q^{i\ell} = -k^{ij} \partial_j p^\ell$$

on voit que la solution associée à un gradient macroscopique constant $\partial_i P$ donné sera :

$$\partial_i p = \partial_i p^\ell \cdot \partial_\ell P ; \quad q^i = q^{i\ell} \partial_\ell P$$

Posant donc $K^{i\ell} = -E(q^{i\ell})$; $Q^i = E(q^i)$, il vient simplement :

$$Q^i = -K^{i\ell} \partial_\ell P$$

C'est la loi de Darcy macroscopique. Ce nouveau tenseur K , qui représente les perméabilités macroscopiques constantes, possède toujours la même signification énergétique. De fait, en posant :

$$W^{\ell s} = -q^{i\ell} \partial_i p^s = \partial_i p^\ell k^{ij} \partial_j p^s$$

nous obtenons une matrice symétrique définie positive, qui décrit l'énergie dissipée au niveau microscopique. Comme $q^{i\ell}$ est un flux conservatif, et $\partial_i p^s$ un gradient, on trouve pour l'espérance :

$$E(W^{\ell s}) = -E(q^{i\ell} \partial_i p^s) = -E(q^{i\ell}) E(\partial_i p^s)$$

(émergence de l'énergie). Mais $E(\partial_i p^s) = \delta_i^s$, et $E(q^{i\ell}) = -K^{i\ell}$ par définition. Il vient donc :

$$E(W^{\ell s}) = K^{\ell s}$$

En particulier, la matrice des perméabilités macroscopiques constantes est encore symétrique et définie positive.

LOI DE COMPOSITION

Sous forme plus synthétique, la loi de composition des perméabilités peut s'exprimer comme suit : posons $C^{i\ell} = -q^{i\ell}$ et désignons par A_ℓ^i la matrice inverse de $\partial_i p^\ell$. Alors, on a :

$$(9) \quad k = CA \\ K = E(C)[E(A^{-1})]^{-1}$$

Cette loi généralise les règles connues de composition arithmétique ou harmonique valables dans les milieux stratifiés. Mais, dans le cas général, il n'est pas facile de déterminer explicitement ces matrices C et A . Toutefois, le principe variationnel permet d'établir des inégalités d'intérêt général.

En effet, on a vu que, pour un gradient macroscopique constant $\partial_i P = \varpi_i$, la solution $\partial_i p$ réalise le minimum de $E(\partial_i p k^{ij} \partial_j p)$ sous la condition $E(\partial_i p) = \varpi_i$. On a donc :

$$E(W) = \varpi_i K^{ij} \varpi_j \leq E(\partial_i p k^{ij} \partial_j p)$$

pour tout gradient stationnaire $\partial_i p$ d'espérance ϖ_i . En particulier, avec $\partial_i p = \varpi_i$ (gradient microscopique constant, donc stationnaire), il vient :

$$\varpi_i K^{ij} \varpi_j \leq \varpi_i E(k^{ij}) \varpi_j$$

De même, avec $h = k^{-1}$, $H = K^{-1}$, on a :

$$E(W) = Q^i H_{ij} Q^j \leq E(q^i h_{ij} q^j)$$

pour tout vecteur conservatif q^i d'espérance Q^i donnée. En particulier, avec $q^i = Q^i$ (vecteur constant, donc conservatif et stationnaire), il vient :

$$Q^i H_{ij} Q^j \leq Q^i E(h_{ij}) Q^j$$

En termes de matrices, on écrit $A \leq B$ si la matrice $B - A$ est définie positive. On a donc ici $K \leq E(k)$ et $H \leq E(h)$, ou, ce qui revient au même :

$$(10) \quad [E(k^{-1})]^{-1} \leq K \leq E(k)$$

En d'autres termes, la perméabilité macroscopique est toujours comprise entre la moyenne arithmétique et la moyenne harmonique des perméabilités ponctuelles.

LA RÈGLE DE PONDÉRATION GÉOMÉTRIQUE

On sait que la moyenne géométrique est, elle aussi, toujours comprise entre la moyenne arithmétique et la moyenne harmonique. Les inégalités (10) justifient donc, dans une certaine mesure, la règle empirique de pondération géométrique souvent utilisée en pratique. Cette règle s'écrit :

$$(11) \quad \log K = E(\log k)$$

En fait, la règle (11) est fautive dans le cas tridimensionnel. Mais il y a un cas où on peut montrer qu'elle s'applique en toute rigueur aux écoulements à deux dimensions. Je me limiterai ici au cas d'une perméabilité scalaire dans un milieu isotrope. On trouvera une formulation plus générale dans [2].

Le raisonnement repose sur le fait que, dans un espace à deux dimensions (et dans ce cas seulement), une rotation de 90° transforme un vecteur gradient en un vecteur conservatif, et réciproquement. Supposons que nous ayons $q = -k \text{ grad } p$, $\text{div } q = 0$. Après une rotation de 90° , q devient $\text{grad } p'$, $\text{grad } p$ devient q' , avec $\text{div } q' = 0$, et l'on a de plus $\text{grad } p' = -k q'$, c'est-à-dire $q' = -h \text{ grad } p'$, avec $h = 1/k$. Au niveau macroscopique, il viendra de même, à une rotation près, $E(q') = E(\text{grad } p) = \text{grad } P$, $E(\text{grad } p') = E(q) = Q$, et par suite $E(q') = -HE(\text{grad } p')$.

Ainsi, les deux systèmes de Darcy :

$$(12) \quad q = -k \text{ grad } p \\ \text{div } q = 0$$

$$(12') \quad q' = -h \text{ grad } p' \\ \text{div } q' = 0$$

conduisent respectivement aux règles d'émergence :

$$(13) \quad E(q) = -KE(\text{grad } p) ;$$

$$(13') \quad E(q') = -HE(\text{grad } p')$$

Mais les deux systèmes de Darcy (12) et (12') ont la même structure, de sorte que H doit se déduire de h par les mêmes opérations que K à partir de k :

$$K = F(k) ; \quad H = F(h)$$

Nous ignorons la forme de cette fonctionnelle $F(k)$, certainement très compliquée. Toutefois, il est évident que l'on a :

$$F(ck) = cF(k)$$

pour toute constante positive c .

Considérons alors le cas particulier où $k/E(k)$ et $h/E(h)$ sont des fonctions aléatoires équivalentes, c'est-à-dire admettent les mêmes lois de distribution multivariées. C'est d'ailleurs là une condition assez restrictive. Elle est cependant toujours remplie dans le cas particulier, très intéressant en pratique, où la fonction aléatoire k est lognormale. Comme h est équivalente à $kE(h)/E(k)$, on trouve alors :

$$H = F(h) = F(kE(h)/E(k)) = KE(h)/E(k)$$

et donc :

$$(14) \quad K = E(k)^{1/2}/E(h)^{1/2}$$

Mais, étant équivalentes, les deux fonctions aléatoires $k/E(k)$ et $h/E(h)$ ont la même moyenne géométrique :

$$E(\log k) - \log E(k) = E(\log h) - \log E(h)$$

On en déduit $2E(\log k) = \log(E(k)/E(h))$, et la relation (14) se met sous la forme :

$$\log K = E(\log k)$$

Il s'agit donc bien, dans ce cas particulier, de la règle de pondération géométrique.

DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

En fait, cette règle de pondération géométrique reste très particulière à l'espace à deux dimensions. En effet, dans le cas où la perméabilité est faiblement variable, il est possible d'obtenir l'expression de K sous la forme d'un développement limité, et de calculer explicitement au moins les premiers termes de ce développement [2]. Limitons-nous ici au cas d'une perméabilité scalaire faiblement variable dans un milieu isotrope. En posant :

$$k(x)/E(k) = 1 + \gamma(x)$$

on trouve à l'ordre 2 :

$$(15) \quad K/E(k) = 1 - E(\gamma^2)/n$$

où n est le nombre des dimensions de l'espace. Ceci n'est compatible avec la moyenne géométrique que pour $n = 2$. Pour $n = 1$, on sait que K coïncide avec la moyenne harmonique. Pour $n = 3$, la formule (15) indique que K est plus proche de la moyenne arithmétique que ne l'est la moyenne géométrique. De fait, si l'on se réfère aux inégalités (10), la relation (15) signifie que K se situe à mi-chemin entre moyenne harmonique et moyenne arithmétique si $n = 2$, et aux $2/3$ de ce chemin, si $n = 3$. On conçoit d'ailleurs bien que K augmente avec n : lorsque le nombre des dimensions s'élève, un plus grand nombre de chemins possibles s'offrent au

fluide pour contourner les zones de basses perméabilités.

Il ne faut d'ailleurs pas s'imaginer qu'il puisse exister, même dans le cas isotrope, une règle simple de pondération universellement valable. De ce point de vue, la formule (15) fait un peu illusion. Elle montre, en effet, que, dans le cas isotrope, le premier terme du développement de $K/E(k)$ ne dépend que de la dimension n et de la variance relative $E(\gamma^2)$. Mais cette simplicité ne subsiste pas pour les termes suivants. Des calculs, d'ailleurs assez complexes, effectués sur trois modèles isotropes dans l'espace à deux dimensions, voir [4], ont fourni les résultats suivants :

— Premier modèle :

$$K/E(k) = 1 - E(\gamma^2)/2 + 0,279E(\gamma^3)$$

— Second modèle :

$$K/E(k) = 1 - E(\gamma^2)/2 + 0,307E(\gamma^3)$$

— Troisième modèle :

$$K/E(k) = 1 - E(\gamma^2)/2 + 0,250E(\gamma^3)$$

Le premier modèle était un « mot croisé aléatoire », le second était un milieu découpé en polygones convexes aléatoires par des droites poissoniennes, et le troisième un milieu à loi indéfiniment divisible. On notera que le coefficient du terme d'ordre 3, tout en variant relativement peu, n'en semble pas moins dépendre de manière irréductible de la structure du milieu, et cette circonstance supprime tout espoir quant à l'existence d'une règle universelle simple.

CONCLUSION

Malgré l'intérêt que présentent ces résultats partiels, il est clair que le problème de la composition des perméabilités reste ouvert, dans le cas notamment des écoulements non uniformes, par exemple des écoulements radiaux, et, a fortiori, dans le cas des écoulements non permanents (régimes transitoires). Il faudrait aussi, évidemment, examiner le cas des écoulements polyphasiques qui n'a pas été abordé ici. Voir [1] pour la position de ce très difficile problème. Il y a là un vaste programme de travail, qui intéresse au plus haut point l'industrie pétrolière et l'hydrogéologie. Il semble que les principes variationnels et la règle de l'émergence de l'énergie dissipée qui nous ont servi de fil directeur pourraient ici encore rendre de grands services.

RÉFÉRENCES

- [1] C.M. MARLE — Les écoulements polyphasiques en milieu poreux : de l'échelle des pores à l'échelle macroscopique, 1984 dans ce même numéro.
- [2] G. MATHERON — Éléments pour une théorie des milieux poreux, Paris, Masson, 1967.
- [3] G. MATHERON — L'émergence de la loi de Darcy, 1979, CGMM, Fontainebleau.
- [4] G. MATHERON — Composition des perméabilités en milieu poreux hétérogène : critique de la règle de pondération géométrique. Revue de l'IFP, 1968, 2, pp. 201-218.