

MODELE ISOFACTORIEL ET CHANGEMENT DE SUPPORT

G. MATHERON*

TABLE DES MATIERES

RESUME - ABSTRACT	78	ZUSAMMENFASSUNG	78
A - INTRODUCTION	75	F - LE MODELE MIXTE DISCRET/CONTINU. 101	
B - STRUCTURE GENERALE D'UN MODELE ISO- FACTORIEL	75	1 - CHANGEMENT DE SUPPORT	103
C - UN FIL DIRECTEUR	78	G - COMPLEMENTS	108
1 - CONSTRUCTION EXPLICITE	81	H - CONTROLES	111
D - MODELE DE TYPE MOSAÏQUE	82	1 - LE CAS CONTINU	111
E - LE MODELE BINOMIAL NEGATIF	91	2 - CAS DISCONTINU	118
1 - RELATIONS DE RECURRENCE	94		
2 - CHANGEMENT DE SUPPORT	96		
3 - MODELE GENERAL DE CHANGEMENT DE SUPPORT	100	REFERENCES	123

* Centre de Géostatistique et de Morphologie Mathématique - Ecole des Mines - 35, Rue Saint-Honoré - 77305 FONTAINEBLEAU.

RESUME

Le krigeage disjonctif est une méthode générale, mais la technique habituelle, fondée sur les anamorphoses gaussiennes et les expansions hermitiennes, ne peut être appliquée lorsque la distribution présente un pic accentué. Dans ce cas, il est préférable d'utiliser les modèles isofactoriels à distribution discrète. La théorie des semi-groupes markoviens fournit une méthode générale pour construire ces modèles. Deux exemples sont donnés : le modèle de type mosaïque, et le modèle binomial négatif. Le modèle de changement de support correspondant est comparé aux distributions réelles.

ABSTRACT

Isofactorial Models and Change of Support

Disjunctive kriging is a general method, but the usual technique based upon Gaussian anamorphoses and Hermitian expansions cannot be applied if the distribution has a spike. In this case, it is suggested to use isofactorial models with discrete distributions. A general method for building such models is provided by the theory of Markovian semi-groups. Two examples are given : the mosaic type model, and the negative binomial model. The corresponding model of change of support is compared with true distributions.

ZUSAMMENFASSUNG

Isofaktorielle Modelle und Stützungswechsel

Das disjunktive Kriging ist zwar eine allgemeine Methode, aber die gewöhnliche Vorgehensweise, die auf Gauss'scher Anamorphose und auf Hermiteschen Entwicklungen beruht, kann bei einer Verteilung mit einem ausgeprägten Piek nicht angewandt werden. In diesem Fall sind isofaktorielle Modelle mit diskreten Verteilungen vorzuziehen. Die Theorie der Markovschen Halbgruppen liefert eine allgemeine Methode, um diese Modelle zu bilden. Zwei Beispiele werden gegeben : das Modell vom typ "Mosaik", und das negativ binomiale Modell. Das zugehörige Modell zum Wechsel der Stützung wird mit den echten Verteilungen verglichen.

A - INTRODUCTION

Les techniques d'estimation non linéaires fondées sur des modèles multigaussiens rencontrent, on le sait, certaines difficultés dans le cas d'une distribution présentant un atome. Le cas typique est celui d'une variable $Z \geq 0$ telle que la probabilité $q = P(Z = 0)$ soit strictement positive. L'anamorphose directe $Z = \varphi(Y)$ où Y est gaussienne existe bien, mais elle n'est pas injective : l'image inverse de $\{Z = 0\}$ est un segment $(-\infty, a)$. Autrement dit, la loi de Y n'est plus la loi de Gauss G , mais prend la forme $q \delta_a + 1_{\{y > a\}} G$. En particulier, les polynômes d'Hermite ne sont plus orthogonaux. Le krigeage disjonctif reste en principe possible, à partir des équations intégrales générales, mais ne bénéficie plus des grandes simplifications liées à l'isofactorialité : De même, le calcul d'une espérance conditionnelle du type

$$E[f(Y)/Y_1 \leq a, Y_2 \leq a, \dots]$$

devient assez lourd. D'où l'idée de construire des modèles isofactoriels dont les distributions possèdent au départ ce caractère atomique. Comme on peut toujours discrétiser une loi continue, je me limiterai au cas des distributions discrètes, qui présente d'ailleurs un grand intérêt par lui-même, par exemple dans le cas d'un gisement de diamant, où l'une des variables de base est le nombre de pierres par échantillon.

B - STRUCTURE GENERALE D'UN MODELE ISOFACTORIEL

Pour permettre la mise en oeuvre de la moins exigeante des techniques non linéaires, qui est le K.D., un modèle isofactoriel doit comporter trois types de lois bivariées : deux types de lois symétriques (échantillon/échantillon et bloc/bloc) et un

type dissymétrique (échantillon/bloc).

Dans le cas discret, nous aurons deux distributions monovariées :

W_i^V pour les échantillons, W_i^V pour les blocs
et deux familles orthonormées complètes dans $L^2(N, W^V)$ et $L^2(N, W^V)$
respectivement de fonctions ou facteurs :

$\chi_n^V(i)$ pour les échantillons, $\chi_n^V(i)$ pour les blocs.

Pour deux échantillons v ou deux blocs V implantés en deux points a et b , les lois symétriques seront de la forme :

$$(S) \quad \begin{cases} W_{ij} = W_i^V W_j^V \sum_{n \geq 0} T_n(v_a, v_b) \chi_n^V(i) \chi_n^V(j) \\ W_{ij} = W_i^V W_j^V \sum_{n \geq 0} T_n(v_a, v_b) \chi_n^V(i) \chi_n^V(j) \end{cases}$$

où seuls les coefficients T_n dépendent de l'implantation. Pour un échantillon v_a et un bloc V_b , la loi dissymétrique sera du type :

$$(D) \quad W_{ij} = W_i^V W_j^V \sum_{n \geq 0} T_n(v_a, V_b) \chi_n^V(i) \chi_n^V(j)$$

Le cas le plus important est celui d'un échantillon v intérieur à un bloc V . Exactement comme dans le cas du modèle gaussien discrétisé, voir [1], on ne distinguera pas les unes des autres les diverses implantations possibles de v dans V , ce qui revient à considérer v comme implanté "au hasard" dans V . La loi bivariable correspondante :

$$(CS) \quad W_{ij}^{VV} = W_i^V W_j^V \sum_{n \geq 0} T_n(v, V) \chi_n^V(i) \chi_n^V(j)$$

constitue alors par elle-même un modèle de changement de support, qui joue un rôle crucial dans l'ensemble du dispositif.

Il faut d'ailleurs distinguer deux cas, ou deux modes d'utilisation possible de ces modèles discrets. Dans le premier cas, la variable d'intérêt Z est une teneur, liée à la variable discrète $N = i$ du modèle par une anamorphose $Z_V = \varphi_V(i)$, connue expérimentalement pour le support v . La condition de Cartier $E(Z_V/Z_V) = Z_V$ et la relation (CS) ci-dessus montrent alors que l'anamorphose $Z_V = \varphi_V(i)$ au niveau des blocs est nécessairement donnée par les relations :

$$(1) \quad \begin{cases} Z_V = \varphi_V(i) = \sum_{n \geq 0} C_n T_n(v, V) \chi_n^V(i) \\ C_n = \sum_j W_j^V \varphi_V(j) \chi_n^V(j) \end{cases}$$

Dans le second cas, la variable d'intérêt (qui n'est alors plus une teneur, mais, par exemple, le nombre de pierres contenues dans v ou V) est la variable discrète $N = i$ elle-même. La condition de Cartier s'écrit alors :

$$(2) \quad E(N_V/N_V = i) = \frac{V}{V} i$$

On note la différence capitale de ces deux points de vue. Dans le premier cas, la relation (1) définit, dans le cadre du modèle (CS) choisi d'avance, l'anamorphose φ_V que l'on doit associer au support V . Dans le second cas, il n'y a pas d'anamorphose, et la relation (2) est une condition qui doit être impérativement respectée par le modèle (CS).

Dans certains modèles, par exemple dans le modèle binomial négatif étudié ci-dessous, les facteurs d'ordre 1, χ_1^V et χ_1^V seront linéaires en i , donc de la forme

$$(3) \quad \chi_1^V(i) = \frac{i - m_V}{\sigma_V} \quad ; \quad \chi_1^V(i) = \frac{i - m_V}{\sigma_V}$$

($m_V, m_V, \sigma_V, \sigma_V$ sont les moyenne et écart-type de N_V et N_V).

D'après (CS), on a toujours $E(\chi_1^V/N_V = i) = T_1(v, V) \chi_1^V(i)$.

De plus, $m_v/m_v = V/v$. Donc, si les relations (3) sont vérifiées, la condition de Cartier (2) se met sous la forme très simple :

$$(2') \quad T_1(v/V) = \frac{\sigma_v}{\sigma_V} \frac{v}{V}$$

Cela est cohérent, puisque $T_1(v/V)$ représente alors le coefficient de corrélation de N_v et N_V pour un échantillon v aléatoire dans V .

Le modèle isofactoriel sera entièrement défini par la donnée des coefficients $T_n(v, V)$ du changement de support (CS) et des coefficients $T_n(V_a, V_b)$ de la loi des blocs V implantés en deux points a et b . Ces derniers dépendent évidemment des points a et b , ou, dans le cas stationnaire, simplement du vecteur $b - a$. De fait, chaque échantillon v_a étant considéré comme implanté de façon aléatoire dans le bloc V_a qui le contient, on admet, dans ce genre de modèle, que la variable N_v est conditionnellement indépendante de toutes les autres variables^a du modèle lorsque N_{v_a} est fixée. Cela implique évidemment :

$$(4) \quad \begin{cases} T_n(v_a, v_b) = T_n(v, V) T_n(V_a, V_b) \\ T_n(v_a, v_b) = (T_n(v, V))^2 T_n(V_a, V_b) \end{cases}$$

ce qui achève de déterminer le modèle.

En particulier, si v et v' sont deux échantillons distincts prélevés dans le même bloc, ceci implique :

$$(4') \quad T_n(v, v') = (T_n(v, V))^2$$

C - UN FIL DIRECTEUR

Pour construire des modèles de ce type, considérons d'abord le cas le plus facile, qui est celui des lois symétriques de type (s). Les w_i et les facteurs orthonormés χ_n étant supposés choisis, il

faut trouver des coefficients T_n tels que les W_{ij} soient ≥ 0 . Le formalisme markovien s'impose ici de lui-même. Désignons, en effet, par :

$$P_{ij} = \frac{W_{ij}}{W_i}$$

la probabilité de transition de i à j . Si T_n et T'_n sont des coefficients admissibles, les produits $T''_n = T_n T'_n$ seront encore admissibles. Car, nous pouvons composer les probabilités de transition

$$P_{ij} = \sum_n T_n \chi_n(i) \chi_n(j) W_j ; \quad P'_{jk} = \sum_n T'_n \chi_n(j) \chi_n(k) W_k$$

ce qui donne, compte tenu de l'orthogonalité des facteurs :

$$P''_{ik} = \sum_j P_{ij} P'_{jk} = \sum_n T_n T'_n \chi_n(i) \chi_n(k) W_k$$

De plus, en l'absence d'effet de pépité, on souhaite pouvoir donner aux coefficients T_n des valeurs tendant vers 1 lorsque les deux échantillons se rapprochent. Introduisant un paramètre $t \geq 0$, sans signification par lui-même, mais liée indirectement à la distance entre échantillons, on est alors conduit à chercher des modèles dans lesquels les coefficients T_n pourront être de forme exponentielle :

$$T_n(t) = e^{-\lambda_n t} \quad (\lambda_n \geq 0, \lambda_0 = 0)$$

Mais la matrice de transition correspondante :

$$P_{ij}(t) = \sum_{n \geq 0} e^{-\lambda_n t} \chi_n(i) \chi_n(j) W_j$$

est celle d'un processus de Markov à temps continu et valeurs discrètes.

Tel sera notre fil directeur. La matrice markovienne $P(t)$ est nécessairement de la forme $P(t) = \exp(At)$, pour une matrice A ou générateur infinitésimal de la forme :

$$A_{ij} = -C_i + C_i \Pi_{ij}$$

où Π est elle-même une matrice de transition et les C_i des coefficients > 0 : pendant le temps δt , le processus reste dans son état initial i , avec la probabilité $1 - C_i \delta t$, ou passe de l'état i à l'état j , avec la probabilité $C_i \delta t \Pi_{ij}$ (on n'écrit pas les infiniment petits d'ordre supérieur à 1 en δt).

De plus, ce processus markovien doit vérifier trois conditions :

i/ il doit admettre une probabilité stationnaire W_i , c'est-à-dire telle que :

$$\sum_i W_i A_{ij} = 0$$

ii/ il doit être symétrique relativement à cette probabilité stationnaire, soit $W_i P_{ij}(t) = W_j P_{ji}(t)$, ou, ce qui est équivalent

$$(5) \quad C_i W_i \Pi_{ij} = C_j W_j \Pi_{ji}$$

Il est facile de voir que la condition (5) entraîne par elle-même la relation $\sum_i W_i A_{ij} = 0$, donc implique que W est une probabilité stationnaire.

iii/ enfin, les χ_n doivent être effectivement des facteurs, ce qui s'écrit :

$$(6) \quad A \chi_n = \lambda_n \chi_n$$

Présentons ceci de manière plus synthétique. A toute fonction $f : i \rightarrow f_i$ sur N appartenant à $L^2(N, W)$, i.e. $\sum W_i f_i^2 < \infty$, on associe l'espérance conditionnelle

$$f_i(t) = \sum_j P_{ij}(t) f_j = E(f_{N_t} / N_0 = i)$$

Le processus est alors décrit complètement par l'équation d'évolution

$$\frac{d f(t)}{dt} = A f(t)$$

soit, sous forme explicite :

$$\frac{d f_i(t)}{dt} = - C_i f_i(t) + C_i \sum_j \pi_{ij} f_j(t)$$

La condition (5) exprime que le générateur infinitésimal A est un, opérateur auto-adjoint sur $L^2(N, W)$, soit :

$$\sum_i W_i g_i (A f)_i = \sum_i W_i (A g)_i f_i \quad (\forall f, g \in L^2(N, W))$$

Et la condition (6) exprime que cet opérateur admet un spectre discret, avec des valeurs propres $-\lambda_n \leq 0$ ($\lambda_0 = 0$) et, de plus, les fonctions propres correspondantes, qui sont les facteurs χ_n , doivent constituer une base hilbertienne de $L^2(N, W)$.

1 - CONSTRUCTION EXPLICITE

Il est très facile (au moins dans le cas fini) de former des processus de ce type, admettant une loi stationnaire W choisie d'avance. Partons, en effet, d'une probabilité W_i , $i = 0, 1, \dots, N$ donnée et d'une matrice T_{ij} symétrique dont tous les termes sont ≥ 0 mais à cela près quelconque. Posons :

$$t_i = \sum_j T_{ij} ; \quad \pi_{ij} = T_{ij}/t_i ; \quad C_i = t_i/W_i$$

Alors; le processus associé au générateur $A_{ij} = - C_i \delta_{ij} + C_i \pi_{ij}$ vérifie toutes les conditions voulues. De plus, la détermination des valeurs propres $-\lambda_n$ et des fonctions propres χ_n revient à diagonaliser la matrice symétrique

$$\sqrt{W_i} A_{ij} \frac{1}{\sqrt{W_j}} = - C_i \delta_{ij} + \frac{1}{\sqrt{W_i}} T_{ij} \frac{1}{\sqrt{W_j}}$$

La première partie du programme, i.e. la recherche de lois isofactorielles symétriques, est donc très facile à remplir. Le second point (lois dissymétriques et modèles de changement de support) est plus difficile, et je me contenterai ici de traiter deux exemples.

REMARQUE - Si l'on a trouvé un modèle de type $P_{ij}(t)$ ci-dessus pour les lois symétriques, on obtient une famille plus riche en considérant aussi les lois

$$P_{ij}(\mu) = \int_0^{\infty} P_{ij}(t) \mu(dt)$$

où μ est une probabilité quelconque sur $(0, \infty)$. Cela revient à prendre dans (S) des coefficients T_n de la forme

$$T_n = \int_0^{\infty} e^{-\lambda_n t} \mu(dt)$$

Cette possibilité sera précieuse dans les applications.

D - MODELE DE TYPE MOSAIQUE

Dans ce modèle, les transitions Π_{ij} ne dépendent pas de l'état initial i , soit $\Pi_{ij} = \omega_j$ pour une probabilité ω donnée. La droite est ainsi divisée en compartiments meublés de variables i tirées au sort indépendamment selon la même loi ω . Cependant, si les coefficients C_i ne sont pas constants, la durée d'un état i est une variable exponentielle dont l'espérance est $1/C_i$, de sorte que les teneurs ne sont pas indépendantes de la taille des compartiments. Si par exemple C_i est croissante en i , il y aura corrélation négative entre taille et teneur, i.e. destruction des hautes teneurs.

Je me limite ici au cas fini ($i = 0, 1, \dots, N$) pour éviter toute discussion de convergence. Le générateur A est défini par :

$$(Af)_i = -C_i f_i + C_i \sum_j \omega_j f_j$$

Les probabilités stationnaires W_i existent toujours, et sont définies par :

$$W_i C_i = C \varpi_i \quad (1/C = \sum \varpi_i / C_i)$$

La condition (5), qui se réduit à $C_i W_i \varpi_j = C_j W_j \varpi_i$, est donc automatiquement vérifiée. Cherchons les valeurs propres et les facteurs. L'équation

$$(Af)_i = -C_i f_i + C_i \sum_j \varpi_j f_j = -\lambda f_i$$

donne, à un facteur arbitraire près

$$f_i = \frac{C_i}{C_i - \lambda} \quad \text{avec : } \sum_i \frac{\varpi_i C_i}{C_i - \lambda} = 1$$

Supposons par exemple $0 < C_0 < C_1 < \dots < C_N$. Il est facile de voir que l'équation

$$\sum \frac{\varpi_i C_i}{C_i - \lambda} = 1$$

admet exactement $N+1$ solutions distinctes, très faciles à trouver numériquement. La première est toujours $\lambda_0 = 0$, et on a nécessairement :

$$0 = \lambda_0 < C_0 < \lambda_1 < C_1 < \dots < \lambda_N < C_N$$

Les fonctions propres (non normées) sont alors les f_n définis par :

$$f_n(i) = \frac{C_i}{C_i - \lambda_n} \quad (f_0(i) = 1)$$

Elles sont nécessairement orthogonales :

$$\begin{cases} \sum_i W_i f_n(i) f_m(i) = \delta_{nm} B_n \\ B_n = \|f_n\|^2 = \sum_i W_i \frac{C_i^2}{(C_i - \lambda_n)^2} \end{cases}$$

En particulier l'orthogonalité de f_0 et f_n , $n \geq 1$ donne :

$$(7) \quad \sum_i \frac{\omega_i}{C_i - \lambda_n} = 0 \quad (n \geq 1)$$

Comme les f_n sont au nombre voulu de $N+1$, elles constituent une base de $L^2(W)$, autrement dit, on a aussi :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{B_n} \frac{C_i}{C_i - \lambda_n} \frac{C_j}{C_j - \lambda_n} W_j = \delta_{ij}$$

Le processus markovien lui-même est défini par la matrice de transition :

$$(8) \quad P_{ij}^*(t) = \sum_{n \geq 0} e^{-\lambda_n t} \frac{1}{B_n} \frac{C_i}{C_i - \lambda_n} \frac{C_j}{C_j - \lambda_n} W_j$$

Cherchons maintenant un modèle de changement de support. Pour cela, considérons le processus obtenu en changeant C_i en C_i+h ($h > 0$), les probabilités ω_i restant constantes. On constate (pour $n \geq 1$), que les valeurs propres et les fonctions propres deviennent

$$\lambda_n(h) = \lambda_n + h \quad ; \quad f_n^h(i) = \frac{C_i+h}{C_i - \lambda_n} \quad (n \geq 1)$$

De fait, pour $n \geq 1$, les valeurs propres sont caractérisées par la relation (7), qui reste vérifiée lorsque l'on change λ_n en λ_n+h et C_i en C_i+h .

Les nouvelles probabilités stationnaires $W_i(h)$ sont alors données par :

$$(C_i+h) W_i(h) = C(h) \omega_i \quad \left(\frac{1}{C(h)} = \sum \frac{\omega_i}{C_i+h} \right)$$

On en déduit :

$$(9) \quad W_i(h) = \frac{C_i}{C_i+h} \frac{C(h)}{C} W_i$$

Pour $n \geq 1$, on voit de même que les normes $B_n(h) = \|f_n^h\|^2$ et $B_n = \|f_n\|^2$ se déduisent l'une de l'autre selon la règle :

$$B_n(h) = \frac{h+\lambda_n}{\lambda_n} \frac{C(h)}{C} B_n$$

Nous cherchons une probabilité de transition $\Pi_{ij}(h)$ échangeant les facteurs f_n et f_n^h selon les formules :

$$\begin{cases} \sum_j \Pi_{ij}(h) f_n^h(j) = b_n f_n(i) \\ \sum_i W_i f_n(i) \Pi_{ij}(h) = b'_n W_j(h) f_n^h(j) \end{cases}$$

Essayons la matrice

$$(10) \quad \Pi_{ij}(h) = \left[1 + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{B_n(h)} \frac{C_i}{C_i - \lambda_n} \frac{C_j + h}{C_j - \lambda_n} \right] W_j(h)$$

qui possède les propriétés requises, avec

$$b_n = 1 \quad ; \quad b'_n = \frac{B_n}{B_n(h)} = \frac{C}{C(h)} \frac{\lambda_n}{h + \lambda_n}$$

Mais il faut évidemment vérifier que $\Pi_{ij}(h)$ est ≥ 0 . De fait, nous trouvons :

$$\Pi_{ij}(h) = \left[1 + \frac{C_i}{C_i + h} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{B_n(h)} \frac{C_i + h}{C_i - \lambda_n} \frac{C_j + h}{C_j - \lambda_n} \right] W_j(h)$$

et d'autre part :

$$\delta_{ij} = \left[1 + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{B_n(h)} \frac{C_i + h}{C_i - \lambda_n} \frac{C_j + h}{C_j - \lambda_n} \right] W_j(h)$$

On en déduit :

$$(10') \quad \Pi_{ij}(h) = \frac{C_i}{C_i + h} \delta_{ij} + \frac{h}{C_i + h} W_j(h)$$

Il s'agit bien d'une probabilité de transition, et même d'un type remarquablement simple. La loi (dissymétrique) à deux variables correspondantes s'écrit

$$W_{ij}(h) = W_i \frac{C_i}{C_i+h} \delta_{ij} + W_i \frac{h}{C_i+h} W_j(h)$$

Si donc on considère $\Pi_{ij}(h)$ comme la loi d'un bloc V conditionné par un échantillon intérieur v , la transition inverse, i.e. la loi de l'échantillon interne conditionné par le bloc sera donc, compte tenu de (9) :

$$(11) \quad \Pi'_{ji}(h) = \frac{W_{ij}(h)}{W_j(h)} = \frac{C}{C(h)} \delta_{ij} + \frac{h}{C_i+h} W_i$$

En général, cette loi (11) ne vérifiera pas la condition de Cartier sous la forme (2), et ne pourra donc servir de modèle de changement de support pour la variable discrète elle-même. Mais, si l'on travaille en anamorphose $Z_v = \varphi_v(i)$, la règle de Cartier donnera l'anamorphose des blocs sous la forme très simple

$$Z_v = \varphi_v(j) = \frac{C}{C(h)} \varphi_v(j) + \sum_i \frac{h}{C_i+h} \varphi_v(i) W_i$$

Mais, en vue du krigeage disjonctif, il conviendra d'utiliser les développements (1). On prendra garde que les f_n ne sont pas normés, de sorte qu'il convient de prendre :

$$(13) \quad \begin{cases} \chi_n^v(i) = \frac{1}{\sqrt{B_n}} \frac{C_i}{C_i-\lambda_n} ; & \chi_n^v = \frac{1}{\sqrt{B_n(h)}} \frac{C_i+h}{C_i-\lambda_n} \quad (n \geq 1) \\ T_n(v, v) = \sqrt{\frac{B_n}{B_n(h)}} = \sqrt{\frac{C}{C(h)}} \frac{\lambda_n}{\lambda_n+h} \end{cases}$$

Les étapes de la construction du modèle seront donc les suivantes : ayant choisi les W_i^v , on construit l'anamorphose $Z_v = \varphi_v(i)$ à partir de l'histogramme des Z_v : la $i^{\text{ème}}$ classe doit avoir le poids W_i^v , et $\varphi_v(i)$ est la moyenne de Z_v dans cette classe. On calcule ensuite le développement :

$$\varphi_v(i) = \sum_n \frac{a_n}{B_n} \frac{C_i}{C_i-\lambda_n} ; \quad a_n = \sum_i W_i \varphi_v(i) \frac{C_i}{C_i-\lambda_n}$$

avec en particulier :

$$m_V = a_0 \quad ; \quad \sigma_V^2 = \sum_{n \geq 1} \frac{a_n^2}{B_n}$$

On détermine ensuite l'anamorphose des blocs $Z_V = \varphi_V(j)$ soit directement par (12), soit par le développement :

$$\varphi_V(j) = a_0 + \sum_{n \geq 1} \frac{B_n}{B_n(h)} a_n \frac{C_j + h}{C_j - \lambda_n}$$

et on choisira le paramètre h de manière à avoir la variance correcte :

$$\sigma_V^2 = \sum_{n \geq 1} \frac{B_n^2}{B_n(h)} a_n^2$$

Conformément aux règles exposées dans le paragraphe 2, il reste à choisir les coefficients $T_n(V_a, V_b)$ déterminant la loi de deux blocs implantés aux points a et b . Plusieurs options sont d'ailleurs possibles. La plus simple consiste à prendre :

$$T_n(V_a, V_b) = e^{-(\lambda_n + h)t} \quad (n \geq 1)$$

en choisissant t de manière à assurer la covariance correcte :

$$\sigma_{V_a V_b} = \sum_{n \geq 1} e^{-(\lambda_n + h)t} \frac{a_n^2}{B_n(h)}$$

On peut encore (ce qui, en un sens, serait plus cohérent) considérer V_a et V_b comme deux blocs implantés au hasard dans un panneau plus grand V_0 . Cela conduit à prendre

$$T_n(V_a, V_b) = (T_n(V, V_0))^2$$

avec des $T_n(V, V_0)$ donnés par (13), puisque $V \subset V_0$, soit :

$$T_n(V, V_0) = \sqrt{\frac{B_n(h)}{B_n(h_0)}}$$

Cela conduit, pour les deux blocs V_a, V_b , à la loi

$$w_{ij}^{ab} = w_i(h) w_j(h) \left[1 + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{B_n(h_0)} \frac{C_i+h}{C_i-\lambda_n} \frac{C_j+h}{C_j-\lambda_n} \right]$$

le paramètre h_0 étant choisi de façon à assurer la covariance correcte :

$$\sigma_{V_a V_b} = \sum_{n \geq 1} \frac{(B_n(h_0))^2}{B_n(h_0)} a_n^2$$

Sous forme directe, on trouve

$$w_{ij}^{ab} = w_i(h) \frac{C(h)}{C(h_0)} \frac{C_i+h}{C_i+h_0} \delta_{ij} + w_i(h) w_j(h) \left[\frac{h_0-h}{C_j+h_0} + \frac{h_0-h}{C_i+h_0} \frac{C_j+h}{C_j+h_0} \right]$$

1 - COMPLEMENTS SUR LE MODELE MOSAIQUE

Revenons au processus (8), et considérons sa résolvante :

$$R_{ij}(\lambda) = \int_0^\infty P_{ij}(t) e^{-\lambda t} dt$$

ou plutôt la matrice $\lambda R_{ij}(\lambda)$, qui est une matrice de transition, et appartient à notre famille isofactorielle. Explicitement :

$$(15) \quad \lambda R_{ij}(\lambda) = \sum_{n \geq 0} \frac{\lambda}{\lambda + \lambda_n} \frac{1}{B_n} \frac{C_i}{C_i - \lambda_n} \frac{C_j}{C_j - \lambda_n} w_j$$

D'autre part, on trouve directement :

$$(16) \quad \lambda R_{ij}(\lambda) = \frac{\lambda}{C_i + \lambda} \delta_{ij} + \frac{C_i}{C_i + \lambda} \sum_k \omega_k \lambda R_{kj}(\lambda)$$

Posons :

$$\Phi(\lambda) = \sum_i \varpi_i \frac{C_i}{C_i + \lambda} \quad ; \quad 1 - \Phi(\lambda) = \lambda \sum_i \frac{\varpi_i}{C_i + \lambda}$$

$\Phi(\lambda)$ est la transformée de Laplace de la loi de l'intervalle de temps séparant deux changements d'états successifs. Si l'on fait abstraction des états i pris par le processus, les instants successifs où surviennent ces changements d'état constituent un processus ponctuel de renouvellement. Le potentiel $U(dt)$ de ce processus admet la transformée de Laplace

$$\tilde{U}(\lambda) = \frac{1}{1 - \Phi(\lambda)} = \frac{C(\lambda)}{\lambda}$$

Car $C(\lambda)$ est justement définie par $\frac{1}{C(\lambda)} = \sum \frac{\varpi_i}{C_i + \lambda}$. Avec ces notations, on déduit de (16) :

$$\lambda \sum_k \varpi_k R_{kj}(\lambda) = \lambda \tilde{U}(\lambda) \frac{\varpi_j}{C_j + \lambda} = C(\lambda) \frac{\varpi_j}{C_j + \lambda}$$

et par suite :

$$\lambda R_{ij}(\lambda) = \frac{\lambda}{C_i + \lambda} \delta_{ij} + \frac{C_i}{C_i + \lambda} C(\lambda) \frac{\varpi_j}{C_j + \lambda}$$

c'est-à-dire, en tenant compte de (9) :

$$(17) \quad \begin{cases} \lambda R_{ij}(\lambda) = \frac{\lambda}{C_i + \lambda} \delta_{ij} + \frac{C_i}{C_i + \lambda} W_j(\lambda) \\ W_j(\lambda) = C(\lambda) \frac{\varpi_j}{C_j + \lambda} = \frac{C(\lambda)}{C} \frac{C_j}{C_j + \lambda} W_j \end{cases}$$

Cette matrice de transition ressemble beaucoup au $\Pi_{ij}(h)$ de la relation (10'). Elle n'en diffère que par la permutation des poids $\frac{\lambda}{C_i + \lambda}$ et $\frac{C_i}{C_i + \lambda}$.

En fait, la matrice $\lambda R_{ij}(\lambda)$ conserve la probabilité initiale W_i , et transforme ϖ_i en $W_j(\lambda)$. Au contraire, $\Pi_{ij}(h)$ conserve ϖ_i et transforme W_i en $W_j(h)$:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sum_i w_i \lambda R_{ij}(\lambda) = w_j & ; \quad \sum_i \varpi_i \lambda R_{ij}(\lambda) = w_j(\lambda) \\ \sum_i \varpi_i \Pi_{ij}(h) = \varpi_j & ; \quad \sum_i w_i \Pi_{ij}(h) = w_j(h) \end{array} \right.$$

L'explication est la suivante : si nous considérons le processus défini par :

$$c_i' = 1/c_i \quad ; \quad \varpi_i' = w_i \quad \text{et donc} \quad w_i' = \varpi_i$$

on trouve que les valeurs propres du générateur A' correspondant sont les inverses des λ_n (pour $n \geq 1$) :

$$\lambda_n' = 1/\lambda_n \quad ; \quad f_n'(i) = \frac{c_i'}{c_i' - \lambda_n'} = \frac{\lambda_n}{\lambda_n - c_i} = 1 - f_n(i)$$

Il est alors facile de voir que la résolvante de ce nouveau processus coïncide avec $\Pi_{ij}(h)$, à condition de prendre $h = 1/\lambda$:

$$\lambda R_{ij}'(\lambda) = \Pi_{ij}(1/\lambda)$$

Donnons, pour terminer, quelques identités remarquables. Tout d'abord, cherchons le développement de c_i en fonctions propres. D'après (7), on trouve :

$$\sum_i w_i c_i \frac{c_i}{c_i - \lambda_n} = c \sum_i \frac{\varpi_i c_i}{c_i - \lambda_n} = c$$

et par suite :

$$(18) \quad c_i = c \sum_{n \geq 0} \frac{1}{B_n} \frac{c_i}{c_i - \lambda_n}$$

Le développement isofactoriel (15) donne donc

$$\sum_j \lambda R_{ij}(\lambda) c_j = c \sum_{n \geq 0} \frac{\lambda}{\lambda + \lambda_n} \frac{1}{B_n} \frac{c_i}{c_i - \lambda_n}$$

Mais, d'autre part, on déduit directement de (17) :

$$\sum_j \lambda R_{ij}(\lambda) C_j = C(\lambda) \frac{C_i}{C_i + \lambda}$$

D'où la relation remarquable :

$$(19) \quad \frac{C_i}{C_i + \lambda} = \frac{C}{\tilde{U}(\lambda)} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{\lambda + \lambda_n} \frac{1}{B_n} \frac{C_i}{C_i - \lambda_n}$$

où $\tilde{U}(\lambda) = C(\lambda)/\lambda$ est la transformée de Laplace du potentiel U .

Par ailleurs, on a :

$$\Phi(\lambda) = \sum_i \varpi_i \frac{C_i}{C_i + \lambda} ; \quad \sum_i \varpi_i \frac{C_i}{C_i - \lambda_n} = 1 ; \quad \tilde{U} = \frac{1}{1 - \Phi}$$

On déduit donc de (19) :

$$\frac{\Phi}{1 - \Phi} = C \sum_{n \geq 0} \frac{1}{B_n} \frac{1}{\lambda + \lambda_n}$$

Les valeurs propres $-\lambda_n$, qui sont par définition les racines de $1 - \Phi(\lambda)$, devaient évidemment constituer les pôles de $\tilde{U}(\lambda) = 1/(1 - \Phi)$. De même, les probabilités $w_i(\lambda)$, qui sont :

$$w_i(\lambda) = \lambda \tilde{U}(\lambda) \frac{\varpi_i}{C_i + \lambda}$$

admettent, selon (19), l'expression :

$$(21) \quad w_i(\lambda) = \sum_{n \geq 0} \frac{\lambda}{\lambda + \lambda_n} \frac{1}{B_n} \frac{C_i}{C_i - \lambda_n} w_j$$

Compte tenu de (15), cette relation (21) indique encore que la matrice $\lambda R_{ij}(\lambda)$ transforme en $w_j(\lambda)$ la probabilité initiale ϖ_i .

E - LE MODELE BINOMIAL NEGATIF

Considérons, en premier lieu, la version discrète d'un processus de diffusion, c'est-à-dire un processus où les seules transitions possibles, pendant l'intervalle de temps δt très petit,

sont $i \rightarrow i+1$, avec la probabilité $a_i \delta t$, ou $i \rightarrow i-1$, avec la probabilité $b_i \delta t$. On aura toujours $b_0 = 0$, puisque le processus ne prend que des valeurs $i \geq 0$. Le générateur infinitésimal de ce processus est donc défini par :

$$(Af)_i = - (a_i + b_i) f_i + a_i f_{i+1} + b_i f_{i-1}$$

On voit sans peine que la probabilité stationnaire W_i (si elle existe) doit vérifier les relations :

$$(22) \quad W_i a_i = W_{i+1} b_{i+1}$$

équivalentes aux relations (5) : de sorte que, si les W_i existent, l'opérateur A sera automatiquement auto-adjoint dans $L^2(\mathbb{N}, W)$. On doit donc avoir, si les W_i existent :

$$W_i = \frac{a_{i-1} a_{i-2} \cdots a_0}{b_i b_{i-1} \cdots b_1} W_0$$

et la condition d'existence des W_i est simplement

$$\sum_i \frac{a_{i-1} a_{i-2} \cdots a_0}{b_i b_{i-1} \cdots b_1} < \infty$$

Considérons alors le processus associé aux valeurs suivantes :

$$a_i = p(v+i) \quad ; \quad b_i = i \quad (v > 0, 0 < p < 1)$$

L'interprétation de ce processus est assez intuitive. Si $N(t)$ représente le nombre de particules présentes au temps t dans un système physique, tout se passe comme si chacune de ces particules évoluait, indépendamment des autres, et pouvait, pendant l'intervalle de temps très petit δt , soit mourir, avec la probabilité δt , soit se dédoubler, avec la probabilité $p \delta t$, soit rester sans changement, avec la probabilité complémentaire. En outre, une particule nouvelle peut apparaître avec la probabilité $v p \delta t$. La loi stationnaire existe toujours (pour $p < 1$). D'après (22), elle

est définie par

$$w_i = q^v \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v)i!} p^i \quad (q = 1-p)$$

Il s'agit donc de la loi, binomiale négative, associée à la fonction génératrice :

$$G(s) = \left(\frac{q}{1-ps} \right)^v$$

Cherchons la fonction génératrice $G_i(s, t)$ de la variable $N(t)$ conditionnée par $N(0) = 1$. Elle est déterminée par l'équation d'évolution

$$(23) \quad \frac{\partial}{\partial t} G_i(s, t) = - [vp + i(p+1)] G_i + p(v+i) G_{i+1} + i G_{i-1}$$

et la condition initiale $G_i(s, 0) = s^i$. Mais, d'après l'interprétation intuitive de ce processus, nous nous attendons à ce que cette solution soit de la forme

$$G_i(s, t) = H(s, t) [\gamma(s, t)]^i$$

où $\gamma(s, t)$ décrit la descendance propre d'une particule présente en $t = 0$, et $H(s, t)$ la descendance des particules nouvelles ayant pris naissance entre 0 et t . De fait l'équation (23), et la condition initiale, seront satisfaites si H et γ vérifient :

$$\begin{cases} \frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial t} = -vp(1-\gamma) & ; \quad H(s, 0) = 1 \\ \frac{\partial \gamma}{\partial p} = (1-\gamma)(1-p\gamma) & ; \quad \gamma(s, 0) = s \end{cases}$$

On trouve ainsi sans difficulté :

$$\begin{cases} \gamma(s, t) = 1 - \frac{q(1-s) e^{-qt}}{1 - ps - p(1-s) e^{-qt}} \\ H = \left(\frac{q}{1 - ps - p(1-s) e^{-qt}} \right)^v \end{cases}$$

Cherchons maintenant les valeurs propres et les facteurs correspondants $H_n(i)$. On doit avoir

$$\sum_i W_i H_n(i) P_{ij}(t) = e^{-\lambda_n t} W_j H_n(j)$$

Par suite, les fonctions génératrices $\eta_n(s)$ définies par :

$$\eta_n(s) = \sum_j W_j H_n(j) s^j$$

doivent vérifier :

$$H(s, t) \eta_n(\gamma) = e^{-\lambda_n t} \eta_n(s)$$

d'où l'on déduit (à un facteur près) :

$$(24) \quad \begin{cases} \eta_n(s) = q^v \frac{(1-s)^n}{(1-ps)^{v+n}} ; \quad \lambda_n = n q \\ H_n(i) = \frac{q^v}{p^n} \sum_k (-1)^k \binom{n}{k} q^k \frac{\Gamma(k+v+i)}{\Gamma(v+i)} \frac{\Gamma(v)}{\Gamma(k+v)} \end{cases}$$

Avec les notations classiques des hypergéométriques, ceci s'écrit

$$H_n(i) = \frac{q^v}{p^n} F(-n, v+i, v; q) = \frac{q^v}{p^i} F(-i, v+n, v; q)$$

d'où, en particulier, la très remarquable relation de symétrie :

$$(25) \quad H_n(i) = H_i(n)$$

1 - RELATIONS DE RECURRENCE

Par définition, H_n vérifie $A H_n = -\lambda_n H_n = -n q H_n$, d'où les relations de récurrence en i à n donné :

$$[n q - v p - i(p+1)] H_n(i) + p(v+i) H_n(i+1) + i H_n(i+1) = 0$$

Compte tenu de la relation (25), on a donc aussi des relations de récurrence en n , à i fixé, particulièrement commodes dans les calculs pratiques :

$$(26) \quad [i q - v p - n(p+1)] H_n(i) + p(v+n) H_{n+1}(i) + n H_{n-1}(i) = 0$$

Compte tenu de $H_0(i) = 1$, ces relations permettent, en effet, le calcul numérique très rapide des facteurs $H_n(i)$.

Les H_n sont orthogonaux (mais non normés). On trouve :

$$(27) \quad \begin{cases} \sum_i W_i H_n(i) H_m(i) = \delta_{nm} \frac{1}{A_n^v p^n} \\ A_n^v = \frac{\Gamma(n+v)}{\Gamma(v) n!} \end{cases}$$

$H_n(i)$ est, en fait, un polynôme en i de degré n . De ce fait, on est assuré que les facteurs H_n constituent une base de $L^2(N, W)$. Autrement dit, on aura :

$$(28) \quad \sum_{n \geq 0} A_n^v p^n H_n(i) H_n(j) W_j = \delta_{ij}$$

Le processus lui-même est ainsi décrit par la matrice de transition

$$(29) \quad P_{ij}(t) = \sum_{n \geq 0} e^{-nqt} A_n^v p^n H_n(i) H_n(j) W_j$$

Les relations (29) nous permettent de calculer la fonction génératrice bivariante :

$$G(s, s'; t) = \sum_{i, j} W_i s^i P_{ij}(t) s'^j$$

On trouve :

$$(30) \quad G(s, s'; t) = \left(\frac{q}{1-ps} \right)^v \left(\frac{q}{1-ps'} \right)^v \sum_{n \geq 0} A_n^v p^n e^{-nqt} \left(\frac{1-s}{1-ps} \right)^n \left(\frac{1-s'}{1-ps'} \right)^n$$

ce qui s'écrit aussi bien sous la forme :

$$G(s, s'; t) = \left(\frac{q^2}{(1-ps)(1-ps') - p e^{-qt} (1-s)(1-s')} \right)^v$$

2 - CHANGEMENT DE SUPPORT

Pour le changement de support, nous disposons de deux modèles élémentaires, l'un laissant v constant, l'autre laissant p constant.

a - 1er MODÈLE (v CONSTANT)

Le générateur A^- , défini par $(A^-f)_i = -i f_i + i f_{i-1}$, décrit un processus décroissant, associé à une décimation du nombre des particules. La matrice de transition correspondante vérifie en effet :

$$\sum_j P_{ij}^-(t) s^j = (1 - e^{-t} + s e^{-t})^i$$

De même, le générateur A^+ , défini par :

$$(A^+f)_i = -p(v+i) f_i + p(v+i) f_{i+1}$$

décrit un processus croissant dont la matrice de transition vérifie :

$$\sum_j P_{ij}^+(t) s^j = \left(\frac{e^{-pt}}{1 - s(1-e^{-pt})} \right)^{v+i} s^i$$

La loi de probabilité initiale :

$$W_i^v(p) = \frac{\Gamma(v+i)}{\Gamma(v) i!} q^v p^i$$

est transformée par ces processus selon les règles :

$$\begin{cases} \sum_i W_i^v(p) P_{ij}^-(t) = W_j^v \left(\frac{p e^{-t}}{q + p e^{-t}} \right) \\ \sum_i W_i^v(p) P_{ij}^+(t) = W_j^v (1 - q e^{-pt}) \end{cases}$$

Ainsi, la loi binomiale négative est conservée, ainsi que les valeurs numériques du paramètre v . Seul change le paramètre p , qui est diminué par le premier processus et augmenté par le second. En fait, ces processus échangent également les facteurs correspondants $H_n^v(i, p)$ et $H_n^v(i, p')$. Pour le voir rapidement, partons de la relation

$$\delta_{ij} = \sum_{n \geq 0} A_n^v p^n H_n^v(i, p) H_n^v(j, p) W_j^v(p)$$

qui donne, en termes de fonction génératrice bivariable :

$$(31) \quad \left(\frac{q}{(1-p)s s'} \right)^v = \sum_{n \geq 0} A_n^v p^n \frac{q^v (1-s)^n}{(1-ps)^{n+v}} \frac{q^v (1-s')^n}{(1-ps')^{n+v}}$$

Une décimation $s' \rightarrow \chi + \omega s'$ transforme ceci en :

$$\left(\frac{qq'}{q' - (p-p')s - p'qss'} \right)^v = \sum_{n \geq 0} A_n^v p'^n \frac{q^v (1-s)^n}{(1-ps)^{n+v}} \frac{q'^v (1-s')^n}{(1-p's')^{n+v}}$$

avec

$$p' = \frac{p\omega}{1-p\chi} < p$$

Il s'agit donc d'une loi bivariable qui peut s'écrire

$$\begin{cases} W_{ij}^v(p, p') = W_i^v(p) W_j^v(p') \sum_{n \geq 0} A_n^v p'^n H_n^v(i, p) H_n^v(j, p') \\ (p' \leq p) \end{cases}$$

Sous cette forme, il est clair que cette loi échange les facteurs. Comme on a $p' < p$ (et $j \leq i$ p.s.) c'est la variable j ,

dans cette écriture, qui doit être associée à l'échantillon v , et la variable i au bloc $V \supset v$. Posons donc, pour clarifier les notations :

$$p' = p_v ; p = p_V ; w_j^v(p') = w_j^v ; w_i^v(p) = w_i^v$$

$$H_n^v(j, p') = H_n^v(j) ; H_n^v(i, p) = H_n^v(i)$$

La loi bivariable (v, V) s'écrit ainsi :

$$(32) \quad w_{ij}^{vv} = w_i^v w_j^v \sum_{n \geq 0} A_n^v(p_v)^n H_n^v(i) H_n^v(j)$$

Sous cette forme, il est clair que l'on a :

$$(33) \quad \begin{cases} E [H_n^v(j)/N_v = i] = H_n^v(i) \\ E [H_n^v(i)/N_v = j] = H_n^v(j) \left(\frac{p_v}{p_V} \right)^n \end{cases}$$

Pour $n = 1$, et compte tenu de $m_v/m_V = V/v$, ainsi que de :

$$H_1^v(i, p) = 1 - \frac{i}{m} = 1 - \frac{iq}{vp}$$

la première de ces relations implique:

$$E[N_v/N_V = i] = \frac{v}{V} i$$

c'est-à-dire la condition (2) de Cartier : la loi (32) constitue donc un modèle acceptable de changement de support.

Sous cette forme explicite, la loi de N_v à $N_V = i$ fixé est la loi binomiale :

$$E[s^{N_v/N_V = i}] = \left(\frac{p_V - p_v}{p_V q_v} + \frac{p_v q_v}{p_V q_v} s \right)^i$$

comme il est naturel, puisque N_v se déduit de N_V par décimation. En sens inverse, on trouve :

$$E[s^{N_V/N_V = j}] = \left(\frac{q_V/q_V}{1 - \frac{p_V - p_V}{q_V} s} \right)^{v+j} s^j$$

Ainsi N_V , à $N_V = j$ fixé, est égale à j plus une binomiale négative d'indice $v+j$

b -2ème MODELE DE CHANGEMENT DE SUPPORT (p CONSTANT)

Partons à nouveau de la fonction génératrice bivariable de la loi $W_1^v(p) \delta_{ij}$, i.e. $N = N'$ presque sûrement. Remplaçons N' par $N' + N''$ où N'' est une binomiale négative $E(s^{N''}) = (q/1-ps')^{v''}$, indépendante de N et N' : on obtient ainsi la fonction génératrice bivariable :

$$\left(\frac{q}{1-ps'} \right)^v \left(\frac{q}{1-ps'} \right)^{v''} = \sum_{n \geq 0} A_n^v p^n \frac{q^v (1-s)^n}{(1-ps)^{n+v}} \frac{q^{v'} (1-s')^n}{(1-ps')^{n+v+v''}}$$

Avec $v' = v + v'' \geq v$, la loi bivariable correspondante s'écrit :

$$W_{ij}^{vv'} = \sum_{n \geq 0} A_n^v p^n H_n^v(i, p) H_n^{v'}(j, p) W_1^v(p) W_j^{v'}(p)$$

Ici donc p reste fixe, et v se transforme en $v' > v$. La variable N_V (liée au bloc) correspond à $v' > v$, et N_v à v . On trouve ainsi :

$$\begin{cases} E[H_n^v(i)/N_V = j] = H_n^v(j) \\ E[H_n^v(j)/N_V = i] = \frac{\Gamma(v+n)}{\Gamma(v'+n)} \frac{\Gamma(v')}{\Gamma(v)} H_n^v(i) \end{cases}$$

Ici encore, la première de ces relations entraîne que la condition de Cartier $E(N_V/N_V) = (v/V)N_V$ est automatiquement satisfaite.

En combinant ces deux modèles, on obtient le modèle général suivant :

3 - MODELE GENERAL DE CHANGEMENT DE SUPPORT

Dans le sens $v \rightarrow V$, en combinant les deux modèles précédents, on doit augmenter simultanément v et p . Si donc nous affectons à V les notations accentuées v' , p' , avec $v' \geq v$, $p' \geq p$, ce modèle général est :

$$W_{ij}^{vv} = \sum_{n \geq 0} A_n^v p^n H_n^v(i, p) H_n^{v'}(j, p') W_i^v(p) W_j^{v'}(p')$$

$$(34) \quad E[H_n^v(i, p)/N_V = j] = H_n^{v'}(j, p')$$

$$E[H_n^{v'}(j, p')/N_V = i] = \frac{\Gamma(v+n)}{\Gamma(v'+n)} \frac{\Gamma(v')}{\Gamma(v)} \frac{p^n}{p'^n} H_n^v(i, p)$$

Il vérifie automatiquement la condition (2) de Cartier. Les deux paramètres (v' et p') de la variable N_V doivent être ajustés de manière à respecter la moyenne m_V et la variance σ_V de N_V , ce qui est possible, puisque justement nous disposons de deux degrés de liberté.

Pour achever la détermination du modèle, il reste (d'après les considérations générales du paragraphe 2) à choisir les lois bloc/bloc. Le plus simple est de prendre :

$$W_{i,j}^{v_a, v_b} = \sum_{n \geq 0} e^{-nq't} A_n^v p'^n H_n^{v'}(i, p') H_n^{v'}(j, p') W_i^{v'}(p') W_j^{v'}(p')$$

et de choisir le paramètre t de manière à respecter la covariance correcte, ce qui donne simplement ici

$$e^{-q't} = \frac{\sigma_V v_a v_b}{\sigma_V^2}$$

Mais il existe un autre modèle possible, sans doute plus intéressant.

F - LE MODELE MIXTE DISCRET/CONTINU

Si les blocs V sont assez grands, la loi discrète de N_V peut souvent, et avantageusement, être remplacée par une loi continue (il en est ainsi, en pratique, dès que la probabilité d'avoir $N_V = 0$ devient très petite). On aboutira ainsi à des modèles mixtes, où la variable N_V associée à l'échantillon v (variable qui n'est pas une teneur) obéit à une loi discrète, tandis que la teneur $Z_V = N_V/V$ des blocs V obéit déjà à une loi continue.

On sait que, si N est binomiale négative (v, p) , en faisant $q \rightarrow 0$, v restant fixe, la loi de Nq a pour limite une loi gamma d'indice v . Plus généralement, partons de la fonction génératrice des facteurs H_n , soit :

$$\eta_n(s) = \sum_i W_i H_n(i) s^i = \left(\frac{q}{1-ps} \right)^v \left(\frac{1-s}{1-ps} \right)^n$$

Remplaçant s par $e^{-\lambda q}$, nous trouvons :

$$\lim_{q \rightarrow 0} \eta_n(e^{-\lambda q}) = \frac{\lambda^n}{(1+\lambda)^{n+v}}$$

Cette limite est la transformée de Laplace de la fonction $g_v(x) L_n(x)$, où g_v est la densité de la loi gamma d'indice v :

$$g_v(x) = \frac{x^{v-1}}{\Gamma(v)} e^{-x} \quad (x > 0)$$

et L_n est le polynome de Laguerre de degré n et d'indice v :

$$L_n(x) = L_n^v(x) = F(-n, v; x) = \sum_k (-1)^k \binom{n}{k} \frac{\Gamma(v)}{\Gamma(v+k)} x^k$$

On sait que les polynômes L_n^v sont orthogonaux pour la loi g_v . Leur norme est :

$$\|L_n^v\|^2 = \int_0^\infty (L_n^v(x))^2 g_v(x) = \frac{1}{A_n^v} = \frac{\Gamma(v)}{\Gamma(v+n)} p!$$

Ces polynômes vérifient les relations de récurrence :

$$(x - v - 2n) L_n^v(x) + (v+n) L_{n+1}^v(x) + n L_{n-1}^v(x) = 0$$

qui, jointes à la condition initiale $L_0(x) = 1$, permettent un calcul numérique très rapide.

Dans ce même passage à la limite (et moyennant le changement de t en t/q), la matrice de transition markovienne (29) devient une probabilité de transition entre variables continues, admettant la densité conditionnelle (à x fixé) :

$$(36) \quad g_t(x/y) = \sum_n e^{-nt} A_n^v L_n^v(x) L_n^v(y) g_v(y)$$

Le processus markovien correspondant admet le générateur :

$$Af = xf'' + (v-x) f'$$

et la loi stationnaire g_v : notre modèle isofactoriel binomial négatif est devenu un modèle isofactoriel à loi gamma. La transformée de Laplace de la loi (36) est :

$$\Phi_t(\lambda/x) = \left(\frac{1}{1 + \lambda(1-e^{-t})} \right)^v e^{-\lambda x \frac{e^{-t}}{1+\lambda(1-e^{-t})}}$$

Posons, pour abréger, $\rho = \rho_t = e^{-t}$. Le développement :

$$\Phi_t(\lambda/x) = e^{-\frac{\rho x}{1-\rho}} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \left(\frac{\rho x}{1-\rho} \right)^n \left(\frac{1}{1 + \lambda(1-\rho)} \right)^{n+v}$$

permet d'expliciter la loi conditionnelle (36) comme mélange de lois gamma. La loi bivariable

$$g_t(x,y) = g_v(x) g_t(y/x)$$

en particulier peut s'écrire :

$$g_t(x,y) = \sum_{n \geq 0} (1-\rho)^v \frac{\Gamma(n+v)}{\Gamma(v)} \frac{\rho^n}{n!} \frac{(xy)^{n+v-1} e^{-\frac{x+y}{1-\rho}}}{[(1-\rho)^{n+v} \Gamma(n+v)]^2}$$

comme mélange de lois gamma bivariables. La transformée de Laplace bivariante correspondante est :

$$\Phi_t(\lambda, \mu) = \left[\frac{1}{1 + \lambda + \mu + \lambda\mu(1-\rho)} \right]^v$$

1 - CHANGEMENT DE SUPPORT

Dans les mêmes conditions, la loi dissymétrique (32) du changement de support va se transformer en une loi mixte, discrète en $j = N_v$ (échantillon) et continue en x (bloc V) :

$$W_j(x) = g_v(x) W_j^v(p) \sum_{n \geq 0} A_n^v p^n L_n(x) H_n(j)$$

Cette loi est intéressante : conditionnellement à $N = j$ fixé, la variable continue X admet une loi gamma dont la transformée de Laplace est :

$$\Phi_j(\lambda) = \left(\frac{1}{1+q\lambda} \right)^{v+j}$$

Inversement, la variable discrète, conditionnellement en $X = x$ fixé, obéit à une loi de Poisson d'espérance xp/q :

$$p_j(x) = \frac{1}{j!} \left(\frac{xp}{q} \right)^j e^{-xp/q}$$

et les facteurs L_n et H_n s'échangent selon la règle :

$$(37) \quad \begin{cases} E(H_n/X = x) = L_n(x) \\ E(L_n/N = j) = p^n H_n(j) \end{cases}$$

Pour $n = 1$, la première relation (37) conduit à :

$$E(j/X = x) = x \frac{p}{q}$$

A un facteur près, c'est là la condition de Cartier. Noton que la variable discrète N , qui est un nombre entier, ne peut pas représenter une teneur. La teneur de l'échantillon v doit être définie comme $Z_v = N/v$: nous noterons $m_v = m$ et σ_v^2 la moyenne et la variance de Z_v (et non de N_v). Par suite :

$$m = m_v = \frac{1}{v} \vee \frac{p}{q} ; \quad \sigma_v^2 = \frac{1}{v^2} \vee \frac{p}{q^2}$$

La condition de Cartier $E(Z_v/Z_v) = Z_v$ sera donc satisfaite si la teneur Z_v du bloc V est assimilée à la variable :

$$Z_v = \frac{p}{qv} X$$

Malheureusement, cette relation fixe la variance σ_v^2 , et ne peut donc convenir qu'à un unique support V_0 bien déterminé, caractérisé par sa variance :

$$\sigma_{V_0}^2 = v \left(\frac{p}{qv} \right)^2 = p \sigma_v^2$$

Pour retrouver le degré de liberté qui nous manque, nous avons deux possibilités.

a - PREMIER MODELE MIXTE

La première possibilité consiste à affecter à la variable continue X un indice $v' \geq v$. Autrement dit, on fera tendre q' vers

0 dans la relation (34). Ceci conduit à la loi mixte :

$$(38) \quad W_i(x) = W_i^v g_{v'}(x) \sum_{n \geq 0} A_p^v p^n H_n^v(i) L_n^{v'}(x)$$

En $N = i$ fixé, la loi conditionnelle de x admet la transformée de Laplace :

$$\Phi_i(\lambda) = \frac{1}{(1+\lambda)^{v'-v}} \frac{1}{(1+q\lambda)^{v+i}}$$

Il s'agit donc de la somme de deux variables gamma indépendantes, avec des facteurs d'échelle différents. La loi de N à x fixé n'offre pas d'interprétation aussi simple, mais la relation (38) se prête à un calcul numérique facile.

Les facteurs s'échangent selon la loi :

$$(39) \quad \begin{cases} E[H_n^v(i)/X = x] = L_n^{v'}(x) \\ E[L_n^{v'}(x)/N = i] = \frac{A_n^v p^n}{A_n^{v'}} H_n^v(i) \end{cases}$$

Pour $n = 1$, on trouve ainsi :

$$E(i/X = x) = x \frac{p}{q} \frac{v}{v'}$$

Par suite, la condition de Cartier sera satisfaite en prenant

$$Z_V = \frac{p}{qv} \frac{v}{v'} x$$

et on choisira v' de manière à respecter la variance correcte :

$$\sigma_V^2 = \left(\frac{p}{qv} \right)^2 \frac{v^2}{v'} = p \frac{v}{v'} \sigma_v^2$$

Noter que la condition $v' \geq v$ impose :

$$\sigma_V^2 \leq \sigma_{V_0}^2 = p \sigma_v^2$$

de sorte que ce modèle mixte n'est utilisable que pour des supports V plus grands que V_0 . Mais cette condition est d'autant moins restrictive que p est plus proche de 1 : il suffit que le rapport des variances des teneurs du bloc et de l'échantillon soit $\leq p$.

Pour les lois bloc/bloc, le plus simple, dans ce modèle, sera de prendre :

$$Z_V = \frac{p}{qv} \frac{v}{v}, X \quad ; \quad Z_{V'} = \frac{p}{qv} \frac{v}{v}, Y$$

avec deux variables (X, Y) admettant la densité :

$$g_p(x, y) = g_v(x) g_{v'}(y) \sum_{n \geq 0} \rho^n A_n^{v'} L_n^{v'}(x) L_n^{v'}(y)$$

où ρ est le coefficient de corrélation de Z_V et $Z_{V'}$:

$$\rho = \rho_{VV'} = \frac{\sigma_{VV'}}{\sigma_V^2}$$

b - SECOND MODELE MIXTE

Dans ce second modèle, que l'on peut penser meilleur que le premier, pour des raisons qui apparaîtront dans le dernier paragraphe, on laisse le paramètre v constant. A partir du support critique $V = V_0$ défini ci-dessus, on admet que les teneurs Z_V ont des lois continues que l'on peut obtenir par des anamorphoses du type

$$Z_V = \phi_V(X_V)$$

à partir de variables X_V admettant la loi gamma g_v d'indice fixe v . Pour le support $V = V_0$, nous connaissons déjà cette anamorphose, qui est, on l'a vu :

$$Z_{V_0} = \frac{p}{qv} X_{V_0}$$

Pour $V \supset V_0$, la condition de Cartier $E(Z_{V_0}/Z_V) = Z_V$ donnera :

$$\varphi_V(X_V) = \frac{p}{qv} E(X_{V_0}/X_V)$$

Si donc nous admettons pour (X_{V_0}, X_V) une loi symétrique du type :

$$g_p(x_{V_0}, x_V) = \sum_{n \geq 0} \rho^n A_n^v L_n(x_{V_0}) L_n(x_V) g_v(x_{V_0}) g_v(x_V)$$

il viendra :

$$\varphi_V(X_V) = \frac{p}{qv} [v + \rho(X_V - v)]$$

Il s'agit donc d'une anamorphose du type "correction affine" ce qui est d'ailleurs le cas chaque fois que le premier facteur est linéaire par rapport à la variable d'intérêt. On choisira évidemment le paramètre ρ de manière à respecter la variance correcte, soit :

$$\sigma_V^2 = \left(\frac{p}{qv}\right)^2 \rho^2 v = p \rho^2 \sigma_v^2$$

Compte tenu de $m = E(N_V)/v = vp/qv$, il vient ainsi :

$$Z_V = \varphi_V(X_V) = m[1 - \rho + \rho \frac{X_V}{v}]$$

c - CHANGEMENT DE SUPPORT

Dès lors, si v est un échantillon intérieur à V , la loi mixte de (N_V, Z_V) se déduit par cette transformation linéaire très simple de la loi mixte de (N_V, X_V) , qui est :

$$(40) \quad W_i(x) = W_i^v g_v(x) \sum_{n \geq 0} A_n^v p^n \rho^n H_n(i) L_n(x)$$

En particulier, à $X = x$ fixé, la loi de i admet la fonction génératrice :

$$G_x(s) = \left(\frac{q'}{1-p's} \right)^v e^{-x \frac{pp}{1-pp} \frac{1-s}{1-ps}}$$

avec

$$q' = \frac{q}{1-pp} ; \quad p' = \frac{p(1-p)}{1-pp}$$

Il s'agit d'un mélange poissonien de lois binomiales négatives. De même, à $N = i$ fixé, la loi de X admet la transformée de Laplace :

$$\Phi_i(\lambda) = \left(\frac{1}{1 + (1-pp)\lambda} \right)^v \left(\frac{1 + (1-p)\lambda}{1 + (1-pp)\lambda} \right)^i$$

Connaissant la loi (40) du changement de support, on achève la détermination du modèle en prenant pour les variables $X_V, X_{V'}$, associées aux teneurs $Z_V, Z_{V'}$, de deux blocs V et V' la loi :

$$g(x_V, x_{V'}) = g_V(x_V) g_{V'}(x_{V'}) \sum_{n \geq 0} r^n A_n^V L_n^V(x_V) L_n^V(x_{V'})$$

où r est le coefficient de corrélation de $Z_V, Z_{V'}$.

G - COMPLEMENTS

Voici d'abord le théorème donnant la forme générale de nos lois isofactorielles binomiales négatives symétriques.

Pour que les quantités

$$W_{ij} = W_i^V W_j^V \sum_{n \geq 0} T_n A_n^V p^n H_n(i) H_n(j)$$

constituent une probabilité bivariable discrète, il faut et il suffit que les coefficients T_n soient de la forme :

$$T_n = \int_0^1 \rho^n \omega(d\rho)$$

pour une probabilité ω sur $(0, 1)$.

Cette condition est évidemment suffisante, puisque $T_n = \rho^n$ convient déjà ($0 \leq \rho \leq 1$). Pour montrer qu'elle est nécessaire, partons du développement :

$$\begin{aligned} \left(\frac{q}{1-ps}\right)^{v+k} &= \sum_n (-1)^n \binom{k}{n} p^n \left(\frac{1-s}{1-ps}\right)^n \frac{q^v}{(1-ps)^v} \\ &= \sum_{i,n} W_i^v H_n(i) s^i (-1)^n \binom{n}{k} p^n \end{aligned}$$

d'où l'on déduit, par identification du terme en s^i :

$$(43) \quad W_i^{v+k} = W_i^v \sum_{n \geq 0} (-1)^n \binom{k}{n} p^n H_n(i)$$

Soient alors T_n des coefficients tels que les W_{ij} de l'énoncé constituent une probabilité. On a déjà :

$$|T_n| \leq 1.$$

Car T_n est le coefficient de corrélation de $H_n(i)$ et $H_n(j)$. Pour tout entier $i \geq 0$, l'expression :

$$G_i(s) = \frac{1}{W_i^v} \sum_j W_{ij} s^j = \sum_{n \geq 0} T_n A_n^v p^n q^v \frac{(1-s)^n}{(1-ps)^{n+v}} H_n(i)$$

est une fonction génératrice. D'après (43) et l'orthogonalité des H_n , nous trouvons :

$$\sum_i W_i^{v+k} G_i(s) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \binom{k}{n} p^n T_n \frac{q^v (1-s)^n}{(1-ps)^{n+v}}$$

et cette expression est encore une fonction génératrice.

Remplaçons alors s par $e^{-\lambda q/kp}$, et faisons tendre k vers l'infini. Compte tenu des majorations $\binom{k}{n} \leq \frac{k^n}{n!}$ et $|T_n| \leq 1$, le théorème de convergence dominée s'applique et donne :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_i W_i^{v+k} G_i \left(e^{-\frac{\lambda q}{kp}} \right) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} T_n$$

Cette limite est une fonction continue de λ (car $|T_n| \leq 1$). C'est donc la transformée de Laplace d'une loi de probabilité ω sur $(0, \infty)$. On a ainsi :

$$T_n = \int_0^{\infty} \rho^n \omega(d\rho)$$

Mais les inégalités $|T_n| \leq 1$ montrent qu'en fait la probabilité ω est concentrée sur $(0, 1)$.

Dans le cas continu (lois gamma), de même :

Pour que la fonction :

$$g(x, y) = g_v(x) g_v(y) \sum_{n \geq 0} T_n A_n^v L_n(x) L_n(y)$$

soit la densité d'une loi bivariable, il faut et il suffit que l'on ait

$$T_n = \int_0^1 \rho^n \omega(d\rho)$$

pour une probabilité ω sur $(0, 1)$

La démonstration est très semblable à partir de la relation

$$g_{v+k}(x) = g_v(x) \sum_{n \geq 0} (-1)^n \binom{k}{n} L_n(x)$$

Dans le cas dissymétrique, on obtient des caractérisations du même genre. Je n'énonce explicitement que le cas d'une loi bidiscrète, les deux autres énoncés s'en déduisant de façon évidente.

Pour que les quantités :

$$W_{ij} = W_i^v(p) \cdot W_j^{v'}(p') \sum_{n \geq 0} T_n A_n^{v_0} (p_0)^n H_n^v(i, p) H_n^{v'}(j, p)$$

où l'on a posé $v_0 = \inf(v, v')$; $p_0 = \inf(p, p')$ constituent une loi bidiscrète, il faut et il suffit que l'on ait $T_n = E(\rho^n)$ où ρ est une variable p.s. comprise entre 0 et 1.

H - CONTROLES

Nous allons maintenant essayer, dans la mesure du possible, de comparer les prévisions de nos modèles de changement de support avec les résultats exacts que l'on peut obtenir dans le cas de certaines fonctions aléatoires. Commençons par le cas continu.

1 - LE CAS CONTINU

Soit, sur la droite réelle, le processus markovien X_t caractérisé par le générateur

$$Af = x f'' + (v-x)f'$$

dont nous avons déjà écrit la probabilité de transition, et qui admet la loi gamma g_v d'indice v comme loi stationnaire. Nous posons :

$$\begin{cases} Q_t = \int_0^t X_\tau d\tau \\ \Phi_t(\lambda, \mu; x) = E[e^{-\lambda Q_t - \mu X_t} / X_0 = x] \end{cases}$$

Il est clair que la fonction Φ_t est déterminée par l'équation d'évolution

$$\frac{\partial \Phi_t}{\partial t} = A \Phi_t - \lambda x \Phi_t = x \frac{\partial^2 \Phi_t}{\partial x^2} + (v-x) \frac{\partial \Phi_t}{\partial x} - \lambda x \Phi_t$$

et la condition initiale $\Phi_0 = e^{-\mu x}$. Il est naturel de chercher une solution de la forme

$$\Phi_t(\lambda, \mu; x) = H_t(\lambda, \mu) e^{-x\phi_t(\lambda, \mu)}$$

où les fonctions H_t , ϕ_t sont indépendantes de x et vérifient :

$$\begin{cases} \frac{1}{H_t} \frac{\partial H_t}{\partial t} = -v \psi_t & ; \quad H_0 = 1 \\ \frac{\partial H_t}{\partial t} = -\psi_t^2 - \psi_t + \lambda & ; \quad \psi_0 = \mu \end{cases}$$

Ceci s'intègre sans difficulté. Posant, pour abréger :

$$c = \sqrt{1 + 4\lambda}$$

on trouve :

$$\begin{cases} H_t(\lambda, \mu) = \left(\frac{c e^{t/2}}{c \operatorname{ch} \frac{ct}{2} + (1+2\mu) \operatorname{Sh} \frac{ct}{2}} \right)^v \\ \psi_t(\lambda, \mu) = \frac{\mu(c \operatorname{ch} \frac{ct}{2} + \operatorname{Sh} \frac{ct}{2}) + 2\lambda \operatorname{Sh} \frac{ct}{2}}{c \operatorname{ch} \frac{ct}{2} + (1+2\mu) \operatorname{Sh} \frac{ct}{2}} \end{cases}$$

Nous nous intéresserons ici uniquement à la loi stationnaire de l'intégrale Q_t , dont la transformée de Laplace est :

$$\Phi_t(\lambda) = E[e^{-\lambda Q_t}] = \frac{H_t(\lambda, 0)}{[1 + \psi_t(\lambda, 0)]^v}$$

On trouve ainsi explicitement :

$$(44) \quad \begin{cases} \Phi_t(\lambda) = \left(\frac{c e^{t/2}}{(c \operatorname{ch} \frac{ct}{4} + \operatorname{Sh} \frac{ct}{4})(\operatorname{ch} \frac{ct}{4} + c \operatorname{Sh} \frac{ct}{4})} \right)^v \\ c = \sqrt{1+4\lambda} \end{cases}$$

Cette formule remarquable donne donc la solution rigoureuse du problème du changement de support dans le cas du processus markovien à loi gamma. Le modèle approché, basé sur les anamorphoses gamma, conduit, on l'a vu plus haut, à une prévision du type "correction affine"

$$Q_t = m_t + \sigma_t \frac{X-v}{\sqrt{v}}$$

avec $m_t = vt$; $\sigma_t^2 = 2v(e^{-t} - 1+t)$

Posant pour simplifier

$$\rho = \rho(t) = \frac{\sqrt{2(e^{-t} - 1 + t)}}{t}$$

il vient $Q_t = vt(1-\rho) + \rho t X$, où X obéit à la loi g_v .

Le modèle approché conduit donc à prévoir une transformée de Laplace de la forme :

$$(45) \quad \Phi_t^*(\lambda) = e^{-\lambda vt(1-\rho)} \frac{1}{[1 + \lambda \rho t]^v}$$

Numériquement, l'accord entre les formules exactes (44) et approchées (45) apparaît comme excellent pour $\lambda \leq 3$ et comme satisfaisant pour $\lambda \leq 10$, et ce tant que t n'est pas trop grand ($t \leq 2$ par exemple : rappelons que la covariance stationnaire du processus est $v e^{-|h|}$ sans facteur d'échelle).

A titre d'exemple, pour $t = 1$, on trouve les valeurs numériques suivantes :

λ	$\Phi(\lambda)$	$\Phi^*(\lambda)$
0.1	0,9079953	0,9079927
0.5	0,6520	0,6518
1	0,4677	0,4669
2	0,2794	0,2771
5	0,09849	0,09285
10	0,03139	0,02518
20	0,00659	0,00320
30	0,00206	0,00052

Mais il n'est pas très facile d'interpréter la comparaison directe de deux transformées de Laplace. Un critère déjà plus précis est fourni par le cumulant d'ordre 3 :

$$\chi_3 = \frac{\partial^3}{\partial \lambda^3} \log \Phi_t(\lambda)$$

Pour la loi exacte (44), on trouve

$$(46) \quad \frac{\chi_3}{\sigma_t^3} = \frac{6(t + t e^{-t} - 2 + 2 e^{-t})}{\sqrt{2} (e^{-t} - 1 + t)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{v}}$$

Pour la loi approchée (44), le rapport χ_3/σ^3 a la même valeur que pour la loi gamma elle-même, c'est-à-dire $2/\sqrt{v}$, qui est la valeur en $t = 0$ de l'expression (46). Mais il apparaît que cette fonction χ_3/σ_t^3 reste quasi constante jusque vers des valeurs de t relativement élevées.

t	$\chi_3/\sigma_t^3 \sqrt{v}$	t	$\chi_3/\sigma_t^3 \sqrt{v}$
0	2	1.5	1,9384
0.1	1,99967	2	1,8985
0.5	1,99215	3	1,8056
1	1,97060	4	1,7071

Il est donc raisonnable d'espérer un bon accord entre les deux lois au moins jusque vers $t = 2$.

Nous allons le contrôler en inversant explicitement la transformée de Laplace (44) dans le cas particulier $v = 1$.

A cette fin, nous remarquons tout d'abord que, dans le cas $v = 1/2$, on peut écrire $X_t = \frac{1}{2} Y_t^2$ où Y_t est le processus gaussien stationnaire et markovien admettant la covariance $C(h) = e^{-|h|/2}$. D'après les résultats plus généraux présentés en [2], nous savons donc que $\Phi_t(\lambda)$ peut se mettre sous la forme :

$$(47) \quad \Phi_t(\lambda) = \prod_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1 + \lambda \lambda_n} \right)^v$$

où les λ_n sont les valeurs propres du noyau $C(x-y)$ considéré comme un opérateur sur $L^2([0,1])$. Ce qui revient à dire que Q_t se met sous la forme

$$Q_t = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n S_n$$

où les S_n sont des variables indépendantes admettant la même loi gamma $g_v(x)$. On peut calculer les λ_n en résolvant le problème de valeurs propres correspondant, ce qui est tout-à-fait classique. Il est plus agréable de les retrouver à partir de (44). De fait, les inverses des λ_n , soit

$$b_n = 1/\lambda_n$$

apparaissent, au signe près, comme les pôles de $\Phi_t(\lambda)$, c'est-à-dire comme les racines de la fonction

$$\left(\operatorname{ch} \frac{ct}{4} + \frac{1}{c} \operatorname{Sh} \frac{ct}{4} \right) \left(\operatorname{ch} \frac{ct}{4} + c \operatorname{Sh} \frac{ct}{4} \right)$$

(avec toujours $c = \sqrt{1+4\lambda}$). Posons :

$$c = \sqrt{1+4\lambda} = 4 \frac{i\omega}{t}, \quad \text{soit} \quad \lambda = - \left(\frac{1}{4} + \frac{4\omega^2}{t^2} \right)$$

La fonction ci-dessus devient

$$f(\omega) = \left(\cos \omega + \frac{t}{4\omega} \sin \omega \right) \left(\cos \omega - \frac{4\omega}{t} \sin \omega \right)$$

dont les racines sont les $\pm \omega_n$, $n = 0, 1, \dots$ avec :

$$\omega_n = n \frac{\pi}{2} + \varepsilon_n \quad \operatorname{tg} \varepsilon_n = \frac{t/2}{n\pi + 2\varepsilon_n} \quad (0 < \varepsilon_n < \frac{\pi}{2})$$

Le calcul numérique des ε_n est extrêmement rapide par itération. On en déduit les ω_n , et les b_n qui sont :

$$b_n = \frac{1}{\lambda_n} = 4 \frac{\omega_n^2}{t^2} + \frac{1}{4}$$

Pour n grand, on trouve :

$$b_n = \frac{n^2 \pi^2}{t^2} + \frac{2}{t} + \frac{1}{4} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Dans le cas $v = 1$, la transformée de Laplace (44) est donc :

$$\Phi_t(\lambda) = \frac{e^{t/2}}{f(\omega)} = \prod \left(\frac{b_n}{b_n + \lambda} \right) = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{\omega_n^2 + t^2/16}{\omega_n^2 - \omega^2}$$

C'est là un développement en produit infini du type Weierstrass. On en déduit classiquement :

$$\frac{1}{f(\omega)} = \sum_{n \geq 0} \frac{C_n}{\omega_n^2 - \omega^2} ; \quad C_n = - \frac{2 \omega_n}{f'(\omega_n)}$$

Des calculs simples donnent ensuite :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_t(\lambda) = \prod \frac{b_n}{b_n + \lambda} = \sum \frac{B_n}{b_n + \lambda} \\ B_n = (-1)^n \frac{4 b_n - 1}{2(1 + b_n t)} e^{t/2} \end{array} \right.$$

Par conséquent, l'inversion est possible : nous trouvons pour notre variable

$$Q_t = \int_0^t X_\tau d\tau$$

une densité :

$$f_t(x) = \sum_{n \geq 0} B_n e^{-x/b_n}$$

expression convergente pour $x > 0$. Nous nous intéresserons aussi aux expressions :

$$(48) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 - F_t(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{B_n}{b_n} e^{-x/b_n} \\ K_t(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{B_n}{b_n} \left(x + \frac{1}{b_n} \right) e^{-x/b_n} \end{array} \right.$$

représentant respectivement le tonnage et la quantité de métal coupés en x . (Ces dernières expressions convergent pour tout $x \geq 0$).

<u>TABLEAU 1</u> Valeurs exactes et approchées pour la loi de Q_t, $t = 1$ ($1-F$: Tonnage, K : Quantité de métal)		
$x = 0,14$	$1-F = 0,96775$ $1-F^* = 1$	$K = 0,99653$ $K^* = 1$
$x = 0,16$	$1-F = 0,95399$ $1-F^* = 0,97950$	$K = 0,99447$ $K^* = 0,99690$
$x = 0,25$	$1-F = 0,87873$ $1-F^* = 0,88194$	$K = 0,97893$ $K^* = 0,97698$
$x = 0,5$	$1-F = 0,66911$ $1-F^* = 0,65896$	$K = 0,89919$ $K^* = 0,89472$
$x = 0,70$	$1-F = 0,52577$ $1-F^* = 0,52191$	$K = 0,81670$ $K^* = 0,81302$
$x = 1$	$1-F = 0,36995$ $1-F^* = 0,36788$	$K = 0,68562$ $K^* = 0,68343$
$x = 2$	$1-F = 0,11460$ $1-F^* = 0,11466$	$K = 0,32697$ $K^* = 0,32766$
$x = 3$	$1-F = 0,03550$ $1-F^* = 0,03573$	$K = 0,13678$ $K^* = 0,13785$
$x = 5$	$1-F = 0,00341$ $1-F^* = 0,00347$	$K = 0,01994$ $K^* = 0,02033$
$x = 7$	$1-F = 0,00033$ $1-F^* = 0,00034$	$K = 0,00257$ $K^* = 0,00265$
$x = 10$	$1-F = 0,00001$ $1-F^* = 0,00001$	$K = 0,00011$ $K^* = 0,00011$

Le Tableau 1 compare, pour $t = 1$, les fonctions $1-F(x)$ et $K(x)$ calculées d'après les formules rigoureuses (48) et les expressions $1-F^*(x)$ et $K^*(x)$ déduites de la loi approchée (45). On note que la formule de la correction affine prévoit une densité $f_t^*(x) = 0$ pour $x < 0,15$. La densité réelle $f_t(x)$ n'est pas vraiment nulle mais reste très faible, de sorte que l'accord reste bon même pour les faibles valeurs de X . Au-delà de $0,15$ et jusqu'à l'extrême queue de la distribution, l'accord est extraordinairement bon. Pour $t = 2$, l'accord est encore excellent. C'est seulement pour les grandes valeurs de t que des désaccords se manifestent. En effet, lorsque le cumulatif relatif χ_3/σ_t^3 devient nettement inférieur à 2, on entre dans la zone où s'amorce la convergence vers la loi normale, et la simple correction affine cesse d'être valable. L'élément véritablement étonnant est que cette divergence ne se manifeste qu'à partir de supports déjà très grands relativement à la portée.

2 - CAS DISCONTINU

Nous considérons maintenant le processus markovien N_t à valeurs discrètes et loi stationnaire binomiale négative, caractérisé par son générateur infinitésimal.

$$(Af)_i = - [p(v+i) + i] f_i + p(v+i) f_{i+1} + i f_{i-1}$$

On peut s'intéresser à la variable $Q_t = \int_0^t N_\tau d\tau$, mais aussi à deux autres variables N_t^+ et N_t^- représentant le nombre des transitions positives ($i \rightarrow i+1$) et négatives survenues entre 0 et t . Posons :

$$f_i(\lambda, s, s', u; t) = E \left[e^{-\lambda Q_t} s^{N_t^+} s'^{N_t^-} u^{N_t} / N_0 = i \right]$$

On voit sans peine que cette fonction est déterminée par l'équation d'évolution :

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} = - [p(v+i) + i + \lambda i] f_i + s p(v+i) f_{i+1} + s' i f_{i-1}$$

et la condition initiale $f_i(\lambda, s, s', u; 0) = u^i$. La solution est de la forme

$$f_i(\lambda, s, s', u; t) = H_t(\lambda, s, s', u) [\gamma_t(\lambda, s, s', u)]^i$$

avec :

$$\begin{cases} \frac{1}{H_t} \frac{\partial H_t}{\partial t} = -v p(1-s \gamma_t) & H_0 = 1 \\ \frac{\partial \gamma_t}{\partial t} = p s \gamma_t^2 - (1+\lambda+p) \gamma_t + s' & \gamma_0 = u \end{cases}$$

Ces équations s'intègrent sans difficulté particulière. On trouve

$$\begin{cases} \gamma_t = \frac{u c \operatorname{ch} \frac{ct}{2} + (2s' - (1+\lambda+p)u) \operatorname{Sh} \frac{ct}{2}}{c \operatorname{ch} \frac{ct}{2} + (1+\lambda+p - 2psu) \operatorname{Sh} \frac{ct}{2}} \\ H_t = \left(\frac{c e^{\frac{q+\lambda}{2} t}}{c \operatorname{ch} \frac{ct}{2} + (1+\lambda+p - 2psu) \operatorname{Sh} \frac{ct}{2}} \right)^v \\ c = \sqrt{(1+\lambda+p)^2 - 4ps s'} \end{cases}$$

En particulier, la loi stationnaire de (Q_t, N_t^+, N_t^-) est définie par :

$$(49) \quad E \left[e^{-\lambda Q_t} s^{N_t^+} s' N_t^- \right] =$$

$$\left[\frac{q c e^{\frac{q+\lambda}{2} t}}{c q \operatorname{ch} \frac{ct}{2} + [(1+\lambda+p)(1+p) - 2p(s+s')] \operatorname{Sh} \frac{ct}{2}} \right]^v$$

La loi de Q_t est assez complexe. Il est plus intéressant de considérer la loi (discrète) du nombre N_t^+ des transitions positives survenues entre 0 et t. On obtient sa fonction génératrice en prenant $\lambda = 0, s' = 1$ dans (48). Il vient ainsi :

$$(50) \quad \left\{ \begin{aligned} G^+(s, t) = E[s^{N_t^+}] &= \left(\frac{q c e^{qt/2}}{[q \operatorname{ch} \frac{ct}{4} + c \operatorname{Sh} \frac{ct}{4}][c \operatorname{ch} \frac{ct}{4} + q \operatorname{Sh} \frac{ct}{4}]} \right)^v \\ c &= \sqrt{(1+p)^2 - 4ps} = \sqrt{q^2 + 4p(1-s)} \end{aligned} \right.$$

Cette loi est proche parente des distributions de SICHEL. De fait, si $v \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$ avec $vt = b = c^{ste}$, on trouve :

$$G^+(s, t) \rightarrow e^{\frac{bq}{2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{4p}{q^2}(1-s)} \right)}$$

et cette limite est une loi de Sichel.

On note aussi que la loi (50) se déduit de la loi (44) en changeant t en qt et λ en $\frac{4p}{q^2}(1-s)$:

$$G^+(s, t) = \Phi_{tq} \left(\frac{4p}{q^2} (1-s) \right)$$

Il s'agit donc du mélange poissonien associé à cette loi continue. D'après les résultats de la section précédente, on obtient donc :

$$G^+(s, t) = \Pi \left(\frac{b_n(t/q)}{b_n(t/q) + \frac{4p}{q^2}(1-s)} \right)^v$$

Ainsi, N_t^+ apparaît comme une somme de binomiales négatives indépendantes.

Pour $v = 1$, on obtiendra une expression explicite de la loi de probabilité de N_t^+ en démarquant les formules (48). Posant $t/q = t'$ et $a = 4p/q^2$, il vient en effet pour $v = 1$:

$$G^+(s, t'q) = \sum_{n \geq 0} \frac{B_n}{b_n + a(1-s)}$$

où les $B_n(t')$ et $b_n(t')$ ont les valeurs calculées plus haut.

En particulier :

$$p_i = \sum_n \frac{B_n}{a + b_n} \left(\frac{a}{a + b_n} \right)^i$$

$$T_i = \sum_{k \geq i} p_k = \sum_n \frac{B_n}{b_n} \left(\frac{a}{a + b_n} \right)^i$$

$$K_i = \sum_{k \geq i} k p_k = \sum_n \frac{B_n}{b_n} \left(i + \frac{a}{b_n} \right) \left(\frac{a}{a + b_n} \right)^i$$

Le calcul numérique de ces quantités est donc facile. Nous pouvons ainsi comparer leurs valeurs exactes avec celles qui fournissent deux modèles approchés : le premier est le modèle de changement de support (34), qui attribue à N_t^+ une loi binomiale négative $(q'/1-p's')^{v'}$, v' et p' étant déterminés de manière à respecter la moyenne et la variance correctes. Le deuxième modèle revient à considérer que la loi exacte de N_t^+ s'obtient en remplaçant λ par $a(1-s)$ dans (44), et que par suite on devrait avoir une bonne approximation en faisant la même substitution dans la version approchée (45). Dans le cas $v = 1$, cela revient à prendre :

$$G(s) = e^{-\theta(1-s)} \frac{\chi}{1-\omega s} \quad (\chi = 1-\omega)$$

θ et ω étant ici encore déterminés de façon à respecter moyenne et variance. Dans ce second modèle, N_t^+ est donc considéré comme la somme d'une poissonienne et d'une pascalienne indépendantes.

Pour calculer les probabilités correspondantes, considérons plus généralement la fonction génératrice :

$$G(s) = e^{-\theta(1-s)} \left(\frac{\chi}{1-\omega s} \right)^\alpha$$

Elle vérifie l'équation différentielle

$$(1-\omega s)G' - (\theta + \alpha\omega)G + ps G = 0$$

Par suite, les probabilités p_i correspondant à la fonction génératrice G vérifient les relations de récurrence :

$$\begin{cases} (i+1)p_{i+1} = (\omega i + \theta + \alpha\omega)p_i - \theta\omega p_{i-1} \\ p_0 = \chi^\alpha e^{-\theta} ; p_1 = (\theta + \alpha\omega)p_0 \end{cases}$$

qui permettent leur calcul numérique.

L'examen des résultats numériques montre que c'est le second modèle (poissonienne + pascalienne) qui donne les meilleurs résultats. Sur le tableau 2 ci-après, on trouvera la comparaison des 3 modèles pour la valeur $t' = t/q = 2$, $v = 1$ et $a = \frac{4p}{q^2} = 0,5$.

TABLEAU 2		
Valeurs de p_i . De haut en bas : valeur exacte, valeur approchée par le modèle Poisson et Pascal, valeur approchée par le modèle binomial négatif.		
i $p_i \times 10^5$	i $p_i \times 10^5$	i $p_i \times 10^5$
0 $\begin{Bmatrix} 44717 \\ 44569 \\ 45294 \end{Bmatrix}$	5 $\begin{Bmatrix} 1159 \\ 1159 \\ 1180 \end{Bmatrix}$	10 $\begin{Bmatrix} 16 \\ 17 \\ 12 \end{Bmatrix}$
1 $\begin{Bmatrix} 29827 \\ 30140 \\ 28893 \end{Bmatrix}$	6 $\begin{Bmatrix} 493 \\ 498 \\ 481 \end{Bmatrix}$	11 $\begin{Bmatrix} 7 \\ 7 \\ 5 \end{Bmatrix}$
2 $\begin{Bmatrix} 14368 \\ 14306 \\ 14446 \end{Bmatrix}$	7 $\begin{Bmatrix} 209 \\ 214 \\ 193 \end{Bmatrix}$	12 $\begin{Bmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{Bmatrix}$
3 $\begin{Bmatrix} 6332 \\ 6258 \\ 6559 \end{Bmatrix}$	8 $\begin{Bmatrix} 89 \\ 92 \\ 77 \end{Bmatrix}$	13 $\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$
4 $\begin{Bmatrix} 2719 \\ 2696 \\ 2827 \end{Bmatrix}$	9 $\begin{Bmatrix} 38 \\ 40 \\ 30 \end{Bmatrix}$	

REFERENCES

- [1] G. MATHERON : "A Simple Substitute for Conditional Expectation : The Disjunctive Kriging". Proc., NATO ASI "Advanced Geostatistics in the Mining Industry", 1975, pp. 221-236, Oct. 1976.
- [2] G. MATHERON : "Remarques sur les Changements de Support", CGMM, Fontainebleau, 1981.