UNE METHODOLOGIE GENERALE POUR LES MODELES ISOFACTORIELS DISCRETS

par G. MATHERON *

TABLE DES MATIERES

---

* Centre de Géostatistique et de Morphologie Mathématique - 35 Rue Saint Honoré - 77305 FONTAINE-BLEAU CEDEX - France.

"ETUDES GEOSTATISTIQUES". Séminaire CFSG - 14-15 Juin 1984 - Fontainebleau, France, in Sc. de la Terre, Sér.Inf., n° 21

RESUME

Pour l'estimation géostatistique des réserves récupérables, on a besoin de deux sortes de lois bivariables isofactorielles: des lois symétriques (du type échantillon/échantillon ou bloc/bloc) et des lois dissymétriques (échantillon/bloc). En particulier, la loi bivariable d'un bloc et d'un échantillon aléatoire dans ce bloc constitue un modèle de changement de support. Nous donnons ici une méthode générale permettant de construire de tels modèles dans le cas discret. Le point de départ est un théorème spectral : pour tout processus de diffusion discrète, les facteurs $H_n(i) = Q_i(\lambda_n)$, considérés comme fonctions de n à i fixé, forment un système complet de polynomes Q_i par rapport aux valeurs propres λ_n, orthogonaux pour la mesure spectrale. En sens inverse, à toute mesure donnée sur un spectre λ_n arbitraire correspond un processus admettant ce spectre et cette mesure spectrale. Il est ainsi possible de former plusieurs processus admettant le même spectre. Les matrices Π échangeant les polynomes Q_i, Q'_i associées à deux processus ont toutes les propriétés requises pour un changement de support, à part la positivité, et un théorème nous donne des conditions générales garantissant cette positivité. Deux cas particuliers remarquables correspondent à la factorisation de la matrice markovienne P(t) et de sa résolvante. A titre d'application, on traite ensuite le cas des modèles polynomiaux. Ce sont les polynomes discrets de Jacobi et, en particulier, le modèle mixte Jacobi discret/Beta continu qui semblent présenter le plus d'intérêt pour les applications.

ABSTRACT

Two different isofactorial bivariate distributions are needed for a geostatistical estimation of recoverable reserves : symmetrical distributions (of the type sample/sample or block/block) and dissymetrical distributions (sample/block). In particular, the bivariate distribution of a block and of a random sample within this block is a change of support model.

In this paper, we are developing a general method that allows building such models in the discrete case. It starts with a spectral theorem : for any discrete diffusion process, the factors $H_n(i) = Q_i(\lambda_n)$, considered as functions of n for a fixed i, form a complete Q_i polynomials system with regard to eigenvalues λ_n, which are orthogonal for the spectral measure. Conversely, there is a process including this spectrum and this spectral measure for any given measure on an arbitrary spectrum λ_n. It is thus possible to obtain several processes having the same spectrum.

The matrices Π exchanging the polynomials Q_i, Q'_i associated with two processes; possess all the properties required for a change of support except positiveness, and a theorem is giving general conditions guaranteeing this positiveness. Two particular cases are obtained by factorizing the Markovian matrix P(t) of the process or its resolvent.

The particular case of polynomial models is also examined. These are the Jacobi discrete polynomials, and the mixed discrete Jacobi/continuous Beta model, which seem to be the most adequate for applications.

INTRODUCTION

Le probleme général dont la solution est présentée ici a été formulé dans Matheron, 1983, paragraphes A, B, C (3). Il existe aussi une version abrégée en langue anglaise . Ce problème est le suivant : pour les besoins de la géostatistique, et notamment pour l'estimation locale des réserves récupérables d'un gisement minier, il est nécessaire de disposer de deux sortes de modèles de loi bivariable : d'une part, des lois symétriques capables de décrire le comportement statistique de deux éléments de même nature, par exemple deux échantillons, ou deux panneaux d'implantation donnée dans le gisement ; mais d'autre part aussi des lois dissymétriques représentant deux éléments de supports différents, par exemple un échantillon et un panneau. Il est souhaitable que ces diverses lois possèdent la propriété isofactorielle, en raison des très grandes simplifications qui en résultent pour les techniques d'estimation. Il n'est pas difficile de former des modèles de lois bivariables isofactorielles symétriques, la théorie des processus de Markov constituant ici un guide très puissant. Par contre, le problème des lois isofactorielles dissymétriques, beaucoup plus difficile, n'a pas été résolu dans ces publications, où deux modèles particuliers seulement ont été présentés.

En fait, la pièce maitresse d'un modèle de ce genre est constituée par la loi bivariable représentant un panneau, ou bloc V, et un échantillon v implanté de manière aléatoire dans V. Dans le cas des lois discrètes, seules étudiées ici, la matrice stochastique π_{ij}, qui représente, à des anamorphoses éventuelles près, la loi de l'échantillon lorsque la variable liée au bloc est égale à i, et sa transposée π'_{ji}, qui représente la loi du bloc lorsque la variable d'échantillon est j, constituent un modèle de changement de support. Elles doivent échanger les facteurs H_n des échantillons et H'_n des blocs selon des règles de la forme

$$\sum_j \pi_{ij}\, H_n(j) = t_n\, H'_n(i) \ ; \ \sum_i \pi'_{ji}\, H'_n(i) = t'_n\, H_n(j)$$

Dans la présente étude, on présente une étude générale permettant de construire de tels modèles de changement de support. Le point de départ est un théorème de nature spectrale : pour tout processus régulier de diffusion discrète, les facteurs $H_n(i)$, considérés comme fonction de n à i fixé, constituent autant de polynomes $Q_i(\lambda_n) = H_n(i)$ par rapport aux valeurs propres, et ces polynomes Q_i forment un système orthogonal complet pour la mesure spectrale. En sens inverse, on montre (paragraphe 2) qu'à toute mesure spectrale donnée sur un spectre $\{\lambda_n\}$ arbitrairement choisi correspond un processus admettant ce spectre et cette mesure spectrale. Comme il est possible de choisir plusieurs mesures spectrales sur le même spectre, on obtient autant de processus différents ayant les mêmes valeurs propres λ_n. Les matrices π_{ij} échangeant les anciens polynomes Q_j et les nouveaux Q'_i ont toutes les propriétés requises pour un changement de support, hormis la positivité (par. 3), et un théorème assez fort (par. 3) nous donne des conditions générales garantissant cette positivité. Deux cas particuliers remarquables par la simplicité des résultats qu'ils fournissent correspondent à la factorisation de la résolvante (par. 5), et à la transformation $n \to N-n$ (par. 6). On examine le cas des modèles polynomiaux au sens large ($H_n(i)$ polynome en μ_i , par. 7) et au sens strict ($H_n(i)$ polynome en i, par. 8). Dans ce dernier cas, on donne un inventaire exhaustif. Ce sont les polynomes discrets de Jacobi qui semblent les plus intéressants pour les applications. Les modèles de changement de support correspondants sont étudiés en détail (par. 9), ainsi que les modèles mixtes Jacobi discret/beta continu. Le dernier paragraphe esquisse la description d'une classe plus générale de modèles polynomiaux au sens large.

CHAPITRE 1

LA MESURE SPECTRALE

Nous considérons dans ce qui suit un processus markovien $Y(t)$ à valeurs entières positives ($i = 0,1,\dots N$ dans le cas fini ou $i = 0,1,\dots$ dans le cas infini) du type "naissance et mort" : partant d'un état i au temps 0, et en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur à 1, on aura :

$$\begin{cases} Y(\delta t) = i + 1 & \text{avec la probabilité} \quad a_i\,\delta t \\ Y(\delta t) = i & \text{"} \quad 1 - (a_i + b_i)\delta t \\ Y(\delta t) = i - 1 & \text{"} \quad b_i\,\delta t \end{cases}$$

avec $a_i > 0$, $b_i > 0$ pour tout i, à l'exception de b_o et (dans le cas fini) a_N qui sont évidemment nuls

$$b_o = a_N = 0$$

Les probabilités de transitions de ce processus sont données par la matrice $P(t) = \exp(At)$ ($t \geq 0$) où A, générateur infinitésimal du processus, est la matrice :

$$A_{ij} = a_i\,\delta_{i+1,j} + b_i\,\delta_{i-1,j} - (a_i + b_i)\,\delta_{ij} \tag{1}$$

Nous ferons de plus les hypothèses suivantes :

a) Existence d'une probabilité stationnaire $W = (W_i)$, telle que $W\,P(t) = W$ pour tout t. On sait que cette probabilité est alors l'unique solution de l'équation aux différences :

$$a_i\,W_i = b_{i+1}\,W_{i+1} \tag{2}$$

telle que $\sum W_i = 1$. La condition nécessaire et suffisante pour que cette probabilité existe est évidemment

$$\sum_i \frac{a_o\,a_1\dots a_{i-1}}{b_1\,b_2\dots b_i} < \infty$$

b) Le générateur A, considéré comme un opérateur sur $L^2(N,W)$, est alors un opérateur auto-adjoint. Nous supposerons que A admet un <u>spectre discret</u> avec des <u>valeurs propres négatives ou nulles</u>, et que les <u>fonctions propres</u> associées forment un <u>système complet</u> dans $L^2(N,W)$.

Comme 1 est toujours fonction propre associée à la valeur propre nulle, on aura $\lambda_o = 0$. Pour éviter les signes −, nous désignerons les valeurs propres par $-\lambda_n$, au lieu de λ_n, de sorte que $\lambda_n > 0$ pour $n > 0$.

A chaque valeur propre $-\lambda_n$ $(n = 0,1\ldots)$ est associée <u>une seule fonction propre</u> H_n, définie à un facteur près. En effet, la relation de définition :

$$A\, H_n = -\lambda_n H_n$$

s'écrit

(3)
$$\begin{cases} a_o(H_n(1) - H_n(o)) = -\lambda_n H_n(o) \\ a_i(H_n(i+1) - H_n(i)) + b_i(H_n(i-1) - H_n(i)) = -\lambda_n H_n(i) \end{cases}$$

de sorte que la donnée de $H_n(o)$ détermine $H_n(i) = 0$ pour tout i, d'où l'unicité. En outre, on ne peut pas avoir $H_n(o) = 0$, car on aurait alors $H_n(i) = 0$ pour tout i. Nous pouvons donc fixer le facteur constant en posant <u>par définition</u>

(4)
$$H_n(o) = 1$$

ce qui implique en particulier $H_o(i) = 1$ pour tout i.

Avec cette définition, les H_n forment un système orthogonal complet, mais non orthonormé. Nous désignerons par $\|H_n\|^2$ la norme de H_n. La relation

(5)
$$\sum_i H_n(i)\, \frac{H_m(i)}{\|H_m\|^2}\, W_i = \delta_{nm}$$

exprime que les facteurs H_n sont <u>orthogonaux</u>. De même, la relation

(6)
$$\sum_n H_n(i)\, \frac{H_n(j)}{\|H_n\|^2}\, W_j = \delta_{ij}$$

exprime que les facteurs H_n forment un système <u>complet</u> dans $L^2(N,W)$. La similitude de ces relations montre que les $1/\|H_n\|^2$ jouent, dans l'espace "spectral" des n, le même rôle que les W_i dans l'espace des i. Tout ce qui suit n'est que l'amplification de cette remarque.

Si nous faisons $i = j = 0$ dans (6), il vient :

$$\sum_n \frac{1}{\|H_n\|^2} = \frac{1}{W_o}$$

Posant donc :

$$u_o = W_o \quad ; \quad u_n = \frac{u_o}{\|H_n\|^2} \qquad (n = 0,1\ldots) \tag{7}$$

Nous voyons que les u_n forment une probabilité ($\sum u_n = 1$). Plutôt qu'aux valeurs entières $n = 0,1\ldots$, nous affecterons ces probabilités u_n aux valeurs propres (changées de signe) $\lambda_o, \lambda_1\ldots$, et nous dirons que la mesure

$$\chi(d\lambda) = \frac{1}{u_o} \sum_n u_n \, \delta_{\lambda n}(d\lambda)$$

est la mesure spectrale associée au processus.

Nous pouvons maintenant réinterpréter les $H_n(i)$ en posant pour chaque i et chaque λ_n :

$$Q_i(\lambda_n) = H_n(i)$$

A i fixé, Q_i est une fonction définie sur le spectre $\{\lambda_n\}$. En fait, Q_i est un polynome de degré i en λ_n : cela résulte immédiatement des relations (3) et (4), qui se mettent sous la forme :

$$a_i(Q_{i+1} - Q_i) + b_i(Q_{i-1} - Q_i) = -\lambda_n Q_i \tag{3'}$$

$$Q_o = 1 \tag{4'}$$

C'est la raison pour laquelle nous avons adopté la convention (4) au lieu de considérer les fonctions propres normées.

Compte tenu de (7), les relations (6) écrites avec j = i donnent ensuite la norme $\|Q_i\|^2$ du polynome Q_i dans $L^2(R,u)$ sous la forme :

$$\|Q_i\|^2 = \sum_n u_n (Q_i(\lambda_n))^2 = \frac{u_o}{W_i}$$

Autrement dit, on obtient les relations duales de (7) :

$$W_o = u_o \quad ; \quad W_i = \frac{W_o}{\|Q_i\|^2} \tag{7'}$$

De même, les relations (5) et (6) deviennent :

$$\sum_n Q_i(\lambda_n) \frac{Q_j(\lambda_n)}{\|Q_j\|^2} u_n = \delta_{ij} \tag{5'}$$

$$\sum_i Q_i(\lambda_n) \frac{Q_i(\lambda_m)}{\|Q_i\|^2} u_m = \delta_{nm} \tag{6'}$$

Ces deux relations expriment que les polynomes Q_i constituent un système orthogonal complet dans $L^2(N,u)$. En fait, ce résultat essentiel admet une réciproque. Avant de le montrer, terminons ce paragraphe par une remarque.

-REMARQUE- Le processus $Y(t)$ est dit régulier si, pour tout intervalle de temps fini t et tout état initial i, il y a une probabilité 1 pour que le processus ne subisse qu'un nombre fini de transition entre 0 et t. On sait (voir par exemple Guikhman et Skorokhod, p. 412) que le processus est régulier si et seulement si le système

(8) $$a_i(\varpi_{i+1} - \varpi_i) + b_i(\varpi_{i-1} - \varpi_i) = \mu\, \varpi_i$$

n'admet pas de solution bornée pour $\mu > 0$. Sous nos Hypothèses, cette condition est toujours remplie. Car si le système (8) admet une solution ϖ bornée, on a $\varpi \in L^2(\mathbb{N},W)$, et (8) exprime alors que μ est une valeur propre strictement positive, ce qui est exclu par nos hypothèses.

CHAPITRE 2

CONSTRUCTION D'UN PROCESSUS A PARTIR DE SA MESURE SPECTRALE

Nous allons voir qu'inversement, à toute mesure spectrale donnée a priori, correspond un et un seul processus de diffusion discrète à spectre discret. Pour cela, donnons-nous a priori une mesure spectrale, c'est-à-dire, à un facteur près, une probabilité $u(d\lambda)$ de la forme :

$$u(d\lambda) = \sum_n u_n \delta_{\lambda n}(d\lambda)$$

($\lambda_o = 0$, $\lambda_n > 0$ pour $n = 1,2\ldots$, ou, dans le cas fini, $n = 1,2\ldots N$; $u_n > 0$ pour $n = 0,1\ldots N$ et $\sum u_n = 1$). Il s'agit donc d'une mesure à support discret sur $\mathbb{R}_+$. Nous supposons seulement que les polynomes forment une famille totale dans $L^2(\mathbb{R}_{+,u})$. A cela près, la probabilité discrète $u(d\lambda)$ peut être quelconque. Cela implique seulement l'existence des moments de tous les ordres et une décroissance pas trop lente des u_n à l'infini (en particulier, la loi u doit être univoquement déterminée par la donnée de ses moments).

2. 1 – LES POLYNOMES ORTHOGONAUX

Dans ces conditions, il existe dans $L^2(R,u)$ une suite complète de polynomes orthogonaux $Q_i(\lambda)$ c'est-à-dire telle que les $Q_i(\lambda_n)$ vérifient les relations (5') et (6').

Un théorème classique nous assure que, pour chaque $i > 0$, le polynome $Q_i(\lambda)$ admet i racines distinctes sur l'intervalle ouvert $(0,\lambda_N)$. La démonstration est simple. On désigne par $\xi_1,\ldots\xi_k$ les racines d'ordre impair de $Q_i(\lambda)$ appartenant à cet intervalle ouvert, et on pose

$$h(\lambda) = (\lambda - \xi_1) \ldots (\lambda - \xi_k)$$

ou $h(\lambda) = 1$ s'il n'y a pas de telles racines). Alors le polynome $h(\lambda)\, Q_i(\lambda)$ ne change pas de signe sur $(0,\lambda_N)$. Si le degré de $h(\lambda)$ était strictement $< i$, on devrait avoir $\int h(\lambda)\, Q_i(\lambda)\, u(d\lambda) = 0$, ce qui est impossible. Donc, ce degré est égal à i, et par suite $Q_i(\lambda)$ a i racines distinctes sur l'intervalle ouvert $(0,\lambda_N)$.

En particulier, on a donc toujours

$$Q_i(o) \neq 0$$

Comme les Q_i ne sont définis qu'à un facteur près, on peut donc imposer la condition :

$$Q_i(o) = 1 \qquad (i = 0,1\ldots)$$

et, en particulier, $Q_o = 1$. Comme les racines sont toujours plus grandes que 0, cela implique, entre autres, que le coefficient du terme en λ^i dans $Q_i(\lambda)$ a le signe $(-1)^i$: cette remarque sera utile dans un instant.

2. 2 – LES RELATIONS DE RECURRENCE

Classiquement aussi, on sait que les $Q_i(\lambda)$ vérifient une relation de récurrence à trois termes . De fait, pour i donné, considérons le polynome $-\lambda\, Q_i(\lambda)$, qui est de degré i+1. D'après (5') et (6'), nous avons toujours :

$$(9) \qquad -\lambda_n\, Q_i(\lambda_n) = \sum_{j=o}^{N} \langle -\lambda\, Q_i\, Q_j \rangle \frac{Q_j(\lambda_n)}{\|Q_j\|^2}$$

pour n = 0,1...N. Pour i < N, le polynome $-\lambda\, Q_i(\lambda)$, de degré $\leq$ N, est déterminé par ses valeurs en λ_n, n = 0,1...N, et on a donc aussi :

$$-\lambda\, Q_i(\lambda) = \sum_{j=o}^{N} \langle -\lambda\, Q_i\, Q_j \rangle \frac{Q_j(\lambda)}{\|Q_j\|^2}$$

pour tout réel λ . Comme le degré de ce polynome est i+1, il en résulte

$$\langle \lambda\, Q_i\, Q_j \rangle = 0 \qquad \text{pour} \qquad N \geq j > i+1$$

et, cette matrice étant symétrique

$$\langle \lambda\, Q_i\, Q_j \rangle = 0 \qquad \text{pour} \qquad N \geq i > j+1$$

Ainsi, la relation (9), qui est vraie pour tout i = 0,1...N, ne comporte que trois termes au plus :

$$-\lambda_n\, Q_i(\lambda_n) = a_i\, Q_{i+1}(\lambda_n) + b_i\, Q_{i-1}(\lambda_n) + c_i\, Q_i(\lambda_n)$$

avec évidemment $b_o = 0$ et (dans le cas fini) $a_N = 0$. D'autre part, pour n = 0, nous avons par définition $\lambda_o = 0$ et $Q_i(o) = 1$. Donc $a_i + b_i + c_i = 0$ et :

(10) $$a_i(Q_{i+1}(\lambda_n) - Q_i(\lambda_n)) + b_i(Q_{i-1}(\lambda_n) - Q_i(\lambda_n)) = - \lambda_n Q_i(\lambda_n)$$

pour tout $i \leq N$ et tout $n \leq N$. Noter que cela entraine

(10') $$a_i(Q_{i+1}(\lambda) - Q(\lambda)) + b_i(Q_{i-1}(\lambda) - Q_i(\lambda)) = - \lambda \; Q_i(\lambda)$$

pour tout λ réel seulement dans le cas $i < N$: si $i = N$, le polynome

$$\lambda \, Q_N(\lambda) + b_N(Q_{i-1} - Q_i)$$

s'annule en $\lambda = \lambda_o, \lambda_1 \ldots \lambda_N$, mais, comme il est de degré N+1, cela entraine seulement :

$$Q_N(\lambda) + b_N(Q_{i-1} - Q_i) = C \; \lambda(\lambda-\lambda_1)\ldots(\lambda-\lambda_N)$$

Dans le cas infini, par contre, (10') est vraie pour tout i. Mais ce qui importe ici, c'èst la relation (10), vraie pour tout $i \leq N$ et tout $n \leq N$ dans le cas fini, et pour tout i et tout n dans le cas infini.

2. 3 - LE PROCESSUS ASSOCIE

La symétrie de la matrice $< \lambda \, Q_i \, Q_j >$ implique une relation entre les normes $\|Q_i\|^2$ et les coefficients a_i , b_i. En effet, on a d'après (10)

$$- < \lambda \, Q_i, \, Q_{i+1} > = a_i \; \|Q_{i+1}\|^2$$

$$- < \lambda \, Q_i, \, Q_{i-1} > = b_i \; \|Q_{i-1}\|^2$$

et par suite

(11) $$\frac{b_{i+1}}{\|Q_{i+1}\|^2} = \frac{a_i}{\|Q_i\|^2}$$

Enfin, notons aussi que les a_i sont positifs . Plus précisément :

$$a_i > 0 \quad \text{pour } i = 0,1\ldots N-1 \quad \text{et} \quad a_N = 0$$

En effet, pour $i = N$, on a déjà vu $a_N = 0$. Pour $i < N$, la relation (10') montre que le coefficient C_i du terme en λ^i dans $Q_i(\lambda)$ vérifie

$$a_i \; C_{i+1} = - C_i$$

Or on a remarqué plus haut que C_i a le signe $(-1)^i$. On en déduit $a_i > 0$ strictement pour $i < N$. D'après (11), les $\underline{b_i}$ sont également > 0 pour $0 < i \leq N$ (et nous avons vu $b_o = 0$).

Considérons alors le processus markovien associé au générateur infinitésimal

$$A_{ij} = a_i \;\; \delta_{i+1\ j} + b_i \;\; \delta_{i-1\ j} - (a_i+b_i) \; \delta_{ij}$$

D'après (11), la probabilité stationnaire W_i de ce processus, si elle existe, est nécessairement de la forme

(12)
$$W_i = \frac{W_o}{\| Q_i \|^2}$$

Mais la relation (6'), écrite avec $n = m = 0$ nous donne :

$$\sum_i \frac{1}{\| Q_i \|^2} = \frac{1}{u_o}$$

Donc, la probabilité stationnaire (12) existe toujours, et de plus

(12')
$$W_o = u_o$$

Maintenant, si nous posons

$$H_n(i) = Q_i(\lambda_n)$$

la relation (6'), avec $n = m$, donne $\| H_n \|^2 = u_o/u_n$, de sorte que H_n appartient à $L^2(N,W)$. Mais les relations (10) signifient alors que ces fonctions H_n sont les fonctions propres du générateur A_{ij}, les valeurs propres associées étant les $\mu_n = - \lambda_n$. De plus, les relations (5') et (6') expriment que ces fonctions propres constituent un système orthogonal complet dans $L^2(\mathbb{N},W)$. Ceci achève la construction inverse : on s'est donné a priori les λ_n et la mesure spectrale, et on a obtenu un processus de diffusion admettant ce spectre et cette mesure spectrale.

CHAPITRE 3

CONSTRUCTION D'UN MODELE DE CHANGEMENT DE SUPPORT

D'après ce qui précède, il est toujours possible de construire un processus X(t) admettant le même spectre $\{\lambda_n\}$ qu'un processus donné Y(t) : on se donnera a priori une probabilité u'_n sur $\{\lambda_n\}$, on formera la suite Q'_i des polynomes orthogonaux pour $\{u'_n\}$, on prendra

$$H'_n(i) = Q'_n(\lambda_n)$$

et on déterminera, comme ci-dessus, les coefficients a'_i, b'_i de la relation de récurrence entre les Q'_i : au générateur

$$A'_{ij} = a'_i(\delta_{i+1,j} - \delta_{ij}) + b'_i(\delta_{i-1,j} - \delta_{ij})$$

sera associé le processus cherché X(t).

Connaissant les lois stationnaires W_i et W'_i de ces deux processus, nous cherchons maintenant en vue de construire des modèles de changement de support, <u>une loi bivariable dissymétrique</u> W_{ij} <u>admettant les lois marginales</u> W_i, W'_i <u>et les facteurs</u> H_n, H'_n. Nous allons voir que cela est possible , moyennant un choix convenable de la nouvelle mesure spectrale u'_n.

3. 1 - LES MATRICES Π

Notons d'abord que les nouveaux polynomes Q'_i s'expriment en fonction des anciens par des relations de la forme :

(13) $$Q'_i = \sum_{j \leq i} \Pi_{ij} \; Q(i)$$

ou, aussi bien

(13') $$H'_n(i) = \sum_{j \leq i} \Pi_{ij} \; H_n(j)$$

Considérons la matrice triangulaire Π_{ij} ($\Pi_{ij} = 0$ pour $j > i$). Comme $H'_o(i) = H_o(j) = 1$ pour $n = 0$, d'après (13') on a :

$$\sum_j \Pi_{ij} = 1$$

Moyennant donc une <u>condition de positivité</u>

$$\Pi_{ij} \geq 0 \qquad \forall\ i, j$$

Il s'agira d'une probabilité de transition. D'après l'orthogonalité des polynomes Q_j pour la probabilité u_n, les relations (13) ou (13') équivalent à :

(15) $$\Pi_{ij} = \sum_n H'_n(i) \frac{H_n(j)}{\|H_n\|^2} W_j$$

Ainsi, la loi bivariable :

(15') $$W_{ij} = W'_i \, \Pi_{ij} = \sum_n W'_i \, H'_n(i) \frac{H_n(j)}{\|H_n\|^2} W_j$$

possèdera les propriétés requises : elle échange les facteurs selon les relations

(16) $$\begin{cases} E\left[H_n(Y)/X = i\right] = H'_n(i) \\ E\left[H'_n(X)/Y = j\right] = \dfrac{\|H'_n\|^2}{\|H_n\|^2} H_n(j) \end{cases}$$

La seconde relation (16) implique $\|H'_n\|^2 \leq \|H_n\|^2$, puisque l'espérance conditionnelle est un projecteur et diminue la norme. Compte tenu des relations (7), on voit qu'une condition nécessaire (mais non suffisante) pour la positivité (14) s'écrit

(16') $$\frac{u'_n}{u'_o} \geq \frac{u_n}{u_o}$$

et donc, en particulier

$$u'_o \leq u_o$$

Les valeurs 0 doivent avoir pour X une probabilité plus faible que pour Y. Comme on a de plus $Y \leq X$ p.s. pour la loi (15'), on voit que la variable X est prédestinée à représenter un grand support V, et la variable Y un petit support v aléatoire dans V.

Tout se ramène donc à trouver des conditions sur u'_n moyennant lesquelles <u>la positivité</u> (14) sera assurée.

Commençons par un exemple simple.

3. 2 - UN EXEMPLE SIMPLE

Soit α un nombre tel que $0 < \alpha < 1$. Prenons :

$$u'_o = \frac{(1-\alpha)u_o}{1-\alpha\, u_o} \quad ; \quad u'_n = \frac{u_n}{1-\alpha\, u_o} \qquad (n \geq 1) \tag{17}$$

de sorte que les conditions (16') sont vérifiées. Pour un i donné, le nouveau polynome Q'_i est orthogonal pour u'_n à tous les polynomes de degré $j < i$, donc en particulier aux anciens polynomes Q_j, $j < i$. Compte tenu de (17), cette condition d'orthogonalité, qui s'écrit :

$$\sum_n u'_n\, Q'_i(\lambda_n)\, Q_j(\lambda_n) = 0 \qquad (j < i)$$

donne simplement

$$\sum_n u_n\, Q'_i(\lambda_n)\, Q_j(\lambda_n) = \alpha\, u_o$$

D'après (13) et (7'), il en résulte $\pi_{ij} = \alpha\, W_j$ pour $j < i$. D'où l'expression de π_{ij} :

$$\pi_{ij} = \begin{cases} \alpha\, W_j & \text{pour } j < i \\ 1 - \alpha \sum\limits_{k<i} W_k & \text{pour } j = i \\ 0 & \text{pour } j > i. \end{cases}$$

de sorte que la positivité est assurée.

Le modèle correspondant de changement de support a été étudié dans Matheron, 1984(2). En particulier, les nouvelles probabilités sont :

$$W'_i = \frac{(1-\alpha)\, W_i}{(1-\alpha\, F_i)(1-\alpha\, F_{i+1})} \qquad (F_i = \sum_{j<i} W_j)$$

et le nouveau générateur infinitésimal est défini par

$$a'_i = \frac{1-\alpha\, F_i}{1-\alpha\, F_{i+1}}\, a_i \quad ; \quad b'_i = \frac{1-\alpha\, F_{i+1}}{1-\alpha\, F_i}\, b_i$$

3. 3 - FACTORISATION D'UNE LOI SYMETRIQUE

Dans notre modèle de changement de support, deux échantillons v, v' implantés au hasard dans V obéiront à la loi symétrique :

(18)
$$f_{jj'} = \sum_i W'_i \, \Pi_{ij} \, \Pi_{ij'}$$

D'après (15), cette loi est isofactorielle :

(18')
$$f_{jj'} = \sum_n \frac{\|H'_n\|^2}{\|H_n\|^2} \frac{H_n(j)\, H_n(j')}{\|H_n\|^2} W_j \, W_{j'}$$

Il sera plus commode d'introduire la matrice de transition $\tilde{P}_{jj'}$, ou loi conditionnelle de Y' à Y = j fixé :

(18")
$$\tilde{P}_{jj'} = \frac{1}{W_j} f_{jj'} = \sum_n \frac{\|H'_n\|^2}{\|H_n\|^2} \frac{H_n(j)\, H_n(j')}{\|H_n\|^2} W_{j'}$$

En désignant par :

$$\Pi'_{ji} = W'_i \, \Pi_{ij} \frac{1}{W_j}$$

la loi conditionnelle de X à Y = j fixé, (18) s'écrit :

(19)
$$\tilde{P}_{jj'} = \sum_i \Pi'_{ji} \, \Pi_{ij'}$$

soit, en terme de matrice :

(19')
$$\tilde{P} = \Pi' \, \Pi$$

Ainsi, la loi isofactorielle symétrique (18) de deux échantillons v, v' dans V est <u>factorisée</u> par la loi isofactorielle (15') dissymétrique de v dans V.

Dans le cas de l'exemple simple ci-dessus, la loi symétrique $\tilde{P}$ ainsi factorisée correspond au modèle mosaïque, voir Matheron, 1984 (2). Toutefois, le modèle mosaïque est un peu particulier, et nous allons maintenant décrire un procédé permettant d'obtenir des modèles plus généraux.

CHAPITRE 4

UN THEOREME DE FACTORISATION

Une condition nécessaire pour la positivité de Π_{ij} est évidemment que la matrice $\tilde{P}$, définie en (18") soit elle-même positive. Or, nous disposons d'un procédé simple permettant d'assurer la positivité de $\tilde{P}_{jj'}$. En effet, la probabilité de transition $P_{ij}(t)$ du processus $Y(t)$ s'écrit :

$$P_{ij}(t) = \sum_n e^{-\lambda_n t} \frac{H_n(i)\, H_n(j)}{\|H_n\|^2} W_j \tag{20}$$

Si $G(dt)$ est une probabilité quelconque sur la demi-droite $t \geq 0$, et

$$\Phi(\mu) = \int_0^\infty e^{-\mu t}\, G(dt) \qquad (\mu \geq 0)$$

sa transformée de Laplace, la matrice $\tilde{P}$ définie par :

$$\tilde{P}_{ij} = \int_0^\infty P_{ij}(t)\, G(dt)$$

est encore une probabilité de transition. D'après (20), $\tilde{P}$ s'écrit :

$$\tilde{P}_{ij} = \sum_n \Phi(\lambda_n) \frac{H_n(i)\, H_n(j)}{\|H_n\|^2} W_j$$

Comparant avec (18"), nous voyons qu'en prenant :

$$\frac{\|H'_n\|^2}{\|H_n\|^2} = \Phi(\lambda_n)$$

c'est-à-dire, d'après (7)

$$\frac{u'_n}{u'_o} = \frac{u_n}{u_o} \frac{1}{\Phi(\lambda_n)} \tag{21}$$

nous serons assurés de la positivité de la matrice (18"). Cela ne suffit pas encore, puisque nous ne savons pas si $\tilde{P}_{ij} \geq 0$ entraine $\Pi_{ij} \geq 0$. Mais nous allons voir que cette condition est remplie au moins <u>dans le cas où la loi G est indéfiniment divisible</u>.

4. 1 - LE CHANGEMENT DE SUPPORT COMME PROCESSUS

Considérons donc une loi indéfiniment divisible $G_s(dt)$, dépendant d'un paramètre $s > 0$, défini par sa transformée de Laplace :

$$\Phi_s(\lambda) = e^{-s\psi(\lambda)} \quad ; \quad \psi(\lambda) = \int_0^\infty \frac{1-e^{-\lambda x}}{x} K(dx)$$

où K est une mesure ≥ 0 telle que $\int_0^\infty \frac{K(dx)}{1+x} < \infty$. Pour chaque valeur de s, nous munissons le spectre $\{\lambda_n\}$ d'une mesure spectrale $u_n(s)$, définie, conformément à (21), en posant :

$$\text{(21')} \qquad \frac{u_n(s)}{u_o(s)} = \frac{u_n}{u_o} e^{s\psi(\lambda_n)}$$

Dans le cas infini, il faut en général <u>imposer à s une limite supérieure</u> s_{Max}, puisque, pour s trop grand, les moments de la loi u_n risquent de ne plus exister. Dans le cas fini, cette limitation n'existe pas : $s_{Max} = \infty$. Dans tous les cas, pour $s < s_{Max}$, la construction du paragraphe 2 montre qu'il existe un processus $X^s(t)$ caractérisé par son générateur

$$A^s_{ij} = a_i(s)[\delta_{i+1,j} - \delta_{ij}] + b_i(s)[\delta_{i-1,j} - \delta_{ij}]$$

ses facteurs $H^s_n(i)$ et sa probabilité stationnaire $W_i(s)$. Avec $Q^s_i(\lambda_n) = H^s_n(i)$, les polynomes $Q^s_i(\lambda_n)$ sont orthogonaux pour $u_n(s)$. Pour $s' \leq s < s_{Max}$, il existe une matrice triangulaire $\pi_{ij}(s,s')$ telle que l'on ait :

$$Q^s_i = \sum_j \pi_{ij}(s,s') Q^{s'}_j$$

avec

$$\pi_{ij}(s,s') = \sum_n \frac{u_n(s')}{u_o(s')} H^s_n(i) H^{s'}_n(j) W_j(s')$$

et, en particulier $\pi_{ij} = 0$ pour $j > i$. Il en résulte aussitôt pour $s'' \leq s' \leq s < s_{Max}$:

$$\text{(22)} \qquad \pi_{ij}(s,s'') = \sum_k \pi_{ij}(s,s')\pi_{kj}(s' s'')$$

Ainsi, à la positivité près, ces matrices $\pi_{ij}(s,s')$ se comportent comme les matrices de transition d'un processus de Markov (non homogène) décroissant. Du fait que, pour un indice i donné seuls interviennent les états $J \leq i$ en <u>nombre fini</u>, il n'y a pas de difficulté à établir l'existence du générateur infinitésimal du demi-groupe (22) (remarquons que le "temps" s sera décrit dans le sens inverse du sens habituel , c'est-à-dire dans le sens décroissant). Ce générateur est une matrice $B_{ik}(s)$, dépendant de s, avec :

$$B_{ik}(s) = \frac{\partial}{\partial s} \pi_{ik}(s,s')\Big|_{s'=s}$$

et, en particulier

$$\begin{cases} B_{ik}(s) = 0 & \text{pour } k > i \\ B_{ii}(s) = - \sum\limits_{j<i} B_{ij}(s) \end{cases}$$

puisque $\pi_{ik}(s) = 0$ pour $k > i$ et $\sum\limits_{j \leq i} \pi_{ij}(s) = 1$. Les matrices π_{ij} sont ainsi déterminées par l'équation de Kolmogorov :

$$\text{(22')} \qquad \frac{\partial \pi_{ij}(s,s')}{\partial s} = \sum_k B_{ik}(s)\, \pi_{kj}(s,s') \qquad (s' \leq s < s_{Max})$$

Pour que les π_{ij} soient ≥ 0, il suffit que ce demi-groupe soit <u>markovien</u>, c'est-à-dire que son générateur infinitésimal doit vérifier la condition

$$B_{ik}(s) \geq 0 \quad \text{pour } k \neq i$$

Nous allons nous en assurer par un calcul explicite.

4. 2 – CALCUL DU GENERATEUR B_{ik} (s)

D'après ce qui précède, nous avons :

$$\text{(23)} \qquad B_{ij}(s) = \sum_n \frac{u_n(s)}{u_o(s)} \left(\frac{\partial}{\partial s} Q_i^s(\lambda_n) \right) Q_j^s(\lambda_n)\, W_j(s)$$

et il faut montrer $B_{ij}(s) > 0$ pour $j < i$ (car $B_{ij} = 0$ pour $j > i$). Or, pour $j < i$, le polynome $Q_i^{s+\delta s}$ est orthogonal au polynome Q_j^s pour la mesure spectrale $u_n(s+\delta s)$, soit :

$$\sum_n \frac{u_n(s+\delta s)}{u_o(s+\delta s)} Q_i^{s+\delta s}(\lambda_n)\, Q_j^s(\lambda_n) = 0$$

d'où l'on tire

$$\sum_n \frac{u_n(s)}{u_o(s)} \frac{\partial Q_i(\lambda_n)}{\partial s} Q_j(\lambda_n) = - \sum_n \frac{d}{ds}\left(\frac{u_n}{u_o}\right) . Q_i(\lambda_n)\, Q_j(\lambda_n)$$

Compte tenu de (21') et de (23), cela donne :

$$B_{ij}(s) = - \sum_n \psi(\lambda_n) \frac{u_n}{u_o} Q_i^s(\lambda_n)\, Q_j^s(\lambda_n)\, W_j(s)$$

c'est-à-dire

$$(24) \qquad B_{ij}(s) = - \sum_n \psi(\lambda_n) \frac{H_n^s(i)\, H_n^s(j)}{\| H_n^s \|^2} W_j(s) \qquad (j < i)$$

Interprétons ce résultat. La loi $\Phi_\tau(\lambda) = e^{-\tau\psi(\lambda)}$ étant indéfiniment divisible, il existe un processus $T(\tau), \tau \geq 0$ à accroissements indépendants et stationnaires tel que

$$E(e^{-\lambda T(\tau)}) = e^{-\tau\psi(\lambda)}$$

Pour un s donné, le processus $Y^s(t)$ admet la matrice de transition

$$P_{ij}^s(t) = \sum_n e^{-\lambda_n t} \frac{H_n^s(i)\, H_n^s(j)}{\| H_n^s \|^2} W_j(s)$$

et le <u>processus subordonné</u> (au sens de P. Lévy) $Y^s(T_\tau)$ admet la matrice de transition

$$\tilde{P}_{ij}^s(\tau) = E(P_{ij}^s(T_\tau)) = \sum_n e^{-\tau\psi(\lambda_n)} \frac{H_n^s(i)\, H_n^s(j)}{\| H_n^s \|^2} W_j(s)$$

Le générateur infinitésimal $\tilde{A}_{ij}^s$ de ce processus subordonné admet donc les mêmes fonctions propres H_n^s que le processus $Y^s(t)$, avec comme valeurs propres $-\psi(\lambda_n)$ au lieu de $-\lambda_n$. On peut écrire symboliquement

$$\tilde{A}^s = \psi(A^s)$$

et explicitement

$$\tilde{A}_{ij}^s = \int_0^\infty \frac{P_{ij}^s(t) - P_{ij}^s(o)}{t} K(dt)$$

où K est la mesure canonique associée au processus $T(\tau)$. Mais ce qui nous importe ici c'est que les H_n^s sont des facteurs pour $\tilde{A}_{ij}^s$, c'est-à-dire

$$\tilde{A}_{ij}^s = - \sum_n \psi(\lambda_n) \frac{H_n^s(i)\, H_n^s(j)}{\| H_n^s \|^2} W_j(s)$$

Comparant à (24), nous concluons :

$$B_{ij}(s) = \tilde{A}_{ij}^s \qquad \text{pour } i > j$$

Comme $\tilde{A}_{ij}^s$ est un générateur infinitésimal, cela entraine $B_{ij}(s) \geq 0$ pour $i > j$, et achève la démonstration.

-REMARQUE- Le générateur $B_{ij}(s)$ du processus non homogène $X(s)$ qui décrit le changement de support apparait pour chaque s donné comme la "partie négative" du générateur $\tilde{A}^s_{ij}$ du processus $Y^s(T_T)$ subordonné à $Y^s(t)$. Explicitement :

$$(25) \qquad \begin{cases} B_{ij}(s) = \tilde{A}^s_{ij} & \text{pour } i > j \\ B_{ii}(s) = -\sum_{j>i} \tilde{A}_{ij}(s) & \\ B_{ij}(s) = 0 & \text{pour } j > i \end{cases}$$

Tout se passe en somme comme si l'on interdisait les transitions positives. Mais il faut bien voir que le générateur $B(s)$ varie avec s.

4. 3 - LOI D'EVOLUTION DES GENERATEURS B (s) ET A (s)

Partons de la relation

$$(26) \qquad H^s_n = \Pi(s,s')\, H^{s'}_n$$

et multiplions par $-\psi(\lambda_n)$. Comme on a pour tout $s'' < s_{Max}$

$$-\psi(\lambda_n)\, H^{s''}_n = \tilde{A}(s'')\, H^{s''}_n$$

il en résulte

$$\tilde{A}(s)\, H^s_n = \Pi(s,s')\, \tilde{A}(s')\, H^{s'}_n$$

et donc $\tilde{A}(s)\, \Pi(s,s')\, H^{s'}_n = \Pi(s,s')\, \tilde{A}(s')\, H^{s'}_n$ pour tout n : comme les $H^{s'}_n$ forment un système complet, il en résulte :

$$\tilde{A}(s)\, \Pi(s,s') = \Pi(s,s')\, \tilde{A}(s')$$

Dérivant en s avant de faire $s' = s$, nous trouvons

$$(27) \qquad \frac{d\tilde{A}(s)}{ds} = B(s)\, \tilde{A}(s) - \tilde{A}(s)\, B(s)$$

Compte tenu des relations (25) entre $\tilde{A}(s)$ et $B(s)$, cette relation détermine l'évolution de

$A(s)$ et $B(s)$ en fonction de s.

De la même façon, en multipliant (26) par $-\lambda_n$, au lieu de $-\ \psi(\lambda_n)$, on fera apparaitre le générateur $A(s)$ lui-même au lieu de $\tilde{A} = \psi\,(A(s))$. On obtient ainsi la relation de commutation :

$$A(s)\ \pi(s,s') = \pi(s,s')\ A(s')$$

et l'équation d'évolution du générateur $A(s)$:

$$\frac{d\,A(s)}{ds} = B(s)\ A(s) - A(s)\ B(s) \tag{28}$$

Rappelons que A et $\tilde{A}$ sont liés par la relation :

$$\tilde{A}(s) = \int_0^{\infty} \frac{e^{tA(s)} - I}{t}\ K(dt)$$

-REMARQUE- Il serait très difficile de résoudre directement les équations d'évolution ci-dessus, c'est-à-dire en fait le système (22'), (25), (27). Mais en pratique on n'aura jamais à le faire : la construction des polynomes Q_i^s orthogonaux pour $u_n(s)$, conformément à la technique du paragraphe 2, conduira directement à la solution.

4. 4 - RESUME

Résumons ce qui précède. Partant d'un processus de diffusion $Y(t)$, caractérisé par son générateur A, c'est-à-dire par son spectre $\{\lambda_n\}$ et sa mesure spectrale u_n, nous nous donnons pour chaque $s < s_{Max}$ une nouvelle mesure spectrale $u_n(s)$ sur le même spectre $\{\lambda_n\}$, définie par

$$\frac{u_n(s)}{u_o(s)} = \frac{u_n}{u_o}\ e^{s\,\psi(\lambda_n)}$$

où $e^{-s\,\psi(\lambda)}$ est la transformée de Laplace d'une loi indéfiniment divisible $G_s(dt)$. La limitation s_{Max} vient de ce que pour s trop grand il peut ne plus exister de système complet de polynomes orthogonaux pour $u_n(s)$. Dans le cas fini, $s_{Max} = \infty$. Comme $u_o(s) = W_o(s)$, on peut choisir s de manière à avoir une valeur donnée d'avance pour $W_o(s)$. On forme ensuite le système Q_i^s des polynomes orthogonaux pour $u_n(s)$, normés par la condition $Q_i^s(o) = 1$, et on prend $H_n^s(i) = Q_i^s(\lambda_n)$: les H_n^s sont les facteurs d'un nouveau processus de diffusion dont on sait calculer le générateur $A(s)$, et les valeurs propres $-\lambda_n$ sont inchangées. La matrice $\pi_{ij}(s)$ définie par

$$\pi_{ij}(s) = \sum_n H_n^s(i)\ \frac{H_n(j)}{\|H_n\|^2}\ W_j$$

est alors une <u>matrice stochastique</u>, avec, $\pi_{ij} = 0$ pour $j > i$, et les nouveaux facteurs s'expriment en fonction des anciens par :

$$H_n^s(i) = \sum_{j \leq i} \pi_{ij}(s)\ H_n(j)$$

Aux anamorphoses habituelles près, $\pi_{ij}(s)$ pourra représenter la loi conditionnelle d'un <u>échantillon aléatoire dans un bloc</u>. La loi des blocs est alors :

$$W_i(s) = \frac{u_o(s)}{\|Q_i^s\|^2} = \frac{u_o(s)}{\sum_n u_n(s)\ (H_n^s(i))^2}$$

La <u>loi bivariable de deux échantillons</u> implantés dans le même bloc sera par suite :

$$\begin{cases} \sum_i W_i(s)\ \pi_{ij}(s)\ \pi_{ij'}(s) = W_j\ \tilde{P}_{jj'}(s) \\ \tilde{P}_{jj'}(s) = \int_o^\infty P_{jj'}(t)\ G_s(dt) = \sum_n e^{-s\,\psi(\lambda_n)}\ \dfrac{H_n(i)\ H_n(j)}{\|H_n\|^2}\ W_j \end{cases}$$

de sorte que la matrice π réalise la <u>factorisation</u> de $\tilde{P}$. On a :

$$\tilde{P} = \pi'\ \pi$$

avec $\pi'_{ik} = W_k(s)\ \pi_{ki}/W_i$.

Le paramètre s représente, en somme, <u>l'amplitude du changement de support</u>. On le détermine de manière à obtenir pour les blocs V la variance correcte σ_V^2. Plus précisément, si l'anamorphose est $\varphi_v(j)$ pour les échantillons v (loi W_j), l'anamorphose $\varphi_V(i)$ pour les blocs V (loi $W_i(s)$) est donnée par la condition de Cartier :

$$\varphi_V(i) = \sum_j \pi_{ij}(s)\ \varphi_v(j)$$

Il sera en général commode d'utiliser le développement de φ_v en facteurs H_n :

$$\varphi_v(i) = \sum C_n \frac{H_n(i)}{\|H_n\|^2}$$

On aura alors simplement

$$\varphi_V(i) = \sum C_n \frac{H_n^s(i)}{\|H_n\|^2}$$

On prendra garde que c'est la norme $\|H_n\|^2$ des anciens facteurs H_n, et non $\|H_n^s\|^2$ qui figure dans ce développement. Pour la variance, on trouve

$$\sigma_V^2 = \sum_{n>o} C_n^2 \frac{\|H_n^s\|^2}{\|H_n\|^4} = \sum_{n>o} \frac{C_n^2 \, e^{-s\psi(\lambda_n)}}{\|H_n\|^2} .$$

Cette relation permet de choisir s avant de procéder au calcul de la matrice $\Pi_{ij}(s)$.

Pour deux blocs V et V', on a le choix entre plusieurs possibilités . Les deux plus simples consistent à prendre la loi (a) :

(a) $$W_{ij}^{VV'} = \sum_n e^{-\lambda_n t_{VV'}} \frac{H_n^s(i)\, H_n^s(j)}{\|H_n^s\|^2} W_i(s)\, W_j(s)$$

ou la loi (b) :

(b) $$W_{ij}^{VV'} = \sum_n e^{-s_{VV'}\psi(\lambda_n)} \frac{H_n^s(i)\, H_n^s(j)}{\|H_n^s\|^2} W_i(s)\, W_j(s)$$

en choisissant les paramètres $t_{VV'}$ ou $s_{VV'}$ de manière à avoir la covariance correcte. Les lois bivariables pour un échantillon $v \subset V$ et un bloc V', ou pour deux échantillons $v \subset V$ et $v' \subset V'$ s'en déduisent ensuite sans difficulté. Par exemple, pour deux échantillons $v \subset V$ et $v' \subset V'$, on aura dans le cas (a) :

(a) $$W_{ij}^{vv'} = \sum_n e^{-\lambda_n t_{VV'} - s\psi(\lambda_n)} \frac{H_n(i)\, H_n(j)}{\|H_n\|^2} W_i\, W_j$$

et dans le cas (b) :

(b) $$W_{ij}^{VV'} = \sum_n e^{-(s+t_{VV'})\psi(\lambda_n)} \frac{H_n(i)\, H_n(j)}{\|H_n\|^2} W_i\, W_j$$

De même, pour un échantillon $v \subset V$ et un bloc V' :

(a) $$W_{ij}^{V'v} = \sum_n e^{-\lambda_n t_{VV'} - s\psi(\lambda_n)} \frac{H_n^s(i)\, H_n^s(j)}{\|H_n\|^2} W_i(s)\, W_j$$

(b) $$W_{ij}^{V'v} = \sum_n e^{-(s+t_{VV'})\psi(\lambda_n)} \frac{H_n^s(i)\, H_n^s(j)}{\|H_n\|^2} W_i(s)\, W_j$$

Ces modèles se prêtent particulièrement bien aux techniques d'estimation locale par krigeage disjonctif.

Voici un premier exemple.

4. 5 - FACTORISATION DE LA MATRICE P (t) ELLE-MEME

Le théorème précédent s'applique, en particulier, dans le cas $\psi(\lambda) = \lambda$. Dans ce cas, la loi indéfiniment divisible G(s) est un dirac δ_s placé en s, et on a $\tilde{P}_{ij}(s) = P_{ij}(s)$: la loi attribuée à deux échantillons aléatoires dans V coïncide avec la loi de deux échantillons non aléatoires placés à une distance convenable l'un de l'autre. En d'autres termes encore, la <u>matrice</u> $\pi_{ij}(s)$ <u>factorise ici la probabilité de transition</u> $P_{ij}(t)$ <u>du processus Y(t) lui-même</u> : avec

$$\frac{u_n(s)}{u_o(s)} = \frac{u_n}{u_o} e^{\lambda'_n s}$$

on aura $P(s) = \pi'(s)\ \pi(s)$.

Cette circonstance est assez intéressante pour les applications. En effet, dans ce cas, la loi bivariable de deux échantillons v et v' ne subit aucune modification : dans les deux cas (a) et (b) ci-dessus, on trouve simplement

$$W_{ij}^{vv'} = P_{ij}(t) = \sum_n e^{-\lambda_n t} \frac{H_n(i)\ H_n(j)}{\|H_n\|^2} W_i\ W_j$$

On peut dans ce cas <u>conserver les distances fixes réelles entre échantillons</u>, alors qu'en règle générale, en modèle discrétisé, on doit toujours considérer chaque échantillon comme implanté au hasard dans un bloc, et modifier en conséquence les lois bivariables des échantillons.

Concernant les générateurs infinitésimaux, on a ici $\tilde{A}(s) = A(s)$, et B(s), partie négative de A(s) est :

$$B_{ij}(s) = b_i(s)\ [\delta_{i-1,j} - \delta_{ij}]$$

D'&près (22'), la loi d'évolution de la matrice π (s) est donc :

$$\frac{d\ \pi_{ij}(s)}{ds} = b_i(s)[\pi_{i-1,j} - \pi_{ij}]$$

et, d'après (28), on trouve pour le générateur A(s)

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a_i} \dfrac{d\ a_i(s)}{ds} = b_{i+1} - b_i \\ \dfrac{1}{b_i} \dfrac{d\ b_i(s)}{ds} = a_i - a_{i-1} \end{cases}$$

Concernant les probabilités stationnaires, on en déduit pour i > 0 :

$$\frac{1}{W_i(s)} \frac{d W_i}{ds} = b_i - a_i + a_o + \frac{1}{W_o(s)} \frac{d W_o}{ds}$$

Par ailleurs $W_o(s) = u_o(s)$ est déterminé par la condition

$$\frac{1}{u_o(s)} = \sum_n \frac{u_n}{u_o} e^{s\psi(\lambda_n)}$$

d'où l'on tire :

$$\frac{1}{u_o(s)} \frac{d u_o}{ds} = -\sum u_n(s) \quad \lambda_n = -\bar{\lambda}(s)$$

D'autre part

$$H_n^s(1) = Q_1^s(\lambda_n) = 1 - \lambda_n / \bar{\lambda} \text{ , et}$$

$$a_o(s) \; [H_n^s(1) - 1] = - \lambda_n$$

d'où l'on tire

$$a_o(s) = \bar{\lambda}$$

et par suite

$$\frac{1}{W_o} \frac{d W_o}{ds} = - a_o(s)$$

Finalement, pour tout i ≥ 0 :

$$\frac{1}{W_i} \frac{d W_i}{ds} = b_i - a_i$$

Noter bien que l'on n'aura pas à résoudre explicitement ces systèmes différentiels, puisque la construction des polynomes orthogonaux pour $u_n(s)$ conduit directement à la solution.

CHAPITRE 5

FACTORISATION DE LA RESOLVANTE

A titre de deuxième exemple, considérons le cas

$$\psi(\lambda) = \log \left(\frac{\mu}{\mu+\lambda}\right)$$

où μ est un nombre positif donné. La loi indéfiniment divisible G_s a donc pour transformée de Laplace :

$$\Phi_s(\lambda) = \left(\frac{\mu}{\mu+\lambda}\right)^s$$

C'est une loi gamma, de paramètre $\alpha = s$. En fait, nous considérerons uniquement ici le cas où $\alpha = s = 1$, c'est-à-dire le cas où G est la loi exponentielle de densité $\mu \exp(-\mu t)$: nous fixons ainsi le paramètre s du paragraphe précédent, mais, en contre-partie, nous pouvons choisir arbitrairement le paramètre μ : cela suffira pour permettre l'ajustement des lois bivariables (v,V) ou (VV') par l'intermédiaire des variances ou des covariances : moyennant des modifications évidentes, rien d'essentiel ne sera changé dans la construction du modèle isofactoriel présenté ci-dessus.

Avec $\phi(\lambda) = \mu/(\lambda+\mu)$, la loi bivariable $W_i \tilde{P}_{ij}(\mu)$ de deux échantillons aléatoires dans le même bloc V est définie par

$$\tilde{P}_{ij}(\mu) = \int_0^\infty P_{ij}(t)\, \mu\, e^{-\mu t}\, dt = \mu\, R_{ij}(\mu)$$

où $R_{ij}(\mu)$ est <u>la résolvante</u> du processus Y(t) : la matrice $\Pi_{ij}(\mu)$ associée au changement de support va donc réaliser la factorisation de la résolvante du processus : $\mu\, R(\mu) = \Pi'(\mu)\, \Pi(\mu)$. Nous allons voir que le calcul explicite de la matrice Π est toujours possible.

5. 1 - CALCUL DE LA MATRICE Π

Désignons par $u'_n = u_n(\mu)$ la nouvelle mesure spectrale, définie ici par

(29) $$\frac{u'_n}{u'_o} = \frac{u_n}{u_o}\left(\frac{\mu+\lambda_n}{\mu}\right)$$

ou, explicitement, compte tenu de la relation $\sum u_n \lambda_n = a_o$ établie plus haut :

(29') $$u'_n = u_n \frac{\mu+\lambda_n}{\mu+a_o}$$

Exprimons que, pour $i > j$, le nouveau polynome Q'_i est orthogonal à l'ancien polynome pour la nouvelle mesure spectrale u'_n : d'après (29'), cela donne :

$$\sum_n u_n Q'_i(\lambda_n)\, Q_j(\lambda_n) = -\frac{1}{\mu} \sum_n u_n \lambda_n Q'_i(\lambda_n)\, Q_j(\lambda_n)$$

mais on a :

$$-\lambda_n Q_j(\lambda_n) = a_j(Q_{j+1} - Q_j) + b_j(Q_{j-1} - Q_j)$$

puisque $Q_j(\lambda_n) = H_n(j)$ et que H_n est un facteur, et par ailleurs

$$\pi_{ij}(\mu) = \sum_n \frac{u_n}{u_o} Q'_i(\lambda_n)\, Q_j(\lambda_n)\, W_j$$

Il en résulte pour $i > j$, en posant $T_{ij} = \pi_{ij}/W_j$:

(30) $$a_j(T_{i,j+1} - T_{ij}) + b_j(T_{i,j-1} - T_{ij}) = \mu\, T_{ij}$$

Comme $b_o = 0$, ces relations déterminent par récurrence, à un facteur près T_{io}, les T_{ij+1} pour tout $j < i$, c'est-à-dire tous les T_{ij} jusqu'à $j = i$. Nous désignerons par $q_j = q_j(\mu)$ la solution unique de l'équation (30) correspondant à $q_o = 1$, soit, cette fois pour tout $j < N$:

(30') $$a_j(q_{j+1} - q_j) + b_j(q_{j-1} - q_j) = \mu\, q_j$$

$q_j(\mu)$ est <u>un polynome en μ</u>, et, plus précisément, en $\mu = -\lambda_n$, on trouve :

$$q_j(-\lambda_n) = Q_j(\lambda_n) = H_n(j)$$

(Noter que le générateur A n'ayant pas de valeur propre > 0, l'élément q_j n'est pas dans $L^2(N,W)$ dans le cas infini. Et, dans le cas fini, l'équation (30') n'est pas vérifiée pour $j = N$). D'après (30), à un facteur près $T_i = T_{io}$, nous voyons que pour $i \geq j$, les T_{ij} s'identifient aux q_j.
Par suite

(31) $$\pi_{ij} = T_i \, q_j \, W_j \qquad (i \geq j)$$

et le facteur T_i est déterminé par la condition $\sum_j \pi_{ij} = 1$:

(31') $$T_i = \frac{1}{\sum_{j \leq i} W_j \, q_j}$$

Le calcul explicite de la matrice Π_{ij} est donc ici remarquablement facile. C'est l'avantage de ce modèle.

5. 2 – CALCUL DES PROBABILITES W'

Calculons maintenant les W'_i, i.e. la loi des blocs V. Ils constituent l'unique solution de l'équation

$$\sum_{i \geq j} W'_i \, \pi_{ij} = W_j$$

Donc, d'après (31)

$$\sum_{i \geq j} W'_i \, T_i = \frac{1}{q_j}$$

et par suite

(32) $$W'_i = \frac{1}{T_i} \left(\frac{1}{q_i} - \frac{1}{q_{i+1}} \right)$$

D'après (31) et (32), la loi bivariable de l'échantillon et du bloc est donc :

(32') $$W'_i \, \Pi_{ij} = W_j \, \pi'_{ji} = W_j \, q_j \left(\frac{1}{q_i} - \frac{1}{q_{i+1}} \right)$$

Passons maintenant à la factorisation de la résolvante $R_{ij}(\mu)$ ou plutôt de la matrice $\tilde{P}_{ij} = \mu \, R_{ij}$. En désignant par $i \vee j$ le maximum de i et j, on a :

$$\tilde{P}_{ij} = \sum_{k \geq i \vee j} W'_k \, \pi_{ki} \, \pi_{kj}$$

Donc, d'après (31), en posant

$$D_k = \sum_{i \geq k} W'_i \; T^2_k$$

il vient

(33) $$\mu \; R_{ij}(\mu) = \tilde{P}_{ij} = q_i \; q_j \; W_j \; D_{i \vee j}$$

Ces résultats extraordinairement simples recevront dans un instant une interprétation probabiliste. Donnons auparavant l'expression du générateur infinitésimal du nouveau processus, qui est de la forme $A' = a'_i(\delta_{i+1,j} - \delta_{ij}) + b'_i(\delta_{i-1,j} - \delta_{ij})$, avec des coefficients a'_i, b'_i qui permettent le calcul par récurrence des nouveaux facteurs $H'_n(i)$.

5. 3 - LE GENERATEUR A'

Pour cela, partons de la relation de définition :

$$Q'_i = \sum_{j \leq i} \pi_{ij} \; Q_j$$

et multiplions par $-\lambda_n$. Il vient ainsi

$$a'_i(Q'_{i+1} - Q'_i) + b_i(Q'_{i-1} - Q'_i) = \sum_{j \leq i} \pi_{ij} \left(a_j(Q_{j+1} - Q_j) + b_j(Q_{j-1} - Q_j) \right)$$

En remplaçant Q' par πQ dans le premier membre, et en identifiant le coefficient du polynome de degré le plus élevé, qui est Q_{i+1}, on obtient ainsi :

$$a'_i \; \pi_{i+1,i+1} = a_i \; \pi_{ii}$$

Compte tenu de $a'_i \; W'_i = b'_{i+1} \; W'_{i+1}$, on en déduit

(34) $$\begin{cases} a'_i = a_i \dfrac{\pi_{i,i}}{\pi_{i+1,i+1}} \\[2ex] b'_i = \dfrac{W'_{i-1}}{W'_i} \; \dfrac{W_i}{W_{i-1}} \; \dfrac{\pi_{i-1,i-1}}{\pi_{ii}} \; b_i \end{cases}$$

Sous cette forme, ces relations <u>sont générales</u>. Dans le cas présent, compte tenu de (30) et

(31), elles donnent :

$$(34') \quad \begin{cases} a_i' = b_{i+1} \dfrac{T_i\, q_i}{T_{i+1}\, q_{i+1}} \\ b_i' = b_i \dfrac{q_{i+1}}{q_i} \dfrac{q_i - q_{i-1}}{q_{i+1} - q_i} \end{cases}$$

Passons laintenant à l'interprétation de ces résultats.

5. 4 – INTERPRETATION PROBABILISTE

La matrice $\tilde{P}_{ij}(\mu) = \mu\, R_{ij}(\mu)$ représente la loi de $Y(S)$ conditionnelle en $Y(o) = i$, lorsque S est un temps d'arrêt indépendant du processus $Y(t)$ et admettant la loi exponentielle $\mu \exp(-\mu s)$. Interprétons maintenant les polynomes $q_j(\mu)$, solution de (30') avec la condition $q_o = 1$. Pour cela désignons par $T_{j,i}$ $(j \leq i)$ l'instant aléatoire où, partant de j, le processus atteint pour la première fois l'ordonnée i, et posons

$$\varpi_{j,i}(\mu) = E\,[\,e^{-\mu T_{ji}}]$$

avec, évidemment, $\varpi_{ii} = 1$. Comme $T_{ji} = T_{j,j+1} + T_{j+1,i}$ pour $j < i$, et que ces temps d'atteinte successifs sont indépendants, on a

$$\varpi_{ji} = \varpi_{j,j+1}\, \varpi_{j+1\ j+2} \cdots \varpi_{i-1\ i}$$

On notera aussi que $\varpi_{ji}(\mu)$ est la probabilité pour que le processus atteigne i avant le temps d'arrêt S :

$$\varpi_{ji}(\mu) = P(T_{ji} < S)$$

En raisonnant sur le premier changement d'état survenant après l'instant initial, on voit que, pour tout $j < i$, les $\varpi_{ji}(\mu)$ vérifient la relation

$$\varpi_{ji} = \frac{1}{a_j + b_j + \mu} \left(a_j\, \varpi_{j+1,i} + b_j\, \varpi_{j-1,i}\right)$$

soit :

$$a_j(\varpi_{j+1,i} - \varpi_j) + b_j(\varpi_{j-1,i} - \varpi_j) = \mu\, \varpi_{ji} \qquad (j < i)$$

Comparant avec (30'), et compte tenu de la condition $\varpi_{ii} = 1$, on en déduit :

(35) $$\varpi_{ji}(\mu) = \frac{q_j(\mu)}{q_i(\mu)}$$

Interprétons maintenant <u>la loi bivariable</u> (32'). Pour cela, désignons par X <u>la valeur maximale atteinte par le processus Y(t) entre l'instant t = 0 et le temps d'arrêt S</u> :

$$X = \operatorname{Sup} \{Y(t),\ 0 \leq t < S\}$$

D'après ce qui précède, on a pour tout $i \geq j$:

$$P(X \geq i | Y(o) = j) = \varpi_{ji}(\mu) = \frac{q_j}{q_i}$$

et donc

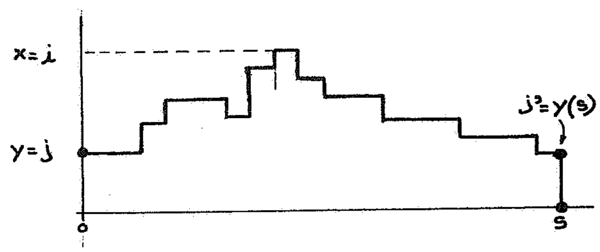
$$P(X = i | Y(o) = j) = q_j \left(\frac{1}{q_i} - \frac{1}{q_{i+1}} \right)$$

D'après (32'), cette probabilité coïncide avec $\pi_{ji}(\mu)$. Autrement dit, on a

$$P(X = i,\ Y = j) = W_j \pi'_{ji} = W'_i \Pi_{ij}$$

<u>Notre loi bivariable est donc celle du couple (X,Y), où X est le maximum de Y(t) entre t = 0 et le temps d'arrêt S</u>, et Y = Y(o).

Interprétons maintenant la factorisation de la résolvante.



Pour cela, cherchons la loi à <u>trois variables</u> $(Y_o, X, Y(S))$. Plaçons-nous conditionnellement dans l'hypothèse $X \geq k$ pour un k supérieur à la valeur initiale $Y(o) = j$: ce qui a lieu avec la probabilité

$$P(X \geq k | Y_o = j) = \frac{q_j}{q_k} \qquad (k \geq j)$$

Le processus ayant atteint l'ordonnée k en un instant T_{jk} antérieur à S, on sait (d'après la propriété markovienne forte du processus et l'absence de mémoire de la loi exponentielle) que le temps résiduel $S' = S - T_{jk}$ est, à nouveau, une variable à loi exponentielle indépendante du passé. On en déduit aussitôt, toujours pour $k \geq j$:

$$P(X \geq k,\ Y(s) = j' | Y_o = j) = \frac{q_j}{q_k}\ \mu\, R_{kj'}(\mu)$$

et par conséquent, pour $i \geq j \vee j'$:

$$P(Y_o = j,\ X = i,\ Y(s) = j') = W_j\ q_j\ \mu\left(\frac{R_{ij'}}{q_i} - \frac{R_{i+1,j'}}{q_{i+1}}\right)$$

Maintenant, partant d'un état $j' \leq i$, le processus ne peut être en i en un temps t donné qu'après avoir atteint une première fois l'état i. On en déduit :

$$R_{j'i} = \varpi_{j'i}\ R_{ii} = \frac{q_{j'}}{q_i}\ R_{ii}$$

D'autre part, on sait que la matrice $W_j,\ R_{j'i}$ est <u>symétrique</u>, soit

$$R_{ij'} = \frac{W_{j'}}{W_i}\ R_{j'i} = \frac{W_{j'}}{W_i}\ \frac{q_{j'}}{q_i}\ R_{ii}$$

Notre loi trivariable s'écrit donc, toujours pour $i \geq j \vee j'$:

$$(36)\quad \begin{cases} P(Y_o = j,\ X = i,\ Y(S) = j') = W_j\ q_j\ W_{j'}\ q_{j'}\ U_i & (i \geq j \vee j') \\[2ex] U_i = \dfrac{R_{ii}}{W_i\ q_i} - \dfrac{R_{i+1,i+1}}{W_{i+1}\ q_{i+1}} \end{cases}$$

En particulier, Y_o et $Y(S)$ sont <u>conditionnellement indépendants</u> à $X = i$ fixé. On en déduit aussitôt que <u>la loi trivariable</u> (36) <u>est identique à la loi trivariable</u> $W'_i\ \Pi_{ij}\ \Pi_{ij'}$ de notre modèle :

$$W_j\ q_j\ W_{j'}\ q_{j'}\ U_i = W'_i\ \Pi_{ij}\ \Pi_{ij'}$$

donc, d'après (31)

$$U_i = W'_i\ T_i^2$$

et l'on retrouve ainsi la factorisation (33) avec

$$D_i = \sum_{k \geq i} W'_k\ T_k^2 = \frac{R_{ii}}{W_i\ q_i}$$

<u>En résumé, dans le modèle précédent la loi à trois variables : X pour le panneau V, Y et Y' pour deux échantillons v, v' aléatoires dans V coïncide avec la loi à 3 variables $Y = Y(o)$, $Y' = Y(S)$ et $X = \mathrm{Sup}\ (Y(t),\ 0 \leq t < S)$, où S est un temps d'arrêt de loi exponentielle.</u>

CHAPITRE 6

PROPRIETES SPECIALES AU CAS FINI

Dans le cas fini $i \leq N$, certaines propriétés particulières apparaissent. Les unes sont des relations simples, qui peuvent en particulier servir de critères de vérification, particulièrement précieux compte tenu de l'accumulation des erreurs d'arrondi qui risque de se produire lors du calcul numérique des polynomes orthogonaux $Q_i^!$. Les autres permettent de former de nouveaux modèles à partir de modèles donnés grâce à la transformation simple $n \rightarrow N-n$.

6. 1 – LA RELATION $\tilde{P}_{NJ} = \Pi_{NJ}$

Voici un exemple simple de propriétés pouvant servir de critère : dans la factorisation $\tilde{P} = \Pi' \Pi$ prenons comme indice de départ l'indice maximal $i = N$:

$$\tilde{P}_{NJ} = \sum_i \Pi'_{Ni} \, \Pi_{iJ}$$

Mais on a $\Pi'_{Ji} = 0$ pour $i < J$ (la variable de bloc est toujours p.s. supérieure ou égale à la variable d'échantillon). Donc $\Pi'_{Ni} = 0$ pour $i < N$ et $\Pi'_{NN} = 1$. Par suite

$$\tilde{P}_{NJ} = \Pi_{NJ} \tag{37}$$

6. 2 – LES MATRICES DE STIRLING

Rappelons la définition de ces matrices, utiles dans le cas fini comme dans le cas infini. Etant donnée une suite $\lambda_o, \lambda_1 \ldots$ finie ou non, désignons par $[\lambda]_k$ le polynome de degré k défini par

$$\begin{cases} [\lambda]_k = (\lambda - \lambda_o)(\lambda - \lambda_1) - (\lambda - \lambda_{k-1}) & (k > 0) \\ [\lambda]_o = 1 \end{cases} \tag{38}$$

La matrice constituée par les $[\lambda_n]_k$ présentera un grand intérêt. C'est une matrice triangulaire :

$$[\lambda_n]_k = 0 \qquad \text{pour} \quad k > n$$

Considérons maintenant l'identité algébrique :

$$\prod_{k=o}^{n} \frac{1}{\lambda-\lambda_k} = \sum_{k=o}^{n} \frac{L_k^n}{\lambda-\lambda_k}$$

avec

$$L_k^n = \prod_{\substack{p=o \\ p\neq k}}^{n} \frac{1}{\lambda_k-\lambda_p} \qquad (k \leq n)$$

Nous complèterons la définition de la matrice L_k^n en posant

$$L_k^n = 0 \qquad \text{pour} \quad k > n$$

Maintenant, pour tout $p \leq n$, on obtient aussi :

$$\prod_{k=p}^{n} \frac{1}{\lambda-\lambda_k} = \sum_{k=p}^{n} \frac{[\lambda_k]_p \, L_k^n}{\lambda-\lambda_k}$$

Noter que, dans le second membre, on peut étendre la sommation de $k = 0$ à ∞ , puisque l'un des facteurs est nul pour $k < p$ et l'autre pour $k > n$. Multipliant membre à membre par λ et faisant tendre ensuite λ vers $+ \infty$, il vient immédiatement :

(39) $$\sum_k [\lambda_k]_p \; L_k^n = \delta_p^n$$

Cette relation est vraie dans le cas fini ($k, p, n \leq N$) comme dans le cas infini, de sorte que la relation réciproque :

(39') $$\sum_p [\lambda_k]_p \; L_{k'}^p = \delta_{kk'}$$

vraie dans le cas fini, subsiste aussi dans le cas infini, puisqu'il n'y a jamais qu'un nombre fini de termes non nuls au premier membre.

Ces matrices nous seront très utiles pour étudier les modèles polynomiaux. Voyons tout de suite une application au cas fini, qui conduit à un critère simple de vérification numérique.

6. 3 - LE POLYNOME DE DEGRE MAXIMAL $Q_N(\lambda_n)$

D'après (39), dans le cas fini, le vecteur de composantes $v = L_n^N$ est orthogonal à tous les polynomes de degré < N, et tout autre vecteur orthogonal aux polynomes de degré < N sera proportionnel à $u_n = L_n^N$. Donc, si u_n est une mesure spectrale quelconque sur $\{\lambda_n\}$, la relation d'orthogonalité

$$\sum_n u_n \, Q_N(\lambda_n) \, Q_k(\lambda_n) = 0 \qquad (k < N)$$

entraine $u_n \, Q_N(\lambda_n) = C \, L_n^N$, et donc, puisque Q(o) = 1 :

$$Q_N(\lambda_n) = H_n(N) = \frac{u_o}{u_n} \, \frac{(-1)^N}{\lambda_o \, \lambda_1 \ldots \lambda_N} \, L_n^N \tag{40}$$

Comme il n'est pas difficile de calculer L_n^N , cette relation fournit un excellent critère numérique. Pour une autre mesure spectrale u'_n , par exemple :

$$\frac{u'_n}{u'_o} = \frac{u_n}{u_o} \, e^{s\,\phi(\lambda_n)}$$

Cette relation nous donne :

$$H'_n(N) = H_n(N) \, e^{-s\,\phi(\lambda_n)} \tag{40'}$$

d'où un autre critère particulièrement simple.

6. 4 - LA TRANSFORMATION $n \to N - n$

Soit u_n une mesure spectrale sur un spectre fini que l'on peut toujours supposer rangé en ordre croissant $\lambda_o = 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_N$. La transformation $n \to N-n$ revient à considérer la mesure :

$$u'_n = u_{N-n} \quad \text{sur le spectre} \quad \lambda'_n = \lambda_N - \lambda_{N-n}$$

Si les Q_i sont les polynomes orthogonaux pour u_n, normés par $Q_i(o) = 1$, les $Q_i(\lambda_N - \lambda'_n)$ sont orthogonaux pour u'_n , et de degré i en λ'_n. La condition $Q'_i(o) = 1$ donne donc simplement

$$Q'_i(\lambda'_n) = \frac{Q_i(\lambda_N - \lambda'_n)}{Q_i(\lambda_N)} = \frac{Q_i(\lambda_{N-n})}{Q_i(\lambda_N)}$$

c'est-à-dire, en termes de facteurs :

$$H'_n(i) = \frac{H_{N-n}(i)}{H_N(i)} \tag{41}$$

Il en résulte aussitôt que les nouvelles probabilités W'_i , pour lesquelles les $H'_n(i)$ doivent être orthogonaux, sont données par

$$W'_i = \frac{W_i(H_N(i))^2}{\|H_N\|^2} \tag{41'}$$

La matrice markovienne

$$P_{ij}(t) = \sum_n e^{-\lambda_n t} \frac{H_n(i)\, H_n(j)}{\|H_n\|^2} W_j$$

a maintenant pour homologue la matrice markovienne :

$$P'_{ij}(t) = \sum_n e^{-\lambda'_n t} \frac{H'_n(i)\, H'_n(j)}{\|H'_n\|^2} W'_j$$

Or, nous avons $\lambda'_n = \lambda_N - \lambda_{N-n}$, et les relations (41) et (41') permettent d'exprimer P'_{ij} en fonction des anciens facteurs. Pour les nouvelles normes, on trouve sans peine

$$\|H'_n\|^2 = \frac{\|H_{N-n}\|^2}{\|H_N\|^2}$$

Il vient ainsi :

$$P'_{ij}(t) = \sum_n e^{-(\lambda_N - \lambda_n)t} \frac{H_n(i)\, H_n(j)}{\|H_N\|^2} \frac{H_N(j)\, W_j}{H_N(i)}$$

Donc, en introduisant la matrice $P_{ij}(-t)$, <u>inverse</u> de $P_{ij}(t)$, qui existe toujours dans le cas fini et a pour expression :

$$P_{ij}(-t) = \sum_n e^{\lambda_n t} \frac{H_n(i)\, H_n(j)}{\|H_n\|^2} W_j$$

il vient la relation très simple :

$$P'_{ij}(t) = e^{-\lambda_N t} \frac{H_N(j)}{H_N(i)} P_{ij}(-t) \tag{42}$$

Ainsi, la matrice inverse $P_{ij}(-t)$, qui n'est évidemment pas stochastique, ne diffère que par un facteur simple de la matrice markovienne $P'_{ij}(t)$.

Pour obtenir le nouveau <u>générateur infinitésimal</u>

$$A'_{ij} = a'_i(\delta_{i+1,j} - \delta_{ij}) + b'_i(\delta_{i-1,j} - \delta_{ij})$$

il suffit de dériver (42) et de faire $t = 0$. On trouve ainsi :

$$A'_{ij} = \frac{H_N(j)}{H_N(i)} \; (-\lambda_N \, \delta_{ij} - A_{ij})$$

et sous forme explicite :

(42')
$$a'_i = - \frac{H_N(i+1)}{H_n(i)} \, a_i \quad ; \quad b'_i = - \frac{H_N(i-1)}{H_N(i)} \, b_i$$

avec

(42")
$$a'_i + b'_i = \lambda_N - (a_i + b_i)$$

Noter que $H_N(i) = Q_i(\lambda_N)$ a toujours le signe de $(-1)^i$, d'après les propriétés des polynomes orthogonaux, de sorte que a'_i et b'_i sont positifs, comme il se doit. La relation (42"), obtenue en faisant $i = j$ dans l'expression de A'_{ij}, est aussi une simple conséquence de $A \, H_N = - \lambda_N \, H_N$. Elle entraine l'inégalité :

$$a_i + b_i < \lambda_N \qquad (\forall \, i \leq N)$$

Le nouveau modèle obtenu par la transformation $n \rightarrow N-n$ n'est, en général, nullement trivial. Nous verrons, par exemple, dans l'étude des modèles polynomiaux, que cette transformation échange les processus de types "Jacobi" et "Anti-Jacobi".

CHAPITRE 7

LES MODELES POLYNOMIAUX (AU SENS LARGE)

Comme nous l'avons vu, pour tout processus de diffusion discrète à spectre discret, la valeur en n, à i fixé, des facteurs $H_n(i)$ apparait comme un polynome en λ_n. il n'en résulte évidemmant pas, en général, qu'à n fixé $H_n(i)$ soit un polynome en i. Nous dirons qu'il s'agit d'un modèle polynomial au sens strict si, pour chaque n, $H_n(i)$ est un polynome de degré n en i. Plus généralement, au lieu de la suite naturelle i = 0, 1, 2..., on peut considérer une suite μ_o, μ_1... Nous supposerons essentiellement $\mu_o = 0$ et $\mu_i > 0$ pour $i > 0$. Nous dirons alors que le modèle est <u>polynomial au sens large</u> si, pour tout n fixé, $H_n(i)$ est un polynome de degré n en μ_i. Nous verrons dans un instant qu'il existe effectivement des modèles polynomiaux au sens large, et aussi au sens strict. Dans ce paragraphe, nous essayerons de dégager quelques propriétés générales des modèles polynomiaux au sens large.

7. 1 - LE PROCESSUS SPECTRAL

La propriété caractéristique des modèles polynomiaux est l'existence d'un processus de diffusion discrète, appelé <u>processus spectral</u> admettant les valeurs propres $-\mu_i$, i = 0, 1, 2..., la fonction propre associée à chaque μ_i étant la fonction $n \to H_n(i) = Q_i(\lambda_n)$. De fait, pour tout modèle polynomial , les fonctions H_n constituent, par hypothèse, un système complet de polynomes en μ_i orthogonaux pour W_i. D'après le paragraphe 2, et en échangeant les rôles des variables i et n, W_i et u_n etc..., on a donc une relation de récurrence de la forme

(43) $$A_n\,[H_{n+1}(i) - H_n(i)] + B_n\,[H_{n-1}(i) - H_n(i)] = -\mu_i\, H_n(i)$$

avec $$B_o = 0,\ B_n > 0 \quad \text{pour} \quad 0 < n \leq N$$

$$A_N = 0,\ A_n > 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leq n < N$$

Il existe donc un processus de diffusion discrete agissant sur la variable spectrale n et admettant le générateur

$$A_n(\delta_{n+1,m} - \delta_{nm}) + B_n(\delta_{n-1,m} - \delta_{n,m})$$

le spectre discret $\{\mu_i\}$, $i = 0,1\ldots$ et, pour chaque valeur propre $-\mu_i$, la fonction propre $n \to Q_i(\lambda_n) = H_n(i)$. Nous savons d'entrée de jeu que la probabilité stationnaire de ce processus spectral est $u = \{u_n\}$, puisque les u_n constituent l'unique probabilité pour laquelle les $Q_i(\lambda_n)$ forment un système complet orthogonal. Il en résulte en particulier :

(44) $$A_n\, u_n = B_{n+1}\, u_{n+1}$$

où, ce qui revient au même

(44') $$A_n \, \| H_{n+1} \|^2 = B_n \, \| H_n \|^2$$

Nous pouvons résumer cette dualité sous forme de tableau :

	Processus direct	Processus spectral
Générateur	a_i , b_i	A_n , B_n
Spectre	λ_n	μ_i
Probabilité Stationnaire	W_i	u_n
Facteurs	$i \to H_n(i) = Q_i(\lambda_n)$	$n \to Q_i(\lambda_n) = H_n(i)$
Normes	$\| H_n \|^2 = \frac{u_o}{u_n} = \frac{W_o}{u_n}$	$\| Q_i \|^2 = \frac{W_o}{W_i} = \frac{u_o}{W_i}$

7. 2 - FORME GENERALE DES FACTEURS

Il sera commode d'introduire la matrice $[\lambda_n]_k$ et son inverse L_k^n , formées comme au paragraphe 6-2 à partir de la suite $\lambda_o = 0$, λ_1, λ_2 ..., ainsi que les matrices analogues $[\mu_i]_k$ et son inverse M_k^i formées de la même façon à partir de la suite réciproque $\mu_o = 0$, μ_1, μ_2 ... Ces notations sont valables dans le cas fini (i et $n \leq N$) comme dans le cas infini. Nous avons alors un premier résultat essentiel :

Pour tout modèle polynomial au sens large, les facteurs $H_n(i) = Q_i(\lambda_n)$ sont de la forme :

(45) $$H_n(i) = \sum_k T_k \, [\lambda_n]_k \, [\mu_i]_k$$

En effet, représentant un polynome en μ_i à n fixé et un polynome en λ_n à i fixé, l'expression $H_n(i)$ est nécessairement de la forme

$$H_n(i) = \sum_{k,p} T_{k,p} [\lambda_n]_k [\mu_i]_p$$

Mais, pour n donné, le polynome $H_n(i)$ est de degré n en μ_i. On a donc $T_{kp} [\lambda_n]_k = 0$ pour $p > n$. Comme $[\lambda_n]_k$ est nul si et seulement si $k > n$, la relation $p > n \geq k$ entraine $T_{kp} = 0$. En particulier, $T_{kp} = 0$ pour $k < p$. Mais, de la même manière, en exprimant qu'à i fixé, $H_n(i)$ est un polynome de degré i en n, on trouve $T_{kp} = 0$ pour $p < k$. Donc $T_{kp} = 0$ pour $k \neq p$, et la relation (45) en découle.

Maintenant, la matrice $H_n(i)$ admet comme inverse la matrice $H_n(i)\ W_i / \|H_n\|^2$. Comme l'inverse de $[\lambda_n]_k$ est L_k^n et que celui de $[\mu_i]_k$ est M_k^i, il en résulte :

$$\frac{H_n(i)\ W_i}{\|H_n\|^2} = \frac{Q_i(\lambda_n)\ u_n}{\|Q_i\|^2} = \sum_k \frac{1}{T_k} L_n^k M_i^k \tag{45'}$$

Avec n = 0 et i = 0, on en déduit en particulier :

$$W_i = \sum_k \frac{(-1)^k}{T_k} \frac{M_i^k}{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_k} \tag{46}$$

$$u_n = \sum_k \frac{(-1)^k}{T_k} \frac{L_n^k}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k} \tag{46'}$$

De même, L_n^k étant l'inverse de $[\lambda_n]_k$, on déduit de (45)

$$[\mu_i]_k = \frac{1}{T_k} \sum_n L_n^k H_n(i)$$

Puis, multipliant par W_i et sommant en i, il vient

$$\sum_i W_i [\mu_i]_k = \frac{L_o^k}{T_k}$$

et, par dualité, une relation analogue en $[\lambda_n]_k$, soit :

$$\sum_i W_i [\mu_i]_k = \frac{(-1)^k}{T_k} \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_k} \tag{47}$$

$$\sum_n u_n [\lambda_n]_k = \frac{(-1)^k}{T_k} \frac{1}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k} \tag{47'}$$

Posant $E([\mu]_k) = \sum_i W_i [\mu_i]_k$ (moment factoriel des μ_i) il résulte de (46) et (47) :

(47")
$$W_i = \sum_k M_i^k \; E([\mu]_k)$$

Cette relation (47") est d'ailleurs vraie pour toute loi discrète W, et toute suite μ_i telle que les moments factoriels $E[\mu]_k$ existent. Par contre les relations (46) et (47) ne sont vraies séparément, en général, que pour les modèles polynomiaux au sens large.

7. 3 LES GENERATEURS $-(a_i, b_i)$ ET (A_n, B_n)

Nous allons maintenant établir une relation entre les coefficients T_k du développement (45) et les générateurs des deux processus. Multiplions membre à membre par $-\lambda_n$ la relation (45). Comme $-\lambda_n H_n = A H_n$, on trouve d'abord :

$$-\lambda_n H_n(i) = \sum_k T_k [\lambda_n]_k \left(a_i [\mu_{i+1}]_k - (a_i+b_i) [\mu_i]_k + b_i [\mu_{i-1}]_k\right)$$

Mais d'autre part on a

$$\lambda_n [\lambda_n]_k = (\lambda_n - \lambda_k) [\lambda_n]_k + \lambda_k [\lambda_n]_k = [\lambda_n]_{k+1} + \lambda_k [\lambda_n]_k$$

et par suite :

$$-\lambda_n H_n(i) = -\sum_k [\lambda_n]_k \left(\lambda_k T_k [\mu_i]_k + T_{k-1} [\mu_i]_{k-1}\right)$$

En identifiant le coefficient de $[\lambda_n]_k$ dans ces deux expressions de $-\lambda_n H_n(i)$, on obtient donc

(48)
$$a_i([\mu_{i+1}]_k - [\mu_i]_k) + b_i([\mu_{i-1}]_k - [\mu_i]_k) = -\lambda_k [\mu_i]_k - \frac{T_{k-1}}{T_k} [\mu_i]_{k-1}$$

En raisonnant sur le générateur du processus spectral, il vient de même :

(48')
$$A_n([\lambda_{n+1}]_k - [\lambda_n]_k) + B_n([\lambda_{n-1}]_k - [\lambda_n]_k) = -\mu_k [\lambda_n]_k - \frac{T_{k-1}}{T_k} [\lambda_n]_{k-1}$$

De la même façon, partant de l'expression (45') et de la relation

$$b_{i+1} W_{i+1} H_n(i+1) - (a_i+b_i) W_i H_n(i) + a_{i-1} W_{i-1} H_n(i-1) = -\lambda_n W_i H_n(i)$$

on obtient les relations

$$(48'') \quad \begin{cases} b_{i+1}\, M_{i+1}^{k} - (a_i+b_i)\, M_i^k + a_{i-1}\, M_{i-1}^{k} = -\lambda_k\, M_i^k - \dfrac{T_k}{T_{k+1}}\, M_i^{k+1} \\ B_{n+1}\, L_{n+1}^{k} - (A_n+B_n)\, L_n^k + A_{n-1}\, L_{n-1}^{k} = -\mu_k\, L_n^k - \dfrac{T_k}{T_{k+1}}\, L_n^{k+1} \end{cases}$$

Ces relations sont largement surabondates pour déterminer a_i, b_i et μ_i en fonction des λ_n . Par suite, le spectre λ_n d'un processus de type polynomial ne peut pas être quelconque. Il serait intéressant de trouver la condition nécessaire et suffisante que doit vérifier un spectre pour être associé à un processus polynomial. Nous nous contenterons ci-dessous de quelques exemples.

7. 4 – RELATION ENTRE T_k , a_i ET A_n

En faisant $k = i+1$ dans (48), il reste :

$$a_i\,[\mu_{i+1}]_{i+1} = -\frac{T_i}{T_{i+1}}\,[\mu_i]_i$$

Par suite

$$(49) \quad -\frac{T_k}{T_{k+1}} = a_k\,\frac{[\mu_{k+1}]_{k+1}}{[\mu_k]_k} = A_k\,\frac{[\lambda_{k+1}]_{k+1}}{[\lambda_k]_k}$$

D'autre part, pour $n = 0$, (45) se réduit à :

$$T_o = 1$$

On déduit donc de (49) l''xpression de T_k en fonction des a_i ou des A_n :

$$(49') \quad T_k = \frac{(-1)^k}{[\mu_k]_k}\,\frac{1}{a_o\, a_1 \ldots a_{k-1}} = \frac{(-1)^k}{[\lambda_k]_k}\,\frac{1}{A_o\, A_1 \ldots A_{k-1}}$$

De (46), (49) et (49') résultent :

$$(50) \quad \begin{cases} W_i = \displaystyle\sum_k \frac{a_o\, a_1 \ldots a_{k-1}}{\lambda_1\, \lambda_2 \ldots \lambda_k}\,[\mu_k]_k\, M_i^k \\ u_n = \displaystyle\sum_k \frac{A_o\, A_1 \ldots A_{k-1}}{\mu_1\, \mu_2 \ldots \mu_k}\,[\lambda_n]_k\, M_n^k \end{cases}$$

et de même, d'après (47) :

50')
$$E([\mu]_k) = \frac{a_o\, a_1 \ldots a_{k-1}}{\lambda_1\, \lambda_2 \ldots {}_k}\, [\mu_k]_k$$

7. 5 – PROCESSUS AUTOSPECTRAL

Nous dirons qu'un processus polynomial au sens large est autospectral si l'on a $\lambda_k = \mu_k$ à un facteur constant près. Comme, en fait, on peut multiplier le générateur et les valeurs propres par une même constante (ce qui revient simplement à changer l'unité de temps pour le processus $Y(t)$), on peut toujours se ramener au cas $\lambda_k = \mu_k$. D'après (48) et (48'), si $\lambda_k = \mu_k$, on aura $A_k = a_k$ et $B_k = b_k$, et par suite le processus spectral aura les mêmes facteurs que le processus direct. Mais cela entraine $H_n(i) = H_i(n)$.

Inversement, la relation $H_n(i) = H_i(n)$ montre qu'à n fixé $H_n(i)$ est un polynome de degré n en μ_i (à savoir $H_n(n)$), et donc que le processus est polynomial. Faisant i = 1 dans (45), on obtient ensuite :

$$H_n(1) = H_1(n) = 1 + T_1\, \lambda_n\, \mu_1 = 1 + T_1\, \lambda_1\, \mu_n$$

et donc $\lambda_n = \mu_n$ à un facteur près. D'où le théorème :

Un processus polynomial est autospectral si et seulement si on a pour tout $i, n \leq N$:

(51)
$$H_n(i) = H_i(n)$$

Comme exemple simple de processus autospectraux, citons les processus à lois binomiale, binomiale négative et poissonienne que nous retrouverons dans un instant.

CHAPITRE 8

LES MODELES POLYNOMIAUX (AU SENS STRICT)

Prenons $\mu_i = i$, et cherchons à déterminer la classe des processus à facteurs polynomiaux au sens strict, s'il en existe. Pour $\mu_i = i$, on a :

$$[\mu_i]_k = i(i-1)\ldots(i-k-1) = \binom{i}{k}\ k! \qquad (k \leq i)$$

et de même

$$M_i^k = \frac{(-1)^{k-i}}{i!\ (k-i)!} = (-1)^{k-i}\ \binom{k}{i}/k! \qquad (k \geq i)$$

La relation générale (48) prend alors la forme :

(52) $$a_i + (i+1-k)\left(\frac{\lambda_k}{k} - \frac{b_i}{i}\right) + \frac{S_k}{k} = 0 \qquad (i,k > 0)$$

où on a posé pour abréger

$$S_k = T_{k-1}/T_k$$

En faisant i = 1 dans (52) et en retranchant membre à membre, il vient :

(52') $$a_i - a_1 + (i-1)\ \frac{\lambda_k}{k} - (i+1-k)\ \frac{b_i}{i} + (2-k)\ b_1 = 0$$

Faisant maintenant k = 1 et retranchant membre à membre de cette nouvelle relation, on trouve :

$$\frac{b_i - i\ b_1}{i\ (i-1)} = -\ \frac{(\lambda_k - k\ \lambda_1)}{k\ (k-1)}$$

Cela n'est possible que si la valeur commune des deux membres de cette relation est une constante C. Donc :

(53) $$\begin{cases} b_i = i\ b_1 + C\ i(i-1) \\ \lambda_k = k\ \lambda_1 - C\ k(k-1) \end{cases}$$

Reportant ces valeurs dans (52'), on constate que les termes en k disparaissent, et il vient :

(53') $$a_i = a_1 + (i-1)(b_1-\lambda_1) + C\ i(i-1)$$

Reportant ces résultats dans (52), on constate que les termes en i disparaissent, et il reste, conformément d'ailleurs à la relation générale (49)

(53") $$S_k = \frac{T_{k-1}}{T_k} = -\ k\ a_{k-1}$$

Ainsi, le problème admet des solutions. Selon les valeurs de la constante C qui figure en (53) nous voyons même apparaître trois familles de solutions possibles :

- Pour $C = 0$, on aura $\lambda_k = k\ \lambda_1$. Il s'agit donc de processus autospectraux. Nous verrons qu'il y a des solutions effectives dans le cas fini et dans le cas infini.

- Pour $C \neq 0$, par contre, il ne peut y avoir de solutions que dans le cas fini, puisque b_i et λ_k doivent toutes deux rester positives. Pour $C < 0$, nous aurons les processus du type Jacobi et, pour $C > 0$, les processus du type Antijacobi.

8. 1 - LES PROCESSUS AUTOSPECTRAUX

Avec $C = 0$, les relations (53) deviennent

(54) $$\begin{cases} \lambda_n = n\ \lambda_1 \quad ; \quad \dfrac{T_{k-1}}{T_k} = -\ k\ a_{k-1} \\ a_i = a_1 + (i-1)(b_1-\lambda_1) \\ b_i = i\ b_1 \end{cases}$$

D'après l'expression de a_i, i variera de 0 à l'infini pour $b_1 \geq \lambda_1$. Au contraire, pour $b_1 < \lambda_1$ il ne pourra varier que de 0 à une valeur finie N. D'où trois types de solutions :

a/ Les processus à loi binomiale négative : $b_1 > \lambda_1$.

Sans nuire à la généralité, on peut prendre $b_1 = 1$. Cela revient à choisir l'unité de temps. Posons :

$$\lambda_1 = q < 1 \quad ; \quad p = 1 - q$$

Pour a_i, on obtient $a_i = a_1 + (i-1)p$. Mais $a_o = a_1 - p$ doit être > 0. Posant $a_o = \alpha\ p$, il vient :

$$\begin{cases} a_i = (\alpha+i)p & ; \quad b_i = i \\ \lambda_n = n\, q & ; \quad \dfrac{T_{k-1}}{T_k} = -\, k\, a_{k-1} \end{cases}$$

On reconnait le générateur du processus à loi binomiale négative et ses valeurs propres $-\lambda_n = -\, n\, q$, cf. Matheron, 1983. De plus, nous obtenons la valeur du coefficient T_k :

$$T_k = \frac{(-1)^k\, \Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+k)\; p^k\; k!}$$

Noter que l'on a ici $W_k = \dfrac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)}\; \dfrac{q^\alpha\, p^k}{k!}$, et donc

$$T_k = \frac{(-1)^k}{(k!)^2}\; \frac{W_o}{W_k}$$

En reportant ces valeurs dans (45), compte tenu des expressions de $[\mu_i]_k$ et $[\lambda_n]_k$, il vient :

(55) $$H_n(i) = \sum_k (-1)^k\, \frac{W_o}{W_k}\, \binom{n}{k}\binom{i}{k}\, q^k$$

b/ <u>Le processus à loi de Poisson</u> : $b_1 = \lambda_1$

Avec $b_1 = \lambda_1 = 1$ et $a_1 = a$, il vient :

$$\begin{cases} a_i = a & ; \quad b_i = i \\ \lambda_n = n & ; \quad \dfrac{T_{k-1}}{T_k} = -\, a\, k \end{cases}$$

C'est le processus à loi de Poisson $W_i = \dfrac{a^i}{i!}\, e^{-a}$. On trouve :

$$T_k = \frac{(-1)^k}{k!\; a^k} = \frac{(-1)^k}{(k!)^2}\; \frac{W_o}{W_k}$$

et donc

(55') $$H_n(i) = \sum_k (-1)^k\, \frac{W_o}{W_k}\, \binom{n}{k}\binom{i}{k}$$

c/ <u>Le processus à loi binomiale</u> : $b_1 < \lambda_1$

Ici, a_i doit s'annuler pour une valeur finie N. Prenons $\lambda_1 = 1$, $b_1 = q < 1$, $p = 1-q$. On a $a_i = a_o - i\, p$, donc nécessairement $a_i = (N-i)p$. Au total :

$$\begin{cases} a_i = (N-i)p \quad ; \quad b_i = i\,q \\ \lambda_n = n \quad ; \quad \dfrac{T_{k-1}}{T_k} = -\,k\,a_{k-1} \end{cases}$$

il vient

$$T_k = \frac{(-1)^k}{(k!)^2 \binom{N}{k} p^k} = \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \frac{W_o}{W_k\, q^k}$$

et par suite

(55")
$$H_n(i) = \sum_{k=o}^{N} (-1)^k \frac{W_o}{W_k} \binom{n}{k} \binom{i}{k} \frac{1}{q^k}$$

8. 2 – LES PROCESSUS DU TYPE JACOBI

Soit $C < 0$. Sans nuire à la généralité, on peut prendre $C = -1$. D'après (53), on aura

$$\lambda_n = n(n-1 + \lambda_1)$$

D'autre part, d'après (53'), on doit avoir $a_N = 0$ pour une valeur entière N. Posons :

(56)
$$\begin{cases} a_i = (N-i)\ (\alpha+i) \\ b_i = i(N+\beta-i) \end{cases}$$

ce qui, d'après les relations (53), entraine $\lambda_1 = \alpha + \beta$, et donc

(56')
$$\lambda_n = n(n-1 + \alpha + \beta)$$

La loi stationnaire apparaît comme une binomiale randomisée par une loi beta

$$W_i = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\ \Gamma(\beta)} \int_o^1 \binom{N}{i} x^{\alpha+i-1} (1-x)^{\beta+N-i-1}\, dx$$

c'est-à)dire

(57)
$$W_i = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+N)} \frac{\Gamma(\alpha+i)}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(N+\beta-i)}{\Gamma(\beta)} \binom{N}{i}$$

Pour T_k, nous obtenons à l'aide de (49')

(57')
$$T_k = \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+k)} \frac{1}{\binom{N}{k}}$$

Compte tenu de

$$[\lambda_n]_k = \frac{\Gamma(n+k+\alpha+\beta-1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta-1)} \binom{n}{k} k!$$

il vient donc pour <u>les facteurs</u>, ou <u>polynomes discrets de Jacobi</u> :

(57")
$$H_n(i) = \sum_{k=o}^{N} (-1)^k \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+k)} \frac{\Gamma(n+k+\alpha+\beta-1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta-1)} \frac{\binom{n}{k}\binom{i}{k}}{\binom{N}{k}}$$

En ce qui concerne les <u>normes</u> $\|H_n\|^2 = u_o/u_n$, elles se déduiront des probabilités u_n du processus spectral.

d/ <u>Le processus spectral de Jacobi</u>

Cherchons d'abord <u>le générateur</u> du processus spectral. La relation générale (49) nous donne, en premier lieu :

$$A_k = \frac{[\mu_{k+1}]_{k+1}}{[\mu_k]_k} \quad \frac{[\lambda_k]_k}{[\lambda_{k+1}]_{k+1}} \quad a_k = \frac{a_k(k+\alpha+\beta-1)}{(2k+\alpha+\beta)(2k+\alpha+\beta-1)}$$

Pour calculer B_n, le plus simple est d'utiliser la relation (48') écrite avec k = 1, qui donne :

$$A_n(2n+\alpha+\beta) - B_n(2n+\alpha+\beta-2) = -n(n+\alpha+\beta-1) + N\alpha$$

Après des calculs élémentaires, on obtient :

(58)
$$\begin{cases} A_n = \dfrac{(N-n)\ (\alpha+n)\ (\alpha+\beta+n-1)}{(\alpha+\beta+2n)\ (\alpha+\beta+2n-1)} \\[2ex] B_n = \dfrac{n(\beta+n-1)(N+\alpha+\beta+n-1)}{(\alpha+\beta+2n-1)(\alpha+\beta+2n-2)} \end{cases}$$

Par la relation $A_n u_n = B_{n+1} U_{n+1}$, nous trouvons ensuite les u_n/u_o, i.e. les normes $\|H_n\|^2$:

(59)
$$\frac{u_n}{u_o} = \frac{1}{\|H_n\|^2} = \binom{N}{n} \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha+\beta+n)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+n)} \frac{\Gamma(N+\alpha+\beta)}{\Gamma(N+\alpha+\beta+n)} \frac{2n+\alpha+\beta-1}{n+\alpha+\beta-1}$$

D'autre part, on a toujours $u_o = W_o$, d'où, compte tenu de (57) :

(59')
$$u_n = \binom{N}{n} \frac{\Gamma(\beta+N)\ \Gamma(\alpha+n)\ \Gamma(\alpha+\beta+n)}{\Gamma(\beta+n)\ \Gamma(\alpha)\ \Gamma(N+\alpha+\beta+n)} \frac{2n+\alpha+\beta-1}{n+\alpha+\beta-1}$$

Quant aux facteurs du processus spectral, ce sont les fonctions $n \to H_n(i)$, où $H_n(i)$ reste donné par (57'). Le facteur d'ordre i, $Q_i(\lambda_n) = H_n(i)$ est un polynome de degré i en $\lambda_n = n\,(n+\alpha+\beta-1)$, de sorte que le processus spectral fournit le premier exemple d'un processus <u>polynomial au sens large, mais non au sens strict</u>. Les valeurs propres sont évidemment les $-\mu_i = -i$.

8. 3 - LES PROCESSUS DU TYPE ANTI-JACOBI

On obtient cette dernière classe de processus en faisant C = +1 dans les relations (53). Plutôt que de faire les calculs directz, nous allons appliquer au processus de Jacobi du paragraphe précédent la transformation $n \to N-n$ étudiée au paragraphe 6.4. Les nouvelles valeurs propres sont donc :

$$\lambda'_n = \lambda_N - \lambda_{N-n} = n\,(2N + \alpha + \beta - 1 - n)$$

ce qui correspond bien à C = 1 dans la formule (53). Pour obtenir le générateur du nouveau processus, i.e. les coefficients a'_i et b'_i, nous devons utiliser la formule (42'). Notons que $H_n(i)$ est le polynome de degré maximal en i, de sorte que, conformément à la remarque du paragraphe 6-3, nous avons

$$W_i\, H_N(i) = W_o \frac{M_i^N}{M_o^N} = (-1)^i\, W_o \binom{N}{i} \tag{60}$$

et par suite :

$$-\frac{H_N(i+1)}{H_N(i)} = \frac{W_i}{W_{i+1}} \frac{\binom{N}{i+1}}{\binom{N}{i}} = \frac{b_{i+1}}{a_i} \frac{N-i}{i+1}$$

D'après (42'), on obtient ainsi :

$$\begin{cases} a'_i = (N-i)(N+\beta-1-i) \\ b'_i = i(\alpha-1+i) \\ \lambda'_n = n(2N+\alpha+\beta-1-n) \end{cases} \tag{61}$$

ce qui est conforme aux formules (53) et (53'). Pour calculer les probabilités W'_i du processus anti-Jacobi, on utilise (41'), en tenant compte de (51), pour le calcul de $H_N(i)$, et de (59) pour le calcul de $\| H_N \|^2$. Cela donne :

$$W'_i = \frac{\Gamma(\alpha+N)\,\Gamma(\beta+N)\,\Gamma(\alpha+\beta+N-1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2N-1)\,\Gamma(\alpha+i)\,\Gamma(N+\beta-i)} \binom{N}{i} \tag{61'}$$

Les facteurs $H'_n(i)$ du nouveau processus se déduisent ensuite des facteurs $H_n(i)$ du processus de Jacobi (57') à l'aide de la formule générale (41). Compte tenu de (60) et (57), cela donne :

$$H'_n(i) = (-1)^i \frac{\Gamma(\alpha+i)}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(N+\beta-i)}{\Gamma(N+\beta)} H_{N-n}(i) \tag{61''}$$

Concernant, enfin, le processus spectral anti-Jacobi, il se déduit du processus spectral de Jacobi par la transformation élémentaire $n \to N-n$. Par suite, on a simplement

$$u'_n = u_{N-n} \quad ; \quad A'_n = B_{N-n} \quad ; \quad B'_n = A_{N-n}$$

où A_n, B_n et u_n sont données par (58) et (59'). Ce processus spectral constitue un second exemple de processus polynomial au sens large mais non au sens strict, puisque le facteur Q'_i est un polynome de degré i en $\lambda'_n = n\ (2N + \alpha + \beta - 1 - n)$.

8. 4 - PROPRIETES D'EMERGENCE

Si l'on fait tendre vers l'infini les paramètres α et β en maintenant fixes le paramètre N et le rapport $\alpha/(\alpha+\beta)) = p$, il est facile de voir que le processus de Jacobi converge vers le processus binomial (N,p). Comme ce processus limite est autospectral, on prévoit, et on vérifie sans peine que le processus spectral de Jacobi admet la même limite. Comme le processus binomial (N,p) est autospectral, la transformation $n \to N-n$ le change en un processus binomial (N,q). Par suite, on prévoit, et on vérifie sans peine que, dans les mêmes conditions, le processus anti-Jacobi et son processus spectral convergent tous deux vers le processus binomial (N,q).

Mais on peut aussi faire tendre N vers l'infini. On obtient alors les résultats suivants :

- Si N et β tendent vers l'infini, α et le rapport $N/(N+\beta) = p$ restant fixes, le processus de Jacobi et son processus spectral convergent tous deux vers le processus binomial négatif de paramètre (α,p).

- Si l'on fait tendre α, β et N vers l'infini en maintenant fixe le rapport $\alpha\, N/(N+\beta) = a$, le processus de Jacobi et son processus spectral convergent vers le processus à loi poissonienne de paramètre a.

- Par contre, le processus d'Anti-Jacobi et son processus spectral ne convergent pas vers un processus limite, ce qui se conçoit bien, puisque la transformation $n \to N-n$ n'a pas d'équivalent dans le cas infini.

Dans d'autres conditions, on peut obtenir par passage à la limite les trois types de processus de diffusion continue à facteurs polynomiaux :

- Si l'on pose $X(t) = (Y(t) - Np)/\sqrt{N\,p\,q}$, où Y(t) est le processus binomial (N,p), et si l'on fait tendre N vers l'infini, p restant fixe, X(t) converge vers le processus gaussien de diffusion continue, caractérisé par son générateur

$$A\varphi = \varphi'' - x\,\varphi'$$

- Si l'on pose X(t) = q Y(t), où Y(t) est le processus binomial négatif (α,p) et si l'on fait tendre q vers 0 (et donc p vers 1), on obtient pour X(t), à la limite, le processus de diffusion à loi gamma, caractérisé par le générateur :

$$A\varphi = x\,\varphi'' + (\alpha - x)\,\varphi'$$

- Enfin, en posant X(t) = Y(t)/N, où Y(t) est le processus de Jacobi, et en faisant tendre N vers l'infini, α et β restant fixes, on obtient à la limite le processus de diffusion à loi beta (α,β), caractérisé par le générateur

$$A\varphi = x(1-x)\,\varphi'' + (\alpha - (\alpha+\beta)x)\,\varphi'$$

On obtient ainsi tous les modèles de diffusion continue à facteurs polynomiaux. On notera que le processus anti-Jacobi n'admet pas de limite continue.

Concernant le processus spectral de Jacobi, pour N tendant vers l'infini, α et β restant fixes, on obtient à la limite un processus de diffusion discrète dont le générateur est défini par :

$$A_n = \frac{(\alpha+n)\ (\alpha+\beta+n-1)}{(\alpha+\beta+2n)\ (\alpha+\beta+2n-1)}$$

$$B_n = \frac{n(\beta+n-1)}{(\alpha+\beta+2n-1)\ (\alpha+\beta+2n-2)}$$

Mais ce processus n'admet pas de loi stationnaire. Au total, c'est le processus de Jacobi qui semble présenter le plus d'intérêt, puisque tous les modèles autospectraux et tous les processus continus à facteurs polynomiaux s'en déduisent par passage à la limite. Le paragraphe suivant, consacré aux modèles de changement de support, va confirmer cette priorité.

CHAPITRE 9

LES MODELES ISONOMES DE CHANGEMENT DE SUPPORT

Nous avons vu au paragraphe 4 une technique générale permettant de former des modèles de changement de support à l'aide de matrices stochastiques Π_{ij} triangulaires ($\Pi_{ij} = 0$ pour $j > i$) de la forme

(62) $$\Pi_{ij} = \sum_n H'_n(i) \frac{H_n(j)}{\|H_n\|^2} W_j$$

où les H'_n et les H_n sont les facteurs de deux processus de diffusion discrète admettant le même spectre λ_n. En particulier, les nouveaux facteurs se déduisent des anciens par la relation

(62') $$H'_n(i) = E[H_n(j)/i] = \sum_{j \leq i} \Pi_{ij} H_n(j)$$

A i fixé, les $H_n(i)$ et les $H'_n(i)$ sont des polynomes de degré i en λ_n. Mais, en général, à n fixé, $H'_n(i)$ n''st nullement un polynome en μ_i, même si $H_n(i)$ possède déjà cette propriété. D'où la définition suivante :

Dans le cas polynomial (au sens large), c'est-à-dire lorsque les facteurs $H_n(i)$ du processus initial sont des polynomes de degré n en μ_i, nous dirons que le modèle de changement de support défini par la matrice (62) <u>est isonome si les facteurs H'_n du nouveau processus sont encore des polynomes de degré n en</u> μ_i.

Si H_n et H'_n sont des polynomes en μ_i , ils admettent tous deux des développements de la forme (45), avec des coefficients T_k et T'_k respectivement. Si, dans la formule (62), nous remplaçons la matrice $H_n(j)W_j/\|H_n\|^2$ par son expression (45') et $H'_n(i)$ par son développement (45), nous obtenons :

(62") $$\begin{cases} \Pi_{ij} = \sum_k C_k [\mu_i]_k M_j^k \\ C_k = T'_k/T_k \end{cases}$$

Toute matrice stochastique isonome sera de cette forme. La réciproque n'est d'ailleurs vraisemblablement pas vraie´, du fait que les λ_n ont, du moins en apparence, disparu de la formule (62") où ne figurent plus que les μ_i et les coefficients $C_k = T'_k/T_k$. On note que les C_k sont > 0, puisque T_k et T'_k ont le même signe $(-1)^k$. Un problème intéressant serait de trouver, de manière générale, la condition nécessaire et suffisante que doivent vérifier les coefficients C_k pour que la matrice Π_{ij} soit stochastique. Nous nous contenterons ici d'étudier quelques cas particuliers, qui pourront se révéler utiles pour les applications. En particulier, nous nous limitons au cas $\mu_i = i$, c'est-à-dire au cas polynomial strict dont l'inventaire exhaustif a été établi au paragraphe précédent.

On note que, dans le cas polynomial strict $\mu_i = i$, la formule générale (62") des matrices isonomes devient :

(63)
$$\Pi_{ij} = \sum_k \frac{T'_k}{T_k} (-1)^{k-j} \binom{i}{k} \binom{k}{j}$$

La fonction génératrice correspondante, conditionnelle en i, définie par

$$G_i(s) = \sum_j \Pi_{ij} s^j$$

a donc pour expression :

(63')
$$G_i(s) = \sum_k \frac{T'_k}{T_k} (-1)^k \binom{i}{k} (1-s)^k$$

9. 1 - LES MODELES ISONOMES AUTOSPECTRAUX

Examinons d'abord les cas des trois processus autospectraux du paragraphe 8-1. Parmi les techniques du paragraphe 4 figure, en particulier, le changement de mesure spectrale défini par :

$$\frac{u'_n}{u'_o} = \frac{u_n}{u_o} e^{\lambda_n s}$$

Pour les trois processus autospectraux, on a, à un facteur près, $\lambda_n = n$. La nouvelle mesure spectrale est donc, à un facteur constant près, de la forme

$$u'_n = C\, u_n\, \gamma^n$$

avec $\gamma > 1$. Ce changement ne modifie pas la forme de la loi spectrale qui reste, respectivement, binomiale, binomiale négative ou poissonienne. Avec les nouveaux polynomes $Q'_i(\lambda_n)$, les fonctions $i \to H'_n(i) = Q'_i(\lambda_n)$ sont donc encore, à n fixé, des polynomes de degré n en i, et $H'_n(i) = H'_i(n)$. Cela signifie que le nouveau modèle est encore un modèle polynomial du même type que le modèle initial. Autrement dit, il s'agit bien d'un modèle isonome de changement de support. Dans le cas binomial, ou binomial négatif, le seul paramètre modifié est p, qui devient

$$p' > p$$

α ou N demeurant invariant. On note la limitation $p' < 1$.

Dans le cas poissonien, le paramètre a devient $a' > a$, et il n'y a pas de limitation supérieure. S'agissant de processus autospectraux, on a également :

$$W'_i = C\, W_i\, \gamma^i$$

La matrice isonome Π_{ij} est la même dans les trois cas. Elle décrit <u>un processus de décimation</u> : chacune des i particules initialement présentes est conservée avec une probabilité $\varpi = 1/\gamma$, ou tuée avec la probabilité $1 - \varpi$.

En effet, on a ici $T'_k/T_k = (1/\gamma)^k = \varpi^k$, et (63') donne donc

$$G_i(s) = (1-\varpi + \varpi\, s)^i$$

Π_{ij} représente donc la loi binomiale (i,ϖ). D'où l'identité

$$\Pi_{ij} = \sum \varpi^k (-1)^{k-j} \binom{i}{k} \binom{k}{j} = \binom{i}{j} \varpi^j (1-\varpi)^{i-j}$$

Toutefois, cette matrice, qui est isonome dans les trois cas autospectraux, ne semble pas conserver cette propriété vis-à-vis des polynomes de Jacobi.

Dans le cas <u>binomial négatif</u>, un autre modèle isonome de changement de support a été présenté (Matheron, 1983) . Dans le sens échantillon → bloc, il correspond à <u>l'addition</u> de deux binomiales négatives. Dans le sens inverse bloc → échantillon, qui correspond à la loi conditionnelle Π_{ij}, on trouve :

$$\frac{T'_k}{T_k} = \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha'+k)} \frac{\Gamma(\alpha')}{\Gamma(\alpha)} \qquad (\alpha' \geq \alpha)$$

D'où

$$\Pi_{ij} = \frac{\Gamma(\alpha')}{\Gamma(\alpha'+i)} \frac{\Gamma(\alpha+j)}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha'-\alpha+i-j)}{\Gamma(\alpha'-\alpha)} \binom{i}{j} \tag{65}$$

et le développement remarquable

$$\Pi_{ij} = \sum_k \frac{\Gamma(\alpha')}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha'+k)} (-1)^k \binom{i}{k} \binom{k}{j} \tag{65'}$$

Cette loi conditionnelle (65) est du type Jacobi (57), avec le même paramètre α et $N = i$,

$\beta = \bar{\alpha}' - \bar{\alpha}$. Elle se déduit de (64) en randomisant le paramètre ϖ par la loi beta $(\alpha, \alpha'-\alpha)$.

Le modèle (65) revient à augmenter le paramètre α. Dans le cas binomial, on peut de même augmenter le paramètre N (mais par accroissements entiers seulement). Dans le sens échantillon $\rightarrow$ bloc, ce modèle revient à l'addition de deux binomiales ayant le même paramètre p, ce qui donne encore une binomiale avec $N' > N$. Dans le sens inverse, la loi π_{ij} de l'échantillon à $X = i$ fixé sera donc

(66) $$\pi_{ij} = \frac{\binom{N}{j}\binom{N'-N}{i-j}}{\binom{N'}{i}} \qquad (N' \geq N)$$

avec ici encore $T'_k/T_k = W_k/W'_k$, et le développement remarquable :

(66') $$\pi_{ij} = \sum_k \frac{\binom{N}{k}}{\binom{N'}{k}} (-1)^{j-k} \binom{i}{k}\binom{k}{j}$$

Sous forme spectrale, ces modèles correspondent effectivement aux transformations

(65") $$\frac{u'_n}{u'_o} = \frac{u_n}{u_o} \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha')} \frac{\Gamma(\alpha'+n)}{\Gamma(\alpha+n)} \qquad (\alpha' \geq \alpha)$$

(66") $$\frac{u'_n}{u'_o} = \frac{u_n}{u_o} \frac{\binom{N'}{n}}{\binom{N}{n}} \qquad (N' \geq N)$$

Or, en posant $\psi(\lambda) = \frac{\Gamma(\alpha'+\lambda)}{\Gamma(\alpha+\lambda)}$, on peut montrer facilement que $\exp(-t\,\psi(\lambda))$ est la transformée de Laplace d'une loi indéfiniment divisible. Par suite, dans tous les cas où le spectre est $\lambda_n =$ $= n$ (à un facteur constant près), la transformation (65") conduira à un modèle admissible de changement de support. Nous verrons que la transformation (66") possède la même propriété, au moins dans le cas des processus de Jacobi.

9. 2 - CHANGEMENT ISONOME DE SUPPORT POUR LE MODELE DE JACOBI

Nous allons définir deux modèles isonomes de changement de support, valables pour le processus discret de type Jacobi (il ne semble pas en exister pour le type anti-Jacobi). Le premier modèle va consister à augmenter α et, simultanément, à diminuer β, N et la somme $\gamma = \alpha + \beta$ restant constantes. Dans le second modèle, au contraire, N augmentera, α et β restant fixes.

Premier modèle isonome pour Jacobi

Nous prenons ici :

(67) $$\alpha' > \alpha \quad ; \quad \beta' < \beta \; ; \; \alpha + \beta = \alpha' + \beta' = \gamma \quad ; \quad N' = N$$

D'après (59'), la transformation spectrale correspondante est :

$$\frac{u'_n}{u'_o} = \frac{u_n}{u_o} \frac{\Gamma(\alpha'+n)}{\Gamma(\alpha+n)} \frac{\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\beta'+n)} \tag{67'}$$

Cette transformation apparait comme le produit de deux transformations de type (66"), dont chacune définit un modèle de changement de support admissible (puisque l'on a $\alpha' > \alpha$ et $\beta > \beta'$). Nous sommes donc certains a priori que cette transformation (67') va nous conduire à une matrice Π_{ij} stochastique. De plus, d'après (59'), u'_n est la mesure spectrale du processus de Jacobi de paramètres (α',β') : les polynomes Q'_i vérifient donc $Q'_i(\lambda_n) = H'_n(i)$, où H'_n représente les facteurs du Jacobi transformé. Par conséquent, la matrice Π_{ij} correspondante sera nécessairement stochastique et isonome.

Pour calculer cette matrice, notons que, d'après (57'), nous avons ici :

$$\frac{T'_k}{T_k} = \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha'+k)} \frac{\Gamma(\alpha')}{\Gamma(\alpha)}$$

c'est-à-dire la même expression que pour le changement $\alpha \to \alpha'$ du cas binomial négatif. Comme l'expression générale (63) des matrices isonomes ne dépend pas du spectre λ_n, mais seulement des coefficients T'_k/T_k, nous concluons donc sans calcul que notre matrice isonome est la même que dans le cas binomial négatif. Son expression explicite est écrite en (65) et (65').

Second modèle isonome pour Jacobi

Cette fois, α et β sont fixes et N' est plus grand que N. La transformation spectrale qu'il convient d'appliquer est donc, d'après (59') :

$$\frac{u'_n}{u'_o} = \frac{u_n}{u_o} \frac{\binom{N'}{n}}{\binom{N}{n}} \frac{\Gamma(\beta+N')}{\Gamma(\beta+N)} \frac{\Gamma(N+\alpha+\beta+n)}{\Gamma(N'+\alpha+\beta+n)}$$

Comme le type (59') de la mesure spectrale est conservé, nous sommes certains que les nouveaux polynomes $Q'_i(\lambda_n)$ s'identifient aux facteurs $H'_n(i)$ du processus de Jacobi de paramètres (α,β,N'). La matrice Π_{ij} est donc certainement isonome. Toutefois, nous ne savons pas encore si elle est stochastique (positive). Mais, étant isonome, elle est nécessairement de la forme (63) avec, d'après (57')

$$\frac{T'_k}{T_k} = \frac{\binom{N}{k}}{\binom{N'}{k}}$$

c'est-à-dire la même expression que pour le changement $N \to N'$ dans le cas binomial. Ici encore, donc, puisque l'expression (63) ne fait pas intervenir le spectre λ_n, nous concluons que cette matrice isonome est la même que dans le cas binomial. Son expression a été donnée en (66) et (66'). En particulier, elle est certainement positive si $N' > N$. Il s'agit donc bien d'une matrice isonome et stochastique.

Modèle Isonome à 2 paramètres.

Dans les applications, on a en général besoin d'un modèle de changement de support dépendant de deux paramètres. Si l'on travaille sans anamorphose, par exemple dans le cas de variables à valeurs entières, on doit en effet respecter au moins une moyenne et une variance. Noter que, dans le cas des processus de Jacobi, le premier facteur ést linéaire en i, de sorte que nos lois bivariables respectent bien la condition de Cartier (relation (2) de Matheron, 1983) . Exactement comme le modèle binomial négatif, le modèle de Jacobi est donc bien adapté à la description d'un changement de support en variables discrètes. Mais on peut aussi l'utiliser avec des anamorphoses φ_v et φ_V. Dans ce cas, la condition de Cartier étant automatiquement vérifiée, un modèle à un seul paramètre suffit pour respecter la variance. Mais, si l'on s'impose aussi, par exemple, la probabilité W'_o des teneurs 0, il faut à nouveau un modèle à deux paramètres. Noter que la limite $W'_o = 0$ correspondra au modèle mixte discret/continu que nous examinerons dans un dernier paragraphe.

Dans le cas des processus de Jacobi, on obtiendra de tels modèles à deux paramètres en faisant le produit de deux matrices isonomes et stochastiques, dont l'une sera du type $\alpha \to \alpha'$ à N et $\alpha+\beta$ constants, et l'autre du type $N \to N'$ à α et β constants. On obtient ainsi une matrice π_{ij} isonome et stochastique qui transforme le processus de Jacobi (N,α,β) en un nouveau processus de Jacobi (N', α', β') avec :

$$N' \geq N' \quad ; \quad \alpha' \geq \alpha \quad ; \quad \beta' \leq \beta \quad ; \quad \alpha' + \beta' = \alpha + \beta$$

On n'aura plus d'expression simple comme (65) ou (66), mais la formule générale (62) permet dans tous les cas un calcul numérique facile. On peut aussi, le cas échéant, utiliser l'expression (63), puisque le calcul du coefficient T'_k/T_k est immédiat.

9. 3 - MODELE MIXTE DISCRET/CONTINU POUR JACOBI

Lorsque le support V des blocs est grand, il est souvent préférable d'utiliser une loi continue pour les blocs, plutôt qu'une loi discrète. On trouvera dans Matheron, 1983 , un modèle mixte de loi bivariable dont les marginales sont une loi discrète binomiale négative et une loi gamma continue. Nous présenterons ici un modèle mixte analogue du type Jacobi discret/beta continu.

Le processus de diffusion continue à loi beta.

Ce processus se déduit, comme on l'a vu, du Jacobi discret en faisant $N \to \infty$, α et β restant fixes. Le processus correspondant, $X(t) = \lim Y_N(t)/N$, a pour générateur A l'opérateur défini par :

$$A\ \varphi = x(1-x)\ \varphi'' + (\alpha - (\alpha+\beta)x)\ \varphi'$$

et la loi beta (α,β) comme loi stationnaire. Ses valeurs propres sont les mêmes que celles du

Jacobi discret :

$$\lambda_n = n(n + \alpha + \beta - 1)$$

mais forment, maintenant, une suite infinie. Les facteurs correspondants sont les polynomes de Jacobi J_n qui vérifient l'équation différentielle

$$x(1-x)\, J_n'' + (\alpha - (\alpha+\beta)x)\, J_n' = -\, n(n+\alpha+\beta-1)\, J_n \tag{68}$$

Ces polynomes ne sont définis qu'à un facteur constant près. Si nous achevons de les déterminer en imposant la condition :

$$J_n(o) = 1$$

les relations de récurrence du processus spectral de Jacobi, c'est-à-dire les relations de récurrence en n vont passer à la limite, et nous aurons donc :

$$A_n\Big(J_{n+1}(x) - J_n(x)\Big) + B_n\Big(J_{n-1}(x) - J_n(x)\Big) = -\, x\, J_n(x) \tag{68'}$$

avec

$$\begin{cases} A_n = \dfrac{(\alpha+n)(\alpha+\beta+n-1)}{(\alpha+\beta+2n-1)(\alpha+\beta+2n)} \\[2ex] B_n = \dfrac{n(\beta+n-1)}{(\alpha+\beta+2n-2)(\alpha+\beta+2n-1)} \end{cases}$$

Ces relations de récurrence permettent un calcul numérique très facile des polynomes de Jacobi $J_n(x)$. En ce qui concerne les normes, les relations :

$$A_n \| J_{n+1} \|^2 = B_{n+1} \| J_n \|^2 \tag{68''}$$

restent valables, et permettent un calcul numérique rapide à partir de $\| J_o \|^2 = 1$. On peut d'ailleurs les retrouver directement à partir des relations de récurrence (68'). De fait, ces relations entrainent dans $L^2(\mathbb{R}, g)$, où g est la loi beta :

$$A_n \| J_{n+1} \|^2 = -\int x\, J_n\, J_{n+1}\, g\, dx$$

$$B_n \| J_{n-1} \|^2 = -\int x\, J_n\, J_{n-1}\, g\, dx$$

et (68") en résulte aussitôt. Explicitement, on trouve :

$$\| J_n \|^2 = n!\, \frac{n+\alpha+\beta-1}{2n+\alpha+\beta-1}\, \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+n)}\, \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+n)}\, \frac{\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\beta)}$$

Les modèles mixtes.

En passant à la limite $N \to \infty$ dans le premier modèle isonome du Jacobi discret, on obtient un modèle bivariable continu :

$$(69) \quad \begin{cases} g(x',x) = \sum_n J'_n(x') \dfrac{J_n(x)}{\|J_n\|^2} \; g_{\alpha\beta}(x)\; g_{\alpha'\beta'}(x') \\ (\alpha' \geq \alpha \;,\; \beta' \leq \beta \;;\; \alpha+\beta = \alpha'+\beta') \end{cases}$$

où $g_{\alpha\beta}$ désigne la loi beta (α,β). La loi conditionnelle de X à X' = x' fixé est la limite de la matrice (65) : on trouve donc

$$X = Z\,X'$$

où Z est une variable beta $(\alpha,\alpha'-\alpha)$ indépendante de X'.

Partant, au contraire, du second modèle isonome du cas discret, on obtient, pour $N' \to \infty$, (N, α et β fixes), un premier modèle mixte, où X est une variable continue à loi beta (α,β), Y une variable discrète à loi de Jacobi (α,β,N). La loi bivariable correspondante est :

$$(69') \qquad g_i(x) = \sum_n J_n(x) \frac{H_n(i)}{\|H_n\|^2} \; g_{\alpha\beta}(x)\; W_i$$

La loi conditionnelle de la variable discrète Y lorsque la variable continue X = x est fixée est la limite de la matrice (66) : c'est une loi binomiale (N,x).

Ce modèle (69') ne contient pas de paramètre disponible pour le changement de support, sauf naturellement un changement d'échelle pour x : c'est donc un modèle à un seul paramètre. Exactement comme dans le cas discret, on obtient un paramètre de plus en combinant les deux modèles (69) et (69'). On obtient ainsi le modèle mixte général de changement de support à 2 paramètres (un paramètre essentiel plus un facteur d'échelle pour x). Avec toujours :

$$\alpha' \geq \alpha \;; \quad \beta' \leq \beta \;; \quad \alpha'+\beta' = \alpha+\beta$$

Ce modèle s'écrit sans difficulté sous forme isofactorielle :

$$(69'') \qquad g_i(x) = \sum_n J'_n(x) \frac{H_n(i)}{\|H_n\|^2} \; g_{\alpha'\beta'}(x)\; W_i$$

Le polynome J'_n et la densité $g_{\alpha'\beta'}$ sont relatifs au processus beta (α',β') tandis que le polynome H_n et la loi W_i concernent le Jacobi discret (N,α,β).

CHAPITRE 10

UNE CLASSE PLUS GENERALE DE MODELES POLYNOMIAUX (AU SENS LARGE)

Cette classe est définie à partir d'une suite μ_i de la forme :

(70) $$\mu_i = \alpha(s^i-1) + \beta(1-r^i) \qquad (r = 1/s \ , \ s > 1, \ \alpha, \ \beta \geq 0)$$

Par des passages à la limite convenables sur α, β et s, on obtiendra soit $\mu_i = i$, ce qui correspond aux processus polynomiaux au sens strict étudiés dans le paragraphe 8, soit aussi $\mu_i = A\,i + B i^2$, ce qui correspond à une classe de processus à valeurs quadratiques en i, dont les processus spectraux de Jacobi et d'Anti-Jacobi constituent des cas particuliers. On pourrait aussi, au lieu de s et r = 1/s, introduire des exponentielles complexes conjuguées. On obtiendrait ainsi une suite de la forme

$$\mu_i = \alpha(1-\cos\theta\, i) + \beta \sin\theta\, i$$

Les processus correspondants existent, mais nous nous limiterons ici à la famille définie par les relations (70).

Lorsque les μ_i sont définis par ces relations (70), la matrice $[\mu_i]_k$ prend une forme relativement simple :

$$[\mu_i]_k = s^{\frac{k(k-1)}{2}} (s^i-1)\ldots(s^{i-k+1}-1)(\alpha+\beta\, r^i)\ldots(\alpha+\beta\, r^{i+k-1})$$

de sorte que les conditions générales (48) prennent la forme :

$$a_i \left[\frac{s^{i+1}-1}{s^{i-k+1}-1} \; \frac{\alpha+\beta\, r^{i+k}}{\alpha+\beta\, r^i} - 1 \right] + b_i \left[\frac{s^{i-k}-1}{s^i-1} \; \frac{\alpha+\beta\, r^{i-1}}{\alpha+\beta\, r^{i+k-1}} - 1 \right] =$$

$$= -\lambda_k - \frac{T_{k-1}}{T_k} \; \frac{r^{k-1}}{(s^{i-k+1}-1)(\alpha+\beta\, r^{i+k-1})}$$

Il n'est nullement évident au départ qu'un système d'équations aussi surabondant admette des solutions, mais il en existe effectivement. Le calcul exact, trop long pour être reproduit ici, suit la même démarche que dans le cas polynomial au sens strict (paragraphe 8). On trouve, en premier lieu, que le spectre λ_n doit avoir une structure analogue à la suite (70) des μ_i, à savoir :

$$(70') \qquad \lambda_n = \alpha'(s^n-1) + \beta'(1-r^n)$$

avec des coefficients α', β' a priori quelconques, sous réserve de respecter les contraintes de positivité. Après des calculs laborieux, on obtient la solution générale sous la forme suivante : le générateur infinitésimal est donné par :

$$(71) \qquad \begin{cases} a_i = -\dfrac{S_{i+1}}{1-r^{i+1}} \dfrac{\alpha + \beta r^i}{(\alpha s^{i+1} + \beta r^i)(\alpha s^i + \beta r^i)} \\[2ex] b_i = \dfrac{1}{\alpha s^i + \beta r^{i-1}} \left[\dfrac{S_1 + \lambda_1 \mu_i}{1-r} - \dfrac{S_{i+1}}{1-r^{i+1}} \dfrac{\alpha + \beta r^i}{\alpha s^i + \beta r^i} \right] \end{cases}$$

On a posé $S_i = T_{i-1}/T_i$. Ces coefficients sont eux-mêmes de la forme :

$$(71') \qquad S_i = \frac{T_{i-1}}{T_i} = \alpha\alpha'(s^i-1)(s^{i-1}-1) + \beta\beta'(1-r^i)(1-r^{i-1}) - A(s^i-1) - B(1-r^i)$$

où A et B sont deux nouvelles constantes a priori arbitraires . Compte tenu du fait que le générateur (a_i, b_i) n'est défini qu'à un facteur près, dont le choix équivaut à celui d'une unité de temps pour le processus, on voit qu'il s'agit d'un modèle à cinq paramètres, au lieu de trois dans le cas polynomial strict. On est, en fait, plutôt surpris par la simplicité relative de cette solution.

Ces cinq paramètres, toutefois, doivent vérifier certaines conditions de positivité (pour a_i et b_i) et, dans le cas infini, une autre condition pour l'existence de la probabilité stationnaire W_i.

Voici une première conséquence. On sait que le coefficient T_i a le signe $(-1)^i$, ce qui impose $S_i < 0$. Or, dans le cas infini, α et α' sont nécessairement ≥ 0 puisque λ_n et μ_i doivent être positives. Il résulte donc de la relation (71') que l'on doit nécessairement avoir $\alpha\alpha' = 0$: l'un ou l'autre de ces deux coefficients est nécessairement nul. Dans le cas infini, donc, le modèle réel n'a plus que quatre paramètres, et cette perte d'un paramètre dans le cas infini est très analogue à ce que nous avons observé dans le cas polynomial strict (deux paramètres dans le cas infini, au lieu de 3). Par contre, dans le cas fini, on aura effectivement 5 paramètres, dont l'un, N, sera obligatoirement un entier positif, avec la condition $a_N = 0$.

Il n'est pas possible ici de donner la classification exhaustive de ces processus. Nous nous contenterons d'examiner rapidement le cas infini.

Notons d'abord les relations simples :

$$(71'')\quad \begin{cases} \dfrac{\lambda_1}{1-r} + \alpha' s + \beta' \quad ; \quad \dfrac{S_1}{1-r} + - (As + B) \\ \dfrac{S_{i+1}}{1-r^{i+1}} = \alpha\alpha' \, s^{i+1}(s^i - 1) + \beta\beta'(1-r^i) - (As^{i+1} + B) \end{cases}$$

Dans <u>le cas infini</u>, on a soit α, soit $\alpha' = 0$. Si $\alpha = 0$, on doit avoir $\beta > 0$, puisque μ_i est positive, et on peut prendre $\beta = 1$ sans nuire à la généralité. De même, si $\alpha' = 0$, on peut prendre $\beta' = 1$.

<u>Cas $\alpha = 0$, $\beta = 1$.</u> On a alors :

$$-\frac{S_{i+1}}{1 - r^{i+1}} = A\, s^{i+1} + B - \beta'(1-r^i)$$

et le générateur est de la forme

$$\begin{cases} a_i = A\, s^{2i+1} + (B-\beta')\, s^i + \beta' \\ b_i = (s^i - 1)\,[A\, s^i + \alpha'] \end{cases}$$

Si A est > 0, a_{i-1}/b_i est de l'ordre de $r = 1/s$: les probabilotés stationnaires existent et ont à l'infini un comportement du type géométrique $W_i \sim r^i$.

Pour $A = 0$ et $B > \beta'$, on peut prendre $B - \beta' = 1$ sans nuire à la généralité. Alors

$$a_i = s^i + \beta' \quad ; \quad b_i = \alpha'(s^i - 1)$$

La probabilité stationnaire existe si et seulement si $\alpha' s > 1$, et à l'infini on a $W_i \sim (1/\alpha' s)^i$. Dans le cas simple où, de plus, $\beta' = 0$, on trouve

$$W_i = \frac{W_o}{(\alpha' s)^i} \prod_{j=1}^{i} \frac{1}{1-r^j}$$

ce qui évoque la loi de Poisson (mais avec deux paramètres) tandis qu'avec $\beta' > 0$ on a une sorte de loi binomiale négative à 3 paramètres.

Un cas encore plus particulier est $A = 0$, $B = \beta'$. Alors, pour $\beta' = 1$:

$$a_i = 1 \quad ; \quad b_i = \alpha'(s^i - 1)$$

La probabilité stationnaire existe toujours, et a une décroissance très rapide à l'infini :

$$W_i = \frac{r^{\frac{i(i+1)}{2}}}{\alpha'^i} \prod_{J=1}^{i} \frac{1}{1-r^J}$$

Cas $\alpha' = 0, \beta' = 1$. Ce cas correspond au processus spectral associé au processus précédent. On a cette fois des formules nettement plus compliquées, sauf si de plus α ou β est nul. Le cas $\alpha = 0$ a déjà été examiné. Pour

$$\beta = 0$$

on trouve

$$\begin{cases} a_i = \dfrac{r^i}{\alpha} (A + B\, r^{i+1}) \\[2ex] b_i = \dfrac{1-r^i}{\alpha} (\alpha - B\, r^i) \end{cases}$$

La probabilité stationnaire existe toujours et a une décroissance rapide à l'infini. Par exemple, pour $B = 0$:

$$W_i = W_o\, A^{i-1}\, r^{\frac{i(i-1)}{2}} \prod_{J=1}^{i} \frac{1}{1-r^J}$$

REFERENCES

GUIKHMAN, I. et SKOROKHOD, A. (1977) - Introduction à la Théorie des Processus Aléatoires. Editions Mir, Moscou. Traduction française, 1980.

MATHERON, G. (1984a)- Changement de support en modèle mosaîque. Compte-Rendu du Colloque International : "Computers in Earth Sciences for Natural Resources Characterization, Nancy, 9-13 Avril 1984.

MATHERON, G. (1983) - Modèle isofactoriel et changement de support. Sciences de la Terre, Série Informatique Géologique, n° 18, pp. 171-173, Février 1984.

MATHERON, G. (1984b)- Isofactorial models and change of support. Proceedings, 2nd NATO ASI : "Geostatistics for Natural Resources Characterization", G. Verly et Al. Editors, Part 1, pp. 449-467. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, Netherlands.