Cahiers de Géostatistique, Fascicule 1
Compte-rendu des Journées de Géostatistique,
6–7 Juin 1991, Fontainebleau, pp. 1–18

GEODESIQUES ALEATOIRES : APPLICATION A LA PROSPECTION SISMIQUE

G. MATHERON
Ecole des Mines de Paris
Centre de Géostatistique
35 rue Saint-Honoré
77305 FONTAINEBLEAU
France

TABLE DES MATIERES

0. INTRODUCTION

A l'approximation de l'optique géométrique, la propagation des ondes sismiques dans un milieu hétérogène est régie par le principe de Fermat. Autrement dit, si $v = v(x, y, z)$ est la vitesse de propagation, fonction du point M de coordonnées (x, y, z), le rayon acoustique joignant deux points M_0 et M_1 est la trajectoire minimisant l'intégrale :

$$T(M_0, M_1) = \int_{M_0}^{M_1} \frac{ds}{v}$$

et le "temps" est la valeur correspondante de cette intégrale T (il s'agit ici du temps correspondant à un aller simple, c'est-à-dire à la moitié du temps aller et retour utilisé en général par les géophysiciens).

Ainsi, la métrique euclidienne usuelle, définie par l'élément d'arc $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ est remplacée par la métrique riemannienne

$$dt^2 = ds^2/v^2$$

Les rayons acoustiques sont les géodésiques de cette métrique et les "temps" T les distances riemanniennes correspondantes.

Dans ce qui suit, je me propose d'évaluer l'ordre de grandeur de l'erreur que l'on peut commettre sur la localisation d'un miroir sismique (d'un "premier réflecteur", dans la terminologie des géophysiciens) lorsque l'on interprète les données expérimentales en supposant le milieu homogène avec une certaine vitesse constante $\bar{v}$. Pour ce faire, je considérerai la fonction :

$$\lambda = \frac{1}{v^2}$$

comme une fonction aléatoire stationnaire dont la covariance (fortement anisotrope, s'il s'agit d'un milieu stratifié) aura une portée intégrale relativement faible, au moins dans la direction verticale. Les hétérogénéités à variation lente se prêtent, en effet, à un traitement déterministe, et ce sont les hautes fréquences qui relèvent d'une interprétation probabiliste.

Le calcul exact n'étant pas possible, en général, j'utiliserai une méthode de perturbation. Posant :

$$\lambda = \mu \; (1 + \varepsilon \;(x, y, z))$$

où μ est une constante et ε une fonction aléatoire à valeurs très petites, j'évaluerai le temps T à l'approximation du premier ordre en ε. Les erreurs de localisation s'en déduiront à la même approximation. On verra que ces erreurs, relativement faibles pour un milieu à stratification horizontale stricte, prennent des valeurs nettement plus importantes dès qu'apparaissent des variabilités dans le sens horizontal (stratification oblique ou, plus généralement, portée intégrale finie dans les directions horizontales). Le facteur crucial est ici le module d'anisotropie. Dans un milieu isotrope, les erreurs de localisation seraient énormes. Il se trouve que, dans les milieux sédimentaires, le rapport des portées verticales et horizontales est de l'ordre de 2 à 5 %. C'est, semble-t-il, uniquement à cette heureuse circonstance qu'est due la possibilité même de la prospection sismique.

1. LE CADRE RIEMANNIEN

D'une manière générale, considérons un espace de Riemann de dimension n, dans lequel la métrique est définie par la forme quadratique

$$dt^2 = dx^i \; g_{ij} \; dx^j$$

où les x^i sont les coordonnées du point x et $g_{ij}(x)$ celles du tenseur métrique en ce point. D'après les résultats classiques, [1], les géodésiques sont déterminées par les équations

$$\frac{d}{dt} \; g_{ij} \; u^j = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \; g_{jk} \right) u^j \; u^k \tag{1}$$

avec

$$u^j = \frac{dx^j}{dt} \quad ; \quad u^i \; g_{ij} \; u^j = 1 \tag{2}$$

Dans le cas qui nous occupe, on aura :

$$g_{ij} = \lambda \; \delta_{ij}$$

avec $\lambda = 1/v^2(x)$, δ_{ij} représentant la matrice unité, et donc

$$\frac{d}{dt} \; \lambda \; u^i = \frac{1}{2\lambda} \; \frac{\partial \lambda}{\partial x^i} \tag{3}$$

et l'intégrale première

$$|u|^2 = \sum |u^i|^2 = 1/\lambda \tag{4}$$

Si maintenant S est une variété suffisamment régulière de dimension plus petite que n (par exemple une hypersphère, un hyperplan, ou un point) désignons par T(M; S) la distance géodésique du point M de coordonnée x_i à cette variété S. Dans le cas euclidien, on sait que cette fonction est différentiable en x (en dehors du squelette) et que le module de son gradient est égal à 1. De plus (toujours pour M n'appartenant pas au squelette), il existe un point $M_0 \in S$ unique tel que l'on ait $T(M; S) = T(M; M_0)$, ***et ces deux fonctions ont le même gradient au point M*** :

(5) $$\frac{\partial}{\partial x^i} T(M; S) = \frac{\partial}{\partial x^i} T(M; M_0)$$

Ce gradient est donc le vecteur unité tangent au point M à la géodésique joignant M_0 et M_1. En particulier son module est égal à 1. Ces résultats subsistent dans le cas riemannien. Seulement, les quantités

$$\partial_i T = \frac{\partial}{\partial x^i} T(M, M_0)$$

représentent maintenant les coordonnées ***covariantes*** du vecteur tangent à la géodésique. On a donc :

$$\partial_i T = g_{ij} \; u^j$$

et l'équation (2) donne :

$$\partial_i T \; g^{ij} \; \partial_j \; T = 1$$

Les g^{ij} sont ici les composantes contravariantes du tenseur métrique, c'est-à-dire celles de la matrice inverse de g_{ij}. Avec $g_{ij} = \lambda \; \delta_{ij}$, on a donc $g^{ij} = (1/\lambda) \; \delta_{ij}$. Outre la relation (5), on a donc (en norme euclidienne)

(6) $$\frac{\partial T}{\partial x^i} = \lambda \; u^i \; ; \quad |\partial T|^2 = \Sigma(\partial_i T)^2 = \lambda$$

2. L'ERREUR DE LOCALISATION

Si l'erreur était homogène ($\lambda = 1/v^2$ avec v constante), $vT(M,M_0)$ serait la distance euclidienne usuelle $r = |MM_0|$. Pour plus de clarté, désignons maintenant par (x, y, z) les coordonnées usuelles de $\mathbb{R}^3$. Si l'on connaît la distance $r(M;S)$ en tout point M de la surface du sol S_0 (assimilée à un plan horizontal de cote z_1), la surface S est l'enveloppe des sphères de centre M et de rayons $r(M,S)$, M parcourant S_0. Les géophysiciens vont donc estimer les coordonnées (x_0, y_0, z_0) du point M_0 du réflecteur S, (associé à M selon la relation (5)), à l'aide des quantités $\breve{x}_0$, $\breve{y}_0$, $\breve{z}_0$ déterminées par :

$$\begin{cases} x - \breve{x}_0 = \dfrac{\overline{V}^2}{2} \dfrac{\partial}{\partial x} T^2(M;S) \\ y - \breve{y}_0 = \dfrac{\overline{V}^2}{2} \dfrac{\partial}{\partial y} T^2(M;S) \\ z - \breve{z}_0 = \left[\overline{V}^2 \, T^2 - (x - \breve{x}_0)^2 - (y - \breve{y}_0)^2 \right]^{1/2} \end{cases}$$

Il résulte de (5) que ces quantités peuvent être calculées ***à l'aide de la seule fonction*** $T(M, M_0)$.

Les erreurs de localisation $\breve{x}_0 - x_0$ etc. seront donc données par :

$$(7) \qquad \begin{cases} \breve{x}_0 - x_0 = x - x_0 - \dfrac{\overline{V}^2}{2} \dfrac{\partial}{\partial x} T^2(M, M_0) \\ \breve{y}_0 - y_0 = y - y_0 - \dfrac{\overline{V}^2}{2} \dfrac{\partial}{\partial y} T^2(M, M_0) \\ \breve{z}_0 - z_0 = z - z_0 - \left[\overline{V}^2 \, T^2 - (x - \breve{x}_0)^2 - (y - \breve{y}_0)^2 \right]^{1/2} \end{cases}$$

Dans l'interprétation probabiliste, $T(M, M_0)$ devient une fonction aléatoire, et les relations précédentes permettront donc, en principe, d'évaluer les moyennes et la variance de ces erreurs de localisation.

Tout va donc se ramener au calcul de cette fonction $T(M, M_0)$, ou, du moins, de ses caractéristiques probabilistes.

3. L'APPROXIMATION DE PREMIER ORDRE

Pour évaluer $T(M, M_0)$ à l'ordre 1, considérons, dans un cadre d'abord déterministe, le modèle :

$$(8) \qquad \lambda \, (x, y, z) = \mu \, (1 + \varepsilon \, (x, y, z))$$

où μ est une constante et ε une fonction ne prenant que des valeurs nettement plus faibles que 1 (nous verrons dans un instant que cette hypothèse ne suffit pas).

Comme ***la géodésique*** joignant M_0 et M minimise l'intégrale $\int_{M_0}^{M} \sqrt{\lambda} \, ds$, on s'attend à ce que $T(M_0, M)$ ne diffère que par un terme d'ordre supérieur à 1 de la même intégrale calculée le long de la ***droite*** M_0M, ce qui laisse prévoir la relation :

(9) $$\frac{1}{\sqrt{\mu}}\ T(M; M_0) = r\left(1 + \frac{\bar{\varepsilon}}{2}\right)$$

où $\bar{\varepsilon}$ est la valeur moyenne de ε sur la droite M_0M, et $r = |M - M_0|$.

De manière plus précise, posons :

$$\frac{1}{\sqrt{\mu}}\ T(M; M_0) = r + \Phi$$

d'où :

$$\frac{1}{\mu}\ |\nabla\ T|^2 = 1 + 2\ \frac{\partial \Phi}{\partial r} + |\nabla\ \Phi|^2$$

D'après (6), cette quantité est égale à $(1+\varepsilon)$. Donc, ***sous réserve que*** $|\nabla\Phi|^2$ soit d'ordre supérieur à 1, on aura

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{1}{2}\ \varepsilon$$

Jointe à la condition $T(M, M_0) = 0$ en $M = M_0$, cette relation conduit bien à (9), avec explicitement :

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{r} \int_0^r \varepsilon\ (M_0 + s\ \alpha)\ ds$$

où $\alpha = M_0M/r$ est le vecteur unité de la droite joignant M_0 et M. Pour évaluer les dérivées au point M de cette quantité, effectuons le changement de variable $s = \tau\, r$. Comme $r\,\alpha = M_0M$, il vient

$$\bar{\varepsilon} = \int_0^1 \varepsilon\ (M_0 + \tau\ M_0M)\ d\tau$$

Désignant par ε_i' la dérivée de ε par rapport à la coordonnée i, il vient donc :

(10) $$\frac{\partial}{\partial x^i}\ \bar{\varepsilon} = \int_0^1 \tau\ \varepsilon_i'\ (M_0 + \tau\ M_0M)\ d\tau$$

Nous désignerons, pour abréger, ces quantités par le symbole $\overline{\varepsilon_i'}$ (noter qu'il s'agit encore d'une moyenne prise sur la droite M_0M, mais cette fois pondérée par la distance au point M_0). Pour le terme correctif $\Phi = r\ \bar{\varepsilon}/2$, il vient ainsi

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x^i} = \frac{1}{2} \left(\frac{x^i - x_0{}^i}{r} \, \overline{\varepsilon} + r \, \overline{\varepsilon_i'} \right) \tag{11}$$

On voit que le terme $|\nabla\Phi|^2$ sera du deuxième ordre en ε si les quantités $r\,\overline{\varepsilon_i'}$ sont elles-mêmes de premier ordre. Telles sont donc les conditions de validité de cette technique d'approximation : il ne suffit pas que ε reste petit, ***il faut aussi que les quantités*** (sans dimension)

$$r\,\overline{\varepsilon_i'} = r \frac{\partial}{\partial x_i}\,\overline{\varepsilon}$$

restent notablement inférieures à 1 — et c'est là une condition nettement plus sévère.

Notons aussi que la relation de départ

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{\varepsilon}{2}$$

entraîne la relation

$$\sum_i (x^i - x_0^i)\,\overline{\varepsilon_i'} = -\,\overline{\varepsilon} \tag{12}$$

Par suite, il suffira de s'assurer que, parmi les trois quantités $r\overline{\varepsilon_i'}$, les deux premières (qui interviennent seules dans la relation (1)) sont assez petites pour que la troisième le soit aussi.

Voyons maitenant comment se présentent les ***erreurs de localisation*** lorsque l'approximation du premier ordre est légitime. Revenons pour cela aux relations (7) et (9). Au premier ordre, on a

$$\frac{T^2}{\mu} = r^2 + 2r\Phi = r^2(1 + \overline{\epsilon})$$

et donc

$$\frac{1}{2\mu}\,\frac{\partial T^2}{\partial x^i} = x^i - x_0^i + \frac{r^2\,\overline{\varepsilon_i'}}{2} + \overline{\epsilon}\,(x^i - x_0^i)$$

Pour aller plus loin, il faut évidemment se donner le terme $\overline{V}$ qui figure dans les relations (7). Il est hors de question d'analyser ici les procédures fort complexes réellement utilisées par les géophysiciens pour évaluer cette vitesse "moyenne". Nous utiliserons deux hypothèses simples possibles, l'une neutre, l'autre franchement optimiste.

Hypothèse neutre. — La vitesse réelle v est, au premier ordre :

$$v = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Dans l'interprétation probabiliste, la fluctuation ε aura une espérance nulle, d'où $E(v) = 1/\sqrt{\mu}$. La première hypothèse consiste donc à prendre simplement :

$$\bar{v} = 1/\sqrt{\mu} \tag{13}$$

Hypothèse optimiste. — On admet ici que, par chance, les géophysiciens ont réussi à évaluer la véritable valeur de la moyenne V le long de la droite M_0M, soit au premier ordre :

$$\bar{V}^2 = (1 - \bar{\varepsilon})/\mu \tag{14}$$

Noter que cela entraîne, toujours à l'ordre 1 :

$$\bar{V}^2\ T^2 = r^2$$

Autrement dit, la distance réelle r serait ici connue (au deuxième ordre près), ce qui est effectivement optimiste. Si, dans les relations (7) on plaçait le terme $\bar{v}^2$ à droite du symbole de dérivation, on trouverait exactement :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \bar{V}^2\ T^2 = x - x_0$$

c'est-à-dire des erreurs nulles (au deuxième ordre), ce qui n'est sûrement pas réaliste. De fait si, par chance, la relation (14) se trouve vérifiée en un point M de la surface du sol, elle ne le sera plus, en général, aux points voisins. Nous laisserons donc le terme $\bar{v}^2$ à gauche du symbole de dérivation. Il vient ainsi, par exemple

$$\frac{1}{2} \bar{V}^2 \frac{\partial}{\partial x} T^2 = x - x_0 + r^2\overline{\varepsilon_1'}/2$$

et les relations (7) donnent au premier ordre :

$$\left\{\begin{aligned} \breve{x}_0 - x_0 &= -\frac{1}{2}\ r^2\overline{\varepsilon_1'} \\ \breve{y}_0 - y_0 &= -\frac{1}{2}\ r^2\overline{\varepsilon_2'} \\ \breve{z}_0 - z_0 &= \frac{1}{2}\left[\frac{x - x_0}{z - z_0}\ r^2\overline{\varepsilon_1'} + \frac{y - y_0}{z - z_0}\ r^2\overline{\varepsilon_2'}\right] \end{aligned}\right. \tag{15}$$

On voit que le terme $\bar{\varepsilon}$ a disparu et que subsitent seuls $\overline{\varepsilon_1'}$ et $\overline{\varepsilon_2'}$. Dans le cas (exceptionnellement favorable), d'un milieu à stratification horizontale stricte, ε ne dépend que de z et par suite $\overline{\varepsilon_1'} = \overline{\varepsilon_2'} = 0$: les erreurs seront nulles (en réalité du second ordre en ε).

Voyons maintenant ce que donne le même calcul dans l'***hypothèse neutre***. Avec $\overline{V^2} = 1/\mu$, il vient cette fois

$$\overline{V^2}\ T^2 = r^2(1+\bar{\varepsilon})$$

et on trouve :

$$(16)\qquad \begin{cases} \breve{x}_0 - x_0 = -\bar{\varepsilon}(x-x_0) - \dfrac{1}{2}\ r^2\overline{\varepsilon_1'} \\ \breve{y}_0 - y_0 = -\bar{\varepsilon}(y-y_0) - \dfrac{1}{2}\ r^2\overline{\varepsilon_2'} \\ \breve{z}_0 - z_0 = \dfrac{r^2}{2(z-z_0)}\ \left[\bar{\varepsilon} + (x-x_0)\ r^2\overline{\varepsilon_1'} + (y-y_0)\ r^2\overline{\varepsilon_2'}\right] \end{cases}$$

Il apparaît maintenant des termes en $\bar{\varepsilon}$. Mais nous allons voir qu'en dehors du cas de la stratification horizontale, ils sont en général faibles vis-à-vis des termes en $\overline{\varepsilon'}$.

4. ORDRES DE GRANDEURS

Pour obtenir des ordres de grandeurs, nous supposerons que ε ne dépend que de x et de z, non de y, ce qui revient à travailler à deux dimensions seulement. Nous désignerons par φ le ***pendage du miroir*** sismique, et par $h = z - z_0$ sa ***profondeur***, *i.e.* nous posons :

$$z - z_0 = h \quad ; \quad r = h/\cos\varphi \quad ; \quad x - x_0 = -h\ \mathrm{tg}\ \varphi$$

Les formules (15) et (16) deviennent respectivement :

$$(15')\qquad \begin{cases} \breve{x}_0 - x_0 = -\dfrac{h^2}{2\cos^2\varphi}\ \overline{\varepsilon_1'} \\ \breve{z}_0 - z_0 = -\dfrac{h^2\ \mathrm{tg}\ \varphi}{2\cos^2\varphi}\ \overline{\varepsilon_1'} \end{cases}$$

et

$$(16') \quad \begin{cases} \breve{x}_0 - x_0 = h \ \mathrm{tg} \ \varphi \ \bar{\varepsilon} - \dfrac{h^2}{2\cos^2\varphi} \ \overline{\varepsilon_1'} \\ \\ \breve{z}_0 - z_0 = \dfrac{h}{\cos^2\varphi} \ \bar{\varepsilon} - \dfrac{h^2 \ \mathrm{tg}^2\varphi}{2\cos^2\varphi} \ \overline{\varepsilon_1'} \end{cases}$$

Dans l'***interprétation probabiliste***, ε est une fonction aléatoire d'espérance nulle et de covariance C(h). Cette covariance n'est, en général, nullement isotrope. C'est une fonction C(x,z) des deux coordonnées du vecteur h. Nous désignerons aussi par $\sigma^2 = C(0)$ la variance de ε . L'écart–type σ de ε est en réalité le coefficient de variation de $\lambda = 1/v^2$, donc, en gros, le ***double du coefficient de variation*** de la vitesse. Si l'on admet que ce dernier est de l'ordre de 0,1, il faudra donc prendre σ de l'ordre de 0,2.

Outre σ, un paramètre important sera la ***portée intégrale*** $A(\varphi)$ dans la direction $\varphi - \pi/2$ orthogonale au pendage du miroir, *i.e.* la portée intégrale dans la direction $\overline{M_0M}$. Si $A(\varphi)$ est petit devant r, (ce que nous supposerons, sauf dans le cas d'une stratification oblique et d'une direction de propagation M_0M parallèle à cette stratification), la variance de $\bar{\varepsilon}$ est donnée par

$$\mathrm{Var} \ \bar{\varepsilon} = A(\varphi) \frac{\cos\varphi}{h} \ \sigma$$

Evaluons la ***variance*** de $\overline{\varepsilon_1'}$. La fonction aléatoire ε_1' (x,z) admet la covariance

$$C_1(x,z) = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ C(x,z)$$

On aura donc, d'après (10) :

$$\mathrm{Var} \ \overline{\varepsilon_1'} = \int_0^1 \int_0^1 \tau\tau' \ C_1\big((\tau - \tau') \ M_0M\big) \ d\tau \ d\tau'$$

Ceci se ramène à une intégrale simple :

$$\mathrm{Var} \ \overline{\varepsilon_1'} = \frac{2}{3} \int_0^1 (1 - \frac{3}{2}\tau + \frac{1}{2}\tau^3) \ C_1(\tau \ M_0 \ M_1) \ d\tau$$

Si r est grand vis–à–vis de la portée intégrale A_1 de C_1, il restera simplement :

$$(17) \qquad \mathrm{Var} \ \overline{\varepsilon_1'} = \frac{2}{3} \int_0^\infty C_1(\tau \ M_0 \ M) \ d\tau$$

Pour avoir des ordres de grandeurs, choisissons pour C une exponentielle de Gauss de la forme :

$$C(x, z) = \sigma^2 \exp \left\{ -\frac{(x\cos\theta + z\sin\theta)^2}{2a_1^2} - \frac{(z\cos\theta - x\sin\theta)^2}{2a_2^2} \right\}$$

Avec a_1 nettement plus grand que a_2, cette covariance décrit un milieu anisotrope admettant une ***stratification*** (approximative) ***de pendage*** θ. Le calcul donne pour $\overline{\varepsilon}$:

$$\mathrm{Var}\ \overline{\varepsilon} = \sqrt{2\pi}\ \frac{a_1 a_2}{\left[a_1^2\cos^2(\theta-\varphi) + a_2^2\sin^2(\theta-\varphi)\right]^{1/2}}\ \frac{\cos\varphi}{h}\ \sigma$$

et pour $\overline{\varepsilon_1{}'}$, d'après (17) :

$$\mathrm{Var}\ \overline{\varepsilon} = \frac{\sqrt{2\pi}}{3}\ \frac{a_1 a_2}{\left[a_1^2\cos^2(\theta-\varphi) + a_2^2\sin^2(\theta-\varphi)\right]^{3/2}}\ \frac{\cos^3\varphi}{h}\ \sigma$$

On a vu que le terme de référence (sans dimension) est $r\,\overline{\varepsilon_1{}'}$ ou $h\,\overline{\varepsilon_1{}'}$ plutôt que $\varepsilon_1{}'$ lui-même. Dans le cas (favorable) d'un ***miroir interstratifié*** $(\theta = \varphi)$ on trouve :

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} &\mathrm{Var}\ \overline{\varepsilon} = \sqrt{2\pi}\ \cos\varphi\ \frac{a_2}{h}\ \sigma^2 \\ &\mathrm{Var}\ (h\overline{\varepsilon_1{}'}) = \frac{\sqrt{2\pi}}{3}\ \cos^3\varphi \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 \frac{h}{a_2}\ \sigma^2 \end{aligned} \right.$$

Dans le cas (défavorable) d'un miroir orthogonal à la stratification, il suffira de permuter les variables a_1 et a_2 dans la formule ci-dessus.

Dans la direction perpendiculaire à la stratification, la portée intégrale est

$$A_2 = \sqrt{2\pi}\ a_2$$

Prenons, par exemple :

$$h = 2\,000\ \mathrm{m} \quad ; \quad \sigma = \frac{2}{10} \quad ; \quad A_2 = 10\ \mathrm{m}$$

Les formules (18) donnent :

$$\begin{cases} \text{Var } \bar{\varepsilon} = 2.10^{-4} \cos\varphi \\ \\ \text{Var } (h\overline{\varepsilon_1'}) = 16 \cos^3 \varphi \left(\dfrac{a_2}{a_1}\right)^2 \end{cases}$$

Comme a_1 est supposé ici petit devant h, (sinon la formule (17) utilisée pour faire le calcul n'est plus valable), le rapport a_2/a_1 ne peut descendre en dessous de 1/50 environ. Le premier terme est donc négligeable en comparaison du second.

Pour $a_2/a_1 = 1/20$, on aura $\text{Var}(h\overline{\varepsilon_1'}) = 4/100$, soit un écart-type de 0,2, raisonnablement inférieur à 1, et l'approximation du premier ordre est légitime. Pour $a_2 = a_1$ (milieu isotrope), la variance est 16 et l'écart-type 4 : on est certainement très loin des conditions de validité de l'approximation du premier ordre.

Compte tenu de cette remarque, nous utiliserons les formules (15') du cas optimiste, puisqu'elles ne diffèrent des formules (16') que par l'absence des termes en $\bar{\varepsilon}$. Toujours dans le cas du miroir interstratifié, il viendra ainsi :

$$\text{(19)} \quad \begin{cases} \text{Var } (\breve{x}_0 - x_0) = \dfrac{\sqrt{2\pi}}{12} \dfrac{1}{\cos\varphi} \left(\dfrac{a_2}{a_1}\right)^2 \dfrac{h^3}{a_2} \sigma^2 \\ \\ \text{Var } (\breve{z}_0 - z_0) = \text{Var } (\breve{x}_0 - x_0) \text{ tg}^2\varphi \end{cases}$$

Avec les mêmes valeurs numériques que ci-dessus :

$$\text{Var } (\breve{x}_0 - x_0) = 16 \frac{1}{\cos\varphi} \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 10^6$$

soit pour l'écart-type :

$$\sigma_{x_0} = \cos\varphi^{-1/2} \frac{a_2}{a_1} \times 4000 \text{ m}$$

Pour un milieu isotrope ($a_2 = a_1$), l'écart-type serait de 4 000 m : autrement dit, la localisation serait impossible. Avec $a_2/a_1 = 1/20$, cet écart-type est de ***200 m*** et tombe à ***100 m*** pour $a_2/a_1 = 1/40$: valeurs encore fortes, mais dont l'ordre de grandeur est plausible.

En ce qui concerne la profondeur, le terme en $\text{tg}^2\varphi$ qui apparaît dans la formule (19) montre que, pour un pendage faible, la précision sera meilleure que pour x_0. Par exemple, avec $\mathrm{tg}\,\varphi = 10\ \%$, les écarts-type seront de 20 m pour $a_2/a_1 = 1/20$ et de 10 m pour $a_2/a_1 = 1/40$. Pour $\mathrm{tg}\,\varphi = 0$ (miroir et stratification horizontaux) ils tombent à 0. Mais, dans ce cas, on n'a plus le droit de négliger le terme en $\bar{\varepsilon}$. La formule (16'), avec $\varphi = 0$, donne, en effet :

$$\mathrm{Var}\ \breve{z}_0 = h^2\ \mathrm{var}\ \bar{\varepsilon}$$

Avec les mêmes valeurs numériques, on trouve Var $z_0 = 800$, soit un écart-type de ***14 m***.

5. CAS D'UN MILIEU STRATIFIE

Les formules (19) supposent a_1 et a_2 petits devant h. Si a_1 est de l'ordre de h, on peut, évidemment, calculer numériquement les variances. Lorsque a_1 devient très grand devant h, on obtient un autre modèle, celui du milieu stratifié strict, soit :

$$\varepsilon = \varepsilon(z\cos\theta - x\sin\theta)$$

θ désignant le pendage de la stratification. Dans ce cas, un calcul facile donne :

$$h\overline{\varepsilon_1'} = -\frac{\sin\theta\cos\varphi}{\cos(\varphi-\theta)}\ (\varepsilon - \bar{\varepsilon})$$

(φ est le pendage du miroir). Pour h grand devant la portée intégrale, on trouve sans peine :

$$\mathrm{Var}(\varepsilon - \bar{\varepsilon}) = \mathrm{Var}\ \varepsilon = \sigma^2$$

et, compte tenu de (15'), les écarts-type des erreurs sont (dans l'hypothèse optimiste) :

$$(20)\qquad \begin{cases} \sigma_{x_0} = \dfrac{|\sin\theta|}{\cos\varphi\ \cos(\varphi-\theta)}\ \dfrac{h}{2}\ \sigma \\[2ex] \sigma_{z_0} = \dfrac{|\sin\theta\ \ \mathrm{tg}\ \varphi|}{\cos\varphi\ \cos(\varphi-\theta)}\ \dfrac{h}{2}\ \sigma \end{cases}$$

Avec, comme ci-dessus, $h = 2\ 000$ et $\sigma = 0{,}2$, $h\sigma/2$ vaut ***200 m***. Pour un miroir ***horizontal***, on trouve donc :

$$\sigma_{x_0} = \mathrm{tg}\theta \times 200\ \mathrm{m} \quad ; \quad \sigma_{z_0} = 0$$

et pour un miroir ***interstratifié***

$$\sigma_{x_0} = \mathrm{tg}\theta \times 200 \text{ m} \quad ; \quad \sigma_{z_0} = \mathrm{tg}^2\theta \times 200 \text{ m}$$

Pour $\theta = 45°$, on observe donc des valeurs du même ordre que dans le modèle précédent. Par contre, pour $\theta = 0$, ces écarts–type s'annulent (au premier ordre), conformément à une remarque déjà faite. Mais, dans le cas de la stratification horizontale ($\theta = 0$), les formules (16'), plus réalistes, donnent :

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_{x_0} &= |\mathrm{tg}\varphi| \sqrt{\mathrm{Ah}}\ \sigma \\ \sigma_{z_0} &= \frac{1}{\cos^2\varphi} \sqrt{\mathrm{Ah}}\ \sigma \end{aligned} \right.$$

Soit, numériquement (avec A = 10, h = 2 000, $\sigma = 0{,}2$) :

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_{x_0} &= |\mathrm{tg}\varphi| \times 28 \text{ m} \\ \sigma_{z_0} &= \frac{1}{\cos^2\varphi} \times 28 \text{ m} \end{aligned} \right.$$

donc, cette fois, des dizaines de mètres et non des centaines, en ce qui concerne la profondeur et, pour l'abscisse x_0, des valeurs encore plus faibles si le pendage φ du miroir est petit (3 m pour $\mathrm{tg}\,\varphi = 1/10$).

Formules exactes dans le cas d'une stratification horizontale

Dans le cas $\theta = 0$, *i.e.* $\lambda = \lambda(z)$, on peut obtenir des résultats beaucoup plus précis. Les dérivées de λ en x et y (à z dimensions) étant nulles, l'équation (3) donne deux intégrales premières : (loi de Descartes !)

$$\lambda\, u^1 = C_1 \quad ; \quad \lambda\, u^2 = C_2$$

et, en posant

$$C = (C_1)^2 + (C_2)^2$$

on déduit de (4) :

$$u_3 = \frac{\sqrt{\lambda - c}}{\lambda}$$

Le problème se résoud donc par quadrature. On trouve sans peine

$$
(21) \qquad \begin{cases} T(M_0, M_1) = \displaystyle\int_{z_0}^{z_1} \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda - c}}\, dz \qquad (C = C_1^2 + C_2^2) \\[2ex] x_1 - x_0 = C_1 \displaystyle\int_{z_0}^{z_1} \frac{dz}{\sqrt{\lambda - c}} \\[2ex] y_1 - y_0 = C_2 \displaystyle\int_{z_0}^{z_1} \frac{dz}{\sqrt{\lambda - c}} \end{cases}
$$

Si λ est connue, les deux dernières relations permettent le calcul de C, et la première donne alors le "temps" $T(M_0,M)$.

Au lieu de substituer directement ces résultats dans (7), pour obtenir les erreurs de localisation, observons que l'on a, d'après (6) :

$$
\frac{\partial T}{\partial x} = C_1 \quad ; \quad \frac{\partial T}{\partial y} = C_2
$$

Ainsi :

$$
T\frac{\partial T}{\partial x} = C_1 T \quad ; \quad T\frac{\partial T}{\partial y} = C_2 T
$$

Reportant ces résultats dans (7), et compte tenu de (21), il vient

$$
(22) \qquad \begin{cases} \breve{x}_0 - x_0 = C_1 \displaystyle\int_{z_0}^{z_1} \frac{1 - \bar{V}^2 \lambda}{\sqrt{\lambda - c}}\, dz \\[2ex] \breve{y}_0 - y_0 = C_2 \displaystyle\int_{z_0}^{z_1} \frac{1 - \bar{V}^2 \lambda}{\sqrt{\lambda - c}}\, dz \\[2ex] \breve{z}_0 - z_0 = z - z_0 - \bar{V} T (1 - \bar{V}^2 C)^{1/2} \end{cases}
$$

On voit donc qu'un calcul exact est ici facilement réalisable, si l'on se donne la fonction $\lambda(z)$, par exemple en simulant une fonction aléatoire.

Le milieu stratifié horizontal représentant un cas exceptionnellement favorable, et peu réaliste, j'indique pour terminer un cas d'intégrabilité un peu plus général.

Milieu stratifié

C'est le cas où λ est de la forme :

$$
(23) \qquad \lambda(x, y, z) = A_1(x) + A_2(y) + A_3(z)
$$

L'équation (3) des géodésiques donne ici :

$$\lambda \frac{d}{dt} \lambda\, u^i = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^i} A_i(x_i)$$

avec un second membre dépendant de la seule coordonnée x_i. Si l'on effectue sur le temps t le changement de variable

$$d\tau = \frac{dt}{\lambda}$$

il vient

$$\frac{dx^i}{d\tau} = \lambda\, u^i$$

et les équations (3) deviennent :

$$\frac{d^2x^i}{d\tau^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial\lambda}{\partial x^i}$$

Ce sont les équations de la mécanique classique en présence d'un potentiel $U = -\frac{1}{2}\lambda$ (ce qui souligne l'identité formelle des principes de Fermat et de Maupertuis, T représentant maintenant l'intégrale d'action, et la relation (6) se déduisant directement du formalisme d'Hamilton–Jacobi).

Si λ est de la forme (23), le théorème des forces vives donne alors, pour chaque coordonnée x_i :

$$\left(\frac{dx^i}{d\tau}\right)^2 = (\lambda\, u^i)^2 = A_i + C_i$$

avec des constantes C_i liées par la relation :

$$\sum C_i = 0$$

(puisque $\sum(\lambda\, u^i)^2 = \lambda$).

On aura donc (au signe près) :

$$\frac{dx}{\sqrt{A_1(x) - C_1}} = \frac{dy}{\sqrt{A_2 - C_2}} = \frac{dz}{\sqrt{A_3 - C_3}} = d\tau$$

Ces relations déterminent la trajectoire (qui coïncide avec la géodésique) et, celle–ci une fois connue, une dernière quadrature permet d'obtenir le temps T. On a donc là un modèle qui devrait se prêter fort bien à un traitement exhaustif par simulation.

REFERENCES

[1] A. Lichnerowicz (1950), Eléments de calcul tensoriel, Armand Colin, Paris.